WHISTO
PRÆLEC
PHYS. MAT

GULIELMI WHISTON

PRÆLECTIONES PHYSICO-MATHEMATICÆ

CANTABRIGIÆ

In Scholis Publicis Habitæ.

GULIELMI WHISTON

PRÆLECTIONES PHYSICO-MATHEMATICÆ

CANTABRIGIÆ

In Scholis Publicis Habitæ.

PRÆLECTIONES PHYSICO-MATHEMATICÆ CANTABRIGIÆ In Scholis Publicis Habitæ.

QUIBUS

Philosophia Illustrissimi *NEWTONI Mathematica*
Explicatius traditur, & facilius demonstratur:

COMETOGRAPHIA etiam HALLEIANA
Commentariolo illustratur.

A *GULIELMO WHISTON*, A.M.
Et Matheseωs Professore *Lucasiano*.

In Usum Juventutis Academicæ.

CANTABRIGIÆ,

Typis ACADEMICIS.

LONDINI, Impensis BENJ. TOOKE Bibliopolæ, juxta Medii Templi Portam, in vico vulgo vocato *Fleet-street*. A.D. M.DCC.X.

Prælectionum Index.

Philosophia Mathematica.

PRÆLECTIO I.

ABSOLUTIS olim pure Astronomicis, ad Operis nostri partem alteram, *Philosophiam* nempe Cl. Newtoni *Mathematicam* accedendum. In animo enim est Viri istius longe Maximi vestigia premere, & præcipua ejusdem nobilissimaque inventa Philosophica, faciliori methodo exponere; ut ita tandem Philosophia Newtoni plane divina pluribus, & vel in mathesi mediocriter versatis innotescat; nec intra privatos summorum Geometrarum parietes amplius delitescat. Prius autem quam quisquam egregia hæc & prorsus admiranda Philosophiæ Naturalis theoremata aggrediatur, præter aliqualem Geometriæ, Arithmeticæ & Astronomiæ notitiam, necessarium est omnino ut cum veras *Motuum leges*, tum imprimis curvarum linearum quas *Sectiones Conicas* appellamus, naturas & primarias proprietates non ignoret. Visum est ergo in eorum gratiam qui Prima tantum Geometriæ, Arithmeticæ & Astronomiæ Elementa perlegerunt, tam *Conicas Sectiones*, quam nuper demonstratas *Motuum leges* paucis attingere atque illustrare; ne forte quispiam harum rerum penitus ignarus in Cl. Newtoni inventis intelligendis frustra laboret. Quod enim ad primas motuum & collisionum leges attinet, in iis stabiliendis tam miseris erravit modis Cartesius, falsasque reflexionum Regulas orbi tam audacter tradidit, ut præjudiciis inde exortis tollendis vacare operæ pretium haud immerito videatur. Quod vero *Sectiones Conicas* spectat, Pauci adeo ex iis, inferioris nimirum subsellii Mathematicis, in quorum gratiam provinciam hanc suscepi, earum indolem aut proprietates capiunt, ut nisi hisce subvenire sit animus in cæteris laboriose tradendis operam plerumque atque oleum sim omnino perditurus. Etenim Cum Cl. Newtonus in eo totus sit, ut omnes Systematis nostri Planetas atque Cometas in aliqua sectionum conicarum moveri demonstret, perquam jucundum, quin & admodum necessarium erit curvarum harum generationes atque naturas contemplari paululum atque prælibare. Ut ergo, missâ aliâ præfandi circuitione, Elementa Conica paucis explicare, & ob oculos, omissis tamen hic loci eorundem demonstrationibus, ponere valeam, nonnulla huc spectantia e conicorum scriptoribus, præsertim vero è Clarissimo D. De la Hire mutuò accipere, & pro demonstratis hic loco assumere, non pigebit. Quanquam autem curvæ istæ lineæ per meras in plano delineationes & constructiones, uti fiet inferius, exhiberi possint, tamen quia Geometræ tam antiqui quam neoterici per Coni Sectiones easdem plerumque exposuerunt, & quia istæ curvæ nullo alio modo simul omnes & semel ostendi queant, atque etiam quia mutua singularum habitudo & cognatio quædam vix in altera explicandi forma adeò liquido innotescat, ob hasce, inquam, & hujusmodi rationes Curvarum harum naturas primo per Coni Sectiones, deinde verò per meras quoque in plano delineationes, sine Cono, ostendere operam dabo.

Si sumatur punctum quodvis extra planum, in quo descriptus est circulus, & per hoc punctum immobile recta linea ad utrasque partes puncti immobilis in infinitum producta peripheriæ circuli circumducatur, Superficies ortæ ex motu rectæ singulæ dicuntur *Superficies Conicæ*, Utræque vero infernæ & supernæ conjunctim dicuntur *Superficies ad verticem oppositæ:* Punctum immobile utrique superficiei commune dicitur *Vertex:* Circulus est *Basis*, & solidum a superficie conica & circulo basi comprehensum, & in infinitum, si placet, producendum, vocatur *Conus:* cui simile etiam & æquale ex

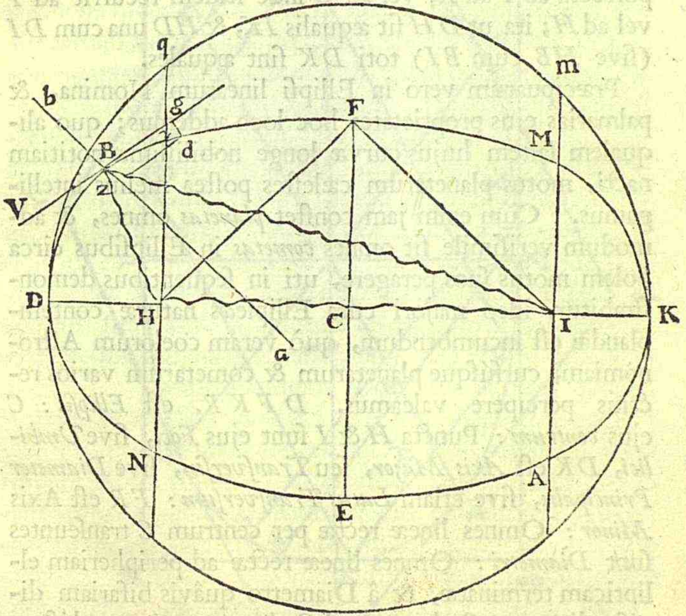
altera parte verticis generatur. Linea recta a Coni vertice ad circuli basis centrum *Axis Coni* dicitur; qui quidem Axis, si modo sit plano circuli basis perpendicularis, Conus *Rectus* dicitur; sin minùs Conus *Obliquus*, vel *Scalenus.* Jam verò si planum utcunque positum, modo non transeat per ipsum verticem, secet superficiem conicam, vel superficies ad verticem oppositas, planum illud *Planum Secans* audit, & aliud planum per verticem transiens, & plano secanti ubique parallelum *Planum Verticale* dicitur: Curva linea quam superficies conica in plano secante describit nuncupatur *Sectio Conica*; quæ quidem Sectio diversa est pro diversa plani secantis, in quo describitur, ad Conum inclinatione. Sin Planum secans utrasque conicas superficies ad verticem oppositas simul secet, orientur in Plano Secante binæ curvæ lineæ similes & æquales, quæ *Sectiones* vel *Hyperbolæ Oppositæ* dicuntur. Si itaque Planum Secans eo modo ad superficiem Conicam inclinetur, ut planum verticale, eidem parallelum, superficiem conicam, sive potius superficies ad verticem oppositas tangat, Curva Linea in plano secante descripta dicetur *Parabola.* Si verò ea sit plani secantis ad superficiem conicam inclinatio, ut planum verticale eidem parallelum sit extra conum, ita nempe ut non tangat superficiem conicam, Planum Secans utrumque coni latus secabit, & curva linea in plano secante genita dicetur *Ellipsis.* Sin ea demum sit plani secantis ad superficiem conicam inclinatio, ut planum verticale eidem parallelum conum secet, curva illa linea in plano secante descripta dicetur *Hyperbola.* & quia fieri non possit ut planum secans unam tantum superficiem secet, quin necesse est ut superficies utrasque ad verticem oppositas simul secet, binæ illæ curvæ lineæ similes & æquales *Hyperbolæ Oppositæ*, vel *Sectiones Oppositæ*, uti jamjam notavimus, appellabuntur. Si itaque Planum secans & verticale ita simul sibi semper parallelæs circumagantur,

ut

ut Verticale nunc baſin ſecet, nunc ſuperficiem Coni tangat, nunc extra conum ſit poſitum, liquet a ſuperficie conica varias *Hyperbolarum* ſpecies, *Parabolas* varias, varias demum *Ellipſium* ſpecies in plano ſecante delineatum iri. Liquet inſuper qualis & quam arcta ſit inter omnes haſce lineas cognatio. Si enim ſectio ſit baſi parallela, vel etiam in cono ſcaleno ſubcontrarie poſita, erit *Circulus:* qui itaque inter ſectiones conicas, utpote Ellipſium extrema, merito numeratur: unde mutata gradatim plani ſecantis inclinatione orientur infinitæ Ellipſium Species; donec tandem inclinatio evadat coni lateri parallela, ubi Ellipſium extrema evadit *Parabola*: Mutatâ verò ulterius tantillùm plani ſecantis inclinatione, exurget *Hyperbola*; cujus infinitæ erunt ſpecies, pro varia plani verticalis intra conum inclinatione. Ita ut Ellipſium ultimæ hinc in circulum, illinc in Parabolam; Parabola hinc in Ellipſin, illinc in Hyperbolam; & Hyperbolarum ultimæ hinc in Parabolam, illinc in lineam rectam deſinant. Verumenimvero quia difficilior forſitan non paucis apparitura ſit Conica hæc curvarum regularium explicatio, viſum eſt ſingularum naturas ex facili quadam in plano delineatione, cum Carteſio & aliis, qua poſſum perſpicuitate ulterius exponere.

Ut Ellipſeωs ergo generationem & indolem rite capiamus, ſint *H* & *I* duo puncta, vel clavi paxillive: his punctis circumponatur funiculus *BHI:* deinde immiſſo digito vel clavo funiculus æqualiter tenſus maneat, dum circumagatur digitus vel clavus a motûs incipientis puncto *B* donec in orbem rediens ad idem punctum *B* iterum revertatur. Deſcribetur hac puncti *B* revolutione curva linea, quam *Ellipſin* dicimus: quæ in eo tantum a circuli delineatione differt, quod Circulus circa centrum unicum, Ellipſis autem circa bina puncta tanquam centra deſcribitur; quæ ſi, evaneſcente punctorum diſtantia *HI*, in unum coeant, elliptica curva hæc evadet perfecte circularis. Quo autem major eſt pun-

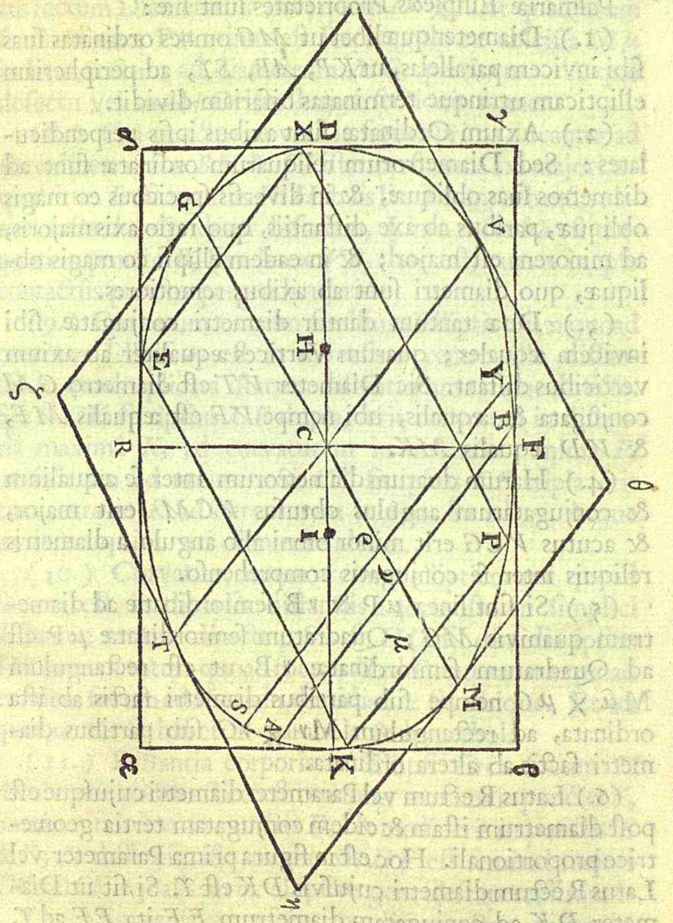
punctorum centralium diſtantia *HI*, manente nimirum funiculi longitudine, eo longius hæc figura a circulari recedet; & quo minor eſt diſtantia iſta, ad circularem accedet magis; ita ut pro diverſa diſtantiæ *HI*, ad funiculum *BHI*, vel ad lineam *DK* eidem funiculo æqualem, ratione diverſæ ellipſium ſpecies deſcribantur. At ſi funiculi longitudo eadem proportione minuatur vel augeatur quâ minuitur vel augetur punctorum centralium *H* & *I* diſtantia, deſcribentur quidem Ellipſes diverſæ, ſive diverſarum magnitudinum omnes, ſed quæ



ſimiles omnino ſunt futuræ, ſeu ejuſdem ſpeciei. Unde perſpicuum eſt Ellipſes non magnitudine tantum, ſed & ſpecie innumeras eſſe, & a circulo ad lineam rectam extendi: Sicut enim coeuntibus punctis *H* & *I* Ellipſis evadit circulus, ita ad diſtantiam ipſius funiculi dimidiam recedentibus, Ellipſis fit linea recta, coaleſcente utroque latere. Hinc etiam apparet unamquamque ellipseωn speciem non minùs distare ab alia qualibet, quàm distat omnium ultima hinc a circulo, illinc a rectâ lineâ. Patet quoque ex hac delineatione quod, si ex aliquo puncto pro arbitrio in peripheria elliptica electo, ut *B*, duas rectas ad duo puncta centralia agamus, hasce duas lineas *BH* & *BI* simul sumptas maximæ ejus diametro *DK* æquales fore, atque proinde earum summam semper dari. Quod sane ipsa constructio probat: Pars enim funiculi ab *I* ad *B* extensa, & inde ad *H* replicata eadem est omnino quæ porrecta ab *I* ad *K*, vel ad *D* inde itidem recurrit ad *I* vel ad *H*; ita ut *DH* sit æqualis *IK*, & *HD* una cum *DI* (sive *HB* cum *BI*) toti *DK* sint æquales.

Præcipuarum vero in Ellipsi linearum Nomina, & palmarias ejus proprietates hoc loco addemus; quo aliqualem saltem hujus curvæ longe nobilissimæ notitiam nacti, motus planetarum cælestes postea melius intelligamus. Cùm enim jam constet *planetas* omnes, & admodum verisimile sit omnes *cometas* in Ellipsibus circa Solem motus suos peragere, uti in sequentibus demonstrabitur, ideo majori cura Ellipseωs naturæ contemplandæ est incumbendum, quò veram coelorum Astronomiam, cursúsque planetarum & cometarum varios rectius percipere valeamus. *DFKR.* est *Ellipsis*: *C* ejus *centrum*: Puncta *H* & *I* sunt ejus *Foci*, sive *Umbilici*, *DK* est *Axis Major*, seu *Transversus*, sive *Diameter Principalis*, sive etiam *Latus Transversum*: *FR* est Axis *Minor*: Omnes lineæ rectæ per centrum *C* transeuntes sunt *Diametri*: Omnes lineæ rectæ ad peripheriam ellipticam terminatæ, & â Diametro quâvis bifariam divisæ dicuntur *Ordinatæ*, vel *Ordinatim applicatæ* ad istam diametrum. Sic *MG* per centrum transiens est *Diameter*, & *PK* ab eadem bifariam divisa ejusdem *Ordinata* vel *Ordinatim applicata*. Pars Diametri cujusque inter ejus verticem & ordinatam intercepta ut $M\mu$ dicitur ejus *Abscissa*: Linea a Diametri vertice ipsius ordina-

dinatis parallelωs ducta, ut $\nu\theta$ est Ellipseωs in isto vertice *Tangens*: Diameter alterius Diametri ordinatis parallela ejusdem dicitur *Diameter Conjugata*, & ordinatas



suas priori diametro parallelas habet. Sic diametri *GM* & *VT* sunt sibi invicem Conjugatæ, & ordinata *PK* dia-

diametro VT, & ordinata KE diametro GM eſt parallela. Ordinata per focorum utrumvis ad axem majorem MA in figura prima dicitur *Latus Rectum* Principale, vel *Parameter* Axis majoris.

Palmariæ Ellipſeωs Proprietates ſunt hæ:

(1.) Diameter quælibet ut MG omnes ordinatas ſuas ſibi invicem parallelas, ut KP, AB, ST, ad peripheriam ellipticam utrinque terminatas bifariam dividit.

(2.) Axium Ordinatæ ſunt axibus ipſis perpendiculares: Sed Diametrorum reliquarum ordinatæ ſunt ad diametros ſuas obliquæ, & in diverſis ſpeciebus eo magis obliquæ, paribus ab axe diſtantiis, quo ratio axis majoris, ad minorem eſt major; & in eadem ellipſi eo magis obliquæ, quo diametri ſunt ab axibus remotiores.

(3.) Duæ tantum dantur diametri conjugatæ ſibi invicem æquales; quarum Vertices æqualiter ab axium verticibus diſtant. Sic Diameter VT eſt diametro GM conjugata & æqualis, ubi nempe VF eſt æqualis MF, & VD æqualis MK.

(4.) Harum duarum diametrorum inter ſe æqualium & conjugatarum angulus obtuſus VCM erit major, & acutus VCG erit minor omni alio angulo a diametris reliquis inter ſe conjugatis comprehenſo.

(5.) Si ſint lineæ μP & νB ſemiordinatæ ad diametrum quamvis MG; Quadratum ſemiordinatæ μP eſt ad Quadratum ſemiordinatæ νB ut eſt rectangulum M$\mu \times \mu G$ nempe ſub partibus diametri factis ab iſta ordinata, ad rectangulum M$\nu \times \nu G$ ſub partibus diametri factis ab altera ordinata.

(6.) Latus Rectum vel Parameter diametri cujuſque eſt poſt diametrum iſtam & eidem conjugatam tertia geometrice proportionali. Hoc eſt in figura prima Parameter vel Latus Rectum diametri cujuſvis DK eſt Y. Si ſit ut Diameter DK ad conjugatam diametrum EF ita EF ad Y. Unde AM Ordinata per focum, lateri recto principali, ut prius, æqualis, eſt poſt Axem majorem & minorem tertia

tertia proportionalis. Axes enim ſunt diametrorum inter ſe conjugatarum primariæ.

(7.) Quadratum ſemiordinatæ cujuſvis ut MI in prima figura minus eſt Rectangulo ex abſciſſa quavis ut IK in Latus rectum Diametri ſuæ, ſive quam $IK \times Y$. Et quadratum ſemiordinatæ Pμ minus eſt Rectangulo ex abſciſſa Mμ in latus rectum ad diametrum MG, pertinens. A quo defectu vel ἔλλειψις Oritur hujus ſectionis nomen.

(8.) Si a puncto quovis B in figura prima ducantur ad focos lineæ rectæ BH & BI iſtarum ſumma axi majori æquabitur. Et ſi angulus IBH ab iis lineis comprehenſus a linea recta ba dividatur bifariam, Linea recta ba eſt tangenti in puncto B, ſive lineæ VB, hoc eſt, curvæ in ipſo contactûs puncto perpendicularis.

(9.) Curvatura arcuum ſimilium Ellipticorum quoad centrum Ellipſeωs eſt in diverſis a centro illo diſtantiis in quadruplicata iſtarum diſtantiarum ratione directe. Sic ſi CK ſit ipſius CF dupla, erit curvatura in diſtantiâ maximâ K, ad curvaturam in diſtantia minima F, ut ſedecim ad unum. Si CK ſit ipſius CF tripla erit curvatura in K ad curvaturam in F ut 81 ad 1: Atque ita in reliquis; uti olim oſtendetur.

(10.) Curvatura autem arcuum ellipticorum quoad focum eſt in diverſis diſtantiis a foco iſto in ſimplici diſtantiæ ratione directe; Sic ſi HD ſit dimidia ipſius HK erit curvatura quoad focum H ad D, curvaturæ quoad eundem focum ad K etiam dimidia; & ſic ubique. Et ita quoque res ſe habet in parabola & hyperbola.

(11.) Diſtantia corporis in Ellipſi circa focum H revolventis ab iſto foco eſt omnium maxima in puncto K, omnium minima in puncto D, & mediocris in punctis E & F; & diſtantia iſta mediocris HF eſt ſemiaxi majori DC vel CK æqualis: ut ex ellipſeωs geneſi eſt apertiſſimum.

(12.) Subtenſa evaneſcens anguli contactus, diſtantiæ a foco parallela, ad æquale a diſtantia iſta intervallum perpendiculare, in eadem Ellipſi, quin & Parabola & Hy-

Hyperbola semper manet data sive invariata. Sic si dZ semper detur, erit & gd in distantia infinite parva semper data.

(13.) Area Ellipseωs est ad aream circuli circumscripti ut axis minor ad majorem; & ita sunt inter se partes correspondentes quælibet ut: MIK, mIK; & Ordinatæ ad axem majorem ut MI dividuntur a peripheria elliptica ut M in eadem semper ratione; ita ut MI sit ad mI in eadem ratione data, nempe, in ratione axis minoris ad majorem. Neque aliter de circulo Ellipsi inscripto est ratiocinandum.

(14) Parallelogramma omnia circa diametros Ellipseωs conjugatas descripta, & Ellipsin comprehendentia sunt ubique æqualia. Sic Parallelogrammum $\alpha\beta\gamma\delta$ est æquale Parallelogrammo $\varepsilon\zeta\eta\theta$: & sic ubique.

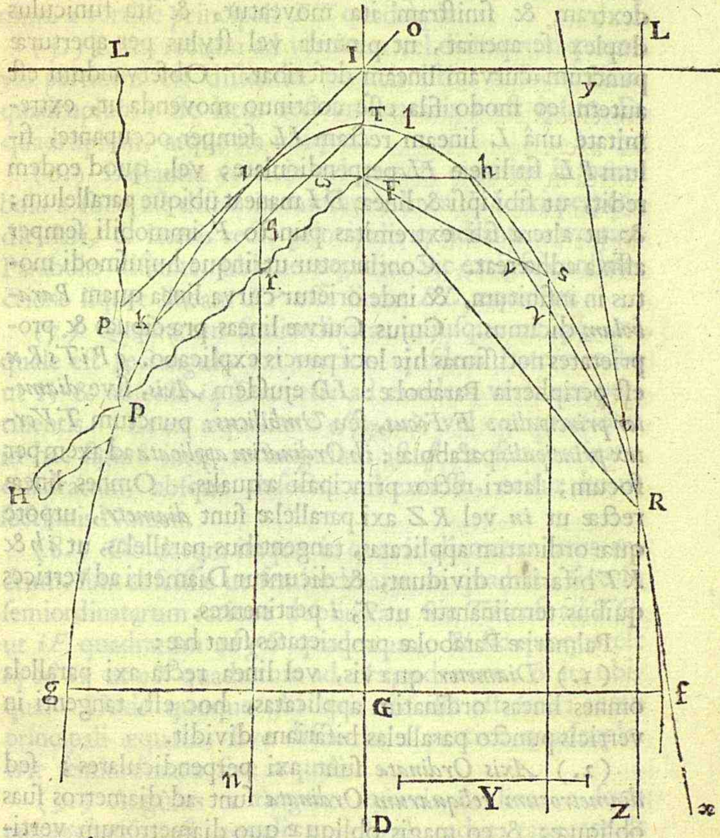
(15.) Si linea recta per focorum alterum semper transiens ita moveatur ut area elliptica ab eadem descripta sit tempori proportionalis, motus angularis lineæ rectæ ab altero foco ad priorem in curva ducta erit fere æquabilis. Sic sane in delineatione Ellipseωs superius allata, si ita lineæ HB motus angularis esset temperatus, ut pro reciprocâ distantiæ ratione acceleratus vel retardatus aream DHB tempori proportionalem descripsisset, Motus angularis KIB circa focum alterum I esset fere tempori proportionalis, & proinde sine notabili acceleratione vel retardatione tantum non æquabilis; hoc est ubi Ellipsis a Circulo non admodum recedit.

Feb. 7. $170\frac{3}{4}$.

II.

UT jam ab Ellipsi ad Parabolam transeamus, Sit DI linea recta infinita; eique sit etiam linea recta infinita IL perpendicularis. Accepto jam in linea DI puncto quovis ut F, divisáque bifariam linea FI in puncto T, Punctum illud T erit *Vertex principalis* figuræ

guræ, & descriptionis initium. Capiatur filum duplex PH, hoc est, filum vel funis ex filis vel funiculis binis;



æquali juxta se tensione positis, conflatus: utriusque funiculi extremitas punctis F & I affigatur eâ lege, ut funiculus uterque, ex quibus funis integer componitur, in partes duas distinctus, & hac illac æqualiter extensus, lineam FI exacte adæquent; ita ut filorum partitio vel vertex ipsi puncto medio T directe superemineat, punctumque T proinde ipsi filorum partitioni vel aperturæ

turæ ſubſit. His ita præparatis, Deſcriptoris manus, quæ fili partem integram tenet, hac illac verſus partes dextram & ſiniſtram ita moveatur, & ita funiculus duplex ſe aperiat, ut pinnula vel ſtylus per aperturæ punctum curvam lineam deſcribat. Obſervandum eſt autem eo modo fila eſſe continuo movenda ut, extremitate unâ L lineam rectam IL ſemper occupante, filum PL ſit lineæ IL perpendiculare; vel, quod eodem redit, ut ſibi ipſi & lineæ DI maneat ubique parallelum; & ut altera fili extremitas puncto F immobili ſemper affixa adhæreat. Continuetur utrinque hujuſmodi motus in infinitum, & inde orietur curva linea quam *Parabolam* dicimus. Cujus Curvæ lineas præcipuas & proprietates notiſſimas hic loci paucis explicabo. $gPiTsRx$ eſt peripheria Parabolæ: ID ejuſdem *Axis*, ſive *diameter principalis*: F *Focus*, ſeu *Umbilicus*: punctum T *Vertex principalis* parabolæ: ih *Ordinatim applicata* ad axem per focum; lateri recto principali æqualis. Omnes lineæ rectæ ut in vel RZ axi parallelæ ſunt *diametri*, utpote quæ ordinatim applicatas, tangentibus parallelas, ut ih & KT bifariam dividunt, & dicuntur Diametri ad vertices quibus terminantur ut T, i pertinentes.

Palmariæ Parabolæ proprietates ſunt hæ:

(1.) *Diameter* quævis, vel linea recta axi parallela omnes lineas ordinatim applicatas, hoc eſt, tangenti in verticis puncto parallelas bifariam dividit.

(2.) *Axis Ordinatæ* ſunt axi perpendiculares; ſed *diametrorum reliquarum Ordinatæ* ſunt ad diametros ſuas obliquæ; & eo magis obliquæ quo diametrorum vertices a vertice Parabolæ primario magis diſtant.

(3.) *Latus Rectum* vel *Parameter* ad diametrum quamvis pertinens, eſt poſt abſciſſam quamvis & ſemiordinatam ſuam tertia geometrice proportionalis: Hoc eſt, Latus rectum diametri in vel verticis i eſt Y ſi ſit ut abſciſſa iq, ad ſemiordinatam qk, ita ſemiordinata illa qk, ad Y.

(4.) La-

(4.) *Latus rectum principale*, ſive ad axem pertinens eſt Ordinatæ per focum ih æqualis; & eſt diſtantiæ minimæ a vertice principali FT quadrupla.

(5.) Latus rectum ad verticem vel diametrum quamvis pertinens eſt diſtantiæ verticis iſtius a foco etiam quadruplum: ſic latus rectum verticis s eſt ipſius Fs quadruplum, atque ita ubique.

(6.) Diſtantia verticis vel puncti cujuſvis in parabola a foco eſt diſtantiæ minimæ a linea LL axi perpendiculari, & lateris recti principalis quadrante a vertice Parabolæ diſtante, ubique æqualis. Sic ex ipſa conſtructione liquet lineam FP eſſe lineæ PL æqualem.

(7.) Quadratum ſemiordinatæ cujuſque ut qk, æquale eſt rectangulo ex verticis ejuſdem Latere recto ut Y, & abſciſſa iq Diametri ad eundem verticem pertinentis. Et ex æqualitate παραβολῆς vel comparationis in hac figurâ inter rectangulum iſtud & ſemiordinatæ quadratum, abſque defectu vel exceſſu, oritur hujus ſectionis Nomen.

(8.) Ob datum itaque in quavis diametro latus rectum, ſunt abſciſſæ ut ſemiordinatarum quadrata, ſive in ſemiordinatarum ratione duplicata: Sic TF, eſt ad TG, ut iF quadratum ad gG quadratum; & ſic quoque eſt iq ad ir ut qT quadratum ad rl quadratum; & ita ubique. Unde quoque ubi axis abſciſſa eſt lateri recto principali æqualis, ſive diſtantiæ a vertice quadrupla, erit ſemiordinatæ ſuæ æqualis.

(9.) Angulus a tangente quavis & linea a foco comprehenſus eſt æqualis angulo ab eadem tangente & diametro quavis, vel etiam axe comprehenſo. Sic anguli IiF & pin ſunt æquales. Unde ſane, quod obiter eſt notandum, Omnes lucis radii in partem ſuperficiei a convolutione parabolæ circa axem genitæ concavam axi parallelos incidentes a ſuperficie iſta paraboloide in focum F reflectentur, & ardorem vehementiſſimum generabunt: a quâ quidem proprietate *foci* nomen figuræ hu-

hujus umbilicus meruit: & idem nomen ſimilibus punctis in Hyperbola & ellipſi communicavit.

(10.) Parabola, ſicut & Hyperbola, ſpatium non claudit, ſed in infinitum protenditur.

(11.) Curva Parabolica ad parallelismum cum diametris ſuis ſemper magis & magis in infinitum tendit; ſed ad eundem pertingere nunquam poteſt.

(12.) Si duæ parabolæ eodem axe & vertice principali deſcribantur, erunt axi communi ordinatæ in data ratione a parabolis reſectæ; & areæ ab iiſdem axe, ordinata, & curvis comprehenſa erunt in eadem data ratione ad invicem.

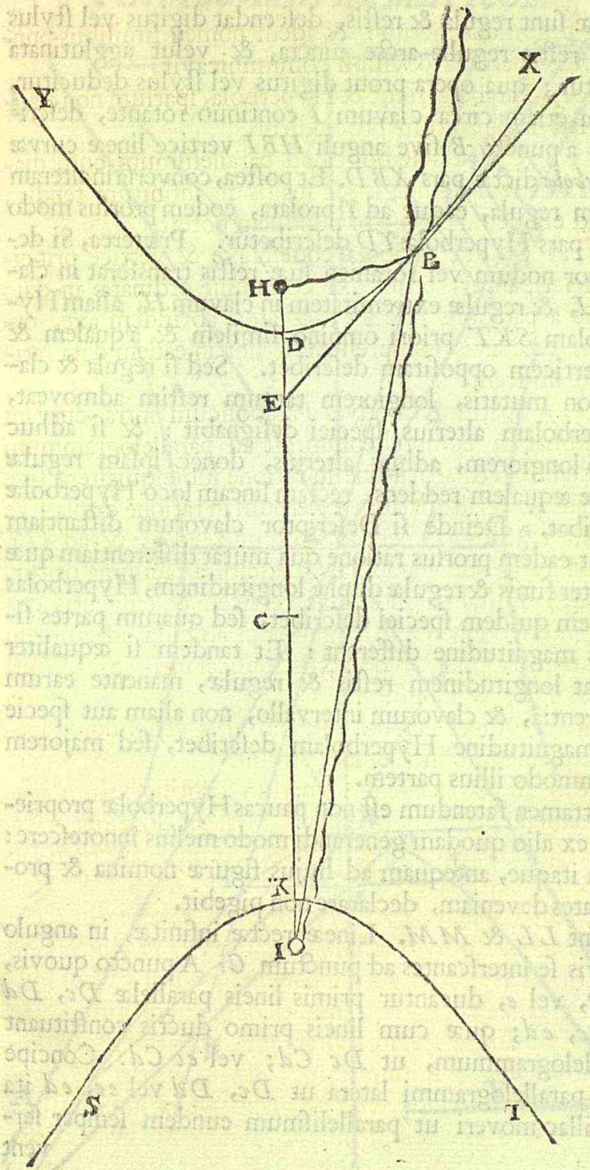
(13.) Spatium quodvis Parabolicum intra curvam & ordinatam comprehenſum eſt ad parallelogrammum ex eadem baſi & altitudine in ratione ſubſeſquialtera ſive ut 2 ad 3. & ad ſpatium externum in ratione dupla ſive ut 2 ad 1. Sic *qiT* eſt ad *qiI* ut 2 ad 3. & ad *iIT* ut 2 ad 1. Unde Parabolæ Quadratura facillima oritur.

(14.) Diſtantia inter axis verticem & tangentis cujuſvis interſectionem eſt æqualis axis abſciſſæ ad ejuſdem ordinatam ex puncto contactûs applicatam. Sic *TI* eſt æqualis *TF*; & ita ubique.

(15.) Omnes Parabolæ ſunt ſimiles vel ejuſdem ſpeciei; quemadmodum omnes circuli.

(16.) Si per occurſum duarum contingentium agatur diameter. Hæc diameter biſariam dividet conjungentem tactus. Quæ Parabolæ proprietas etiam Ellipſi & Hyperbolæ eſt applicanda.

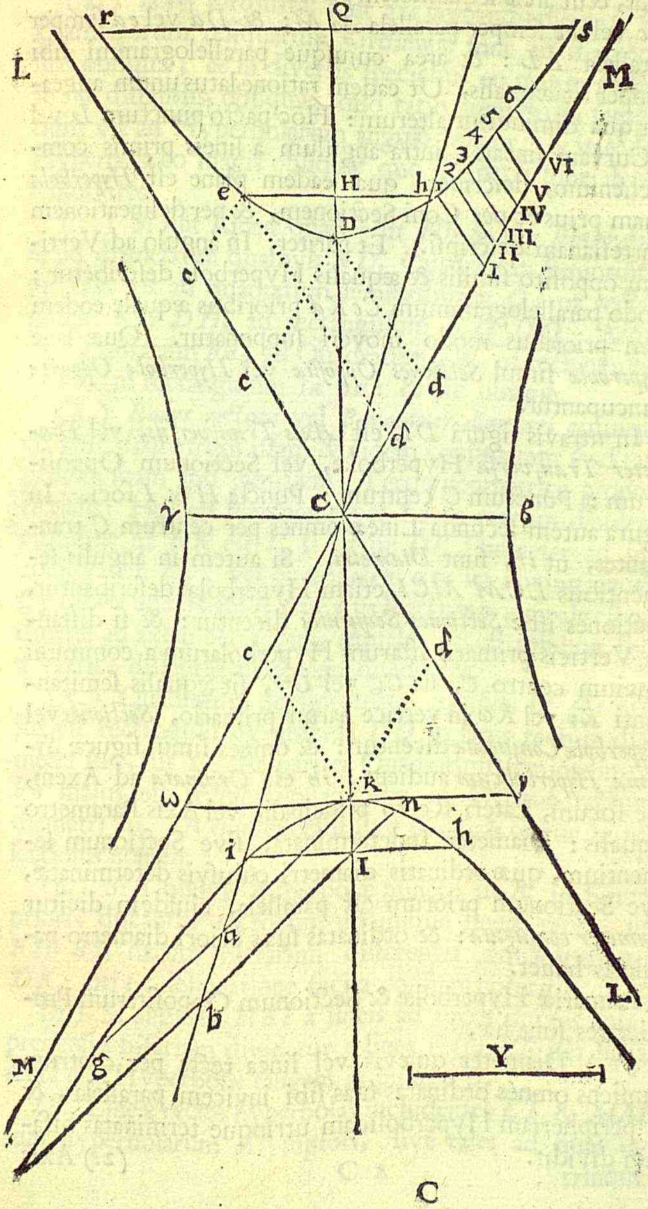
Ut jam a Parabola ad Hyperbolam tranſeamus: Sit Regula vel baculus *IB* ſatis longus, ſint *I* & *H* puncta centralia, focis Ellipſeωs correſpondentia, quibus clavi inſigantur: Annexâ jam extremitati longi baculi vel regulæ reſti baculo duplo breviori, altera ejus extremitas perforetur, & ita clavo *I* immittatur; nodus autem vel foramen in altera reſtis extremitate clavo alteri immittatur: Poſito jam digito aut ſtylo in puncto *B*, ubi mutuo junctæ



junctæ sunt regula & restis, descendat digitus vel stylus dum restis regulæ arcte juncta, & velut agglutinata teneatur; qua opera prout digitus vel stylus deducitur, regula etiam circa clavum *I* continuo rotante, describetur a puncto *B* sive anguli *HBI* vertice lineæ curvæ *Hyperbolæ* dictæ pars *XBD*. Et postea, conversa in alteram partem regula, eaque ad *Y* prolata, eodem prorsus modo altera pars Hyperbolæ *YD* describetur. Præterea, Si descriptor nodum vel foramen suæ restis transferat in clavum *I*, & regulæ extremitatem in clavum *H*, aliam Hyperbolam *SKT* priori omnino similem & æqualem & ad verticem oppositam describet. Sed si regula & clavis non mutatis, longiorem tantum restim admoveat, Hyperbolam alterius speciei designabit: & si adhuc paulo longiorem, adhuc alterius, donec ipsam regulæ duplæ æqualem reddens, rectam lineam loco Hyperbolæ describat. Deinde si Descriptor clavorum distantiam mutet eadem prorsus ratione qua mutat differentiam quæ est inter funis & regulæ duplæ longitudinem, Hyperbolas ejusdem quidem speciei describet, sed quarum partes similes magnitudine different: Et tandem si æqualiter augeat longitudinem restis & regulæ, manente earum differentiâ, & clavorum intervallo, non aliam aut specie aut magnitudine Hyperbolam describet, sed majorem solummodo illius partem.

Attamen fatendum est non paucas Hyperbolæ proprietates ex alio quodam generandi modo melius innotescere: Eum itaque, antequam ad hujus figuræ nomina & proprietates deveniam, declarare non pigebit.

Sint *LL* & *MM*. Lineæ rectæ infinitæ, in angulo quovis se interscantes ad punctum *C*: A puncto quovis, ut *D*, vel *e*, ducantur primis lineis parallelæ *Dc*, *Dd* vel *ec*, *ed*; quæ cum lineis primo ductis constituant parallelogrammum, ut *Dc Cd*; vel *ec Cd*: Concipe bina parallelogrammi latera ut *Dc*, *Dd* vel *ec*, *ed* ita hac illac moveri ut parallelismum eundem semper servent



vent, &ut areæ æqualitatem pariter servent; hoc est, esto Dc vel ec semper parallela MM; & Dd vel ed semper parallela LL: & area cujusque parallelogrammi sibi semper sit æqualis, Ut eadem ratione latus unum augeatur qua diminuitur alterum: Hoc pacto punctum D vel e Curvam lineam, intra angulum a lineis primis comprehensum, describet; quæ eadem plane est *Hyperbola* quam prius & per Coni Sectionem, & per delineationem Cartesianam descripsi. Et pariter, In angulo ad Verticem opposito similis & æqualis Hyperbola describetur; modo parallelogrammum $CcKd$ prioribus æquale eodem cum prioribus modo moveri supponatur. Quæ sane *Hyperbolæ* simul *Sectiones Oppositæ* vel *Hyperbolæ Oppositæ* nuncupantur.

In utravis figurâ DK est *Axis Transversus*, vel *Diameter Transversa* Hyperbolæ, vel Sectionum Oppositarum: Punctum C centrum: Puncta H & I foci. In figura autem secunda Lineæ omnes per centrum C transeuntes, ut ih, sunt *Diametri*. Si autem in angulis sequentibus LCM MCL etiam Hyperbolæ describantur, Sectiones istæ *Sectiones Sequentes* dicentur: & si distantia Verticis primarii istarum Hyperbolarum a communi omnium centro C, ut $C\zeta$ vel $C\gamma$, sit æqualis semitangenti $K\nu$ vel $K\omega$ in vertice harum primario, *Sectiones* vel *Hyperbolæ Conjugatæ* dicentur: & omnes simul figuræ *Systema Hyperbolicum* audient: ih est *Ordinata* ad Axem, per focum, Lateri Recto principali, vel Axis Parametro æqualis: Diameter Indeterminata, sive Sectionum sequentium, quæ ordinatis diametri cujusvis determinatæ, sive Sectionum priorum est parallela, ejusdem dicitur *diameter conjugata*: & ordinatas suas priori diametro parallelas habet.

Palmariæ Hyperbolæ & Sectionum Oppositarum Proprietates sunt hæ,

(1.) Diameter quævis vel linea recta per centrum transiens omnes ordinatas suas sibi invicem parallelas, & ad peripheriam Hyperbolicam utrinque terminatas bifariam dividit.

(2.) Axis Ordinatæ sunt axi perpendiculares; Sed Diametrorum reliquarum Ordinatæ sunt ad diametros suas obliquæ; & in diversis speciebus eo magis, paribus ab axe distantiis, obliquæ, quo ratio angulorum sequentium est ad Hyperbolarum angulos major; & in eadem Hyperbola eo magis obliquæ quo diametri sunt ab axe remotiores.

(3.) Si sint Lineæ quævis ut Hh & Qs *semiordinatæ* ad diametrum quamvis KD, Quadratum semiordinatæ Hh, est ad quadratum semiordinatæ Qs ut rectangulum $KH\ DH$, ad rectangulum $KQ\ DQ$: Atque ita Quadratum bn, ad Quadratum aK, ut rectangulum $ib\ hb$, ad rectangulum $ia\ ha$: & sic ubique.

(4.) *Latus rectum* vel *Parameter diametri* cujusque est post diametrum istam & eidem conjugatam (vel tangentem suam ipsi æqualem) Tertia geometrice proportionalis: Hoc est Parameter vel Latus rectum diametri cujusque ut DK est Y, si sit ut DK Diameter ad sibi conjugatam $\zeta\gamma$, vel ei æqualem $\omega\nu$, ita conjugata ista $\zeta\gamma$ vel $\omega\nu$ ad tertiam Y. Et Latus Rectum principale est ordinatæ ad axem per focum æquale, & est minimæ foci a vertice distantiæ plusquam quadrupla.

(5.) Quadratum Semiordinatæ cujusvis ut Qr majus est rectangulo ex abscissa DQ in latus rectum diametri suæ, ut Y: Et pariter Quadratum semiordinatæ bn majus est rectangulo abscissæ ib in latus rectum diametri hi. A quo excessu sive ὑπερβολῆς oritur hujus sectionis nomen.

(6.) Si a quovis hyperbolæ puncto ut B, in figura priori, ducantur ad focum utrumque lineæ rectæ, ut BH BI, harum rectarum differentia æquabitur axi DK; uti ex delineatione facile constare poterit.

(7.) Si angulus HBI a lineis ad focos ductus comprehensus bifariam dividatur a linea recta EB ista linea recta erit Hyperbolæ tangens in puncto B.

(8.) Lineæ rectæ hyperbolas includentes LL & MM sunt hyperbolarum Asymptoti, sive tales ad quas utrinque magis magiſque accedit Curva, ſed eas nunquam poſſit attingere, vel nunquam cum iiſdem coincidere.

(9) Variæ ſunt Hyperbolarum ſpecies pro varia anguli aſymptotis comprehenſi *LCM* magnitudine: Manente vero iſto angulo ſpecies hyperbolarum manebit, ſed pro magnitudine parallelogrammi deſcribentis variæ hyperbolæ magnitudine diverſæ orientur: Si vero angulus ab aſymptotis comprehenſus ſit rectus, Hyperbola dicetur æquilatera, vel rectangula, & Latera recta omnium diametrorum erunt diametris ſuis (ut fit in circulo) ubique æqualia: & hyperbolarum eodem axe deſcriptarum, in variis aſymptotorum angulis, lineæ rectæ axi perpendiculares erunt in proportione data ab omnibus reſectæ, & ſpatia pariter a rectis ſeu ordinatis, axe producto, & curvis incluſa in eadem ratione data.

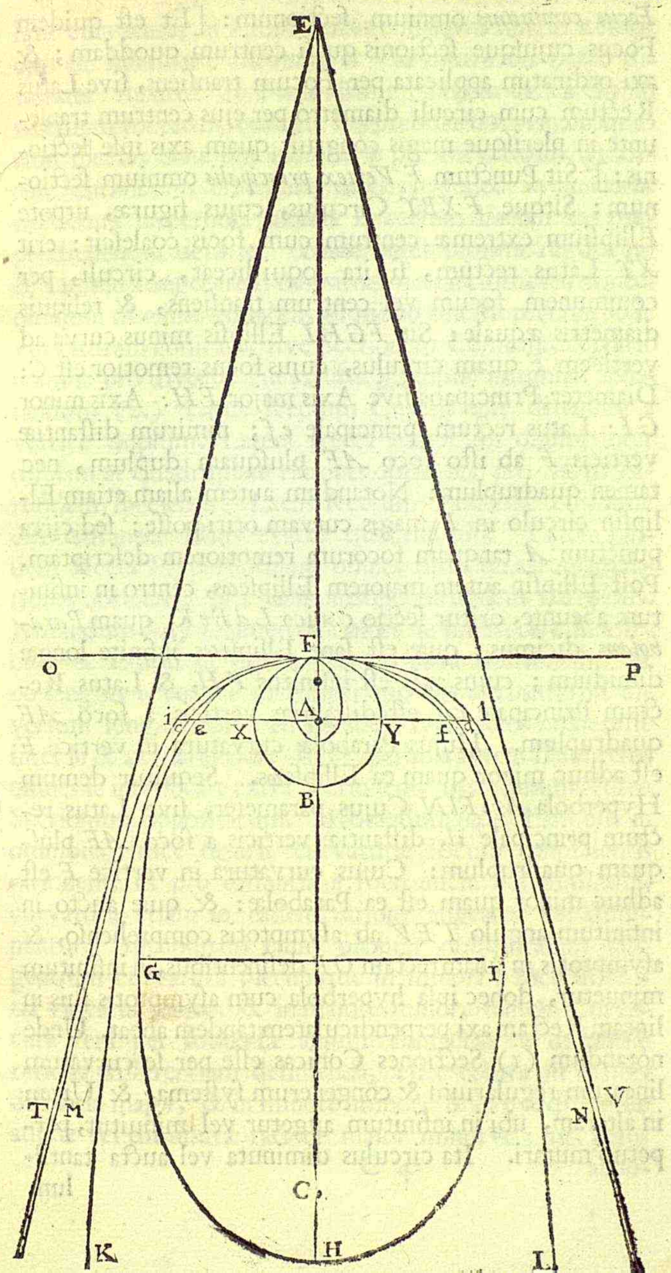
(10.) Si diſtantiæ ab hyperbolæ centro in aſymptoto accipiantur in ratione geometrica; ita ut CI CII CIII CIV CV CVI ſint continue proportionales geometrice; & ab iſtis punctis ducantur alteri aſymptoto parallelæ lineæ I 1 II 2 III 3 IV 4 V 5 VI 6: erunt ſpatia I 2 II 3 III 4 IV 5 V 6 inter ſe æqualia. Atque adeo ſi Aſymptotos iſta *CM* ſecundum rationem numerorum omnium, naturali ſerie ſe invicem ſuperantium diviſa ſupponatur, erunt ſpatia iſta numerorum omnium Logarithmis proportionalia.

Feb. 14. 170$\frac{3}{4}$.

III.

EXpoſitis jam ſigillatim lineis curvis quas Sectiones Conicas vocamus, Videamus paulo quid ex mutuâ omnium comparatione elucebit, & quænam ſit inter ſingulas cognatio, qualis differentia & habitudo mutua, paucis conſideremus.

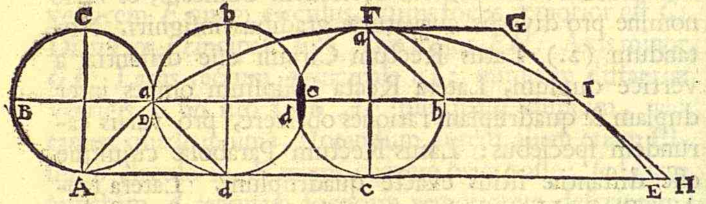
Sit ergo *A* punctum, circuli *FXBY centrum*, & *Focus*



Focus communis omnium sectionum: [Et est quidem Focus cujusque sectionis quasi centrum quoddam; & axi ordinatim applicata per Focum transiens, sive Latus Rectum cum circuli diametro per ejus centrum transeunte in plerisque magis congruit quam axis ipse sectionis:] Sit Punctum *F* *Vertex principalis* omnium sectionum: Sitque *FXBY* Circulus, cujus figuræ, utpote Ellipsium extremæ centrum cum focis coalescit: erit *XY* Latus rectum, si ita loqui liceat, circuli, per communem focum vel centrum transiens, & reliquis diametris æquale: Sit *FGHI* Ellipsis minus curva ad verticem *F* quam circulus, cujus focus remotior est *C*: Diameter Principalis sive Axis major *FH*: Axis minor *GI*: Latus rectum principale *ef*; nimirum distantiæ verticis *F* ab isto foco *AF* plusquam duplum, nec tamen quadruplum: Notandum autem aliam etiam Ellipsin circulo in *F* magis curvam oriri posse; sed circa punctum *A* tanquam focorum remotiorem descriptam. Post Ellipsin autem majorem Ellipseωs, centro in infinitum abeunte, oritur sectio conica *LdFcK*, quam *Parabolam* dicimus; quæ est sane Ellipseωs infinite longæ dimidium; cujus axis est infinitus *FH*, & Latus Rectum Principale *cd* est distantiæ verticis a foco *AF* quadruplum. Hujus Parabolæ curvatura in vertice *F* est adhuc minor quam ea Ellipseωs. Sequitur demum Hyperbola *MiFlN* Cujus parameter, sive Latus rectum principale *il*, distantiæ verticis a foco *AF* plusquam quadruplum: Cujus curvatura in vertice *F* est adhuc minor quam est ea Parabolæ: & quæ aucto in infinitum angulo *TEV* ab asymptotis comprehenso, & asymptotis in unam rectam *OP* desinentibus, in infinitum minuetur, donec ipsa hyperbola cum asymptotis suis in lineam Rectam axi perpendicularem tandem abeat. Unde notandum (1) Sectiones Conicas esse per se curvarum linearum regularium & congenerum systema, & Unam in alteram, ubi in infinitum augetur vel minuitur, perpetuo mutari. Ita circulus diminuta vel aucta tantillum

lum curvatura, in Ellipsin abit; Ellipsis autem centro ejus in infinitum abeunte, & curvatura eo pacto diminuta vertitur in Parabolam: Cujus curvatura si tantillum mutetur, exurget Hyperbolarum prima, quarum species cum sint innumeræ per curvaturam gradatim diminutam emergent omnes, donec evanescente curvatura hyperbola ultima in rectam lineam axi perpendicularem desinat. Unde patet omnem regularem & circulo congenerem curvaturam a circulo ipso, figurâ omnium maxime æquabili, usque ad lineam rectam, esse curvaturam conicam, sive Sectionem Conicam, & vario nomine pro diversis curvaturæ gradibus insigniri. Notandum (2.) Latus Rectum Circuli esse distantiæ a vertice duplum, Latera Recta Ellipsium omnes inter duplam & quadruplam rationes obtinere, pro variis earundem speciebus: Latus Rectum Parabolæ cujusque esse distantiæ istius exacte quadruplum. Latera tandem Recta Hyperbolarum omnes ultra quadruplam rationes obtinere; pro variis nempe earundem speciebus. Notandum (3.) Diametros omnes se intersecare in Circulo & Ellipsi in figuræ Centro intra Sectionem; at eo longius a vertice in Ellipsi quo illa a circulo in diversum longius abit: In Parabola Diametros omnes esse inter se & axi parallelas: In Hyperbola autem Diametros omnes se intersecare extra Sectionem, in communi centro Sectionum oppositarum. Notandum (4.) Eam esse in omnibus hisce figuris curvaturæ focum respicientis rationem, ut pro distantiâ a foco aucta vel diminuta, curvatura etiam in eadem ratione augeatur vel diminuatur. Quanquam enim propter obliquitatem tangentium curvatura plerumque in minori a foco distantia videatur major, & in majore minor, tamen Curvatura vera per subtensæ anguli contactus a distantiæ ratione differentiam definienda, est e contra in majori distantia major, & in minore minor, & in ipsa distantiæ auctæ vel diminutæ ratione major minorve; uti prius annotavimus, & ut in ſequentibus plenius patebit. Atque hæc de Sectionibus Conicis.

Cum autem & lineæ Cycloidis dictæ uſus aliqualis futurus ſit, ejus deſcriptionem paucis etiam dabimus. Si ſuper recta linea *AE* provolvi concipiatur Rota ſive circulus *ABCD*. donec punctum ejus *A*, in quo dictam lineam tangit, eidem rurſus poſt revolutionem integram occurrat in *E*, Emetietur Circulus Genitor *ABCD* lineam *AE* peripheriæ ſuæ æqualem, punctum *A* vero motu ſuo compoſito deſcribet lineam Curvam *AFE*, quæ Trochoïdes ſive Cycloïs appellatur: Cu-



jus lineæ longitudo eſt diametri circuli genitoris quadrupla, & ſpatium Cycloidale, quod curva hæc & recta ſubtenſa *AE* comprehendunt, eſt areæ circuli genitoris triplum. Cujus pars quævis a vertice æſtimata, ut *FI*, eſt chordæ circuli *Fb* ubique dupla, cujus quoque tangens quævis ut *GIH* eſt eidem chordæ *Fb* ubique parallela.

Expoſitis jam Sectionum Conicarum, quin & Cycloidis natura, Generatione, & primariis affectionibus; Motuum Leges veras, tum vulgo notas, tum a Cl. Newtono primitus repertas trademus. Et in inventis Newtonianis ſive hic loci ſive deinceps proponendis, ipſiſſima viri maximi verba, ubi viſa ſunt per ſe clara ſatis & perſpicua, uſurpabimus; ita tamen ubique ut quæ obſcuriora videntur & difficiliora facilius explicare & demonſtrare, atque omnibus palam facile conemur.

DEFI-

DEFINITIONES.

(1.) CORPUS ſive Materia eſt ſubſtantia extenſa, ſolida, vel impenetrabilis, per ſe quidem ad motum vel quietem indifferens, iners, & paſſiva; Motus verò qualiſcunque, & figurarum formarumque omnium capax. Materiam ſubſtantiam *extenſam* dico, quod partem aliqualem ſpatii extenſi occupat: *ſolidam* vel *impenetrabilem* dico, non quod a ſpatio, vel forte a ſubſtantiis aliis incorporeis penetrari nequeat; ſed quod omni alii materiæ ſit impenetrabilis; & ideo rei *ſolidæ* nomen vel maxime mereatur: Materiam *ad motum vel quietem per ſe indifferentem* dico; non quod motum æque ac quietem rem plane negativam vel privativam exiſtimem, ſed quod corporis moti æque ac quieſcentis notio ſit pariter facilis atque familiaris: Materiam *per ſe inertem* dico atque *paſſivam*, quod nihil actionis vel ἐνεργείας vel αὐτοκινήσεως, aut in ejus natura aut affectibus unquam percipimus; quin e contra ex omnibus motuum phænomenis meram ejus inertiam ubique colligimus: *Motus vero qualiſcunque & figurarum formarumque omnium capacem* dico, quod quotidiana mundi phænomena, & experimenta infinita talem ejus indolem & naturam demonſtrant. Tempus, Spatium, Locum, & Motum, tanquam res omnibus notiſſimas vix opus eſt ut *definiamus:* Ad tollenda tamen præjudicia quædam, convenit cum Cl. Newtono quantitates haſce in *Abſolutas* & *Relativas*, *Veras* & *Apparentes*, *Mathematicas* & *Vulgares* diſtinguere, & ita quodammodo *deſcribere*; quod ordinis & methodi gratiâ ſequentibus definitionibus fiet.

(2.) Tempus Abſolutum, Verum, & Mathematicum eſt *Æterna & Æquabilis Duratio,* ex partibus ordine immutabili ſibi ſuccedentibus compoſita.

In ſe enim, & natura ſua æquabiliter fluit, abſque relatione ad externum quodvis. Nec enim pendet tem-

pus

pus absolutum a motu rerum, nedum a quiete; nec quidem ab earum existentia: Sive enim res quævis existat, sive non existat; sive res existens moveatur sive non moveatur, perinde est in hoc casu. Fluit Tempus æquabiliter, utcunque res quævis aliæ se habent.

(3.) Tempus Relativum, Apparens, & Vulgare est *Sensibilis* & externa quævis Durationis, sive per motum sive per methodos alias *Mensura*; sive accurata sit illa mensura, sive inæquabilis; quâ vulgus vice veri Temporis utitur; Ut Hora, Dies, Mensis, Annus. Mundi vel Systematis cujusvis a principio ad finem perseverantia, &c.

Tempus Absolutum a Relativo distinguitur in Astronomiâ per æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriori tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est ut nullus sit motus æquabilis quo tempus accurate mensuretur; Accelerari & Retardari possunt motus omnes; sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem certe est duratio vel perseverantia existentiæ rerum, sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli. Proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex iisdem colligitur per æquationem Astronomicam. In hoc enim incubuere Astronomi, ut ex inæqualibus corporum cœlestium motibus, motum circa aliquod centrum æquabilem reperiant; unde etiam durationem æquabiliter fluentem facilius & accuratius mensurent.

(4.) Spatium Absolutum, Verum, & Mathematicum est penetrabilis, indiscerpibilis, immobilis, sibi ubique similis, æterna, & infinita Extensio.

Nunquid hujusmodi Extensum a Corpore diversum reverà existat necne alia est quæstio: Hoc saltem ab omnibus sanis concedendum, hanc esse communem Spatii apud omnes notionem, atque adeo esse inter definitiones reponendum. Sicut enim Geometræ Circulum, Triangulum, Quadratum, &c. primo in limine definiunt; an autem extent vel exstare possint hujusmodi figuræ parum laborant; Ita Spatii aliqualis descriptio erat præmittenda, ne de verbis lis aliqua postmodum oriretur: Ut ita deinde nunquid hujusmodi spatium a materia distinctum revera existat commodius disputetur.

(5.) Spatium Relativum (quod & *Locus*, ut opinor, non raro dicitur) est spatii Absoluti Mensura, seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur.

Ut dimensio spatii subterranei, aerei, vel cœlestis, per situm suum ad Terram definita. Idem sunt spatium Absolutum & Relativum specie & magnitudine, sed non permanent Idem semper numero: hoc est, Si cubiculi cujusvis spatium contentum seu cavitatem designamus, quocunque moveatur cubiculum Cavitas seu spatium intra ejus parietes inclusum ejusdem semper erit naturæ, propter spatii naturam sibi ubique similarem; & ejusdem magnitudinis, propter datam continentis magnitudinem. Non vero idem semper manet spatium numero; Ex motu enim cubiculi mutabitur illud perpetuo. Eodem modo, Si terra motu annuo circa Solem revolvat, Spatium aeris nostri, quod relative & respectu terræ idem semper manet, hoc est, ejusdem est naturæ & quantitatis, nunc erit una pars spatii absoluti, in quam aer transit, nunc alia; & sic absolute & reipsa mutabitur perpetuo. Ut vero partium temporis Ordo est immutabilis, sic etiam est Ordo partium spatii: Moveantur hæc de locis suis, & movebuntur, ut ita dicamus, de se ipsis. Nam Tempora & Spatia sunt sui ipsorum, & rerum omnium quasi Loca: In tempore quoad ordinem successionis, in spatio quoad ordinem sitûs locantur universa: De illorum essentia est ut sint Loca; & Loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt itaque absoluta Loca, & solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus. Verùm, quoniam hæ partes,

tes ſpatii videri nequeant, & ab invicem per ſenſus noſtros diſtingui, earum vice adhibemus menſuras ſenſibiles; ex poſitionibus enim & diſtantiis rerum a corpore aliquo, quod ut immobile ſpectamus, definimus loca univerſa. Deinde etiam & omnes motus æſtimamus cum reſpectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iiſdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum abſolutorum relativis utimur: nec incommode in rebus humanis. In rebus autem Philoſophicis abſtrahendum eſt a ſenſibus. Fieri enim poteſt ut nullum reverà quieſcat corpus, ad quod loca motuſque hoc modo referantur.

(6.) Locus Abſolutus eſt pars Spatii abſoluti quam corpus occupat.

(7.) Locus Relativus eſt pars Spatii relativi quam corpus occupat. Dicimus Locum eſſe *Partem ſpatii*, non *Situm corporis*, vel Superficiem ambientem, uti nonnulli eum definierunt. Nam ſolidorum æqualium æqualia ſemper ſunt Loca; & eadem materiæ quantitas eandem ſemper Spatii quantitatem poſſidet; qualiſcunque ſit figuræ vel denſitatis. Ut ex. gr. ſphæræ & cubi ejuſdem magnitudinis abſolutæ æqualia erunt loca, quæ adimplent & adæquant, licet ſuperficies ambientes ob figurarum & proinde ſuperficierum diſſimilitudinem ſint inæquales; atque ita in omnibus. Motus etiam Totius idem eſt cum ſumma motuum omnium Partium; hoc eſt tranſlatio Totius de loco ſuo eadem eſt cum ſumma vel aggregato tranſlationum Partium omnium de locis ſuis: adeoque locus Totius idem cum ſumma locorum Partium; & propterea internus & in corpore toto. Situs verò proprie loquendo quantitatem non habent, nec majores & minores dicuntur, neque tam ſunt loca quam affectiones locorum.

(8.) Motus Abſolutus eſt Tranſlatio corporis vel ſubſtantiæ cujuſque de loco abſoluto, vel ſpatio immobili, in locum abſolutum, vel ſpatium aliud immobile.

(9.) Motus Relativus eſt Tranſlatio Corporis de loco relativo, vel ſpatio mobili, in locum relativum vel ſpa-

tium aliud mobile: Sive Tranſlatio corporis de vicinia corporum ambientium in viciniam aliorum; ſive demum Tranſlatio corporis de ſitu inter alia corpora proprio in alium ſitum.

Sic in navi quæ velis paſſis fertur Relativus corporis Locus eſt navis regio illa in qua corpus verſatur; ſeu cavitatis totius pars illa quam corpus adimplet, quæque adeo movetur una cum navi: Et Quies Relativa eſt permanſio corporis in eadem illa navis regione, vel parte cavitatis. At Quies Vera eſt perpanſio corporis in eadem parte ſpatii illius immoti in qua navis ipſa, una cum cavitate ſua, & contentis univerſis movetur. Unde ſi terra vere quieſceret, corpus quod relative quieſcat in navi, moveretur verè & abſolutè ea cum velocitate qua navis movebatur in terra.

Sin Terra quoque moveatur, Orietur verus & abſolutus corporis motus partim ex terræ motu vero in ſpatio immoto; partim ex relativis motibus, tum navis in terrâ, tum corporis in navi; Et ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in terrâ. Ut ſi terræ pars illa ubi navis verſatur moveatur verè in Orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in Occidentem cum velocitate partium 10; Nauta autem ambulet in navi Orientem verſus cum velocitatis parte una: Movebitur Nauta vere & abſolute in ſpatio immoto cum partibus velocitatis 10001 in Orientem, & relative in terra Occidentem verſus cum velocitatis partibus novem.

Feb. 28. $170\frac{3}{4}$.

IV.

DEfinitiones nonnullas Philoſophiæ Newtonianæ præmittendas nuperrime propoſuimus. Nunc autem Scholium Generale definitionum ultimam & penultimam ſpectans ſupperaddemus.

Scholium Generale. Diſtinguuntur Quies & Motus Abſoluti & Relativi ab invicem per eorum proprietates,

tates, causas, & effectus. Quietis Absolutæ proprietas est quod corpora verè quiescentia quiescunt inter se: Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus fixarum aut longe ultra quiescat absolute, sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris utrum horum aliquod ad longinquum illud corpus datam positionem servet, quies vera ex horum situ inter se definiri nequit. Motûs absoluti Proprietas est quod partes quæ datas servant positiones ad tota participant motus eorundem totorum: Nam gyrantium partes omnes conantur recedere de axe motûs, & progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum: Igitur motis corporibus ambientibus moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem e vicinia ambientium corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur: Debent corpora illa ambientia non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere: Alioquin Inclusa omnia præter translationem e vicinia ambientium participabunt etiam ambientium motus veros, & sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem inferiorem, vel ut cortex ad nucleum: moto autem cortice nucleus etiam absque translatione de vicinia corticis, ceu pars totius unà movetur. Præcedenti proprietati affinis est quod moto loco relativo moveatur unà locatum; adeoque corpus quod de loco moto movetur participat loci sui motum. Sic si quis in navi dum velis passis fertur huc illuc obambulet, motus respectu terræ vel litorum major est vel minor prout in eandem partem cum navi vel in partem contrariam tendit: Si vero consistat in certa navis parte, participat motum navis, & eadem cum eâ celeritate progreditur: Si in eandem atque navis partem tendat, quoad terram celerius quam navis ipsa movebitur; si in contrariam, tardius: Et ita de motu in ipsa terra, si terra moveatur,

tur, ratiocinari oportet. Igitur motus omnes qui de locis motis fiunt sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum; & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps usquedum perveniatur ad locum immotum; ut in exemplis supra memoratis patet. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: Et propterea motus hosce absolutos ad loca immota, relativos verò ad loca mobilia infra referemus. Loca autem immota non sunt nisi quæ omnes ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem, atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod immobile appellamus.

Causæ quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem sunt vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur nisi per vires in ipsum corpus motum impressas. Cum enim Materiæ pars quævis sit iners & merè passiva, sine vi aliunde impressâ moveri nequit, nec deturbari e statu suo potest sine vi aliqua quæ statum mutet. At motus relativi, quales solum agnoscit Cartesius, generari & mutari possunt absque viribus in corpora ipsa impressis. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in qua horum quies vel motus relativus consistit. Sic quidem ad motum fixarum stellarum relativum sufficit, secundum Cartesium, terram solum circumrotari; & ad terræ quietem sufficit quod in Vortice Solari delata easdem materiæ subtilis partes ambientes habeat, licet unà cum illis quotannis eclipticam perlustret, & circa Solem absolute moveatur. Rursus, Motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur: at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur, ut situs relativus conservetur, conservabitur etiam relatio, in qua motus relativus iste consistit. Ut si systema corporum modo quocunque inter se moveatur,

&

& vis æqualis in æquales systematis partes secundum lineas parallelas agat, licet vis ista motum verum cujusque partis reapse mutet, relativum tamen non mutabit: æqualiter enim & per lineas parallelas agendo situs & motus partium relativi inter se iisdem manebunt qui prius. Mutari igitur potest motus omnis relativus, ubi verus conservatur; motuum scilicet corporum aliorum mutatione; & conservari, ubi verus mutatur; ut in exemplo nuperrime allato videre est: & propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit.

Effectus quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem sunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ sunt: In vero autem & absoluto majores sunt vel minores pro quantitate motûs. Si pendeat situla a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, ita ut vasis fundum semper horizonti parallelum maneat, & axis motus sit eidem perpendicularis, donec filum vel funis a contorsione admodum rigescat; Dein impleatur aqua, & una cum aqua quiescat; Tum vi aliqua subitanea agatur motu contrario in orbem, uti prius; & filo se relaxante diutius perseveret in hoc motu; Superficies aquæ sub initio plana erit, & horizonti parallela, quemadmodum ante motum vasis: At postquam vi in aquam paulatim impressa effecit vas ut aqua etiam sensibiliter, ad instar vorticis, revolvi incipiat, recedet ipsa paulatim e medio, ascendetque ad latera vasis figuram concavam induens, ut experientia monstrabit; & incitatiore semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones æqualibus cum vase temporibus peragendo quiescat in eodem relative. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus. Licet enim recessio ab axe motus sit per se axi perpendicularis, cum tamen vas ibidem vim cohibeat, imprimetur in particulas proximas, & ubi datur locus evadet sensibilis: Et quoniam motus vere circularis major erit in particulis aquæ a centro remotissimis, utpote iis primo & potissimum a vase communicatus; propter

ter majores circulos celeritatemque majorem versus circumferentiam, partes remotiores a centro recedent magis: Ideoque Oritur iste aquæ ascensus ex motu vero circulari, & per conatum hunc recedendi a centro innotescit & mensuratur. Qui quidem motus verus circularis est hic loci motui relativo omninò contrarius. Initio enim, ubi maximus erat motus relativus in vase, quod immota penè aqua solum gyrabatur, & per consequens aqua ipsa contenta quoad vas celerrime in partem contrariam movebatur respective, sine vero motu; Tum sane temporis motus ille relativus nullum excitabat conatum recedendi ab axe: Aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat; & propterea motus illius circularis verus nondum sensibiliter inceperat: Postea vero simul ac aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum, perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relative: Igitur conatus iste non pendet a translatione aquæ respectu vasis ambientis, (dum illud solum reverà movetur, & motus tantum relativus aquæ immotæ exinde affingitur.) Et propterea motus circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus verè circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens: motus autem relativi pro variis ad varia corpora relationibus; situque, prout hoc vel illud respicit, diverso, innumeri sunt, & in omnes partes simul tendunt; atque relationum ad instar effectibus veris omninò destituuntur, nisi quatenus de vero illo & unicò motu participant. Unde & in systemate eorum qui cœlos nostros infra cœlos fixarum in orbem revolvi volunt, & planetas secum deferre, Planetæ & singulæ cœlorum partes, quæ relative quidem in cœlis suis proximis quiescunt, moventur verè: Mutant enim positiones suas ad invicem, ob diversas revolutionum periodos, secus quam

 fit

sit in vere quiescentibus; unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ, quas jamjam a veris distinximus, non sunt eæ ipsæ quantitates quarum nomina præ se ferunt; uti spatium intra cubiculi parietes contentum, stellarum motus diurnus, &c. sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco mensuratarum & verarum quantitatum utitur. At si ex usu sunt definiendæ verborum significationes, per nomina illa Temporis, Spatii, Loci, & Motûs, proprie intelligendæ sunt hæ mensuræ, & sermo erit insolens & pure mathematicus, si quantitates mensuratæ vel veræ hic subintelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis qui voces hasce de absolutis quantitatibus mensuratis ibi interpretantur, ut ii qui ex quiete terræ & motu Solis in Scripturis assignato de vero mundi systemate, contra evidentes Philosophiæ & Astronomiæ rationes, disputare solent; ut & ii, si qui ideo insaniant, qui eò quod *tempus non amplius futurum* prædictum fuerit, ideo & ipsam æternam durationem seu tempus absolutum in nihilum abiturum colligunt. Neque minus contaminant Mathesin & Philosophiam qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus corporum veros cognoscere & ab apparentibus actu discriminare, est quidem difficillimum; propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata: Nam suppetunt argumenta, partim ex motibus apparentibus, qui sunt motuum verorum differentiæ; partim ex viribus, quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo ad datam ab invicem distantiam, filo intercedente connexi, revolverentur, circa commune duorum gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motûs, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde, si vires quælibet æquales in alternas, hoc est, sibi e diametro oppositas, globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur; hoc est, si alterum in partem unam, alterum in contrariam simul impelleretur, ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motûs circularis innotesceret. Et inde tandem inveniri possent facies globorum, in quas vires imprimi deberent ut motus maxime augeretur, id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, iisque per consequens quæ sunt oppositæ & præcedunt, cognoscetur determinatio motûs. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motûs hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret sensibile & externum, quo cum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt stellæ fixæ in regionibus nostris; sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora utrum his an illis tribuendus esset motus, uti nos in Terra per motum quemvis stellarum fixarum apparentem determinare non possumus, num eæ vel terra ipsa revera moveatur: At si attenderetur ad filum, & inventum esset tensionem ejus illam ipsam esse quam motus globorum requireret, concludere liceret motum esse globorum; & tum demum, ex translatione globorum inter corpora determinationem hujus motus colligere. Cum enim ex tensione fili constaret motum istum esse vere globorum, & non corporum longinquorum; per ista corpora ut immota jure jam spectata facile determinabitur motus globorum, tum quoad velocitatem, tum quoad directionem. Et hac quidem ratione annuum telluris motum, utpote vi centripetæ in Solem exacte proportionalem, colligimus; & fixarum quietem ex annuo telluris motu facile quoque colligimus. Cognitis itaque telluris motu & fixarum quiete, facile est annui motûs velocitatem & directionem ex stellis fixis exinde deducere. Quo autem pacto mo-

motus veri ex eorum causis, effectibus, & differentiis apparentibus sunt colligendi; & contra, quo pacto ex motibus seu veris seu apparentibus eorum causæ & effectus colligendi sunt, fusius in sequentibus docebitur.

(10.) Quantitas materiæ est mensura ejusdem orta ex ipsius densitate & magnitudine conjunctim.

Aer duplo densior in duplo spatio quadruplus est. Et si vas cubicum aerem contineat, qui deinde in cubum minorem compressione reducatur, densitas in minore cubo, erit ad densitatem in majore, ut major cubus ad minorem; sive in ratione laterum cubicorum triplicata reciproce: distantiæque particularum aeris similium similiterque positarum erit in ipsa laterum cubicorum ratione reciproce. Idem intellige de nive & pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis; & par est ratio corporum omnium quæ per causas quascunque diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis hic nullam rationem habemus. Hanc autem materiæ quantitatem, ex densitate & magnitudine conjunctis æstimandam, sub nomine *corporis* vel *massæ* in sequentibus passim intelligimus. Innotescit ea per corporis cujusque pondus: æqualis enim hujusce materiæ quantitas, qualis demum cunque sit, æqualiter semper in terram gravitat, ponderique est ad amussim proportionalis; uti per experimenta pendulorum accuratissime instituta constat: prout in sequentibus docebitur. Unde sane, ut hoc obiter annotemus, certum est, aut nullum medium æthereum corporum poros permeare, aut saltem, si quod sit, cum nullatenus gravitet, nec corporum motui obstet, illud pari cum corpore vel materia priore censu haberi non debere; imo nec propriè loquendo corporis vel materiæ nomen mereri. Sed de his olim plura occurrent explicanda.

(11.) Quantitas motûs est mensura ejusdem orta ex velocitate & quantitate materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; adeóque in corpore duplo majore, æquali cum velocitate, duplus est; & duplâ cum velocitate quadruplus. Quantitas igitur materiæ est rectangulo densitatis in magnitudinem ductæ æqualis; & Quantitas motûs est rectangulo velocitatis in materiæ quantitatem ductæ æqualis. Unde sanè vires machinarum omnium facillime deducuntur: Nam ubicunque in machinarum æquilibrio corpus majus est, ibi corporis istius erit tantò minor celeritas; & ubi corpus minus est, ibi corporis istius tanto major erit celeritas; ita ut quantitas motûs ex corpore in velocitatem suam ducto sit semper utrinque æqualis; uti inferius pluribus dicetur.

(12.) Materiæ Vis insita est potentia resistendi qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum per lineam rectam.

Hæc vis proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi: per inertiam materiæ fit ut corpus omni de statu suo vel quiescendi, vel in motu semel incepto pergendi difficulter deturbetur: Unde etiam hæc vis insita nomine significantissimo *Vis Inertiæ* dici possit. Exercet verò Corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui, per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium ejus sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: *Resistentia*, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; *Impetus*, quatenus corpus idem vi resistentis obstaculi difficulter cedendo conatur statum ejus mutare. Resistentia quidem quiescentibus, & Impetus moventibus propriè loquendo tribuendus videtur; & Impetum quemcunque, ubi corporum alterum quiescit, ex moti corporis viribus positivis, potius quam ex quiescentis negativis lubentius deduxero.

(13.) Vis impressa est actio in corpus exercita ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione solâ, neque post actionem permanet in corpore: Perseverat enim corpus in statu omni

omni novo per solam vim inertiæ. Est autem Vis impressa diversarum originum; ut ex ictu, ex pressione, ex vi centripeta.

(14.) Vis centripeta est qua corpus versus punctum aliquod tanquam ad centrum trahitur, impellitur, vel utcunque tendit.

Hujus generis est gravitas, quâ corpus tendit ad centrum terræ; vis magnetica, qua ferrum petit centrum magnetis: Attractio vel Tensio fili ad lapidem in fundo circumactum retinendum. Ejusdem etiam generis est vis illa, quæcunque sit, quâ Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in curvis lineis revolvi coguntur. Est autem Vis Centripetæ Quantitas trium generum; *Vis Absoluta*, *Vis Acceleratrix*, & *Vis Motrix*.

(15.) Vis Centripetæ quantitas *Absoluta* est ejusdem mensura major vel minor pro efficaciâ causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu: Uti virtus magne- major in uno magnete, minor in alio; major in majori, cæteris paribus, minor in minori: attractio seu tensio fili major in gyratione majoris lapidis, minor in gyratione minoris; & major in ejusdem lapidis gyratione celeriori, minor in tardiori. Et more non absimili facile fuerit concipere gravitatem corporum in Solem paribus distantiis majorem esse posse quam in Terram aut Planetam quemvis, propter ingentem nimirum corporis solaris magnitudinem, uti deinceps explicabitur.

(16.) Vis centripetæ, centrum quodvis respicientis, quantitas *Acceleratrix* est ipsius mensura in diversis a centro distantiis, velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti virtus ejusdem magnetis (cujus proinde quantitas absoluta non mutatur) major in minori distantia, minor in majori: Vis gravitans in superficie telluris paulò major circa polos, & paulò minor circa æquatorem; uti inferius patebit: Major quoque in superficie terræ; in majoribus verò a centro distantiis multò minor; quemadmodum infra ostendetur. Vis autem hæc gravitatis Acceleratrix in æqualibus a centro telluris distantiis est undique eadem, propterea quod corpora omnia cadentia, gravia an levia, magna an parva, fluida an solida, sublatâ nempe aeris resistentiâ, æqualiter acceleret. Omnia enim corpora in tubis vacuis cadentia eadem spatia eodem tempore ubique descendunt: quod ipsum quoque ex corporum quorumcunque pendulorum in eodem circulo vel cycloide simul oscillantium motu clarissimè demonstratur.

(17.) Vis centripetæ quantitas *Motrix* est ipsius mensura proportionalis motui, quem dato tempore generat.

Uti pondus majus in majori corpore, minus in minore; inque corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc vis est corporis totius centripetentia, pressio, conatus, vel propensio in centrum; & corporis *Pondus* dicitur. Innotescit autem semper per vim ipsi contrariam & æqualem quâ descensus corporis impediri potest. Vis ergo centripeta *Absoluta* centralis cujusque corporis est major aut minor, prout corpus centrale est majus aut minus, aut saltem magis aut minus potens & efficax: Vis *Acceleratrix* est ea ipsa vis perpetuo decrescens crescente distantia, & crescens decrescente distantia: Vis vero *Motrix*, seu ipsum Pondus, oritur ex vi acceleratrice in corpus ducta. Unde, data vi centripeta absoluta, erit in dato corpore vis motrix, ut vis acceleratrix; & data vi acceleratrice ut Corpus. Hasce autem virium quantitates brevitatis causa nominare licet vires *Motrices*, *Acceleratrices*, & *Absolutas*; & distinctionis gratia referre ad corpora, ad corporum loca, & ad centrum virium; nimirum, vim *motricem* ad corpus, tanquam conatum & propensionem totius in centrum, ex conatibus & propensionibus omnium partium compositum: & vim *acceleratricem* ad locum corporis, tanquam efficaciam quandam de centro per loca singula in circuitu diffusam ad movenda corpora, quæ in ipsis sunt; & vim *absolutam* ad centrum vel corpus centrale, tanquam causa aliqua præditum, sine qua vires

vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; ſive cauſa illa ſit corpus illud centrale, (quale eſt Magnes in centro vis Magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis,) ſive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus ſaltem eſt hic conceptus, & nobis impræſentiarum ſufficiens: Nam virium cauſas & ſedes phyſicas jam non expendimus. Eſt igitur Vis acceleratrix ad vim motricem, ut celeritas ad motum: Oritur enim quantitas motûs ex celeritate ducta in quantitatem materiæ; & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejuſdem materiæ: Nam ſumma actionum vis acceleratricis in ſingulas corporis particulas eſt vis motrix totius: Unde juxta ſuperficiem terræ, ubi gravitas acceleratrix, ſeu vis gravitans in corporibus univerſis eadem eſt, gravitas motrix ſeu pondus eſt ut corpus: At ſi in regiones aſcendatur, ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque ſemper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus, ubi gravitas acceleratrix duplo minor eſt, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel ſextuplo minus. Porro impulſus & attractiones eodem ſenſu acceleratrices & motrices nominamus. Voces autem attractionis, impulſûs, vel propenſionis cujuſcunque in centrum indifferenter & pro ſe mutuò promiſcuè uſurpamus; Has vires non phyſicè ſed mathematicè tantum conſiderando. Unde Caveat Lector, ne per hujuſmodi voces cogitet nos ſpeciem vel modum actionis, cauſamve aut rationem phyſicam alicubi definire; vel centris, quæ ſunt puncta mathematica, vires verè & phyſicè tribuere; ſi fortè aut centra trahere, aut vires centrorum eſſe dixerimus. Hactenus Definitiones Philoſophiæ Newtonianæ præmittendas exhibuimus: *Axiomata*, ſive *Motuum Leges* in terminum proximum differemus.

Feb. 28. 170$\frac{3}{4}$.

Axio-

V.

Axiomata ſive Motuum Leges.

(1.) CORPUS omne perſeverat in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

Projectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentiâ aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorſum: Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari, niſi quatenus ab aere aut ab inæquabili ſuperficie, cui inſiſtit, retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius. Hæc quidem motûs regula, omnium maximè fundamentalis, eſt ſanè ex materiæ inerti & paſſiva natura evidentiſſima. Si quis enim corpus aliquod quieſcens ſine vi aliqua impreſſa moveri, aut corpus motum ſine vi aliqua reſiſtente momento temporis quieſcere ſupponeret, non ſine ſtupore illud & miraculi inſtar natura duce haberet; cum viribus externis ad motum ſive generandum ſive ſiſtendum opus eſſe non poſſit non exiſtimare.

(2.) Omnis motus per ſe eſt rectilinearis, ſive in plagam certam determinatus.

Hoc ex ipſa motûs natura ſequitur; cum motus ſine ejuſdem in plagam aliquam determinatione concipi nequeat: ſi autem ſemel in plagam aliquam directus intelligatur, perſeverabit, ex lege priore, corpus ſecundum eandem rectam moveri, donec vires impreſſæ ab iſta directione deturbent.

Si quando autem per curvam lineam corpus moveatur, neceſſe eſt ut curvatura iſta ex viribus extraneis perpetuo impreſſis oriatur; atque adeo ſimul ac vires illæ extraneæ ceſſant, corpus per curvam etiam moveri ceſſabit,

ſabit, & per rectam lineam, curvam in puncto virium ceſſantium ultimò tangentem, ſive ſecundum directionem ſuam ultimam rectilinearem, movebitur. Sic ſane in lapide a funda circumacto res ſe habet. Quamprimum enim lapis a funda liberatur, non pergit in circulo quem prius deſcripſerat, ſed per circuli tangentem abit: &, vi gravitatis cum vi projectili jam compoſita, lineam Parabolicam deſcribit; uti olim demonſtrabitur.

(3.) Omnia corpora in gyros acta conantur a centro motûs ſui recedere; & quò gyratio eſt celerior, eò magis ab iſto centro recedere conantur.

Cum enim Corpora per ſe tendant ad motum rectilinearem, ſive per curvarum, quas deſcribunt, tangentes; & cum omnes tangentium partes a centro motûs longius abſunt, quam partes curvarum, ad quas retrahuntur a viribus centripetis, perſpicuum eſt conatum iſtum ſecundum tangentes abeundi corpora ab iſto centro perpetuo retrahere, & eſſe conatui contrario, ſive vi centripetæ ſuſtinenti & æquipollenti ad amuſſim æqualem.

(4.) Mutatio motûs proportionalis eſt vi motrici impreſſæ; & fit ſecundum lineam rectam quâ vis illa imprimitur.

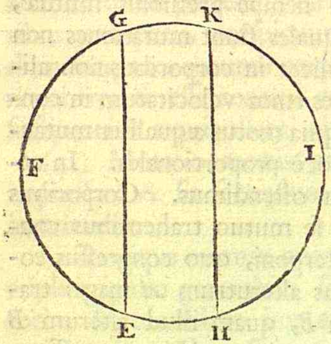
Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit; ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus, quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea moveatur, motui ejus vel conſpiranti additur, & velocitatem auget; vel contrario ſubducitur, & velocitatem minuit; vel obliquo obliquè adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſque determinationem componitur: Si itaque cum eo aliquantulum conſpiret, velocitatem aliquantulum adaugebit; ſi ei aliquantulum opponatur, eandem aliquantulum diminuet: ſin ei ad angulos rectos occurrat, velocitatem in linea prima ſpectatam nullatenus aut adaugebit, aut diminuet.

(5.) Acti-

(5.) Actioni contraria ſemper & æqualis eſt reactio: Hoc eſt corporum duorum actiones in ſe mutuo, ſive ſint impulſus, ſive attractiones, ſemper æquales ſunt, & in partes contrarias diriguntur.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premat, premitur & hujus digitus æqualiter à lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahat, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinque diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum; tantumque impediet progreſſum unius, quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in aliud impingens motum ejus vi ſua quomodocunque mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam, vi alterius, ob æqualitatem nempe preſſionis mutuæ, ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non *velocitatum*, ſed *motuum*; ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciprocè proportionales. In attractionibus rem ſic breviter oſtendimus. Corporibus duobus quibuſvis *A* & *B* ſe mutuo trahentibus concipe obſtaculum quodvis interponi, quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur verſus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis *A*, quam preſſione corporis *B*; proindéque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveri in directum in partes verſus *B*, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abire in infinitum; quod eſt abſurdum, & legi primæ contrarium. Nam per legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum; proindéque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Vel ſi nullum ad-

adsit obstaculum res eodem modo se habebit; nam motus fortior debiliorem in occursu vincet, & utrumque corpus in eandem partem, aucta semper celeritate, perget. Unde aut nulla in corporum systemate, ubi lex prima obtinet, quale est systema Solare, datur corporum attractio; quam tamen infra dari satis demonstrabimus; aut est mutua semper in partes contrarias, & utrinque æqualis. Rem tentavit Cl. Newtonus in Magnete & Ferro. Ubi hæc in vasculis propriis sese contingentibus seorsim posita in aqua stagnante juxta fluitabant, neutrum propellebat alterum, sed æqualitate attractionis utrinque sustinebant conatus in se mutuos, ac tandem in æquilibrio constituta quiescebant. Sic etiam Gravitas inter terram & ejus partes mutua est & æqualis. Si Globus terræ *HEFGKI* in partes duas inæquales per lineam *GE* dividatur, Gravitas partis *EGF* in terram reliquam æqualis erit gravitati terræ reliquæ in hanc partem: Id quod hocce Argumento convincitur. Nam concipe terram planis parallelis in partes tres *EGF HKI EGKH* secari; quarum *EGF* & *HKI* sibi mutuò æquales sint, & parti mediæ *EGKH* incumbant. Et manifestum erit quod pars media *EGKH* pondere proprio in neutram partium extremarum propendet, sed inter utramque in æquilibrio, ut ita dicamus, suspenditur, & quiescit. Pars autem extrema *HKI* toto suo pondere incumbit in partem mediam, & urget illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis qua summa partium *HKI* & *EGKH* tendit versus partem tertiam *EGF*, æqualis est ponderi partis *HKI* & *EGKH*, id est, ponderi partis tertiæ *EGF*. Igitur si terra plano quovis *EG* in partes duas *EGF*



EGI

EGI secetur, vis quâ pars major *EGI* tendit in partem minorem *EGF*, æqualis est vi quâ pars minor *EGF* tendit in majorem *EGI*; hoc est, pondera partium in se mutuo sunt æqualia; & nisi pondera illa æqualia essent, terra tota ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum. Quod, ut prius, est absurdum, & Legi primæ contrarium.

(6.) Si corporum duorum æqualium elaterii expertium, alterum motum alteri quiescenti occurrat, in occursu utraque cum dimidia moti corporis velocitate in eandem partem simul progredientur.

Corpus enim in motu positum in occursu eousque de motu suo alteri quiescenti communicabit, donec eâdem cum ipso celeritate abeat. Dum enim corporis in motu positi velocitas major est velocitate quiescentis, impellet ipsum, & ulterius accelerabit; quamprimum autem quiescens æquali velocitate abeat, ultra impellere non potest, sed unà comitabitur. Cum ergo corporis prioris motus in duo æqualia corpora jam divisus supponatur, necesse est ut velocitas utrique communis sit prioris dimidia.

(7.) Si corpora duo æqualia, elaterii expertia, eadem velocitate sibi mutuò directe occurrant, ambo post collisionem quiescent.

Quantum enim alterum progreditur, tantum ab altero repellitur; & æquales motûs quantitates in partes oppositas tendentes sese mutuo omnino adæquabunt, & se invicem tollent: unde cum nulla jam sit novi motus causa, corpora utraque omnino quiescent. Perit ergo motus in hoc casu, nec eadem ejusdem semper quantitas in mundo manet; quod voluit Cartesius.

(8.) Si duo corpora inæqualia, elaterii expertia, sibi mutuò eâ velocitate occurrant, ut quantùm corpus alterum magnitudine superet, tantùm ab altero celeritate vincatur; seu si velocitates sint corporibus reciprocæ, utraque post occursum, ut prius, quiescent.

Cum enim quantitates motus in partes contrarias directi

recti ſint in hoc caſu utrinque æquales, ſe mutuo ut prius omnino deſtruent, & peribit motus, ut in caſu priori.

(9.) Si corpus motum in quieſcens impingat (utraque autem elaterii expertia intelligantur) utcunque ſint mole & materiæ quantitate inæqualia, utraque poſt occurſum communi velocitate in eaſdem partes ferentur; ut in Lege ſexta; & velocitas communis tantùm minuetur, quantum corpora utraque ſimul ſumpta corpore prius moto ſunt majora. Cum enim motus univerſus prioris diſtributus jam in duo intelligatur, velocitas tantùm minuetur, quantùm materiæ movendæ quantitas augetur.

Corollarium. Datis itaque corporibus, dabitur unà & velocitatis moti corporis ante occurſum, ad communem velocitatem motorum poſt occurſum ratio. Nam ut Corpora utraque ſimul, ad Corpus motum, ita Corporis moti velocitas ante occurſum, ad communem duorum velocitatem poſt occurſum.

(10.) Si corpora duo, elaterii expertia, inæqualia, æquali autem velocitate in partes oppoſitas mota, ſibi mutuò occurrant, quantitas motûs poſt occurſum in utroque ſimul erit tantùm motuum priorum differentia. Quantitas enim motûs ex utravis parte minor æquali quantitati motus ex parte altera æquivalebit, eamque ut prius deſtruet: relinquetur itaque poſt occurſum ſola motuum differentia, tanquam unica motuum poſt occurſum cauſa. Atque idem erit caſus ac ſi corpus ubi major erat motûs quantitas cum iſta motuum differentia in alterum quieſcens impingat, & eodem calculo poſt occurſum æſtimanda.

(11.) Si corpora duo, elaterii expertia, æqualia, inæquali velocitate in eaſdem partes moveantur, poſt occurſum manebit eadem motûs quantitas vel ſumma; velocitas autem communis erit dimidia velocitatis prioris utriuſque ſimul ſumptæ.

Exceſſus enim velocitatis in utrumque corpus æqualiter diſtribuetur; & proinde utrumque corpus mediocri velocitate poſt occurſum ſimul abibit.

(12.) Si

(12.) Si duorum corporum, elaterii expertium, inæqualium, majus aſſequatur minus, communis velocitas poſt occurſum major erit dimidia ſumma velocitatum. Contra vero eveniet ſi corpus celerius motum altero ponatur minus: tum enim communis velocitas poſtea erit iſta dimidia ſumma minor.

Nam ſi corpora æqualia eſſent, communis velocitas poſt occurſum, ut jam vidimus, eſſet iſti dimidiæ ſummæ æqualis. Si ergo inæqualia ponantur, neceſſe eſt ut major minorve velocitatis quantitas pro celerioris corporis magnitudine aut parvitate oriatur.

Corollarium. Datis itaque utriuſque corporis velocitate & magnitudine ante occurſum, facile fuerit communem utriuſque velocitatem poſt occurſum calculo ubique indicare. Eſt enim ut Semiſſis Summæ corporum, ad corpus minus, ita Semiſſis Summæ motuum ad velocitatem communem poſt occurſum. Exempli gratia, ſit Corpus inſequens corporis præcedentis & magnitudine & velocitate duplum: erit ergo Semiſſis Summæ corporum corporis minoris ſeſquialtera, & Semiſſis Summæ motuum ad minoris motum ut $2\frac{1}{2}$ ad 1. Unde, per auream regulam, velocitas communis poſt occurſum, erit ad velocitatem minoris ante occurſum, ut $\frac{5}{3}$ vel $1\frac{2}{3}$ ad unitatem. Nam $1\frac{1}{2} : 1 :: 3 : 2 :: 2\frac{1}{2} : \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$. Si corpus inſequens ſit ad corpus præcedens ut 7 ad 3; & ſi velocitas corporis inſequentis ſit ad velocitatem præcedentis ut 13 ad 2. Erit Dimidium ſummæ corporum $= 5$. Corpus minus $= 3$. Motuum Summæ Dimidium $48\frac{1}{2}$. Ergo erit communis velocitas poſt occurſum, ad velocitatem minoris antea ut $29\frac{1}{10}$ ad 2. ~~ſive $14\frac{2}{3}$ ad 1.~~ Nam $5 : 3 :: 48\frac{1}{2} : 29\frac{1}{10}$. ~~$14\frac{2}{3}$~~

Scholium. Hæ ſunt veræ motuum Leges in corporibus aliquantulum cedentibus, quæ ſe non reſtituunt, ſeu nulla vi Elaſtica donantur; quæ forte perfecte duris, modo non ſint Elaſtica, etiam convenient. *Elaſticorum* autem corporum, quæ eadem vi ſe reſtituunt qua comprimuntur, quæque proinde *perfecte Elaſtica* dici debent, Re-

Regulæ seu leges motus sunt a prioribus plane diversæ; quas itaque seorsim tractare & exponere oportebit. Cum autem corporum horum collisiones, phænomena & difficiliora & insigniora exhibeant; & cum Vir summus Cl. Hugenius easdem tractatu peculiari posthumo exponere & demonstrare aggressus sit, neque tamen sine magnis ambagibus longâque rationum & figurarum pompa, pro antiquorum Geometrarum more, absolverit, Libet Elasticorum Corporum Leges motûs secundum Hugenii ordinem tradere, & ejusdem propositiones singulas breviori, &, ni fallor, magis naturali methodo demonstrare: ita ut vel ipsi Tyrones harum legum certitudinem & originem physicam aliquatenus intelligant. Esto itaque Corporum perfecte Elasticorum Lex motus prima & generalis.

(13.) Si Corpori perfecte elastico quiescenti aliud æquale corpus occurrat, post contactum hoc quidem quiescet; quiescenti verò acquiretur eadem quæ fuit in impellente celeritas. Corpus enim impellens motûs sui semissem impulsu directo, absque elaterii consideratione, quiescenti ex motûs lege 6ª, communicabit: & pari cum eodem passu incedere incipiet; & propter elaterium vi communicatæ par, motus semissem alium eidem communicabit; unde motus in integrum communicatus erit motui impellentis priori æqualis. Et cum necessum sit ut quantum impingens aut agendo aut reagendo, hoc est, aut mero impulsu, aut vi elastica in quiescens transferat tantum de motu suo amittat, sequitur corpus impellens amisso motu suo progressivo quiescere debere, dum corpus quiescens motum illius lucretur.

Coroll. (1.) Si Corpus majus in minus incurrat, non quiescet prius, sed solummodò tardius movebitur; & quiescens majorem velocitatem quidem, sed minorem motûs quantitatem, quam in impellente fuerat, lucrabitur.

Coroll. (2.) Si corpus minus in majus incurrat non quiescet prius, sed regredietur; & quiescens minorem velocitatem quidem, sed majorem motûs quantitatem, quam in impellente fuerat, lucrabitur.

Coroll. (3.) Si corpus in motu positum in corpora plura sibi contigua & quiescentia incurrat, omnia quiescent præter ultimum; quod pari, majori, minorive celeritate cum impellente movebitur, prout scilicet corpus impellens corpori ultimo sit æquale, majus, minusve. Hæc corollaria ex hac lege motus, sua quasi sponte sequuntur; nec proinde peculiari demonstratione admodum opus esse videtur.

(14.) Si corpora duo æqualia perfecte elastica inæquali celeritate lata se mutuo impellant, sive in partes easdem, sive in contrarias tendant, post contactum permutatis invicem celeritatibus ferentur. Nimirum si in partes easdem tendant, dempta utrinque celeritate utrique communi, relinquetur sola celeritatum differentia, tanquam unica mutationis in conflictu causa; & cum ex lege priori omnis ista velocitas tardiori communicari debeat, sequitur quod & corpus impingens excessu isto sit necessario multandum, & corpus tardius motum excessum istum sit lucraturum; hoc est, aliis quidem verbis sed eodem sensu, sequitur quod post contactum permutatis invicem celeritatibus moveri debeant. Neque Hæc Lex multo aliter in casu secundo, ubi corpora in partes diversas lata, & sibi contrarie incurrentia ponuntur; est demonstranda. Dempta enim utrinque velocitate utrique communi, quæ post conflictum in partes contrarias tendet, & velocitatem utriusque priorem non mutabit, restabit, ut prius, velocitatis differentia, tanquam unica mutandæ velocitatis causa: quæ itaque juxta legem priorem a velociore in tardius in integrum transferetur; unde ut prius, sequetur corpora etiamnum post contactum permutatis celeritatibus pergere debere.

(15.) Corpus quodcunque quamlibet magnum, a quocunque corpore quamlibet exiguo, & qualicunque celeritate impacto movetur. Hæc Lex motus est sane axioma per se manifestum, nec demonstrationis indigens.

(16.) Quo-

(16.) Quoties duo corpora perfecte elastica inter se colliduntur, eadem est mutuo respectu discedentibus celeritas quæ fuit appropinquantibus: Sive verbis aliis sensu eodem, eadem est utriusque *velocitas*, non *absoluta*, sed eadem *velocitas* discedendi *respectiva* quæ fuit appropinquandi. Continet quidem hæc lex præcipuum etiam reliquarum motuum legum fundamentum; & hac methodo demonstrabitur. De æqualibus corporibus liquet propositum ex lege penultima, jamjam demonstrata: manent enim eo in casu ipsæ celeritates veræ & absolutæ, permutatis tantum sedibus; atque adeo ut celeritas discedendi respectiva eadem sit quæ fuit appropinquandi est necessum. De inæqualibus res sic conficietur. Si corpus majus assequatur minus, aut quiescens, aut saltem tardius motum, communicabit quidem de motu suo corpori quiescenti, vel tardiori; sepositâ etiam elaterii consideratione; nec tamen quiescet: & dum inter communicandum una cum quiescente vel tardiori perget non cessabit & impulsu directo, & reactione elastica quiescens vel tardius illud corpus accelerare, donec eadem velocitate a se recedat qua prius motui suo obstiterat, & elaterium suum compresserat; hoc est, qua ipsum ad alterum appropinquarat. Hanc sane celeritatem corpus majus minori necessario imprimet; sed majorem imprimere nequit, (licet corpus minus per se sit majoris capax: quam primum enim corpus quiescens vel tardius motum velocitatis gradum impulsui sive velocitati respectivæ priori parem fuerit lucratum, effugiet illico; neque impulsum quemvis ulteriorem sustinebit aut morabitur. Si autem corpus minus assequatur majus, aut quiescens, aut tardius motum, fieri nequit ut corpus minus integrum velocitatis suæ excessum quiescenti vel tardiori imprimat: (illud enim eo tantum casu fit ubi corpora sunt æqualia, ut in lege 13ª & 14ª jam vidimus.) Perit autem inter communicandum motûs velocioris excessus, etiam sepositâ elaterii consideratione: Et dum eo pacto unà progrediuntur corpora, posterius in prius eousque reaget, donec eadem velocitate respectiva separentur, qua prius accesserant; Eatenus enim, nec ultra vires illæ elasticæ, impulsui pares, possunt; aut potius eatenus corpus minus reactionem patietur, nec ultra, prout in casu priori. In iis autem Corporibus quæ sibi mutuo inæquali utrumque velocitate occurrunt, demenda est utrinque velocitas utrique communis; utpote quæ velocitates *easdem* sed mutatis sedibus post conflictum generabit; tum autem relinquetur tantum velocitatum differentia, tanquam unica mutandæ velocitatis causa: quæ sane non cessabit & agendo & reagendo, corpora eadem celeritate respectiva a se invicem separare, qua prius accesserant. Rei cardo in eo ubique vertitur, ut Vires Elasticæ motui impresso ubique pares effectum suum integrum atque illibatum, nec ultra, ubique sortiantur. Quod aliter fieri non potest quam si velocitas recedendi respectiva, velocitati accedendi respectivæ ad amussim correspondeat.

(17.) Si duo corpora perfecte elastica eadem celeritate singula ad occursum revertantur, quâ ab impulsu resilierunt; singula post alterum impulsum eandem acquirent celeritatem quâ ferebantur ad occursum primum. Ob datam enim inter collidendum ictus vel conflictus magnitudinem, utpote velocitati respectivæ datæ parem, datur una rectangulum quoddam; cujus factores duo sunt distantiæ à puncto concursus, & primaria, & ea ad quam primo conflictu est reversum utrinque; si itaque rectangulum illud datum dividamus per distantiam primam tanquam *divisorem*, distantiam secundam, tanquam *quotum* obtinebimus: Sin per distantiam secundam, tanquam *divisorem*, dividamus, distantiam primam, tanquam *quotum* obtinebimus: & ita in perpetuum. Unde sequitur distantias istas dato tempore descriptas, sive velocitates accedendi & recedendi sibi mutuo respondere, & se invicem consequi.

 (18.) Cor-

(18.) Corporibus duobus ſibi mutuo occurrentibus, ſive elaſticis, ſive non elaſticis, non ſemper poſt impulſum eadem motus quantitas in utroque ſimul ſumpto conſervatur, quæ fuit ante; ſed vel augeri poteſt vel minui. Hanc motus legem, quæ contra Carteſium directe militat, è lege 7^a. prius deduximus, quoad corpora non elaſtica; & ex lege penultima de elaſticis etiam ſequitur. Cum enim motus quantitas ex celeritate in materiam ducta æſtimetur; & cum in corporibus utcunque inæqualibus, & inæquali celeritate motis, ita tamen res ſe habeat, ut velocitatum ſumma ſive velocitas reſpectiva maneat data, quantitas motus erit admodum inæqualis, prout corpus majus aut minus majorem velocitatis reſpectivæ integræ partem lucratur aut minorem; ut ex motuum calculo etiam mox inſtituendo clarius patebit.

(19.) Si corpus perfecte elaſticum majus minori quieſcenti occurrat, minorem ei velocitatem dabit quam duplam ſuæ. Cum enim poſt impulſum corpora eadem celeritate reſpectivâ a ſe invicem diſcedere debeant, qua ad invicem acceſſerant, hoc eſt in caſu præſenti, qua corpus majus ante impulſum motum eſſet; ſi Velocitas quieſcentis evaderet dupla velocitatis incurrentis, oporteret incurrens, poſt motum quieſcenti communicatum, eadem celeritate ſine ulla ejuſdem jactura pergere qua prius. Quod eſt abſurdum.

(20.) Si corpora duo perfecte elaſtica ſibi ex adverſo occurrant, quorum magnitudinibus celeritates contraria ratione reſpondeant, utrumque eadem qua acceſſit celeritate reſiliet. Cum enim Vires quæ ex mero corporum impulſu ſine elaterii conſideratione oriuntur, ſint utrinque æquales, ſe mutuo ex Lege 8^a ſubſtinebunt & deſtruent: Reſtabunt itaque ſolæ vires elaſticæ; quæ cum ſint utrinque & inter ſe, & motibus prioribus omnino æquales, æquales ex utraque parte motus generabunt. Atque adeo corpus utrumque eadem qua acceſſerat prius celeritate poſt occurſum reſiliet.

Scho-

Scholium. *Problema.* Datis corporibus duobus inæqualibus perfecte elaſticis ſibi directe occurrentibus, quorum utrumque, vel alterum tantum moveatur, dataque utriuſque celeritate, vel unius ſi alterum quieſcat, invenire celeritates quibus utraque poſt occurſum ferentur. Fiat nimirum ut Summa Corporum, ad duplum corporis ſecundi, ita celeritas accedendi reſpectiva data, ad celeritatem alteram. *Differentia* inter hanc ultimo repertam celeritatem, & celeritatem corporis primi ante impulſum, (vel uno caſu earum *ſumma* ubi nempe corpus primum in motu præcedit) dabit celeritatem corporis primi poſt occurſum: qua celeritate ex integra celeritate reſpectiva data ablata, reſidua erit celeritas ſecundi poſt occurſum. Regula autem hac methodo demonſtratur. Velocitas primi poſt occurſum erit velocitatis primi ante occurſum, & velocitatis integræ reſpectivæ differentia, ubi corpora æqualia ponuntur; ita ut ſumma corporum ſit duplo corpori ſecundo æqualis; ut ex lege 14. liquet. Patet itaque omnem differentiam, hoc eſt, motum corporis primi poſt occurſum, à differentia ſummæ corporum & dupli corporis ſecundi oriri, eidemque proinde eſſe proportionalem. Quod illud ipſum eſt quod ſupponit præſens analogia.

Ex. gr. Moveatur Corpus primum dextram verſus celeritate partium ſex, & ſecundum in partem contrariam celeritate partium quatuor; ſit etiam Corpus primum corporis ſecundi quadruplum: Erit igitur velocitas reſpectiva accedendi ante occurſum partium decem $6+4=10$; & Corporum ſumma erit partium 5: Erit ergo ut Summa Corporum $=5$ ad duplum corporis ſecundi $=2$. Ita Velocitas reſpectiva integra $=$ 10. ad $\frac{2\times 10}{5}=4$: Cujus velocitatis & velocitatis primi ante occurſum differentia $=2$. dabit velocitatem primi poſt occurſum. Unde celeritas ſecundi poſt occurſum erit partium 12. *Q.E.I.*

* Vid. Add. ad. calcem. p. 367.

 Sin

Sin corpus alterum quiescat, ejus celeritas post occursum ex analogia priori immediate innotescet. Nempe si corpus majus in exemplo priori immotum ponatur, motus ejus ex hac analogia invenietur immediate. Nam ut Summa Corporum $= 5$. ad duplum corporis secundi $= 2$. Ita velocitas respectiva integra $= 4$. ad velocitatem secundi post occursum $= \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5}$ sive $1\frac{3}{5}$. Differentia enim inter celeritatem primi ante occursum quippe nullam, & celeritatem hanc, erit ipsa celeritas primi post occursum, & per consequens velocitas secundi erit partium $\frac{12}{5}$ sive $2\frac{2}{5}$.

(21.) Celeritas quam corpus majus perfecte elasticum dat minori quiescenti perfecte elastico, ad eam quam simili velocitate minus imprimit quiescenti majori, eandem habet rationem quam majoris magnitudo ad minoris magnitudinem. Ob datam enim in utroque casu velocitatem respectivam, & datam etiam corporum summam erit calculus in utroque casu similis, *viz.* Ut Summa Corporum data, ad velocitatem respectivam datam; ita duplum corpus majus, vel duplum minus ad velocitatem quæsitam. Sunt ergo velocitates ut corpora. *Q. E. D.*

Scholium. Libet hic loci, corollarii vice, tria reliqua Cl. Hugenii Theoremata huc spectantia attexere, licet eorum demonstratio longior sit quam quæ hoc in loco afferri debeat: Tum quod per se nobilissima sint, tum quod ex calculo juxta problema nuper propositum administrato satis constare possint.

(1.) Duobus corporibus perfecte elasticis sibi mutuo occurrentibus id quod efficitur ducendo singulorum magnitudines in velocitatum suarum quadrata simul additum ante & post occursum corporum æquale invenitur; si videlicet & magnitudinum & velocitatum rationes in numeris lineisve ponantur.

(2.) Si quod corpus perfecte elasticum majori vel minori quiescenti obviam pergat, majorem ei celeritatem dabit per interpositum corpus mediæ magnitudinis perfecte elasticum itidem quiescens, quam si nullo intermedio ipsi impingatur: Maximam vero celeritatem tum conferet, quum corpus interpositum fuerit medium proportionale inter extrema.

(3.) Quo plura corpora perfecte elastica interponentur inter duo inæqualia perfecte elastica, quorum alterum quiescat, alterum moveatur, eo major motus quiescenti conciliari poterit: Maximus autem per unamquamque interpositorum multitudinem ita conferetur, si interposita cum extremis continuam geometrice proportionalium seriem constituant.

Notandum autem ex postremis duobus per Autoris calculum constare, Quod si corpora centum ex ordine dentur in proportione dupla, incipiatque motus a maximo, erit *celeritas* minimi ad celeritatem qua movebatur maximum proxime ea quæ 14.760.000.000 ad 1. Si vero a minimo motus incipiat, augebitur in universum *motus quantitas* secundum rationem proxime quæ 1. ad 4.677.000.000.000. Unde sane in casu priore mirandum *velocitatis*, in posteriore magis mirandum ipsius *quantitatis motus* augmentum consequitur.

Quæ autem (ut hoc tandem moneam obiter) Cl. Hugenius de omnibus corporibus, aut saltem de omnibus perfecte duris asseruit, nos tantum de omnibus perfecte elasticis, cum Cl. Wallisio & Newtono asseruimus & demonstravimus. Neque aliter certe aut intelligi aut affirmari debent. Motuum enim Leges quæ corporibus reliquis non elasticis congruunt, aliæ plane sunt plerumque, & ab hisce satis diversæ; prout ex ante dictis abunde constare potest: atque adeo cum elasticorum legibus sunt minime contaminandæ. Quæ autem corpora imperfecte elastica spectant, è Cl. Newtono in sequentibus tradentur. Sed Manum de tabula.

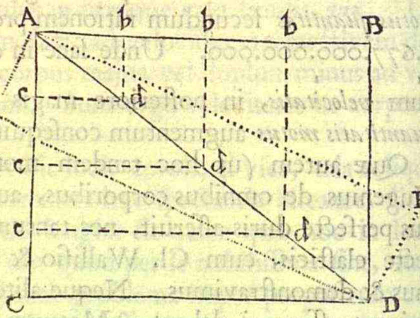
Maij 8. 1704.

VI.

MOTUUM Leges in corporum tum durorum tum elasticorum collisionibus observatas in prioribus absolvimus; restat jam ut reliquas motuum leges Philosophiæ Newtonianæ Præsternendas aggrediamur. Esto itaque,

(22.) Corpus omne viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describet, quo latera separatis.

Si corpus *A*, dato tempore, vi sola *AB*, secundum lineam *AB* impressâ ab *A* ad *B*. Et vi sola *AC*. secundum lineam *AC* impressa, ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque simul impressa corpus eodem dato tempore feretur ab *A* per lineam diagonalem ad *D*. Nam quoniam vires hæ simul impressæ non sunt sibi invicem oppositæ, se mutuo nequaquam tollent, sed motum quendam inter utrumque quasi intermedium generabunt. Etenim cum vis posterior *AC* secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam & æqualem agat, hæc vis nihil mutare debet velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi priore genitam: Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, sive vis posterior imprimatur sive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in lineâ illâ *BD*. Eodem argumento cum vis prior *AB* secundum lineam *AB* ipsi *CD* parallelam & æqualem agat, hæc vis nihil mutare debet velocitatem accedendi ad lineam illam *CD*, a vi posteriore genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore



pore

pore ad lineam *CD*, sive vis prior imprimatur, sive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *CD*. Et idcirco Corpus in fine illius temporis in utriusque lineæ *BD* & *CD* concursu *D* ut reperiatur est necesse. Porro, cum idem omnino eadem prorsus ratione de punctis innumeris *ddd*, &c. in eadem diagonali linea satis demonstrari possit, liquet corpus ex conjunctis hisce viribus lineam rectam diagonalem semper describere debere. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Datis viribus velocitas ex earundem conjunctione orta erit eo major quo directiones virium primarum *conspirant* magis, sive, quo angulus *BAC* est minor; & eo minor quo directiones istarum virium sibi invicem magis *opponuntur*, sive, quo angulus *BAC* est major: Velocitas autem utriusque directionis secundum lineas parallelas *AC*, *BD* & *AB*, *CD* ad lineas *BD* & *CD* aliasve quascunque eisdem parallelas accedendi nullo modo ex harum virium conjunctione mutatur, sed semper manet invariata; uti ex propositionis hujus demonstratis patet.

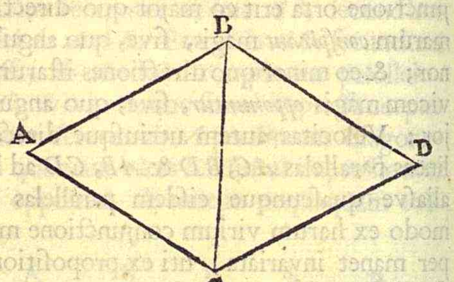
Coroll. (2.) Linea eadem diagonalis *AD* ex binarum virium innumerarum conjunctione describi potest. Sic si loco vis prioris *AB* supponatur alia *AE*, & loco posterioris *AC* supponatur alia *AF*, & perficiatur parallelogrammum *AEDF*, linea *AD* existente communi diagonali, Corpus ex hisce viribus conjunctis eandem lineam *AD* describet quam prius ex aliis descripserat; uti ex hac propositione constat: Et par est ratio de binis quibuscunque viribus quibus latera parallelogrammi cujuscunque cujus *AD* est diagonalis describi debuerunt.

Coroll. (3.) Datis itaque tum magnitudine tum directione viribus datur una linea describenda, parallelogrammi nempe diagonalis; sed data linea descripta, sive diagonali, non illico dantur vires & directiones quibus ista diagonalis describeretur. Ratio in promptu est; quoniam datis parallelogrammi lateribus, & incluso angulo, datur unum ipsum parallelogrammum, atque adeo

paral-

parallelogrammi istius diagonalis: Sed data linea longitudine & directione tanquam diagonali, non tamen exinde datur parallelogrammum; cum eadem linea versus eandem plagam extensa parallelogrammorum innumerorum diagonalis esse possit. Ut enim latera parallelogrammi data, sine dato angulo incluso, nullam certam diagonalem determinant, ita & diagonalis data sine angulis hinc inde eidem adjacentibus datis Nulla certa latera determinare potest.

Coroll. (4.) Ubi vires primariæ *BA*, *BD* æquantur inter se; & angulum *ABD* graduum 120 gr. comprehendunt, velocitas ex conjunctis viribus eadem erit quæ ex alterutra seorsim: & virium directiones solæ mutabuntur; triangula enim *ABC* & *BCD* in hoc casu erunt æquilatera, & Rhombum component; & diagonalis proinde *BC* utrivis Rhombi lateri *AB* aut *BD* æqualis erit.



Coroll. (5.) Ubi vires primariæ sunt æquales, & angulus a lateribus inclusus est rectus, velocitas ex viribus conjunctis erit velocitati ex alterutrâ seorsim incommensurabilis; nimirum ut quadrati diagonalis ad ejusdem latus; ideoque nullis numeris explicanda.

Scholium. Quæ de veris motibus & velocitatibus in hac propositione & ejusdem corollariis dicta sunt, etiam viribus quibuscunque sive ad motum conatibus sunt applicanda. Sic si Corpus *A* in figura priore a duabus viribus eam inter se rationem quam lineæ *AC* & *AB* habentibus & secundum directiones earundem linearum datas impelleretur, premeretur, attraheretur, aut quoquo modo tenderet, licet propter obstacula aut alias causas motus revera

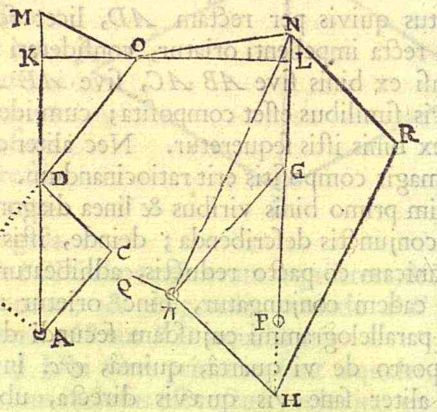
revera non statim sequeretur, impulsus aut vires ex istis conjunctis viribus ortæ, secundum directionem lineæ diagonalis *AD* tenderent; & velocitas generanda per istam lineam *AD* exponi deberet. Ut ex sequentibus facilius intelligetur.

(23.) Vires & Motus quicunque in vires & motus innumeros resolvi; & vicissim ex viribus aut motibus quibusvis obliquis Vires directæ & motus rectilineares innumeri componi possent.

Sic sane in figurâ priore eadem est motûs linea & directio sive componatur ex viribus *AB AC*, sive ex viribus *AE*, *AF*, sive etiam ex unico motu per eandem lineam *AD* impresso primario oriatur. Et vicissim motus quivis per rectam *AD*, licet forte ex vi simplici recta impellenti oriatur, considerari tamen potest quasi ex binis sive *AB AC*, sive *AE AF* aliisve innumeris similibus esset composita; cum idem omnino motus ex binis istis sequeretur. Nec aliter de motibus adhuc magis compositis erit ratiocinandum. Consideratis enim primo binis viribus & linea diagonali ex istis inter se conjunctis describenda; deinde, istis binis viribus ad unicam eo pacto reductis, adhibeatur vis tertia & cum eadem conjungatur, hinc orietur motus per alteram parallelogrammi cujusdam secundi diagonalem, & ita porro de vi quartâ, quintâ, *&c.* in infinitum. Neque aliter sane vis quævis directa, ubi opus, in plures resolvi potest. Quæ sane Virium Compositio & Resolutio adhibetur frequentissime, & abunde ex Mechanicâ confirmatur; uti jam cum Newtono ostendemus.

Si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *OM*, *ON*, filis *MA*, *NP*, sustineant pondera in æquilibrio, & quærantur vires ponderum ad rotam movendam; per centrum *O* agatur recta linea *KOL* filis pondera sustinentibus perpendiculariter occurrens in *K* & *L*; centroque *O*, & intervallorum *OK*, *OL* majore *OL* describatur circulus occurrens filo *MA* in *D*; per *O* & *D* agatur recta *OD*, cui sit perpendicularis *DC*, &

& eidem parallela *AC*; compleaturque parallelogrammum *DCAc*: Quoniam nihil refert utrum filorum puncta *K, L, D*. affixa ſint vel non affixa ad planum rotæ, pondera idem valebunt ac ſi ſuſpenderentur a punctis *K* & *L*, vel *D* & *L*; eadem enim (ſepoſitâ ipſius fili gravitate) ejuſdem corporis eſt gravitas, ubicunque affigitur filum in eadem linea horizonti perpendiculari: Ponderis autem *A* vis tota gravitans exponatur vel repræſentetur per lineam *AD*, tanquam parallelogrammi cujuſdam diagonalem: ut ex ratione iſtius diagonalis ad latus parallelogrammi, ubi virium altera nulla eſt, innoteſcat, Vis illa tota quam *AD* deſignat re-



ſolvi poteſt in vires binas innumeras, ſed cum reliquæ a noſtro propoſito ſint alienæ, reſolvatur in binas *Dc* (vel *AC*) & *DC*; alteram nempe ſecundum directionem radii *DO* protracti, alteram vero eidem radio perpendicularem. Harum virium Altera *AC* vel *cD* trahendo radium *OD* directe a centro, (tendit enim a *D* verſus *c* in ipſo radio protracto) nihil valet ad movendam rotam; Vis autem altera *DC* trahendo radium *DO* perpendiculariter idem valet ac ſi perpendiculariter traheret radium *OL*, ipſi *OD* æqualem: Cum vero rota ex hypotheſi quieſcat in æquilibrio, erit Pondus *P*, ad

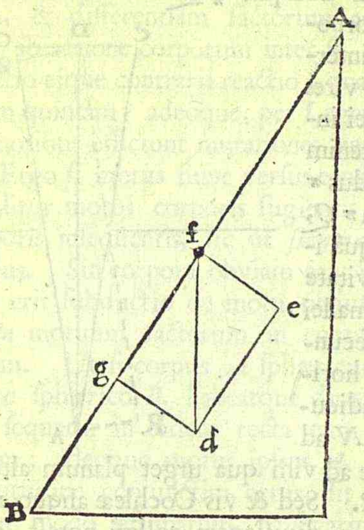
P, ad Pondus *A*, ut Vis *DC*, ad Vim *DA*. Tota enim vis ponderis *P* trahit radium *OL* perpendiculariter, & ita integram vim ſuam confert ad rotam movendam: Sed Ponderis integri *A* per lineam *AD* expoſiti pars illa tantum quæ per *DC* exponitur trahit radium *OD*, ipſi *OL* æqualem perpendiculariter: alterâ parte ſecundum radium *cO* tendendo plane deperditâ: Pars illa itaque *DC* ſolummodo confert ad movendam rotam. Cum itaque, ob æquilibrium utrinque ſuppoſitum, Vis integra ponderis *P* æquivaleat cuidam tantum parti Ponderis *A*, nempe *DC*, liquet tanto majus eſſe debere Pondus *A* quam pondus *P*, quanto diagonalis *DA* eſt major quam latus *DC*. idque propter corporis *A* a perpendiculo *DC* declinationem. Eſt ergo ut Pondus *A*, ad Pondus *P*, ita *DA*, ad *DC*: hoc eſt, ob ſimilia triangula *ADC*, *DOK*, ut *OD* vel *OL* ad *OK*. Pondera itaque *A* & *P* quæ ſunt reciproce ut radii in directum poſiti *OL* & *OK*, idem utrinque valebunt, & ſic in æquilibrio conſiſtent. Atque hæc ſane eſt Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio proprietas notiſſima & fundamentalis, & ex hac virium reſolutione facile demonſtratur. Sin Pondus alterutrum ſit majus quam in hac ratione, vis ejus fortior prævalebit, & ad movendam rotam ſufficiet. Quod ſi Pondus ϖ Ponderi *P* æquale partim ſuſpendatur filo $N\varpi$, partim incumbat plano obliquo ϖG, agantur *NH*, ϖH, prior horizonti, poſterior plano ϖG perpendicularis; & compleatur parallelogrammum ϖNRH. Et ſi vis integra ponderis ϖ deorſum tendens exponatur per lineam *NH*, hæc reſolvi poteſt in vires ϖN, *RN*. Et ſi filo ϖN perpendiculare eſſet planum aliquod ϖQ, ſecans planum alterum ϖG in lineâ ad horizontem parallela, & pondus ϖ his planis ϖQ ϖG ſolummodo incumberet, urgeret illud hæc plana ϖQ, ϖG perpendiculariter, nimirum planum ϖQ vi ϖN, & planum ϖG vi *RN*: Ideoque ſi tollatur planum ϖQ ut pondus tendat filum, quoniam filum ſuſtinendo pondus jam vicem præſtat plani ſub-

ſublati, tendetur illud eadem vi πN quâ planum anteà urgebatur: Unde tenſio fili hujus obliqui, erit ad tenſionem fili alterius perpendicularis PN, ut πN, ad NH: Ideoque ſi pondus π augeatur in ratione NH ad $N\pi$ ſuſtinebit pondus A, & rota non movebitur. Unde ſi pondus π, ſit ad pondus A, in ratione reciprocâ minimarum diſtantiarum filorum ſuorum AM PN a centro rotæ, ſeu ut KO ad OL, & etiam in ratione directa NH ad πN, hoc eſt, rationes utraſque ſimul conjungendo, ut rectangulum KO in NH ad rectangulum OL in πN, pondera æqualiter valebunt ad rotam movendam; atque adeo ſe mutuo ſuſtinebunt in æquilibrio; ut quilibet facillime experiri poteſt.

Coroll. (1.) Hinc via nova aperitur omnia pondera minora ex unico dato pondere menſurandi. Si enim planum πG perfecte politum ad varios inclinationis gradus gradatim collocetur, idem pondus π vel P diverſis quibuſcunque ponderibus ſe minoribus æquivalebit; in ratione nimirum lineæ πN ad HN. Atque adeo ſi tabella conficiatur rationes linearum πN & HN ad quoſcunque inclinationum gradus exhibitura, facile fuerit ex inclinatione plani πG & unico dato pondere π vel P omnium corporum corpore π vel P minorum ut A pondera examini ſubjicere & determinare.

Coroll. (2.) Hinc etiam corporum in planis quibuſcunque inclinatis deſcendentium vel reclinantium velocitates vel pondera licet æſtimare: Sit AB planum inclinatum, & f corpus per illud planum deſcendens, vel in illud recumbens; exponatur vis gravitatis integra per lineam df horizonti perpendicularem, & reſolvatur illa vis integra in binas vires fe & fg, quarum altera fe ſit plano inclinato perpendicularis, cui itaque ferendo iſtud planum adæquate ſufficit; altera fg ſecundum planum inclinatum parallelæs poſita, quæ itaque motui ciendo, vel ad motum ſaltem conatui vel ponderi procurando ſine impedimento impenditur: Eſt ergo motus vel pondus in plano inclinato, ad motum vel pondus in

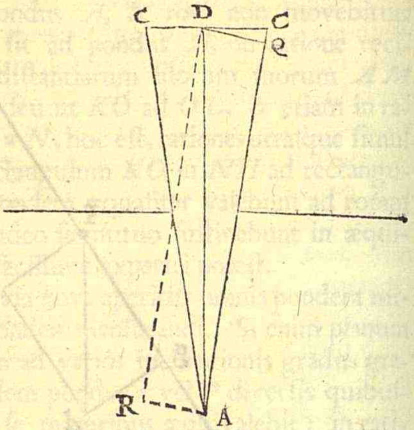
in plano ad horizontem perpendiculari, ut latus fg ad lineam diagonalem fd: hoc eſt, ob triangula ſimilia fgd & ABC, ut AC ad AB, ſive ut anguli BAC



radius ad ſecantem; quæ eſt propoſitio in Mechanicis notiſſima.

Coroll. (3.) Hinc etiam vis cunei innoteſcit. Sit *CÇA* cuneus, a malleo ictu directo impulſus: exponatur vis integra ictûs per lineam DA; & reſolvatur illa in binas vires DQ & DR; quarum altera DQ ſit ligni findendi faciei CA perpendicularis, atque adeo ad eandem faciem amoliendam directe diſpoſita; altera verò DR ſit eidem faciei parallela, atque adeo ad directe progrediendum diſpoſita; & idem de altero Cunei dimidio DAC intelligatur: erit itaque amolitio obicis ſecundum lineam DQ, ad progreſſum virium deorſum ſecundum lineam DR, ut DQ ad DR; hoc eſt, ob ſimilia triangula DQA DCA, ur DC ad DA; ſive, computatis etiam alterius partis viribus, ut *CÇ* ad DA; quæ eſt etiam notiſſima cunei

cunei proprietas: & in mechanicis receptiſſima. Vel etiam, Si hanc rem cum Newtono abſolvere placuerit ex prius domonſtratis, Habebit in figura penultima pondus π planis duobus obliquis πQ πG incumbens rationem Cunei inter corporis fiſſi facies internas, & inde vires cunei & mallei innoteſcent; etenim vis quâ pondus π urget planum πQ, eſt ad vim quâ idem, vel gravitate ſua, vel ictu mallei impellitur ſecundum lineam horizonti perpendicularem, ut πN ad NH; atque ad vim qua urget planum alterum πG ut πN ad NR. Sed & vis Cochleæ aliquo modo per ſimilem virium diviſionem colligi poteſt, quippe quæ, ex ſententia Newtoni, cuneus eſt a vecte impulſus.



Scholium. Uſus itaque hujuſmodi motus compoſitionis & reſolutionis latiſſime patet, & late patendo veritatem ejus evincit, cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota, ab Authoribus diverſimode demonſtrata; ex hiſce enim facile derivantur vires machinarum, quæ ex rotis, tympanis, trochleis, Vectibus, radiis volubilibus, nervis tenſis, & ponderibus directe vel oblique aſcendentibus, cæteriſque potentiis Mechanicis componi ſolent; ut & vires Muſculorum ad animalium oſſa movenda.

Octob. 23. 1704.

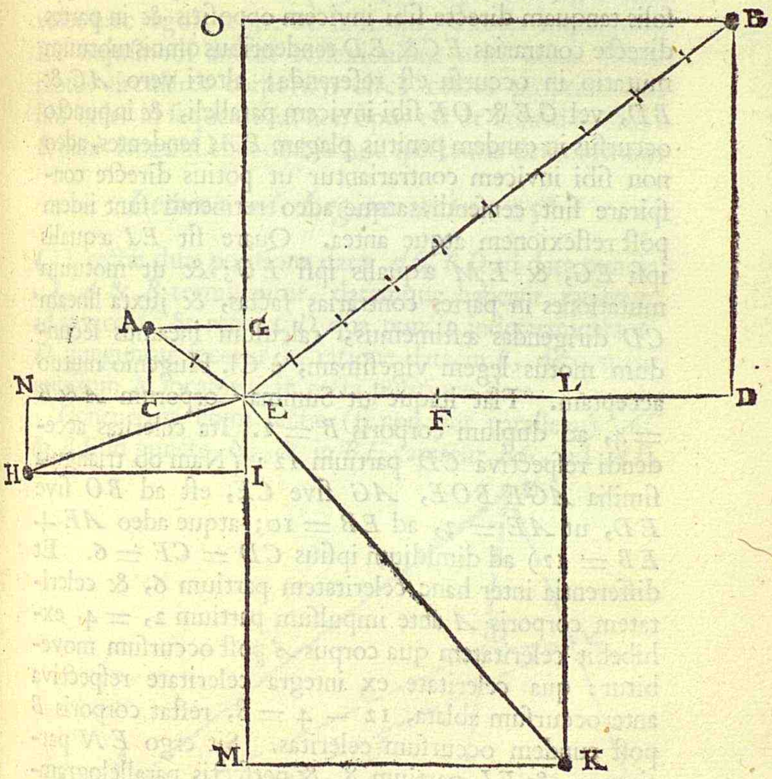
VII.

(24.) QUANTITAS motus quæ colligitur capiendo ſummam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias non mutatur ab actione corporum inter ſe.

Etenim actio eique contraria reactio æquales ſunt, per motus Legem quintam; adeoque, per Legem quartam, æquales in motibus efficiunt mutationes verſus contrarias partes: Ergo ſi motus fiunt verſus eandem partem, quicquid additur motui corporis fugientis ſubducetur a motu corporis inſequentis, ſic ut *ſumma* maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant in eadem linea, æqualis erit ſubductio de motu utriuſque, adeoque *differentia* motuum factorum in contrarias partes manebit eadem. Ut ſi corpus A ſphæricum ſit triplo majus corpore ſphærico B, habeatque duas velocitatis partes; & B ſequatur in eadem recta cum velocitatis partibus decem; adeoque motus ipſius A, ex velocitate & magnitudine conjunctim ortus, ſit ad motum ipſius B eodem modo æſtimatum, ut ſenarius numerus ad denarium: motuum ergo ſumma in eandem plagam eſt partium ſedecim. In Corporum itaque A & B concurſu ſi corpus A, pro varia Elaterii quantitate, lucretur motus partes tres, vel quatuor, vel quinque, corpus B amittet partes totidem; adeoque perget corpus A poſt reflexionem cum partibus novem, vel decem, vel undecim, & B cum partibus ſeptem, vel ſex, vel quinque; exiſtente ſemper ſummâ partium ſedecim ut prius; uti in corporibus aut non omnino, aut ſaltem minori gradu elaſticis ſemper eveniet. Sin corpus A lucretur partes novem, vel decem, vel undecim, vel duodecim, adeoque progrediatur poſt occurſum cum partibus quindecim, vel ſedecim, vel ſeptendecim, vel octodecim, Corpus B amittendo tot partes quot A lucratur, vel progredietur cum una parte, amiſſis partibus novem; vel quieſcet amiſſo motu ſuo progreſſivo partium decem; vel regredietur cum una parte amisso motu suo, & (ut ita dicam) unâ parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus, ob detractum motum progressivum partium duodecim; *&c.* Atque ita summæ motuum conspirantium 15 + 1, vel 16 + 0, atque etiam differentiæ contrariorum 17 — 1 vel 18 — 2, semper erit partium sedecim, ut ante concursum & reflexionem. Quod in corporibus perfecte elasticis eveniet; uti ex legibus motus de iisdem prius expositis, & ex infra dicendis de imperfecte elasticis satis intelligi poterit. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas post eandem reflexionem, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post, ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem, & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem, invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, juxta regulam auream; ut motus partes sex ante reflexionem, ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem, ad velocitatis partes sex postea. Cum enim motus quantitas oriatur ex velocitate & magnitudine conjunctim, in dato corpore motus quantitas ex velocitate sola æstimabitur, atque adeo quantitas motus & velocitatis erunt sibi invicem directe proportionales. Quod si corpora non sphærica, vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo oblique, & requirantur eorum motus post reflexionem, cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus; dein corporis utriusque motus distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum; motus autem paralleli, propterea quod nullo modo sibi adversantur, corporibus in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem agentibus, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt, sic ut summa conspirantium

&

& differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Exempli gratia, sit corpus sphæricum *A* & perfecte elasticum triplo majus corpore sphærico *B* perfecte etiam elastico, habeatque *A* duas velocitatis partes, per lineam *AE* in duas æquales partes bisectam expositas, Corpus *B*



ei oblique occurrat secundum rectam *BE* in angulo *AEB* cum velocitatis partibus decem, per lineam *BE* in decem partes inter se & cum prioribus æquales sectam expositis; bisecetur angulus *AEB* a recta *OEM*: Demittantur *AG* & *BO* ad lineam *EO* perpendiculares; & perficiantur parallelogramma *ACEG BOED*. Erit

 ita-

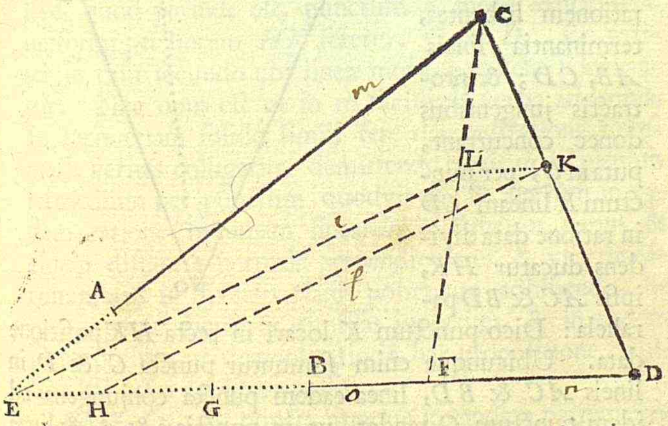
itaque planum per OM illud a quo corpora ſphærica A & B in puncto concurſus tangentur; & motus obliqui per diagonales AE & BE utrinque in binos diſtinguentur, AE nimirum in AG & AC, & BE in BO & BD, quorum motuum alteri AG & BO vel CE & ED ſunt plano occurſus perpendiculares, quibus itaque ſolis tanquam directe ſibi invicem oppoſitis & in partes directe contrarias EC & ED tendentibus omnis motuum mutatio in occurſu eſt referenda; alteri vero AC & BD, vel GE & OE ſibi invicem paralleli, & in puncto occurſus in eandem penitus plagam EM tendentes, adeo non ſibi invicem contrariantur ut potius directe conſpirare ſint cenſendi, atque adeo retinendi ſunt iidem poſt reflexionem atque antea. Quare ſit EI æqualis ipſi EG, & EM æqualis ipſi EO; & ut motuum mutationes in partes contrarias factas, & juxta lineam CD dirigendas æſtimemus, calculum ineamus ſecundum motus legem vigeſimam, è Cl. Hugenio mutuo acceptam. Fiat itaque ut Summa Corporum A & B $= 4$, ad duplum corporis $B = 2$. Ita celeritas accedendi reſpectiva CD partium 12: (Nam ob triangula ſimilia AGE BOE, AG ſive CE, eſt ad BO ſive ED, ut $AE = 2$, ad $EB = 10$; atque adeo $AE + EB = 12$) ad dimidium ipſius $CD = CF = 6$. Et differentia inter hanc celeritatem partium 6, & celeritatem corporis A ante impulſum partium 2, $= 4$, exhibebit celeritatem qua corpus A poſt occurſum movebitur: qua celeritate ex integra celeritate reſpectiva ante occurſum ablata, $12 - 4 = 8$, reſtat corpori B poſt eundem occurſum celeritas. Sit ergo EN partium 4, & EL partium 8, & perfectis parallelogrammis $ENHI$ & $ELKM$, ductiſque diagonalibus EH & EK corpora A & B eodem tempore quo ad occurſum per diagonales AE & BE prius properabant, poſt occurſum ad puncta H & K per diagonales EH & EK regrediendo pervenient; & erit motus corporis $A = 4 \times 3, = 12$ partium; & motus corporis $B = 8 \times 1, = 8$

$= 8$ partium, quorum motuum differentia eſt partium quatuor, quæ etiam erat motuum ante occurſum differentia. Quapropter in hoc caſu quantitas motus quæ colligitur capiendo differentiam motuum factorum ad partes contrarias non mutatur ab actione corporum inter ſe: atque adeo in corporibus oblique impingentibus valet hæc regula æque ac in iis quæ directe impingunt. Ex hujuſmodi autem reflexionibus oriri etiam ſolent motus circulares corporum circa centra propria: Sed hos caſus in ſequentibus non opus eſt ut conſideremus: & nimis longum eſſet omnia huc ſpectantia demonſtrare.

Lemma ad Legem motus 25m.

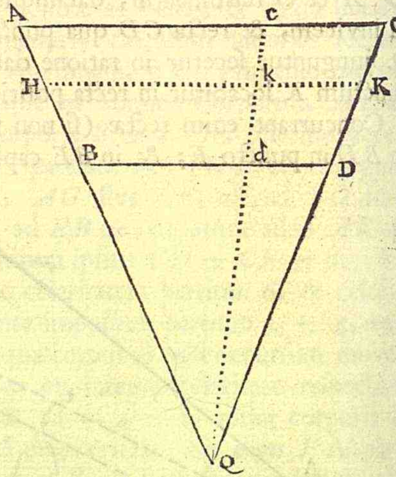
SI rectæ duæ poſitione datæ AC, BD ad data puncta A & B terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, & recta CD qua puncta indeterminata C. D. junguntur ſecetur in ratione data in K, dico quod punctum K locabitur in recta poſitione data.

Concurrant enim rectæ (ſi non ſint parallelæ) AC & BD in puncto E; & in BE capiatur BG, ad AE,



ut eſt BD, ad AC: Sitque FD æqualis EG. Et erit EC, ad GD, hoc eſt, ad EF, ipſi GD ex hypotheſi æqualem, ut AC, ad BD, adeoque in ratione data; & pro-

propterea dabitur ſpecie triangulum *EFC*, (ex datis nimirum angulo *CEF*, & laterum *EC*, *EF* circa eundem angulum ratione.) Secetur *CF* in *L* in ratione illa data, & dabitur etiam ſpecie triangulum *EFL* (ob datam laterum circa datum angulum *EFC* rationem) & proinde punctum *L* locabitur ſemper in recta *EL* poſitione data. Junge *LK*: & ob datam *FD*, utpote ipſi *EG* datæ æqualem; & datam rationem *LK* ad *FD*, eam nempe *CK* ad *CD*, dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*; & erit *ELKH* parallelogrammum. Eſt enim *LK* ipſi *FD* parallela, & perconſequens ipſi *EH* ejuſdem lineæ protractæ parti parallela, & ex hypotheſi æqualis: Locatur ergo punctum *K* in parallelogrammi latere poſitione dato *HK*. *Q.E.D.* Sin rectæ *AC*, *BD* ſint inter ſe parallelæ, punctum concurſus erit infinite diſtans, hoc eſt nullum; & omnes lineæ *EC*, *EL*, *HK*, *ED* erunt inter ſe parallelæ. Quo in caſu hoc Lemma ita demonſtramus. Jungantur puncta, lineas *AC* & *BD* datam rationem habentes, terminantia lineis *AB*, *CD*; & protractis jungentibus donec concurrant, puta in *Q*, per punctum *K* lineam *CD* in ratione data dividens ducatur *HK*, ipſis *AC* & *BD* parallela:



Dico punctum *K* locari in recta *HK* poſitione data. Ubicunque enim ſumuntur puncta *C* & *D* in lineis *AC* & *BD*, linea eadem puncta conjungens ad idem punctum *Q* tendet, ut in punctis *c* & *d*, & linea jungens *cd* in data illa ratione ſecabitur a linea *HK*: Eſt enim ex hypotheſi & in hac figura *Ac* ad *Bd* ut *AC* ad

BD:

BD: Eſt etiam ex hac hypotheſi & in hac figura *ck* ad *cd* ut *CK* ad *CD*: Unde liquet & in hoc caſu punctum *K* ſemper locari in recta poſitione data. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & diſtantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens locabitur in recta poſitione data; & punctum illud, ut *K*, movebitur uniformiter in iſta linea recta. Nam ob celeritatem utriuſque puncti uniformem & æquabilem Lineæ motus ut *AC* & *BD* quas ſimul deſcribunt erunt ſemper in ratione data, nimirum in ratione celeritatum utrinque æquabilium: Unde liquet è jam demonſtratis punctum *K* in linea recta *HK* ſemper ferri. Quod vero uniformiter & æquabili motu feratur, hoc modo demonſtrabitur: *HK* ſemper eſt æqualis *EL*, & *EL* eadem ratione creſcit ac creſcunt ipſi proportionales *EC* & *EF* lineæ, quæ iis *AC* & *BD* per quas corpora ſimul moventur ſunt ex prius dictis etiam proportionales. Eſt itaque *EC*, ad *EF*, ut *AC*, ad *BD*; unde cum iſtæ lineæ ex motus æquabilitate creſcunt uniformiter, etiam *EL* & ei æqualis *HK* iiſdem proportionalis uniformiter etiam creſcet; ſive, quod perinde eſt, punctum *K* motu æquabili & uniformi per lineam *HK* feretur. *Q.E.D.* Et pariter in caſu ſecundo ubi lineæ motus parallelæ ponebantur. Nec opus eſt ut in re facillima verba addamus. In loco etiam ſolido ſimili fere demonſtratione Lemmatis veritas colligetur, demittendo nimirum ad planum termedium per punctum quodvis *K*, & alterum in eadem ratione minimam linearum diſtantiam ſecans & eidem diſtantiæ normale perpendiculares, & vice linearum motus in diverſis planis poſitarum adhibendo, lineas, perpendiculares dimiſſas jungentes, & in eodem plano poſitas, ut demonſtratio in hac propoſitione adhibita iſti caſui applicari poſſit.

Coroll. (2.) Si puncta utraque in eandem partem progrediantur, etiam & punctum dividens in eandem partem progredietur: Si punctorum alterum in hanc, al-

 terum

terum vero in contrariam partem moveatur, punctum dividens aut in hanc aut in contrariam partem tardius movebitur; prout celeritatis majoris, aut a puncto *K* distantiæ rationes postulaverint. Vel demum, si rationes istæ sint æqualitatis, & in neutram partem prævaleant, punctum dividens in neutram partem movebitur, sed omnino quiescet. Unde in omni casu punctum istud dividens *K* aut quiescet, aut movebitur uniformiter in linea recta.

(25.) Commune centrum gravitatis systematis corporum ab actionibus corporum inter se, (sive attractiones sint, sive impulsus) non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis aut externis, aut aliunde arcessitis) Commune centrum gravitatis vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum.

Nam si duo corpora vel puncta ut *C, D.* progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis *AC. BD*, & eorum distantia *C D* dividatur in ratione data; (uti linea per corporum motorum centra gravitatis semper transiens a communi utriusque gravitatis centro *K*, in ratione data, nimirum corporibus reciproca, dividitur) commune illud gravitatis centrum *K* aut quiescet, aut movebitur uniformiter in linea recta *KH*. Ergo si corpora quotcunque moveantur uniformiter in lineis rectis, commune centrum duorum quorumvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens dividitur ab hoc communi duorum gravitatis centro in ratione data. Similiter & commune centrum gravitatis horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia gtavitatis centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione, corpori nempe & systemati duorum corporum reciproca: Nam commune gravitatis centrum duorum in recta uniformiter progreditur, atque adeo pari

Vid. Fig. p. 69. & Fig. p. 70.

pari ratione ac centrum cujusvis corporis est habendum. Eodem modo commune centrum gravitatis horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum gravitatis commune trium, & centrum gravitatis quarti in data ratione, corpori nempe & systemati trium corporum reciproca: & sic porro in infinitum. Igitur in systemate corporum, quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, adeoque vel quiescunt, vel moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit, vel movetur uniformiter in directum. Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiæ centrorum utriusque a communi amborum gravitatis centro sint reciproce ut corpora, erunt motus relativi corporum eorundem sive ex attractione, seu vi centripeta; sive impulsu, seu vi centrifuga accedendi ad centrum illud vel ab eodem centro recedendi æquales inter se, & velocitas accessus vel recessus corporibus reciproce proportionales; hoc est distantiis a centro gravitatis amborum directe proportionales. Unde ex istis actionibus augebitur vel minuetur distantia ab illo centro proportionaliter: Proindeque centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque adeo ab actionibus horum corporum inter se, sive se mutuo trahant sive fugent, nec promovetur, nec retardatur, nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus mutat statum suum, & reliquorum, quibuscum actio illa intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur, distantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes, summis totalibus corporum quorum sunt centra gravitatis, reciproce proportionales; adeoque centris illis duobus

bus statum suum movendi vel quiescendi servantibus, commune omnium centrum gravitatis servat etiam statum suum; manifestum est quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter se nunquam mutat statum suum quoad motum & quietem. In tali autem omnium systemate actiones omnes corporum inter se vel inter bina sunt corpora, ubi nihil status centri gravitatis systematis mutatur; uti jam vidimus; vel ab actionibus inter bina compositæ, & propterea communi omnium gravitatis centro mutationem in statu motus sui vel quietis nunquam inducent. Nam si ab Actione *A* in *B* status centri gravitatis nihil perturbetur, & ab actione *C* in *B* nihil perturbetur; neque sane a conjunctis *A* & *C* actionibus in *B* status ille centri gravitatis perturbabitur. Quare cum centrum illud commune gravitatis ubi corpora non agunt in se invicem, vel quiescit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter, perget idem, non obstantibus corporum actionibus inter se, vel semper quiescere, vel semper progredi uniformiter in directum; nisi a viribus in systema extrinsecus impressis deturbetur de hoc statu. Est igitur systematis corporum plurium lex eadem quæ corporis solitarii quoad perseverantiam in statu motus vel quietis. Motus enim progressivus seu corporis solitarii, seu systematis corporum ex motu centri gravitatis æstimari semper debet.

Octob. 30. 1704.

VIII.

(26.) Corporum dato spatio inclusorum, & proinde motum ipsius participantium iidem sunt motus inter se sive spatium illud quiescat, sive moveatur idem uniformiter in directum, absque motu circulari.

Nam

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & summæ tendentium ad contrarias eædem sunt sub initio in utroque casu (ex hypothesi,) & ex his summis vel differentiis oriuntur congressus & impetus, quibus corpora se mutuo feriunt. [ex summis nimirum in corporum ad partes contrarias tendentium, & ex differentiis in corporum ad easdem partes tendentium occursibus.] Ergo per Legem 4. æquales erunt congressuum effectus in utroque casu, & propterea manebunt motus inter se in uno casu æquales motibus inter se in altero. Communis enim spatii corporumque inclusorum & uniformis motus in eandem plagam tendens, aut omnia æqualiter accelerando, ut in iis quæ in eandem cum spatio partem tendunt; aut quantum uni detrahit, addendo alteri, ut in iis quæ in partes contrarias tendunt, nullatenus mutabit occursuum vires. Idem comprobatur experimento luculento; motus enim omnes eodem modo se habent in navi, sive ea quiescat, sive moveatur uniformiter in directum.

(27.) Si corpora moveantur quomodocunque inter se, & a viribus acceleratricibus æqualibus secundum lineas parallelas urgeantur, pergent omnia eodem modo moveri inter se ac si viribus illis non essent incitata.

Nam vires illæ æqualiter, pro quantitatibus movendorum corporum, & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter quoad velocitatem movebunt; adeoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se.

Lemma ad Experimenta proxime memoranda.

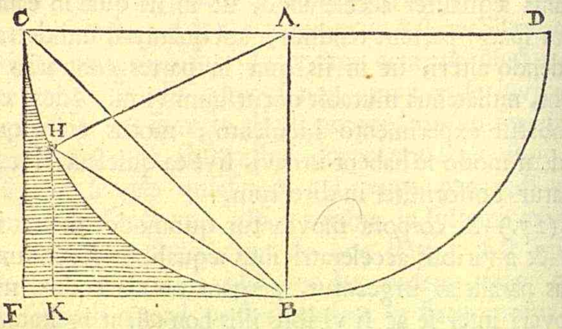
Velocitas corporis penduli in puncto circuli descripti infimo est semper ut Chorda arcus quē cadendo descripsit.

Esto angulus *CAB* rectus, *C* vel *H* mobile filo eodem *CA* vel *HA* a centro *A* suspensum, & per arcum *CB* vel *HB* descensurum; Dico quod velocitas Corporis *C* in puncto infimo *B*, est ad velocitatem corporis *H* in eodem puncto, sive potius velocitas ejusdem corporis primo per arcum *CB* & deinde per arcum *HB*

cadentis

cadentis, ut chorda CB, ad chordam HB. Est enim, ut mox demonstrabimus, velocitas * corporis per arcum CB decidentis, in puncto infimo B, (qua nimirum corpus pergeret moveri secundum lineam rectam circulum in B tangentem, si in B filum relinqueret,) eadem atque ea quam haberet in puncto F, si perpendiculariter per CF decidisset. Et eadem ratione est velocitas corporis per arcum HB descendentis eadem atque ea quam haberet in puncto K si perpendiculariter per HK decidisset: [eadem nemper celeritate per spatia in-

* Per Coroll. 5. Prop. 6. infra.



ter parallela plana impressa, sive transitus per eadem plana sit perpendicularis, ut in corporibus cadentibus per lineas rectas horizonti perpendiculares; sive sit obliquus, ut in corporibus pendulis arcus circulares describentibus, uti inferius patebit plenius.] Est itaque Velocitas Corporis per arcum CB descendentis, ad velocitatem corporis per arcum HB descendentis, ut Velocitas corporis per CF decidentis, ad velocitatem corporis per HK decidentis. Sed est † velocitas corporis per CF decidentis, ad velocitatem corporis per HK decidentis, in subduplicata ratione lineæ CF ad lineam HK, uti infra demonstrabitur; & est quoque * Chorda CB, ad Chordam

† Per Coroll. Prop. 4. infra.

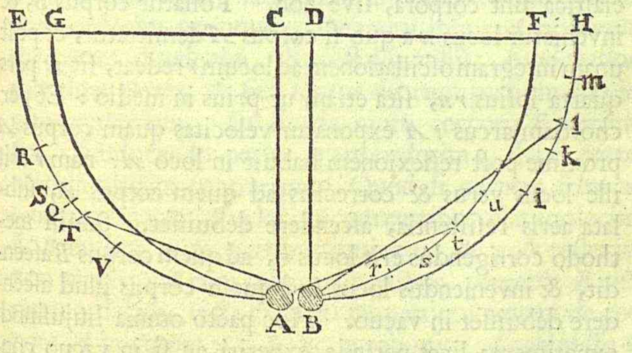
* Per Prop. 2. infra.

dam HB, in eadem subduplicata ratione lineæ CF, ad lineam HK; uti infra quoque demonstrabitur. Unde sequitur, Velocitatem Corporis per arcum CB descendentis, ad velocitatem corporis per arcum HB, descendentis, in puncto infimo B, esse ut est Chorda arcus CB, ad Chordam arcus HB. Q. E. D.

Corollarium. Hinc corrigendus est Cl. Hugenii, seu potius Editorum error, rationem velocitatis in puncto infimo B eandem esse ac ipsarum linearum CF & HK supponentium; cum sit in earundem tantum ratione subduplicata; uti jamjam ex ipsius Hugenii principiis demonstravimus.

De Vi Centrifuga. P. 426, 427.

Scholium Generale. Veritas harum legum olim comprobata fuit a D[no]. Christophero Wrenno per experimentum pendulorum, coram Societate Regali; quod etiam Cl. Mariottus libro integro exponere mox dignatus est. Verum ut hoc experimentorum genus cum Theoriis ad amussim congruat, habenda est ratio non tantum vis elasticæ corporum pendulorum, sed etiam & resistentiæ aeris. Pendeant corpora A & B filis parallelis AC &



BD a centris C & D: His centris & intervallis æqualibus describantur semicirculi EAF GBH, radiis CA & DB respective bisecti. Trahatur corpus A ad arcus EAF punctum quodvis R, & subducto corpore B demit-

demittatur inde, redeatque post unam oscillationem integram [ex itu & reditu compositam] ad punctum *V*. Est *RV* retardatio ex resistentia aeris. Hujus *RV* fiat *ST* pars quarta sita in medio, & sit *RQ* æqualis ipsi *QV*, & *ST* exhibebit retardationem in descensu ab *S* ad *A* quam proxime. Nam si in duplici tum ascensu tum descensu retardatio sit *RV*, erit retardatio in descensu uno vel uno ascensu ejus pars quarta; & cum arcus bini sint majores & bini minores quam arcus *QA*, resistentia aeris neque in arcubus maximis, neque in minimis sumenda est, sed in mediocri. Unde pars quarta *ST* neque ad punctum supremum *R*, neque ad infimum *V*, sed in medio inter utrumque est collocanda. Restituatur jam corpus *B* in locum suum: Cadat corpus *A* de puncto *S*, & velocitas ejus in loco reflexionis *A* absque errore sensibili, tanta erit ac si in vacuo de loco *T* cecidisset; corpore *A* altius paulo cadendo aeris resistentiam compensante: Exponatur itaque juxta Lemma jam demonstratum hæc corporis in puncto *A* velocitas per chordam arcus *TA*. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*, sive elastica sint corpora, sive non. Tollatur corpus *B*, & inveniatur locus *u* a quo si corpus *A* demittatur, & post unam integram oscillationem ad locum *r* redeat, sit *st* pars quarta ipsius *ru*, sita etiam ut prius in medio: Et per chordam arcus *tA* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*: nam *t* erit ille locus verus & correctus ad quem corpus *A*, sublata aeris resistentia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l* ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto omnia hujusmodi experimenta licet perinde experiri ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam *TA*, quæ velocitatem ejus exhibet, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam *tA*, ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime

A proxime post reflexionem; & sic corpus *B* ducendum erit in chordam *Bl*, ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem, & simili methodo ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante quam post reflexionem, & tum demum conferendi sunt motus inter se, & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo, duodecim, vel sedecim, concurrerent, reperit semper Cl. Newtonus, sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora directe sibi mutuo occurrebant, quod in partes contrarias mutatio motus erat æqualiter corpori utrique illata, atque adeo quod actio & reactio, juxta legem 5^{m}. semper erant æquales. Ut si corpus *A* incideret in Corpus *B* quiescens cum novem partibus motus, & amissis inter collidendum septem partibus, pergeret post reflexionem cum duabus; Corpus *B* resiliebat cum partibus istis septem. Si corpora obviam irent, *A* cum duodecim partibus, & *B* cum sex, & rediret *A* cum duabus, redibat *B* cum octo; facta nimirum subductione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur partes duodecim, & restabit nihil; subducantur aliæ duæ partes, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam. Et sic de motu corporis *B* partium sex, subducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod si corpora irent ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & post reflexionem pergeret *A* cum quinque partibus, pergebat *B* cum quatuordecim, facta translatione partium novem de corpore *A* in corpus *B*; & sic in reliquis. A congressu & collisione corporum nunquam mutabatur quantitas motus quæ ex summa motuum conspirantium, & differentia contrariorum colligebatur. Namque error digiti unius & alterius in mensuris difficultati singula satis accurate

curate peragendi est omnino tribuendus. Difficile erat tum pendula simul dimittere, sic ut corpora in se mutuo impingerent in loco ipso infimo *A B*; tum loca *s* & *k* notare ad quæ corpora ascendebant post concursum; sed in ipsis pilis, quibus utendum erat, inæqualis partium densitas, & textura aliis de causis irregularis errores aliquales ut inducerent erat necesse. Porro nequis objiciat regulam ad quam probandam inventum est hoc experimentum præsupponere corpora vel absolute dura esse, vel saltem perfecte elastica, cujusmodi nulla forte reperiuntur in compositionibus naturalibus, addimus quod experimenta jam descripta succedunt in corporibus mollibus æque ac in duris vel elasticis, nimirum a conditione duritiei vel elaterii neutiquam pendentia. Nam si conditio illa in corporibus non perfecte duris vel elasticis tentanda est, debebit solummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis elasticæ diminutæ. In Theoria Wrenni & Hugenii corpora absolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congressus relativa: Sed cum Cl. Wallisio omnino dicendum hoc in perfecte elasticis tantum obtinere; & alias prorsus in corporibus non elasticis, sive mollibus, sive duris, quam in elasticis leges valere asserendum; prout ex olim expositis est abunde manifestum. Speciatim vero corpora illa solum quæ sunt perfecte elastica post collisiones mutuas redeunt ab invicem cum velocitate congressus, secundum motus Legem 16^{m}. eodem spectantem, prout in prioribus exposuimus. In imperfecte elasticis velocitas reditus minuenda est simul cum vi elastica, & in ejusdem diminutæ ratione, propterea quod vis illa elastica (nisi ubi partes corporum ex congressu læduntur, vel extensionem aliqualem quasi sub malleo patiuntur) videtur esse in se certa & determinata, faciatque corpora redire ab invicem cum velocitate relativa quæ sit ad velocitatem relativam concursus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter constricta sic tentavit Newtonus: Primum demittendo pendula

pendula & mensurando reflexionem invenit quantitatem vis elasticæ; deinde per hanc vim calculo determinavit reflexiones in aliis concursuum casibus expectandas, & respondebant experimenta. Redibant semper pilæ ab invicem cum velocitate relativa quæ esset ad velocitatem relativam concursus ut numerus quinarius ad novenarium. Pilæ ex chalybe fere erant perfecte elasticæ, redibant enim propemodum cum velocitate concursus; aliæ ex subere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat ut quindecim ad sedecim circiter. Atque hoc pacto Lex quinta quoad ictus & reflexiones per Theoriam Wallisianam comprobata est: quæ cum experientia plane congruit. In attractionibus etiam obtinere hanc regulam, quod scilicet quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias non mutatur ab actione corporum inter se, breviter hoc in loco ostendebat Newtonus, cujus in hac causa ratiocinium olim sub Lege quinta expendimus; atque adeo idem impræsentiarum missum faciemus, & ad reliqua hic loci à Newtono observata accedemus. Ut itaque corpora in concursu & reflexione idem pollent quorum velocitates sunt reciproce ut vires insitæ, sive ipsa corpora, uti ex Lege 8^{a}. & 17^{a}. & Hugenii Propositione 8va intelligi potest, sic in movendis instrumentis mechanicis agentia idem pollent, & conatibus contrariis se mutuo sustinent, quorum velocitates, secundum determinationem virium æstimatæ, sunt reciproce ut vires: Sic pondera æquipollent ad movenda brachia libræ quæ oscillante libra sunt reciproce ut eorum velocitates sursum & deorsum; hoc est, pondera si recta ascendunt & descendunt æquipollent sibi invicem quæ sunt reciproce ut punctorum à quibus suspenduntur distantiæ ab axe libræ. Sin planis obliquis aliisve admotis obstaculis impedita ascendunt vel descendunt oblique, pondera æquipollent quæ sunt ut ascensus & descensus, quatenus facti secundum perpendiculum, idque adeo

adeo ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in Trochlea seu Polyspasto vis manus funem directe trahentis, quæ sit ad pondus vel directe vel oblique ascendens, ut velocitas ascensus perpendicularis, ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus in æquilibrio. In horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum si sunt reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur sustinebunt se mutuo. Vis cochleæ ad premendum corpus, est ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Vires quibus cuneus urget partes duas ligni fissi, est ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo secundum lineas faciebus cunei pependiculares: & par est ratio machinarum omnium. Harum efficacia & usus in eo solo consistit ut diminuendo velocitatem, augeamus vim, & contra. Unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere Problema illud decantatum, *Datum pondus data vi quacunque movendi*, aliamve datam resistentiam vi data quantulacunque superandi. Nam si machinæ ita formentur ut velocitates agentis & resistentis sint reciproce ut vires, Agens resistentiam sustinebit, & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet: Certe si tanta sit velocitatum disparitas ut vincatur etiam resistentia omnis quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione, & elevandorum ponderibus oriri solet, superata omni ea resistentia vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Cæterum mechanicam tractare non est hujus instituti: Hisce autem saltem ostendimus quam late pateat, quamque certa

certa sit lex motus quinta prius exposita. Nam si æstimetur Agentis actio ex ejus vi & velocitate conjunctim, & resistentis reactio ex ejus partium singularum velocitatibus & viribus resistendi, ab earum attritione, cohæsione, pondere, & acceleratione oriundis, erunt actio & reactio in omni instrumentorum usu sibi invicem semper æquales; & quatenus actio propagatur per instrumentum, & ultimo imprimitur in corpus omne resistens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis semper erit contraria.

Corollarium. Ex veris hisce motuum legibus jam satis illustratis & probatis, apparent plus satis crassi Cartesii de iisdem errores. Cujus leges motuum tantum abest quod cum veris legibus ubique congruant, ut potius è contra ab iisdem ubique fere discrepare deprehendantur. Nec mirum proinde, si in reliquis naturæ phænomenis pariter hallucinatus fuerit. Expositis jam motuum Legibus, ad Propositiones est deveniendum.

Novemb. 6. 1704.

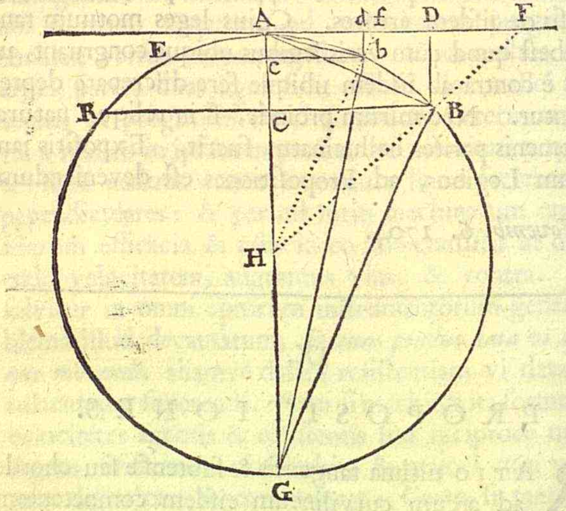
IX.

PROPOSITIONES.

I. RATIO ultima tangentis & subtensæ seu chordæ ad arcum curvilineum eisdem competentem, ubi arcus quam minimus vel evanescens accipitur, est in ratione æqualitatis; hoc est tangens, arcus, & chorda in unam & eandem lineam desinunt sive coalescunt. Et idem de sinu est intelligendum. In figura præsente sit Ab arcus circuli vel alterius curvæ quam minimus; sit Af tangens ejus, & Ab subtensa; scire itaque velim, quænam sit harum linearum ad invicem ratio, si ad punctum A quam proxime sumantur, sive ubi punctum b cum puncto A quasi coalescit: & dico, quod arcus

 ratio

ratio ſive ad tangentem ſupra, ſive ad ſubtenſam infra ſit ratio æqualitatis. Etenim ex natura curvarum liquet omnem inter tangentem & ſubtenſam arcus cujuſvis differentiam a longitudine arcus intermedii oriri, & eo ſemper majorem eſſe differentiam, quo arcus major accipitur, eo minorem quo arcus minor accipitur; unde ſequitur quod in arcu quam minimo erit quam minima differentia, & in arcu infinite parvo, qualem nunc volumus, erit differentia infinite parva, ſive nulla. Et ſi differentia inter tangentem & ſubtenſam ſit nulla, multo magis nulla erit inter tangentem & arcum inter-



medium, ſive inter ſubtenſam & arcum intermedium differentia, cum arcus iſte ſit longitudinis inter tangentem & ſubtenſam ubique intermediæ. Et hanc ſubtenſarum, arcuum, & tangentium, quin & ſinuum minimorum æqualitatem omnis Geometrarum ætas ſuppoſuit & agnovit, dum curvarum figurarum perimetros tanquam polygonorum latera innumera, ubi inſcriptæ & circumſcriptæ figuræ, evaneſcente differentia, coaleſcerent, conſiderarunt.

Corol-

Corollarium. Si itaque demonſtratum fuerit angulorum contactus ſubtenſas db DB eſſe inter ſe ſemper in ratione ſubtenſarum Ab AB duplicata, uti ſtatim demonſtrabitur, exinde quoque ſequetur eaſdem ſubtenſas evaneſcentes eſſe etiam in ipſorum arcuum conterminorum Ab AB vel ſinuum cb CB ratione duplicata, quoniam ſubtenſa Ab cum arcu Ab vel ejuſdem ſinu cb, & ſubtenſa AB cum arcu AB vel ejuſdem ſimul CB eo in caſu omnino coincidit & coaleſcit; uti jamjam oſtendimus.

II. Angulorum contactus in circulis Subtenſæ ſunt ſemper in duplicata ratione ſubtenſarum arcuum conterminorum.

Sint apud figuram eandem arcus duo quilibet AB & Ab; ſubtenſæ anguli contactus, tangenti perpendiculares, DB & db (æquales nempe ſinubus verſis eorundem arcuum AC & Ac;) ſubtenſæ ſive chordæ arcuum etiam AB & Ab: His arcuum ſubtenſis lineæ a puncto G ductæ GB & Gb erunt * perpendiculares, complectantur rectangula $ADBC$ & $Adbc$. Eſt autem AB quadratum † æquale rectangulo AG in AC vel DB; & pariter eſt Ab quadratum æquale rectangulo AG in Ac vel db. Atque adeo eſt ratio AB quadrati, ad Ab quadratum, eadem quæ rectanguli AG in DB, ad rectangulum AG in db, hoc eſt * eadem quæ lineæ DB, ad lineam db. Q. E. D.

* III. 31. *Elem.*

† VI. 8. *Elem.* *cum* VI. 17. *Elem.*

* VI. 1. *Elem.*

Corollarium. Eſt itaque ſubtenſa anguli contactus quævis DB vel db æqualis chordæ quadrato, ad circuli diametrum applicato. Eſt enim ut AG ad AB, ita AB ad AC vel DB; unde per auream regulam $BD = \frac{AB \times AB}{AG}$, ſive $= \frac{ABq}{AG}$. Et pariter AG ad Ab, ut Ab ad Ac vel db; unde $db = \frac{Abq}{AG}$. Q. E. D.

Coroll.

Coroll. (2.) In minimis lentium ſegmentis altitudines ſeu axes ſegmentorum AC & Ac eandem inter ſe rationem habere cenſendæ ſunt quam baſium ſive aperturarum Eb & RB, &c. quadrata. Eandem enim rationem habere AC & Ac oſtendimus quam habent ſubtenſarum quadrata; & cum in arcubus perexiguis ſubtenſæ vel ſinus eorumve dupla RB & Eb ſint fere inter ſe in eadem ratione, ſequitur & altitudines AC & Ac eandem fere rationem habere quam habent ſinuum duplorum RB & Eb, hoc eſt, aperturarum quadrata. *Q.E.D.*

Vid. Fig. p. 84.

Coroll. (3.) In angulis perexiguis exceſſus ſecantium ſupra radium ſunt etiam ut ſubtenſarum vel ſinuum, vel tangentium, vel etiam arcuum quadrata quam proxime. Exceſſus enim iſti bf & BF in iſto caſu cum ſubtenſis anguli contactus bd & BD quaſi coincidunt; atque adeo eandem fere cum iis rationem obtinent inter ſe. Sic ſane apud ſecantium tabulas videre eſt quod poſito radio circuli partium æqualium 10.000.000 exceſſus ſecantis minutorum duorum primorum eſt partium duarum, & exceſſus ſecantis minutorum quatuor primorum eſt partium octo: unde ſecantis prioris & radii differentia, eſt differentiæ ſecantis poſterioris arcus dupli & radii quadrupla; hoc eſt differentiæ iſtæ ſunt inter ſe ut arcuum quadrata, & ſic fere in reliquis.

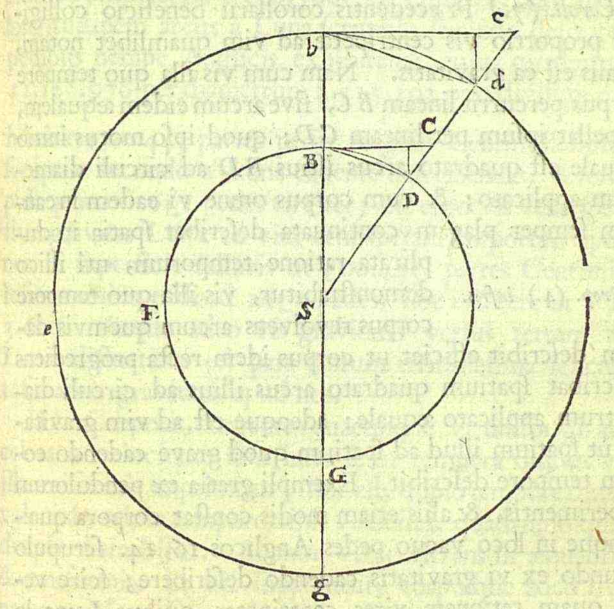
Vid. Fig. p. 84.

Coroll. (4.) Subtenſæ evaneſcentes anguli contactus ſunt ultimo in ratione duplicata arcuum conterminorum: Sunt enim ex prius demonſtratis ubique in ratione chordarum duplicata: Sed cum chordæ in arcus ultimo deſinant, hoc eſt, in diſtantiis infinite parvis cum iiſdem coincidant, & iiſdem æquentur, ut ſupra demonſtravimus, ſubtenſæ illæ erunt pari ratione hoc in caſu in ratione ipſorum arcuum duplicata.

Coroll. (5.) Unde quoque in eodem caſu ex corollario hujus propoſitionis primo erit ſubtenſa evaneſcens anguli contactus æqualis arcus ipſius quadrato, ad circuli diametrum applicato.

Coroll.

Coroll. (6.) Hinc colligitur nobile illud & fundamentale Newtoni, quin & Hugenii Theorema; Quod ſcilicet in circulari corporis motu vires centripetæ, ſive gravitates in centrum ſunt ubique ut arcuum ſimul deſcriptorum, vel velocitatum quadrata, applicata ad circulorum diametros vel radios. Deſcribant nempe corpora B & b in circumferentiis circulorum BD ad bd gyrantia ſimul, & eodem dato tempore, arcus quam mi-



nimos BD & bd: Quoniam ſola vi inſita deſcriberent tangentes BC & bc hiſce arcubus æquales, per legem motus primam, manifeſtum eſt, quod vires centripetæ ſunt quæ perpetuo retrahunt corpora de tangentibus ad circumferentias circulorum, atque adeo hæ ſunt ad invicem in ratione prima linearum naſcentium CD & cd; hoc eſt, ut $\frac{BDq}{BG}$ ad $\frac{bdq}{bg}$; vel ſumptis diviſorum di-

mi-

midiis, ut $\frac{BDq}{BS}$ ad $\frac{bdq}{bS}$. & ob tempora periodica in arcuum ſimul deſcriptorum ratione reciproca, erunt vires illæ ut temporum periodicorum quadrata ducta in circulorum radios. Sin circuli ſint inter ſe æquales, ob datas diametros, vires iſtæ erunt inter ſe ut ipſa arcuum ſimul deſcriptorum vel velocitatum quadrata, uti olim plenius oſtendemus.

Prop. 10. *infra.*

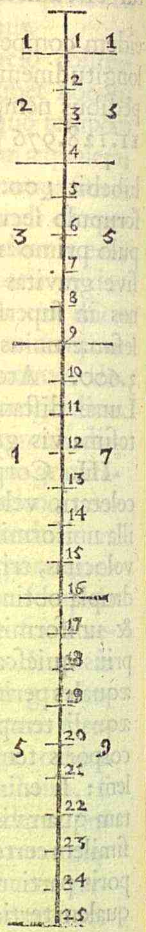
Coroll. (7.) Præcedentis corollarii beneficio colligitur proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis eſt ea gravitatis. Nam cum vis illa quo tempore corpus percurrit lineam *B C*, ſive arcum eidem æqualem, impellat ipſum per lineam *CD*; quod ipſo motus initio æquale eſt quadrato arcus iſtius *BD* ad circuli diametrum applicato; & cum corpus omne vi eadem in eandem ſemper plagam continuata deſcribat ſpatia in duplicata ratione temporum, uti illico demonſtrabitur, vis illa quo tempore corpus revolvens arcum quemvis datum deſcribit efficiet ut corpus idem recta progrediens deſcribat ſpatium quadrato arcus illius ad circuli diametrum applicato æquale: adeoque eſt ad vim gravitatis ut ſpatium illud ad ſpatium quod grave cadendo eodem tempore deſcribit. Exempli gratia ex pendulorum experimentis, & aliis etiam modis conſtat corpora quæcunque in loco vacuo pedes Anglicos 16, 14. ſcrupulo ſecundo ex vi gravitatis cadendo deſcribere; ſcire velim quam rationem vires centripetæ, quibus Luna in orbita ſua retinetur, habeant ad vim noſtram gravitatis: quam ut obtinere queam arcus orbitæ Lunaris ſcrupulo ſecundo deſcripti quadratum per ejuſdem orbitæ diametrum eſt dividendum, ut lineam quam Luna, ſi motu circulari abrupto tanquam grave deſcenderet, interea deſcriberet, inveſtigemus. Diſtantia Lunæ mediocris à centro Telluris eſt circiter ſemidiametri terreſtris ſexagecupla, ſive pedum Anglicorũ 1257.696.000.

Prop. (4.) *infra.*

Ejus proinde orbitæ circumferentia, ſi ad circularem reducamus, erit circiter pedum 7.897.834.380: quam peripheriam cum Luna ſpatio menſis periodici, ſive ſpatio 27 dierum 7 horarum & 43 ſcrupulorum primorum, hoc eſt, ſecundis ſcrupulis 2.360.580 conficiat, dividatur circumferentia 7.897.834.380 per ſcrupula ſecunda eidem competentia 2.360.580, & Quotus 3.346 dabit longitudinem arcus à Luna ſcrupulo ſecundo deſcripti, pedibus nempe Anglicis exhibitam; cujus quadratum 11.128.976 per diametrum 2.515.392.000 diviſum exhibebit ⌊00.443 partes pedis Anglici Centimilleſimas, ſcrupulo ſecundo a Luna cadente deſcribendas, & ſcrupulo primo 16⌊1 pedes circiter; eſt ergo vis centripeta ſive gravitas Lunæ ad vim centripetam corporum apud nos in ſuperficie telluris ut ⌊00.443, partes Centimilleſimæ unius pedis ad 16⌊1 pedes, hoc eſt, fere ut 1 ad 3.600. Atque adeo vis gravitatis verſus terram ad Lunæ diſtantiam eſt pars tantum termilleſima ſexcenteſima vis gravitatis apud nos.

III. Corporis, urgente quacunque vi uniformi accelerati, velocitates ſunt inter ſe ut tempora quibus vis illa uniformis imprimitur; hoc eſt, duplo tempore dupla velocitas, triplo tempore tripla velocitas, quadruplo quadrupla obtinebitur. Si enim vis accelerans ſit æquabilis & uniformis, ut hic ſupponitur, corpuſque adeo ſive prius quieſcat, ſive celeritate quacunque moveatur, & æquales perinde velocitatis gradus & augmentum æquale æquali tempore accipiat, manifeſtum eſt velocitatem corporis tempori eſſe ad amuſſim ubique proportionalem: ſi enim prima quavis temporis particula data certam quamvis velocitatem vis illa generare potuerit, conſimilem certe & æqualem velocitatem ſecunda æquali temporis particula generare poterit; conſimilem etiam & æqualem tertia æquali temporis particula generabit; atq; ita quarta, quinta, *&c.* temporis particula in infinitum. Unde integra velocitas erit ubique ut temporis ſpatium quo vis illa generans corpori imprimitur. *Q. E. D.*

Corollarium. Cum itaque per experimenta conſtet, corpora quævis vi gravitatis accelerata velocitatis incrementa tempori proportionalia ubique ſumere, liquet vim gravitatis uniformiter agere, atque corpora celerrime deſcendentia æque afficere atque quieſcentia: Unde corporum gravitas nulli aeris preſſioni, vel ætheris impulſui, vel materiæ cujuſvis ad motum conatui mechanico aſcribi debet. Omnes enim hujuſmodi impulſus vel conatus corpus quieſcens maxime urgerent, & quo celerius moveretur corpus, eo minus uſque & uſque urgere poterant, donec tandem celeritate genita impulſui generanti æquali facta, ceſſaret omnis impulſus, nec ulla motus acceleratio deinde ſequeretur.



Lemmata ad Propoſitionem (4.)

(1.) NUmeri impares ſibi continuo additi numeros omnes quadratos conficiunt. Sic unitas eſt imparium numerorum primus, & etiam quadratorum numerorum primus: Si autem numerus ternarius qui eſt imparium ſecundus unitati addatur, conficietur quaternarius, quadratorum ſecundus; ſi porro numerus quinarius imparium tertius quaternario hactenus acquiſito addatur, conficietur novenarius, quadratorum tertius, & ita in infinitum. Hujus Lemmatis haud ignobilis demonſtrationem duplicem afferemus, alteram è Taquetio, è penu proprio alteram. Tacquetius itaque ſic rem

$\frac{mu+nr}{m+n} = e$
soit p plus grand que n
$\frac{mu+np}{m+n} = f$
la vitesse qu'acquiert le corps n d'abord soit a
$nr+na = ne$
la seconde vitesse n'acquise b
$nf = np+nb$
$mu+nr = me+ne$
$+nr+na$
$mu-me = na$
$mu+np = mf+nf$
$+np+nb$
$mu-mf = nb$

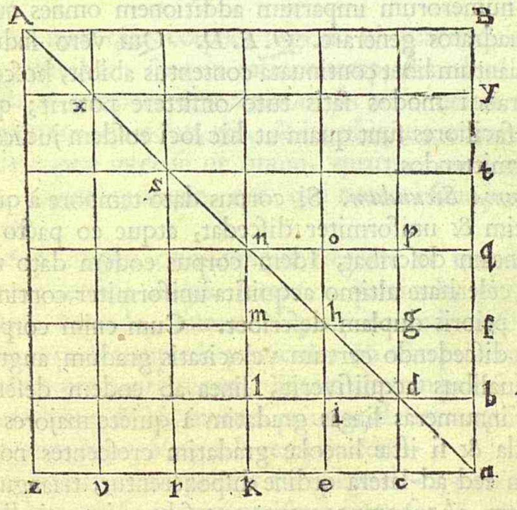
$\frac{na}{nb} = \frac{a}{b} = \frac{mu-me}{mu-mf}$

$\frac{u-e}{u-f}$

rem conficit, eſt, inquit, in progreſſione naturali imparium numerorum 1, 3, 5, 7, *&c.* ſumma tota æqualis quadrato numeri terminorum. Nam ex natura progreſſionis Arithmeticæ ſumma omnium terminorum æqualis eſt producto ex dimidio ſummæ extremorum in numerum terminorum ducto; atqui dimidia ſumma extremorum progreſſionis Arithmeticæ numerorum imparium ab unitate incipientium eſt par numero terminorum, (pergit enim ab unitate per binos, ubi terminorum numerus per ſingulos pergit) adeoque productum illud eſt quadratum numeri terminorum. Ergo eſt ſumma tota numerorum imparium ab unitate incipientium æqualis quadrato numeri terminorum. *Q. E. D.* Nos ſic demonſtramus. Sit *ac* vel *ab* unitas & *ad* uni-

Arith. Pract. l. 5. C. 1. Theor. 7.

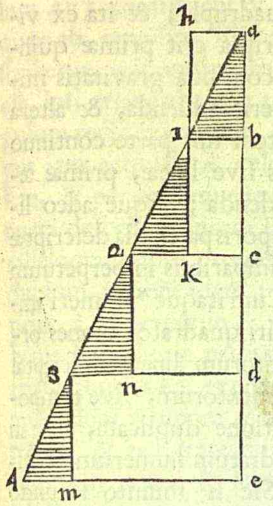
v. la science du calcul p. 160



tatis quadratum; dico quod additio numerorum imparium 3, 5, 7, *&c.* neceſſaria eſt ad conficienda quadrata. *a h a n a s a x a A* numerorum omnium ab unitate procedentium, quadrato enim *a d* ſunt utrinque à binis lateribus addenda quadrata, nempe *c d* *ed* & *df* & per diagonalem ad verticem alterum quadratum *ig* eſt addendum, unde ad conficiendum quadratum *ſecundum* ſive binarii numeri, addenda ſunt quadrata tria, ſive numerum imparem ſecundum. Deinde per omnes reliquos terminos augendi ſunt numeri quadratorum addititiorum binario, ſi quadrata reliqua ſunt conficienda; tria nempe quadrata tribus prius additis correſpondentia *ki* & *lh* & *gq*, ſunt primo addenda, dein aliud quadratum *hp*, eo quod quadratum juxta diagonalem additum bina quadrata correſpondentia ſuperaddi ſemper requirit, cui ultimo eſt addendum alterum diagonale quadratum *mo*. Et ita ubique: Numero addendorum ſemper ſe invicem binario ſuperante, quo quadrata *ad ah an as*, &c. omnia ab unitate cœpta perficiantur. Unde facile ſequitur continuam numerorum imparium additionem omnes numeros quadratos generare. *Q. E. D.* Qui vero inductione quantum libet continuata contentus abibit, hoſce demonſtrandi modos ſatis tuto omittere poterit; quanquam faciliores ſunt quam ut hic loci eoſdem judicarem prætermittendos.

Lemma Secundum. Si corpus dato tempore à quiete gradatim & uniformiter diſcedat, atque eo pacto certam lineam deſcribat, Idem corpus eodem dato tempore à celeritate ultimo acquiſita uniformiter continuata lineam prioris duplam deſcribet. Cum enim corpus à quiete diſcedendo certum velocitatis gradum augmentis æqualibus acquiſiverit, linea ab eodem deſcripta erit in innumeras lineas gradatim à quiete majores diſpeſcenda & ſi iſtæ lineolæ gradatim creſcentes non in longum ſed ad latera ordine diſponerentur, triangulum quoddam *ab* 1 componerent, aut ſaltem juxta indiviſibilium methodum Cavallerianam componere cenſendæ ſunt: Ubi punctum verticale trianguli *a*, punctum quietis, & baſis 1 *b* motus lineam ultimam deſignat, reliquæque lineolæ parallelæ diverſæ velocitatis lineas quas corpus pertranſierat. Jam ſi lineam maximam

1 *b*



1 *b* deſignatam eodem tempore plenario adhibitam ſuiſſe poſueramus, ſive à puncto *a* ad baſim 1 *b* à latere diſpoſitam tot lineas maximæ æquales, quot prius gradatim majores diſpoſueramus, compoſuiſſemus parallelogrammum, prioris nempe trianguli * duplum: Atque adeo motus uniformis quam à quiete gradatim acquiſitus dato tempore eſt duplo major. *Q. E. D.* * I. 41. *Elem.*

IV. Lineæ quas corpora urgente vi quacunque uniformi deſcribunt ſunt in ratione temporum duplicata; hoc eſt, ſi tempora ſint minuta ſecunda unum, duo, tria, quatuor, quinque, *&c.* & ita ubique; erunt lineæ totæ deſcriptæ inter ſe ut unum, quatuor, novem, ſedecim, viginti quinque, *&c.* qui numeri ſunt priorum quadrati.

Nam ſi corpus quodcunque urgente vi quacunque uniformi minima aliqua temporis particula, puta minuto uno ſecundo, lineam aliquam cadendo deſcribat, ſecunda æquali temporis particula, ob vim priori æqualem etiamnum continuatam, lineam alteram priori æqualem deſcribet; & ob motum prius gradatim acquiſitum in integrum jam per æquale tempus continuatum lineam etiam prioris † duplam deſcribet; ex cauſis itaque utriſque inter ſe conjunctis lineam prioris triplam deſcribet. Tertia vero temporis particula ob vim gravitatis etiamnum urgentem linea primæ æqualis deſcribetur; & ob velocitatem prioris ad *b* duplam per tempus æquale continuatam deſcribetur linea, prioris ab eadem cauſa pro- † Per Lem. 2.

fectæ

fectæ, dupla, hoc eſt, primæ quadrupla; & ita ex viribus conjunctis linea jam deſcripta erit primæ quintupla; atque ita porrò linea à continua gravitatis impreſſione primæ ſemper æqualis erit addenda, & altera linea primæ æqualis ob velocitatem una parte continuo auctam, atque adeo duæ partes ſive lineæ, primæ æquales, qualibet vice erunt addendæ; atque adeo lineæ integræ quavis ſucceſſiva temporis particula deſcriptæ erunt numeris imparibus in perpetuum deſignandæ. Cum itaque * numeri impares ſibi additi quadratos omnes ordine conficiant, horum momentorum lineæ deſcriptæ ſimul additæ lineas integras momentorum, ſive temporis particulas ſimul additas in ratione duplicata, ſive in ratione quadrati numeri ad quadratum numerum neceſſario exuperantes conficient. Sic ſi minuto ſecundo corpora ex vi gravitatis ferantur deorſum per ſedecim circiter pedes Anglicanos, uti experientia conſtat; duobus ſecundis per ſexaginta quatuor pedes, & tribus per pedes centum quadraginta quatuor circiter deorſum ferentur.

* *Per Lem.* 1.

Vel ſic, ex mente Galilæi, in *Syſtemate ſuo Coſmico* propoſitio demonſtrabitur. Æqualia tempora per lineas æquales *ab bc cd de*, & velocitas in fine primi temporis per lineam *b* 1 exponatur: Cum vero velocitas iſta quam eo loci habet corpus cadens non ſimul & ſemel ſed certo temporis ſpatio per lineam integram *ab* expoſito, ex continua & uniformi vi accelerante gradatim acquiſita fuerit, uti jam diximus, itaque neceſſe eſt, ut reliquos omnes minores velocitatis gradus attigerit prius quam velocitatem *b* 1 acquireret; unde priores iſtæ velocitatis gradus per lineas minores à partibus temporis *ab* lineæque 1 *b* parallelas ductas exponentur; & cum † velocitas cum tempore uniformiter creſcat, lineæ iſtæ juxta indiviſibilium methodum triangulum *ab* 1 conſtituent & component. Tota itaque linea quæ ab omnibus iſtis velocitatibus ſimul junctis deſcribetur, erit aggregato omnium iſtarum linearum, hoc eſt, ipſi triangulo *ab* 1 proportionalis; & per idem triangulum recte exponetur. Secundo vero tempore cum corpus jam acquiſierit velocitatem lineæ *b* 1 proportionalem, & per eandem expoſitam, ea ſola velocitate continuata deſcribet lineam lineæ prioris duplam, & per parallelogrammum proinde *ab* 1 *h* vel *b* 1 *kc* trianguli *ab* 1 duplum exponendam; & inſuper velocitate nova, ut prius, à vi perpetuo & uniformiter urgente orta deſcribetur linea lineæ primæ æqualis; & proinde per æquale triangulum 1 *k* 2 exponenda; ergo ſi vim utramque ſimul addas tempore ſecundo, linea deſcripta erit prioris tripla; & per trapezium *b* 1 2 *c* exponenda; & ſumma linearum primo & ſecundo tempore deſcriptarum, erit ad lineam primo tempore ſolo deſcriptam, ut triangulum *ac* 2 ad triangulum *ab* 1; hoc eſt, in duplicata ratione laterum homologorum *ac* & *ab* tempora exponentium, ſive ut temporum ipſorum quadrata. Pariter tertio tempore corpus celeritate hactenus acquiſita, ſive motus jam acquiſiti mera permanentia, lineam per parallelogrammum *c* 2 *nd* exponendam deſcribet; & vi addititia nova ex gravitate etiamnum uniformiter urgente orta lineam per triangulum 2 *n* 3 exponendam deſcribet. Unde linea tertio tempore deſcripta erit primæ quintupla, & per trapezium 2 *cd* 3 exponenda; & ſumma linearum primo, ſecundo, & tertio tempore deſcriptarum, erit ad lineam primo tempore ſolo deſcriptam, ut triangulum *ad* 3 ad triangulum *ab* 1, ſive ut temporum *ad* & *ab* quadrata, & ita porro in infinitum. *Q. E. D.*

Vid. Fig. p. 93.

† *Prop.* 3. *ſupra.*

Corollarium. Cum ex prius demonſtratis celeritas ſit ubique tempori proportionalis, & cum lineæ à corporibus decidentibus deſcriptæ ſint in temporum ratione duplicata, ſive ut quadrata temporum, erunt etiam eædem lineæ in celeritatum ratione duplicata, ſive ut quadrata velocitatum: Sic, exempli gratia, ſi duorum cor-

corporum cadentium in terram velocitates ultimo acquiſitæ ſint inter ſe ut numerus binarius eſt ad unitatem, erunt caſus altitudines inter ſe ut numerus quaternarius ad unitatem. Si unius velocitas ſit alterius velocitatis tripla, erit ejuſdem deſcenſus altitudo, alterius altitudinis noncupla, & ita porro in infinitum.

Novemb. 13. 1704.

X.

V. SI corpus celeritate ea quam in fine deſcenſus acquiſivit ſurſum tendere cœperit, ad eandem altitudinem eodem tempore aſcendet unde prius deſcenderat; & velocitatem ſuam æqualibus temporibus æqualiter amittet.

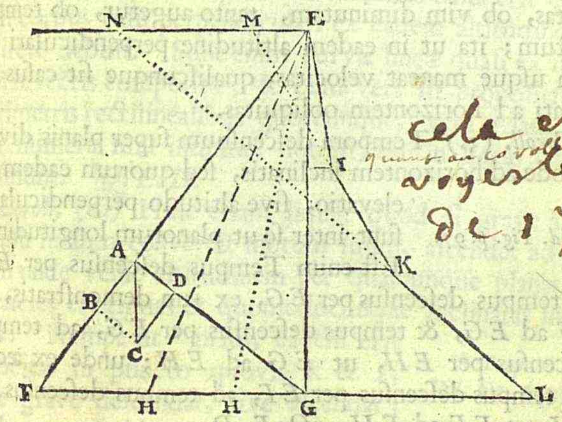
Nempe ex vi demonſtratorum in propoſitione poſtrema velocitas ſemel acquiſita ut $3\,d$ parallelogrammum, ſive deſcendendo ſive aſcendendo, æquale prorſus ſemper deſcribet; ſed cum nova vis gravitatis in deſcenſu adauget iſtud parallelogrammum triangulo $3\,m\,4$ & idem in aſcenſu æquali triangulo diminuit, liquet trapezium jam aſcendendo deſcribendum idem fore cum parallelogrammo in deſcenſu prius deſcripto; $3\,2\,c\,d$, atque ita porro: Unde lineæ deſcriptæ hiſce trapeziis proportionales, & velocitates iſtorum trapeziorum baſibus proportionales, erunt ubique datis temporibus eædem in aſcenſu quæ prius in deſcenſu fuerant; donec tandem corpus ad punctum *a* aſcenſus ultimum eodem tempore pertingat, quo ab eodem prius deſcenderat. *Q. E. D.*

VI. Celeritates gravium ſuper diverſis planorum inclinationibus deſcendendo acquiſitæ æquales ſunt, ſi planorum elevationes ſive altitudines perpendiculares fuerint æquales.

Sit *EG* linea horizonti perpendicularis, & *EF* linea

nea ad horizontem in angulo quocunque inclinata, & ſit *GA* ad *EF* perpendicularis; Dico quod corpus grave quodcunque eandem velocitatem acquiret per lineam inclinatam *EF* deſcendendo, quam caſu perpendiculari per lineam *EG* acquirere poſſet. Eſt enim ex prius demonſtratis vis gravitatis in plano obliquo *EF*, ad vim gravitatis in perpendiculari *EG*, ut *AB*, ad *AC*, ſive, ob ſimilia triangula *ACB EFG*, ut *EG* ad *EF*; ſive etiam ob ſimile hiſce triangu-

Coroll. 2. *Met. Leg.* 23.



cela est faux
voyes les memoires
de 1704

lum *EGA*, ut *EA* ad *EG*. Unde ob vires diverſas erunt motus & velocitas corporis per *EA* in plano inclinato deſcendentis, ad motum & velocitatem corporis per *EG*† deſcendentis, dato illo deſcenſus perpendicularis tempore, ut *EA* ad *EG*, ſive ut *EG* ad *EF*; & velocitas deſcendentis per *EA*, ad velocitatem deſcendentis per *EF*, in ſubduplicata ratione *EA* ad *EF*, hoc eſt, in ratione *EA* ad *EG*. Eſt ergo velocitas corporis in puncto *A* ad velocitatem in puncto *F*, & ad velocitatem deſcendentis perpendiculariter in puncto *G*, in eadem ratione, nempe lineæ *EA* ad lineam *EG*, vel

† VI. 8. *Elem.*

lineæ EG ad lineam EF: Unde æquantur illæ velocitates sibi invicem. *Q. E. D.*

Corollarium (1.) Dum corpus perpendiculariter cadens describit lineam EG, corpus oblique cadens describit lineam EA, per perpendicularem GA determinatam.

Corollarium (2.) Tempus casus perpendicularis, ad tempus descensus obliqui, est in subduplicata ratione lineæ EA ad lineam EF; sive ut linea EA ad lineam EG, hoc est, in ratione altitudinis perpendicularis EG ad lineam obliquam EF. Unde quanto minuitur velocitas, ob vim diminutam, tanto augetur, ob tempus auctum; ita ut in eadem altitudine perpendiculari eadem usque maneat velocitas, qualiscunque sit casus inclinati ad horizontem obliquitas.

Coroll. (3.) Tempora descensuum super planis diversimode ad horizontem inclinatis, sed quorum eadem est elevatio, sive altitudo perpendicularis, sunt inter se ut planorum longitudines. Est enim Tempus descensus per EF, ad tempus descensus per EG, ex jam demonstratis, ut EF ad EG, & tempus descensus per EG, ad tempus descensus per EH, ut EG ad EH; unde ex æquo erit tempus descensus per EF, ad tempus descensus per EH, ut EF ad EH. *Q. E. D.*

Vid. Fig. p. 97.

Coroll. (4.) Si ex altitudine eadem perpendiculari descendat mobile continuato motu per quotlibet, & qualibet plana contigua, puta EI IK KL utcunque inclinata, semper eandem in fine velocitatem acquiret: quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine. Nempe ex Hugenii mente eadem erit cadentis velocitas juxta jam demonstrata ad punctum I, sive per EI, sive per MI; unde eadem etiam velocitas erit quoque pergendo per IK eadem nimirum quæ per NK, unde quoque eadem velocitas erit ad punctum K sive per EI & IK sive per MK, vel etiam per NK; unde sequetur eadem velocitas pergendo per KL, & ad punctum L, quæ esset si descensus esset per planum unicum NL, vel per duo MK & KL, vel etiam per tria EI IK KL; eadem nempe ex jam demonstratis quam mobile cadens perpendiculariter ad punctum G acquirere potuit. *Q. E. D.*

Vid. Fig. p. 97.

Coroll. (5.) Hinc liquet etiam, ex ejusdem Hugenii mente quod, per circuli circumferentiam, vel cycloidem, vel curvam quamlibet lineam descendente mobili, eadem semper acquiretur velocitas, si ab æquali altitudine descenderet: & quod ista velocitas tanta erit quantam corpus casu perpendiculari ex eadem altitudine acquirere debuit. Sunt enim curvæ lineæ quasi ex innumeris rectis compositæ; & cum vera sit propositio in perimetris rectilinealibus quotcunque, vera etiam erit ubi numera sunt infinitæ, hoc est, ubi in lineas curvas desinunt. *Q. E. D.*

Coroll. (6.) Hinc etiam liquet quod si grave à descensu sursum convertat motum suum, ascendet ad eandem unde venit altitudinem per quascunque planas superficies contiguas & quomodocunque inclinatas incesserit. Nempe ut * prius, eadem erit velocitas in puncto quovis K & I, sive grave descendat, sive ascendat; unde certe & idem erit velocitatis ascendentis vel descendentis Limes sive terminus ad punctum E. Unde etiam si infinita fuerit planorum multitudo, hoc est, si superficies sit curva, mobile per hanc curvam quoque ad eam ex qua venit altitudinem nec ultra, assurget.

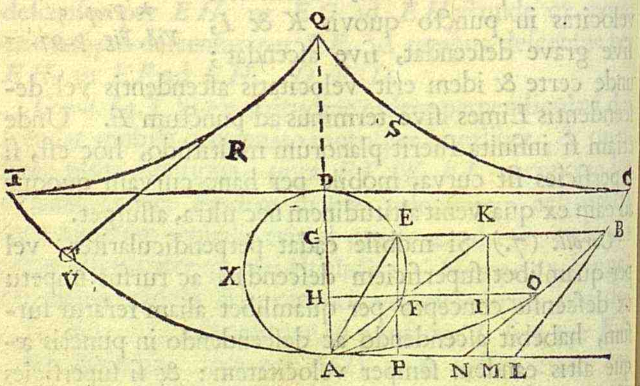
* *Prop.* 5.
Vid. Fig. p. 97.

Coroll. (7.) Si mobile cadat perpendiculariter, vel per quamlibet superficiem descendat, ac rursus impetu ex descensu concepto per quamlibet aliam feratur sursum, habebit ascendendo ac descendendo in punctis æque altis eandem semper velocitatem: & si superficies ascensus sit superficei descensus similis & æqualis; æquali tempore ascendet quo prius descenderat. Hæc nempe adeo liquido ex jam demonstratis sequuntur, ut pluribus non sit opus.

Lemmata ad Propositionem septimam.

Lem. (1.) SI qua curva linea eo modo sit comparata, ut vim gravitatis pro longitudinis suæ ratione ubique sustineat; ita ut quo lineæ pars describenda sit major, eo & vires acceleratrices sint etiam in eadem omnino ratione majores; atque ut quo lineæ pars describenda sit minor, eo & vires acceleratrices sint in eadem pariter ratione minores, tempora descensus per istiusmodi curvam, sive arcus descripti sint majores sive minores, erunt sibi invicem semper æqualia. Velocitas enim dato tempore est ut vis motrix; si itaque linea describenda sit etiam ut eadem vis motrix, necesse est ut sit pariter ut velocitas; si autem motus velocitas sit ubique ut linea describenda, palam est lineam quamcunque sive parvam sive magnam eodem tempore describi debere. Quod autem Cyclois hujusmodi sit linea curva in sequentibus patebit. Esto itaque.

Lemma (2.) Sit *DAC* semicyclois, *DFA* semicir-



culus genitor, & à puncto quovis *B* in cycloide ducatur linea *BE* basi *DC* parallela, occurrens semicirculo genitori in *E*; ducatur chorda *AE*, & à puncto *B* in cycloide linea *BL* chordæ *AE* parallela: Erit Linea *BL* cycloidis Tangens in puncto *B*.

Lemma (3.) Et *AB* arcus cycloidis erit æqualis duplæ chordæ *AE*. Hæc duo postrema Lemmata uti prius observatum ex Elementis Cycloidis constant: & à Cl. Wrennio nostro aliisque demonstrata extant.

Vid. Wallis. Op. Vol. 1. p. 533. &c.

VII. In Cycloide, cujus axis ad perpendiculum erectus est, vertice deorsum spectante, tempora descensus quibus mobile à quocunque in ea puncto dimissum ad punctum imum verticis pervenit sunt inter se semper æqualia.

Sint arcus in Cycloide quicunque *BA* & *OA*, *BL* & *ON* tangentes in punctis *B* & *O*, iisque, per Lemma Secundum, respective parallelæ semicirculi genitoris chordæ *EA* & *FA*; producatur *AF* ad punctum *K*: Sunt itaque, per Lemma Tertium, lineæ describendæ à mobili nunc ad *B*, nunc ad *O* posito, ut chorda *EA* ad chordam *FA*: Est vero in eadem ratione vis secundum tangentem *BL*, eive parallelam *EA*, ad vim secundum tangentem *ON*, eive parallelam *AF*. Nam * ut quadratum *EA*, ad quadratum *FA*, ita sinus versus *EP*, ad sinum versum *FP*; vel ita *KM* ad *FP*; vel ita *KA* ad *FA*. Est ergo Chorda *AE* inter Chordam *AF* & lineam *AK* media Geometrice proportionalis; atque adeo *AF AE AK* $\div\div$. Sed ex prius demonstratis est vis gravitatis in plano *AE*, ad vim gravitatis in plano *AF*, ut *AK* ad *AE*; hoc est, ut *AE*, chorda, ad *AF* chordam; atque ita ubique. Erat autem linea describenda modo ut eadem *AE* ad eandem *AF*; atque proinde vis acceleratrix est ubique in eadem ratione atque linea describenda, & tempora descensus ex consequenti sunt ubique æqualia. *Q. E. D.*

* *Prop. 2. supra.*

Coroll. 2. Post Leg. Mot. 23. prius.

Coroll. (1.) Si itaque integras alias semicycloides *QRT QSC*, prioribus *AT* & *AC* similes & æqua-

les,

les, quarum vertices basin alterius ad puncta *T* & *C* contingunt efformemus, & corpus grave *V* filo *QRV* ipsi *QDA* sive duplæ *DA* æquali à centro *Q* pendeat; & inter istas semicycloides *QRT QSC* agitetur, grave pendulum ex fili *QRV* evolutione cycloidem integram primariam describet, uti ex Cycloidis affectionibus constat; & cujuscunque amplitudinis oscillationes usque ad omnium maximam per arcum *TAC* iisdem ad amussim temporibus conficiet; atque ita ut appensi corporis centrum oscillationis in ipsa curva *TAC* semper versetur.

Coroll. (2.) Cum oscillationes quævis in cycloide sint semper isochronæ, & cum oscillationes minimæ in arcu minimo circuli, cujus radius est *QA*, & in arcu minimo Cycloidis *TAC*, ob arcus circuli & Cycloidis in puncto imo, hoc in casu plane coincidentes, sint eædem; liquet tempus oscillationis cujusque in Cycloide æquale esse tempori oscillationis minimæ in circulo, cujus radius est diametri circuli genitoris duplus.

Coroll. (3.) Ob eandem etiam in puncto imo arcuum minimorum circuli & Cycloidis coincidentiam, erunt & oscillationes in circulo eo magis isochronæ quo arcus descripti sunt minores; ita ut in arcubus perexiguis pro isochronis haud immerito haberi possint.

Coroll. (4.) In horologiis itaque oscillatoriis, quæ longioribus utuntur pendulorum corporum filis vel retinaculis quibuscunque, tempora oscillationum ob arcus minores descriptos magis ad æqualitatem vergunt quam in iis quæ brevioribus filis utuntur; atque adeo horologia priora posterioribus sunt longe anteferenda.

Coroll. (5.) Tempora oscillationum per diversas Cycloides sunt in ratione subduplicata Cycloidum vel radiorum *QA*: sive longitudines pendulorum sunt in ratione temporum duplicata: hoc ex prius demonstratis huic casui applicandis facile constare poterit. Sed notandum, idem etiam esse de temporibus oscillationum in circulis æque ac in Cycloidibus intelligendum: Sic sane

Prop. 4. prius.

quia

quia pendulum 39,25 digitorum oscillationes quasvis in Cycloide, & minimas etiam in circulo tempore minuti unius secundi conficit, pendulum 157 digitorum oscillationes consimiles tempore minutorum duorum secundorum, & pendulum 353,25 digitorum oscillationes consimiles tempore minutorum secundorum trium est confecturum.

Coroll. (6.) Cum tempora oscillationum quarumvis sint in sola Cycloide æqualia; & eo tantum nomine in arcubus minimis circularibus pro æqualibus habendæ quod circa punctum imum nec alibi arcus isti circulares cum Cycloidis arcubus fere coincidant, dum alias arcus circulares majores ab arcubus majoribus Cycloidis satis longe discrepent & discedant, manifestum est pendula in diversis circuli arcubus majoribus oscillantia oscillationes minime isochronas obtinere, & eo minus isochronas qua major est arcuum descriptorum differentia. Sic sane, ex Hugenii calculo, est tempus descensus per totum circuli quadrantem, ad tempus per arcum minimum, fere ut 34 ad 29, nimirum si oscillationes in vacuo peractas sine ulla aeris resistentia supponamus. Unde sane sequitur differentiam remporum in hoc casu ultra septimam temporis totius etiam majoris partem assurgere, & proinde esse experimentis quibusvis satis sensibilem; si nempe temporis spatium 10 & 20, plurimve oscillationum maximarum cum totidem minimarum temporis spatio conferamus.

Horolog. Oscill. pag. 9.

Coroll. (7.) Quoniam constat per experimenta pendulorum & calculum inde initum quod oscillationes singulæ ex descensu & ascensu compositæ, ubi penduli longitudo est 96,85 digitorum, quælibet nempe in cycloide & minimæ in circulo; spatio minutorum tertiorum 94,25, sive secundi unius & tertiorum 34,25 peragantur; & quoniam ex Hugenii demonstratis Tempus hujusce oscillationis est ad tempus casus perpendicularis per diametrum circuli genitoris qua-

drupliduplicatam, sive per longitudinem penduli duplicatam digitorum 193L76, hoc est, pedum Anglicorum 16L1, ut est circuli circumferentia ad diametrum duplicatam, sive ut 94L25 minuta tertia ad 60 ejusdem generis minuta; sive ad minutum secundum unicum. [Est est enim ut 355 : ad 226 :: ita : 94″L25 : ad 60″ = 1′.] Inde sequitur, quod unius secundi spatio corpus grave per 16L1 pedes Anglicos sive $15\frac{1}{12}$ Parisienses vi gravitatis suæ descendet. Quæ sane descensus velocitas, ex pendulorum experimentis deducta, cum cadentium corporum experimentis à Cl. Hugenio captis apprime convenit; atque adeo pro velocitate descendentium corporum vera est indubie habenda.

Horolog. Oscill. pag. 57, 58. Et De vi Centrifuga Prop. 12.

Horolog. Oscill. p. 155, 156.

Coroll. (8.) Data ergo corporis cadentis spatio unius secundi linea perpendiculari, datur una & linea, seu perpendicularis seu obliqua temporis spatio quocunque sive majori sive minori ex eadem gravitatis vi describenda: quippe quæ sit ubique in ratione temporis duplicata. Sic in directe cadentibus, ut temporis cujusvis, puta minutorum secundorum decem, quadratum = 100 ad unius minuti secundi quadratum = 1. Ita erunt 1610 pedes Anglici minutis illis decem descripti, ad 16L1 pedes Anglicos unico minuto, uti jam vidimus, descriptos, atque ita ubique. Neque multo aliter in obliquis res se habet. Lineæ enim descensus in plano quolibet obliquo sunt etiam pari ac priores jure inter se ut quadrata temporum: id tantum interest, quod vis gravitatis continuo agens minuenda est hoc in casu in ratione lineæ perpendicularis ad obliquam; nempe EG ad EF, vel EA ad EG. Cum enim, uti antea ostendimus, corpus grave obliquum per lineam EA eodem tempore descendit quo perpendicu-lare per lineam EG. Liquet vires motrices esse ubique in eadem ratione. Ponamus itaque corpus grave per planum adeo obliquum descendere, ut EG sit tertia tantum pars ipsius EF, vel, quod perinde est, ut EA sit tertia tantum pars ipsius EG; Oportebit tantum gravitatis vim in eadem ratione diminuere, ita ut spatio minuti unius secundi corpus per lineam solum pedum 5L37 descendere supponatur, & calculus ut prius in directe cadentibus administrabitur.

Prop. 4. prius.

Vid. Fig. p. 97. Coroll.(1.) Prop. 6. prius.

Novemb. 27. 1704.

XI.

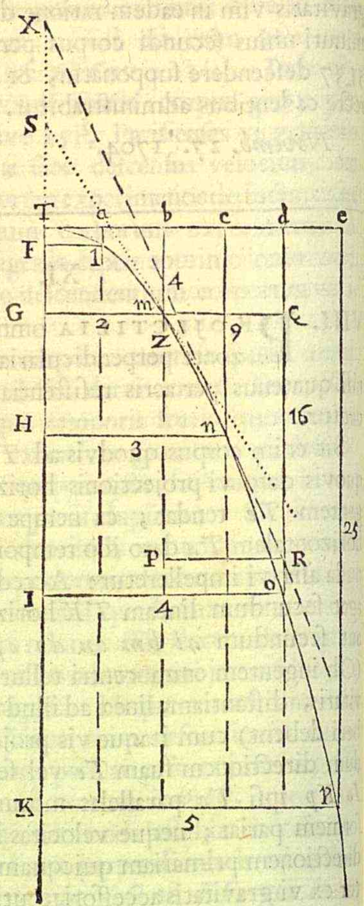
VIII. PROJECTILIA omnia quæ non sunt horizonti perpendicularia Parabolas describunt, nisi quatenus per aeris resistentiam aliquantulum retardantur.

Sit enim corpus quodvis ad T positum, & tempore quovis dato vi projectionis horizontalis secundum tangentem Te tendat; ea nempe velocitate qua lineam horizontalem Ta dato illo tempore describeret, si modo nulla alia vi impelleretur: Accedat jam vis gravitatis & agat secundum lineam TK horizonti perpendicularem, aut secundum al bm cn do ep ipsi TK parallelas; (Ob ingentem enim centri telluris, quo tendit vis gravitatis, distantiam, lineæ ad illud ductæ pro parallelis haberi debent) cum itaque vis projectionis motum secundum directionem suam Te vel secundum FI Gm Hn Io Kp ipsi Te parallelas motum æquabilem & uniformem pariat; neque velocitas hujus motus secundum directionem primariam quicquam patitur ex vi gravitatis accessoria, uti olim ostendimus, Corpus in fine primi temporis reperietur alicubi in linea al, in fine secundi temporis alicubi in linea bm, in fine tertii in cn, quarti in do,

Coroll. 1. Post Leg. Mot. 22.

do, quinti in ep lineis nempe iſtis æquali ubique intervallo inter ſe diſtantibus. Accedat jam vis gravitatis, & dum corpus vi ſola projectili lineam Ta deſcriberet, vi ſola gravitatis per lineolam quamvis TF vel al acceleretur, quoniam itaque ex hac vi gravitatis, ſi ea ſola agitaretur, corpus in fine primi temporis ad lineam Fl, accederet; & cum velocitas hujus motus deorſum pari ac prioris ratione nihil patiatur ex vi projectionis acceſſoria, reperietur etiamnum alicubi in linea Fl: Sit itaque al partis unius, bm partium 4, cn partium 9, do partium 16, ep partium 25, & ita porro in infinitum; nempe ut temporum ſive diſtantiarum Ta Tb Tc Td Te quadrata: Liquet igitur ex prius demonſtratis corpus in fine temporis ſecundi repertum iri alicubi in linea Gm, in fine tertii temporis in linea Hn, quarti in Io, quinti in Kp, & ita porro in infinitum.

Prop. 4. prius.



Neceſſe

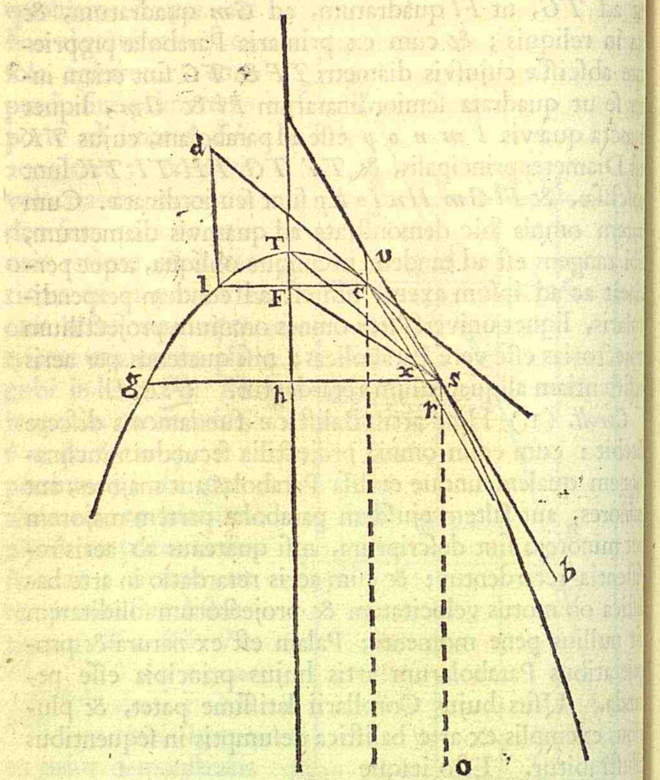
Neceſſe eſt ergo ut projectile quovis tempore exeunte ex conjunctis viribus in linearum iſtarum interſectionibus reperiatur, nempe in fine primi temporis corpus in puncto l reperietur, in fine ſecundi in puncto m, in fine tertii in n, quarti in o, quinti in p, & ita ubique. Quare cum ex natura hujuſmodi motus compoſiti TF, ſit ad TG, ut Fl quadratum, ad Gm quadratum, & ita in reliquis; & cum ex primaria Parabolæ proprietate abſciſſæ cujuſvis diametri TF & TG ſint etiam inter ſe ut quadrata ſemiordinatarum Fl & Gm, liquet puncta quævis l m n o p eſſe ad parabolam, cujus TK eſt Diameter principalis, & TF TG TH TI TK ſunt abſciſſæ, & Fl Gm Hn Io Kp ſunt ſemiordinatæ. Cum autem omnia hic demonſtrata ad quamvis diametrum, ubi tangens eſt ad eandem utcunque obliqua, æque pertineat ac ad ipſum axem, ubi eſt ad eundem perpendicularis, liquet univerſaliter omnes omnium projectilium trajectorias eſſe vere Parabolicas; niſi quatenus per aeris reſiſtentiam aliquantulum retardantur. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Hinc artis Baliſticæ fundamenta diſcere licebit: cum enim omnia projectilia ſecundum inclinationem qualemcunque emiſſa Parabolas aut majores, aut minores, aut ſaltem ejuſdem parabolæ partem majorem aut minorem ſint deſcriptura, niſi quatenus ab aeris reſiſtentia retardentur; & cum aeris retardatio in arte baliſtica ob motus velocitatem & projectorum ſoliditatem ſit nullius pene momenti; Palam eſt ex natura & proprietatibus Parabolarum artis hujus principia eſſe petenda. Uſus hujus Corollarii latiſſime patet, & pluribus exemplis ex arte baliſtica deſumptis in ſequentibus illuſtrabitur. Eſto itaque

Coroll. (2.) Data projectionis velocitate, quicunque ſit elevationis angulus, dabitur una Diſtantia foci Parabolæ quam projectile deſcribit à projectionis incipientis puncto. Sit s punctum projectionis, ubi projectile per tangentem sv vibratum in curva parabolica incipit incedere, & ſit sv linea quovis dato tempore à vi pro-

jectili

jectili sola describenda; sit etiam vc vel sr lineola eodem dato tempore, vi gravitatis sola, describenda: In fine itaque istius temporis projectile reperietur in Parabolæ puncto c, & ob datam gravitatis, æque ac projectionis vim, dabuntur etiam, qualiscunque sit tangentis ad horizontem inclinatio, lineæ vc sive sr &



sv sive cr, hoc est, diametri so abscissa & ejusdem semiordinata; quarum duarum tertia proportionalis est Latus rectum ad verticem s pertinens; quod itaque ex datis prioribus necessario dabitur. Unde & istius lateris recti pars quarta, quæ ipsa est verticis s à parabolæ foco distantia una dabitur. Qamquam itaque ex eadem pro-

projectionis velocitate diversæ Parabolæ, in diversis elevationibus describantur, erunt tamen earum omnium foci à vertice sive puncto motus incipientis æqualibus intervallis distantes, & proinde in circuli cujus centrum est in isto puncto, circumferentia positi. Q,E.D.

Coroll. (3.) Jactus itaque horizontalis longissimus is est qui secundum lineam inter horizontalem & perpendicularem mediam, sive in angulo 45 graduum supra horizontem dirigitur. Nempe cum vertex principalis Parabolæ cujusvis à projectilibus descriptæ sit in summa projectilis altitudine, sub quo in ipso axe, focus figuræ F collocatur; cum ejusdem foci à vertice s distantia ex corollario postremo detur; cum etiam jactus horizontalis longissimus per ordinatam ad axem per verticem s transeuntem eg omnino mensuretur; tum certe jactus horizontalis erit longissimus ubi verticis s à foco distantia sF cum ordinata ad axem sg coincidit: Alias enim ob datam foci distantiam $sFsg$ erit minor quam sF duplicata: Sed ubi coincidit sF cum sg erit sg ipsius sF dupla, atque adeo jactus horizontalis sg erit eo loci omnium longissimus, ubi sF distantia foci à vertice s cum sg coincidit; hoc est, ubi angulus vsh est semirectus: Angulus enim vsF à tangente vs & verticis s à foco distantia sF comprehensus æqualis semper est angulo bso, ab eadem tangente bs, & Parabolæ diametro so comprehensus. Si itaque angulus bso sit semirectus, erit etiam & vsF semirectus, atque proinde angulus osF erit rectus, & linea sF evadet sh, & cum ordinata sg coincidet, fietque ordinata sg jactus omnium longissimus.

Coroll. (4.) Cum itaque Parabolæ tangens eo solo in casu cum diametro angulum semirectum comprehendat, ubi eandem ad lateris recti principalis per focum transeuntis terminum contingit, patet jactum horizontalem longissimum quemvis intra curvæ parabolicæ partem supra latus rectum positam, existente foco in ipsa linea horizontali, esse comprehensum; & altitudinem summam

mam in hoc casu ab horizonte esse *TF* lateris recti principalis quadrantem.

Coroll. (5.) Si angulus elevationis à semirecto æqualiter deficiat, sive elevatio sit major sive minor, jactus longissimus horizontalis æqualiter minuetur. Nimirum ob angulum rectum *hso*, & angulos *vsF osb* semper sibi invicem æquales, eorum sive excessus supra rectum, sive defectus, à recto æquales æquabuntur angulo *Fsh*, sive focus *F* sit supra lineam horizontalem *sg*, ut in elevatione majore, sive sit infra eandem, ut in minore. Datis autem angulo *Fsh* acuto, & recto *Fhs*, & latere *Fs*, datur unà latus *sh* axis semiordinata, & *sg* ordinata jactum horizontalem determinans. Sic sane in projectionibus æque velocibus ubi anguli elevationis sunt graduum 40 & graduum 50 jactus horizontalis erit utrinque æqualis, & perinde in gradibus 30 & 60, in gradibus 20 & 70, & ita ubique, uti in arte balistica est notissimum.

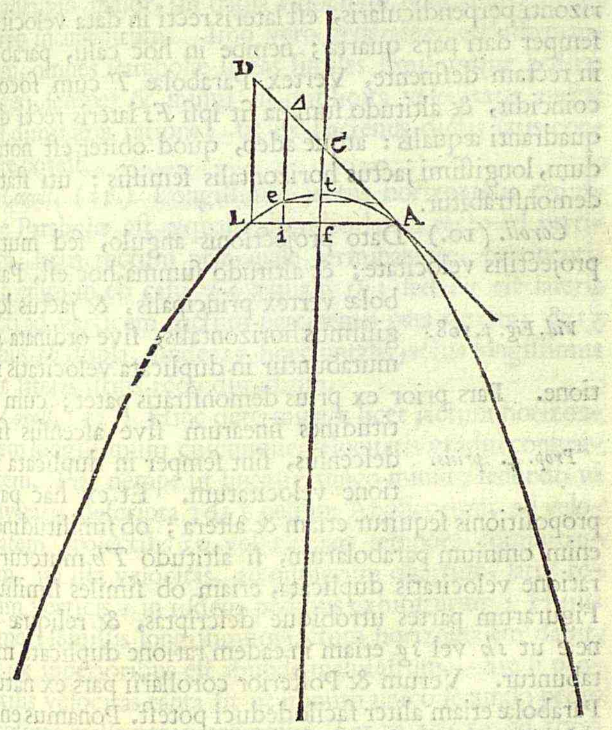
Coroll. (6.) Distantiæ horizontales ex data velocitate genitæ in diversis elevationis angulis sunt ut angulorum tangentis & perpendicularis duplicatorum sinus recti. Nempe ut *gs* ubique ita est ejusdem dimidium *hs*: In triangulo autem rectangulo *Fhs* ob datum radium *Fs*, & angulum *hFs*, anguli tangentis & perpendicularis *bso* duplum, erit *sh* ubique istius anguli sinus rectus, adeoque erunt semper distantiæ horizontales inter se ut sinus isti.

Coroll. (7.) Tempora jactus cujusque horizontalis ex data velocitate in diversis elevationis angulis sunt inter se ut angulorum elevationis sinus recti. Projiciatur corpus unum secundum angulum elevationis *lcd*, & alterum secundum angulum *LAD*; dico quod tempus quo corpus prius per arcum parabolicum *cTl* pertingit ad punctum *l*, in eodem cum puncto à plano horizontali situm, erit ad tempus quo corpus posterius per arcum *AtL* pertingit ad punctum *L* in eodem cum puncto

Vid. Fig. p. 108, & 111.

puncto

puncto *A* plano horizontali situm, ut sinus anguli *dcl* ad sinum anguli *DAL*. Sit apud figuras hasce Δ*A* æqualis ipsi *dc*: Erit etiam Δ*e* (ob temporis æqualitatem, quo corpora simul lineas æquales *dc* & Δ*A* vi sola projectili describerent) ipsi *dl* æqualis. Est autem ex natura Parabolæ prius exposita, *DL* ad Δ*e* ut *D*Δ quadratum, ad Δ*A* quadratum; sive ut *DL* quadratum, ad



Di quadratum. Ergo *DL* Δ*i* Δ*e* sunt tres lineæ continue proportionales: Et cum lineæ *DL* Δ*e* sint in duplicata ratione temporum, erunt Δ*i* & Δ*e* in ipsa ratione temporum: Est ergo Tempus prius, ad tempus posterius ut Δ*e* sive *dl*, ad Δ*i*; hoc est, ut sinus angulorum elevationis *dcl* & *DAL*. Q.E.D.

Prop. 4. *prius.*

Coroll.

Coroll. (8.) Altitudines maximæ corporum data velocitate projectorum in diversis elevationis angulis sunt inter se ut quadrata sinuum rectorum angulorum elevationis. Nempe ut dl vel Δe quadratum ad Δi quadratum, ita altitudines maximæ dl vel Δe, ad DL. Q.E.D.

Coroll. (9.) Altitudo omnium maxima corporum velocitate data projectorum, ubi nempe projectio est horizonti perpendicularis, est lateris recti in data velocitate semper dati pars quarta; nempe in hoc casu, parabola in rectam desinente, Vertex Parabolæ T cum foco F coincidit, & altitudo summa fit ipsi Fs lateris recti dati quadranti æqualis: atque adeo, quod obiter est notandum, longissimi jactus horizontalis semissis: uti statim demonstrabitur.

Coroll. (10.) Dato projectionis angulo, sed mutata projectilis velocitate; & altitudo summa, hoc est, Parabolæ vertex principalis, & jactus longissimus horizontalis, sive ordinata sg, mutabuntur in duplicata velocitatis ratione. Pars prior ex prius demonstratis patet; cum altitudines linearum sive ascensus sive descensus, sint semper in duplicata ratione velocitatum. Et ex hac parte propositionis sequitur etiam & altera; ob similitudinem enim omnium parabolarum, si altitudo Th mutetur in ratione velocitatis duplicata, etiam ob similes similium Figurarum partes utrobique descriptas, & reliquæ lineæ ut sh vel sg etiam in eadem ratione duplicata mutabuntur. Verum & Posterior corollarii pars ex natura Parabolæ etiam aliter facile deduci potest. Ponamus enim velocitatem esse duplo quam prius majorem, ergo quo tempore projectile prius lineam sv describeret, posterius lineam ipsius sv duplam describet; sed ob uniformitatem vis gravitatis linea vc sive sr non mutabitur: Est ergo ut vc sive sv data, ad lineam ipsius sv duplam, ita ista linea dupla ad lineam alteram, verticis s latus

Vid. Fig. p. 108.

Prop. 4. *prius.*

rectum; nempe lateris recti ad verticem istum prius pertinentis quadruplum: Unde quarta hujus lateris recti pars, sive sF erit quartæ prioris lateris recti partis sF etiam quadrupla; & ob triangula in utroque casu similia sFh sFh lineæ sh & sg ipsarum sh & sg erunt etiam quadruplæ; & ita in reliquis. Est ergo in velocitate duplo majore jactus horizontalis longissimus quadruplo major, in tripla velocitate noncuplus, & ita porro in infinitum. Imo vero generaliter est affirmandum, omnes Parabolæ lineas similes similiterque positas augeri semper & minui in duplicata velocitatis auctæ vel diminutæ ratione; ut ex hactenus dictis satis constare potest.

Coroll. (11.) Longissimus jactus horizontalis cujusque Parabolæ est æqualis dimidio lateri recto ad verticem, latus rectum principale terminantem, pertinenti. Est enim in eo casu Fs æqualis sh; sed Fs est lateris recti ad verticem dictum pertinentis pars quarta; & sg ipsius sh dupla, unde sg horizontalis jactus longissimus erit lateris istius recti dimidium.

Coroll. (12.) Hinc determinare licet jactum horizontalem longissimum cuicunque velocitatis gradui congruentem. Fiat nempe ut linea sr unico minuto secundo vi gravitatis descripta $16\frac{1}{12}$ pedum Anglicorum, ad velocitatem projectilis sv vel rc pari tempore computandam, ita ista velocitas, ad numerum quartum, latus rectum verticis s in iisdem pedibus exhibiturum: Hujus numeri semissis longissimum jactum horizontalem dabit, uti ex superioribus est abunde manifestum. Sic si projectilis velocitas tanta sit ut minuto unico secundo pedes Anglicos mille peragrare possit, fiat ut $16\frac{1}{12}$: ad 1000 :: ita 1000 ad numerum quartum $= 62.112$, latus rectum verticis s in pedibus Anglicis designantem. Est itaque longissimus jactus horizontalis pedum Anglicorum 31.056; ultra quem terminum nihil attingi potest, sed intra quem locum quemvis assignatum attingere sequenti corollario docebimus.

Coroll. (13.) Problema (1.) Locum quemvis in plano horizontali assignatum, ultra dimidium lateris recti verticis *s* non distantem, ex data velocitate motu projectili attingere. Sit locus ille ad pedum Anglicorum 20.000 distantiam, & sit corporis projecti velocitas ea quam in postremo corollario posuimus: Ob datam itaque velocitatem, datur latus rectum verticis ubi projectile motum suum per curvam incipiet, ejusque proinde pars quarta, sive linea *sF*, pedum nempe 15.528: Est autem ex prius dictis *sh* pedum 10.000; ex hisce inveniatur angulus *hsF* per hanc analogiam ut *sh*, ad *sF*, sive ut 10.000 ad 15.528, ita erit radius ad secantem anguli *Fsh*, per secantium tabulam inveniendi, graduum nempe 49°. 47′; quo angulo ex recto ablato, aut ad rectum superaddito, dabitur angulorum æqualium *vsF* & *osb* summa; cujus dimidium *Fsv* vel *osb* angulum quem tangens *vb* cum perpendiculari *so* comprehendere debet determinabit; nempe 90° — 49°. 47′ = 40°. 13′ vel 90° + 49°. 47′ = 139° 47′; cujus angulus dimidius est vel 20° 6′ 30″ vel 69°. 53′. 30″; Prout nempe elevationem mediocri aut majorem aut minorem adhibendam volumus; si itaque globulus plumbeus velocitate assignata in angulis assignatis projiciatur, parabolam requisitam est descripturus, & proinde locum assignatum petiturus, sine ulla alia à scopo aberratione quam quæ ab aeris resistentia perexigua sit oritura; quæque ob parvitatem fere contemni potest. Problema ergo solutum dedimus, & data velocitate scopum quemvis in plano horizontali non nimium distantem attingere docuimus.

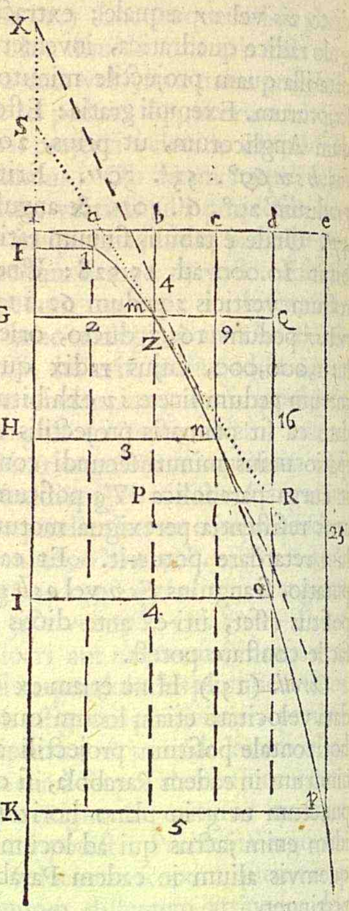
Coroll. (14.) Problema (2.) Locum quemvis in plano horizontali assignatum ex data elevatione motu projectili attingere; scilicet ex data loci distantia *sg* & dato angulo *hsv* velocitatem *sv* determinare. Nempe *sF* quadruplicata dabit latus rectum ad verticem *s* pertinens: Ut ergo inveniatur *sv* ducenda est *vc* vel *sr* in *sf* quadruplicatam, & inde orietur rectangulum quadrato *vs* vel *cr* æquale; extracta itaque ex isto rectangulo radice quadratica, invenietur *vs* vel *cr*, semiordinata illa quam projectile minuto unico secundo est describturum. Exempli gratia: Esto objecti distantia *sg* pedum Anglicorum, ut prius, 20,000; & angulus datus *hsv* 69°. 53′. 30″. Erit angulus *Fsv* vel *osb* graduum 20°. 6′. 30″. & angulus *Fsh* graduum 49°. 47′. Unde è tabulis sinuum ratio lineæ *sh* ad *Fs* habebitur 10.000 ad 15.528: Unde dabitur *Fs*, & latus rectum verticis *s* pedum 62.112; quo numero in *vc* vel *sr* pedum 16⌊1 ducto, orietur numerus rectangulus 1,000,000, cujus radix quadratica est 1000, numerum pedum lineæ *sv* exhibitura. Si itaque in angulo dato ea sit primaria projectilis velocitas, ut pedes mille spatio unius minuti secundi conficere possit, scopum *g* in curva parabolica *sTg* positum attinget, nisi quatenus aeris resistentia perexigua motum projectilis aliquantulum retardare potuerit. Et eadem omnino esset computatio, si angulus *Fsv* vel *osb* graduum 69°. 53′. 30″. positus esset, uti ex ante dictis in corollario postremo facile constare potest.

Coroll. (15.) Hinc etiam ex data elevatione, aut ex data velocitate etiam locum quemvis ut *l* extra planum horizontale positum projectili attingere possumus: Si nimirum in eadem Parabola, si opus est, producta, aliud punctum ut *g* in plano horizontali positum notemus; idem enim jactus qui ad locum *g*, etiam & ad locum quemvis alium in eadem Parabola situm ut *l* omnino pertinget.

Coroll. (16.) Velocitas corporis Parabolam describentis est ubique ut recta linea à Parabolæ vertice *T* ad semiordinatæ medium ducta, sive ut Tangentis pars inter punctum contactus *m* & axem ducta, hoc est, ut secans anguli elevationis supra horizontem. Linea enim dato tempore describenda, est ut diagonalis parallelogrammi *mQRP*; cujus latus *mQ* semper datur, & *mP*

Vid. Fig. pag. prox.

mP eſt ipſi *bm* duplicatæ, ſive ipſi *SG* æqualis: Eſt igitur velocitas in puncto *m*, ad velocitatem projectilem originariam in puncto *T*, ut *mR* ad *PR*, ſive ut *Sm* ad *Gm*: Et ita ubique. Eſt itaque velocitas in puncto quovis Parabolæ *m*, ad velocitatem in puncto quovis alio *n*, ut Tangentis pars *Sm*, ad Tangentis partẽ *X*4; utraque nempe inter æquidiſtantes diametros *bm* & *TG* ſumpta; hoc eſt, ut angulorum elevationis ſecantes. *Q.E.D.*



Coroll. (17.) Eſt itaque minima omnium velocitas in Parabolæ vertice *T*; & eo ſemper major velocitas quo diſtantia eſt ab eodem vertice major.

Coroll. (18.) Si itaque velocitates corporum in diverſis angulis projectorum ſint in ratione ſecantium angulorum elevationis ſupra horizontem, eandem, ſive æqualem omnia Parabolam, hoc eſt, ejuſdem vel æqualis Parabolæ partes deſcribent; majores nempe ubi angulus elevationis eſt major, & minores ubi iſte angulus eſt minor. Sin velocitates ſint in alia ratione, diverſas Parabolas, ſive diverſarum partes, ut deſcribant, eſt neceſſe.

Decemb. 4. 1704. XII.

XII.

Lemma ad Propoſitionem (9^m) *& ſequentes.*

CORPORUM in circulis gyrantium vires centripetæ cauſæ duplici ſunt acceptæ referendæ, nimirum arcuum ſimul deſcriptorum curvaturæ, & motuum per eandem curvaturam velocitati. Nimirum cum omnis motus ſit per ſe rectilinearis, & corpora per ſolam vim extraneam centripetam ſecundum arcus curvos circulares cieri poſſint, æquum eſt ut data velocitate curvaturam à vi ſola centripeta genitam eidem vi centripetæ proportionalem ſtatuamus. Proinde cum eo majores vires centripetæ ad eandem curvaturam generandam requirantur, quo velocitas projectionis ſive motus æquabilis originarii eſt major, eo minores quo minor, æquum eſt etiam ut data curvatura vim centripetam, eidem velocitati proportionalem ſtatuamus. Prout itaque fit in rectangulorum comparatione ut nimirum ex longitudinum & latitudinum rationibus conjunctis eorundem rationes veras determinemus, ita & in virium Centripetarum comparatione erit omnino faciendum, ut nempe ex curvaturarum & velocitatum rationibus inter ſe conjunctis earundem veras rationes dato quovis tempore definiamus. Eſto itaque ratum, Quod virium centripetarum rationes ex curvaturarum & velocitatum rationibus conjunctis ſunt ubique æſtimandæ.

Scholium. Ut curvaturæ & velocitatis veras rationes recte intelligamus, Obſervandum eſt in angulis æqualibus minimis curvaturam eſſe ubique æqualem, ſi angulorum contactus ſubtenſæ ſint inter ſe ut radii vel diſtantiæ à centro; prout figurarum ſimilium ratio omnino poſtulat: & ſi curvatura ab ea diſtantiarum ratione recedat, exceſſus aut defectus rationes pro veris curvaturæ excedentis vel deficientis rationibus in poſterum computandis ſunt habendæ. Velocitas autem ubique ſpectanda eſt quantum ad verum motum angularem promovendum confert, atque adeo in linea radio ubique perpendiculari; ſive, quod eodem recidit, in arcu circulari minimo eſt æſtimanda. Ubicunque enim directio motus eſt aut ſurſum aut deorſum, quanto velocitas augetur, tanto ſemper curvatura minuitur, & è contra: quantitate quæ ex earundem conjunctis viribus oritur etiamnum minime mutata: quod probe eſt ubique obſervandum.

IX. Si mobilia duo æqualibus temporibus circumferentias integras inæquales *bdge BDGE* motu æquabili percurrant, erit vis centripeta in majori circumferentia ad eam quæ in minori, ſicut ipſæ inter ſe circumferentiæ, vel earum diametri, vel etiam radii directe. *Vid. Fig. p.* 87.

Ob datam enim utrinque curvaturam, integri nimirum circuli, erit vis centripeta in majori circumferentia ad eam quæ in minori ut mobilium velocitates, hoc eſt, ut Circulorum circumferentiæ, vel, quod eodem redit, ut eorundem diametri vel radii directe. *Q. E. D.*

Corollarium. Si tempora periodica Corporum in circulis gyrantium æquentur, erunt tum velocitates, tum iiſdem proportionales vires centripetæ inter ſe ut circulorum circumferentiæ, diametri, vel radii directe, & vice verſa, ſi vires centripetæ corporum in circulis gyrantium ſint inter ſe ut circumferentiæ, diametri, vel radii directe, erunt velocitates etiam in eadem ratione, & tempora periodica erunt ubique æqualia.

Coroll. (2.) Si corporis cujuſvis centralis attractivi vires ſint directe ut diſtantiæ ab eodem centro; corporum omnium circa illud corpus centrale in circulis gyrantium, tempora periodica erunt æqualia. Et pariter de Ellipſibus erit ſentiendum, cum earum curvaturæ integræ ſint circuli cujuſvis curvaturæ integræ æqualis, & circumferentia inter circulorum hinc inde aſſumptorum circumferentias quaſi intermedia. Unde ex æqualitate temporum periodicorum in circulis Ellipſibus ſive majoribus ſive minoribus, haud difficile erit eandem temporum periodicorum æqualitatem etiam & ellipſibus intermediis circa earum centra aſcribendam intelligere.

X. Si mobilia duo in iiſdem ſive æqualibus circulis gyrentur celeritatibus inæqualibus, verum utraque motu æquabili, erit vis centripeta celerioris ad vim centripetam, tardioris in duplicata ratione celeritatum, ſive ut arcuum ſimul deſcriptorum quadrata. Ob datam enim circulorum æqualium in arcubus æqualibus curvaturam, ſimul cum velocitate creſcente creſcet etiam & curvatura in eadem ratione, & ſimul cum velocitate decreſcente decreſcet etiam & curvatura in eadem ratione: ergo vis centripeta ex curvatura & velocitate conjunctis æſtimanda erit dato tempore in ratione arcus ad arcum ſimul deſcriptum, propter velocitatis rationem, & in eadem ratione ejuſdem arcus ad eundem arcum ſimul deſcriptum, propter curvaturæ rationem: unde ex utriſque rationibus conjunctis erit, rectangulo ad quadratū reducto, vis centripeta in duplicata arcuum ſimul deſcriptorum ratione, ſive ut arcuum ſimul deſcriptorum quadrata. *Q. E. D.*

Corollarium. Cum tempora Periodica in æqualibus circulis ſint velocitatibus reciproce proportionalia, erunt vires centripetæ in duplicata temporum periodicorum ratione reciproce, ſive ut temporum periodicorum quadrata reciproce, ita ut quo majus ſit temporis periodici quadratum, eo minor ſit vis centripeta; quo minus ſit quadratum illud, eo major ſit vis centripeta, atque ea in eadem ratione.

Coroll. (2.) Si mobilia plura circa plura corpora centralia attractiva ad eaſdem omnia diſtantias in circulis gyrentur, vires corporum centralium facile innoteſcent, cum ſint inter ſe ut temporum periodicorum quadrata reciproce: & velocitates etiam facile innoteſcent, cum ſint in ipſa temporum periodicorum ratione reciproca.

XI. Si mobilia duo in circulis inæqualibus æquali velocitate ferantur, erunt eorum vires centripetæ in ratione contraria circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum, ita ut in minori circumferentia vis centripeta major exiſtat, & in majore minor.

Ob datam enim velocitatem vires centripetæ dato tempore erunt ut curvatura arcuum æqualium, hoc eſt, ut circumferentiæ, diametri, vel radii circulorum reciproce. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Cum tempora Periodica in æquivelocibus ſint inter ſe in eadem ratione ac ſunt circumferentiæ deſcribendæ, ſi tempora Periodica mobilium diverſos circulos percurrentium ſint directe ut circulorum circumferentiæ, diametri, vel radii, vires centripetæ erunt ut iſtæ circulorum circumferentiæ, diametri, vel radii reciproce: & vice verſa, ſi vires centripetæ ſint ut radii vel diſtantiæ reciproce, erunt Tempora periodica ut radii directe.

Coroll. (2.) Si corporis cujuſvis centralis attractivi vires ſint reciproce ut corporum diſtantiæ à centro ſuo, ita ut quo magis appropinquant corpora, eo vis centripeta ſit major, & quo magis elongantur, vis illa ſit minor, idque in eadem ubique ratione, erunt tempora periodica corporum ad diverſas diſtantias poſitorum ut diſtantiæ illæ directe, & eorundem velocitates æquales.

XII. Si duo mobilia in circulis inæqualibus velocitate inæquali quæ ſit in ſubduplicata ratione circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum ferantur, erunt vires centripetæ ubique æquales, nec in acceſſu vel receſſu ullatenus aut auctæ aut diminutæ.

Ob majorem enim velocitatem in majori circulo eamque in ſubduplicata ratione circumferentiarum augendæ ſunt in majori circulo vires centripetæ in eadem ratione. Et ob majorem curvaturam in minori circulo eamque etiam in ſubduplicata ratione circumferentiarum reciproce augendæ ſunt in minori circulo vires centripetæ in eadem ratione. Liquet igitur vires centripetas æquali ratione utrinque eſſe augendas atque adeo eſſe etiamnum utrinque æquales. *Q. E. D.*

Sit enim exempli gratia radius circuli majoris radii circuli minoris quadruplus, ſive ut 4 ad 1, & ſit velocitas in majore ad velocitatem in minore in ſubduplicata ra-

radiorum ratione, ſive ut 2 ad 1. Cum curvatura majoris ſit ad curvaturam minoris in arcubus ſimilibus æqualis, & in æqualibus reciproce ut radii, neceſſe eſt ut in arcu duplo, quem dato tempore velocitas dupla in majore deſcribet, curvatura ſit alterius dimidia: eſt ergo velocitas prioris mobilis ad velocitatem poſterioris ut 2 ad 1, & curvatura poſterioris ad curvaturam prioris ut 2 ad 1. Unde vis centripetæ quantitas in priore erit ad vis centripetæ quantitatem in poſteriore ut rectangulum ex velocitate prioris & prioris curvatura conjunctim, ſive 2×1. ad rectangulum ex velocitate poſterioris, & poſterioris curvatura conjunctim, ſive 1×2. hoc eſt in ratione æqualitatis; & ſic ubique.

Coroll. (1.) Cum tempora Periodica in hoc caſu ſint inter ſe in ſubduplicata ratione circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum, erunt temporum Periodicorum quadrata inter ſe ut circumferentiæ, diametri, vel radii. Si itaque temporum periodicorum quadrata ſint inter ſe ut circumferentiæ, diametri, vel radii circulorum, erunt vires centripetæ in diſtantiis omnibus æquales, & celeritates in ratione earundem circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum ſubduplicata. Et vice verſa, ſi vires centripetæ ſint in diſtantiis omnibus æquales, erunt temporum periodicorum quadrata ut diſtantiæ vel radii; & velocitates etiamnum in earundem ratione ſubduplicata.

Coroll. (2.) Si Corporis cujuſvis centralis attractivi vires centripetæ ſint in omnibus diſtantiis plane eædem, erunt velocitates in ſubduplicata ratione diſtantiarum; & temporum periodicorum quadrata inter ſe ut diſtantiæ illæ, vel diametri, vel circumferentiæ.

XIII. Si duo mobilia in circulis inæqualibus velocitate inæquali quæ ſit in ſubduplicata circumferentiarum, diametrorum, vel radiorum ratione reciproce, ita ut in majori circulo velocitas ſit minor, & in minori ſit major, idque in ſubduplicata eorundem radiorum ratione reciproce, erunt vires centripetæ reciproce ut radiorum, vel diſtantiarum quadrata.

Ob

Ob minorem enim in majori circulo curvaturam eamque in sesquiplicata ratione radiorum reciproca; & ob minorem etiam celeritatem in majori circulo, eamque in subduplicata ratione radiorum etiam reciproca, erunt vires centripetæ ex rationibus hisce conjunctis derivandæ in ratione radiorum reciproca duplicata, sive reciproce, ut quadrata radiorum. *Q.E.D.*

Sit enim exempli gratia radius circuli majoris radii circuli minoris noncuplus, sive ut 9 ad 1. & sit velocitas in majore ad velocitatem in minore in subduplicata ratione radiorum reciproce, sive ut 1 ad 3. Cum curvatura majoris sit ad curvaturam minoris, ut prius, in arcubus similibus æqualis, & in æqualibus reciproce ut radii, necesse est ut in arcu alterius partem solum tertiam adæquante, quem dato tempore velocitatis alterius triens solum describet, in majore sit alterius pars tantum vigesima septima sive ut 1 ad 27. Est ergo velocitas in circulo majore ad velocitatem in minore ut 1 ad 3, & curvatura in majore ad curvaturam in minore ut 1 ad 27. Unde vis centripetæ quantitas in majore erit ad ejusdem quantitatem in minore ut rectangulum ex velocitate & curvatura in majore conjunctim, sive $1 \times 1 = 1$. ad rectangulum ex velocitate & curvatura in minore conjunctim, sive $3 \times 27. = 81$. hoc est, ut radii minoris quadratum $= 1$. ad majoris quadratum $= 81$. Et sic ubique. Erunt etiam tempora periodica inter se ut 27, ad 1, hoc est, in radiorum 9 ad 1 ratione sesquialtera; est enim 27, inter 9 & 81, media geometrice proportionalis; atque adeo ratio 27 ad 1 continet rationem 9 ad 1 & ejusdem 81 ad 9 rationem dimidiatam, sive subduplicatam 81 ad 27. [1 : 3 : 9 : 27 : 81 : ∻] & sic etiam ubique.

Coroll. (1.) Cum tempora periodica in hoc casu sint inter se in sesquiplicata ratione radiorum, erunt temporum periodicorum quadrata inter se ut cubi radiorum. Si itaque temporum periodicorum quadrata sint inter se ut cubi radiorum, erunt vires centripetæ inter se ut

ut radiorum quadrata reciproce, & velocitates in subduplicata ratione radiorum reciproca. Et vice versa, si vires centripetæ sint inverse ut radiorum vel distantiarum quadrata, erunt temporum periodicorum quadrata inter se ut sunt cubi radiorum; & velocitates etiamnum in radiorum ratione subduplicata reciproce.

Coroll. (2.) Si corporis cujusvis centralis attractivi vires centripetæ sint in diversis distantiis à centro suo ut distantiarum istarum quadrata reciproce, erunt corporum in diversis distantiis gyrantium velocitates in subduplicata distantiarum ratione reciproce; & temporum periodicorum ratio duplicata erit rationi distantiarum triplicatæ æqualis, sive erunt temporum periodicorum quadrata inter se ut sunt cubi radiorum.

Coroll. (3.) Si motus sit in Ellipsi distantia inter maximam & minimam intermedia sumatur; & tum etiam in Ellipsibus erunt temporum periodicorum quadrata ut radiorum Cubi inter se æque ac in Circulis.

XIV. Si duo mobilia in circulis inæqualibus inæquali celeritate, eaque in radiorum ratione reciproca ferantur, ita ut quo major est radius, diameter, aut circumferentia, eo minor sit velocitas; & quo minor, eo major sit velocitas, eaque in reciproca radiorum ratione, erunt vires centripetæ ut cubi radiorum reciproce.

Ob minorem enim in circulo majori celeritatem, eamque in ipsa ratione radiorum reciproca; & ob minorem etiam in circulo curvaturam, eamque in duplicata ratione radiorum reciproca, erunt vires centripetæ ex conjunctis istis rationibus derivandæ in ratione Radiorum reciproca triplicata, sive ut cubi radiorum.

Sit enim exempli gratia radius circuli majoris radii circuli minoris duplus, sive ut 2 ad 1. Et sit velocitas in majore ad velocitatem in minore reciproce ut radii, sive ut 1 ad 2. Erit dato tempore curvatura majoris ad curvaturam minoris ut 1 ad 4. Est ergo velocitas in minore circulo ad velocitatem in majore ut 2 ad 1, & curvatura in minore ad curvaturam in majore ut ut 4 ad 1. Unde vis centripetæ quantitas in minore erit ad vis centripetæ quantitatem in majore ut rectangulum $2 \times 4 = 8$, ad rectangulum $1 \times 1 = 1$, ſive ut radiorum Cubi reciproce. Et ſic ubique.

Coroll. (1.) Cum tempora periodica ſint in hoc caſu in duplicata ratione radiorum, ſi temporum periodicorum quadrata ſint inter ſe ut quadrato quadrata radiorum, ſive, quod perinde eſt, ſi ipſa tempora periodica ſint inter ſe ut radiorum quadrata, erunt vires centripetæ inter ſe ut radiorum vel diſtantiarum Cubi inverſe, & velocitates inverſe ut radii. Et vice verſa, ſi vires centripetæ ſint inverſe ut diſtantiarum Cubi, erunt tempora periodica inter ſe ut radiorum quadrata, & velocitates etiamnum ut ipſi radii inverſe.

Coroll. (2.) Si corporis cujuſvis centralis attractivi vires centripetæ ſint in diverſis diſtantiis à centro ſuo ut diſtantiarum iſtarum Cubi reciproce, erunt corporum in diverſis diſtantiis gyrantium velocitates in ipſa diſtantiarum ratione reciproca; & tempora periodica in duplicata iſtarum diſtantiarum ratione.

Coroll. (3.) Eadem omnia de temporibus velocitatibus & viribus centripetis quibus corpora ſimiles curvarum quarumcunque ſimilium, centraque ſimiliter poſita habentium partes deſcribunt, conſequuntur ex præcedentium ad circulos ſpeciatim applicatorum demonſtrationibus ad caſus hoſce applicandis.

Scholium. Cum Propoſitionis 13. caſus in corporibus cœleſtibus obtineat, nempe quod temporum periodicorum quadrata ſunt inter ſe ubique ut diſtantiarum Cubi, & quod proinde vires centripetæ ſunt ut diſtantiarum quadrata reciproce, & velocitates in diſtantiarum iſtarum ratione ſubduplicata reciproce; cum inquam hic caſus in Syſtemate mundano iſque ſolus ubique obtineat, uti ſeorſim colligerunt etiam noſtrates Wrennus, Hookius & Halleius, & jam eſt apud Aſtronomos receptiſſimum, idem caſus longe nobiliſſimus in ſequentibus erit fuſius & diligentius exponendus, dum reliquorum conſequentiæ

levi

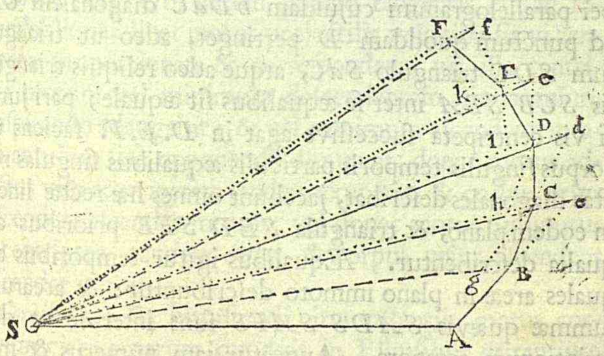
levi dumtaxat opera in tranſcurſu attinguntur. Atque hæc impræſentiarum hactenus. Reliqua in Terminum proxime futurum reſervabimus.

Decemb. 11. 1704.

XIII.

XV. AREÆ quas Corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtunt, & ſunt temporibus proportionales, & dato tempore ubique æquales: motus nempe velocitate in diſtantia minore, & tarditate in diſtantia majore arearum deſcriptionem ita moderante, ut ex variis iſtis diſtantiis dato tempore nulla ſpatiorum percurſorum differentia unquam oriatur.

Dividatur enim tempus in partes æquales, & prima temporis parte deſcribat corpus vi inſita, ſive motu projectili rectam lineam quamvis *AB*. Idem corpus ſecunda æquali temporis parte, ſi nihil impediret, & nulla alia vis



urgeret recta ad *c* pergeret, deſcribens lineam *Bc* ipſi *AB* æqualem, adeo ut radiis ad centrum *S* ductis confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus ad punctum *B* venit agat vis centripeta, ſive attractio ſit ſive preſſio qualiſcunque ad centrum *S* tendens, impulſu unico, qui ſit ad motum projectilem ut linea

quæ-

quævis Bg ad lineam Bc, impulsus hic novus efficiet ut corpus à recta Bc deflectat & in linea alia pergat, * parallelogrammi nempe $BgCc$ diagonali BC, ita ut completa secunda temporis parte æquali corpus ad punctum C sit inveniendum, in eodem plano cum triangulo ASB. junge SC. & area radio à corpore ad centrum ducto descripta, hoc est, triangulum SBC æquabitur æreæ prioris, hoc est, † triangulo SBc, atque adeo triangulo primo SAB cui nempe ex prius dictis æquale erat triangulum SBc. Simili argumento tertia æquali temporis parte corpus a C ad d vi projectili (quæ semel parta usque perseverat) pertingeret, ita ut linea Cd describenda lineæ CB nuperrime descriptæ foret æqualis. Sed si vis centripeta quæcunque priore aut minor aut major iterum agat ad punctum C, Corpus in fine tertii temporis reperietur alicubi in linea Dd ipsi SC parallela, & per parallelogrammi cujusdam $hDdC$ diagonalem CD ad punctum quoddam D pertinget, adeo ut triangulum SDC triangulo SdC, atque adeo reliquis triangulis SCB SBA inter se æqualibus sit æquale; pari jure, si vis centripeta successive agat in $D. E. F.$ faciens ut corpus singulis temporis particulis æqualibus singulas rectas diagonales describat, jacebunt omnes hæ rectæ lineæ in eodem plano, & triangula SED SFE prioribus æqualia describentur. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & arearum summæ quævis $SADS$ $SAFS$ sunt inter se ut descriptionum tempora. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum, & eorum ultima perimeter, polygoni lateribus in curvam desinentibus, ADF erit linea curva, & ob vim centripetam jam continuam & indesinenter agentem, corpus perpetuo retrahetur à curvæ tangentibus, & areæ pari ac prius jure etiamnum in plano immobili descriptæ erunt semper temporibus proportionales. $Q.E.D.$

* Per Leg. Mot. 22. prius.

† I. 37. Elem.

Coroll. (1.) Erit itaque velocitas corporis circa gyrationis centrum, secundum lineam radio perpendicularem æstimata, in ratione distantiarum reciproca; alias enim arearum æqualitas nullo modo observari potest.

Coroll. (2.) Erit quoque velocitas corporis angularis circa virium centrum in duplicata distantiarum ratione reciproca. Nam cum vera velocitas sit in simplici distantiarum ratione reciproca, ut jam vidimus, & centri distantia eo major quo motus est tardior, & in eadem quoque ratione, liquet velocitatem angularem quoad virium centrum esse in duplicata distantiæ ratione reciproca.

Coroll. (3.) Ubi positio tangentis est ad centri distantiam sive radium perpendicularis, & motus projectilis velocitas vim centrifugam corporis centralis vi centripetæ exacte proportionalem vel correspondentem efficit, corpus neque ad centrum appropinquabit, neque ab eodem recedet, sed motu circulari circa centrum illud perpetuo feretur.

Coroll. (4.) Ubi autem positio tangentis est ad radium obliqua, licet motus projectilis velocitas sit vi centripetæ proportionata & correspondens, vis illa centripeta motum vel minimum descendentem aliquantulum conspirando adaugebit; & vel minimum ascendentem aliquantulum sese opponendo diminuet, donec motus adauctus vim centripetam tandem exuperet, & corpus prius descendens ascendat iterum; vel donec motus diminutus vi centripetæ tandem cedat, & corpus prius ascendens descendat iterum.

Coroll. (5.) Ex hujusmodi circumstantiis motus corporum circa centrum quodvis in Ellipsibus gyrantium oriri debent. Nam etsi ad axem minorem Ellipseos, corpore centrali focum occupante; aut ad diametrum mediocrem eodem centrum occupante Corpus inter revolvendum supponatur situm, & velocitas motus projectilis vi centripetæ ad amussim eo loci correspondere etiam supponatur, tamen ob tangentium in iisdem locis positionem obliquam motus non circularis sed ellipticus orietur. Corpore nempe inter deſcendendum vires quibus poſtea aſcendat paulatim acquirente; & inter aſcendendum vires quibus prius aſcenderat paulatim amittente, donec ſuperante vi centripeta ad deſcendendum tandem cogatur. Atque ita perpetuo. Unde patet quo pacto ex eodem motu per obliquam lineam impreſſo oriatur motus ellipticus; dum idem motus per lineam perpendicularem impreſſus circuitum omnino circularem genuiſſet.

Coroll. (6.) In mediis non reſiſtentibus & in loco vacuo ſi areæ deſcriptæ non ſint deſcribendi temporibus proportionales vires non tendunt ad concurſum radiorum. Nam ſi eo tenderent areæ iſtæ neceſſario eſſent temporibus proportionales, contra hypotheſin.

Coroll. (7.) In mediis omnibus ſi arearum deſcriptio acceleretur, vires non tendunt ad concurſum radiorum, ſed cum motu projectili conſpirant magis: ſi arearum deſcriptio retardetur, plus nimirum quam ex medii reſiſtentia, vires non tendunt ad concurſum radiorum, ſed motui projectili opponuntur magis.

XVI. Corpus omne quod movetur in linea curva, & radio ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, ducto deſcribit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur à vi centripeta tendente ad idem punctum.

Vid. Fig. p. 125.
* I. 39. *Elem.*

CAS. (1.) Ob æqualitatem enim triangulorum ScB SCB eadem baſi SB deſcriptorum puncta C & c erunt * in linea Cc baſi parallela; atque adeo figura $BcCg$ erit parallelogrammum, cujus Bc & Bg ſunt latera vires exponentia, & BC diagonalis; urgetur itaque Corpus ad B poſitum vi Bg tendente ad S centrum virium; atque ita pariter in punctis omnibus $C. D. E. F.$ *Q. E. D.*

CAS. (2.) Et perinde eſt ſive quieſcat ſuperficies in qua corpus deſcribit figuram curvilineam; ſive moveatur eadem una cum corpore, figura deſcripta, & puncto ſuo centrali S uniformiter in directum. Unde prioris caſus demonſtratio in hoc etiam valebit.

Scho-

Scholium. Corpus urgeri poteſt à vi centripeta ex viribus pluribus compoſita, (uti exempli gratia vis gravium in terræ centrum ex viribus in omnes terræ particulas tendentibus compoſita eſt, ut poſtea conſtabit;) in hoc caſu ſenſus propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus eſt compoſita, cum ad unam eſt reducta, tendit ad centrum virium.

Coroll. (1.) Cum itaque in planetarum primariorum Syſtemate Areæ radiis ad Solis centrum ductis ſint ſemper temporibus proportionales, uti Aſtronomis eſt notiſſimum, urgentur Planetæ vi perpetua ad Solis centrum tendente: neque aliter de ſecundariis circa primarios ſuos, Saturnum nempe, Jovem, & Terram eſt ratiocinandum.

Coroll. (2.) Sicut velocitas diverſorum corporum circa centrum virium, ubi vires illæ ſunt ut quadrata diſtantiarum inverſe, eſt in diverſis circulis in ſubduplicata ratione diſtantiarum inverſa, uti olim demonſtravimus; ita ex hac & præcedenti propoſitione ſequitur, quod velocitas ejuſdem corporis orbitam quamvis eccentricam deſcribentis, in diverſis ſuis à centro diſtantiis poſiti, qualicunque virium centripetarum lege, eſt ut ipſa diſtantia inverſe, ſi nempe velocitas iſta in arcu circulari aut in linea radio perpendiculari, ut prius æſtimetur: cujus diverſæ velocitatis rationis cauſa eſt quod in diverſis circulis areæ in iſto caſu non ſint utrinque æquales, ſed pro magnitudine diſtantiæ majores & in eadem magnitudinis ratione etiam majores; cum tamen in ejuſdem corporis revolutione æqualitas arearum velocitatem diſtantiæ reciproce proportionalem omnino exigat. Sic ſane ſi Planetæ duo in diverſis circulis circa Solem revolverent, quorum circulorum Radii ratione quadrupla alter alterum excederet, Planeta remotior velocitate alterius tantum dupla ferretur: ſin idem Planeta per Ellipſin valde excentricam curſus ſuos peragens nunc ad diſtantiam majorem nunc minorem, eamque, ut prius, in ratione quadrupla excedentem & defici-

K

entem

entem alterius vicibus collocetur, erit velocitas in ipſa diſtantiarum ratione reciproca, & in diſtantia minore alterius ad amuſſim quadrupla: & ita in diſtantiis quibuſcunque. Quod in Syſtemate quovis Planetario probe meminiſſe oportebit.

XVII. Corpus omne quod, radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto, deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur à vi compoſita ex vi centripeta tendente ad corpus alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus alterum urgetur. Si enim primo quieſcant planum & centrum virium in iſto plano, erunt areæ temporibus proportionales; & ſi eadem celeritate corpora utraque per lineas parallelas accelerentur manebunt areæ temporibus etiamnum proportionales. Unde cum ex hypotheſi maneant areæ temporibus proportionales, manebit & vis centripeta earum cauſa, & vis acceleratrix ubique eadem communis celeritatis cauſa manebit.

Coroll. (1.) Si corpus quodvis radio ad alterum ducto deſcribat areas temporibus proportionales, atque de vi tota, ſive ſimplici, ſive ex pluribus viribus compoſita, qua corpus prius urgetur ſubducatur vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur, vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum tanquam ad centrum.

Coroll. (2.) Et ſi areæ illæ ſint temporibus quam proxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum quam proxime.

Coroll. (3.) Et vice verſa, ſi vis reliqua tendat quam proxime ad corpus alterum, erunt areæ illæ temporibus quam proxime proportionales.

Coroll. (4.) Si corpus, radio ad alterum corpus ducto, deſcribat areas quæ cum temporibus collatæ ſunt valde inæquales, & corpus illud alterum vel quieſcat vel moveatur uniformiter in directum, actio vis centripetæ ad corpus illud alterum tendentis vel nulla eſt, vel miſcetur & perturbatur ab aliis viribus. Et vis tota

tota ex omnibus, ſi plures ſint, compoſita ad aliud ſive immobile ſive mobile centrum dirigetur, circum quod æquabilis erit arearum deſcriptio. Idem obtinet ubi corpus alterum motu quocunque movetur, ſi modo vis centripeta ſumatur ea quæ reſtat poſt ſubductionem vis totius agentis in corpus illud alterum.

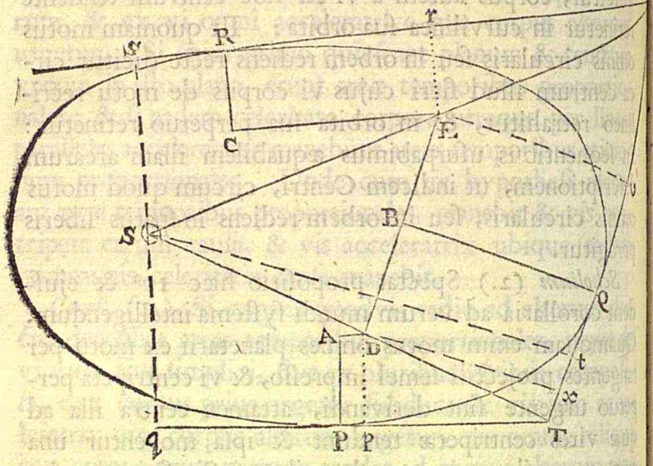
Scholium (1.) Quoniam æquabilis arearum deſcriptio Index eſt Centri quod vis illa reſpicit qua corpus afficitur, corpus autem a vi ad hoc centrum tendente retinetur in curvilinea ſua orbita: Et quoniam motus omnis circularis ſeu in orbem rediens recte dicitur circa centrum illud fieri cujus vi corpus de motu rectilineo retrahitur, & in orbita ſua perpetuo retinetur: In ſequentibus uſurpabimus æquabilem illam arearum deſcriptionem, ut indicem Centri, circum quod motus omnis circularis, ſeu in orbem rediens in ſpatiis liberis peragitur.

Scholium (2.) Spectat propoſitio hæc 17ª & ejuſdem corollaria ad verum mundi ſyſtema intelligendum. Quamquam enim motus omnes planetarii ex motu per tangentes projectili ſemel impreſſo, & vi centripeta perpetuo urgente ſint derivandi, attamen centra illa ad quæ vires centripetæ tendunt & ipſa moventur una cum corporibus circumvolventibus. Sic ſane circulationes Circumſaturniorum, Circumjovialium, & Lunæ ex motu projectili ſingulis ſemel impreſſo, & ex vi centripeta in Saturni, Jovis & Telluris centra reſpective tendente oriuntur; licet ipſa interea centralia illa corpora cum ſatellitio ſuo univerſo moveantur una circa Solem, commune omnium planetarum primariorum centrum.

XVIII. *Problema.* Datâ, tribus quibuſcunque in locis, velocitate qua corpus figuram datam, viribus ad commune aliquod punctum ceu centrum tendentibus, deſcribit centrum illud invenire.

Figuram deſcriptam tangant tres rectæ *PT*, *TQV*, *VR* in punctis totidem *P*. *Q*. *R*. concurrentes in *T*, & *V*. Ad

Ad tangentes in punctis contractuum erigantur perpendicula PA. QB. RC. velocitatibus corporis in punctis illis P. Q. R. a quibus eriguntur reciproce proportionalia. Id est, ita ut sit PA, ad QB, ut velocitas in Q, ad velocitatem in P. & QB, ad RC, ut velocitas in R, ad velocitatem in Q. Ad perpendiculorum terminos A. B. C. ad angulos rectos seu tangentibus parallelæ ducantur AD. DBE. EC. concurrentes in D & E.



Ducantur TD & VE in puncto S se intersecantes. A puncto E sint Er & Ev perpendiculis CR & BQ respective parallelæ. Et pariter a puncto D sint Dp & Dx perpendiculis AP & BQ respective parallelæ. Denique a puncto S sint Ss. St. Sq. iisdem perpendiculis respective parallelæ seu tangentibus perpendiculares. punctum S erit centrum quæsitum.

Cum enim corpus revolvens, & in punctis P & Q successive, positum radiis ad centrum virium ductis æquali tempore æquales areas, seu triangula minima æqualia semper describat; cum etiam triangula illa simul descripta sint ut velocitates

Per Prop. 15. *prius.*
Scholl. post I, 41. *Elem.*

tes sive lineæ simul descriptæ in P & Q ductæ respective in perpendicula à centro in tangentes PT QT dimissa. Erunt itaque perpendicula illa ut velocitates reciproce, adeoque ut perpendicula Dp & Dx directe. Sed propter triangula similia TDx TSt & TDp TSq. Ut est Dp ad Dx, ita est perpendiculum Sq ad perpendiculum St. Et pari cum proribus jure erit ut Ev ad Er, ita perpendiculum St ad perpendiculum Ss. Et cum hoc in solo linearum TD & VE concursu S utrinque potest esse verum, quod necessarium est in hoc casu, liquet punctum S esse virium centripetarum centrum. Q. E. D.

Jan. 29°. 170$\frac{4}{5}$.

XIV.

XIX. SI Corpus moveatur in Ellipsi circa ejusdem centrum, erit vis centripeta directe ut distantia corporis ab eodem centro. Est enim curvatura ubique in arcubus similibus in quadruplicata ratione distantiæ: velocitas autem in ejusdem distantiæ ratione simplici inverse. Unde curvatura dato tempore descripta erit in duplicata ratione distantiæ, & velocitas in ratione simplici distantiæ inverse, & vis centripeta, excessu rationis curvaturæ supra velocitatis rationem in hoc casu æstimanda, erit directe ut distantia. Q. E. D.

Corollarium. Si Ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac parabola, & vis ad centrum infinite distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est Theorema Galilæi, à nobis alia methodo demonstratum supra. Et si coni sectio Parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutata vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus circa Centrum in hujus perimetro, vi centripeta in cen- *Prop.* 8.

 trifugam

trifugam versa, & vi illa centrifuga majori existente in minori distantia, minori vero in majori distantia; uti virium adeo contrariarum ratio omnino exigit.

Coroll. (2.) Si vis centripeta corporis cujusvis attractivi sit directe ut distantia, ita ut in majori distantia attractio sit in eadem ratione etiam major, & in minori minor, Corpus movebitur in Ellipsi circa corpus centrale in ipso ellipseos centro positum, aut forte in circulo in quem ellipsis migrare potest: scilicet pro tangentium situ, de quo prius, corpus aut in circulo aut in ellipsi movebitur.

Coroll. 3, 4 *&* 5. *post Prop.* 15.

Coroll. (3.) Et æqualia erunt revolutionum in figuris universis circa centrum idem factarum periodica tempora; uti olim quoque ostendimus.

Coroll. 2. *Prop.* 9.

XX. Si corpus moveatur in spirali, secante radios omnes in eodem angulo, vis centripeta erit reciproce ut cubus distantiæ a spiralis centro. Est enim in harum spiralium diversis partibus curvatura arcuum similium æqualis, æqualium vero reciproce ut distantia. Sed dum corpora in spiralibus revolvunt erit ubique celeritas reciproce ut distantia, & inde etiam curvatura, dato tempore, reciproce in duplicata distantiæ ratione. Ergo vis centripeta ex curvaturæ & celeritatis rationibus conjunctis oriunda erit in triplicata distantiæ ratione reciproce, sive reciprocè ut cubus distantiæ.

Corollarium. Si corporis cujusvis attractivi vires sint in triplicata distantiarum à centro suo ratione reciproce, corpora omnia quorum motuum projectilium directiones non sunt ad radios perpendiculares cum velocitate quacunque exeuntia movebuntur in spirali, secante radios omnes in angulo dato: & si corpus primum ascendat, ascendet in infinitum; si descendat descendet ad centrum, temporis spatio ex areæ spiralis quantitate facile inveniendo.

Scholium. Si qua esset curva regularis cujus curvatura à quovis puncto centrali esset in duplicata distantiæ

stantiæ ratione directe, corpus quodvis in ea revolveret, si modo vires centripetæ ad punctum centrale essent inter se in ipsa distantiarum ratione reciproca. Nam si curvatura in æqualibus angulis sit ex hypothesi in duplicata distantiæ ratione directe, erit curvatura dato tempore semper sibi æqualis in distantiis omnibus; & cum velocitas sit semper ut distantia reciproce, erunt vires centripetæ, ex curvatura & velocitate conjunctis æstimandæ, ut distantia reciproce, & corpus in ista curva movebitur. *Q. E. D.*

Sic etiam, si qua esset curva regularis cujus curvatura à quovis puncto centrali esset in triplicata distantiæ ratione directe, quodvis corpus in ea revolveret, si modo vires centripetæ ad punctum centrale essent in omnibus distantiis æquales. Nam si curvatura in æqualibus angulis sit ex hypothesi in triplicata ratione distantiæ directe, erit curvatura dato tempore semper ut distantia directe: & cum velocitas sit semper ut distantia reciproce, vires centripetæ ob æqualitatem rationum directæ & reciprocæ erunt ubique æquales, & corpus in ista curva movebitur.

XXI. Si corpus moveatur in Ellipsi circa ejusdem focum, vis centripeta erit ubique in duplicata ratione distantiæ ab eodem foco reciproce.

Est enim uti olim notavimus in ellipsium & parabolarum & hyperbolarum partibus diversis quoad focum curvatura ubique in arcubus similibus directe ut distantia, & in partibus æqualibus semper æqualis. Est autem velocitas ubique in distantiæ ratione reciproca. ergo in arcubus simul descriptis curvatura est reciproce ut distantia à foco, atque in eadem ratione reciproca est etiam celeritas: unde vis centripeta ex curvaturæ & celeritatis rationibus conjunctis æstimanda erit in duplicata ratione distantiæ à foco reciproce. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Si corporis cujusvis attractivi vires sint in duplicata ratione distantiarum à centro suo reciproce, corpora omnia, saltem quorum motuum projectilium directiones

nes non ſunt ad radios perpendiculares, cum quacunque etiam motus velocitate, movebuntur in Ellipſibus, quarum focos, hoc eſt, focorum alterum corpus centrale occupabit, niſi motuum projectilium tanta ſit velocitas ut Ellipſes in Parabolas aut etiam hyperbolas convertere poſſit.

Coroll. (2.) Si corpus ex lege vis centripetæ hic aſſignata in Ellipſi circa focorum alterum gyretur, erit tempus periodicum corporis in Ellipſi moventis, ad tempus periodicum corporis in circulo, cujus radius eſt inter diſtantiam maximam & minimam intermedius, ſive ſemiaxi majori æqualis in ratione æqualitatis. Cum enim curvatura abſoluta Ellipſeωs integra ſit circuli curvaturæ æqualis, & ſumma velocitatum abſolutarum in paribus arcubus ſupra & infra mediocrem diſtantiam ſit ſemper ob motum in æquali arcu æqualiter mutatum velocitati in circulo mediocri æqualis, liquet vim centripetam eſſe æqualem, & proinde tempora periodica quoque eſſe inter ſe æqualia. Vel ſic potius demonſtrabimus. Ponatur eadem in mediocri diſtantia velocitas abſoluta, quæ eſt in circulo eadem ſemidiametro deſcripto, erit tum ex Conicis angulus ſive area deſcripta in circulo, ad angulum ſive aream in Ellipſi ſimul deſcriptam,ut ſemiaxis major,ad minorem : & in eadem quoque ratione, ex Conicis, eſt area integra circuli ad aream integram Ellipſeωs. Unde propter æquabilem arearum deſcriptionem utrinque, erunt & utrinque tempora periodica inter ſe æqualia.

Coroll. (3.) Sunt ergo tempora periodica in Ellipſibus inter ſe in ratione axium majorum ſequialtera, æque ac in circulis.

Coroll. (4.) Proinde dato axe majore, datur una tempus periodicum.

Coroll. (5.) Cum eadem ſit curvaturæ & celeritatis ratio in Parabola atque Hyperbola reſpectu focorum quam modo in Ellipſi obſervavimus, corpus pari ac prius jure ex viribus in ratione diſtantiæ duplicata reciproce

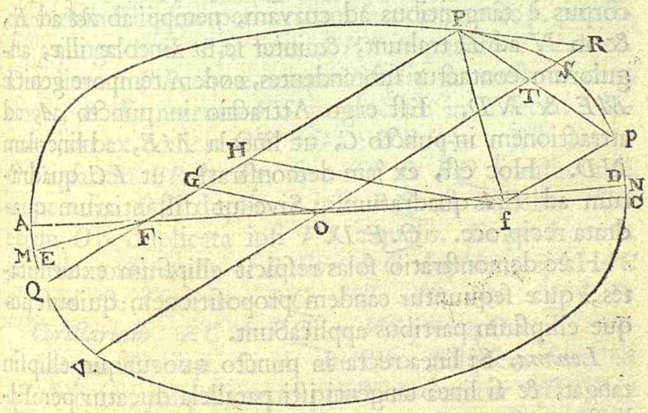
mutatis

mutatis movebitur in Parabola aut Hyperbola circa focum.

Scholium. Peractis jam faciliori methodo fundamentalium Newtoni Propoſitionum demonſtrationibus; liceat mihi, coronidis loco, aliam Propoſitionis poſtremæ omnium longe nobiliſſimæ, & ad Syſtema mundanum maxime accommodatæ demonſtrationem, ad rigorem geometricum magis compoſitam, qualem nempe eam è charta MS Ipſius Newtoni olim acceperam, hic loci attexere.

Propoſitio. Si corpus quodvis verſus Ellipſeωs focum attrahatur, & ſi attractionis quantitas & ratio ſit hujuſmodi ut corpus in perimetro elliptica revolvere efficiant, erit attractio in diſtantia minima, ad attractionem in diſtantia maxima, ad majorem nempe axem utraque, ut quadrata diſtantiarum corporis in iſtis punctis ab Ellipſeωs foco reciproce.

Sit *AECD* Ellipſis: *A* & *C* axis majoris extremitates: *F* focus iſte quo tendit vis centripeta: & *AFE*



CFD areæ illæ quas corpus radiis ad focum ductis æquali temporis ſpatio deſcribit. Sunt autem areæ illæ inter ſe æquales, utpote temporibus æqualibus proportionales. *Prop.* 15. *prius.*

Hoc

Hoc eſt, rectangula $\frac{1}{2}$ $AF \times AE$ & $\frac{1}{2}$ $FC \times DC$, ſunt inter ſe æqualia; ex hypotheſi nimirum quod arcus AE & CD adeo exigui ſumuntur ut pro lineis rectis tuto haberi poſſint. Ergo AE eſt ad CD ut FC ad FA. Supponamus jam lineas rectas AM & CN ellipſin in punctis A & C tangere, & lineolas EM & DN [in figura ſupplendas] eſſe à punctis E & D in tangentes illas perpendiculares. Quoniam curvatura Ellipſium (ſi nempe eandem in genere ſpectemus, & in arcubus æqualibus quoad ejuſdem centrum) ſit ad utramque extremitatem æqualis, Perpendicula illa EM & DN erunt inter ſe ut arcuum AE & CD quadrata. Eſt ergo EM ad DN ut FC quadratum, ad FA quadratum. Eodem autem tempore quo corpus ex attractionis vi deſcribet arcus ellipticos AE & CD, ab A ad E, & à C ad D; idem abſque illa attractione tangentes AM & CN arcubus æquales deſcripſiſſet. Sunt ergo attractionum vires quæ corpus è tangentibus ad curvam, nempe ab M ad E, & ab N ad D trahunt, & inter ſe ut lineolæ illæ, angulorum contactus ſubtendentes, eodem tempore genitæ ME & ND. Eſt ergo Attractio in puncto A, ad attractionem in puncto C, ut lineola ME, ad lineolam ND. Hoc eſt, ex jam demonſtratis, ut FC quadratum ad FA quadratum. Sive ut diſtantiarum quadrata reciproce. Q.E.D.

Schol. poſt. I. 41. Elem.
VI. 14. Elem.
Coroll. 4. Prop. 2. ſupra.

Hæc demonſtratio ſolas reſpicit ellipſium extremitates; quæ ſequuntur eandem propoſitionem quibuſcunque ellipſium partibus applicabunt.

Lemma. Si linea recta in puncto quocunque ellipſin tangat, & ſi linea tangenti iſti parallela ducatur per Ellipſeωs centrum, quæ lineam tertiam per contactus punctum & focorum alterutrum ductam interſecet, pars lineæ iſtius tertiæ inter contactum & interſectionem poſita erit axis majoris ſemiſſi æqualis.

Sit $APCQ$ Ellipſis: AC axis major: O centrum: Ff

Ff foci: P contactus punctum: OG linea tangenti parallela: & PG lineæ FP pars inter contactum & tangenti parallelam. Dico quod PG eſt ipſi CO, ſive axis majoris ſemiſſi æqualis.

Vid. Fig. p. 137.

Junge enim puncta Pf: & duc lineam fH ipſi OG parallelam. Et quoniam lineæ Ff & FH biſectæ ſunt in punctis O & G, erit AC ſummæ linearum PF & Pf, hoc eſt, ſummæ linearum PF & ex Conicis PH, ſive duplæ lineæ PG æqualis. Eſt ergo ſemiſſis AC, hoc eſt CO, lineæ PG æqualis. Q.E.D.

Lemma Alterum. Linea recta quævis per Ellipſeωs focum alterutrum ad peripheriam ducta, ſe habet ad Diametrum Ellipſeωs lineæ eidem parallelam, ut eadem Diameter ſe habet ad majorem Ellipſeωs axem.

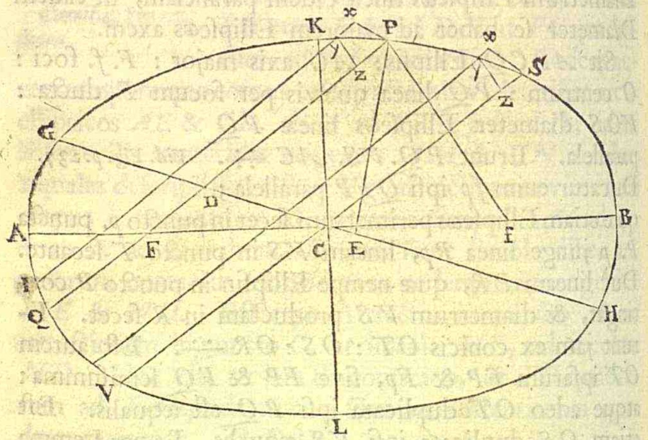
Sit $APCQ$ Ellipſis: AC axis major: $F.f.$ foci: O centrum: PQ linea quævis per focum F ducta: VOS diameter Ellipſeωs lineæ PQ parallela. Erunt $PQ.\ VS.\ AC \div\div$. Ducatur enim fp ipſi QFP parallela; quæ etiam Ellipſeωs perimetrum ſecet in puncto p. puncta $P.\ p$ junge linea Pp, lineam VS in puncto T ſecante. Duc lineam PR, quæ nempe Ellipſin in puncto P contingat, & diametrum VS productam in R ſecet. Erunt jam ex conicis $OT : OS : OR \div\div$. Eſt autem OT ipſarum FP & Fp, ſive FP & FQ ſemiſumma: atque adeo OT duplicata ipſi PQ eſt æqualis. Eſt etiam OS duplicata ipſi VS æqualis. Et per Lemma jam demonſtratum OR ſive PG duplicata ipſi AC æqualis eſt. Quocirca $PQ.\ VS.\ AC. \div\div$. Q.E.D.

Vid. Fig. p. 237.

Corollarium. $AC \times PQ = VSq = 4OSq.$

Lemma Tertium. Si ab alterutro Ellipſeωs foco ad quodvis in ejus perimetro punctum ducatur recta linea FP: & ad punctum P Ellipſeωs tangens Px; Et ſi iſti contactus angulo ſubtendatur lineola xy lineæ PQ parallela; rectangulum ſubtenſæ lineolæ, & ejuſdem lineæ ad remotiorem perimetri partem productæ, eſt ad rectangulum majoris Ellipſeωs axis, & primæ lineæ ad ad Ellipseωs etiam perimetrum productæ, ut distantiæ perpendicularis inter subtensam lineolam & lineam primam quadratum, ad axis Ellipseωs minoris quadratum.

Esto $AKBL$ Ellipsis : AB axis major : KL axis minor : C centrum : $F.\,f$ foci : P punctum quodvis in perimetro designatum : FP linea prima, per focum nempe F ad P ducta : PQ linea eadem ad Ellipsin producta : Px tangens : xy lineola angulo contactus subtensa : xI eadem subtensa ad remotiorem perimetri partem producta : yz distantia perpendicularis subtensæ & lineæ primæ. Dico quod rectangulum yxI, est ad rectangulum $AB \times PQ$, ut est yz quadratum,



ad KL quadratum. Esto enim VS Ellipseωs diameter lineæ primæ parallela, & GH diameter altera tangenti Sx parallela, sive diameter diametro priori conjugata. Erit tum ex Conicis rectangulum yxI, ad Px quadratum, sive tangentis quadratum, ut rectangulum SCV, ad rectangulum GCH: hoc est, ut SV quadratum, ad GH quadratum : Sunt quoque ex Conicis parallelogramma omnia circa diametros Ellipseωs conjugatas descripta inter se æqualia. Unde rectangulum duplæ PE in GH, æquale erit rectangulo axium

axium AB in KL. Et per consequens GH, est ad KL, ut AB, hoc est, per Lemma primum nuperrime demonstratum, dupla PD, ad duplam PE: sive, ob similitudinem triangulorum yzP & PED, ubi nempe punctum y cum puncto P coalescit, ut Px ad yz. Est ergo Px, ad GH, ut yz, ad KL: atqve adeo Px quadratum, ad GH quadratum, VI. 14. *Elem.*
ut yz quadratum, ad KL quadratum. VI. 22. *Elem.*
Est autem ex jam assumptis Px quadratum, ad GH quadratum, ut rectangulum yxI, ad SV quadratum : & SV quadratum (per Lemmatis secundi corollarium) est æquale rectangulo AC in PQ. Est ergo rectangulum yxI, ad rectangulum AC in PQ, ut yz quadratum, ad KL quadratum. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Si detur yz, & per consequens yz quadratum, dabitur etiam yx quadratum, & per consequens yx. Hoc est, si distantia perpendicularis minima puncti in perimetro elliptica sumpti à linea per focum detur, in diversis quibuscunque à foco isto distantiis ; dabitur lineola evanescens angulo contactus ibidem subtensa. Nam ex modo demonstratis, cum yz ex hypothesi detur, & detur etiam KL; & cum ut rectangulum yx in xI, ad rectangulum AC in PQ, ita est yz quadratum, ad KL quadratum : Et, xI linea in lineam QP ultimo desinente, erit ut $yx \times PQ$, ad $AC \times PQ$, ita yz quadratum, ad KL quadratum. Sed ut $yx \times PQ$, ad $AC \times PQ$, ita est yx, ad AC. Est ergo ut yx, ad AC, ita
yz quadratum, ad KL quadratum : VI. 1. *Elem.*
& invertendo, ut KL quadratum, ad yz quadratum, ita est AC ad yx; cum ergo reliqua dentur, dabitur & subtensa yx. *Q. E. D.*

Coroll. (2.) Liceat & mihi hic loci inferre quod curvatura Ellipseωs quoad focum est ubique in ipsa distantia à foco ratione directe. Cum enim yz subtensa evanevaneſcens anguli contactus in data diſtantia perpendiculari in omnibus à foco diſtantiis ſit eadem, erit yx in diſtantiis radio FP proportionalibus in angulis æqualibus, in † duplicata radiorum ratione directe. A qua ratione duplicata dempta, ut oportet, radii ratione, relinquetur curvaturæ ratio in diverſis diſtantiis; eadem nempe cum directa radiorum ratione. Quanquam itaque diverſorum circulorum in angulis iiſdem curvatura circa centrum ſit ubique æqualis; in Ellipſibus tamen è contra in diverſis à foco diſtantiis continuo mutatur, & in majori diſtantia evadit major, in minori minor; atque id in ipſa diſtantiæ auctæ aut diminutæ ratione. Uti prius annotavimus.

† *Per Coroll.* 4. *Prop.* 2. *prius.*

Coroll. (3.) Liceat quoque & mihi utrumque corollarium ad Parabolam & Hyperbolam traducere. Quæ enim de Ellipſi ſemel demonſtantur, etiam & Parabolis congruunt; propter Ellipſium infinite oblongarum & Parabolarum coincidentiam. Ea etiam quæ Ellipſibus & Parabolis congruunt ſymptomata, ob mutuam omnium ſectionum conicarum congruentiam, mutatis rite mutandis ſunt Hyperbolæ applicanda. Quare aſſerere jam licet, & ſubtenſam angulo contactus evaneſcentem ad æquales à radio diſtantias perpendiculares, quoad omnes à foco diſtantias, in quavis ſectione Conica eſſe ſibi ſemper æqualem; & curvaturam proinde in angulis æqualibus eſſe in ratione diſtantiarum directa.

Febr. 5. $170\frac{4}{5}$.

XV.

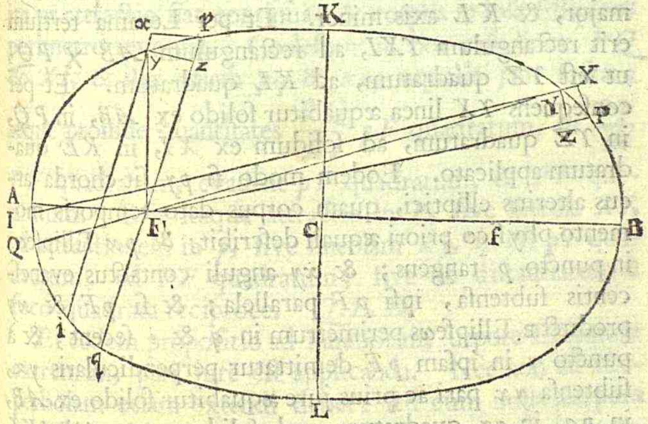
Scholium. SIMILI fere ratiocinio quo Newtonus ad ſubtenſarum evaneſcentium rationes quoad Ellipſeωs focum inveſtigandas uſus eſt, etiam & mihi liceat uti ad rationes earundem ſubtenſarum in Ellipſibus quoad

centrum determinandas. Scilicet per ejuſdem Newtoni demonſtrata. Eſt yz quadratum, in SC quadratum, applicatum ad yx lineam; æquale duplo KC quadrato in CB quadratum ad SC lineam applicato; ſive $yzq \times SC$ cub. $= 2KCq \times CBq \times yx$. Si detur itaque zy, & per conſequens zy quadratum, ob datum etiam ſolidum $2KCq \times CBq$. Erit yx ubique ut SC cubus, ſive in triplicata diſtantiæ ratione directe. Si itaque, ut oportet, zy ſumatur ut diſtantia, ob ſubtenſam anguli contactus in ratione arcus duplicata, erit yx ſubtenſa in ratione diſtantiæ quintuplicata; ſive, dempta diſtantiæ ratione, erit ipſa curvatura etiamnum in ratione diſtantiæ quadruplicata directe; ſive ut quadrato-quadratum diſtantiæ directe.

Princip. Math. Lib. 1. *Prop.* 10.

Propoſitio altera. Si corpus ad Ellipſeωs focum alterum attrahatur, & ex attractione iſta in perimetro elliptica revolvat, attractionis vires erunt ubique ut diſtantiarum ab eodem foco quadrata reciproce.

Eſto P corporis in Ellipſi revolventis quovis temporis



momento locus, & PX Ellipſeωs in puncto iſto Tangens; per quam tangentem corpus uniformi motu pergeret, ſi nulla

nulla attractione afficeretur: Sit punctum X locus quo corpus dato quovis temporis spatio quam minimo vi sola projectili pertingeret: & sit Y locus in perimetro Ellipseωs quo ex viribus conjunctis eodem dato tempore revera pertingit. Dividatur tempus in partes æquales quam minimas, ut quasi momenta physica haberi possint: Agat etiam attractio non perpetuo, sed per intervalla, etiam quam minima; semel nimirum quovis momento physico ineunte; ita ut prima attractionis vis ad punctum P, secunda ad Y agat, & ita paribus semper intervallis in perpetuum: Ita ut corpus per chordam arcus PY, & deinde per chordam arcus sequentis, & ita deinceps moveatur. Quoniam vero Attractio in puncto P versus punctum F dirigitur, & corpus à tangente PX in chordam PY detrahit; lineola XY à vi attractionis in P genita erit vi isti proportionalis, & ipsius directionis, hoc est, lineæ PF parallela. Produc lineas XY & PF ad perimetrum ellipticam in I & Q: junge puncta F, Y: & ipsi FP demittatur perpendicularis YZ. Sit AB Ellipseωs axis major, & KL axis minor. Et per Lemma tertium erit rectangulum YXI, ad rectangulum $AB \times PQ$, ut est YZ quadratum, ad KL quadratum. Et per consequens YX linea æquabitur solido ex AB, in PQ, in YZ quadratum, ad solidum ex XI, in KL quadratum applicato. Eodem modo si py sit chorda arcus alterius elliptici, quam corpus dato temporis momento physico priori æquali describit; & px Ellipseωs in puncto p tangens; & xy anguli contactus evanescentis subtensa, ipsi pF parallela; & si pF & xy productæ Ellipseωs perimetrum in q & i secent; & à puncto y in ipsam pF demittatur perpendicularis yz, subtensa yx pari ac prius jure æquabitur solido ex AB, in pq, in yz quadratum, ad solidum ex xi in KL quadratum applicato: hoc est, ob immutabiles & datas

Vid. Fig. p. 143.

AB

AB & KL, ut $\frac{PQ}{XI} YZ$ quadratum, ad $\frac{pq}{xi} yz$ quadratum. Sed quoniam lineæ PY, py à corpore revolvente æqualibus temporibus describuntur, areæ descriptæ, sive triangula PYF pyF sunt æqualia: atque adeo rectangula eorum triangulorum dupla $PF \times YZ$, & $pF \times yz$ sunt æqualia: & YZ, est ad yz, ut pF, ad PF: & per consequens $\frac{PQ}{XI} YZ$ quadratum, est ad $\frac{pq}{xi} yz$ quadratum, ut est $\frac{PQ}{XI} pF$ quadratum, ad $\frac{pq}{xi} PF$ quadratum. Est ergo YX, ad yx, ut $\frac{PQ}{XI} pF$ quadratum, ad $\frac{pq}{xi} PF$ quadratum; hoc est, attractio in P, est ad attractionem in p, ut $\frac{PQ}{XI} pF$ quadratum, ad $\frac{pq}{xi} PF$ quadratum. Ponamus jam tempora æqualia, quibus corpus subtensas PY & py describit, esse infinite parva; ita ut attractio fiat continua; & corpus in ipsa Ellipseωs perimetro revolvat. Coalescent in hoc casu lineæ PQ & XI, & illæ etiam pq & xi, æquales jam factæ; atque proinde quantitates $\frac{PQ}{XI} pF$ quadratum, & $\frac{pq}{xi} PF$ quadratum, evadent pF quadratum, & PF quadratum. Erit itaque attractio in P, sive lineola XY, ad attractionem in p, sive lineolam xy, ut est pF quadratum, ad PF quadratum; sive ut distantiarum à foco quadrata reciproce. Q.E.D.

Et eadem propositio ad Parabolam, utpote Ellipsium extremam, pari jure est applicanda. Nec non ad Hyperbolam etiam extendi debet: sed cum nulla corpora cœlestia nobis cognita in Hyperbolis gyrentur, de peculiari demonstratione eisdem applicanda minus hoc in loco solliciti sumus. Qui eam desiderant apud Newtonum facile reperient. Prop. 12.

L XXII.

XXII. Corporis in linea Parabolica moventis circa corpus attractivum in foco positum, cujus vires sunt in ratione duplicata distantiarum reciproca, velocitas est ubique, ad velocitatem corporis revolventis in circulo ad eandem distantiam, in subduplicata numeri binarii ad unitatem ratione; sive ut Diameter quadrati ad latus, hoc est, in ratione 10 ad 7 fere.

Cum enim distantia corporis à centrali corpore ponatur utrinque eadem, erit vis attractionis sive lineola augulo contactus utrinque subtensa, dato quovis temporis spatiolo, utrinque æqualis. Et velocitas in Parabola, erit ad velocitatem in Circulo, ut Parabolæ tangens, ad Circuli tangentem; ubi nempe subtensa est utrinque æqualis. Est vero tangens minima in Parabola ex conicis æqualis rectanguli subtensæ in latus rectum verticis cujusque ductæ radici quadraticæ. Et tangens minima in circulo æqualis rectanguli subtensæ in circuli diametrum ductæ radici quadraticæ. Sed ob datam utrinque subtensam, & verticis Parabolæ latus rectum ex conicis circuli diametri duplum; sive ut 2 ad 1. erit rectangulum prius posterioris etiam duplum, vel ut 2 ad 1. unde tangentes, sive radices quadraticæ erunt inter se ut radix quadratica numeri binarii, ad unitatem; sive ut diameter quadrati ad latus. Hoc est, fere ut 10 ad 7. *Q.E.D.*

III. 36. *Elem.*

Coroll. (1.) Cum itaque velocitas in Parabola, sit ad velocitatem in circulo, ad eandem à foco distantiam, in ratione data; nimirum $\sqrt{.}\,2$ ad 1. & cum velocitas in diversis circulis sit in subduplicata radiorū ratione reciproca, erit quoque velocitas corporis parabolam describentis in diversis à foco distantiis in subduplicata distantiarum ratione reciproca.

Coroll. (2.) Velocitas corporis in Ellipsi gyrantis est minor quam in Parabola ad eandem distantiam à foco; & velocitas corporis in Hyperbola gyrantis est major quam in Parabola ad eandem distantiam: Unde velocitas in Ellipsi, erit ad velocitatem in Circulo ad eandem distantiam, in minore ratione quam $\sqrt{.}\,2$ ad 1. & in Hyperbola velocitas erit, ad velocitatem in circulo, ad eandem distantiam, in majore ratione quam $\sqrt{.}\,2$ ad 1.

Vid. pag. 23. *prius.*

Coroll. (3.) Cognita itaque corporis ad distantiam quamvis à foco velocitate, cognoscetur trajectoriæ figura; utrum illa nimirum sit Circulus, Ellipsis, Parabola, vel Hyperbola. Et ex accuratiore calculo si sit Ellipsis, vel Hyperbola, quænam sit earum figurarum species quam corpus revolvens describere debeat.

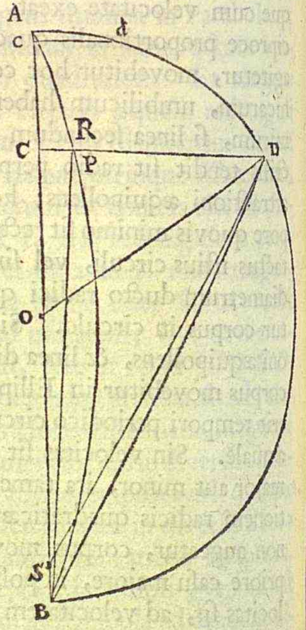
Coroll. (4.) Ex novissime demonstratis consequens est quod si corpus quodvis, secundum lineam quamvis rectam, (nisi ea ad ipsum focum directe tendat,) quacunque cum velocitate exeat, & vi centripeta quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ à centro simul agitetur, movebitur hoc corpus in aliqua sectionum conicarum, umbilicum habente in centro virium. Nimirum, si linea secundum quam corporis motus projectilis tendit sit radio perpendicularis, & velocitas sit attractioni æquipollens; hoc est, si velocitas dato tempore quovis minimo sit rectanguli ex subtensa anguli contactus istius circuli, vel sinu verso, in ejusdem circuli diametrum ducto radici quadraticæ æqualis; movebitur corpus in circulo. Si autem velocitas sit attractioni æquipollens, & linea directionis ad radium obliqua, corpus movebitur in Ellipsi, cujus tempus periodicum erit tempori periodico circuli, in quem migrare potuit, æquale. Sin velocitas sit velocitate prius assignata aut major aut minor, ita tamen ubi major est, ut ultra rationem radicis quadraticæ numeri binarii ad unitatem non augeatur, corpus movebitur in Ellipsi, circulo in priore casu majore, in posteriore minore. Quod si velocitas sit, ad velocitatem in circulo, ut radix quadratica numeri binarii, ad unitatem, corpus movebitur in Parabola. Si denique velocitas sit adhuc major, corpus in Hyperbola movebitur.

XXIII. *Probl.* Posito quod vis centripeta sit reciproce pro-

proportionalis quadrato distantiæ locorum à centro, tempora definire quibus corpora rectâ cadendo centrum attingent.

Eodem axe principali, sive diametro transversa, *AB*, descriptæ ponantur Ellipsium utrinque extremæ, circulus nimirum, *ADB*, & recta linea *AB*. Ex æqualitate harum diametrorum transversarum erunt tempora periodica utrinque æqualia; & proinde semirevolutionum tempora erunt sibi invicem æqualia. Hoc est tempus descensus per diametrum, æquale tempori revolutionis per semicircumferentiam. Cum itaque ex prius demonstratis facile sit tempus istud semirevolutionis determinare, exinde quoque facile fuerit tempus descensus directi definire. Exempli gratia. Tempus semiperiodi Lunaris continet minuta prima 19.671L5. Ubi nempe ejus Orbitæ diameter est distantiæ suæ mediocris à terræ centro dupla. Et est tempus hoc, ad tempus semiperiodi ad distantiam dimidiam, quod nunc quærimus, in sesquialtera ratione distantiarum; hoc est, fere ut 2828 ad 1000. sive ut 19.671L5 ad 6.955L5. Unde tempus semiperiodi in distantia prioris dimidia, (ubi nempe distantia integra Lunæ sive orbitæ semidiameter circuli diameter evadit,) hoc est tempus corporis ad Lunæ distantiam positi, & directe cadentis in terræ

Coroll. 4. post Prop. 21. prius.



terræ centrum, erit minutorum primorum 6.955L5. sive dierum 4. horarum 19. minutorum primorum 55. & secundorum 30. Et hoc temporis spatio ipsa Luna, si motus ejus sisteretur, & tellus maneret immobilis, ab orbita sua ad telluris centrum caderet. Et simili ratiocinio tempus casus cujusvis Planetæ à motu suo cessantis, & deorsum in Centrum cadentis satis facile poterit determinari; uti in proximo Scholio fiet.

Scholium. Cum itaque tempus cujusque Planetæ semiperiodi, diminutum in ratione 1000 ad 2828, sit tempus casus directi in centrum, sequens tabella, eo fundamento innixa, planetarum omnium in centra sua cadentium tempora exhibebit.

		dier.		hor.
Mercurius,	*in Solem caderet spatio*	15	:	13
Venus,		39	:	17
Terra,		64	:	14
Mars,		121	:	11
Jupiter,		767	:	3
Saturnus,		1900	:	4
Planetarum Circumjovialum				
Intimus,	*in Jovem caderet spatio*	00	:	7
Secundus,		00	:	15
Tertius,		1	:	6
Quartus,		2	:	23
Planetarum Circumsaturniorum				
Intimus,	*In Saturnum caderet spatio*	0	:	8
Secundus,		0	:	12
Tertius,		0	:	19
Quartus,		2	:	20
Quintus,		14	:	1
Luna in Terram caderet spatio		4	:	20

Febr. 19. $170\frac{4}{5}$.

XVI.

XXIV. PROBLEMA. Poſito quod vis centripeta ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ locorum à centro virium, tempora definire quibus corpora rectà deorſum cadendo ſpatia quævis data deſcribant.

Si corpus non cadat perpendiculariter, deſcribet id ſectionem aliquam conicam, cujus *umbilicus inferior* (propter motus projectilis deſcenſum hic ſuppoſitum) congruet cum centro virium, uti ex ante dictis conſtat. Sit ſectio illa conica Ellipſis $ARPB$. ubi nimirum projectionis velocitas, eſt ad velocitatem qua corpus in circulo ad eandem diſtantiam revolvere poſſet, in minore ratione quam eſt radix quadratica numeri binarii ad unitatem. Sit hujus Ellipſeωs umbilicus inferior S. & ſuper hujuſce Ellipſeωs axe majore AB deſcribatur ſemicirculus ADB. Et per corpus decidens tranſeat recta DPC perpendicularis ad axem, actiſque ad umbilicum DS & PS; erit area ASD, areæ ASP, atque adeo tempori proportionalis. Eſt enim ut CD, ad CP, ita area trianguli SCD, ad aream trianguli SCP. Eſt etiam ex Conicis ut eadem CD, ad eandem CP, ita area circularis CAD, ad aream Ellipticam CAP. Et proinde, erit priorum arearum ſumma ASD ad ſummam poſteriorum ASP, ut CD, ad CP; ſive ut axis major Ellipſeωs, ad ejuſdem axem minorem: atque adeo in ratione data, tempori proportionali. Manente jam Ellipſeωs axe majore, ſive circuli diametro AB, minuatur perpetuo Ellipſeωs latitudo, ſive axis minor; & ſemper, ex vi jam demonſtratorum, manebit area ASD tempori proportionalis: minuatur latitudo illa in infinitum, & orbe APB elliptico jam coincidente cum axe AB: & umbi-

Prop. 21. *prius. Vid. Fig. p.* 148.

Coroll. 2. *Prop.* 22. *prius.*

VI. 1. *Elem.*

V. 12. *Elem.*

umbilico S cum axis termino B: deſcendet corpus in recta AC; & area ABD evadet hoc etiam in caſu tempori proportionalis. Unde ſi linea recta ut CD axi perpendicularis ita ſibi parallelωs ſemper deorſum moveri ſupponatur, ut area ABD ſit ubique tempori proportionalis, punctum C locum determinabit, ad quem eodem tempore dato corpus deorſum in centrum cadens eſt perventurum.

Exempli gratia, Sit AB Lunæ à centro telluris diſtantia mediocris pedum, ut prius, circiter 1.257.696.000. Requiritur ut Lunæ rectà deſcendentis locum die caſus primo exeunte determinemus. Notum eſt ex olim demonſtratis quod ſi motus Lunæ ceſſaret, caderet illa ſpatio unius minuti primi pedes Anglicos 16⌊1 circiter. Unde erit area circularis ABd pedum quadratorum quaſi 89.483.812.704.000 [æqualis nimirum rectangulo cd in $\frac{1}{2}$ AB ducto.] Unde cum diei integro inſunt minuta prima 1440 erit area circularis ABD diei integro debita pedum quadratorum quaſi 128.856.690.293.760.000. Eſt vero tempus datum minuta prima 1440. Si itaque punctum D definire poſſimus, ita ut area ABD ſit pedum quadratorum 128.856.690.293.760.000 ſinus arcus AD, hoc eſt DC, lineam eo tempore deſcriptam AC determinabit, utpote ejuſdem arcus ſinum verſum. Area autem iſta æquatur rectangulis $\frac{1}{2}$ $CD \times OB$ & $\frac{1}{2}$ $AD \times OB$ ſive rectangulo $\frac{1}{2}$ $CD + \frac{1}{2}$ $AD \times OB$. Si itaque area data per ſemidiametrum OB dividatur, quotus exhibebit ipſarum CD & AD ſemiſſem. Ex ſinuum itaque tabula quærendus eſt arcus ille, cujus ſemiſſis ſemiſſi ſinus ſui ſuperadditus quotum iſtum eſt exhibiturus. Eſt vero ex calculo quotus iſte pedum 204.909.120, ſive ad circulum cujus radius eſt partium 10.

Coroll. 7. *poſt Prop.* 2. *prius.*

Coroll. poſt Prop. 5. *Selec. ex Archimed.*

10.000.000. reducendo, est partium illarum 3.258.484. Et si apud sinuum tabulas sinum ad gradum undevigesimum, & istius gradus scrupulum quinquagesimum exeuntem respiciamus, sinus unius minuti primi per minuta 1130 multiplicatus 2909 × 1130, partes dabit 3.287.170, arcui nimirum *AD* graduum 18 & scrupulorum primorum 50 congruas; cujus arcus sinus est partium 3.228.165, & utriusque summa erit partium 6.515.335 cujus semissis 3.257.667. cum numero priore 3.258.484 satis accurate congruit. Est ergo linea *CD* sinus graduum 18, & minutorum primorum 50, & linea eo temporis spatio descripta est istius arcus sinus versus longus nimirum partes 535.382, hoc est, reducendo ad semidiametrum orbitæ Lunaris, longus pedes 33.667.390, hoc est, milliaria Anglica 6.376 cum pedibus 2.110. Et eodem modo tempus definetur quo Luna ad ipsum telluris centrum esset descensura. Sed quoniam illud ex alia computandi ratione eaque faciliori olim deduximus, calculo isti impræsentiarum supersedebimus.

Prop. 23. *prius.*

Corollarium. Si figura *RPB* non sit Ellipsis, sed Hyperbola, vel Parabola, res eodem modo per Hyperbolam rectangulam, vel parabolam quamvis conficietur; sed ob praxin difficiliorem, & minus necessariam eandem mittemus.

Coroll. (2.) Tempora quibus corpora quævis in centrum ex distantiis diversis caderent, sunt inter se in sesquialtera distantiarum illarum ratione directe. Est enim lineola *Ac* dato tempore ad distantias diversas genita in duplicata distantiæ ratione reciproce; unde erit *cd* sinus quam minimus in subsesquiplicata distantiæ ratione reciproce. & Area $\frac{1}{2}$ *cd* in *AB* simul descripta in subduplicata distantiæ ratione directe. Unde cum area integra semicircularis *ADB* sit in duplicata ratione distantiæ directe, erit tempus eidem proportionale in ratione distantiæ sesquiplicata directe. *Q.E.D.*

Exempli gratia, Sit *AB* altera ipsius *AB* dupla; erit tum subtensa evanescens anguli contactus, sive lineola *Ac*, ipsius *Ac* pars tantum quarta. Et erit sinus *cd*, ipsius *cd* subsesquiplicata, sive ut latus quadrati ad diametrum; hoc est, ut 7 ad 10 fere. Erit quoque area $\frac{1}{2}$ *cd* × *AB* ad $\frac{1}{2}$ *cd* × *AB*, fere ut 2 × 7 = 14 ad 1 × 10 = 10. Unde area in majori distantia descripta erit ad aream in minori, sed eodem tempore descriptam fere, ut 14 ad 10; vel ut diameter in quadrato ad latus. At integra area à majori linea *BD* in descensu describenda, est ad aream à minori linea *BD* in descensu describendam, ut 4 ad 1; sive ut 40 ad 10. Ergo erit tempus descensus in majori distantia, ad tempus descensus in minori, in ratione excessus rationis 40 ad 10 supra rationem 14 ad 10: Sed ista excessus ratio est ut 40 ad 14, sive ut diameter quadrati ad lateris quadruplum. Unde tempora sunt inter se ut diameter quadrati ad lateris quadruplum, hoc est, in sesquialtera distantiarum ratione directe. *Q.E.D.*

Prop. 2. *Coroll.* 4. *supra.*

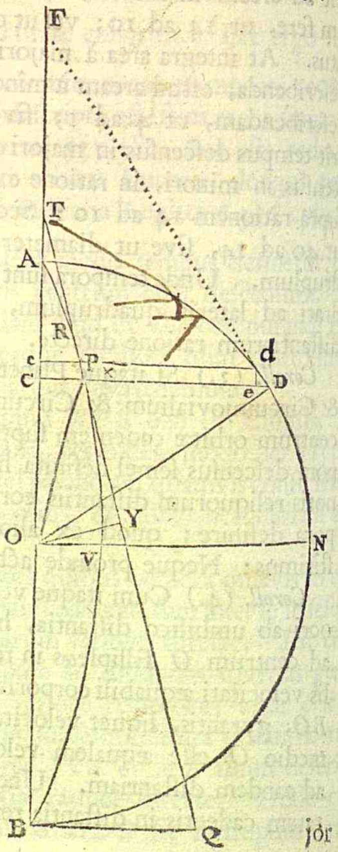
Coroll. (3.) Si itaque Planetarum primariorum, quin & Circumjovialium & Circumsaturniorum quemvis in centrum orbitæ cadentem supponamus, & horum tempora descensus semel definita habeamus, facile fuerit ex notis reliquorum distantiis eorum etiam descensus tempora definire; quod ex alio fundamento prius præstitimus: Neque proinde actum jam hic loci agemus.

Coroll. (4.) Cum itaque velocitas in Ellipsi in mediocri ab umbilico distantia, hoc est, velocitas cadentis ad centrum *O* Ellipseωs in rectam desinentis, sit æqualis velocitati æquabili corporis in circulo, cujus radius est *BO*, gyrantis, liquet velocitatem cadentis in ipso spatii medio *O* esse æqualem velocitati gyrantis in circulo ad eandem distantiam. Unde quoque sequitur velocitatem cadentis in distantia remotiori esse velocitate circulari

culari minorem, & in diſtantia propinquiori majorem.

XXV. *Problema.* Poſito quod vis centripeta ſit proportionalis altitudini, ſeu diſtantiæ locorum à centro directe, tempora definire quibus corpora rectâ cadendo ſpatia quævis data deſcribant.

Si corpus non cadat perpendiculariter, deſcribet id ſectionem aliquam conicam, cujus *centrum* congruet cum virium centro; uti ex ante dictis conſtat. *Prop. 19. prius.* Sit ſectio illa conica Ellipſis *ARPB*. Ejus centrum *O*. & ſuper hujus Ellipſeos axe majore *AB* deſcribatur ſemicirculus *ABND*. & per corpus decidens tranſeat recta *DPC* perpendicularis ad axem: actiſque ad centrum *DO* & *PO*, erit ex Conicis Area *AOD* Areæ *AOP*, atque adeo tempori proportionalis. *Prop. 15. prius.* Eſt enī ut prius ut *CD*, ad *CP*, ita area trianguli *OCD*, ad aream trianguli *OCP*. *VI. 1. Elem.* Et etiam ex Conicis ut eadem *CD*, ad eandem *CP*, ita area circularis *CAD*, ad aream Ellipticam *CAP*. Et proinde, erit arearum priorum ſumma *AOD*, ad ſummam poſteriorū *AOP*, *V. 12. Elem.* ut *CD* ad *CP*: ſive ex Conicis ut axis ma-



jor

jor Ellipſeos ad ejuſdem axem minorem: atque adeo in ratione data, tempori proportionali. Manente jam Ellipſeos axe majore, ſive circuli diametro *AB*, minuatur perpetuo Ellipſeos latitudo, ſive axis minor. Et ex vi jam demonſtratorum manebit area *AOD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum; & Orbe *ARPB* elliptico jam coincidente cum axe *AB*, deſcendet corpus in recta *AC*. & area *AOD* evadet hoc etiam in caſu tempori proportionalis. Unde ſi linea recta ut *CD* axi perpendicularis ita ſibi parallelos ſemper deorſum moveri ſupponatur, ut *AOD* ſit ubique tempori proportionalis, punctum *C* locum determinabit ad quem eodem tempore dato corpus deorſum cadendo eſt perventurum.

Corollarium. Propter æqualitatem areæ circularis æquali tempore ubique deſcribendæ circa circuli centrum, erit motus puncti *D* ſemper æquabilis, & arcus æquales dato tempore deſcribet.

Coroll. (2.) Tempora itaque corporum cadentium, & ſpatia quæcunque deſcribentium, ut *AC*, ſunt inter ſe ut ipſi arcus *AD*. Et ſpatia deſcripta ut arcuum ſinus verſi, *AC*.

Coroll. (3.) Velocitates autem in locis quibuſvis ut *C*, genitæ, ſunt ut arcuum *AD* ſinus recti. Ducatur enim linea *cd* ipſi *CD* parallela, in diſtantia nempe infinite parva; & ducatur circuli tangens *dD*. Dum itaque punctum *D* deſcribit tangentem *dD*, corpus cadens deſcribit lineolam *cC* ipſi *de* æqualem; & ob datam puncti *D* velocitatem, dato tempore dabitur etiam *dD* longitudine. Erit ergo in triangulo *deD* *dD* radius circuli datus, & *de* anguli *dDe* ſinus rectus. Et propter ſimilitudinem triangulorum *deD* *COD*, erit eo loci radius *OD*, & ſinus rectus anguli *AOD* ipſa *CD*. Eſt ergo velocitas in punctis quibuſvis *C* ut arcus *AD* ſinus rectus. *Q.E.D.*

Coroll. (4.) Tempora omnia quibus corpora de locis quibuſvis ad uſque centrum cadunt ſunt ubique æqualia.

Cum

Cum enim ex Hypothesi vis acceleratrix, atque adeo velocitas genita, sit ut linea describenda, palam est tempora descensus esse ubique æqualia. *Q. E. D.*

Coroll. (5.) Cum ex olim demonstratis corporum omnium circa Ellipseωn centrum gyrantium tempora periodica sint æqualia, erunt & temporum periodicorum quadrantes per *ARPV* æquales. Et cum hoc in Ellipsibus quibuscunque verum sit, etiam & in Ellipsium hinc inde extremis, hoc est, in linea recta *AO* & arcu quadrantali *AN* verum erit. Hoc est, æqualia erunt tempora quibus corpus unum de loco quocunque *A* cadendo pervenit ad centrum *O*, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem. *Q. E. D.*

Coroll. 3. Prop. 19. supra.

Scholium (1.) Cum itaque tempus periodicum Lunæ circa terram, sit ad tempus periodicum corporis cujusvis circa centrum telluris revolvens ad semidiametri terrestris distantiam, in sesquialtera distantiarum ratione; & cum intra superficiem telluris vis centripeta sit ubique in directa distantiæ ratione, uti olim demonstrabitur; juvabit superioris ratiocinii exemplum in medium proferre; & quo temporis spatio gravia, posito ad centrum puteo vel foramine vacuo, illuc descenderent calculo ostendere. Ut ergo temporis periodici in telluris superficie quadrantem, quo nimirum corpora omnia ad centrum accederent, juxta jam demonstrata investigemus, fiat ut distantiæ Lunaris cubus, $60 \times 60 \times 60. = 216.000.$ ad semidiametri terrestris cubum, $1 \times 1 \times 1. = 1.$ ita periodi Lunaris quadratum $39.343'. \times 39.343'. = 1.547.871.649.$ ad periodi in superficie terrestri quadratum $= 7.166˪07.$ cujus radix quadratica 84˪6 exhibebit scrupulos primos horarios quibus corpus vel Planeta ad semidiametri terrestris distantiam à centro circa illud integram periodum absolveret. Cujus numeri quadrans 21˪15 exhibebit temporis spatium scrupulis itidem primis designatum, quo gravia quæcunque per semidiametrum terrestrem ad ejusdem centrum pervenirent. Et cum in distantiis quibuscunque idem sit casûs tempus, uti jam ostensum, liquet corpora omnia scrupulis primis viginti & uno, cum partibus scrupuli centesimis quindecim, sive scrupulis secundis novem, à superficie ad centrum esse descensura.

Schol. post Prop. 14. prius.

Coroll. 4. prius.

Schol. (2.) Sin tempus casûs per spatium quodlibet datum absque Algebræ usu requiratur; scilicet per semidiametri terrestris trientem; quære apud sinuum Tabulas, ad quem angulum sinus versus est sinus totius pars tertia; nimirum ad arcum *AD* graduum $41°. 25'$. Unde tempus casus per *AC*, semidiametri trientem, erit ad tempus casus integri ad centrum, ut Arcus *AD*, ad arcum quadrantalem *AN*: sive ut $41°. 25'$. ad $90°$. Et cum $90° : 41°. 25'. :: 21˪15$ scrupuli primi horarii: $9˪97$, sive $9' : 58''$. liquet corpus quodvis per semidiametri terrestris trientem scrupulis primis horariis novem, & secundis quinquaginta octo esse descensurum. Et velocitatem in puncto *C*, esse ad velocitatem maximam, ubi ad ipsum centrum descenderet, in ratione sinus Recti *CD*, ad sinum totum *ON*: sive ut 66.153 ad 100.000. uti ex nuperrime demonstratis est apertissimum.

Vid. Fig. p. 154.

Coroll. 2. prius.

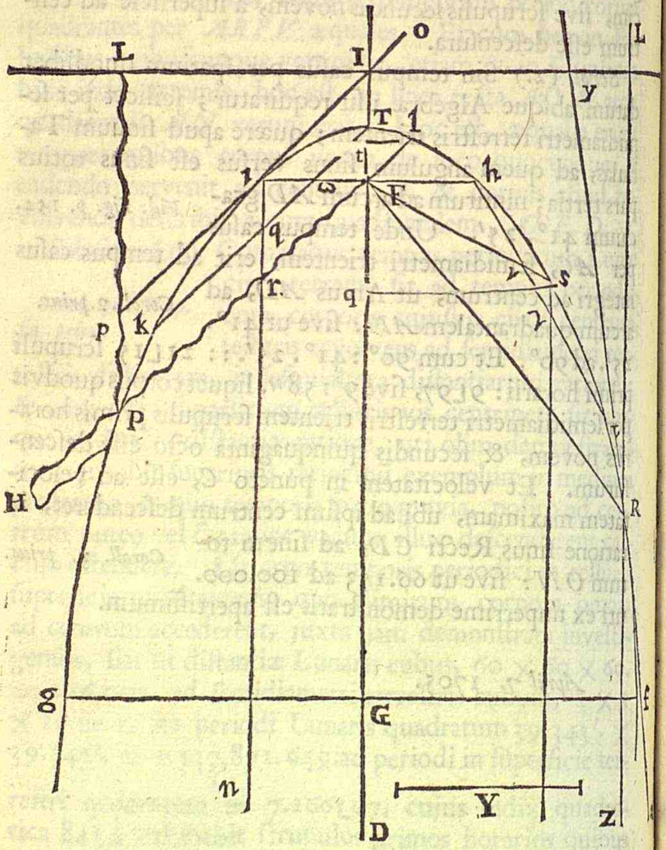
Coroll. 3. prius.

April 7. 1705.

XVII.

XVII.

XXVI. PROBLEMA. Corpore in data trajectoria parabolica circa focum delato, dati arcus descripti, aut describendi, sive in ascensu sive in



descensu, invenire tempus. Sit *F* exempli gratia Umbilicus figuræ. *T* vertex principalis. *Tl* vel *Ts* arcus datus descriptus, aut describendus. *Tt* vel *Tq* ejusdem arcus abscissa, ex dato arcu etiam data.

tl

tl vel *qs* semiordinata, ex arcu dato etiam data. Requiritur tempus arcus istius *Tl* vel *Ts* descripti, aut describendi. Ex data Parabola datur ejusdem Latus rectum, ejusque proinde pars quarta *TF*. Ex data quoque corporis centralis vi centripeta, datur corporis in vertice principali velocitas; quæ nempe est ad velocitatem corporis circulum, cujus radius est *TF*, describentis ut radix quadratica numeri binarii ad unitatem. Unde quoque dabitur & area minima à radio *TF* dato quovis tempore minimo describenda. Est autem area *FTl* vel *FTs* æqualis duabus tertiis rectanguli $Tt \times tl$, vel $Tq \times qs$. Cui si *addatur* triangulum *Ftl* in priore casu, & in posteriore ab eodem *auferatur* triangulum *Fqs*, dabitur & area *Ftl* vel *Fts*: quæ per aream minimam dato quovis tempore minimo in vertice *T* descriptam divisa, dabit tempus quæsitum. *Q. E. I.*

Prop. 22. prius.

Exempli gratia, sit Parabola data illa quam Cometa exeunte Anno 1680. & ineunte 1681. per Europam visus descripsit. Sit *Fq* orbis magni semidiametro æqualis, partium nempe æqualium 10.000, qualium partium sit latus rectum 236⌊8. Et proinde *FT* partium 59⌊2, & integra abscissa *Tq* partium 10.059⌊2. Ponamus etiam Cometam fuisse in Parabolæ vertice, sive perihelio suo *T* Decembris 8°, scrupulo quarto post, meridiem. Ad velocitatem Cometæ in vertice Parabolæ inveniendam, reperiatur primum Planetæ ad istam distantiam in circulo revolventis velocitas; nempe ex hac analogia: ut radix quadratica distantiæ *FT*, partium 59⌊2 = 7⌊7. ad radicem quadraticam distantiæ *Fq*. partium 10.000 = 100. ita velocitas Telluris annua, ad velocitatem Planetæ circulum cujus radius est *FT* describentis. Deinde, ut radix quadratica numeri binarii = 1⌊414, ad unitatem, ita erit velocitas Cometæ in vertice parabolæ suæ, ad velocitatem Planetæ in circulo ad eandem distantiam.

Vid. Newt. p. 494 & 498.

Prop. 13. prius.

am.

am. Est autem velocitas Telluris mediocris hujusmodi quæ spatio minuti unius primi describat partes 1L1195. & 7L7 : 100 :: 1L1195 : 1L552. Unde velocitas Cometæ in perihelio suo ea erit quæ spatio unius minuti primi describat partes $\frac{1L414}{1}$ 1L552 = 2L19. qualium semidiameter orbis magni est 10.000, & qualium distantia Cometæ minima est 59L2. Area itaque dato illo tempore à Cometa radio ad centrum Solis ducto descripta æqualis est rectangulo $\frac{1}{2}$ 59L2 × 2L19 = 64L824. partibus quadratis. Ut itaque jam tandem temporis spatium arcum parabolicum ut *Ts*, ubi *Fq* est magni orbis semidiametro æqualis describendi investigemus, aream *TsF* computabimus, & cum area priore unico minuto primo descripta conferemus. Itaque, ut *TF* partium 59L2, ad *Tq* partium 10.059L2. ita sit quadratum *Fh* partium 118L4 = 14.018L56, ad partes quadratas 2.382.018L61. cujus numeri radix quadratica = 1.543L3. ex Conicis æqualis erit semiordinata *qs*: qua in dimidiam distantiam *Fq* ducta 1.543L3 × $\frac{1}{2}$ 10.000 = 7.716.500 emerget trianguli addititii *Fqs* area. Est autem area parabolica integra *Tsq* æqualis duabus tertiis rectanguli *Tq* partium 10.059L2, in *sq* partium 1.543L3 ducti, sive partibus quadratis $\frac{2}{3}$ 15.524.363L36 = 10.349.575L57. E quo numero deducatur triangulum *Fsq*. 7.716.500 relinquetur area descripta partium quadratarum 2.633.075L57. quibus per partes areæ uni minuto primo debitas divisis $\frac{2.633.075L57}{64L824}$ prodit temporis spatium quæsitum: quo nempe Cometa arcum *Ts* describeret = 4.061L9 = 28^{d}. 4^{h}. 59′. Unde arcus *Ts* describetur diebus viginti octo, & horis prope quinque. Et Cometa punctum *s* occupa-

occupabat Januarii quinto, hora circiter post meridiem quarta. Quod etiam cum schemate Newtoniano ex observationibus deducto exacte congruit.

Si itaque ex hujusmodi calculis cujusvis Cometæ Parabolam, aut potius Ellipsin adeo eccentricam, ut pro Parabola tuto haberi possit, describentis arcubus quibusvis, ut *Ts*, tempora congrua semel determinata habemus, ex inversa methodo etiam temporibus quibusvis arcus congruos satis accurate definire possemus: eadem nempe operandi ratione qua in Hypothesi Kepleriana ejusque tabulis ex data anomalia Planetarum media in Ellipsibus, eorundem coæquatam invenire solemus.

Coroll. (1.) Cum itaque evanescat triangulum ablatitium *Fsq* in puncto *h*, erit tum temporis area computanda æqualis duabus tertiis rectanguli *TF* in *Fh*; sive $\frac{2}{3}$ 59L2 × 118L4 = 4.676L8. & proinde tempus huic areæ debitum æquale $\frac{4.676L8}{64L824}$ = 1^{h}. 12′. 9″. Unde arcus *Th* inter verticem principalem parabolæ, & axi ordinatam per focum describebatur hora una, scrupulis primis duodecim, & secundis novem. Et Cometa punctum *s* occupabat Decembris octavo, scrupulo primo decimo septimo post horam primam pomeridianam.

Coroll. (2.) Hinc etiam temporis spatium quo arcus quivis datus describitur facile innotescit: computando nimirum tempus à perihelio ad locum utrumque, & tempus brevius à longiori auferendo. Eo enim pacto innotescet intervallum temporis arcui dato debitum. Sic sane deducto tempore arcui *Th* congruo = 1^{h}. 10′. 9″. ex tempore arcui *Ts* congruo = 28^{d}. 4^{h}. 59′. reliquum est temporis intervallum arcui *hs* congruum. = 28^{d}. 3^{h}. 46′. 51″. Atque ita ubique.

Coroll. (3.) Hinc etiam methodus ex tempore dato arcum descriptum inveniendi peti potest. Cum enim ad punctum *h* evanescat semper triangulum ablatitium *Fqs*, aut addititium *Ftl*; & area proinde eo loci facillime computetur, partium nempe quadratarum in nostro exemplo 4.677⌊0.516. Cum etiam eo loci TF sit ipsius Fh semissis; cum demum abscissa TF eadem semper ratione crescat, quo crescit ipsius ordinatæ Fh quadratum; dato quovis tempore, sive area ipsi proportionali, dabitur arcus eidem congruus: si incrementorum vel decrementorum proportionalium ea quantitas sumatur ut $\frac{1}{2}\, qs \times Fq$, ex $\frac{2}{3}\, qs \times Tq$ ablata reliqua sit quantitas areæ datæ. Sic sane, Ut arcum 28^{d}. 14^{h}. 59'. = 40.619'. hoc est, areæ partium quadratarum 2.633.075⌊57 congruum inveniam, Quæro per tabulas quadratorum numerorum, si absque Algebræ auxilio agendum, Ubi talis occurrit numerus sumpta linea TF tanquam unitate: & Area FTh tanquam primaria, vel unitate quadrata: vel $\frac{2}{3}\, TF \times Fh = 563$. parte areæ totius: & Fh tanquam numero binario:) Ut numeris unitati addendis proportionalibus existentibus, numerorum binario addendorum quadratis $\frac{1}{2}\, qs \times qF$ de $\frac{2}{3}\, qs \times Tq$ ablato, reliqua sit area data $= 563$. Qui numerus alibi non occurret nisi eo loci ubi Fq, est ad FT, ut 10.000 ad 59⌊2. Sive ut 167 ad 1 fere. Unde liquet arcum quæsitum eum ipsum esse cujus Tq partium 10.059⌊2 est abscissa. Sed cum hæc methodus non nisi tentando fiat, directa non est. Satis tamen est quæ tabularum condendarum originem & methodum aliquatenus indicare possit.

Scholium. Notandum est, methodum Newtoni Geometricam ex dato tempore arcũ descriptum directe indicare. Si nimirum fiat ut tempus ThF tempus areæ congruum, ad tempus datum, ita FT ad ty: puncto t mediam lineam TF occupante, & ty ad TF perpendiculari ducta, Erit distantia à foco yF æqualis ys. Unde circulus isto radio descriptus punctum designabit. Sed cum calculo methodus ista minus sit idonea, eandem missam impræsentiarum faciemus.

Vid. Newt. L. I. Prop. 30.

Scholium. Hactenus exposuimus præcipue motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones autem fieri solent ad corpora: & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt, & æquales, uti olim ostendimus; adeo ut neque attrahens possit quiescere, neque attractum, si duo sint corpora; sed ambo quasi attractione mutua, ubi motus projectilis utriusque more debito utrique semel est impressus, circum gravitatis centrum commune revolvantur. Et si plura sint corpora, (quæ vel ab unico attrahantur, vel omnia se mutuo attrahant,) hæc ita inter se moveri debeant ut gravitatis centrum commune vel quiescat, vel uniformiter moveatur in directum, ut olim quoque ostendimus. Qua de causa jam pergimus motum exponere corporum se mutuo trahentium: considerando vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur Impulsus. In mathematicis enim jam versamur; & propterea, missis disputationibus physicis, familiari utimur sermone, quo possimus à Matheseꝍs studiosis facilius intelligi.

Lex Motus 5. prius.

Lex Motus 25. prius.

XXVII. Corpora duo se invicem trahentia describunt & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo figuras similes: hoc est, describendo revera figuras similes circa commune gravitatis centrum; oculo in alterutro duorum posito, & motum corporis sui vel centri gravitatis non percipiente, figura iisdem similis describi videbitur.

Sunt enim distantiæ à communi gravitatis centro corporibus reciproce proportionales, atque adeo in data ratione ad invicem: & componendo in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminos suos communi motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, figuras circa eos-

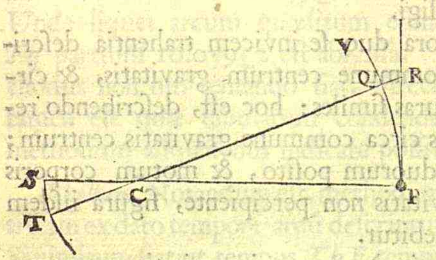
 dem

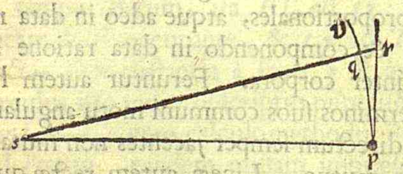
dem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quieſcunt, vel motu quovis non angulari moventur,) deſcribunt omnino ſimiles. Proinde ſimiles ſunt figuræ quæ his diſtantiis circumactis deſcribuntur. *Q. E. D.*

Scholium. Sic ſane & Tellus & Luna motu menſtruo circa commune utriuſque centrum gravitatis feruntur: nobis vero in tellure poſitis, quibus neque terræ, ſedis noſtræ, neque centri gravitatis, utpote puncti inviſibilis motus ſentiri poteſt, ſola Luna circumferri videtur: & ita in reliquis omnibus planetarum ſyſtematis accidat eſt neceſſe.

XXVIII. Si corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahant, & interea revolvantur circa gravitatis centrum commune, Figuris quas corpora ſic mota deſcribunt circum ſe mutuo, poteſt figura ſimilis & æqualis circum corpus alterutrum immotum viribus iiſdem deſcribi.

Revolvantur S. P circa commune gravitatis centrum C; pergendo de S ad T. deque P ad Q. A dato puncto s ipſis SP. TQ æquales & parallelæ ducantur





ſemper sp. sq. & curva pqv, quam punctum p revolvendo circum punctum immotum s deſcribit, erit ſimilis & æqualis curvis quas corpora S. P deſcribunt circum ſe mutuo: proindeq; per Propoſitionem poſtremam ſimilis curvis ST & PQV quas eadem corpora deſcribunt circa commune gravitatis centrum C. id adeo quia proportiones linearum SC. CP. & SP. vel sp ad invicem ubique dantur.

CASUS

CASUS (1.) Commune illud gravitatis centrum C, per motus legem 25. vel quieſcit, vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo, quod id quieſcit: inque s & p locentur corpora duo: immobile in s; & mobile in p: corporibus S & P reſpective ſimilia & æqualia. Dein tangant rectæ PR. & pr. curvas PQ. & pq. in P. & p. & producantur CQ. & sq. ad R. & r. Et ob ſimilitudinem figurarum $CPRQ$. $sprq$. erit RQ, ad rq, ut CP, ad sp: adeoque in data ratione. Proinde, ſi vis, qua corpus P verſus corpus S, atque adeo verſus centrum intermedium C, attrahitur, eſſet ad vim qua corpus p verſus centrum s attrahitur in eadem illa ratione data, hæ vires æqualibus temporibus attraherent ſemper corpora de tangentibus PR. pr. ad arcus PQ. pq. per intervalla ipſis viribus proportionalia RQ. rq. adeoque vis poſterior efficeret ut corpus p gyraretur in curva pqv, quæ ſimilis eſſet curvæ PQV, in qua vis prior efficit ut corpus P gyretur: & revolutiones iiſdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non ſunt ad invicem in ratione CP ad sp, ſed (ob ſimilitudinem & æqualitatem corporum S & s. P & p. & æqualitatem diſtantiarum SP. sp.) ſibi mutuo æquales, corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus; & propterea ut corpus poſterius p trahatur per intervallum majus rq. requiritur tempus majus, idque in ſubduplicata ratione intervallorum; propterea quod ſpatia ipſo motus initio deſcripta ſunt in duplicata *Prop. 4. prius.* ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p, eſſe ad velocitatem corporis P, in ſubduplicata ratione diſtantiæ sp ad diſtantiam CP. eo ut temporibus quæ ſint in eadem ſubduplicata ratione deſcribantur arcus PQ. pq. qui ſunt in ratione integra, ſive inter ſe ſimiles. Et corpora P. p. viribus æqualibus ſemper attracta deſcribent circum centra quieſcentia C & s figuras ſimiles PQV. pqv. quarum poſterior

 pqv

pqv similis est & æqualis figuræ quam corpus *P* circum corpus mobile *S* describit. *Q.E.D.*

CASUS (2.) Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio relativo in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum: & per motus legem 26. omnes motus in hoc spatio peragentur ut prius: adeoque corpora describent circum se mutuo figuras easdem ac prius: easque propterea ipsi figuræ *pqv* similes & æquales. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Tempus periodicum circa corpus immobile *s*, erit tempore periodico circa mobile *S*, vel verius circa gravitatis centrum *C*, majus: idque in reciproca ratione angulorum simul descriptorum: hoc est, in subduplicata ratione radiorum *sp* & *CP*. hoc est, in subduplicata ratione summæ corporum $S + P$ ad corpus *S*. Sic si Luna *p* circa Tellurem immobilem *s* revolveretur ad eandem distantiam; & si quantitas materiæ in Luna poneretur tantum pars vigesima sexta quantitatis materiæ in terra; Tempus periodicum Lunæ majus esset tempore ejusdem periodico præsenti, in ratione numeri 27. ad numerum 26,495. Sunt enim 27 : 26,495 :: 26 $\frac{..}{..}$. Unde cum Tempus periodicum Lunæ sit jam $27^d. 7^h. 43'$. sive 39.343'. Si circa Terram immobilem revolveret, Tempus periodicum esset 40.092'. sive $27^d. 20^h. 12'$.

Coroll. (2.) Hinc corpora duo viribus distantiis suis directe proportionalibus se mutuo trahentia, describunt & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo Ellipses concentricas, & centra in virium centris habentes. Et vice versa; si tales figuræ circa Ellipseωn centra describantur, sunt vires centripetæ distantiis à centro directe proportionales.

Vid. Prop. 19. prius.

Coroll. (3.) Corpora duo viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus describunt, & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo Sectiones Conicas, umbilicos habentes in centro circum quod figuræ describuntur. Et vice versa, si Tales figuræ circa Sectionum Conicarum focum describantur, vires centripetæ sunt distantiarum quadratis reciproce proportionales.

Vid. Prop. 21. prius.

Coroll. (4.) Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia radiis & ad centrum illud, & ad se mutuo ductis describunt areas temporibus proportionales; nimirum propter radiorum vel virium centripetarum ad ista centra perpetuam directionem.

Vid. Prop. 15. prius.

Maij 14°. 1705.

XVIII.

XXIX. SI corpora duo *S* & *P* viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahentia revolvantur circa gravitatis centrum commune; Ellipseωs quam corpus alterutrum *P* hoc motu circa alterum *S* describit Axis Transversus, erit ad Axem transversum Ellipseωs quam corpus idem *P* circa alterum quiescens eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum $S + P$, ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum *S*. Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica per Propositionem postremam forent in subduplicata ratione corporis *S* ad summam Corporum $S + P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia. Ellipseωs autem axis transversus † minuetur in ratione cujus hæc subduplicata est sesquiplicata; id est in ratione

Vid. Fig. p. 164.

† *Prop. 13. supra.*

one cujus ratio integra S ad $S + P$ eſt triplicata: adeoque ad axem tranſverſum Ellipſeωs alterius ut prima duarum medie proportionalium inter $S + P$, & S, ad $S + P$. Et inverſe Axis tranſverſus Ellipſeωs circa corpus mobile deſcriptæ, erit ad axem tranſverſum deſcriptæ circa immobile, ut $S + P$, ad primam duarum medie proportionalium inter $S + P$, & S. *Q.E.D.*

Sic ſi diſtantia Lunæ à Terra mediocris: hoc eſt, axis tranſverſi Ellipſeωs deſcriptæ ſemiſſis ex hypotheſi Terræ immobilis ſit 60. ſemidiametrorum terreſtrium, dato nempe tempore periodico; erit ex hypotheſi Terræ & Lunæ circum gravitatis centrum commune gyrantium diſtantia illa 60 ſemidiametris major, eaque in ratione ſummæ Terræ atque Lunæ, ad primam duarum medie proportionalium inter Terræ Lunæque ſummam & Terram. Sive ex Hypotheſi quod Luna ſit 26ª. pars terræ; ut 27. ad 26⌊665. Sunt enim 26 : 26⌊33 : 26⌊665 : 27 ∺. Unde cum diſtantia Lunæ in Hypotheſi terræ immobilis ponatur 60 ſemidiametrorum terreſtrium, erit revera ex ejuſdem motu $60\frac{3}{4}$ ſemidiam.

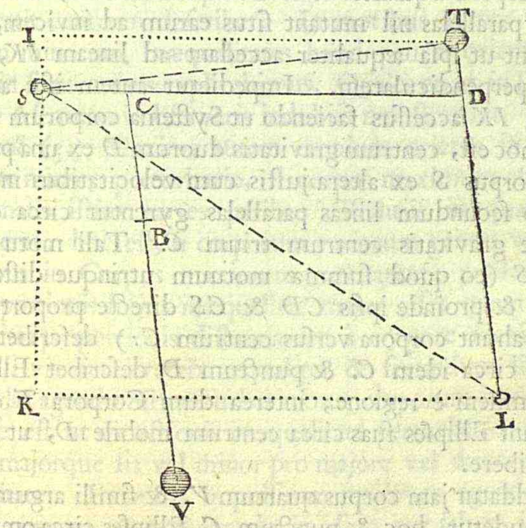
Corollarium. Ex nuperrime demonſtratis ſequitur, quod ſi Corpora duo viribus quibuſvis ſe mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita quomodocunque moveantur, Motus eorum perinde ſe habebunt, ac ſi non traherent ſe mutuo, ſed utrumque à corpore tertio in communi gravitatis centro conſtituto viribus iiſdem traherentur. Et virium attrahentium eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ corporum à centro illo communi atque reſpectu diſtantiæ totius inter corpora. Vires enim illæ quibus corpora ſe mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium: & diſtantiæ à centro gravitatis ſunt diſtantiis corporum ubique proportionales: adeoque vires eædem ſunt & eadem ratione creſcunt vel decreſcunt, ac ſi à corpore intermedio in gravitatis centro manarent.

XXX. Corpora plura, quorum vires materiæ quantitati ſunt proportionales, & in directa diſtantiarum ratione,

tione, moveri poſſunt in variis Ellipſibus circa earum centra: ita ut motus ſine perturbatione perpetuo perſeverent, & ut commune omnium gravitatis centrum interea quieſcat.

Ponantur imprimis corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D. Si motus projectilis debita proportione ſecundum lineas parallelas in eodem plano ſitas, ſed ſecundum directiones contrarias utrique ſemel imprimatur, deſcribent hæc Ellipſes ſimiles, centra habentes in D communi duorum gravitatis centro, ut olim expoſuimus. *Prop. 19. prius.*

Trahat jam corpus tertium S priora duo T & L,



viribus acceleratricibus ST, SL. & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis ST per legem motus 22. reſolvi poteſt in vires SD, DT. & vis SL in vires SD, DL. Vires autem DT, DL, quæ ſunt ut ipſarum ſumma TL: [cum enim rationes ipſarum partium TD & DL eædem ſemper maneant, manebit & ratio totius TL

TL in omnibus corporum *T* & *L* diſtantiis.] Et vires acceleratrices ipſorum corporum *T* & *L* ſunt ut diſtantiæ *TL*. & vires adjectitiæ à corpore *S* oriundæ, & ſecundum lineam *TL* tendentes ſunt, ſicut jam vidimus, ut eædem diſtantiæ *TL*. Ergo ſumma virium *TD* & *LD* centrum gravitatis reſpicientes ſunt ut diſtantiæ *DT* & *TL*. Sed viribus prioribus majores: adeoque efficient ut corpora illa deſcribant Ellipſes, aut prioribus ſimiles motu celeriore, ſi motus projectilis pro vis centripetæ adjectitiæ ratione acceleretur; aut alterius ſpeciei ſi motus iſte projectilis maneat datus. Vires reliquæ acceleratrices *SD* & *SD* trahendo illa corpora æqualiter & ſecundum lineas *TI*, *LK* ipſi *DS* parallelas nil mutant ſitus earum ad invicem, ſed faciunt ut ipſa æqualiter accedant ad lineam *IK*, ipſi *SD* perpendicularem. Impedietur autem iſte ad lineam *IK* acceſſus faciendo ut Syſtema corporum *T* & *L*; hoc eſt, centrum gravitatis duorum *D* ex una parte; & Corpus *S* ex altera juſtis cum velocitatibus in dato plano ſecundum lineas parallelas gyrentur circa commune gravitatis centrum trium *C*. Tali motu corpus *S* (eo quod ſummæ motuum utrinque diſtantiæ *SD*, & proinde ipſis *CD* & *CS* directe proportionales trahunt corpora verſus centrum *C*:) deſcribet Ellipſin circa idem *C*. & punctum *D* deſcribet Ellipſin conſimilem è regione; interea dum Corpora *T* & *L* pergant Ellipſes ſuas circa centrum mobile *D*, ut prius deſcribere.

Addatur jam corpus quartum *V*. & ſimili argumento concludetur, hoc & punctum *C* Ellipſes circa omnium commune centrum gravitatis *B* deſcribere poſſe; manentibus motibus priorum corporum *T*, *L*, & *S*, circa centra *D* & *C*, ſed aliquantum acceleratis. Et eadem erit plurium ratio.

Coroll. (1.) Caſus Syſtematis corporum circa alia corpora revolventium, ubi vires centripetæ ſunt directe ut diſtantiæ, Ellipſes exhibet nobis accuratas; nec ullo modo per plurium corporum additionem perturbatas. Quo autem magis recedit Lex virium centripetarum ab hac lege, neceſſe eſt, cæteris paribus, ut eo magis corpora motus mutuos perturbent.

Coroll. (2.) Sin vires centripetæ ſint reciproce ut diſtantiarum quadrata, & Syſtema corporum duorum pluriumve minorum circa commune gravitatis centrum in Ellipſeωs umbilico poſitum revolventium ad latus urgeatur à Corpore longe maximo, & ſatis remoto; ita ut commune omnium gravitatis centrum à centro corporis maximi non longe abſit; commune Syſtematis corporum minorum gravitatis centrum Ellipſin circa corpus maximum, ſeu potius circa commune omnium gravitatis centrum deſcribet. In motibus autem corporum minorum Inæqualitates haud paucæ orientur; quas in ſequentibus explicabimus. Quales etiam in Luna noſtra Aſtronomi obſervatis indubiis monſtrarunt.

Coroll. (3.) Maxima autem omnium orietur in Syſtemate minore perturbatio, ſi corpus maximum omnes Syſtematis iſtius partes paribus diſtantiis inæqualiter attraheret: hoc eſt, ſi corporum variorum genera variis gradibus in Corpus maximum gravitarent; præſertim ſi proportionis hujus inæqualitas major eſſet quam inæqualitas proportionis diſtantiarum à corpore maximo. Nam ſi vis acceleratrix æqualiter & ſecundum lineas parallelas agendo nil perturbet motus corporum inter ſe, neceſſe eſt ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur; majorque ſit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Exceſſus impulſuum majorum agendo in aliqua corpora, & non agendo in alia; aut ſaltem in alia agendo minus, neceſſario mutabunt ſitum eorum inter ſe. Et hæc perturbatio, ſi qua eſſet, addita perturbationi quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate neceſſario oritur, majorem redderet perturbationem totam.

Coroll. (4.) Unde ſi Syſtematis minoris partes in Ellipſibus circa focum, vel in Circulis circa centrum ſine alia motuum perturbatione quam quæ ex linearum à Cor-

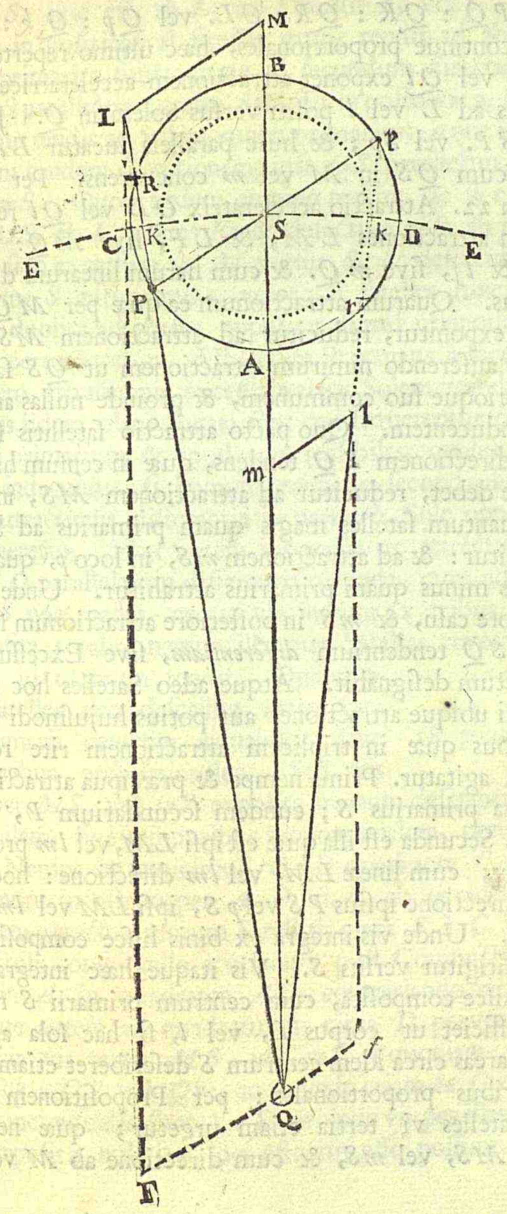
Corpore maximo ductarum inclinatione & inæqualitate oriri debeat, moveantur, manifeſtum eſt quod vires acceleratrices omnium Syſtematis partium verſus maximum ſunt paribus diſtantiis æquales; & quod omnia corpora in Syſtemate minore comprehenſa æqualiter in corpus maximum gravitant.

Coroll. (5.) Hinc etiam conſtat partes Syſtematis minoris aut à nullis aliis viribus acceleratricibus quam quæ ad corpus maximum tendunt, urgeri, niſi forte leviſſime & inſenſibiliter: aut ſaltem æqualiter, & ſecundum lineas parallelas urgeri quam proxime. Quæ omnia ad Syſtemata Terræ, & Lunæ; Jovis & Circumjovialium; Saturni & Circumſaturniorum, circa Solem gyrantia facile fuerit applicare: ut verbis pluribus haud opus eſſe videatur.

XXXI. Si Planeta primarius circa Solem revolvens ſecum deferat Satellitem, hic circa primarium ita movebitur ut à quadratura cum Sole ad conjunctionem aut oppoſitionem proxime inſequentem acceleretur perpetuo; à ſyzygia vero ad quadraturam retardetur; adeoque prope ſyzygias Satelles velocius feretur, prope quadraturas vero tardius.

Sit Q Sol, S Planeta primarius in orbe ſuo annuo ESE revolvens. P vel p Satelles orbitam ſuam menſtruam $ADBC$ circa primarium deſcribens: in qua orbita puncta A & B Syzygias cum Sole, hoc eſt, Conjunctionem & Oppoſitionem deſignent: C & D Quadraturas, hoc eſt, puncta per quadrantem circuli à ſyzygiis hinc inde diſtantia. Si porro QS, vel QK, vel Qk, mediocris diſtantia Satellitis à Sole, exponat attractionis acceleratricis quantitatem; qua nempe ſecundarius Planeta ad Solem tendit, ubi ad eandem atque primarius diſtantiam à Sole ſit poſitus: Et locus Satellitis hujuſce ſupponatur in P vel p in ſua orbita: Sumatur in linea PQ vel pQ, ſi opus eſt, producta, QL vel Ql, quæ ſit at QK, vel Qk, in duplicata ratione QK, vel Qk, ad QP, vel Qp. hoc eſt, ut

ſunt



ſint $PQ : QK : QR : QL$. vel $Qp : Qk : Qr : Ql$ continue proportionales, hæc ultimo reperta linea QL, vel Ql exponet attractionem acceleratricem Satellitis ad L vel l poſiti verſus Solem in Q. Jungatur SP. vel Sp; & huic parallela ducatur LM vel lm, cum QS in M vel m concurrens. Per motus legem 22. Attractio acceleratrix QL vel Ql reſolvetur in attractiones LM, & LF, ſive MQ: vel in lm, & lf, ſive mQ. & cum harum linearum directionibus. Quarum attractionum ea quæ per MQ, vel mQ exponitur, reducitur ad attractionem MS, vel mS: auferendo nimirum attractionem ut QS ſatelliti primarioque ſuo communem, & proinde nullas anomalias inducentem. Quo pacto attractio ſatellitis ſecundum directionem SQ tendens, quæ in cenſum hic loci venire debet, reducitur ad attractionem MS, in loco P, quantum ſatelles magis quam primarius ad Solem attrahitur: & ad attractionem mS, in loco p, quantum ſatelles minus quam primarius attrahitur. Unde MS in priore caſu, & mS in poſteriore attractionum ſecundum SQ tendentium *differentiam*, ſive Exceſſum & Defectum deſignabit. Atque adeo Satelles hoc pacto triplici ubique attractione, aut potius hujuſmodi attractionibus quæ in triplicem attractionem rite reſolvi poſſit, agitatur. Prima nempe & præcipua attractio illa eſt qua primarius S; eundem ſecundarium P, vel p trahit. Secunda eſt illa quæ eſt ipſi LM, vel lm proportionalis; cum lineæ LM, vel lm directione: hoc eſt, cum directione ipſius PS vel pS, ipſi LM vel lm parallelæ. Unde vis integra ex binis hiſce compoſita etiam dirigitur verſus S. Vis itaque hæc integra, ex binis hiſce compoſita, cum centrum primarii S reſpiciat, efficiet ut corpus L, vel l, ſi hac ſola agitaretur, areas circa idem centrum S deſcriberet etiamnum temporibus proportionales: per Propoſitionem 15. Sed Satelles vi tertia etiam urgetur; quæ nempe eſt ut MS, vel mS, & cum directione ab M vel m verſus S: hoc eſt, ab L, vel l verſus F, vel f. Nimirum in poſitione P ſatelles magis tendit ad Solem, quam primarius ſuus; atque id ſecundum directionem ipſi QS parallelam exceſſu MS. Et in poſitione p, ſatelles minus tendit ad Solem quam primarius, atque id ſecundum eandem directionem, ipſi QS parallelam, defectu mS. Quod eodem omnino redibit, ac ſi exceſſum MS, ab L, verſus F; & defectum mS, ab f verſus l; ſive exceſſum ab M verſus S, & defectum ab m verſus S æſtimemus: vel ac ſi ſatelles hinc inde à Sole duplici ad partes oppoſitas ſimul utrinque oppoſito perturbaretur. Ubi enim Primarius à ſecundario vero attractionis exceſſu verſus Solem retrahitur, effectus iidem plane futuri ſunt qui ſequerentur omnes quoad primarium & apud eum ſenſibiles, quales nunc ſolum indagamus, ſi immoto primario ſecundarius eadem attractionis differentia in partes à Sole oppoſitas abſtraheretur. Hæc autem vis tertia ex attractionum ipſi SQ parallelarum differentia oriunda, cum ad centrum S non tendat, neque vis integra ex tribus hiſce compoſita totalis, nempe illa qua Satelles revera urgetur, ad centrum tendit. Quapropter Satelles non deſcribet areas circa primarii centrum æquabiles, ſive temporibus proportionales. Sed vis hæc per MS, vel mS expoſita arearum deſcriptionem æquabilem, ſive temporibus proportionalem, perturbabit. Nempe in ſemicirculi CAD quadrante CA, poſito motu menſtruo per A. D. B. C. ab occidente in orientem peracto, motum Satellitis circa S à C verſus A, factum conſpirando accelerat: poſt Conjunctionem vero in A, in quadrante AD, contrariando retardat. Satellite autem ad quadraturam circa D pervento evaneſcit vis tertia MS, vel mS. (quoniam QK, vel Qk : QP vel Qp: ac proinde etiam & QL, vel Ql tunc æquales ſunt.) Et proinde vis per illam ubique expoſitæ nulli hic loci effectus eſſe poſſunt. Satel-

Prop. 17 & 18. *prius.*

telles igitur circa quadraturas reliquis viribus, iisque solis ad centrum primarii tendentibus agitatus, areas per radium vectorem æquabiles, sive temporibus proportionales describet. Dum vero Satelles quadrantem *DB* peragrat, *Qm* deficit à *QS*: & si vires perturbantes ad satellitem solum referamus, tendent eæ ab *m*, versus *S*; & conspirando motum ejus iterum accelerabunt: Post oppositionem vero in *B*, tendent vires etiamnum ab *m*, versus *S*; & contrariando motum satellitis retardabunt: donec iterum circa quadraturam *C* evanescat *mS*, ejusque proinde effectus cessent. Rursus, cum vis *MS* vel *mS* areæ perturbatrix in transitu Satellitis à *C*, ad *A*: & à *D*, ad *B* perpetuo augeatur: & in *A* ac *B* sit maxima; & hinc rursus perpetuo diminuatur in transitu satellitis ab *A* ad *D*, & à *B* ad *C*, donec in punctis *D* & *C* evanescat; Patet Satellitis motum ex primario spectatum esse cæteris paribus velocissimum in Syzygiis, *A* & *B*: tardissimum in Quadraturis *C* & *D*. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Hinc inæqualitatem istam in motu Lunari quam *Variationem* dicunt Astronomi solvere licebit: qua Luna ita in syzygiis velocius quam in quadraturis fertur, ut à syzygia ad octantem pergendo minuta prima quasi 35. lucretur ultra motum medium; & eandem quantitatem ob octante ad quadraturam pergendo iterum deperdat: atque ita perpetuo. Et consimilis anomalia in lunulis circumjovialibus & circumsaturniis est expectanda: quamquam ob majorem istarum Systematum à Sole & à nobis distantiam; & propter cursuum menstruorum tempora breviora vix aut ne vix quidem evadit sensibilis.

Coroll. (2.) Hinc etiam sequitur quod Orbita Satellitis cæteris paribus *curvior* erit in quadraturis, quam in Conjunctione & Oppositione. Et proinde, si per se sit circularis, evadet aliquantulum Ellipticus, circa Primarium in centro positum: ita ut Axis Ellipseωs minor in Syzygiis, & major in quadraturis perpetuo collocetur. Sin orbita sit per se Elliptica, circa primarium in foco positum, magis ad istam Figuram accedet quam si nulla hujusmodi anomalia afficeretur. Primus quod sciam Cartesius hujusmodi oblongam Figuram orbitæ Lunaris ex mera Hypothesi conjectura definivit: interea tamen mirum errorem erravit, dum Lunam in omnibus syzygiis ad terram propinquiorem, & in omnibus quadraturis remotiorem statueret: cum è contra per propriam orbitæ Lunaris eccentricitatem, posita apsidum linea circa syzygias, Luna sit in summa apside, quam in quadraturis à Terra remotior: non obstante hac inæqualitate de qua jam verba facimus. Primus autem hujusmodi oblongam Orbitæ Lunaris Figuram per observata vere animadvertit Acutissimus Halleius; aut saltem primus cum publico communicavit: & exinde Lunæ Theoriam primus emendandam esse ostendit. Quod vero ad Corollarii hujusce demonstrationem spectat, illud ex propositione hac facile deducitur. Corpora enim velociora minus deflectunt à recto tramite quam tardiora: & præterea, vis perturbatrix ut *MS*, vel *mS* in Conjunctione & Oppositione non solum est per se maxima, sed & directe contraria isti vi qua corpus centrale *S* trahit corpus *P*, vel *p*: adeoque vim illam contrariando minuit. Corpus autem *P* vel *p* minus deflectet à recto tramite, ubi minus urgetur in corpus centrale *S*, adeoque in orbita oblonga elliptica circa primarium feretur.

Maij 21. 1705.

XIX.

XXXII. Si ob diminutam & auctam per vices distantiam inter Solem & Planetam primarium actio Solis augeatur ac diminuatur per vices, augebitur ſimul ac diminuetur orbitæ Satellitis radius; & Tempus periodicum Satellitis circa primarium per vices mutabitur; augebitur nimirum cum aucto radio; & diminuetur cum diminuto.

Vis qua primarius trahit Satellitem augetur cum Satelles eſt in quadraturis *C*, & *D*, per additionem vis *SP*, vel *Sp*: evaneſcente vi *SM*, vel *Sm*: & diminuitur cum Satelles eſt in ſyzygiis, per ablationem vis *SM*, vel *Sm*. Et quia vis *SM*, vel *Sm* in ſyzygiis eſt quaſi duplo major quam *SP*, vel *Sp* in quadraturis; ubi *R* vel *r* punctum cum puncto *B*, vel *A* fere coaleſcit; vis primarii attractiva magis quolibet menſe Synodico diminuetur quam augebitur: adeoque pro abſolute diminuta eſt omnino cenſenda. Aucta igitur circa Syſtematis Perihelion Solis vi, langueſcet magis vis attractiva primarii, & dilatabitur orbita: diminuta autem circa Syſtematis Aphelion Solis vi, invaleſcet magis vis primarii attractiva, & contrahetur orbita. Una autem cum orbita dilatata augebitur tempus Satellitis periodicum: & una cum contracta orbita diminuetur tempus periodicum: atque ita quotannis motus Satellitis medius erit major & minor per vices; & in mediocri à Sole diſtantia ſola vere medius eſt habendus.

Corollarium (1.) Hinc inæqualitatem illam in motu Lunari annuam quæ medium ejus motum ſpectat ſolvere licebit: qua nempe motus Lunæ medius exceſſu & defectu 12'. fere motum vere medium excedit, & ab eodem deficit per vices: excedit nempe in tranſitu telluris ab apſide ſumma ad diſtantiam mediocrem; deficit à diſtantia mediocri ad apſidem imam: & iterum deficit ab apſide ima ad mediocrem diſtantiam; & à mediocri diſtantia ad apſidem ſummam excedit iterum. Atque ita in perpetuum. Neque aliter de Circumjovialibus & Circumſaturniis eſt in ſua Proportione cenſendum. Quanquam hæc inæqualitas & reliquæ etiam in iſtis tantillæ ſunt ubique, ut fere negligi debeant.

Coroll.

Coroll. (2.) Tempus periodicum Satellitis cujuſvis vere originarium & primitivum, hoc eſt, quo primarium ſuum extra Solis vires poſitum circuitu integro pervolveret, paulo brevius eſt tempore periodico medio præſenti; & diſtantia originaria à primario ſuo paulo minor. Nempe ſi vires Solis, quæ jam ſemper vires primarii integro quovis curſu debilitant, tollerentur, appropinquaret ſatelles; & in minore diſtantia tempus brevius periodicum obtineret.

Coroll. (3.) Hinc etiam cum Cl. Gregorio inferre licet, quod ſi Primarius quivis Planeta novæ materiæ acceſſu evadat major, & inde ejus attractio in eadem ratione evadat major, Satelles in minori orbita & minore etiam tempore periodico revolveret. Similiter ſi primarius per ablationem materiæ diminuatur, Satelles in majori orbita, & majore etiam tempore periodico revolveret. Idemque reſpectu Primarii cujuſque continget, ſi Sol ipſe caſu aliquo augeretur vel diminueretur.

Coroll. (4.) Cum itaque ex antiquiſſimis Aſtronomorum obſervatis cum nuperrimis collatis conſtet, tempora periodica primariorum circa Solem, & Lunæ, ſecundarii Planetæ, circa Terram eſſe eadem hoc ſeculo quæ ante annos bis mille fuerant, certum eſt tanto temporis ſpatio quantitatem materiæ tam in Sole quam in Terra æqualem fuiſſe; nec ſenſibili ullo augmento aut decremento obnoxiam.

Coroll. (5.) Sin quantitas materiæ in Terra è Diluvio Noetico aut aliunde aucta ſupponantur, Menſis periodici Lunaris quantitas ut tum temporis diminueretur erat neceſſe.

XXXIII. Si Planeta ſecundarius deſcribat orbitam Ellipticam circa primarium in Ellipſeωs foco poſitum, Hujus Ellipſeωs Axis major, ſive apſidum linea, quoad motum angularem progredietur & regredietur per vices: ſed magis tamen progredietur: & in ſingulis ſatellitis revolutionibus per exceſſum progreſſionis feretur

 in

in consequentia. In syzygiis nempe cum Sole progredietur; & in quadraturis regredietur.

Nam vis qua secundarius Planeta P, vel p urgetur in primarium suum circa quadraturas; ubi vis altera MS, vel mS evanuit, componitur ex vi LM, vel lm & vi centripeta corporis centralis S. Vis prior, si augeatur distantia aut diminuatur, augetur aut diminuitur in eadem fere ratione directe: ita ut in majori à primario distantia evadat major attractio versus centrum; & in minore minor. Vis autem posterior à Primario immediate orta in majori distantia evadit minor, & in minore major; estque semper in duplicata distantiæ ratione reciproce. Adeoque vis integra, sive *summa* virium versus primarii centrum ex distantia aucta decrescit in minore ratione quam est duplicata ratio distantiæ: hoc est, non tantum diminuitur in distantia majore, nec tantum augetur in distantia minore, quantum motus circa focum Ellipseos immobilis requirit. In conjunctione vero & oppositione, vis qua satelles in primarium urgetur est *differentia* inter vim qua primarius trahit secundarium, & vim KL, vel kl: sive in hoc casu SM, vel Sm. Et differentia illa, propterea quod vis SM, vel Sm augetur quam proxime in ipsa distantiæ ratione directe, decrescit in majore quam duplicata ratione distantiæ; atque adeo major est in minore distantia, & minor in majore, quam quæ Ellipsi immobili describendæ sufficiat. Si autem vis centripeta decrescat in ratione plusquam duplicata distantiæ, ut fit circa syzygias, accedetur aliquantulum ad casum vis centripetæ decrescentis in triplicata ratione distantiæ, unde motus in spirali, sine ulla tangentis ad radium mutatione sequeretur. Revolvet itaque satelles in Ellipsi quadam mobili, sive motus angularis major requiretur ut tangentes obliquæ ad radium evadant eidem perpendiculares; hoc est, ut satelles ad apsides suas perveniat, quam requireretur si vires essent in ipsa ratione distantiæ duplicata reciproce. Hoc est, apsidum linea progredietur. Et, è contra, Si vis centripeta decrescat in minore ratione quam distantiæ duplicata, ut fit circa quadraturas, casus contrarius sequetur: & satellitis motus à motu per spiralem angulum radii & tangentis non mutantem diverso orietur: Ita ut angulus iste citius mutetur, & ad rectam pertingat citius quam pertingeret si vires essent in ipsa ratione distantiæ duplicata reciproce: Hoc est, Apsidum linea regredietur. In locis autem inter syzygias & quadraturas intermediis pendet motus apsidis ex causa utraque conjunctim: adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa, vel regrediatur. Unde cum vis KL, vel kl in Syzygiis, ut nuper notavimus, sit quasi duplo major quam vis LM, vel lm in quadraturis; excessus in tota quavis revolutione erit penes vim majorem KL, vel kl; transferetque apsidem singulis revolutionibus in consequentia.

Coroll. (1.) Hinc inæqualitatem illam, sive motum progressivum & regressivum apsidis Lunaris solvere licet, qua ita movetur apogæum ut in Syzygiis suis progrediatur celerius, & in quadraturis regrediatur tardius: & excessu motus progressivi supra regressivum quovis mense feratur in consequentia, gradus tres circiter. Atque ita integrum circulum annorum decem spatio, aut paulo citius percurrat. In circumjovialibus, quæ in circulis fere moventur, nullæ vel insensibiles dantur apsides, adeoque locum non habet præsens demonstratio. In Circumsaturniis autem, sicubi occurrat eccentricitas nonnulla, locum aliquem habebit: sed propter temporum periodicorum parvitatem, si cum ingenti Solis distantia, viribusque proinde ejusdem perexiguis, & Saturni ipsius magnitudine comparetur, Apogæi mutatio tantilla erit, ut nullo modo à nobis observari queat, nedum ad examen & calculum reduci.

Coroll. (2.) Cum itaque pendeat apsidum progressus vel regressus à decremento vis centripetæ, facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiæ SP, vel Sp in transitu corporis ab apside ima ad apsidem sum-

summam; ut & à simili incremento in reditu ad apsidem imam, atque adeo maximus sit ubi proportio vis in apside summa ad vim in apside ima maxime recedit à duplicata ratione distantiarum inversa, manifestum est quod apsides in syzygiis suis per vim ablatitiam *KL*, seu *SM* — *LM*; vel *Sm* — *lm* progredientur velocius: *SP*, vel *Sp* tum temporis omnium minima; & *SM*, vel *Sm* omnium maxima in syzygiis existente; & *SP*, vel *Sp*; sive potius earum utrinque summa, in quadraturis existente omnium minima. Unde in singulis satellitis revolutionibus, dum apsides sunt circa syzygias, illæ celerrime progredientur in satellitis syzygiis, & tardissime regredientur in Satellitis quadraturis: atque adeo excessus motus progressivi supra regressivum erit omnium maximus, & apsides in consequentia celerrime movebuntur.

Coroll. (3.) Sin Apsides circa quadraturas ponantur, ex causis contrariis contrarii sequentur effectus; & apsides tardius quam prius progredientur, dum satelles est in syzygiis; & velocius regredientur, dum satelles est in quadraturis: imo vero fieri potest, ubi apsides sunt in quadraturis, ut particulari aliqua satellitis revolutione regressus apsidum in satellitis quadraturis, superet earundem progressum in ejusdem syzygiis. Sed quoniam cæteris paribus vis ablatitia *SM*, vel *Sm* apsidum progressum in syzygiis satellitis inducens, est quasi duplo major quam vis adjectitia apsidum regressum in quadraturis satellitis inducens; & quoniam præterea apsides diutius hærent in syzygiis quam in quadraturis; quia illic in consequentia latæ cum Sole progrediuntur, atque adeo diutius eum quasi comitantur; hic in antecedentia latæ Solis quadratum, in consequentia latum, citius transeunt; patet apsides velocius & diutius progredi in syzygiis suis, tardius vero & non tamdiu recedere in quadraturis suis; & excessu progressus supra regressum in integra revolutione apsidum ad Solem, spatio nempe quasi mensium tredecim, ferri etiamnum in consequentia. Sic sane in Orbita Lunari adeo inæqualiter apogæum ejus movetur, ut æquatione, ad gradus integros duodecim cum quadrante exsurgente, cohibenda sit, ut ex Tabulis Lunaribus discere licet.

XXXIV. Si Satelles in orbe eccentrico circa primarium suum moveatur, hujus orbis eccentricitas bis in quavis satellitis revolutione mutabitur, & in eadem revolutione erit hæc eccentricitas maxima cum satelles versatur in syzygiis cum Sole; minima vero cum sit in quadraturis: & per consequens eccentricitas in transitu satellitis à quadraturis ad syzygias perpetuo augebitur; &, è contra, in ejusdem transitu à syzygiis ad quadraturas perpetuo minuetur.

Cum enim ex ante demonstratis pateat quod vis centripeta versus primarium longe distantem nonnunquam decrescat in majori ratione quam distantiæ duplicata, nonnunquam in minore; & cum ex decremento in ipsa distantiæ ratione duplicata, eoque solo, motus satellitis in orbita immobili & datæ eccentricitatis sequatur; necesse est ut ex mutatione hujus rationis etiam orbitæ species mutetur. Sic sane, Ubi vires centripetæ, majori quam duplicata distantiæ auctæ ratione decrescunt; vel, quod eodem redit, ubi crescunt in majori quam duplicata distantiæ diminutæ ratione, Manifestum est quod satelles in descensu ab apside summa ad imam, perpetuo accessu vis illius novæ impulsus semper in centrum, magis verget in hoc centrum quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiæ diminutæ: adeoque orbem describet orbe elliptico priore interiorem, & in apside ima propius accedet ad centrum quam prius. Orbis igitur accessu hujus vis novæ fiet magis eccentricus. Si jam vis in recessu satellitis ab apside ima ad summam decresceret iisdem gradibus quibus antea creverat, rediret satelles ad distantiam priorem; manente eccentricitate nuperrime obtenta. Sin vis decrescat in majori ratione quam prius creverat, satelles jam minus attractus ascendet ad distantiam majorem;

rem; & ſic orbis eccentricitas adhuc magis augebitur.

Similiter prorſus, Si ſatelles in deſcenſu ſuo ab apſide ſumma urgeatur vi quæ augetur minus quam pro duplicata ratione diſtantiæ diminutæ, patet ſatellitem illum deſcripturum orbem orbe elliptico prius deſcripto, (ubi nempe vis centripeta erat reciproce ut diſtantiæ quadratum,) exteriorem, atque proinde minus eccentricum; & eccentricitatem hanc adhuc minui ſi in corporis aſcenſu vis centripeta decreſcat minus ſive tardius quam ante creverat. Si igitur ratio incrementi & decrementi vis centripetæ ſingulis revolutionibus augeatur, augebitur ſemper eccentricitas; & è contra diminuetur eadem ubi ratio illa decreſcat. Cum itaque in quavis ſatellitis revolutione vis iſta in ejuſdem ſyzygiis decreſcat in majori ratione quam duplicata diſtantiæ auctæ; & in ejuſdem quadraturis in minori; prout ex ante dictis liquet; manifeſtum eſt circa ſatellitis ſyzygias eccentricitatem orbitæ deſcriptæ augeri perpetuo, & circa quadraturas diminui. Et cum in pluribus revolutionibus inter ſe comparatis maxima ſit decrementi ratio in apſidum ſyzygiis, minima in earundem quadraturis, manifeſtum quoque eſt eccentricitatem orbitæ maximam eſſe ubi apſides ſunt in ſyzygiis: minimam vero ubi apſides ſunt in quadraturis: atque adeo eccentricitatem diminui perpetuo in tranſitu apſidum à ſyzygiis ad quadraturam Solis; augeri vero perpetuo in tranſitu earundem à quadraturis ad ſyzygias.

Corollarium. Hinc Orbitæ Lunaris eccentricitatem diverſam, & indies mutabilem; majorem nempe, cæteris paribus, in Lunæ conjunctione & oppoſitione, minorem in quadraturis; creſcentem etiam in tranſitu apogæi Lunaris ab oppoſitione vel conjunctione ad quadraturas; decreſcentem in ejuſdem à quadraturis ad oppoſitionem vel conjunctionem tranſitu, ſolvere licebit. Tanta vero apud tabulas Aſtronomicas ſtatuitur hujus eccentricitatis diverſitas, ut diſtantia inter focum & centrum Ellipſeωs à Luna deſcriptæ, quam ejus orbitæ

eccen-

eccentricitatem dicimus, nunc ſit $\frac{66.782}{1.000.000}$ nunc ſolum $\frac{43.319}{1.000.000}$. ſi nimirum cum diſtantia Lunæ mediocri partium 1.000.000 comparetur. Atque adeo ut iſta eccentricitatum differentia ultra totius eccentricitatis minimæ ſemiſſem aſſurgere deprehendatur. Verum de hac re impræſentiarum ſatis. Plura Termino Autumnali expectabitis.

Junij 4°. 1705.

XX.

XXXV. SI Satelles circa primarium revolvatur in orbe cujus planum ad planum orbis primarii circa Solem inclinatum fuerit, linea nodorum motu angulari movebitur in antecedentia, ſive regredietur; at velocitate inæquali: celerrime quidem ubi nodi ſunt in quadraturis; poſtea gradatim tardius, donec, nodis in ſyzygiis conſtitutis, prorſus quieſcat. In locis inter quadraturas & ſyzygias intermediis nodi, conditionis utriuſque participes, recedent tardius; adeoque ſemper vel retrogradi, vel ſtationarii, ſingulis ſatellitis revolutionibus ferentur in antecedentia. Et in eadem Satellitis revolutione celerius regredientur cæteris paribus, cum Satelles eſt in ſyzygiis, quam cum ſit in aliis locis.

Ex viribus enim perturbatricibus, de quibus toties diximus, vis LM, vel lm, ipſi SP, vel Sp in plano orbitæ ſatellitis ſemper ſitæ parallela, nullam plani orbitæ mutationem inducere poteſt. Vis etiam altera MS, vel mS, in plano eclipticæ ſita, ubi nodi ſunt in ſyzygiis etiam in orbitæ plano poſita erit, utpote in communi utriuſque plani interſectione tum temporis poſita. At vero ubi nodi non ſunt in ſyzygiis, vis hæc

po-

posterior & major in eclipticæ plano semper sita, in plano orbitæ non erit posita; atque adeo motum satellitis in latitudinem afficiet lineamque nodorum in antecedentia remeare coget. Ponantur nimirum nodi in quadraturis positi, & vis hæc posterior plano eclipticæ parallelωs agens satellitem, nodos in utramvis partem transeuntem, & in plano orbitæ suæ perrecturum, ab isto plano perpetuo retrahet; ita ut locus intersectionis proxime futuræ à plani prioris intersectione distet versus antecedentia. Ubi autem nodi sunt inter syzygias & quadraturas, vis hæc posterior nunc nodos in consequentia, nunc in antecedentia cedere coget; semper autem in integro Satellitis circuitu excessu virium in antecedentia regredi coget; unde in nodorum syzygiis manebunt illi immobiles: in eorundem quadraturis celerrime retrocedent: & in locis intermediis conditionis utriusque participes recedent tardius; adeoque semper vel retrogradi, vel stationarii, singulis revolutionibus ferentur in antecedentia. Notandum autem, orbita extra syzygias & quadraturas posita, dum satelles à nodo ascendente ad descendentem, vel à descendente ad ascendentem pergit, nodos tardius regredi quamdiu vis *MS*, vel *mS* plagam istam respicit plani ad quam satelles positus est; & tamdiu progredi quamdiu vis ista plagam oppositam respicit. Sic posita nodorum linea in octante Solis, post situm ejus in quadraturis, sive circa *R*, & *r*, Satelles planum eclipticæ supergressus circa *R* plagam solarem respicit; sed vis perturbatrix ab *R* ad quadraturam *C* tendit ad partes contrarias, per circuli nimirum octantem, deinde evanescente in quadratura vi perturbatrice, post eandem incipit vis versus Solem tendens; atque per tres reliquos octantes manet: ita ut orbitæ mobilis nodorum linea primum progrediatur paululum, deinde paulo plus regrediatur; atque consimiliter in altero semicirculo: donec, nodorum linea syzygias appellente, progressus & regressus sint inter se fere æquales: utrique vero ob situm plani orbitæ

orbitæ jam cum directione vis perturbatricis quasi coincidente, perexigui, & illico cessaturi. Quod vero in eadem Satellitis revolutione nodi celerius regrediuntur, cæteris paribus cum Satelles est in syzygiis quam alibi, palam est, propter vim perturbatricem eo loci majorem; atque adeo majorem effectum sortituram.

XXXVI. Iisdem positis, Inclinatio vel angulus acutus plani orbis satellitis ad planum eclipticæ perpetuo mutatur; & maxima est, cum nodi sunt in syzygiis cum Sole: minima vero, cæteris paribus, cum nodi sunt in quadraturis. Minuitur autem dicta inclinatio in transitu Satellitis à quadraturis ad syzygias; augeturque in transitu ejusdem à syzygiis ad quadraturas. Unde fit ut, Satellite in syzygiis existente, inclinatio planorum evadat minima; redeatque ad priorem magnitudinem circiter ubi Satelles ad nodum proximum accedit. Et in transitu nodorum à syzygiis ad quadraturas diminuitur hæc planorum inclinatio, & fit omnium minima, cæteris paribus, ubi nodi sunt in quadraturis: dein crescit inclinatio iisdem gradibus quibus antea decreverat: nodisque ad syzygias denuo reversis ad priorem magnitudinem redit.

Si prior propositio recte fuerit intellecta, hæc particulari explicatione minus indigebit. Sicut enim corpore ab *L* ad *F* motu priori pergente, Si accedat vis attrahens lineæ *LM* parallela versus partes ipsius *M*, per lineam *LM* exposita, perget corpus in diagonali *LQ*, & angulus inclinationis *MLQ* erit priore inclinationis angulo *MLF* minor. Vel etiam, Sicut corpore ab *L* ad *F* motu proprio pergente, Si accedat similis vis attrahens lineæ eidem *LM* parallela versus contrarias partes, per lineam æqualem exposita, perget corpus in diagonali altera; & angulus esset major angulo priore. Ita in casu nostro fieri debet, ut simul cum nodorum motu plani oscillatio sequatur. Ubi enim nodi sunt in quadraturis satellitem de plano orbis sui perpetuo detrahendo, minuit inclinationationem plani in transitu satellitis à quadraturis ad syzygias: augetque vicissim eandem in ejusdem transitu à syzygiis ad quadraturas: unde fit ut, satellite in syzygiis existente, inclinatio evadat omnium minima; redeatque ad priorem magnitudinem circiter ubi satelles ad nodum proximum accedit. At si nodi constituantur in octantibus post quadraturas, hoc est, circa *P* & *p*, intelligetur ex modo expositis quod in transitu satellitis à nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per 45. gradus usque ad quadraturam proximam inclinatio augetur; & postea denuo in transitu per alios 45 gradus usque ad nodum proximum diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur; & propterea minor est semper in nodo subsequente, quam in præcedente. Et simili ratiocinio inclinatio magis augetur quam diminuitur ubi nodi sunt in octantibus alteris, circa *R*, & *r*. Inclinatio igitur ubi nodi sunt in syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum à syzygiis ad quadraturas, in singulis satellitis ad nodos appulsibus diminuitur; fitque omnium minima ubi nodi sunt in quadraturis, & satelles in syzygiis: deinde crescit iisdem gradibus quibus antea decreverat; nodisque ad syzygias proximas appulsis ad magnitudinem primam revertitur. *Q.E.D.*

Corollarium. Ex hac & superiori Propositione solvuntur notissima illa Astronomiæ Lunaris phænomena quibus nodi gradus $19\frac{1}{3}$ circiter annuatim regrediuntur; atque orbitæ Lunaris inclinatio est ita mutabilis ut cum nodi sunt in quadraturis angulus inclinationis sit $4^\circ.\ 59'.\ 35''$. tantum; cum vero sunt in syzygiis ad $5^\circ.\ 17'.\ 20''$. circiter assurgere deprehendatur.

XXXVII. Omnes inæqualitates in motibus satellitum circa primarios suos revolventium paulo majores sunt in conjunctione satellitis cum sole, quam in ejusdem oppositione.

Cum

Cum enim *QS*, majorem habeat rationem ad *QA*, quam *QB*, habet ad *QS*, propter *SA*, *SB*, cæteris paribus, æquales; & *QS* majorem quam *QA*; erit & ratio duplicata *QM*, ad *QS*, adhuc major quam duplicata *QS*, ad *Qm*. Atque adeo differentia *MS* major differentia *mS*; & *LM* major quam *lm*. Unde effectus ab istis viribus derivati erunt majores quam qui ab alteris derivantur. *Q.E.D.*

Notandum autem distantiam Solis à Terra tam ingentem esse ut differentia virium circa conjunctionem Lunæ cum Sole, & circa ejusdem oppositionem admodum sit parva, & vixdum per observata distinguenda. Unde nullum locum huic differentiæ distinguendæ hactenus datum esse ab Astronomis mirari non debemus.

XXXVIII. Vires Solis absolutæ satellitum perturbatrices earumque effectus in diversis à Sole distantiis sunt in distantiarum ratione triplicata inverse.

Sit enim distantia Solis à satellite variata: & sit Radius orbitæ satellitis ad alterum radium in eadem ratione. Erit tum ubique distantia satellitis à primario ad distantiam Solis in data ratione: unde ex hac hypothesi vires absolutæ perturbatrices essent ut vires absolutæ Solis, sive in duplicata illa ratione. Hoc obtinuisset si systematis secundarii radius eadem ratione crevisset aut decrevisset atque ipsa Solis distantia creverat aut decreverat: ita ut eadem esset ad invicem ratio quæ prius. Sed cum radius nullatenus decrescat accedente Sole, nec augeatur recedente, ratio ista duplicata erit iterum augenda ratione altera ipsius distantiæ satellitis à primario. Unde integra ratio composita erit prioris triplicata. *Q.E.D.*

Exempli gratia; supponatur Sol duplo quam prius Telluri propior, sive ut 50 ad 100. Et sit *AB* diameter æqualis partibus duabus, erit vis absolutæ Solis quantitas ad *S* in distantia minore, quadrupla quan-

quantitatis vis ejusdem in distantia majore. Sed vis SM in distantia minore erit ejusdem vis in distantia majore quasi octupla. Est enim $49 \times 49 = 2401$; & $50 \times 50 = 2500$. Unde $2500 - 2401 = 99$. Et $99 \times 99 = 9801$; & $100 \times 100 = 10.000$. Unde $10.000 - 9.801 = 199$. Ergo differentia virium absolutarum est fere in ratione dupla, sive ut 199 ad 99. Et ipsæ vires absolutæ mediocres sunt in ratione quadrupla, sive ut 4 ad 1. Ergo vires perturbatrices integræ ex istis compositæ sunt ut $4 \times 2 = 8$ ad $1 \times 1 = 1$. sive in ratione distantiæ reciproca triplicata fere. Et cum diameter apparens Solis sit tantum non in ratione distantiæ reciproca, & vires corporis centralis fere eædem, vires Solis satellitis perturbatrices, earumque effectus erunt in triplicata diametri Solis apparentis ratione directa quam proxime.

Scholium (1.) Eodem plane modo quo Sol extra satellitis cujusvis Orbitam constitutus ejus motum perturbat, Planetæ superiores inferiorum; Cometæ omnium Planetarum motus perturbabunt. Et actiones Planetarum vel Cometarum in alios Planetas similes producent effectus, utut longe minores; propter illorum corpora parva, si cum Sole conferantur, & distantias immensas. Aliqui tamen erunt hi effectus; [imo & inferiorum quoque Planetarum in superiores:] qui quidem si perstent, & in eandem plerumque plagam dirigantur, sensibiles tandem evadent. Exempli gratia, Orbitæ Telluris Apsides post plures annos sensibiliter in consequentia latæ deprehendi possent, licet admodum parvus hic motus sit oportet, si conferatur cum apsidum Lunæ motu in easdem partes. Sic sane ipsa Orbitæ Terrestris eccentricitas alicui mutationi ut obnoxia sit oportet; sed tantillæ sane ut vix aut ne vix quidem ex aliquo phænomeno colligi posset.

Scholium (2.) Sic quoque Planetæ superiores alienorum satellitum motus sensibiliter perturbabunt, si grandes sint, & si circa mutuam è Sole conjunctionem diu hæreant, in minima nempe tum temporis distantia constituti. Sic sane Actio Jovis in Saturni satellites, & Saturni in Jovis satellites, posita nimirum mutua omnium Planetarum in se invicem pro materiæ quantitate gravitate, quam olim probabimus, nullatenus erit contemnenda: ubi nempe è Sole quasi conjuncti cernuntur. Sunt enim in se corpora ingentia, & tellure nostra multis vicibus majora, & satis tum propinqua, ut vires perturbatrices evadant sensibiles. Et revera esse sensibiles ex observatis Astronomicis olim demonstrabitur.

Scholium (3.) Virium autem perturbatricium quantitates è Sole in systema Saturnium vel Joviale redundantes ex quantitate virium in Lunæ nostræ anomaliis notissimarum facile derivare licet. Ex Notis enim distantiarum Telluris, Jovis, & Saturni à Sole rationibus; & Notis in Luna virium harum effectibus, ex certa quadam causarum & effectuum consimilium utrinque proportione à Newtono observata effectus harum virium etiam apud Jovem & Saturnum satis facile determinari possunt.

XXXIX. *Problema.* Invenire rationem inter vires quibus satellitis motus perturbatur à Sole, & vim qua satelles in orbe suo circa primarium retinetur, quæ gravitas in primarium dici debet.

Est enim vis perturbatrix integra ex viribus perturbatricibus LM, vel lm, & SM, vel Sm composita: est etiam, propter ingentem Solis distantiam, linea LQ, vel lQ ipsi lineæ MQ fere parallela; atque adeo vis LM vel lm mediocri suæ quantitati, sive satellitis radio SP, vel Sp est quam proxime æqualis: Et propter ingentem etiam Solis distantiam SM, vel Sm, sive LP, vel lp æquales sunt triplæ lineæ KP vel kp. Unde cum in triangulo SKP, vel Skp rectangulo ad K, vel k angulus KSP, vel kSp sit distantia satellitis à quadratura; & latus KP, vel kp, sit ad radium SP, vel Sp sinus rectus; erit vis perturbatrix SM, vel Sm, ad vim perturbatricem LM, vel

vel lm, ut radius, ad triplum ſinum rectum diſtantiæ ſatellitis à quadratura proxima. Unde ſi ratio vis perturbatricis SP, vel Sp ad vim primarii centripetam, ſive ad vim gravitatis ſolum innoteſceret, vis perturbatrix SM, vel Sm facile innoteſceret. Quam itaque hac methodo inveſtigamus. Vis perturbatrix SP, vel Sp, eſt ad vim centripetam primarii in Solem, ut linea SP, vel Sp, ad lineam SQ; ſive ut diſtantia ſatellitis à primario, ad diſtantiam Solis ab eodem primario. Vis autem centripeta primarii in Solem, eſt ad vim centripetam ſecundarii in Primarium, ut temporum periodicorum quadrata, ducta in circulorum radios: Sive ut SQ, ad SP, vel Sp; & ut temporum periodicorum quadrata ſimul. Unde ex æquo vis perturbatricis quantitas, erit ad vim gravitatis, (ratione priore SP, vel Sp ad SQ, rationem alteram reciprocam SQ, ad SP, vel Sp perimente,) ut temporum Periodicorum quadrata. *Q. E. D.*

Corollarium (1.) Cum itaque tempus periodicum Lunæ ſit $39.343'$. & tempus periodicum Terræ circa Solem $525.969'$. Erit vis perturbatrix SP, ad vim gravitatis verſus Terram apud Lunam, ut $39.343' \times 39.343'$, ad $525.969' \times 525.969'$: Hoc eſt, ut 1.547.871.649 ad 276.643.388.961 ſive, ut 1 ad $178\frac{11}{15}$. Et cum vis SM, vel Sm in maxima ſua quantitate, ſive in ſyzygiis, ſit ad vim priorem ut 3 ad 1, erit vis SM, vel Sm in ſyzygiis ad vim gravitatis, ut 3, ad $178\frac{11}{15}$. ſive ut 1, ad $59\frac{9}{15}$. Eſt ergo vis iſta perturbatrix Solis SM vel Sm in ſyzygiis quaſi pars ſexageſima totius vis gravitatis Lunæ verſus terram. Sive potius, dempta vi SP, vel Sp in hoc caſu à vi SM, vel Sm, ut fieri poteſt, eſt vis integra perturbatrix in ſyzygiis, ad vim gravitatis ut 1 ad $89\frac{5}{15}$. ſive pars ejuſdem fere nonageſima. Et in locis aliis erit vis SM, vel Sm, ad vim gravitatis, (poſito ſinu toto unitati æquali,) ut triplus ſinus rectus diſtantiæ à quadratura proxima, ad $178\frac{11}{15}$.

XL. Si corpora plura fluida, aut diverſa, aut in unum fluidum coaleſcentia circa Planetam primarium moveantur, ſingulæ fluidi partes motus ſuos ad legem ſatellitis peragendo propius accedent ad primarium cæteris paribus, & celerius movebuntur in conjunctione & oppoſitione ipſarum & Primarii, quam in quadraturis. Et Nodi annuli hujus, ſeu interſectiones ejus cum eclipticæ plano quieſcent in ſyzygiis. Extra ſyzygias vero movebuntur in antecedentia; & velociſſime quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur; & axis ejus ſingulis revolutionibus menſtruis oſcillabitur, completaque revolutione ad priſtinum ſitum redibit: niſi quatenus per præceſſionem Nodorum circumfertur. Hæc omnia ex nuper demonſtratis ſua quaſi ſponte ſequuntur: atque adeo peculiari demonſtratione minime indigent.

Corollarium. Hinc Annuli Saturnii phænomena nonnulla, modo fluidum ſit, facile poſſunt intelligi. Imo vero, ſi ſolidum ſit, ejuſdem cum Ecliptica interſectiones ſive Nodi quieſcent in ſyzygiis ſuis, ubi nempe Sol in ipſo annuli plano æque ac in eclipticæ plano reperitur. Extra ſyzygias autem regredientur: & celerrime quidem in quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus ſingulis circa Solem revolutionibus nutando bis inclinabitur in eclipticam, & bis redibit ad poſitionem priorem, niſi quatenus per præceſſionem nodorum circumfertur. Ut ex ante dictis eſt apertiſſimum.

XLI. Si fluidum in alveo per ſuperficiem cujuſvis Planetæ ſive primarii ſive ſecundarii excavato contineatur, & una cum planeta ſuo motu periodico diurno uniformiter revolvatur; partes ſingulæ hujus fluidi per vices acceleratæ & retardatæ in ſyzygiis ſuis, ſive in meridie & media nocte, velociores erunt; in quadraturis, ſive hora ſexta matutina & veſpertina, tardiores quam ſuperficies globi contigua: & ſic fluet in alveo, refluetque per vices perpetuo. Ab inæquabili enim Solis atractione turbabitur fluidum, eo quod major erit attractio partium propiorum, minor ea remotiorum, vis autem *LM*, vel *lm* trahet fluidum deorſum in quadraturis, ſive ad horam ſextam matutinam & veſpertinam; facietque ipſius partes ibidem locatas deſcendere uſque ad ſyzygias, ſive ad Meridiem & Mediam noctem, & vis *SM*, vel *Sm* trahet eandem ſurſum in ſyzygiis, ſiſtetque deſcenſum ejus: & faciet ipſam aſcendere uſque ad quadraturas; atque ita perpetuo.

Corollarium. Hinc fluxus & refluxus maris cauſam diſcimus. Si nimirum Lunæ æque ac Solis vires perturbatrices agnoſcamus; & quæ ante demonſtrata ſunt huic caſui rite applicemus. Sed notiſſimum hoc atque maxime ſtupendum hactenus naturæ miraculum fuſius & diſtinctius erit poſthæc pertractandum: Eo itaque Lectorem remittimus.

Octob. 22°. 1705.

XXI.

XLII. Si globo perfecte ſphærico ad partes æquatoreas circumaddatur annulus adjectitius ſolidus; eidemq; adhæreat; Ceſſabit quidem motus fluendi & refluendi: Sed Oſcillatorius ille inclinationis motus, & præceſſio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum annulo; gyroſque compleat iiſdem temporibus; & ſuperficie ſua contingat ipſum interius, eique inhæreat, & participando motum ejus compages utriuſque oſcillabitur, & nodi regredientur. Nam globus, ut mox dicetur, ad ſuſcipiendas impreſſiones omnes indifferens eſt. Annuli globo orbati maximus inclinationis angulus eſt ubi Nodi ſunt in ſyzygiis. Inde in progreſſu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem ſuam minuere, & iſto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impreſſum, uſque dum annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem. Atque hac ratione maximus decreſcentis inclinationis motus fit in quadraturis nodorum, & minimus inclinationis angulus in octantibus poſt quadraturas. Dein maximus reclinationis motus in ſyzygiis, & maximus angulus in octantibus proximis. Et eadem eſt ratio Globi annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior eſt paulo quam juxta Polos, vel conſtat ex materia paulo denſiore. Supplet enim vicem annuli iſte materiæ in æquatoris regionibus exceſſus.

Coroll. (1.) Eadem ratione qua materia globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atque adeo ut per hujus incrementum augeatur iſte regreſſus, per diminutionem vero diminuatur, & per ablationem tollatur; ſi materia pluſquam redundans tollatur, aut, quod eodem recidit, ſi globus juxta æquatorem vel depreſſior reddatur, vel ratior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in conſequentia.

Coroll. (2.) Hinc etiam viciſſim ex motu nodorum innoteſcit conſtitutio globi. Nimirum, ſi globus polos eoſdem conſtanter ſervet, & motus fiat in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat. Si in conſequentia, deficit. Ponamus globum uniformem, & perfecte circinatum in ſpatiis liberis primo quieſcere; dein impetu quocunque in ſuperficiem facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iſte ad axes omnes per centrum ſuum tranſeuntes indifferenter ſe habet, neque propenſior eſt in unum axem, unumve axis ſitum quam in alium quemvis, perſpicuum eſt quod is axem ſuum, axiſque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique in eadem illa ſuperficiei parte qua prius, impulſu quocunque novo; & cum citior vel ſerior impulſus effectum nil mutet, manifeſtum eſt quod hi duo impulſus ſucceſſive impreſſi eundem pro-

producent motum, ac si simul impressi fuissent: hoc est, eundem, ac si globus, vi simplici ex utroque impulsu composita, fuisset impulsus; atque adeo simplicem circa axem inclinatione datum. Et par est ratio impulsus secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus absque primo generaret; atq; adeo impulsuum factorũ in loca quæcunque. Generabunt hi eundem motum circularem, ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorũ motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos; sed impressos omnes componit, & ad unum reducit: & quatenus in se est gyratur semper motu simplici & uniformi, circa axem unicum inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta versus corpus extraneum quodvis tendens inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si Globus plano quocunque per centrum suum, & centrum in quod vis dirigitur transeunte dividi intelligatur in duo hæmisphæria, urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, & propterea globum quoad motum rotationis nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova, in formam montis cumulata, & hæc perpetuo conatu recedendi à centro sui motus turbabit motum globi, facietque polos ejus errare per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuo describere. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro; quo in casu, ut prius dictum, Nodi æquatoris progredientur: vel in æquatore; qua ratione, per prius etiam dicta, Nodi regredientur: vel denique altera axis parte addendo materiam novam qua mons inter movendum libretur: Et hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

Coroll.

Coroll. (3.) Cum itaque constet ex observatis Astronomicis, quod Nodi æquatoris terrestris quotannis regrediantur per 50″ fere; qui quidem regressus *æquinoctiorum præcessio* audit; sequitur partes telluris æquatoreas esse partibus polaribus altiores. Et vicissim, cum ex diurno telluris motu, ut inferius explicabitur, telluris figura sit oblatæ sphæroidis, partibus polaribus præ æquatoreis depressis, liquet exinde æquatoris nodos regredi debere quotannis.

Coroll. (4.) Ex prius dictis liquet etiam axem telluris oscillari quotannis, & in quavis revolutione annua nutando bis in eclipticam inclinari, & bis redire ad positionem priorem. Liquet etiam maximum decrescentis inclinationis plani æquatorei & ecliptici motum fieri in quadraturis nodorum, sive in solstitiis utrisque; & minimum inclinationis angulum in octantibus post quadraturas, sive circa medios Leonis & Aquarii gradus: deinde maximum esse inclinationis motum in syzygiis nodorum, sive in æquinoctiis, & maximum inclinationis angulum in octantibus proximis, sive circa medios Tauri & Scorpii gradus. Sed propter parvitatem horum motuum omnino insensibiles erunt hujusmodi effectus; nec ullis observatis Astronomicis deprehendendi. Notandum autem hisce contrarios effectus telluri nostræ, modo partes æquatoreæ polaribus essent depressiores, tribuendos fuisse.

Coroll. (5.) Hinc ultro corruit à Cl. Gregorio excogitatum effugium quasi Paralaxis annua Stellarum fixarum à Cl. Flamstedio toties reperta infirmo nitereturr fundamento: & quasi nec distantiam fixarum observatarum, nec ipsius telluris motum annuum exinde pro certo concludere liceret. Quin agamus igitur; & post prolata ipsa dubitantis & cavillantis Gregorii verba in arenam cum Viro Clarissimo paulisper descendamus. Methodum hanc fixarum parallaxin observandi Flamstedianam olim expositam dedimus: nec actum itaque iterum agemus.

Prælect. Astronom. p. 33, &c.

Ex

Ex hac autem methodo rite intellecta omnino liquet,
ſtellam, verbi gratia, polarem à polo mundi, ſive æqua-
toris Boreo circa ſolſtitium æſtivum quam circa hye-
male diſtare magis; idque ſpatio admodum ſenſibili, ni-
mirum 40″ aut 45″. Unde concludit Flamſtedius
& dari revera Telluris motum annuum circa Solem,
& fixas parallaxi annuæ ſatis ſenſibili eſſe obnoxias:
earumque proinde diſtantias exinde colligi poſſe. Quid
hic Gregorius? Num negat Stellam e. g. polarem ma-
gis à Polo Mundi Boreo diſtare circa ſolſtitium æſti-
vum quam brumale? Minime ſane. Num Axis Tel-
luris Nutationem illam perexiguam, qua inclinationem
eclipticæ & æquatoris ad ſolſtitia minui, ad æquinoctia
augeri cum Flamſtedio ſupponit, hallucinationis cau-
ſam opinatur? Nequaquam. Oſtenderat nimirum Flam-
ſtedius hanc Nutationem perexiguam confirmare potius
quam infirmare ſententiam ſuam. Quid
Pag. 275. ergo ſibi vult Vir Doctiſſimus. “Me-
“thodus hæc, inquit ille, fixæ parallaxin
“determinandi ſupponit Telluris axem ſibi exactiſſime
“eſſe parallelum: cum hæc in oppoſitis punctis ſuæ
“orbitæ verſatur quando obſervationes inſtituuntur.
Quidni ſupponat, aut exactiſſime, aut propoſito ſuo ſa-
tis exacte ſibi ſemper parallelum? “Licet, pergit Gre-
“gorius, Axis Nutatio iſta exigua, de qua nuperrime
“diximus, obſervationi Flamſtedianæ minime obſtet,
“Alia tamen aliunde orta Nutatio totam hanc ſtellæ
“polaris à polo diſtantiæ diverſitatem producere pote-
“rit. Si nimirum hæmiſphærii terræ auſtralis paulo
“major ſit denſitas quam hæmiſphærii borealis (vel
“propter minorem illi æſtatem quam huic, majuſque
“frigus; vel propter continentium terræ ad polos po-
“ſitorum inæqualitatem, vel aliam cauſam quandam
“nobis ignotam,) cum in ſolſtitio hyemali Polus Au-
“ſtrinus annuat ad Solem, & ſimul illi propior ſit
“quam eſt polus Boreus: cumque tempore Solſtitii æ-
“ſtivi hic ad Solem annuit, inclinabitur axis terræ ma-

“gis ad eclipticæ planum tempore hyemali quam æſti-
“vali, Angulus quo diſtat ſtella polaris à Polo minor
“eſſet in ſolſtitio hyemali, quam in æſtivo, licet ſtella
“polaris eſſet ad diſtantiam infinitam poſita, & lineæ ab
“eadem ad orbem magnum ductæ pro parallelis haberi
“poſſent. Cum igitur totum quod per D. Flamſtedii
“obſervationem conficitur illud ſit, quod diſtantia an-
“gularis apparens ſtellæ polaris à polo in ſolſtitio hye-
“mali quam æſtivo minor ſit, atque hoc ex duplici
“cauſa oriri poſſit, nempe ex rectarum à tellure in di-
“verſo ſuo ſitu ad Stellam polarem concurſu ad ſtellam
“polarem, ſi terræ axis in obſervationum una paralle-
“lus ſit eidem in altera; Quod à Flamſtedio ſupponi-
“tur: Vel ex rectarum cum terræ axe in diverſo ſuo
“ſitu coincidentium conſurſu ad partes contrarias; po-
“ſita ſtella polari infinite diſtante; ex obſervatione illa
“fixarum parallaxis non evincitur. Quoniam obſerva-
“tio integra conſiſtere poteſt, rectis à diverſis telluris
“locis ad ſtellam polarem infinite diſtantem ductis pa-
“rallelis manentibus; hoc eſt, Orbis magni parallaxi
“poſita nulla. Imo hæc obſervatio, ſic ait Gregorius,
“ne vel Telluris motum annuum immediate aſtruit.
“Nam licet Tellus in medio maneat, (circa axem, ut
“in Syſtemate ſemi-Tychonico, rotata cæleſtium motum
“diurnum apparentem efficiens,) Sol in ſignis auſtrali-
“bus hemiſphærium Terræ auſtrale propius, & forte
“denſius Soli tum obverſum ita attrahere poterit, ut
“diſtantia ſtellæ polaris à polo in ſolſtitio brumali mi-
“nor ſit quam diſtantia eadem cum in Signis borealibus
“Sol remotior ejus hemiſphærium boreale etiam forte
“minus denſum minus attrahit. Hactenus D. Gregorius.
Et ſimilem effugiendi rationem quoad reliqua Flam-
ſtedii atque Hookii obſervata eodem ſpectantia commi-
niſcitur. Sed Reſpondeo:

(1.) Quod ad cauſas hujus Titubationis axis telluris
aſſignatas, minorem nempe hæmiſphærii auſtralis æſta-
tem, majuſque frigus, aut continentium polarium in-

æqualitatem ſpectat; ſi Vir Cl. denſitatem hæmiſphærii auſtralis præ boreali tantam quanta movendæ per tot minuta ſecunda telluris poſitioni ſufficiat, ex his cauſis arceſſere velit, idem omnino agit ac ſi Caucaſum vecte è loco ſuo dimovere conetur. Demiror ſane Viri doctiſſimi in hac re ἀγεωμετρησίαν, quod cauſarum tantillarum vires & quantitatem non prius aliquo modo æſtimare voluerit, quam tantis effectibus pares ſtatueret. Laudo tamen Viri Cl. prudentiam quod addiderit, *vel propter aliam cauſam quandam nobis ignotam:* Probe enim ſciebat cauſæ ignotæ nullum iniri poſſe calculum: atque adeo ſe ſibi in hoc negotio loco haud male caviſſe. Interea, dicam aperte, diverſæ hujus, quam ſomniat, hæmiſphæriorum terreſtrium denſitatis cauſam nullam aſſignari poſſe, quæ non mechanicæ planetarum formationi, & phænomenis naturæ hodiernis ſimul adverſetur. Reſpondeo

(2.) Si alterum telluris hemiſphærium altero haud paulo altius aut denſius eſſet, non exinde tamen titubationem hanc quam commentus eſt Cl. Gregorius ſecuturam. Hoc enim in caſu oſcillaretur quidem Axis Globi; ſed ita, ut angulus inclinationis bis in anno ad maximam, & minimam quantitatem reverteretur; atque ita ut angulus iſte ejuſdem eſſet quantitatis in utroque ſolſtitio; quod ipſius hypotheſeωs Gregorianæ fundamenta plane ſubvertit. Reſpondeo

(3.) Ex inæquali hac hemiſphæriorum terreſtrium altitudine, aut denſitate, ſi modo æquatoris altitudinem aut denſitatem vincat, ſequi æquinoctiorum *progreſſum:* cum palam ſit, & à Gregorio agnitum, ea omnino motu continuo *regredi.* Sin inæqualitatem hujuſmodi ſolummodo ſtatuat quæ majorem adhuc æquatoris altitudinem aut denſitatem ſartam tectam conſervari ponat, ita ut quantum ſuperent partes alteræ polares aut altitudine aut denſitate, tantum deficiant alteræ, dico quod neque ex hac hypotheſi cauſæ ſuæ adjumentum aliquod petere poſſit. Etenim propter virium in altero hemiſphærio defectum earum in altero hæmiſphærio exceſſum compenſantem, vires integræ axem moturæ etiamnum æquales manebunt, neque ullam ejuſdem titubationem efficient. Ita ut neque ex ſuppoſita inæquali iſta altitudine aut denſitate Titubatio axis Gregoriana ullo modo ſequatur. Reſpondeo

(4.) Si ipſam etiam axis terreſtris titubationem diſputandi gratia ſupponeremus, neque ſic ſcopum ſuum attingeret Gregorius. Talem enim iſte titubationem ſupponit qualis in ſolſtitiorum uno ad minimum inclinationis angulum axem reduceret, & ad maximum in altero. Ex principiis autem Newtoni prius poſitis, quæ & ipſius Gregorii ſunt pariter principia, ſequeretur maximum inclinationis axis angulum fore in octantibus poſt Nodorum ſyzygias, & minimum in octantibus poſt eorundem quadraturas; ita ut, quod prius diximus, in ipſis ſolſtitiis utriſque inter maximum & minimum angulum ubique intermediis nulla plane anguli inclinationis varietas ſit expectanda. Unde quoque, quod obiter eſt Notandum, & ipſe Flamſtedius, & eundem ſecutus Gregorius errant omnino, dum mutationem axis, cui æquinoctiorum præceſſio debetur, ullum hic locum habere ſupponant. Reſpondeo

(5.) Si denique ipſam axis nutationem, & tempore quo vult Gregorius, & in partes ab eo aſſignatas ſupponere placeret, Inclinationis quantitas longe minor foret, quam ut parallaxin Flamſtedianam potis eſſet efficere. Demus Gregorio Axem terræ quotannis oſcillari; demus quoque in æquinoctiorum altero oſcillationem fieri in hanc, in altero vero fieri in contrariam partem; itaut maxima quæ fieri poteſt differentia oriatur. Quantillula erit hæc differentiola? Nempe ex calculo olim adhibito conſtat oſcillationem illam grandiuſculam (comparative loquor) ex altitudine ſenſibili mille paſſuum quaſi 17, qua ſemidiameter æquatoris axem dimidium ſuperat orta, ad partem tantum unius minuti ſecundi aliquam aſſurgebat: cui

Prælect. Aſtronom. p. 40.

cui quantitati hæc oſcillatio, mea quidem ſententia, ne comparari quidem poteſt. Quid ergo hæ minutiarum minutiæ cum parallaxi ad integrum ſaltem unius minuti primi dodrantem aſſurgente? Eam nempe cauſa hæc ad effectum producendum habitura rationem quam puteus ad Oceanum. Sed me reprimo: & tandem concludo, effugium hoc Cl. Gregorii, quo fixarum parallaxin & annuum telluris motum ab Obſervatis Flamſtedianis haud certo ſequi contendit, haud exiguum eſſe ejuſdem errorem, & labem non parvam operi alias pulcherrimo inurere.

Scholium. Notandum autem Cl. Flamſtedium ratiocinia ſua non recte in omnibus hoc loco inſtituiſſe, quod nuper annotarunt Galli: & Fixarum parallaxin nonnunquam ex phænomenis illam minime probantibus deduxiſſe; quod in tanto artifice mirandum. Veruntamen, cum rem penitius introſpicerem, deprehendi ex Obſervationum ſolennium quindecim quas ipſi Galli veras eſſe, & ſuis conſentaneas agnoſcunt, Fixarum parallaxi etiamnum conſentire undecim: & ex diſſentientibus quatuor unam tantum ejus eſſe quantitatis ut negotium nobis faceſſere queat; quam proinde ab errore quodam, ſive inter obſervandum, ſive inter ſcribendum admiſſo derivatam fuiſſe æquum eſt ut exiſtimemus. Præſertim cum ſimilis fixarum parallaxis ex accuratis Hookii Obſervatis conſtare, nec aliunde ſolvi poſſe merito videatur. Sed hæc ulteriori Aſtronomorum induſtriæ ſunt relinquenda.

Octob. 29°. 1705.

XVII.

XXII.

XLIII SI ſingula Syſtematis Corpora ut *A* & *B* ſeorſim ſpectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ ſint reciproce ut Quadrata diſtantiarum à trahente, erunt corporum illorum omnium vires abſolutæ ad invicem, ut ſunt ipſa corpora.

Trahat corpus *A* vi acceleratrice per *a* expoſita corpus *B*; & propter diſtantiam utrinque eandem trahat viciſſim corpus *B* ipſum Corpus *A*, vi acceleratrice per *b* expoſita. Quantitas motus eſt utrinque æqualis, propter reactionem utrinque actioni æqualem: Et iſta motus quantitas ex velocitate in materiæ quantitatem ducta omnino oritur. Eſt itaque rectangulum $A \times b$ æquale rectangulo $B \times a$. Et proinde vis acceleratrix corporis *B*, erit ad vim acceleratricem corporis *A*, paribus diſtantiis, ut Corpus *B* ad corpus *A*. Atque adeo Corporum vires abſolutæ erunt inter ſe ut ipſa Corpora. Nimirum ſumma virium æqualium in partes æquales paribus diſtantiis ubique tendentium. *Q.E.D.*

Scholium. Hujuſmodi Propoſitionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas, & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi ſolent. Rationi enim conſentaneum eſt ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in magneticis. Et quoties hujuſmodi caſus incidunt, æſtimandæ erunt corporum attractiones aſſignando ſingulis eorum particulis vires proprias, & colligendo ſummas virium. Vocem autem *Attractionis* hic generaliter uſurpamus pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem, ſive conatus iſte fiat ab actione corporum, vel ſe mutuo petentium, vel per ſpiritus emiſſos ſe invicem agitantium; ſive is ab actione ætheris, aut aeris, mediive cujuſcunque, ſeu corporei, ſeu incorporei oriatur, corpora innatantia utcunque in ſe invicem impellentis. Eodem ſenſu gene-

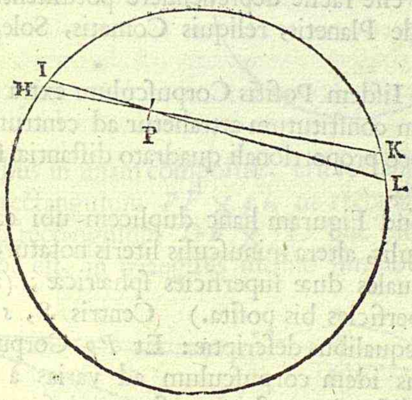
generali uſurpamus vocem *Impulſus*: non ſpecies virium & qualitates phyſicas hic loci, ſed quantitates & proportiones Mathematicas expendentes; ut in definitionibus prius explicuimus. In matheſi inveſtigandæ ſunt virium quantitates, & rationes illæ quæ ex conditionibus quibuſcunque poſitis conſequuntur. Deinde ubi in Phyſicam deſcenditur, conferendæ ſunt hæ rationes cum phænomenis, ut innoteſcat, quænam virium conditiones ſingulis corporum attractivorum generibus competant: Et tum demum de virium ſpeciebus, cauſis, & rationibus phyſicis tutius diſputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, qualia fere ſnnt majora omnia Syſtematis mundani Corpora, Sol, Fixæ, Planetæ, Cometæque, ex particulis, modo jam expoſito, attractivis conſtantia debeant in ſe mutuo agere; & Quales motus inde conſequantur.

XLIV. Si ad Sphæricæ ſuperficiei Phyſicæ, ſive craſſitudinis ubique æqualis, ſed contemnendæ, puncta ſingula æqualia tendant vires æquales centripetæ decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum à punctis; Corpuſculum intra ſuperficiem ubilibet conſtitutum his viribus nullam in partem attrahetur: ſed vel quieſcet, vel motum quemvis inceptum ſine perturbatione ulla continuabit, pariter ac ſi nullis omnino viribus à ſuperficie iſta urgeretur.

Sit *HIKL* Superficies illa Sphærica: & *P* corpuſculum quodvis intus conſtitutum. Per *P* agantur ad hanc ſuperficiem lineæ duæ rectæ quælibet, *HK*, *IL*, arcus quam minimos *HI*, *KL* intercipientes. Et ob triangula ſimilia *HPI*, *LPK*, [*HI* enim & *KL* arcus quam minimi pro rectis lineis ſumi debent; & anguli ad *P* verticem oppoſiti æquantur; & * latera æqualem iſtum angulum continentia, ſunt utrinque proportionalia:] arcus illi erunt diſtantiis *HP*, & *LP* proportionales: hoc eſt, erit *PH*, ad *PL*, ſive *PI*, ad *PK*, ut *IH*, ad *KL*. Et ſuperficiei ſphæricæ par-

*III, 35. *cum* VI, 14, & VI, 6. *Elem.*

ticulæ quævis ad *HI*, & *KL* rectis innumeris per punctum *P* tranſeuntibus undique terminatæ, ſive polygona ſint, ſive circuli, erunt figuræ inter ſe ſimiles; & proinde in ratione arcuum iſtorum ſive diſtantiarum à corpuſculo duplicata. Et proinde, Vires integræ attractrices in contrarias partes æqualiter factæ, propter minoris ſuperficiei ſitum propiorem, & majoris remotiorem, ſe mutuo deſtruent & tollent. Simili argumento attractiones omnes per totam ſphæricam ſuperficiem à contrariis attractionibus deſtruentur: Ac proinde Corpus *P* nullam in partem his attractionibus impelletur. *Q. E. D.*



Coroll. (1.) Cum itaque ſphæra quævis, quæ ſpatium concavum concentricum ſphæricum intus habet, in ſphæricas hujuſmodi ſuperficies craſſitiei contemnendæ innumeras recte dividi poſſit; & ex vi hujus demonſtrationis ſuperficierum quævis nullo modo corpuſculum intus conſtitutum in ullam partem attrahere poſſit; Liquet Totam Sphæram nullam in corpuſculum interius vim imprimere. Sed corpuſculum illud, ſi prius quieſceret, etiamnum quieturum; ſi prius motu qualicunque ferretur; etiamnum motu eodem perrecturum; non obſtante ſphæræ exterioris attractione.

Coroll.

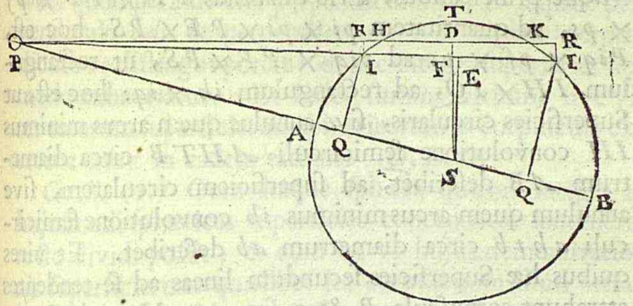
Coroll. (2.) Et cum hoc de corpuſculis quibuſcunque corpus quodvis vel materiæ molem quamvis componentibus pari jure poſſit demonſtrari; Liquet corpora quæcunque intra hujuſmodi ſphæram concavam poſita, non obſtante ſphæræ attractione, aut quieſcere, aut motu quovis priſtino etiamnum ferri.

Coroll. (3.) Si itaque Tellus noſtra, utpote Sphærica ex particulis attractivis compoſita, ſphæricam cavitatem centralem habuiſſet, Animalia quælibet illic conſtituenda nulla gravitatis vi affecta motus omnes ſuos eadem libertate poſſent peragere, ac ſi nulla eſſet in rerum nanatura corporum gravitas. Neque ſane ullam hujuſmodi vim eſſe facile deprehendere potuiſſent. Et par eſt ratio de Planetis, reliquis Cometis, Sole, & ſtellis fixis.

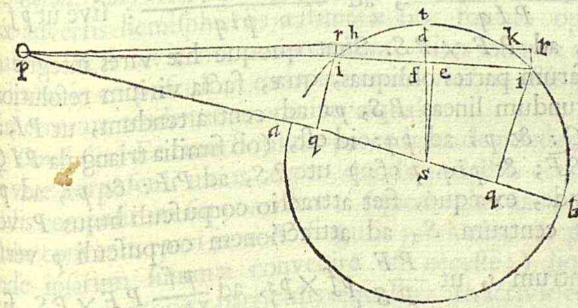
XLV. Iiſdem Poſitis Corpuſculum extra ſphæricam ſuperficiem conſtitutum attrahetur ad centrum Sphæræ vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ ſuæ ab eodem centro.

Sint apud Figuram hanc duplicem ubi earum altera majuſculis, altera minuſculis literis notatur, $AHKB$, $ahkb$ æquales duæ ſuperficies ſphæricæ; (aut potius eadem ſuperficies bis poſita.) Centris S, s diametris AB, ab æqualibus deſcriptæ: Et Pp Corpuſcula duo, (aut potius idem corpuſculum ad varias à ſuperficie ſphærica diſtantias poſitum,) ſita extrinſecus in diametris illis productis. Agantur à Corpuſculis lineæ rectæ PHK, PII: phk pii: auferentes à circulis maximis ATB, atb æquales arcus, quam minime inter ſe differentes, HK, hk: & ITI, iti. Et ad eas demittantur perpendicula SD, sd; ipſis PK, pk; SE, se ipſis PI, pi; IR, ir; ipſis PK, pk. Quorum SD, sd ſecent PI, pi in punctis F, & f. Demittantur etiam ad diametros perpendicula IQ, iq. & ob æquales DS, & ds: ES, & es: & angulos minimos evaneſcentes DPE, dpe, lineæ PE, PF; & pe, pf evaneſcentibus nimirum differentiis FE, fe; & Lineolæ DF,

DF, df pro æqualibus haberi poſſunt: quippe quarum ratio ultima angulis illis DPE, dpe; & DSE, dse ſimul evaneſcentibus eſt ratio æqualitatis. His itaque conſtitutis, erit in triangulis ſimilibus PRI, PDF: & pri, pdf, PI, ad PF, ut RI, ad DF: & pf, ad pi, ut DF, vel df, ad ri: Et utriſque rationi-



bus æqualibus in unam compoſitis, erit rectangulum $PI \times pf$, ad rectangulum $PF \times pi$, ut rectangulum $RI \times DF$, ad rectangulum $DF \times ri$: hoc eſt, ut RI, ad ri: hoc eſt, in triangulis ultimo ſimilibus IRH,



irh, (propter angulum rectum ad R, & r; & angulum RHI angulo rhi, ſi circuli æquales applicarentur ſibi mutuo congruentem;) ut arcus evaneſcens IH, ad arcum evaneſcentem ih. Rurſus, Eſt in triangulis ſimi-

similibus PIQ, PSF: piq, psf, PI, ad PS, ut IQ, ad SE: & ps, ad pi, ut SE, vel se, ad iq. Et, utrisque rationibus æqualibus in unam compositis, erit rectangulum $PI \times ps$, ad rectangulum $PS \times pi$, ut rectangulum $IQ \times SE$, ad rectangulum $SE \times iq$: hoc est, ut IQ, ad iq. Et conjunctis rationibus utrisque principalibus, Erit quantitas $PI \times PI \times pf \times ps$, ad quantitatem $pi \times pi \times PF \times PS$, hoc est, $Piq \times pf \times ps$ ad $piq \times PF \times PS$, ut rectangulum $IH \times IQ$, ad rectangulum $ih \times iq$: hoc est, ut Superficies circularis, sive annulus quem arcus minimus IH convolutione semicirculi $AHTB$ circa diametrum AB describet, ad superficiem circularem, sive annulum quem arcus minimus ih convolutione semicirculi $ahtb$ circa diametrum ab describet. Et vires quibus hæ Superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula P & p sunt, per Hypothesin, ut ipsæ Superficies, nisi quantum distantiarum quadrata easdem vires adaugeant vel diminuant: & proinde sunt revera vires illæ ut ipsæ Superficies, applicatæ ad quadrata distantiarum suarum à corporibus, hoc est, ut $\frac{PIq \times pf \times ps}{PIq}$, ad $\frac{piq \times PF \times PS}{piq}$: sive ut $pf \times ps$, ad $PF \times PS$. Sunt quoque hæ vires integræ ad ipsarum partes obliquas, quæ, facta virium resolutione secundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI, ad PQ: & pi ad pq: id est, (ob similia triangula PIQ, PSF; & piq, psf:) ut PS, ad PF: & ps, ad pf. Unde, ex æquo, fiet attractio corpusculi hujus P versus centrum S, ad attractionem corpusculi p versus centrum s, ut $\frac{PF}{PS} pf \times ps$, ad $\frac{pf}{ps} PF \times PS$, sive ut $PF \times pf \times ps \times ps$, ad $pf \times PF \times PS \times PS$, sive etiam ut $ps \times ps$ vel psq, ad $PS \times PS$, vel PSq. Hoc est, ut distantiarum à centris suis quadrata reciproce. Et simili argumento, vires quibus Superficies

cies remotiores convolutione arcuum remotiorum HL hl descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut distantiarum à centris suis quadrata reciproce. Inque eadem ratione erunt vires superficierum omnium hujusmodi circularium vel annularium, in quas utraque superficies sphærica, capiendo semper arcus æquales HK, hk: & ITI, iti: sive, quod perinde est, perpendiculum SD æquale perpendiculo sd: & perpendiculum SE æquale perpendiculo se distingui potest: donec integra superficies hoc modo exhauriatur. Et Inde, summa virium, sive vires totarum superficierum sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. $Q.E.D.$

Coroll. (1.) Cum itaque sphæra quævis integra in hujusmodi sphæricas superficies concentricas innumeras recte dividi possit; & cum ex vi hujus demonstrationis superficierum quælibet ita corpusculum illud attrahat, ut vis attractionis versus centrum sit in duplicata ratione distantiæ reciproce, Palam est, & sphæram integram ita corpusculum illud attrahere, ut vis centripeta versus centrum sit in duplicata ratione distantiæ ab illo centro reciproce.

Coroll. (2.) Et cum vires reliquæ obliquæ IQ, iq ex adversis hemisphæriis æstimatæ sibi mutuo opponantur, & se invicem omnino tollant, vires integræ centripetæ in corpusculum exercitæ erunt viribus istis versus centrum tendentibus omnino æquales.

Coroll. (3.) Et cum similiter procederet demonstratio, si vice corpusculi unius corpus quodvis ex istis corpusculis compositum supponeretur; (quod enim uni particulæ convenit, pari jure & singulis particulis, & proinde ipsarum summæ convenire est necesse;) liquet sphæram quamvis ex particulis æqualiter attractivis constantem, corpus quodvis ita attrahere, ut attractionis quantitas sit in ratione distantiæ à sphæræ centro duplicata reciproce.

Coroll. (4.) Attractio itaque sphæræ eodem modo se habet ac si vis integra versus centrum tendens in ipsum cen-

centrum collecta uniretur, & ab iſto ſolo puncto ſe undique per regiones in circuitu propagaret.

XLVI. Si ad ſphærarum quarumvis homogenearum, ſive ejuſdem denſitatis puncta ſingula tendant vires centripetæ æquales decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum à punctis; ac detur ratio diametrorum ſphærarum ad diſtantiam corporis ab earum centris; vires quibus corpora ſingula trahentur inter ſe collatæ erunt proportionales ſemidiametris ſphærarum trahentium.

Nempe, vires ſphærarum ſunt ut ipſæ particulæ trahentes, ſive ut ipſæ ſphæræ; hoc eſt, in triplicata ratione ſemidiametrorum, paribus nimirum diſtantiis. Sed cum diſtantiæ inæquales ponantur, & in ipſa diametrorum vel ſemidiametrorum ratione inæquales, diminuentur vires in ratione diſtantiarum, hoc eſt, ex hypotheſi ſemidiametrorum ſphærarum duplicata. Vires itaque reliquæ, ab exceſſu rationis triplicatæ ſupra duplicatam æſtimandæ, erunt in ſimplici ſemidiametrorum ratione directa. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Hinc ſi corpora quævis in circulis circa ſphæras ex materia æqualiter attractiva conſtantes revolvantur; ſintque diſtantiæ à centris ſphærarum proportionales earundem diametris, vel ſemidiametris, Tempora periodica erunt æqualia. Ex viribus enim in directa diſtantiarum ratione ſequitur temporum periodicorum æqualitas; ut olim demonſtravimus.

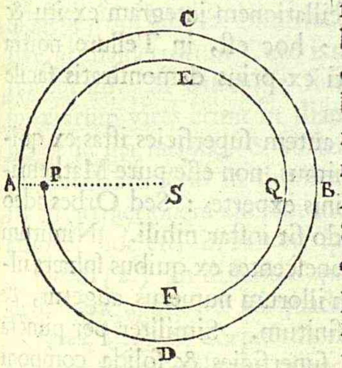
Coroll. (2.) Et vice verſa; ſi tempora periodica ſint æqualia, diſtantiæ corporum revolventium à ſphæris homogeneis, ſive ejuſdem denſitatis erunt diametris vel ſemidiametris ſphærarum proportionales.

Coroll. (3.) Et ex datis temporibus periodicis circa ſphæras quaſvis peractis, & diſtantiis ab iſtis ſphæris, dabuntur quoque ſphærarum denſitates. Nimirum calculum ineundo qualia exinde ſequerentur tempora periodica ad diſtantias ſphærarum ſemidiametris proportionales; & ab iſtorum temporum periodicorum exceſſu vel defectu mutuo denſitatum defectum vel exceſſum eiſdem

dem reciproce proportionalem determinando. Exempla in Sole, Jove, Saturno, & Terra olim proferemus.

XLVII. Si ad Sphæræ alicujus datæ homogeneæ, ſive æqualis ubique denſitatis puncta ſingula tendant æquales vires centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum à punctis, Corpuſculum intra ſphæram conſtitutum attrahitur vi proportionali diſtantiæ ſuæ ab ipſius centro.

In Sphæra *ACBD*, centro *S* deſcripta locetur corpuſculum *P*: & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe ſphæram interiorem *PEQF* deſcribi. Manifeſtum eſt per Propoſitionem 44. Quod ſphæricæ ſuperficies concentricæ, ex quibus ſphærarum differentia componitur, attractionibus ubique per attractiones contrarias deſtructis, nil agunt in Corpuſculum *P*: Reſtat ſola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. decreſcit itaque vis centripeta propter ſphæram minorem attrahentem in triplicata ratione diſtantiæ à centro diminutæ, creſcit autem in duplicata ratione diſtantiæ inverſa, propter acceſſum ad Centrum. Ergo vis reliqua ab exceſſu rationis triplicatæ ſupra duplicatam æſtimanda, erit in ipſa diſtantiæ à centro ratione directa. *Q. E. D.*



Coroll. (1.) Si hujuſmodi ſphæra per centrum perforetur, Corpora omnia à diſtantiis omnibus ſive magnis ſive parvis dimiſſa æquali temporis ſpatio ad centrum deſcendent: ſpatio nempe 21′. 9″. in Tellure noſtra, uti olim obſervavimus.

Coroll. (2.) Si autem nullum ſit medium quod motui corporum deſcendentium vel aſcendentium adverſetur, Corpus quodvis demiſſum per æquale ſpatium ultra

tra centrum ascendet quo ad centrum descenderat prius; atque ita perpetuo descensu & ascensu oscillantium per cycloidem pendulorum corporum motus æmulabitur. Et oscillationes, si ita vocare liceat, in omnibus distantiis erunt pariter isochronæ.

Coroll. (3.) Sin intervalla quotvis minima hujusmodi sphæræ concentrica inter superficies quasvis sphæricas interposita ponantur, in quibus corpora quævis instar planetarum quorundam parvorum circa centrum in circulis revolvant, Erunt tempora periodica omnium hujusmodi planetarum ubique æqualia. Eodem nempe temporis spatio periodum quamvis peragendo quo corpus quodvis demissum oscillationem integram ex itu & reditu compositam obiret: hoc est, in Tellure nostra spatio $1^h. 24'. 36''$. Uti ex prius demonstratis facile constare potest.

Scholium. Notandum autem superficies istas ex quibus solida componi supponimus, non esse pure Mathematicas, vel omnis crassitudinis expertes: Sed Orbes adeo tenues, ut eorum crassitudo sit instar nihili. Nimirum in casu præsenti Orbes evanescentes ex quibus sphæra ultimo constat, ubi orbium illorum numerus augetur, & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta ex quibus lineæ, & inde superficies & solida componi nonnunquam dicimus, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ. Sed hæc impræsentiarum sufficiant.

Novemb. 19°. 1705.

XXIII.

XXIII.

XLVIII. Positis iisdem, Corpusculum extra sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro. Nam distinguatur Sphæra in superficies sphæricas innumeras concentricas: & attractiones corpusculi à singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantiæ corpusculi à centro, per Propositionem 45. Et componendo, Fiet summa attractionum, hoc est, attractio sphæræ totius in eadem ratione. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Hinc in æqualibus distantiis à centris homogenearum sphærarum attractiones sunt ut ipsæ sphæræ; sive ut diametrorum Cubi inter se. Nam per Propositionem 46. Si distantiæ sint proportionales diametris, sphærarum vires erunt ut diametri: Minuatur distantia major in illa ratione, & distantiis jam factis æqualibus augebitur attractio in duplicata illa ratione, adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa diametrorum ratione, hoc est, in ratione ipsarum sphærarum.

Coroll. (2.) In distantiis quibusvis Attractiones erunt ut sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Coroll. (3.) Si corpusculum extra sphæram homogeneam positum trahatur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem sphæra ex particulis attractivis, decrescet vis particulæ cujusque in duplicata ratione distantiæ à particula.

Coroll. (4.) Cum itaque Planetæ primarii simul & secundarii omnes ad Solis centrum; Omnes Circumjoviales ad Jovis centrum; Omnes Circum-Saturnii ad Saturni centrum; & Luna ad Telluris centrum trahantur, ad sua nempe quivis centra in distantiis variis, vi reciproce proportionali quadrato distantiarum ab istis centris respective; Decrescit vis particulæ cujusque molem Solis, Jovis, Saturni, & Telluris componentis in duplicata ratione distantiæ à particula.

XLIX. Si ad ſphæræ homogeneæ datæ puncta ſingula tendant vires æquales centripetæ, decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum à punctis, Sphæra quævis alia ſimilaris attrahetur vi reciproce proportionali quadrato diſtantiæ centrorum.

Nam particulæ cujuſvis attractio eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ ejus à centro ſphæræ trahentis: per Propoſitionem 45. & propterea eadem eſt ac ſi vis tota attrahens manaret de corpuſculo unico ſito in centro hujus ſphæræ. Hæc autem attractio tanta eſt quanta foret viciſſim attractio corpuſculi ejuſdem, ſi modo illud à ſingulis ſphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur, qua ipſas attrahit. Foret autem illa corpuſculi attractio per Prop. poſtremam reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ ejus à centro ſphæræ; adeoque huic æqualis attractio ſphæræ eſt in eadem ratione. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Attractiones Sphærarum homogenearum verſus alias ſphæras homogeneas ſunt pariter ac eæ punctorum ſive corpuſculorum minimorum ut ſphæræ trahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum centrorum ſuorum à centris earum quas attrahunt.

Coroll. (2.) Idem valet ubi ſphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta ſingula trahent ſingula alterius eadem vi qua ab ipſis viciſſim trahuntur; adeoque cum in omni attractione urgeatur tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conſervatis proportionibus.

Coroll. (3.) Eadem omnia, quæ ſuperius de motu corporum circa *Umbilicum* Conicarum ſectionum demonſtrata ſunt, obtinent ubi ſphæra attrahens locatur in umbilico, & corpora moventur extra ſphæram.

Coroll. (4.) Ea vero quæ de motu corporum circa *Centrum* Conicarum Sectionum demonſtrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra ſphæram: nimirum ubi ſphæra non concava, ſed aliquantulum concavis partibus interrupta ſupponitur, uti haud ita pridem obſervavimus.

L. Si

L. Si Sphæræ in progreſſu à centro ad circumferentiam (quoad materiæ denſitatem, & vim attractivam) utcunque diſſimilares, in progreſſu vero per circuitum ad datam omnem à centro diſtantiam ſint undique ſimilares, & vis attractiva puncti cujuſque decreſcat in duplicata ratione diſtantiæ corporis attracti; vis tota qua hujuſmodi ſphæra una attrahit aliam, eſt reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ centrorum.

Etenim hujuſmodi ſphæra in ſphæricas ſuperficies concentricas ſimilares ſemper dividi poteſt. Et cum nuper demonſtratum fuerit, quamvis ſuperficiem ſeorſim ſpectatam alias omnes ſeorſim ſpectatas ita trahere, ut vis tota qua hujuſmodi ſphærica ſuperficies alteram quamvis trahit, ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ à centro ſuo, conſtabit propoſitio de ſphæris integris ex hujuſmodi ſuperficiebus conflatis. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Hinc ſi ejuſmodi ſphæræ complures ſibi invicem per omnia ſimiles ſe mutuo trahant, attractiones acceleratrices ſingularum in ſingulas erunt in æqualibus centrorum diſtantiis ut ſphæræ ipſæ attrahentes; ſive ut materiæ quantitates in iiſdem contentæ.

Coroll. (2.) Inque diſtantiis quibuſvis inæqualibus ut ſphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata diſtantiarum inter ſphærarum centra.

Coroll. (3.) Attractiones vero motrices, ſeu pondera ſphærarum in ſphæras in æqualibus centrorum diſtantiis ut ſphæræ attrahentes & attractæ conjunctim: id eſt, ut contenta ſub ſphæris per multiplicationem producta. Nam cum corpus attrahens propter reactionem actioni ubique æqualem & in partes contrarias tendentem verſus corpus attractum pari motus quantitate, hoc eſt, celeritate corporibus reciproca, moveatur; idque ſi nulla eſſet corporis attracti vis proprie attractiva: Et cum iis qui ſphæram aliquam incolunt tota approximantium ſphærarum velocitas ſphæræ alteri neceſſario referatur; eo nimirum quod motum proprium dignoſcere nequeant; hinc evenit ut vis alterius ſphæræ centripeta univerſa,

versa, qua nimirum ad suam appropinquat, aut potius qua utraque conatu mutuo ad amplexus mutuos fertur, quæque *Pondus* alterius dicitur, proportionalis sit non sphæræ attrahenti solummodo, sed sphæris utrisque simul sumptis. Sic sane pondus corporis cujusvis in terram illud omnino dicitur quo corpus illud & terra velocitate accedendi relativa ad se mutuo feruntur. Sic sane Olim ostendimus gravitatem Lunæ in terram esse ejus quidem quantitatis ut spatio horarum 4. & minutorum primorum 20. fere ad ejus centrum caderet. Non quod omnis ista velocitas ad Lunam revera sit referenda; sed quod si omnis accedendi velocitas respectiva ex motu utriusque syderis oriunda ad Lunam solam referretur, prout incolis Terræ usu venire debet, efficeret illa ut isto temporis spatio Luna ad Telluris centrum caderet.

Prop. 23. prius.

Coroll. (4.) In distantiis inæqualibus attractiones motrices sive pondera sphærarum in sphæras erunt ut contenta illa applicata ad quadrata distantiarum inter centra.

Coroll. (5.) Eadem valent etiam à fortiori ubi attractio integra oritur à sphæræ utriusque virtute attractiva mutuo exercita in sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminabitur attractio, Proportione servata.

Coroll. (6.) Si hujusmodi sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur singulæ circa singulas; sintque distantiæ inter centra revolventium atque quiescentium proportionales quiescentium diametris; Tempora periodica erunt æqualia.

Coroll. (7.) Et vicissim si tempora periodica sint æqualia, distantiæ erunt proportionales diametris.

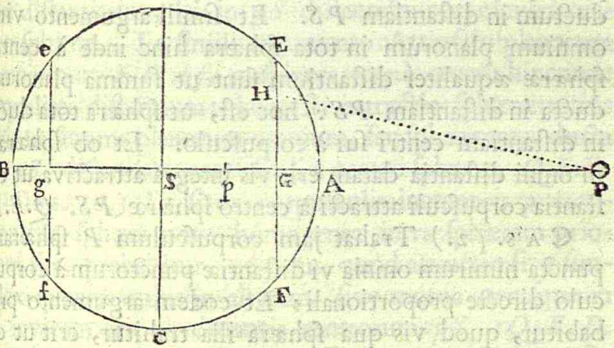
Coroll. (8.) Eadem omnia quæ superius de motu corporum circa umbilicos conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi sphæra attrahens formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ locatur in umbilico.

Coroll. (9.) Ut & ubi gyrantia sunt etiam sphæræ attrahentes conditionis cujusvis jam descriptæ: hoc est, aut in universum homogeneæ; aut saltem in iisdem à centro distantiis homogeneæ.

LI. Si

LI. Si ad singula sphærarum homogenearum puncta æqualia tendant vires centripetæ æquales, nimirum paribus distantiis, diversis autem distantiis istis punctorum à corporibus attractis directe proportionales; vis ex omnium partium viribus composita, qua sphæræ duæ se mutuo trahent, erit ut distantia inter centra sphærarum.

Casus (1.) Sit $ACBD$ sphæra ex hujusmodi punctis attractivis conflata: S centrum ejus: P corpusculum attractum: $PASB$ axis sphæræ, per corpusculi centrum transiens: EF, & ef plana duo physica crassitudinis contemnendæ, quibus sphæra secetur, huic axi



perpendicularia, & hinc inde à centro sphæræ æqualiter distantia. Puncta G, & g intersectiones planorum & axis: & H punctum quodvis physicum in plano EF. Vis centripeta puncti H in corpusculum P secundum lineam PH exercita est, ex Hypothesi, ut ipsa distantia PH: quæ per virium resolutionem in vires GH, GP erit dispescenda. Unde vis secundum lineam PS: hoc est, versus centrum S: ut ipsa longitudo PG. [nimirum virium parte altera HG, à vi puncti ad alteras axis partes in eodem plano directe oppositas æqualiter ab axe distantis destructa.] Vis igitur punctorum omnium in plano EF; hoc est, vis plani

totius

totius qua corpusculum P trahitur versus centrum S simili modo erit ut numerus vel summa punctorum ducta in distantiam PG: hoc est, ut contentum sub plano ipso EF, & distantia illa PG. Et consimiliter vis plani ef qua corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut æquale illud planum ductum in distantiam illam Pg. Et summa virium plani utriusque ut planum EF, ductum in summam distantiarum $PG + Pg$; id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam PS: [propter lineas PG, PS, Pg Arithmetice proportionales; & exinde summam extremarum æqualem mediæ duplæ.] Hoc est, ut duplum planum EF; sive summa planorum æqualium ductum in distantiam PS. Et simili argumento vires omnium planorum in tota sphæra hinc inde à centro sphæræ æqualiter distantium sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS: hoc est, ut sphæra tota ducta in distantiam centri sui à corpusculo. Et ob sphæram in omni distantia datam erit vis integra attractiva ut distantia corpusculi attracti à centro sphæræ PS. Q.E.D.

CAS. (2.) Trahat jam corpusculum P sphæram, puncta nimirum omnia vi distantiæ punctorum à corpusculo directe proportionali: Et eodem argumento probabitur, quod vis qua sphæra illa trahitur, erit ut distantia PS. Q.E.D.

CAS. (3.) Componatur jam sphæra altera homogenea ex particulis pariter pro directa distantiæ ratione attractivis innumeris P. Et quoniam vis qua corpusculum unumquodque trahitur est ut distantia corpusculi à centro sphæræ primæ ducta in sphæram eandem; atque adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro sphæræ; vis tota qua corpuscula omnia in sphæra secunda trahentur, hoc est, qua sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si sphæra illa traheretur à vi prodeunte de corpusculo unico, in centro sphæræ primæ posito. Et propterea proportionalis erit distantiis inter centra sphærarum. Q.E.D.

CAS. (4.)

CAS. (4.) Trahant jam sphæræ se mutuo: & vis duplex sive geminata proportionem priorem etiamnum servabit. Q.E.D.

CAS. (5.) Locetur jam corpusculum p intra sphæram $ACBD$. & quoniam vis plani ef in corpusculum erit ut contentum sub plano illo, & distantia pg: seu ut $ef \times pg$. & vis contraria plani EF ut contentum sub plano illo, & distantia PG, seu ut $EF \times PG$: sive $ef \times PG$. Erit itaque vis attrahens ut differentia contentorum, hoc est, ut $ef \times pg - PG$: vel ut duplum ef in differentiam $pg - PG$ dimidiam $= 2 ef \times \frac{1}{2} pg - PG$. Hoc est, ob æquales SG, Sg, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, seu in pS distantiam corpusculi à centro sphæræ. Et simili argumento Attractio planorum omnium ut EF, ef, in sphæra tota à centro hinc inde æqualiter distantium; hoc est, attractio sphæræ totius erit ut summa planorum omnium, seu sphæra tota, ducta in pS, distantiam corpusculi à centro sphæræ. Q.E.D.

CAS. (6.) Et si ex corpusculis innumeris p componatur sphæra nova homogenea intra sphæram priorem sita, probabitur, ut prius, quod attractio sive simplex sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem erit ut distantia centrorum pS. Q.E.D.

LII. Si Sphæræ in progressu à centro ad circumferentiam, (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcunque dissimilares; in progressu vero per circuitum ad datam omnem à centro distantiam sint undique similares, & vis attractiva puncti cujusque sit directe ut distantia corporis attracti, vis tota, qua hujusmodi sphæræ duæ se mutuo trahent, erit proportionalis distantiæ inter centra sphærarum.

Etenim hujusmodi sphæra in circulos æquales EF, ef, & in iisdem à centris G, g distantiis homogeneos semper dividi potest: & cum ex vi jam demonstratorum quælibet perimeter circularis, ex quibus quivis integer circulus componitur, vim exhibeat pro-

por-

portionalem distantiæ à sphæræ centro, vis integra erit etiam in ipsa distantiæ à centro ratione directa.

Corollarium. Quæ superius in Propositionis 50. Corollariis de sphærarum attractionibus, ubi lex attractionis erat in ratione distantiæ duplicata inverse sunt demonstrata, ad hunc casum applicata ubique valent, mutatis rite mutandis. Speciatim vero, Quæ olim de motu corporum circa *centra* Conicarum sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi attractiones omnes fiunt vi corporum sphæricorum conditionis jam descriptæ, suntque corpora attracta sphæræ conditionis ejusdem.

Scholium. Attractionum casus duos insigniores jam dedimus expositos; nimirum ubi vires centripetæ vel decrescunt in duplicata distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici: Efficientes in utroque casu ut corpora gyrentur in Sectionibus Conicis, ex lege nimirum priori circa *focum*, posteriori circa *centrum* (& casu priori corporibus *extra* sphæras positis, posteriori corporibus *intra* easdem positis congruente.) Et componentes corporum sphæricorum vires centripetas eadem lege in recessu à centro decrescentes vel crescentes cum seipsis. Quod est notatu dignum & ad phænomena systematis Solaris solvenda maxime accommodatum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhiberent, & à constitutione mundi magis alienas, hic loci sigillatim percurrere longum esset, & pene inutile. Præterea; post explicatas in prioribus corporum sphæricorum attractiones, Pergere liceret ad leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium. Sed ista particulatim tractare minus ad nostrum institutum spectat. Sufficerit Propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deque motibus inde oriundis ob eorum in rebus Philosophicis aliqualem usum subjungere. Sed ista in Prælectionem proximam differemus.

Decemb. 3. 1705.

XXIV.

XXIV.

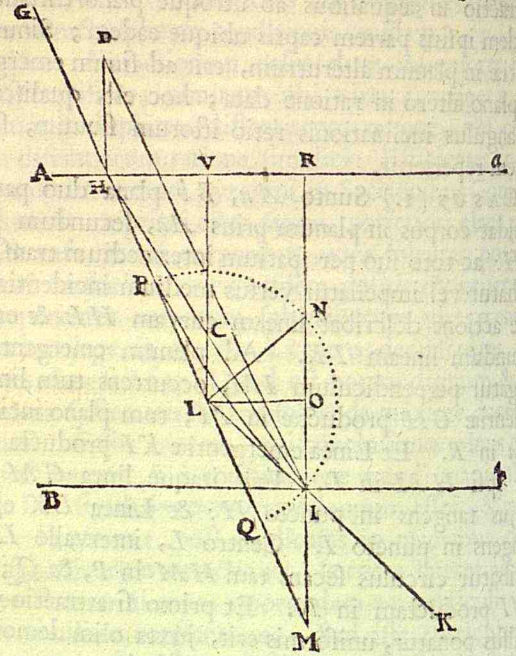
LIII. SI media duo similaria spatio planis parallelis utrinque terminato distinguantur ab invicem; & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus medium alterutrum; neque ulla alia vi agitetur vel impediatur; Sit autem Attractio in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis ubique eadem; Sinus incidentiæ in planum alterutrum, erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione data; hoc est, qualiscunque sit angulus inclinationis ratio istorum sinuum, semper eadem reperietur.

CASUS (1.) Sunto Aa, Bb plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius Aa, secundum lineam GH: ac toto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus medium incidentiæ: eaque actione describat lineam curvam HI. & emergat secundum lineam IK. Ad planum emergentiæ Bb erigatur perpendiculum IM, occurrens tum lineæ incidentiæ GH productæ in M; tum plano incidentiæ Aa in R. Et Linea emergentiæ KI producta occurrat ipsi HM in L. Erit itaque linea GM curvæ hujus tangens in puncto H: & Linea LK ejusdem tangens in puncto I. Centro L, intervallo LI, describatur circulus secans tam HM in P, & Q; quam MI productam in N. Et primo si attractio vel impulsus ponatur, uniformis erit, juxta olim demonstrata, curva illa linea HI Portio Parabolæ. Cujus è diametris una erit linea LV plani utrisque perpendicularis; & linea recta HI erit ejusdem diametri Ordinata, ab eadem in puncto C bifariam divisa. Hujusce autem Parabolæ proprietas hæc est; ut rectangulum sub latere recto ad verticem H pertinente; in hoc casu, propter corporum velocitatem datam

Prop. 8. prius.

† Coroll. 2. Prop. 8. prius.

tam hic suppositam, ubique † dato: & abscissa HD, vel eidem æquali IM, æquale sit ipsius semiordinatæ DI, vel eidem æqualis HM quadrato. Hujusce etiam Parabolæ tangens HM bisecabitur in puncto L: (ut enim in triangulis similibus HCL, HIM, est HC, ad HI, ita erit HL, ad HM. Sed HC est semissis HI: ergo erit & HL semissis HM.) Unde si ad MI demittatur perpendiculum LO, æquales semper erunt



MO & OR: & additis æqualibus IO, ON, fient totæ æquales MN, IR. Cum itaque distantia planorum in omnibus inclinationibus IR detur, dabitur & in omnibus inclinationibus eidem æqualis MN. Estque proinde Rectangulum $NM \times MI$, ad rectangulum sub latere recto ad verticem H pertinente & MI, ut data NM, ad latus rectum datum; sive in data ratione.

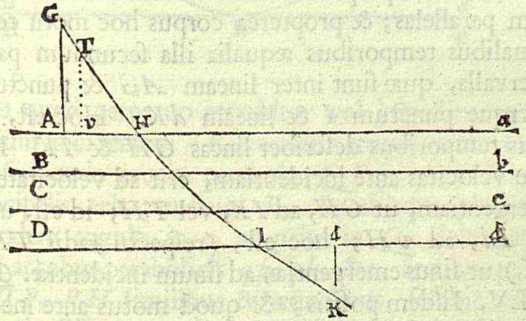
Corollarium 1. Prop. 36. Lib. 3. Elem.

one. Est autem rectangulum sub HD vel MI, & latus rectum, æquale quadrato DI vel HM. Atque adeo rectangulum $NM \times MI$, est ad quadratum HM, in ratione data. Sed rectangulum $NM \times MI$ æquale est rectangulo $PM \times MQ$: id est, differentiæ quadratorum ML & PL, seu quadratorum ML & LI. Et HM quadratum datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem LM quadratum. Ergo datur ratio $MLq - LIq$, ad LMq: & divisim ratio LIq, ad LMq: & ratio ejusdem subduplicata lineæ LI, ad lineam LM.

Corollarium 1. Prop. 20. Lib. 3. Elem.

Sed in omni triangulo LMI sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ LMR, vel AHG ad sinum anguli emergentiæ MIK, vel LIR; vel ejusdem ad duos rectos complementi LIM. [Idem enim est sinus anguli LIR, & ejusdem ad duos rectos complementi LIM.] Q. E. D.

Cas. (2.) Transeat jam corpus successive per spatia plura parallelis planis terminata, $AabB$, $BbcC$, $CcdD$, &c. & agitetur vi quæ sit in singulis separatim



uniformis, at in diversis diversa: & per jam demonstrata sinus incidentiæ in planum primum Aa, erit ad sinum emergentiæ ex plano secundo Bb, in data ratione:

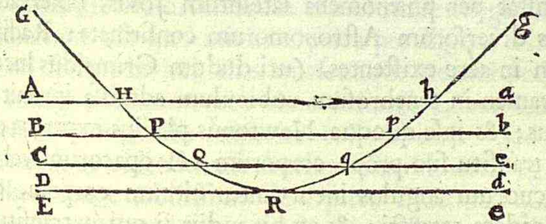
one: Et hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum *Bb*, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio *Cc*, in data ratione: & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto *Dd* in data ratione: & ſic in infinitum. Et ex æquo, Sinus incidentiæ in planum primum, erit ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla, & augeatur numerus in infinitum; eo ut attractionis vel impulſus actio ſecundum legem quamcunque aſſignatam continua reddatur; & Ratio ſinus incidentiæ in planum primum, ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q.E.D.*

LIV. Iiſdem poſitis, Velocitas corporis ante incidentiam, erit ad ejuſdem velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ, ad ſinum incidentiæ.

Capiantur *AH Id* æquales, & Erigantur perpendicula *AG*, *dK* occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ *GH*, *IK*, in *G*, & *K*. In *GH* capiatur *TH* æqualis *IK*, & ad planum *Aa* demittatur normaliter *Tv*. Et diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, perpendicularem; alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus agendo ſecundũ lineas perpendiculares nil mutabit motum ſecundum parallelas; & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam *AG* & punctum *H*, interque punctum *I* & lineam *dK*. Hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas *GH* & *IK*. Et proinde velocitas ante incidentiam, erit ad velocitatem poſt emergentiam, ut *GH*, ad *IK*, vel *TH*; id eſt, ut *AH*, vel *Id*, ad *vH*; hoc eſt, (reſpectu radii *TH*, vel *IK*,) ut ſinus emergentiæ, ad ſinum incidentiæ. *Q.E.D.*

LV. Iiſdem poſitis; & quod motus ante incidentiam velocior ſit quam poſtea, Corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem; & angulus reflectionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

Nam concipe corpus inter plana parallela *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, &c. deſcribere arcus parabolicos, ut ſupra; ſintque arcus illi *HP*, *PQ*, *QR*, &c. Et ſit ea lineæ incidentis *GH* obliquitas ad planum primum *Aa*, ut ſinus incidentiæ, ſit ad ſinum anguli recti, hoc eſt, ad radium circuli cujus eſt ſinus, in ea ratione quam habet idem ſinus incidentiæ primæ ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo *Dd*, in ſpatium per *DdeE* exprimendum. Et ob ſinum emergentiæ jam factum æqualem radio, ſive ſinui anguli recti, Angulus ille emergentiæ erit rectus; adeoque linea emergentiæ coincidet cum plano *Dd*. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto *R*. Et quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perſpicuum eſt quod corpus non poteſt ultra pergere verſus planum remotius per *Ee* exprimendum. Sed nec poteſt idem pergere in linea emergentiæ *Rd*,



propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur verſus medium incidentiæ. Revertetur itaque inter *Cc*, *Dd*, deſcribendo arcum parabolæ *QRq*; cujus Vertex principalis erit punctum *R*. Secabitque planum *Cc* in eodem angulo in *q*, ac prius in *Q*. dein pergendo in arcubus parabolicis *qp*, *ph*, &c. arcubus prioribus *QP*, *PH* ſimilibus & æqualibus, ſecabit reliqua plana in iiſdem angulis in *p*, & *h*, ac prius in *P*, & *H*; emergetque tandem eadem obliquitate in *h*, qua incidit in *H*. Concipe jam planorum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, &c. intervalla in infinitum minui, & numerum augeri;

eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & Angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*

Scholium. Harum attractionum haudquaquam dissimiles videntur Lucis refractiones & reflexiones factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit Snellius; & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit Cartesius: [cum enim sinus quilibet sit ad radium, ut radius ad secantem complementi; & Angulus incidentiæ inter radium & planum refringens Snellio dictus, sit Anguli incidentiæ inter radium & perpendicularem Cartesio dicti complementum; Ratio secantium à Snellio usurpata, cum ratione sinuum à Cartesio usurpata omnino congruet & coincidet.] Namque Lucem successive propagari, & spatio quasi septem aut octo minutorum primorum à Sole ad Terram venire jam constat per phænomena satellitum Jovis, observationibus diversorum Astronomorum confirmata: Radii autem in aere existentes, (uti dudum Grimaldus luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissa invenit primus; & ipse quoque Newtonus plenius expertus est:) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos incurvantur circum corpora, quasi in eadem attracti: & ex his radiis ii qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, uti ipse quoque Newtonus diligenter observavit, & fusius alibi nuperrime exposuit. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii qui incidunt in cultrum prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio radiorum lucis non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam nempe partim in aere antequam attingunt vitrum, partim etiam, ut videtur, in vitro postquam illud ingressi sunt. Nec aliter se res habere videtur in reflexionibus, uti accurate ostendit Newtonus in libro jam citato. Quo Lector harum rerum cupidus est omnino remittendus. Ob analogiam autem quæ est inter propagationem radiorum lucis, & progressum corporum, visum fuit Propositiones tres priores veræ opticæ præparatorias demonstrare. Notandum autem obiter cum Newtono, ad usus opticos præ figuris conicis sphæricas esse maxime accommodatas. Et ex ejusdem sententia, si perspicillorum vitra objectiva ex vitris duobus sphærice figuratis, & aquam inter se claudentibus conficientur, fieri potest ut errores refractionum quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis ab aquæ refractionibus satis accurate corrigantur. Talia autem vitra objectiva vitris ellipticis & hyperbolicis præferenda esse statuit, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verum tamen diversa diversorum radiorum refrangibilitas impedimento est quo minus Optica per figuras vitrorum vel sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi Labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur. Sed de hisce omnibus videndus est Author Clarissimus in egregio illo & longe nobilissimo de Optice Tractatu, quem tandem in publicum emittere dignatus est.

Opticæ L. III.

Scholium (2.) Cum autem visum fuerit viro summo Propositiones nonnullas sine demonstratione in isto libro proponere, quæ moram legentibus injiciunt, Operæ pertium erit earum demonstrationes, aut nuper adinventas, aut ab eodem viro alibi traditas hic loci apponere: Ut Tyronibus Opus istud Opticum, auro contra non carum, inoffenso pede deinceps pertransire liceat. Sed cum horulæ hujusce spatio mimine concluclundendæ sint, eas termino post Natalitia proximo Reservabimus.

Decemb. 10. 1705.

XXV.

PROP. (1.) SIT ACB superficies sphærica reflectens, cujus centrum est E. Bisecetur radius EC in puncto T. Et si in linea EC ad eandem puncti T partem signentur puncta Q, & q; ita ut TQ, TE, & Tq sint lineæ continue proportionales Geometrice; & punctum Q sit radiorum incidentium Focus, erit punctum q radiorum reflexorum Focus. Est enim ex hypothesi $QT : TC :: TC : Tq$. Et Componendo $QT + TC = QC : QT :: CT + Tq = Cq : CT = ET$. Hoc est, $QC : QT :: Cq : ET$. Et alternando $QC : Cq :: QT : ET$. Sed per V. 19. Elem. $QT : ET :: QE : Eq$. Ergo ex æquo $QC : Cq :: QE : Eq$. Unde in triangulo cujus basis est Qq, & vertex in superficie sphærica ACB, puncto C satis propinqua, ita ut laterum majus sit ipsi QC, & minus ipsi qC quam proxime æquale, dividetur basis Qq à puncto E sphæræ centro, ita ut partes QE & Eq, sint inter se in ratione laterum QC & qC. Et * proinde linea à Trianguli vertice per centrum E ducta verticalem trianguli angulum bisecabit; & æquales angulos utrinque præstabit. Unde radii per Q transeuntes, eo quod angulus incidentiæ & reflectionis æquantur, reflectentur ad punctum q. & vice versa. $Q.E.D.$

Pag. 7. Cas. 2. Lib. 1.

* VI, 3. Elem.

PROP. (2.) Sit ACB superficies refringens sphæræ cujus centrum est E. In EC radio utrinque producto signentur puncta T & t; ita ut tam ET, quam Ct, (inter se nempe æquales,) sit ad radium EC, ut sinuum angulorum incidentiæ & refractionis minor, est ad istorum sinuum differentiam. Dein signentur in eadem linea puncta Q, & q, ita ut TQ, sit ad ET, vel Ct, ut est Et, ad tq. Sint autem ea punctorum loca ut linea tq sit in plagam à pnncto t ei contrariam quam habet linea TQ quoad

Pag. 8. Cas. 3.

quoad punctum T. Si autem focus radiorum Incidentium sit in puncto Q, Refractorum focus erit in q. Est enim ex hypothesi, ut TQ, ad TC, ita ET, ad tq. Et componendo, TQ, est ad $TQ + TC, = QC$, ut est $ET, = Ct$, ad $Ct + tq, = Cq$. Et alternando, est TQ, ad Ct, ut QC, ad Cq. Et componendo & invertendo ut $TQ + Ct, = QE$, ad TQ, ita $QC + Cq, = Qq$ ad QC. Sive Qq, ad QC, ut QE, ad QT. Unde per Cl. Hugenii demonstrata Dioptricæ suæ, *pag.* 26, &c. constat propositum. $Q.E.D.$

PROP. (3.) Sit $ACBD$ Lens refringens sphærica utrinque convexa, aut concava, aut saltem plano-convexa, vel plano-concava, Cujus Axis (sive linea utrasque superficies normaliter secans, & per sphæræ centrum transiens,) sit CD. In axe sint puncta F & f radiorum refractorum Foci, ut supra, inventi; ii nimirum qui radiis utrinque axi parallelis, si unica esset superficies refringens, congruerent. Bisecetur linea Ff in puncto E. & centro E, radio EF, vel Ef describatur circulus. Esto jam punctum quodvis Q, radiorum incidentium focus. Ducatur QE circulum priorem intersecans in punctis T & t, & in eadem linea signetur punctum q; illud nimirum ut linea tq, sit ad lineam tE, ut eadem tE vel ipsi æqualis TE, est ad TQ. Jaceat autem linea tq in plagam quoad punctum t ei contrariam quam habet TQ quoad punctum T. Erit tum punctum q radiorum refractorum focus; eorum nempe qui axi satis sunt propinqui, quorum tantum in hisce casibus ratio haberi debet

Pag. 8. Cas. 4.

Est enim ex hypothesi TQ, ad TE, ut tE, ad tq. Ergo componendo est TQ, ad $TE + TQ, = QE$, ut est tE, ad $tE + tq, = Eq$. Unde †TQ, est ad QE, ut est $TQ + tE, = QE$, ad $QE + Eq = Qq$. Unde liquet propositum. per demonstrata Hugenii Dioptricæ suæ *p.* 67, &c.

V. 12. Elem.

PROP. (4.) Mistura radiorum Solis in Spectro pt refracto, est ad mi-

Lib. 1. pag. 46.

ſturam Radiorum Solis per foramen vacuum tranſeuntium, ut iſtius ſpectri Latitudo, eſt ad latitudinis ejuſdem & longitudinis differentiam, ſive ut ag ad gm. Eſto enim ah, ad am, ut ag, ad AG. Erit ergo ſpatium ah æquale omnibus minorum circulorum areis, in duplicata nimirum radiorum ratione utrinque. Et miſtura radiorum eſſet æqualis, ſi modo omnes minores circuli in eo ſpatio coaleſcerent. Sed cum per ſpatium pt diſpergantur, erit miſtura ut gh ad gm. Unde cum miſtura radiorum in ſpectro PT, ſit ad miſturam radiorum Solis foramen vacuum tranſeuntium, ut AG, ad GM, ſive ut ag, ad gh: & miſtura ſpectri pt, ſit ad miſturam ſpectri PT, ut gh, ad gm; erit ex æquo perturbate, miſtura ſpectri pt, ad miſturam radiis Solis ſine refractione traſeuntibus congruam, ut ag, ad gm. *Q.E.D.*

Prop. (5.) Si quod corpus data quacunque velocitate in ſpatium latitudinis contemnendæ, & parallelis planis utrinque terminatum, incidat, & inter tranſeundum verſus planum remotius perpendiculariter attrahatur vel impellatur; ita ut vis attrahens vel impellens ſit aut ubique eadem, aut ſaltem ad datas ab illo plano diſtantias eadem, velocitas perpendicularis corporis ſpatium illud prætergreſſi æquabitur ſummæ quadratorum velocitatis prioris, & velocitatis inter tranſeundum acquiſitæ radici quadraticæ. Sin retardetur corpus inter tranſeundum, vice ſummæ quadratorum accipienda eſt eorundem differentia, & valebit propoſitio. Sequitur ex *Newt. Princip. Mathemat.* ~~*Prop. 39. Probl. 27. Coroll.*~~ 2.

Lib. 1. pag. 57.

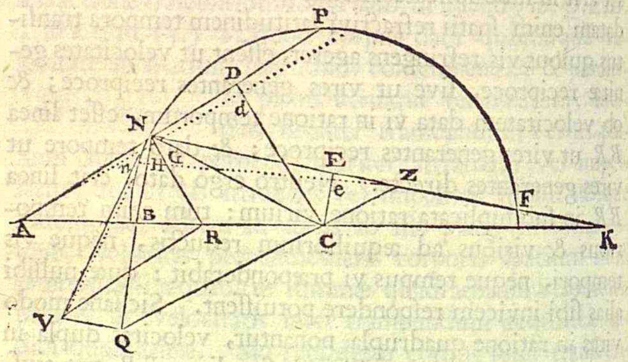
..A.
pr. 94

Prop. (6.) Si quæ corpora vel Lucis Radii ſpatium hujuſmodi parallelis planis terminatum pertranſeuntia, & vi ſimili ſed nunc majori nunc minori inter tranſeundum afficiantur, motus de novo acquiſitus erit ſemper in ſubduplicata virium generantium ratione: ita ut motuum quadrata virium rationes veras determinent. Eſto AB ſuperficies refringens, ſive exponat AB ſpatium contemnendæ craſſitudinis parallelis planis terminatum, cujus vi oritur radiorum refractio. Eſto etiam IC lucis radius obliquiſſime in planum refractivum incidens ad punctum C, ita ut anguli incidentiæ complementum ACI ſit indefinite parvum. Et eſt CR radius refractus. A puncto quovis dato B erigatur perpendicularis BR, radium refractum ſecans in puncto R. Et ſi CR radii refracti motum exponat, qui in duos motus CB, & BR reſolvatur, erit motus pars CB plano refringenti parallela, & BR eidem perpendicularis: & cum motus ſecundum planum AB à vi eidem perpendiculari nullatenus mutetur, dabitur CB; ob datam nempe radiorum velocitatem hic loci ſuppoſitam. Linea BR erit motus per refractionem dato tempore genitus. Et erit in ſubduplicata virium generantium ratione. Ob datam enim ſpatii refractivi latitudinem tempora tranſitus quibus vis refringens ageret, eſſent ut velocitates genitæ reciproce, ſive ut vires generantes reciproce; & ob velocitatem data vi in ratione temporum, eſſet linea BR ut vires generantes reciproce; & dato tempore ut vires generantes directe. Neutro ergo dato, erit linea BR in ſubduplicata ratione virium: tum enim temporibus & viribus ad æquilibrium reductis, neque vis tempori, neque tempus vi præponderabit: quæ nullibi alias ſibi invicem reſpondere potuiſſent. Sic ſane modo vires in ratione quadrupla ponantur, velocitas dupla in tempore dimidio generabitur: ſive linea BR erit ejuſdem lineæ dupla, & ita ubique. *Q.E.D.*

Lib. 2. p. 71, 72.

Prop. (7.) In Iridis ſolutione Arcus QF. & angulus AXR erunt maximi ubi ND, eſt ad CN, ut $\sqrt{II-RR}$ ad $\sqrt{3RR}$. Quo etiam in Caſu NE, erit ad ND, ut $2R$, ad I. Et Angulus AYS quem radii AN & HS conſtituunt erit minimus ubi ND, eſt ad CN, ut $\sqrt{II-RR}$, ad $\sqrt{8RR}$. Quo etiam in caſu NE, erit ad ND, ut $3R$, ad I. Quam Propoſitionem duplicem ſequenti rationum ſerie cum Cl. Newtono in Lectionibus ſuis Opticis MSS. demonſtrabimus.

Problema. Si Radii sive paralleli, sive versus commune aliquod punctum inclinati se sphæræ objiciant refringendos, refractorum extra axem sibi quam proximorum & in eodem plano cum incidentibus jacentium concursum designare. Sit AN incidens radius, NK refractus ejus; & NV in plano trianguli ANK recta linea tangens sphæram ad N. Ad AN duc NR perpendicularem, & occurrentem Axi AC, in R: nec non RV parallelam, & occurrentem tangenti NV, in V. Item ad NK duc NQ perpendicularem, & VQ parallelam, convenientes in Q. Et age QC occurrentem NK in Z. erit Z concursus radiorum ipsi AN vicinissimorum. Sit enim An alius ex incidentibus priori AN infinite vicinus, & occurreus NR



in G. Age nZ, occurrentem NQ in H: & ad AN, & NK e C centro sphæræ demitte normales CD, & CE, occurrentes An, & nZ in d, & e. Jam cum AN supponatur infinite vicinus An, arcus infinite parvus Nn pro recta coincidente cum tangente NV haberi potest; ac triangula NGn, NRV; ut & NHn, NQV pro similibus. Quare est $DC : Dd :: (NR : NG :: NV : Nn :: NQ : NH) : EC : Ee$. Et converse $DC : (DC - Dd)\ dC :: EC : (EC - Ee)\ eC$; & vicissim $DC : EC :: dC : eC$. Est autem

DC ad EC ut sinus incidentiæ, ad sinum refractionis, propterea quod NK sit refractus ipsius AN: adeoque etiam dC ad eC est ut sinus incidentiæ ad sinum refractionis; & proinde cum anguli DAd, & EZe sint infinite parvi, atque adeo Cd, ad An; & Ce, ad nZ perpendiculares, vel saltem perpendiculis æquipollentes, erit nZ refractus ipsius An. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Est $ND : NE$ (sive $NP : NF$) $:: NR : NQ$. Nam acta NC. propter triangulum NDC simile triangulo NRV; & triangulum NEC simile triangulo NQV; est $ND : NR$ ($:: NC : NV$) $:: NE : NQ$. & alterne, $ND : NE :: NR : NQ$.

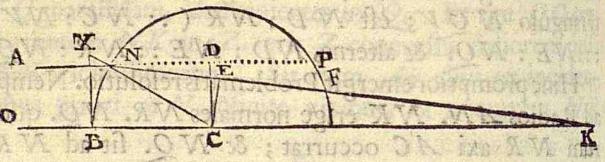
Hinc promptior emergit Problematis resolutio. Nempe ad Radios AN. NK erige normales NR. NQ. quorum NR axi AC occurrat; & NQ. sit ad NR, ut NF; ad NP. Dein age QC quæ cum NK in quæsito Z conveniet.

Coroll. (2.) Est etiam $AN \times DC \times NE : AD \times EC \times ND :: NZ : EZ$. Nam est $AD : AN :: DC : NR$. & inde $NR = \frac{AN \times DC}{AD}$. Item $ND : NE :: NR : NQ$. & inde $NQ = \frac{AN \times DC \times NE}{AD \times ND}$. Adeoque $AN \times DC \times NE : AD \times ND \times EC$ ($:: NQ : EC$) $:: NZ : EZ$.

Coroll. (3.) Si punctum radians A infinite distet, sive parallelos radios ejaculetur, posito $I : R ::$ sinus incidentiæ : sinum refractionis : Erit $I \times NF : R \times NP :: NZ : EZ$. In hoc enim casu AN, & AD, cum sint infinite longæ, pro æqualibus haberi debent: atque adeo per Corollarium 2. hujus erit $DC \times NE : EC \times ND :: NZ : EZ$. Sed, ex hypothesi, est $DC : EC :: I : R$. & proinde $I \times NE : R \times ND$ ($:: NZ : EZ$) $::$ ~~$NP : NF$.~~ $NQ \cdot EO$
$nq \cdot ec$

Notetur autem, Quod mutatis mutandis resolutio Problematis cuicunque casui facile accommodatur; sive radii incidentes divergant à puncto aliquo, vel ad idem convergant, vel incidant paralleli.

Problema alterum. E Parallelis radiis ad circulum refractis radium illum determinare, cujus pars circulo incluſa datam habeat rationem ad partem refracti ejus eidem circulo incluſam. Sit AN radius incidens: NK refractus: NP, & NF partes eorum circulo incluſæ: CD, & CE perpendicula ad iſtas partes è centro circuli demiſſa: & BC ſemidiameter acta parallela AN. Sitque



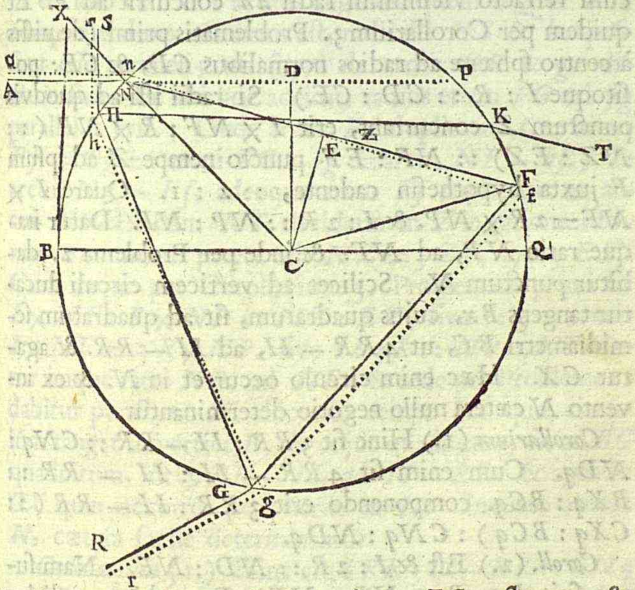
$CD : CE :: I : R$. & $NP : NF :: p : q$. His poſitis, ut innoteſcat punctum N, quod radios AN, & NK determinat, erige ad BC, normalem BX, cujus quadratum, ſit ad BC quadratum, ut $\frac{qq-pp}{pp}$, ad $\frac{II-RR}{II}$. & acta Cx ſecabit circulum in deſiderato N. Eſt enim ex hypotheſi, $p : q$ ($::$ $NP : NF$ $::$) $ND : NE$. Et $I : R :: CD : CE$. quare $\frac{q}{p} ND = NE$. & $\frac{R}{I} CD = CE$. Porro, cum ſit $NDq + CDq$ ($= NCq$) $= NEq + CEq$: aufer hinc inde $NDq + CEq$, & reſtabit $CDq - CEq = NEq - NDq$: Hoc eſt, ſubſtituendo valores CE & NE modo inventos, $CDq - \frac{RR}{II} CDq := \frac{qq}{pp} NDq - NDq$: & facta reductione $\frac{II-RR}{II} CDq = \frac{qq-pp}{pp} NDq$. Quo in proportionalitatem reſoluto, fiet

fiet $\frac{qq-pp}{pp} : \frac{II-RR}{II}$ ($::$ $CDq : NDq$) $::$ $BXq : BCq$. Q.E.D.

April 8. 1706.

XXVI.

Prob. (3.) SOLE ſphæram pellucidam illuſtrante radiorum ejus poſt unam reflexionem emergentium maximam ad axem inclinationem determinare. Sit BNK ſphæra propoſita: BQ diameter, ſive axis incidentibus radiis parallelus: AN aliquis ex



incidentibus: NF refractus ejus: FG reflexus: & GR denuo refractus: & quærendus erit maximus angulorum quos RG cum Axe BQ poteſt conficere.

In

In quem finem advertendum est quod eo solo in casu ubi RG maxime inclinatur ad BQ, radii ipsi AN vicinissimi possunt emergere paralleli ad RG. Nam in aliis casibus ex emergentibus radiis sibi vicinissimis alii magis, alii minus continuo inclinantur ad BQ; adeoque aliquantulum inclinantur ad se invicem.

Advertendum est præterea quod radii emergent paralleli qui conveniunt ad punctum reflexionis. Duc enim radium an, ipsi AN parallelum, & quam proximum. sitque ejus refractus nf: reflexus fg: ac iterum refractus gr. Et punctis F & f coincidentibus, cum Anguli NFn, & GFg sint æquales; & refractiones ad Nn, & Gg similes, emergentes Radii GR, & gr æque paralleli erunt ac incidentes NN, & an.

Quærendus est itaque radius AN, cujus refractus cum refracto vicinissimi radii an concurrit ad F. Et quidem per Corollarium 3. Problematis primi (demissis à centro sphæræ ad radios normalibus CD, & CE: positoque $I : R :: CD : CE$.) Si radii isti ad quodvis punctum Z concurrant, erit $I \times NF : R \times NP$ ($::$ $NZ : EZ$) $::$ $NF : EF$. puncto nempe Z ad ipsum F juxta hypothesin cadente, $:: 2 : 1$. Quare $I \times NF = 2R \times NP$. & $I : 2R :: NP : NF$. Datur itaque ratio NP, ad NF: & inde per Problema 2. dabitur punctum N. Scilicet ad verticem circuli ducatur tangens Bx, cujus quadratum, sit ad quadratum semidiametri BC, ut $4RR - II$, ad $II - RR$. & agatur CX. Hæc enim circulo occurret in N. & ex invento N cætera nullo negotio determinantur.

Corollarium (1.) Hinc fit $3RR : II - RR :: CNq : NDq$. Cum enim sit $4RR - II : II - RR :: BXq : BCq$. componendo erit $3RR : II - RR$ ($::$ $CXq : BCq$) $: CNq : NDq$.

Coroll. (2.) Est & $I : 2R :: ND : NE$. Nam supra fuit $I : 2R :: NP : NF$. Et ex his expeditior evadit Problematis resolutio.

Scho-

Scholium. Una cum maxima inclinatione radii RG, datur maximus arcuum FQ ad refractos NF terminatorum. Nam angulus FCQ, quem FQ subtendit, est æqualis angulo quem CF & AN comprehendunt: hoc est, æqualis dimidio anguli quem RG, & AN, vel BQ comprehendunt: & proinde arcuum FQ æque ac angulorum ab RG & BQ comprehensorum maximus est, qui radio AN in punctum jam inventum incidente definitur.

Prob. (4.) Sole sphæram pellucidam illustrante radiorum ejus post duas reflexiones emergentium minimam ad axem inclinationem determinare.

Sint AN & an Radii duo incidentes sibi quam proximi, qui post duas reflexiones in Ff, & Gg emergant secundum HS & hs. Et manifestum est quod in eo solo casu ubi acutus angulus, quem BQ & SH comprehendunt, minimus est, radii illi HS & hs possunt esse paralleli; uti supra de radiis GR & gr dictum fuit. Et ubi hoc accidit, radius etiam FG ad fg parallelus erit. Unde arcus Ff duplicatus ($=$ arcui $Ff + Gg =$ arcui $FG - fg =$ arcui $NF - nf$.) $=$ arcui $Nn - Ff$, adeoque arcus Ff triplicatus $=$ arcui Nn. Et cum NF dividatur in Z in ratione istorum arcuum, ut patet, erit $NZ = 3ZF$, seu $3EZ$. Cum itaque per Corollarium 3. Problematis primi sit $I \times NF : R \times NP :: NZ : EZ$. sive $:: 3 : 1$. erit $I \times NF = 3R \times NP$. sive $I : 3R :: NP : NF$. datur itaque ratio NP, ad NF: & inde per Problema 2. dabitur punctum N, ducendo nempe BX quæ circulum tangat in vertice B; & cujus quadratum, sit ad BC quadratum, ut $9RR - II$, ad $II - RR$: & agendo CX quæ occurret peripheriæ in N. Invento autem N, cætera facile determinantur.

Corollarium (1.) Hinc est $8RR : II - RR :: CNq : NDq$. Nam $9RR - II : II - RR :: BXq : BCq$. & componendo $8RR : II - RR$ ($::$ $CXq : BCq$) $:: CNq : NDq$.

Coroll.

Coroll. (2.) Eſt etiam $I : 3R :: ND : NE$. utpote cum ſupra fuerit $I : 3R :: NP : NF$.

Scholium. Ad eundem modum maxima radii KT poſt tres reflexiones emergentis inclinatio ad axem, juxta ac maximus arcuum QG inveſtigabitur. Scilicet in in eo caſu FG, & fg convenient ad G. eritque arcus Ff ($=$ arcui $Fg - fg$. $=$ arcui $NF - nf$.) $= Nn - Ff$. & inde arcus Ff duplicatus $=$ arcui Nn. & $NZ = 2ZF$. adeoque $4 : 1 :: NZ : EZ ::$ (per Corollarium 3. Problematis primi) $I \times NF : R \times NP ::$ ſive $I : 4R :: NP : NF$. Et proinde per Problema ſecundum $16RR - II : II - RR :: BXq : BCq$. Unde conſectatur eſſe $15RR : II - RR :: CNq : NDq$. Et $I : 4R :: ND : NE$.

Atque ita ſi radii poſt quatuor reflexiones emergentis inclinatio minima deſideretur, determinabis faciendo ut ſit $25RR - II : II - RR :: BXq : BCq$. Vel $24RR : II - RR :: CNq : NDq$. Et $I : 5R :: ND : NE$. Et ſic præterea in infinitum.

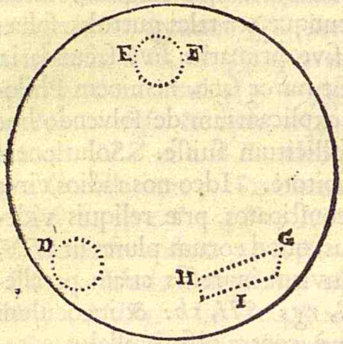
Scholium. Ex hac Cl. Newtoni limitum in Iride determinatione liceat mihi phænomenon quoddam, ſive potius phænomeni abſentiam, mihimet quondam ſatis difficilem & pene inſolubilem viſum, hic loci ſolvere. Quare nempe non appareat Iris circa ſolem ad diſtantiam graduum quaſi 26; ubi nempe radii per refractionem duplicem ſine ulla reflexione ad oculos pertingunt? Eſt enim ex calculo eo loci radiorum conſtipatio viſui afficiendo neceſſaria & ſufficiens. Quin & dubium adauget, quod videtur vero ſimile prima fronte Iridem hanc omnium maxime inſignem, & coloribus maxime intenſis ornatam, utpote duplici refractione, ſine ulla reflexorum radiorum jactura & imminutione oriundam, viſum iri. Sicut enim Iris primaria ſecundariâ eſt longe inſignior, eo quod ex duplici refractione & unica reflexione oriatur; dum ſecundaria ex duplici refractione, & duplici etiam reflexione pendeat; Sic ſane erat expectandum, ut Iris alia, hiſce duabus prior & præſtantior, colorum ſplendore tantum primariam noſtram exuperans quantum primaria illa ſecundariam excedere deprehendatur, expectandum erat, inquam, ut hujuſmodi Iris ad gradus quaſi 26. Solem undique cingeret, inſtar coronæ nobiliſſimæ, ubicunque aer tales guttulas ſphæricas haberet, quæ Iridi ſive primariæ ſive ſecundariæ generandæ ſatis eſſent. Et miror ſane, neminem Philoſophorum Iridis naturam explicantium de ſolvendo hoc Phænomeno ſatis obvio ſollicitum fuiſſe. Solutionem itaque hanc Noſtram accipitote. Ideo nos radios circa limites F & G affatim conſtipatos præ reliquis videmus & colores dignoſcimus, quod eorum plures ut AN, an parallelos ſphæram pluviam ingreſſis etiam parallelos regrediuntur; ut RG, rg: SH, sh: & ita oculum ſimul ingrediuntur: cum è contra niſi parallelos egrederentur, angulum aliqualem conſtituerent, & oculum ſimul ingredi non poſſent, utcunque ad punctum F vel G ſatis eſſent conferti & conſtipati. Unde cum radii circa punctum F egredientes non parallelos egrediantur, ſed angulum aliquem conſtituant, liquet eos oculum ſimul ingredi non poſſe, atque proinde Iridem exhibere non poſſe. *Q. E. S.*

LVI. Fluidi Mathematici homogenii, [hoc eſt, corporis cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter ſe,] quod in vaſe quocunque immoto clauditur, & undique comprimitur, partes omnes (ſepoſita condenſationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum conſideratione;) æqualiter premuntur undique; & abſque omni motu à preſſione illa orto permanent in locis ſuis.

CAS. (1.) In vaſe ſphærico claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique. Ejuſdem pars nulla ex illa preſſione movebitur, vel è loco ſuo deturbabitur. Nam ſi pars aliqua D moveatur, neceſſe eſt ut omnes ejuſmodi partes ad eandem à centro diſtantiam undique conſiſtentes ſimili motu ſimul moveantur: atque hoc adeo quia ſimilis & æqualis eſt omnium preſſio,

&

& motus omnis excluſus ſupponitur niſi qui à preſſione illa oriatur. Atqui non poſſunt omnes ad centrum propius accedere, niſi fluidum ad centrum condenſetur, contra hypotheſin. Non poſſunt longius ab eo recedere, niſi fluidum ad circumferentiam condenſetur, etiam contra hypotheſin. Non poſſunt ſervata ſua à centro diſtantia moveri in plagam contrariam. In plagas autem contrarias non poteſt pars eadem eodem tempore moveri. Ergo fluidi pars nulla hoc in caſu de loco ſuo movebitur. *Q. E. D.*



C AS. *(2.)* Fluidi hujus partes omnes ſphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *E F* pars ſphærica fluidi: & ſi hæc undique non prematur æqualiter, augeatur preſſio minor, uſque dum ipſa undique prematur æqualiter; & partes ejus per caſum primum [ad hujuſmodi ſphæram, æquali undique preſſione affectam, æque ac in vaſe rigido contentam pertinentem,] permanebunt in locis ſuis. Sed ante auctam preſſionem permanebant in locis ſuis per caſum eundem primum. [de fluido iſto enim hic agitur, cujus partes abſque omni motu permanere in locis ſuis ibi demonſtravimus.] & additione preſſionis novæ movebuntur de locis ſuis per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falſo dicebatur quod ſphæra *E F* non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

C AS. *(3.)* Præterea, Diverſarum partium ſphæricarum preſſio erit æqualis. Nam partes ſphæricæ ſe mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, propter motus reactionem actioni ſemper æqualem & contrariam. Sed & per caſum ſecundum partes ſphæricæ

quæ

quæcunque eadem vi undique premuntur. Partes igitur duæ quævis ſphæricæ non contiguæ eadem vi premuntur, quia pars ſphærica intermedia tangere poteſt utramque. *Q. E. D.*

C AS. (4.) Omnes fluidi hujuſce partes undique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi poſſunt à partibus ſphæricis in punctis quibuſcunque: & ibi partes illas ſphæricas æqualiter premunt, per caſum tertium: & propter reactionem actioni ubique æqualem viciſſim ab illis æqualiter premuntur. *Q. E. D.*

C AS. (5.) Cum igitur fluidi hujuſce pars quælibet *GHI* in fluido reliquo tanquam in vaſe claudatur, & undique prematur æqualiter; partes autem ejus ſe mutuo æqualiter premant & quieſcant inter ſe manifeſtum eſt quod fluidi cujuſcunque *GHI* quod undique premitur æqualiter partes omnes ſe mutuo premunt æqualiter, & quieſcunt inter ſe. *Q. E. D.*

C AS. (6.) Igitur ſi fluidum illud in vaſe non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem preſſioni fortiori; per definitionem fluiditatis.

C AS. (7.) Ideoque in vaſe rigido fluidum non ſuſtinebit preſſionem fortiorem ex uno latere quam ex alio: ſed eidem cedet: idque in momento temporis, quia latus vaſis rigidum non perſequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppoſitum; & ſic preſſio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum quam primum à parte magis preſſa recedere conatur, inhibetur per reſiſtentiam vaſis ad latus oppoſitum, reducetur preſſio undique ad æqualitatem in momento temporis, abſque motu locali; & ſubinde partes fluidi per caſum quintum ſe mutuo prement æqualiter, & quieſcent inter ſe. *Q. E. D.*

Corollarium. Hinc motus partium fluidi hujuſmodi inter ſe per preſſionem fluido ubivis in externa ſuperficie illatam mutari non poſſunt, niſi quatenus aut figura ſuperficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intenſius vel remiſſius ſeſe premendo difficilius vel facilius labuntur inter ſe.

R *Coroll.*

Coroll. (2.) Cum autem fluidi hujusmodi Mathematici definitio & affectiones cum natura & phænomenis fluidorum naturalium maxime congruere videantur, æquum est ut casuum horum demonstrationes fluidis nostris naturalibus, aquæ præsertim, & consimilibus applicentur. Unde liquebit partium fluidi internarum quietem inter se, fluiditatis naturæ nullo modo repugnare: & motum omnem partium fluidorum inter se calori, fermentationi, vel causis aliis extrinsecis acceptum potius esse referendum, quam ipsi fluiditatis naturæ. Si enim partes fluidi sint vel sphæricæ, vel sphæroides, & perfecte politæ; ita ut nunquam inter se connecti possint, sed potius se invicem in punctis physicis solummodo tangant, congeries hujusmodi particularum corpora component qualia nos *Fluida* dicimus; & qualium nos genera plura in rerum natura observamus; etiamsi particulæ ipsæ quiescant. Fluidum ergo ex partibus admodum *mobilibus*, non autem revera necessario *motis* constare videtur.

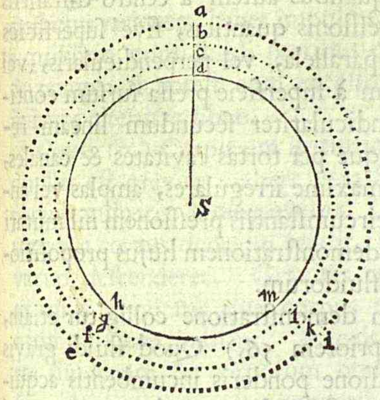
Junii 2°. 1706.

XXVII.

LVII. SI fluidi sphærici, & æqualibus à centro distantiis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gravitent, sustinet fundum pondus Cylindri cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.

Sit *dhm* superficies fundi, & *aei* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *bfk*, *cgl* distinguantur fluidum in Orbes concentricos, æqualiter crassos, & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem Orbis cujusque, & *æquales* esse actiones in *æquales partes* superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *aei* vi simplici

plici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis supremi partes, & superficies secunda *bfk*, (per Prop. 56.) premuntur. Premitur præterea superficies secunda *bfk* vi propriæ gravitatis, quæ vi priori addita facit pressionem duplam. Hac pressione & insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione tripla urgetur superficies tertia, *cgl* Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta; quintupla quinta; & sic deinceps.



Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium, hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum, (si modo Orbium augeatur numerus, & minuatur crassitudo in infinitum; sic ut actio gravitatis à superficie infima ad supremam continua reddatur, ;) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus Cylindri cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis. *Q. E. D.*

Et simili argumentatione patet Propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quavis assignata distantiæ à centro; ut & ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Fundum igitur non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere; sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in hac Propositione describitur: pondere reliquo à fluidi figura fornicata sustentato.

Coroll. (2.) Si sphæra integra ad centrum usque ex hujusmodi fluido constet, centrum nullum pondus sustinebit; pondere universo à fluidi figura fornicata, vel potius in hoc casu figura sphærica, sustentato.

Coroll. (3.) In æqualibus autem à centro distantiis eadem semper est pressionis quantitas, sive superficies pressa sit horizonti parallela, vel perpendicularis, vel obliqua: sive fluidum à superficie pressa sursum continuatum surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpat oblique per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maxime irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur applicando demonstrationem hujus propositionis ad casus singulos fluidorum.

Coroll. (4.) Eadem demonstratione colligitur etiam, (per Propositionem priorem 56,) Quod fluidi gravis partes nullum ex pressione ponderis incumbentis acquirunt motum inter se; si modo excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Coroll. (5.) Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod nequit condensari, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum; non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphæricum est, manebit sphæricum, non obstante pressione. Si quadratum est, manebit quadratum; idque sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido libere innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi: & par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ, & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum, servato pondere, liquesceret, & indueret formam fluidi, hoc, si prius ascenderet, vel descenderet, vel ex pressione figuram novam induceret, etiam nunc ascenderet vel descenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus, cæteræque motuum causæ permanent. Atqui per casum 5. Prop. prioris, jam quiesceret, & figuram retineret: Ergo & prius.

Coroll. (6.) Proinde Corpus quod specifice gravius est quam fluidum sibi contiguum subsidebit; & quod specifice levius est ascendet, motumqne & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Nam excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, alias in æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; & comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Coroll. (7.) Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est gravitas: altera vera & *absoluta*; altera apparens, vulgaris, & *comparativa*. Gravitas *absoluta* est vis tota qua corpus deorsum tendit, sive qua corpus in loco vacuo descenderet. Gravitas relativa & vulgaris est excessus gravitatis qua corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis, ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet: & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur; aliunde enim derivari non potest. Alterius generis gravitate, quæ nempe apparens, vulgaris & *comparativa* appellari potest, corpora non gravitant in propriis locis, seu in fluidis suis respective immersa; id est, inter se collata non *prægravant*, sed mutuos ad descendendum conatus impedientia permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent: uti corpora quævis gravia intra sphæram concavam posita ex æqualitate gravitationis undique versum nullo modo gravitare videntur, uti olim observatum. Sic sane quæ in aere sunt, & non prægravant, sive non omnino in aere descendunt, uti nubes & vapores, vulgus subinde gravia non judicat. Quæ prægravant, sive in aere descendunt, uti grando, & guttæ pluviæ, ea vulgus gravia judicat; quatenus ab aeris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quam excessus verorum ponderum supra pondus aeris. Unde & vulgo dicuntur levia quæ ſunt minus gravia, aerique prægravanti cedendo ſuperiora petunt. Comparative levia ſunt, non abſolute & vere; quia deſcendunt in vacuo. Sic & in aqua corpora quæ ob majorem vel minorem gravitatem deſcendunt vel aſcendunt ſunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens eſt exceſſus vel defectus quo vera eorum gravitas vel ſuperat gravitatem aquæ, vel ab ea ſuperatur. Quæ vero nec prægravando deſcendunt, nec prægravanti cedendo aſcendunt; etiamſi veris ſuis ponderibus adaugeant pondus totius; comparative tamen & in ſenſu vulgi, [imo & in ſenſu Philoſophorum plerorumque ante ſeculum hodiernum] non gravitant in aqua. Nam ſimilis eſt horum caſuum demonſtratio.

Coroll. (8.) Quæ de gravitate, ſive vi illa centripeta qua gravia terreſtria centrum terræ petunt, in ratione aut abſoluta, aut diſtantiarum reciproca duplicata; obtinere debent in aliis quibuſunque viribus centripetis, & abſolutis, & ſecundum legem quamcunque diſtantiæ auctæ aut diminutæ auctis aut diminutis; ſi modo hujuſmodi leges alicubi reperiantur.

Coroll. (9.) Proinde, ſi medium in quo corpus aliquod movetur urgeatur vel à gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius, differentia virium eſt vis illa motrix quam in præcedentibus ut vim centripetam conſideravimus. Sin corpus à vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Coroll. (10.) Cum autem fluida premendo corpora incluſa non mutent eorum figuras externas, patet inſuper per Propoſitionis prioris Corollaria quod non mutabunt ſitum partium internarum inter ſe. Proindeque ſi animalia immergantur, & ſenſatio omnis à motu partium oriatur; nec lædent corpora immerſa, nec ſenſationem ullam excitabunt, niſi quatenus hæc corpora à compreſſione omnifariam undique condenſari poſſunt. Et par eſt ratio cujuſcunque corporum ſyſtematis, fluido comprimente circumdati. Syſtematis partes omnes iiſdem agitabuntur motibus, ac ſi in vacuo conſtituerentur; & ſolam retinerent gravitatem ſuam comparativam: niſi quatenus fluidum vel motibus earum reſiſtat, vel ad eaſdem compreſſione conglutinandas requiratur.

LVIII. Fluida non deſcendentia ſe invicem, & tam immerſa corpora, quam continentia, data baſi pro ratione altitudinis perpendicularis, non autem pro ratione quantitatis materiæ premunt. Hoc eſt, preſſio cylindri aquæ v. g. altitudinis quadrupedalis, ubi circuli cylindricæ columnæ area eſt unius tantum pollicis quadrati, æqualis eſt preſſioni cylindri cujuſvis aquæ altitudinis quadrupedalis ubi circuli cylindricæ columnæ area eſt centum vel mille pollicum quadratorum, & ſic ubique: nimirum ſi baſis aquea cum aqua in tubo contenta communicans, ſit utroque in caſu æqualis.

Hæc eſt notiſſima hydroſtaticæ ſcientiæ regula, per experimenta ſæpius reperta; vixdum autem, uti opinor, phyſice aut mathematice demonſtrata; quam hoc modo demonſtrare conabor. Notum eſt ex primis motuum phyſicorum elementis quantitatem virium motricium, ſive effectuum iiſdem reſpondentium ex materiæ motæ quantitate in velocitatem ducta prorſus oriri: & proinde eandem fore preſſionem ex qualibet materiæ prementis quantitate modo ejuſdem velocitas ſit ſemper & ubique materiæ quantitati reciproce proportionalis. Notum eſt etiam ſtateræ, vectis, libræ, & hujuſmodi inſtrumentorum mechanicorum vires ex hujuſmodi materiæ & velocitatis combinatione reciproca derivari; & datum pondus à vi ſeu preſſione data quantulacunque moveri poſſe, ſi modo machina eo modo ponderi ſimul & preſſioni admoveatur, ut diſtantiæ ab hypomochlio, & proinde velocitates ponderis & preſſionis ſint ex neceſſitate motuum ſibi invicem reciproce proportionales. Sic ſane unicum pondo ad diſtantiam quatuor pedum ab hypomochlio tantundem valet ac quatuor pondo ad diſtantiam unius pedis; eo quod ex neceſſitate motuum per vectem vel ſtateram conjunctorum fieri non poteſt quin pondus unicum cum velocitate, velocitatis alterius ponderis quadrupla moveatur: atque adeo æqualem uim & pares effectus ut *inter movendum* habeat eſt neceſſum. *Inter movendum*, inquam, minus æquiponderat ſive æquivalet majori: nec ſane aliter: uti perperam plerique exiſtimare videntur. *Si quando* enim quieſcit machina, palam eſt gravitatem, ſive preſſionem, ſive vim majoris eſſe revera gravitatis, preſſionis, & vis minoris omnino quadruplam; nec ullum in eo caſu æquipondium expectandum. [*Si quando* inquam quieſcat machina. Nam ſi phyſice, aut ſaltem mathematice loquamur, nullum corpus omnino quieſcit, ſed ubi motuum celeritas tantilla eſt, ut à ſenſibus noſtris percipi nequeat, corpora quieſcere dicimus.] Itaque ubi area ſectionis cylindricæ aquæ eſt unius tantum pedis quadrati, deſcendit illa centuplo vel millecuplo velocius, quam ubi area iſta centuplo vel millecuplo major ſupponitur: atque id adeo quod aqua in vaſe contenta & ipſum quoque vas continens in aliquali motu ſemper ſunt poſita, neque unquam abſque omni motu quieſcere queunt. Alias, ut omnino exiſtimo, quieſcens aquæ columna centuplo vel millecuplo major, abſoluta ſua gravitate centuplo vel millecuplo majore prædita, aquam & vas quieſcentia pondere centuplo vel millecuplo premerent. Caſus enim hicce eſt ejuſdem penitus naturæ cum eo ſyphonis inverſi crurum admodum inæqualium; ubi ideo tantum fit æquilibrium, quod velocitates aſcenſus & deſcenſus aquæ in utroque canali ex natura ſyphonis ſint neceſſario quantitati aquæ reciproce proportionales.

Coroll. (1.) Premunt ergo fluida non pro quantitatis materiæ prementis, ſed altitudinum perpendicularium ratione.

Coroll. (2.) Proinde Orbis Ligneus ad fundum fere ſitulæ aqua plenæ demerſus ad ſummum emerget, non obſtante quod multo plus aquæ ſupra eundem quam infra reperiatur. Concavus enim ille aquæ cylindrulus cum aqua inferiore ad margines undique communicans eandem æque premit, & lignum æque ſuſtollit, ac ſi omnis ſitulæ aqua eundem premere & ſuſtollere potuiſſet.

Coroll. (3.) Nulla itaque modo opus eſt Principio Cl. Mori Hylarchico ad hoc effectum ſolvendum. Ex Mechanica enim motus lege jamjam demonſtrata aſcenſus orbis lignei neceſſario ſequitur.

Coroll. (4.) Sic ſe habent Fluida *non deſcendentia*; uti in Propoſitione aſſerui. Sin vas, cum fluido, & tubo, ex vi gravitatis omnium communi deſcendat, perit, opinor, preſſionis communicatio, & ceſſat effectus: ita tamen ut etiamnum ſecundum altitudinem æque ac in priori caſu preſſio effectum ſuum ſortiatur: ſive eodem modo premit, ubi maxima eſt aquæ columna, ac ubi minima; ejuſdem nimirum altitudinis; ita ut jam tandem in univerſum aſſerere liceat, Fluida ſecundum altitudines perpendiculares non ſecundum materiæ quantitatem omnino premere.

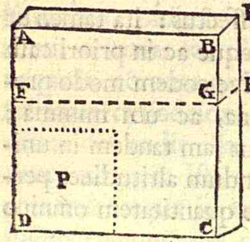
Novemb. 11°. 1706.

XXVIII.

LIX. SI fluidi ex particulis ſe mutuo fugientibus compoſiti denſitas ſit ut compreſſio, ita ut ubi vires comprimentes duplæ, quadruplæ, vel octuplæ ſunt, denſitates inde oriundæ ſint etiam duplæ, quadruplæ vel octuplæ, & ita in univerſum, Vires centrifugæ particularum ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum. Et vice verſa, Particulæ viribus quæ ſunt reciproce proportionales diſtantiis centrorum ſuorum ſe mutuo fugientes componunt fluidum elaſticum, cujus denſitas ſit compreſſioni proportionalis.

In-

Includi intelligatur Fluidum in ſpatio cubico *ACE*, dein compreſſione redigi in ſpatium cubicum minus *ace*. Et particularum ſimilem ſitum inter ſe in utroque ſpatio ob naturam fluiditatis obtinentium, diſtantiæ erunt ut Cuborum Latera *AB*, *ab*: & Medii denſitates reciproce ut ſpatia cubica continentia *AB* cub. & *ab* cub. In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP*, æquale quadrato cubi minoris *db*. Et ex hypotheſi preſſio qua quadratum *DP* urget fluidum incluſum, (ſive qua fluidum incluſum urget quadratum) erit ad preſſionem qua quadratum illud *db* urget fluidum incluſum, ut Medii denſitates ad invicem; hoc eſt, ut *ab* cub. ad *AB* cub. Sed preſſio qua quadratum *BD* urget fluidum incluſum, eſt ad preſſionem qua quadratum *DP* urget idem fluidum, ut quadratum *DB*, ad quadratum *DP*. hoc eſt, ut *ABq*, ad *abq*. Ergo ex æquo preſſio qua quadratum *DB* urget fluidum, eſt ad preſſionem qua quadratum *db* urget fluidum, ut *ab*, ad *AB*. ſive reciproce ut diſtantia particularum. Subtracta enim de ratione triplicata laterum *ab* & *AB*, ratione eorundem duplicata; reſtat ratio ſimplex laterum, ſive diſtantiæ particularum, preſſioni earundem in vas continens (ſive vaſis continentis in particulas) reciproce proportionalis. Exempli gratia: Eſto cubus major cubi minoris octuplus: ſive latus cubi majoris lateris cubi minoris duplum. Tum ſane denſitas fluidi in vaſe minore erit quoque denſitatis in majore octupla, ob eandem materiæ quantitatem in ſpatio octuplo



octuplo minore contentam. Et ex hypotheſi quod compreſſio in datum ſpatium exercita ſit in univerſum denſitati ad amuſſim proportionalis, erit integra compreſſio particularum ſive vires comprimentes eidem proportionales in cubo minore in ratione octupla compreſſionis ſive virium comprimentium in majore. Sed ſuperficies integra, qua fit compreſſio, vel ſuperficies quadrati cujuſvis in cubo minore, eſt ad ſuperficiem integram, vel ſuperficiem quadrati cujuſvis homologi in cubo majore, in ratione ſubquadrupla. Eſt ergo preſſio octupla cum preſſione altera earundem particularum in ſpatium quadruplo majus diſperſarum comparanda. In ſpatio itaque quadruplo minore eadem materiæ quantitas, ſive eædem fluidi particulæ preſſionem octuplam ſuſtinent, neceſſe itaque eſt ut quævis particula preſſionem duplo quam prius majorem ſuſtineat; ſive ut vires centrifugæ particularum ſint reciproce proportionales diſtantiis earundem. *Q.E.D.*

Sic ſane, ſi planis *FGH*, *fgh*, per media cuborum ductis diſtinguatur fluidum in duas partes: Hæ ſe mutuo prement iiſdem viribus quibus premuntur à planis *AC*, *ac*: hoc eſt, in proportione *ab*, ad *AB*. adeoque vires centrifugæ, quibus hæ preſſiones ſuſtinentur, ſunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum ſimilemque ſitum in utroque cubo vires quas particulæ omnes ſecundum plana *FGH*, *fgh* exercent in omnes, ſunt ut vires quas ſingulæ exercent in ſingulas. Ergo vires quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *FGH* in cubo majore, ſunt ad vires quas ſingulæ exercent in ſingulas ſecundum planum *fgh* in cubo minore, ut *ab*, ad *AB*: hoc eſt, uti jam demonſtravimus, reciproce ut diſtantiæ particularum ab invicem. *Q. E. D.*

Et vice verſa; ſi vires particularum ſingularum ſint reciproce ut diſtantiæ particularum, id eſt, reciproce ut cuborum latera *AB*, *ab*; ſummæ virium erunt in eadem ratione, & preſſiones quadratorum *DB*, *db* ut ſummæ

summæ virium; & pressio quadrati DP, ad pressionem quadrati DB, ut abq, ad ABq: Et ex æquo, pressio quadrati DP, ad pressionem quadrati db, ut ab cub. ad AB cub. Ratione enim simplici, cum ratione duplicata composita emergit ratio triplicata. ita ut vis compressionis in uno, sit ad vim compressionis in altero, ut densitas fluidi ad densitatem, directe. Q.E.D.

Coroll. (1.) Cum itaque per experimenta constet aeris nostri per vices compressi & rarefacti densitatem esse viribus comprimentibus, sive compressioni ubique proportionalem; admodum vero simile videtur aerem ex particulis se mutuo in inversa distantiarum ratione fugientibus vel fugantibus constare. Etsi enim hæc vis quasi centrifuga vi universali centripetæ, sive gravitati, è diametro adversa cum eadem consistere non posse videatur; attamen fieri potest ut præter generalem illam gravitatis legem materiam omnem qua materiam attinentem, sine ullo ad ejusdem figuras, formas, circumstantias, aut motus respectu; aliæ sint leges & vires naturales sive attrahendi sive fugandi ad speciales particularum materiæ figuras, formas, circumstantias, aut motus pertinentes, & peculiari modo iisdem alligatæ, è quibus haud pauca è difficilioribus naturæ phænomenis dependere possunt. Sic sane verosimile videtur aeris particulas cum peculiare illud temperamentum, figuram, aut formam acquisiverint, unde tale fluidum elasticum componere aptæ sunt, quale nos Aerem dicimus, novæ huic & speciali legi sive vi centrifugæ, hujusmodi particulas easque solas attinenti immediate subjici. Jure enim suspicatur Autor noster perspicacissimus pleraque specialia naturæ Phænomena ex viribus hujusmodi pendere posse, quibus corporum particulæ, per causas nondum cognitas, vel in se mutuo impelluntur, & secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur, & recedunt; quibus viribus ignotis Philosophi hactenus Naturam frustra tentarunt: & quibus proinde gradatim jam detectis vel detegendis spes est

est non exigua eadem phænomena gradatim patefacienda, & nos ad causas si non ultimas, proximas tamen, & tam calculo Geometrico quam usibus humanis accommodatas maxime sensim accessuros.

Scholium. Intelligenda vero sunt priora circa vires aeris & hujusmodi fluidorum centrifugas de hujusmodi solum viribus quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur: qualium exempla habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur fere in sui generis corporibus, sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à magnete, quam à lamina trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugent alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujusmodi particulis componentur fluida, de quibus actum est in hac Propositione.

Coroll. (2.) Pari fere ratione præter vim gravitatis universalem aliæ esse videntur vires attractivæ peculiares particulis quorundam corporum aut peculiares distantiis perexiguis aliisve circumstantiis corporum particularium, unde phænomena alias miranda consequi debent. Sic sane ex hujusmodi attractione oriri videtur radiorum lucis in corporibus pellucidis aut circa angulos opacorum refractio vel inflexio; utpote quæ ante contactum accidant, & in distantia minori fortius attrahunt; uti Auctor noster in egregio suo de Optice tractatu observavit. Nec aliunde, uti idem in Latina ejusdem operis editione notat, oriri videtur sphærica illa guttularum & argenti vivi & consimilium fluidorum figura. Particulæ enim ubi ad exiguam distantiam collocantur, se fortiter attrahunt; atque quo modo ex æquali partium in planetis versus se invicem gravitate, sphærica planetarum figura necessario oritur; eodem etiam ex æquali particularum aquæ vel argenti vivi sibi mutuo admodum approximantium vi centripeta æquum

æquum eſt ut guttularum figuram ſphæricam derivemus: præſertim dum haſce particulas quam citiſſime & quam accuratiſſime in ſphærulas iſtas coire videmus; uti ex notiſſimis Iridis phænomenis, inſtantaneæ earundem & accuratiſſimæ in ſphærulas conformationi in ſolidum debitis, facile diſcere licebit.. Neque ex diverſa cauſa forſan nonnulla alia fluidorum phænomena, ſolutu alias difficillima, pendere ſunt cenſenda. Sed hæc Obiter. Ad ſeriem incæptam jam revertor.

LX. Quantitas materiæ in corporibus univerſis eorum ponderi eſt accuratiſſime proportionalis.

Sublata enim aeris reſiſtentia, uti ſit in vacuo Boyliano, omnia corpora, ſive ſolidiſſima, & graviſſima; ſive rariſſima, & leviſſima videantur, communi & data quadam velocitate ſimul deſcendunt, ubi ſimul ab eadem altitudine demittuntur. Corpora etiam pendula quæcunque, quorum centra oſcillationis à ſuſpenſionis centro æqualiter diſtant, etiam in aere, ſi arcum ejuſdem vel æqualis cycloidis æqualem, vel etiam inæqualem ſimul oſcillari incipiant, eunt ſimul redeuntque diutiſſime: & ubi arcus æqualis deſcribitur, eadem omnino celeritate moventur, ſive dura ſint, ſive mollia; ſive ſolida ſint, ſive liquida; ſive magna ſint, ſive parva; cujuſcunque demum formæ ſint, vel figuræ. Unde conſtat vim moventem eſſe ubique in eadem ratione cum materia movenda: ſive vim gravitatis corpora omnia æqualiter afficere: in eadem nempe à telluris centro diſtantia. Nam quod magna corpora cæteris paribus in aere paulo velocius deſcendunt, motuſque ſuos paulo diutius conſervant, inde eſt, quod *ſuperficies* corporum, ſecundum quam ſit aeris vel medii cujuſvis reſiſtentia in corporibus ſimilibus ſit tantum in diametrorum vel laterum ſimilium ratione duplicata: cum eorundem *ſoliditas*, ſecundum quam æſtimanda eſt & materiæ quantitas, & vis gravitatis, ſit in diametrorum vel laterum eorundem ratione triplicata. Sic ſi diameter ſphæræ cujuſvis lapideæ ſit alterius ſphæræ ex eadem

eadem materia tripla; erit ejuſdem ſuperficies, & per conſequens, data velocitate, ejuſdem reſiſtentia in aere, alterius tantum noncupla, ubi ſoliditas, & materiæ quantitas, eique proportionalis ejuſdem gravitas ſit alterius plane vigecupla ſeptupla. Unde mirum non eſt, reſiſtentiam pro ratione gravitatis in ſphæra majore tanto minorem, eandem ſphæram in ratione minore afficere & retardare, quam ſphæram minorem afficit & retardat. Quod vero tanta ſit ponderis in aere v. g. inter aurum & paleam apparens velocitatis deſcenſus differentia, illa non ſolum à ſuperficierum ſed præcipue à gravitatis ſpecificæ differentia qua aurum longe magis quam palea exuperat aeris ipſius gravitatem dependet: exceſſus autem gravitatis ſpecificæ corporis in aere deſcendentis ſupra gravitatem ipſius aeris ſpecificam ea ſola eſt gravitas quæ corpus in aere poſitum ad deſcendendum cogit, uti nuperrime oſtendimus. Unde mirum non eſt, quod aurum longe quam palea velocius in aere deſcendat, licet in vacuo utraque pari ſemper velocitate deſcendere obſerventur.

Scholium. Si ipſa velocitas corporum omnium in vacuo apud telluris ſuperficiem in notis menſuris requiratur, Sciendum, tam per corporum perpendiculariter deſcendentium obſervationem directam, quam per pendulorum corporum oſcillationes & calculum inde initum à Cl. Hugenio, conſentientibus Geometris, illam ea quantitate ſtatui qua ſcrupulo horario ſecundo corpora per pedes Pariſienſes $15\frac{1}{12}$. ſive pedes Anglicos 16⌊1. hoc eſt, pedes ſedecim & pollicem quaſi unum deſcendunt: aut qua horæ ſpatio per pedes Anglicos 208.656.000. hoc eſt, milliariorum Anglicorum fere quadraginta millia deſcenderent: uti ex eodem calculo corporum in duplicata temporis ratione deſcendentium illico conſtare poterit.

LXI. Corporum fune pendulorum quibus reſiſtitur in ipſa ſolum velocitatis ratione, oſcillationes in Cycloide, ſive arcus deſcripti ſint majores ſive minores, ſunt ubique Iſochronæ. Quod

Quod vera ſit propoſitio in loco vacuo, ubi nulla eſt medii reſiſtentia, olim demonſtravimus. Et ſi reſiſtentia ſit ut velocitas, ſive ut arcus ubique deſcribendus, velocitas reliqua erit quoque in eadem ratione: & proinde oſcillandi tempus æqualiter retardabitur utrinque, & oſcillationes etiamnum manebunt inter ſe, ut prius, Iſochronæ. *Q. E. D.*

Coroll. Media itaque reſiſtentia tempus oſcillandi majus requirunt quam vacuum ſpatium: & horologia oſcillatoria citius aliquantulum vibrationes ſuas æquales in vacuo quam in aere peragunt, conſentiente experientia. Reſiſtentia enim aufert nonnullam gravitatis motricis partem; & proinde effectum ejus ſive motus velocitatem ſufflaminat.

Nov. 25. 1706.

XXIX.

LXII. Corporibus inæquali velocitate in fluido ſubtiliſſimo motis reſiſtitur à fludio in duplicata velocitatis ratione.

Cum enim Corpus velocius motum & majori medii quantitati in ratione velocitatis, & cuique medii parti æquali, cum impetu majori in eadem velocitatis ratione occurrat, reſiſtentia tota ex cauſa utraque conjuncta oriunda neceſſario erit in ejuſdem velocitatis ratione duplicata. Cui quidem rationi duplicatæ experimenta non male conſentiunt. Licet partium in aere cedentium lubricitatis defectus ab elaſticitate ortus, & nonnulla plurimorum fluidorum partium cohæſio iſtam rationem aliquantulum turbare debeant.

Coroll. (1.) Cum itaque corporum fune pendulorum in Cycloide, ubi reſiſtentia eſſet in ſimplici velocitatis ratione oſcillationes eſſent Iſochronæ, Reſiſtentia autem in aere & hujuſmodi mediis ſit fere in velocitatis ratione duplicata, Liquet oſcillationum tempora etiam in Cycloide, & multo etiam magis in Circulo, per aerem non eſſe in diverſis arcubus penitus æqualia; ſed in majoribus, ob reſiſtentiam nimiam, paulo majora.

Coroll. (2.) Hinc ſequitur ad æqualitatem temporum in horologiis oſcillatoriis optime obtinendam opus eſſe, ut pendula eoſdem arcus ſemper deſcribant: alias ob inæqualem velocitatem, ubi arcus majores deſcritur, tardius; ubi minores, celerius juſto fiet motus. Unde etiam cauſa oſtendi poteſt, præter automatorum ſtructuram minus perfectam, quare Horologia majora in navi collocata & huc illuc jactata non adeo accurate ac domi manentia & in quiete poſita horas demonſtrant. Ob concuſſionem enim frequentem arcus nunc majores, nunc minores deſcribuntur: & inde temporis inæqualitas nonnulla neceſſario conſequitur.

Coroll. (3.) Oſcillationes breviores ſive in Cycloide ſive in Circulo ſunt magis iſochronæ quam longiores; ob minorem nempe medii perturbantis reſiſtentiam: & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in medio non reſiſtente quam proxime: ubi etiam Cyclois & Circulus plane coincidunt, ſive ſe mutuo tangunt: & oſcillationes in circulo vix differunt ab iis quæ fiunt in cycloide. Unde etiam horologia oſcillatoria quæ pendulo longiore gubernantur accuratius multo horas indicant quam ea quæ breviori alligantur; propterea quod arcus longe minores ab iis deſcribuntur. Earum vero oſcillationum quæ in majoribus arcubus fiunt tempora ſunt paulo majora, eo quod reſiſtentia corporis, qua tempus producitur, major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, (ob majorem nempe velocitatem,) quam reſiſtentia in aſcenſu ſubſequenti, qua tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum, tam brevium, quam longarum nonnihil produci videtur per motum medii. Nam Corporibus tardeſcentibus paulo minus reſiſtitur pro ratione velocitatis, & corporibus accele-

 ratis

ratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia medium eo quem à corporibus accepit motu in eandem plagam pergendo in priore casu magis agitatur, in posteriore minus, ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus, quam pro ratione velocitatis duplicata; & ex utraque causa tempus producitur.

LXIII. Velocitas prima fluidi cujusque subtilissimi per foramen effluentis ea est quam corpora acquirerent descendendo ab altitudine altitudinis ejusdem supra foramen perpendicularis dimidia: & est ubique ad diversas altitudines in subduplicata earundem altitudinum ratione.

Si vas impleatur aqua, & in fundo perforetur, ut aqua per foramen defluat, manifestum est quod vas sustinebit pondus aquæ totius dempto pondere partis istius quod foramini perpendiculariter imminet. Nam si foramen obstaculo aliquo occluderetur, obstaculum sustineret pondus aquæ sibi perpendiculariter incumbentis, & fundum vasis sustineret pondus aquæ reliquæ. Sublato autem obstaculo fundum vasis eadem aquæ pressione, eodemque ipsius pondere urgebitur ac prius; & pondus quod obstaculum sustinebat, cum jam non sustineatur, faciet ut aqua descendat & per formam defluat. Unde consequens est quod motus aquæ totius effluentis is erit quem pondus aquæ foramini perpendiculariter incumbentis generare possit. Nam aquæ particula unaquæque pondere suo, quatenus non impeditur, descendit; idque motu uniformiter accelerato; & quatenus impeditur urgebit obstaculum. Obstaculum illud vel vasis est fundum, vel aqua inferior jamjam effluxura; & propterea ponderis pars illa quam vasis fundum non sustinet, urgebit aquam defluentem, & motum sibi proportionalem generabit. Et cum vis integra premens nil aliud sit quam vis gravitatis propria cujusque particulæ, vel supremæ superficiei fluidi superaddita vi propriæ cujusque inferioris particulæ, vel quarumcunque inferiorum superficierum æqualium per totam altitudinem perpendicularum æqualiter gravitantium; sive velocitas genita summa velocitatum singularum superficierum, vel velocitas corporum à quiete descendentium æquabiliter aucta: Et cum etiam velocitas Corporis à dimidia altitudine descendentis sit ea quacum integra altitudo eodem tempore motu uniformi describi deberet, & ab eodem gravitatis propriæ exordio incipiens æquabiliter aucta: Liquet eandem velocitatem utrobique generari. Quia vero velocitates corporum descendentium sunt ubique in subduplicata ratione altitudinum, Erunt & velocitates effluentium, iisdem æquales, in eadem ratione subduplicata. *Q.E.D.*

Coroll. (1.) Quantitas itaque aquæ effluentis quo tempore corpus cadendo describere posset altitudinem dimidiam, æqualis erit columnæ aquæ totius foramini perpendiculariter imminentis.

Coroll. (2.) Cum autem aqua effluens motu suo primo sursum verso perpendiculariter surgeret ad dimidiam altitudinem aquæ foramini incumbentis, consequens est quod si egrediatur oblique per canalem in latus vasis, describere incipiet in spatiis non resistentibus Parabolam, cujus latus rectum ad verticem ubi incipit curvatura, vel desinit canalis, pertinens, est dupla altitudo aquæ in vase supra canalis orificium; & cujus diameter horizonti perpendicularis ab orificio illo ducitur: atque ordinatim applicatæ parallelæ sunt tangenti per canalis axem ductæ.

Coroll. (3.) Data ergo parabola ab aqua effluente descripta, datur una aquæ in vase contentæ altitudo supra foramen perpendicularis; nempe lateris recti ad verticem egressus pertinentis dimidia.

Coroll. (4.) Si aqua per canalem horizonti parallelum egrediatur, quoniam fundum vasis integrum est, & eadem aquæ incumbentis pressione ubique urgetur, ac si aqua non efflueret; vas sustinebit pondus aquæ totius, non obstante effluxu: Sed latus vasis, de quo effluit, non sustinebit pressionem illam omnem quam sustineret si aqua non efflueret. Tolletur enim pressio partis illius

lius ubi perforatur, quæ quidem pressio, ob naturam aquæ fluidam, æqualis est ponderi columnæ aquæ cujus basis foramini æquatur, & altitudo eadem est quæ aquæ totius supra foramen. Et Propterea, si vas ad modum corporis penduli filo prælongo à clavo suspendatur, hoc si aqua in plagam quamvis secundum lineam horizontalem effluat, recedet semper à perpendiculo in plagam contrariam. Et par est ratio, ut hoc obiter notetur, motus pilarum quæ pulvere tormentario madefacto implentur, & materia in flammam per foramen paulatim expirante recedunt à regione flammæ, & in partem contrariam cum impetu feruntur.

Coroll. (5.) Eadem est velocitas exeuntis fluidi in aqua, & in aere, & aliis quibuscunque, modo subtilissima sint, ubi altitudo perpendicularis est eadem, uti ex præcedente demonstratione liquet.

Coroll. (6.) Et si fluidum sit elasticum, & Undulationes sive tremores suos ad distans propagare possit, Undulationes vel Tremores istos eadem velocitate propagabit qua primo efflueret ex altitudine Fluidi Uniformis, cujus pondus fluidum subjectum comprimere posset. Tensio enim sive elaterium isti pressioni sive velocitati incipienti proportionale est ipsum undulationis vel tremoris vehiculum: & proinde undulationes vel tremores istos cum velocitate propria non potest non transferre & propagare.

Coroll. (7.) Unde cum pondera specifica aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad 14. circiter; & ubi Mercurius in Barometro altitudinem attingit digitorum Anglicorum 30. pondus elastici Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem, ex collatis plurimis observatis, ut 1 ad 1000 circiter; erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 14000 circiter. Proinde, cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere posset, erit 42000 digitorum, seu pedum Anglicorum 35000. Corpora autem pedes 17500;

17500; hoc est, altitudinem prioris dimidiam; spatio 33 quasi minutorum secundorum in vacuo descendunt. Unde Undulationes vel Tremores aeris isti, quos sonorum vehicula statuimus, ea se propagabunt velocitate ut spatio 33 scrupulorum secundorum pedes Anglicos 35000 circiter conficiant, & ex æquabili propagationis tenore scrupulo secundo unico 1060 pedes circiter; sive scrupulo primo integro 63640 circiter: quæ quidem Sonorum velocitas cùm experimentis probe congruit. Scribit enim Mersennus in Balisticæ suæ *Prop.* 35. se factis Experimentis invenisse quod sonus minutis quinque secundis hexapedas Gallicas 1150, (id est pedes Gallicos 6900) percurrat. Unde cum pes Gallicus, sit ad Anglicum, ut 1068, ad 1000; debebit sonus tempore minuti unius secundi pedes Anglicos 1474 conficere. Scribit etiam idem Mersennus Robervallum Geometram Clarissimum in Obsidione Theodonis observasse Tormentorum fragorem exauditum esse post 13 vel 14 ab igne viso minuta secunda; cum tamen vix dimidiam Leucam ab illis Tormentis abfuerit. Continet Leuca Gallica hexapedas 2500; adeoque sonus tempore 13 vel 14. secundorum ex observatione Robervalli confecit pedes Parisienses 7500, ac tempore unius secundi pedes Parisienses 560, Anglicos vero 600 circiter. Multum differunt hæ observationes ab invicem; & computus noster medium locum tenet. In Porticu Collegii SS. Trinitatis apud nos pedes 208 longa, sonus ex ipsius Newtoni observatis in termino alterutro excitatus quaterno recursu Echo quadruplicem efficit, & singulis soni recursibus pendulum quasi sex vel septem digitorum longitudinis oscillabatur; ad priorem soni recursum eundo, & ad posteriorem redeundo. Longitudo penduli satis accurate definiri non potuit: sed longitudine quatuor digitorum oscillationes nimis celeres, ea novem digitorum nimis tardæ videbantur. Unde sonus eundo & redeundo confecit pedes 416 minore tempore quam pendulum digitorum no-

novem, & majore quam pendulum digitorum quatuor oscillatur; id est, minore tempore quam $28\frac{1}{4}$ minutorum tertiorum; & majore quam $19\frac{1}{6}$. & propterea tempore minuti unius secundi conficit pedes Anglicos plures quam 866, & pauciores quam 1272; atque adeo velocior est quam pro observatione Robervalli, ac tardior quam pro observatione Mersenni. Quin etiam accuratioribus postea observationibus definivit Newtonus quod longitudo penduli major esse deberet quam digitorum quinque cum semisse, & minor quam digitorum octo; adeoque quod sonus tempore minuti unius secundi confecit pedes Anglicos plures quam 920, & pauciores quam 1085. Igitur motus sonorum secundum calculum geometricum superius allatum inter hos limites consistens, & ad numerum majorem accedens propius, sicut pleraque aliorum experimenta persuadent, optime cum Phænomenis quadrat.

Coroll. (8.) Si densitas aeris augeatur aut minuatur, sonus ipse sive fragoris violentia in eadem ratione augebitur aut minuetur; quod cum experimentis sonorum in aere rarefacto & condensato factis probe congruit.

Coroll. (9.) Unde sequitur, sonos in altissimorum montium cacuminibus, ubi aer rarior est, minores esse, & tardiores, quam in vallibus.

Coroll. (10.) Si Ventus cum motu aeris conspiret, sonitus, vel fragor, sive pulsuum violentia augebitur, & longius perget; utpote ex *summa* motuum ipsius soni & venti conflata. Si Ventus eidem motui repugnet, sonitus minuetur, & citius sistetur; utpote ex *differentia* motuum eorundem solummodo oriundus. Salva semper ipsius soni propagati velocitate superius designata. Sonus enim non ex motu aeris continuo, sed ex pulsibus ejusdem undarum more per vibrationes sive itus reditusque vicibus alternis se invicem sequentes propagatis dependet; uti statim ostendetur. Et qualiscunque sit fragoris differentia, à differenti corporis sonori vel venti statu orta, manent tamen aeris densitas & elaterium; & inde manebit quoque eorum effectus, sive sonorum propagatorum velocitas.

Coroll. (11.) Eadem itaque fere velocitate Soni qualescunque, sive magni sint, sive parvi, per aerem densitate datum propagantur: Uti ostendunt quoque ea de re experimenta à Philosophis capta.

Coroll. (12.) Data itaque jam sonorum ubicunque locorum velocitate, ea nempe qua 1060 pedes Anglicos scrupulo secundo conficiunt, Ex dato sonorum temporis intervallo datur una distantiæ corporis sonori intervallum. Sic sane si inter Bombardæ ignem visum, auditumque sonum decem minuta secunda pertransire observemus; liquet bombardam à nobis 10600 pedes, sive mille passus duos circiter distare. Pariter si inter fulgur visum & tonitru auditum intercedant minuta secunda quinque; liquet nubes istas unde erumpunt à spectatore 5300 pedes, sive quasi millepassum unicum distare.

Scholium. Notandum autem hic loci, me velocitatem sonorum paulo quam ipse Auctor majorem ponere; utpote quæ, ut opinor, tum calculo geometrico, tum experimentis plerisque accuratius congruit.

Decemb. 2°. 1706.

XXX.

LXIV. RESISTENTIA Fluidorum ut in diversis velocitatibus est in ratione duplicata velocitatis; ita in diversis densitatibus data velocitate in ipsa densitatis ratione directa: datis autem densitate & velocitate in diametrorum ratione duplicata: atque adeo in universum Resistentia est in ratione composita ex duplicata ratione velocitatis; ex duplicata ratione diametrorum; & ex simplici ratione densitatis medii directe.

Facilia hæc ſunt, nec demonſtratione indigent. Si enim ſphæræ duæ quoad diametros altera alteram in ratione dupla excidat, ſive ſit ut 2 ad 1: & moveatur major velocitate alterius dupla; & in medio fluido alterius denſitate duplo; palam eſt, dato quovis temporis ſpatio, univerſam ſphæræ majoris reſiſtentiam, ſive motum amiſſum, eſſe ad univerſam ſphæræ reſiſtentiam, ſive motum amiſſum, ut $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, ad $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$, ſive, ut 32 ad 1. atque ita ubique. Notandum tantum corporum reſiſtentiam à fluidis & à ſolidis cæteris paribus æqualiter oriri; niſi quatenus in motibus tardioribus medium fluidiſſimum, impetu per circulum in poſticam projectorum vel motorum corporum partem facto, aliquantulum ea iterum promovere poſſit: quod in velocioribus minus fieri debet, & in longe velociſſimis neutiquam: uti quoque per experimenta accuratiſſime inſtituta Auctor noſter Celeberrimus rem ſe habere deprehendit.

Coroll. (1.) Media itaque in quibus corpora projectilia ſine ſenſibili motus diminutione longiſſime proprogrediuntur, non ſolum fluidiſſima ſunt, ſed etiam longe rariora quam ſunt corpora illa quæ in ipſis moventur: alias projectorum motum cito ſiſterent, & ad quietem reducerent.

Coroll. (2.) Unde ſequitur aerem noſtrum, ſive omnem materiam in aere contentam parvam eſſe, ſi cum materia in corporibus per eandem longiſſime & velociſſime progredientibus componatur; tantumque à Pleno Carteſiano abeſſe, ut ne millecuplam ſpatii integri continentis partem revera occupet.

Coroll. (3.) Unde etiam ſequitur, ætherem, ſive materiam omnem in ſpatiis planetariis contentam, per quam Planetæ tot millenniis tanta cum velocitate revolverunt, idque ſine omni fere motus jactura, perexiguam ſane eſſe, ſi cum materia in ipſis planetis contenta comparetur: ita ut, quod inſtituto calculo facile patebit, ſpatium

tium potius revera vacuum, quam æthercam aliquam materiam nuncupare præſtiterit.

Coroll. (4.) Corruit ergo in univerſum Philoſophia Carteſiana, materiæ cuidam cæleſti, quam materiam tum *primi* tum *ſecundi elementi* appellat, in ſolidum inædificata. Neque exploſa jam per experimenta atque demonſtrata Newtoniana materia hac ſubtili, Hypotheſeωs Carteſianæ baſi & fundamento, ultra ſubſiſtere figmentum iſtud ingenioſum ullo modo poteſt. Præſertim cum non ſolum plenitudinem materiæ iſtius ſubtilis ſuſtulerit Newtonus, ſed & nihil omnino hujuſmodi materiæ Corporum poris ineſſe oſtenderit. Per experimentum enim penduli prælongi in aere diutius oſcillantis & motum inde amiſſum cum aeris reſiſtentia in ſuperficiem facta collatum æſtimando, invenit, aut nullam omnino, aut plane inſenſibilem reſiſtentiam in partibus internis oriri. Unde recte concludendum, nullam omnino, aut plane inſenſibilem eſſe in poris corporum materiæ cujuſvis ſubtilis quantitatem: cum è contra ex Carteſii plenitudine, cum ſpecifica penduli gravitate collata, debuerit eſſe quam ipſa penduli ſubſtantia longe major. Omnino contra experientiam.

LXV. Preſſio quævis rectilinearis per fluidum ſecundum lineas rectas ſolas propagari nequit.

Cum enim fluidum ſit ea natura ut aut ejus partes ſint ſemper in motu omnifariam, aut ſaltem facillime omnifariam mobiles, & data quavis occaſione revera motæ; atque adeo particulæ ſitu & loco admodum variæ & obliquæ quoad ſe invicem ſemper exiſtant; fieri non poteſt quin preſſio quævis etiam per rectam lineam primitus communicata particulas oblique poſitas plerumque urgeat; & illæ oblique poſitæ alias oblique etiam poſitas pariter urgeant; & ſic deinceps in infinitum. Preſſio igitur quamprimum propagatur ad particulas quæ non accurate in directum jacent, divaricare incipiet, & oblique propagabitur in infinitum: & poſtquam incepit oblique propagari, quotieſcunque inciderit

rit in particulas ulteriores quæ non in directum jacent, hoc est, fere semper, iterum divaricabit. Sic etiam si pressionis à dato loco per fluidum propagatæ pars aliqua obstaculo intercipiatur, pars reliqua quæ non intercipitur pariter ac prius divaricabit in spatia quævis ultra obstaculum.

Coroll. (1.) Hinc ratio redditur, quare Soni vel muris interpositis, vel in cubiculum per fenestram admissi, sese in omnes cubiculi partes dilatent; inque angulis omnibus audiantur, non solum reflexi quidem à parietibus oppositis, sed & à fenestra per aerem undique propagati.

Coroll. (2.) Lucis radii qui per ætherem, & aerem, & aquam aliaque fluida per rectas lineas semper propagantur, non sunt pulsus quidam per fluida ista, sonorum instar, propagati; sed particulæ seu corpuscula realia à Sole & stellis emanantia, & per pellucida media quæcunque vero motu propagata; ut etiam alia pleraque lucis phænomena omnino suadent.

LXVI. Corpus omne Tremulum in medio elastico propagabit motum pulsuum undique in directum: In medio vero non elastico motum per circulum excitabit.

CASUS (1.) Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo itu suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo compriment easdem & condensabunt: dein reditu suo sinent partes compressas recedere, & sese expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices ad instar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant hasce medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores: & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes simul ibunt, & simul redibunt; (sic enim datas ab invicem distantias servando, non rarefierent & condensarentur per vices;) sed accedendo ad invicem, ubi condensantur; & recedendo, ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt, dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes, & eundo condensatæ ob motum suum progressivum quo feriunt obstacula, sunt pulsus: & propterea pulsus successivi à corpore omni tremulo per fluidum elasticum propagabuntur: idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus singulis singulos pulsus excitat. Q. E. D.

Corollarium. Quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per medium fluidum propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; & à corpore illo tremulo, tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphæricas & concentricas undique propagabuntur. Cujus etiam rei aliquod exemplum habemus in Undis: quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagas motus digiti, sed in modum circulorum concentricorum digitum statim cingent, & undique propagabuntur. Nam Undarum gravitas supplet quodammodo locum vis elasticæ.

Coroll. (2.) Hinc colligi potest, quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicetur in eorum progressu. Lineola enim quævis physica quamprimum ad locum suum primum semel rarescendo redierit, quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum, qui à corpore tremulo propagantur, novo motu cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus à corpore tremulo propagari desinunt.

Coroll. (3.) Unde facile innotescit causa, cur Soni, cessante motu corporis sonori, statim cessant; neque diu-

diutius audiuntur ubi longiſſime diſtamus, quam cum proxime abſumus. Ceſſante enim Cauſa, Ceſſare effectum eſt Neceſſe.

Coroll. (4.) Hinc etiam cauſa intelligi poteſt, cur Soni in Tubis ſtenterophonicis valde augeantur. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus à cauſa generante augeri ſolet. Motus autem in Tubis, dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur, & fortius recurrit; & propterea à motu novo ſingulis recurſibus impreſſo magis augetur. Et cum omnis ille corporis aut vocis ſonoræ impetus, qui alias ad ſphæram uſque integram, cujus radius eſſet tubi longitudo, eodem tempore propagari debuiſſet, nunc intra tubi ſpatiū concavum concludatur, & ex ejuſdem apertura junctis viribus exeat, obſcurum eſſe non poteſt, tremulum aeris motum, ſive pulſuum ſonorum violentiam longe exinde augeri, & ita ad intervalla longe majora pervenire debere: ita tamen ubique, ut propagationis velocitas eadem etiamnum ac prius atque invariata permaneat. Ea autem, ut opinor, ratione ſonus augetur in hiſce tubis, ut omnem fere ejuſdem quantitatem, quæ alias dato tempore ſuperficiem ſphæricam cujus radius ſit tubi longitudo, occuparet intra aperturam tubi coarctetur. Id eſt, in ratione ſuperficiei ſphæricæ integræ, ad ejuſdem partem intra tubi aperturam contentam quam proxime. Operæ autem pretium videtur ut adhibeantur experimenta huc ſpectantia, quo determinetur tandem, num ſonorum per hoſce tubos augmentum rationem jam definitam obtineat, necne: ut de iiſdem in poſterum certius pronunciare, eoſdemque utilius tractare atque uſibus humanis adhibere valeamus.

Cas. (2.) Quod ſi medium non ſit elaſticum; quoniam ejus partes à corporis tremuli partibus vibratis preſſæ condenſari nequeunt, propagabitur motus in inſtanti ad partes ubi medium facillime cedit: hoc eſt, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuum à tergo relinqueret. Idem eſt caſus cum caſu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus non recedit in infinitum, ſed in circulum eundo pergit ad ſpatia quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur, & ad locum ſuum priorem redibit.

Corollarium. Hallucinantur igitur Carteſiani, qui credunt agitationem partium flammæ ſive Solis ad preſſionem ſeu lucis propagationem per medium ambiens ſecundum lineas rectas conducere. Debebit ejuſmodi preſſio non ab agitatione ſola partium flammæ, vel Solis, ſed à totius dilatatione derivari. Atque hæc impræſentiarum ſufficiant. Reliqua Termino poſt Natalitia proximo expectabitis.

Decemb. 9°. 1706.

XXXI.

LXVII. SI Cylindrus ſolidus infinite longus in fluido uniformi & infinito circa axem ſuum poſitione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſerveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; Tempora periodica partium fluidi erunt ut ipſarum diſtantiæ ab axe cylindri directe; & velocitates ubique æquales.

Diſtinguatur enim fluidum in orbes ſolidos cylindricos innumeros cylindro concentricos, ejuſdem ubique craſſitudinis. Et quoniam fluidum ſupponitur eſſe homogeneum, & Cylindrus motu ſuo circulari conatur omnes fluidi partes contiguas, & per partes contiguas partes ulteriores in infinitum communi ſuo motu angulari,

lari, atque adeo velocitate in ratione diſtantiæ directa concitare, & ſecum eodem tempore periodico circumvolvere; Liquet orbes quoſcunque tum demum ceſſare ab ulteriori acceleratione, & partes perſeverare in motibus ſuis uniformiter, ubi reſiſtentia ſive impreſſio in partem concavam, æquetur reſiſtentiæ vel impreſſioni in partem convexam; (alias enim prævalente vi fortiori motus ex iſta parte mutabitur.) Proinde, ubi velocitas reſpectiva, ſecundum quam in data ſuperficie orietur reſiſtentia, fuerit in ipſa ſuperficiei ratione reciproca, Impreſſiones ex parte utraque ſibi invicem erunt æquales: Id eſt, in hoc caſu ubi velocitas angularis ſit in ipſa diſtantiæ ratione reciproca, ſive ubi velocitas abſoluta ſit ſemper æqualis, & tempora periodica in ipſa diſtantiæ ratione directa. *Q. E. D.*

Coroll. (1.) Si fluidum non ſit infinitum, ſed in vaſe cylindrico contineatur, circumagetur etiam cylindrus exterior, & accelerabitur ejus motus quoad uſque tempora periodica cylindri utriuſque & fluidi incluſi æquentur inter ſe. Quod ſi cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & niſi cylindrus interior vi aliqua continuo impreſſa motum ſuum conſervet, efficiet ut idem paulatim ceſſet.

Coroll. (2.) Cum autem Planetarum tempora periodica non ſint in ratione ipſa diſtantiarum à Sole, ſed in ejuſdem ſeſquialtera; atque proinde velocitates abſolutæ non ſint ubique æquales, ſed in ſubduplicata diſtantiarum ratione; uti apud omnes Aſtronomos eſt in confeſſo; Liquet hujuſmodi fluidi ætherei conſtitutionem ſyſtemati Solari minime convenire; nec ex eadem ſuppoſita quicquam auxilii vorticibus Carteſianis accedere.

LXVIII. Si ſphæra ſolida in fluido uniformi & infinito circa axem poſitione datum, uniformi cum motu, revolvatur; & ab hujus impulſu ſolo agatur fluidum in orbem; perſeveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu ſuo; Tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata diſtantiarum à centro ſphæræ. Di-

Diſtinguatur fluidum in orbes ſphæricos innumeros concentricos ejuſdem craſſitudinis. Et, ut prius, tum ſolum perſeverabit fluidum in motu ſuo uniformi, ſine ulteriore acceleratione vel retardatione, ubi motus angulares partium fluidi circa axem globi ſint reciproce ut ipſæ ſuperficies ſphæricæ concentricæ, ſive ut quadrata diſtantiarum à centro globi reciproce, ſive demum, ut tempora periodica partium, iiſdem velocitatibus angularibus reciproce proportionalia, ſint ut quadrata diſtantiarum à centro globi directe.

Coroll. (1.) Si fluidum non ſit infinitum, ſed in vaſe ſphærica contineatur, circumagetur etiam vas ſphæricum, & accelerabitur ejus motus quoad uſque tempora periodica ſphæræ, & vaſis, fluidique incluſi æquentur inter ſe. Quod ſi vas ſphæricum violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & niſi ſphæra vi aliqua continuo impreſſa motum ſuum conſervet, efficiet ut idem, velut in caſu priori, paulatim ceſſet.

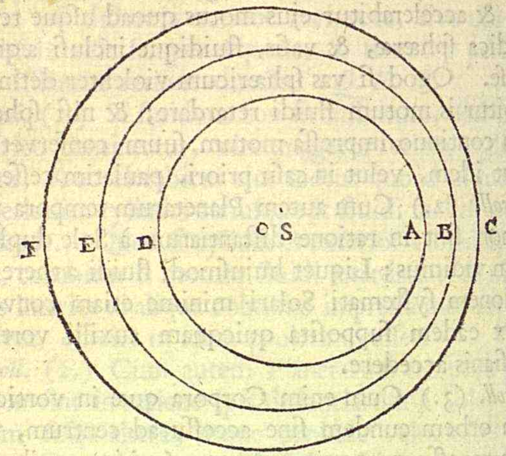
Coroll. (2.) Cum autem Planetarum tempora periodica non ſint in ratione diſtantiarum à Sole duplicata; uti jam vidimus; Liquet hujuſmodi fluidi ætherei conſtitutionem ſyſtemati Solari minime etiam convenire; nec ex eadem ſuppoſita quicquam auxilii vorticibus Carteſianis accedere.

Coroll. (3.) Cum enim Corpora quæ in vortice delata in orbem eundem ſine acceſſu ad centrum, vel ab eodem receſſu perpetuo redeunt; (uti in omnibus planetis tum primariis tum ſecundariis res ſe habet;) ejuſdem ut ſint denſitatis cum vortice, & ſimul cum partibus contiguis ferantur ſit neceſſe: & cum Vortices hujuſmodi debeant ita moveri, ut tempora periodica ſint in duplicata diſtantiarum ratione; (contra quam ſit in omnibus planetis;) Liquet Planetas à Corporeis vorticibus non deferri. Quod etiam adhuc certius ex proxima Propoſitione conſtabit.

LXIX. Velocitates Planetarum omnium ſive primariorum, ſive ſecundariorum circa corpora ſua centralia, in ratione

tione nempe ſubduplicata diſtantiarum ab illis centris reciproca, Vorticum Carteſianorum hypotheſin omnino ſubruunt, & è medio tollendam demonſtrant.

Planetæ enim, ut jam ubique notum, circa ſuum quique centrale corpus ita in Ellipſibus, umbilicos in eorum centris habentibus moventur, ut radiis ad centra ductis areas deſcribant temporibus proportionales; & ut velocitates ſint in ſubduplicata diſtantiarum ratione reciproca. At Partes vorticis ætherei tali motu revolvi nequeunt. Deſignent enim *AD*, *BE*, *CF*, Orbes tres primarios circa Solem *S* deſcriptos: quorum



extimus *CF* circulus ſit Soli concentricus; & interiorum duorum Aphelia ſint *A*, *B*, & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF* radio ad Solis centrum ducto areas temporibus proportionales deſcribendo movebitur uniformi cum motu; Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE* tardius movebitur in aphelio *B*, & velocius in perihelio *C*, ſecundum leges Aſtronomicas, & demonſtratis Geometricis & obſervatis cæleſtibus innixas; cum tamen ſecundum leges mechanicas

mechanicas materia vorticis in ſpatio anguſtiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quam in ſpatio latiore inter *D* & *F*: id eſt, in aphelio velocius quam in perihelio: Quod fieri per obſervata non poteſt. Sic ſane, exempli gratia, In principio ſigni Virginis, ubi Martis aphelium jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad eorundem diſtantiam in principio ſigni Piſcium in ratione fere ſeſquialtera; ſive ut tria ad duo. Et propterea Materia Vorticis inter orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quam in principio Virginis in ratione eadem ſeſquialtera. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi terra in hac materia cœleſti relative quieſcens ab eadem deferatur, & una circa Solem revolvatur, foret hujus velocitas in principio Piſcium, ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis, in ratione ſeſquialtera. Unde Solis motus annuus apparens unius diei tempore, in principio Virginis major eſſet quam 70′, & in principio Piſcium minor quam 48′. cum tamen (experientia teſte) apparens iſte Solis motus velocior ſit in principio Piſcium quam in principio Virginis; & propterea Terra velocior in principio Virginis quam in principio Piſcium. Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat; & non tam ad explicandos, quam ad perturbandos motus cœleſtes conducit.

Scholium. Hactenus Principia Philoſophiæ Naturalis è Cl. Newtono tradidimus. Non tamen proprie loquendo ea Philoſophice, vel Phyſice, ſed Mathematice potius tradidimus. Generales quippe motuum & virium leges & conditiones Aſtronomiam & Philoſophiam Naturalem maxime ſpectantes hucuſque methodo præcipue Mathematica & univerſali Conſideravimus. Omnia tamen, ne ſterilia viderentur, Scholiis non paucis & Corollariis Aſtronomicis, Phyſicis, & Opticis etiam, atque Mechanicis per totam tractationis feriem ubique illuftravimus: atque ita veræ Philofophiæ & Aftronomiæ, hoc eft, Newtonianæ, haud parum prælufimus, & viam ftravimus. Supereft jam ut ad ipfam Rerum Naturam & Philofophicas phænomenorum tum Aftronomicorum cum Phyficorum caufas, & verum Mundi Syftema diveniamus; & ut ejufdem Syftematis Conftitutionem, quatenus ex principiis prius pofitis dependet, doceamus: omiffis hic loci aut leviter tactis iis quæ prius inter prælegendum per Scholia vel Corollaria huc fpectantia obfervavimus. Sed cum Novum materiæ campum & Tertium Newtoni Librum ingreffuri fimus, paululum refpirare præftiterit. Manum itaque de Tabula.

Jan. 29°. 170$\frac{6}{7}$.

XXXII.

LXX. PLANETÆ Sex Primarii, cum fuo quifque, fi quod habent, Satellitio Solem Orbibus fuis cingunt; vel circa Solem revolvunt.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phafibus phafes Lunares ad amuffim referentibus, quod per obfervata Telefcopica ubique jam notum, liquido demonftratur. Nonnunquam enim plena facie circa ipfas conjunctiones diametris Apparentibus tum minimis, lucent; ultra Solem nimirum fiti; & plenilunium imitati: nonnunquam obfcura facie circa conjunctiones alteras, diametris apparentibus tum maximis, vifuntur; citra Solem nimirum pofiti, & novilunium imitati. Et pariter facie gibba aut cava circa octantes, dimidiata atque dichotoma circa quadras, Lunæ ad inftar; per difcum Solis aut inftar macularum nonnunquam tranfeunt; partialem eclipfin inducentes: Nonnunquam

nunquam vero ultra Corpus Solare pertranfeunt nobis interea invifibiles. Unde certum eft, hofce Planetas Solem circumire, & orbibus fuis Solem non autem Terram cingere. Et quanquam Mercurius ita raro videatur, nempe circa elongationes folum maximas, & dum per Solem tranfit, ut non ita clare omnes iftæ phafes actu obfervari queant; Cum tamen quæ Mercurii phafes videri poffunt, huic pofituræ refpondent optime, & cum eæ Veneris, ejufdem conditionis Planetæ, obfervationibus frequentiffimis aptæ fint, & ubique plenario refpondeant, non eft quod de reliquis etiam in Mercurio dubitemus. Ex Martis quoque plena facie prope Solis Conjunctionem, & gibbofa facie in quadraturis certum eft quod is Solem ambit. Idem etiam de Jove & Saturno, ex eorum faciebus femper plenis, ut ad tantam diftantiam accidere debuit, demonftratur. Quanquam enim hi Planetæ facies fuas à plenitudine nonnihil diminutas circa quadras oftentare debeant; Cum tamen ifta lucis diminutio tantilla effe debeat ut inter obfervandum vix aut ne vix quidem ullo pacto poffet fentiri, Plena horum facies cum hac pofitura optime congruere eft cenfenda. Quod vero Telluris Orbita Solem cingit, è parallaxi annua alibi expofita abunde conftat.

Corollarium. Hinc cum Cartefio, reliquifque etiam fuperioris feculi Aftronomis, colligimus Syftema Mundi Ptolemaicum, per tot retro fecula ante Copernicanum unice excultum & celebratum, in nihilum abire. Quin & colligimus, Syftema Mundi Tychonicum, à tot & tantis Aftronomis poftea receptum & nobilitatum penitus corruere: nec cum phænomenis nuperrime obfervatis ullatenus congruere. Tandem colligimus, Syftema Copernicanum ab optimis Aftronomis plerifque omnibus aliquamdiu approbatum, Verum effe Mundi Syftema, & Planetarum omnium ordinem ipfi rerum naturæ & obfervatis Aftronomicis congruentem unice exhibere. Mirum itaque videri debet Aftronomiæ Newtonianæ vel Copernicanæ Interpretem Optimum Cl. Gregorium,

 fyftemaſyſtematis veri adeo gnarum, tantum olei & operis in falſis iſtis aliiſque id genus imaginariis hypotheſibus tradendis & exornandis inſumere animum induxiſſe ſuum. Ubi certo certius conſtat Copernicanum Planetarum Ordinem Verum eſſe & genuinum; reliquaſque hypotheſes fictitias plane eſſe cerebri humani fœtus; Quorſum ipſam veritatem meris umbris, & naturam rerum inficetis mendaciis immiſcere ſtudemus? Exulent itaque, in æternum exulent, ſyſtemata iſta quondam nobiliſſima, quondam celeberrima è campo noſtro Aſtronomico: & Admittatur illud ſolum, excolatur, exornetur, Quod rerum conditarum vero ordini, veriſque cauſis naturalibus unice correſpondere tandem aliquando grati agnoſcimus. Sed hæc Obiter.

LXXI. Planetarum ſex Primariorum Tempora Periodica ſunt in ratione ſeſquialtera mediocrium diſtantiarum à Sole. Hæc à Keplero primum inventa ratio, Philoſophiæ Newtonianæ Parens, in confeſſo jamjam eſt apud omnes. Ac de Temporum Periodicorum menſura convenit inter Aſtronomos Univerſos: Magnitudines autem Orbium Idem Keplerus & Bullialdus omnium diligentiſſime ex obſervationibus determinaverunt: & diſtantiæ mediocres quæ temporibus periodicis reſpondent non differunt ſenſibiliter à diſtantiis quas illi adinvenerunt; ſuntque inter ipſas utplurimum intermediæ, uti in Tabula ſequente videre licet.

Planetarum diſtantiæ mediocres à Sole.

	Saturn.	*Jup.*	*Mart.*	*Terræ.*	*Ven.*	*Merc.*
Sec. Keplerum.	951000	519650	152350	100000	72400	38806
Sec. Bullialdum.	954198	522520	152350	100000	72398	38585
Sec. Temp. Period.	953806	520116	152399	100000	72333	38710

Planetarum autem Veras Periodos jam dabimus: Diſtantias etiam à Sole Veris proximas, ex parallaxi nimirum Telluris Flamſtediana 10 ſecundorum.

		D.	H.	′.
Mercurius	circa Solem revolvit ſpatio	87	23	16
Venus		224	16	49
Terra cum Luna		365	6	9
Mars		686	23	27
Jupiter cum Satellitibus 4.		4332	12	20
Saturnus cum Satellitibus 5.		10759	6	36

Mercurius	*diſtat à Sole*	32.000.000	*Mille-paſſus Angli-cos.*
Venus		59.000.000	
Terra		81.000.000	
Mars		123.000.000	
Jupiter		424.000.000	
Saturnus		777.000.000	

Quod autem methodos attinet diſtantias haſce inveniendi, ſic ſtatuendum. De diſtantiis Mercurii & Veneris à Sole cum Telluris diſtantia collatis Diſputandi non eſt locus; cum hæ per eorum Elongationes à Sole Maximas facili obſervatione notas, ex Trigonometria plana colligantur. De diſtantiis etiam ſuperiorum Planetarum à Sole ex arcu retrogradationis facile deducendis tollitur inſuper omnis diſputatio per eclipſes Satellitum Jovis ad calculum accuratum juxta hanc diſtantiam reductas, & cum phænomenis congruentes. Etenim per Eclipſes illas determinatur poſitio umbræ quam Jupiter projicit: & eo nomine habetur Jovis Longitudo Heliocentrica. Longitudo autem Jovis Geocentrica per obſervationes immediate habetur. In triangulo itaque plano Solis, Jovis, & Telluris centra connectente dantur omnes anguli, & proinde ratio Laterum etiam datur: Sive Ratio Diſtantiarum Jovis & Terræ à Sole.

Corollarium. Datur itaque diſtantiarum à Sole Ratio in omnibus Planetis accurate. Quod ſi qua diſtantia ſemel in menſura nota, puta millepaſſibus vel telluris ſemidiametris data eſſet accurate, Omnium diſtantias veras una accurate datas habuissemus: Quod quidem etiamnum desideratur.

LXXII. Planetæ sex primarii radiis ad solem ductis areas temporibus æqualibus semper æquales, & in universum areas temporibus semper proportionales describunt.

Hæc etiam areæ descriptæ æquabilitas ejusdem Kepleri observationi primario debetur: quæ Alter philosophiæ Newtonianæ Cardo merito audire debet: & est apud omnes in confesso. Planetæ quidem quinque reliqui respectu Telluris nostræ nunc progrediuntur; nunc stationarii sunt; nnnc etiam regrediuntur. At Solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in Periheliis, ac tardius in Apheliis; sic ut arearum descriptio sit æquabilis. Propositio hæc Astronomis in universum notissima in Jove adprime demonstratur per Satellitum eclipses ad calculum redactas huic hypothesi innixas & apparentibus ad amussim congruas. Hisce enim Eclipsibus Heliocentricum Jovis Locum sive Longitudinem & Distantiam à Sole accuratissime determinari jam diximus.

LXXIII. Luna radio ad centrum Terræ ducto aream tempori æquali semper æqualem fere, & in universum aream tempori fere proportionalem semper describit.

Patet hoc ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente, ejusdem distantiæ tantum non reciproce proportionali, collata. Tempori autem aream non accurate sed *fere* proportionalem asserui, quod perturbatur ista areæ proportionalitas aliquantulum à vi Solis; uti olim explicuimus. Sin istam perturbationem aliunde natam demamus, Propositio erit æque accurata in Luna, ac est in reliquis Planetis; idque propter eandem prorsus rationem.

LXXIV. Planetæ circumjoviales radiis ad centrum Jovis ductis areas describunt temporibus quidem æqualibus

libus

libus semper æquales, & in universum temporibus semper proportionales. Eorumque Tempora Periodica sunt in ratione sesquialtera distantiarum ab ipsius centro.

Constat pars Propositionis utraque ex observationibus Astronomicis. Orbes enim horum Satellitum non differunt sensibiliter à circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora etiam Periodica esse in ratione sequialtera semidiametrorum orbium consentiunt Astronomi. Et Cl. Flamstedius, qui omnia micrometro & per eclipses Satellitum accuratius definivit, literis ad ipsum Newtonum datis; quinetiam numeris suis cum ipso communicatis significavit rationem illam sesquialteram tam accurate obtinere quam sit possibile sensu deprehendere. Id quod ex Tabellis sequentibus erit manifestum.

Tempora Periodica.

	D.	H.	′.
1	1 —	18 —	$28\frac{3}{5}$
2	3 —	13 —	$17\frac{9}{10}$
3	7 —	3 —	$59\frac{3}{5}$
4	16 —	18 —	$5\frac{1}{5}$

Distantiæ à Centro Jovis.

	1	2	3	4	*Semidiam. Jovis.*
E Cassin.	5	8	13	23	
Borello.	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	
Townleo per microm.	5L51	8L78	13L47	24L72	
Flamstedio per microm.	5L31	8L85	13L98	24L23	
Flamst. per eclips. Satel.	5L578	8L876	14L159	24L903	
Ex Tempor. Period.	5L578	8L878	14L168	24L968	

LXXV. Planetæ Circumſaturnii radiis ad centrum Saturni ductis areas deſcribunt temporibus quidem æqualibus ſemper æquales; & in univerſum temporibus ſemper proportionales. Eorumque Tempora Periodica ſunt in ratione ſeſquialtera diſtantiarum ab ipſius centro.

Conſtat etiam pars utraque ex obſervationibus Aſtronomicis. Orbes enim horum ſatellitum vix differunt ſenſibiliter à circulis Saturno concentricis; & motus eorum in his circulis propemodum uniformes deprehenduntur. Tempora etiam Periodica eſſe in ratione ſeſquialtera ſemidiametrorum orbium ſequentes Tabellæ, quas è Cl. Hugenio hic damus, cuilibet rem ad calculum revocanti demonſtrabunt.

Coſmotheor. Pag. 101. 102.

	Tempora Periodica. D.	H.	′.	″.		*Diſtantiæ à centro Saturni.*
1	1	21	18	31	1	$\frac{39}{40}$
2	2	17	41	27	2	$1\frac{1}{4}$
3	4	13	47	16	3	$1\frac{3}{4}$
4	15	22	41	11	4	4
5	79	7	53	57	5	12

Diametr. Annuli.

Hiſce ita expoſitis, æquum eſſet ut Gravitatis Vires & Legem ex iiſdem deduceremus. Sed hæc Prælectioni proximæ deputabimus.

Novemb. 17. 1707.

XXXIII.

LXXVI. VIRES quibus ſex Planetæ Primarii cum ſatellitibus ſuis perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in orbibus ſuis retinentur, Solem reſpiciunt; & ſunt reciproce ut quadrata diſtatiarum ab ipſius centro.

Ob æquabilitatem enim arearum circa ſolem deſcriptarum, vires hæ ad Solem tendunt. Et ob Tempora Periodica in ratione diſtantiarum ubique ſeſquialtera, Virium Quantitas eſt ubique in duplicata diſtantiarum à Sole ratione reciproca; uti olim demonſtravimus. Pars etiam ſecunda hujus Propoſitionis accuratiſſime demonſtratur per figuram orbium. Si enim Planetæ moverentur circa Solem in Spiralibus radios in dato angulo ſecantibus, vires centripetæ eſſent in diſtantiarum ratione triplicata, vel ut Cubi diſtantiarum reciproce. Si autem moverentur in Ellipſibus centra ſua in Solis centro habentibus, Vires centripetæ eſſent in ipſa diſtantiarum ratione directa. Cum autem moveantur omnes in Ellipſibus Umbilicos ſuos in Solis centro habentibus, uti apud Aſtronomos in confeſſo eſt, vires centripetæ erunt in ratione diſtantiarum duplicata reciproca.

Quod etiam certiſſime demonſtratur per Apheliorum quietem. Ubi enim ratio hæc reciproca duplicata accurate obtinet, quieſcunt Aphelia: ubi ratio ad triplicatam vergit, Progrediuntur: ubi ad ſimplicem rationem accedit, Regrediuntur. Quies itaque Apheliorum in Planetis Primariis indicio eſt vim centripetam eſſe accurate in ratione diſtantiarum duplicata reciproca.

LXXVII. Vires quibus Planetæ Circumjoviales & Circumſaturnii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in orbibus ſuis retinentur, reſpiciunt centrum Jovis & centrum Saturni reſpective; & ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum ab iiſdem centris.

Ob æquabilitatem arearum circa centra Jovis & Saturni reſpective deſcriptarum, vires hæ ad centra Jovis & Saturni tendunt. Et ob Tempora Periodica in ratione diſtantiarum à centris Jovis & Saturni ſeſquialtera, virium quantitas eſt ubique in ratione diſtantiarum ab iſtis centris duplicata reciproca. Cum autem Satellites Circumjoviales & Circumſaturnii in circulis aut ellipſibus à circulis haud ſatis ſenſibiliter diverſis moveantur, nihil ex orbium figura inferri poteſt. Nec proinde ex Aphelio-

Apheliorum quiete. In circulis enim Apſidum linea eſt nulla; atque proinde nihil de ejuſdem quiete aut motu affirmari poteſt.

LXXVIII. Vires quibus Luna perpetuo retrahitur à motu rectilineo, & in orbe ſuo retinetur, reſpiciunt Centrum Terræ; & ſunt reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum ab ipſius centro.

Ob æquabilitatem areæ circa centrum Terræ ubique deſcriptæ, niſi quatenus aliquantulum per vim Solis perturbatricem mutatur; vires hæ ad centrum Terræ tendunt. Et ob figuram Orbis Lunaris Ellipticam circa Telluris centrum in Ellipſeωs Umbilico poſitum, virium Quantitas eſt ubique in ratione diſtantiarum ab iſto centro duplicata reciproca. Quanquam enim figura hæc Lunaris orbitæ non ſit prorſus Elliptica, neque proinde motus fiat circa centrum Telluris in Ellipſeωs Umbilico accurate poſitum; cum tamen omnis hæc varietas aliunde accedat, & à vi Solis perturbatrice ſolummodo oriatur, Figura per ſe eſſe Ellipſis, & Terra in ejus Umbilico primario collocari eſt intelligenda: & proinde vires propriæ centripetæ ſunt in ratione duplicata diſtantiarum à centro Telluris reciproca. Cum autem unicus hic Satelles Terram ambiat, Tempora periodica inter ſe conferenda nullum hic locum habent. Attamen Motus Lunaris Apogæi tardiſſimus indicio eſt vires centripetas à ratione reciproca duplicata parum admodum diſcrepare. Patet enim per Newtoni calculum ex tardo Apogæi progreſſu, quod vis centripeta Lunæ verſus Terram vicibus pluſquam ſexaginta propius ad rationem hanc duplicatam quam ad triplicatam accedat. Oritur autem tota hæc differentiola ab actione Solis perturbatrice, uti olim expoſuimus: & propterea hic negligenda eſt. Reſtat igitur ut vis illa quæ ad Terram ſpectat ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ à centro Terræ: Id quod etiam plenius conſtabit conferendo hanc vim Lunæ centripetam cum vi gravitatis in ſuperficie Telluris; ut fiet in ſequente Propoſitione.

LXXIX.

LXXIX. Luna Gravitat perpetuo in Terram; & vi gravitatis retrahitur ſemper à motu rectilineo, & in orbita ſua retinetur.

Ex calculo enim virium centripetarum Lunam in orbita ſua perpetuo retinentium, cum vi gravitatis per experimenta pendulorum accuratiſſime inſtituta apud nos cognita & collata, conſtat vires haſce ejuſdem omnino eſſe quantitatis, & verſus idem Terræ centrum tendentes, uti olim oſtendimus. Et propterea, vis qua Luna in orbita ſua retinetur illa ipſa eſt quam nos *Gravitatem* dicere ſolemus. Nam ſi gravitas ab ea diverſa ſit, corpora viribus utriſque conjunctis Terram petendo duplo velocius deſcendent, & ſpatio minuti unius ſecundi cadendo deſcribent non pedes 16⌊1, ut experientia conſtat; ſed 32⌊2. omnino contra experentiam. Vis itaque centripeta qua Luna in orbita ſua perpetuo retinetur, ea ipſa vis eſt quam nos gravitatem dicimus, & qua omnia corpora in ſuperficie Terræ ab eadem ſeparata verſus eam cadunt; in duplicata nimirum diſtantiæ ratione reciproca; & ea velocitate qua 16⌊1 pedes Anglicos tempore minuti unius ſecundi cadendo deſcribunt.

LXXX. Planetæ Circumjoviales gravitant in Jovem, & Circumſaturnii in Saturnum, & circumſolares in Solem; & vi gravitatis ſuæ retrahuntur ſemper à motibus rectilineis, & in orbibus curvilineis retinentur. Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, & Circumſaturniorum circa Saturnum, & Circumſolarium circa Solem ſunt Phænomena ejuſdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea à cauſis ejuſdem generis dependere debent. Præſertim cum demonſtratum ſit quod vires à quibus revolutiones illæ dependent, reſpiciant centra Jovis, Saturni, ac Solis; & recedendo à Jove, Saturno, & Sole decreſcant eadem ratione ac lege qua vis gravitatis decreſcit in receſſu à Terra.

Coroll. (1.) Igitur Gravitas datur in Planetas univerſos. Nam Venerem, Mercurium, cæteroſque Planetas eſſe corpora ejuſdem generis cum Jove & Saturno

nemo

nemo dubitat. Certe Planeta quivis Circumsaturnius gravis est in Saturnum, & Circumjovialis in Jovem: Et cum attractio omnis, per Motus Legem 5. mutua sit, Saturnus vicissim gravitabit in Satellites suos; & Jupiter in suos; Terraque in Lunam; & Sol in Planetas omnes, tum Primarios, tum Secundarios gravitabit.

Coroll. (2.) Gravitas quæ Planetam unumquemque respicit, est reciproce ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

LXXXI. Corpora omnia in Planetas singulos gravitant: & Pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus distantiis à centro Planetæ, Proportionalia sunt quantitati materiæ in singulis.

Descensus gravium omnium in Terram, dempta saltem inæquali retardatione quæ ex aeris resistentia oritur, æqualibus temporibus fieri jamdudum fuit observatum, & nos prius observavimus, sive corpora descendentia magna sint, sive parva; sive liquida sint, sive dura; sive solida sint, sive fluida. Quod quidem ad amussim congruit tum experimentis corporum directe descendentium, cum præcipue pendulorum in arcubus sive circularibus sive cycloidalibus oblique descendentium. Hæc enim omnia ad eandem centri oscillationis à centro suspensionis distantiam per arcus æquales demissa æqualia prorsus temporis spatia in descensu & ascensu impendunt, & eunt simul redeuntque diutissime. Proinde, cum obliquitas motus curvilinearis sit in hoc casu ubique similis & æqualis, eadem corpora simul dimissa in spatio vacuo paribus temporibus paria omnino spatia in descensu vel ascensu perpendiculari impendunt: & proinde pondere materiæ quantitati ubique ad amussim proportionali impelluntur. Ubi enim materiæ quantitas dupla vel tripla, vi etiam in universum dupla vel tripla urgetur, nec aliter, velocitas motus erit semper æqualis: hoc est, ubi quælibet cujusque corporis particula æqualis æquali gravitatis vi urgetur, summa omnium sive in magno corpore, sive in parvo proportionali gravitatis vi

vi urgebitur; & omnes particulæ mutuos conatus neque accelerantes neque retardantes pari semper velocitate descendent, & æquali vi in terram gravitabunt. Quod vero experimenta corporum pendulorum sic se habeant, prius ostendimus: & rem sigillatim tentavit Newtonus in auro, argento, plumbo, vitro, arena, sale communi, ligno, aqua, & tritico e. g. Duarum Pixidum lignearum rotundarum & æqualium unam implevit ligno; & idem auri pondus suspendit quam potuit exacte in alterius centro oscillationis. Pixides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes constituebant pendula quoad pondus, figuram, & aeris resistentiam omnino paria. Et paribus oscillationibus juxta positæ ibant una & redibant diutissime. Et in corporibus ejusdem ponderis, differentia quantitatis materiæ, quæ vel minor esset quam pars millesima materiæ totius, his experimentis manifesto deprehendi potuit. Jam vero Naturam gravitatis in Planetas reliquos & Solem ipsum eandem esse atque in Terram nullus est satis sonticus dubitandi locus. Quod etiam ex figura omnium sphærica, per mutuum partium omnium ad se mutuo gravitantium æquipondium nec aliunde facile deducenda, liquere potest. Porro, Elevari fingantur corpora hæc terrestria ad usque orbem Lunæ, & una cum Luna motu omni privata demitti, ut in terram simul cadant: Per nuper Ostensa certum est quod temporibus æqualibus describent æqualia spatia atque Luna ipsa describeret; adeoque quod sunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera sua, ad ipsius pondus. Præterea, quoniam Satellites Jovis, & Saturni temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquialtera distantiarum à Centris Jovis & Saturni, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem & Saturnum reciproce ut quadrata distantiarum ab istis centris: & propterea æqualibus à Jove & Saturno distantiis omnibus, eorum gravitates acceleratrices evadent æquales; & corpora omnia æque afficient. Atque proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo describerent

ſcriberent æqualia ſpatia, perinde ut fit in gravibus in hac terra noſtra. Et eodem argumento Planetæ Circumſolares ab æqualibus à Sole diſtantiis dimiſſi, deſcenſu ſuo in Solem æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcriberent. Porro Jovis & Saturni & eorundem Satellitum pondera in Solem proportionalia eſſe quantitati materiæ earum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari, & orbitis Jovi & Saturno fere concentricis. Nam ſi horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ ſuæ, quam cæteri, motus Satellitum ex inæqualitate attractionis perturbarentur; & in tantum quidem perturbarentur ut ſi, æqualibus à Sole diſtantiis, gravitas acceleratrix Satellitis alicujus Jovialis, verbi gratia in Solem major eſſet vel minor quam gravitas acceleratrix Jovis in Solem parte tantum milleſima totius gravitatis, ex ipſius Newtoni calculo foret diſtantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quam diſtantia Jovis à Sole parte bis-milleſima diſtantiæ totius; in ſubduplicata nimirum diſtantiæ ratione; id eſt, parte quinta diſtantiæ Satellitis extimi à centro Jovis. Quæ quidem orbis eccentricitas foret valde ſenſibilis. Sed Orbes Satellitum Jovis ſunt Jovi concentrici; & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter ſe. Et eodem argumento pondera Saturni & Satellitum ejus in Solem, æqualibus à Sole diſtantiis, ſunt ut quantitates materiæ in ipſis. Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem pariter ſunt earum maſſæ accurate proportionalia. Eodem modo res ſeſe habet quoad pondera partium ſingularum Planetæ cujuſque in alium quemque; ſive partes ſint internæ, ſive externæ: Nam ſi partes aliquæ plus, aliæ minus gravitarent quam pro quantitate materiæ totius, Planeta totus vel Satelles pro genere partium quibus maxime abundaret, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius; omnino contra experientiam. [Sed hæc hactenus. Corollaria enim hujus Propoſitionis utiliſſima Prælectioni proximæ reſervabimus.]

Novemb. 24°. 1707.

XXXIV.

Coroll. (1.) HINC Pondera corporum minime pendent ab eorum formis & texturis. Nam ſi cum formis variari & mutari poſſent, forent majora vel minora pro varietate formarum in æquali materia; omnino contra experientiam. *In Scholis recens reparatis.*

Coroll. (2.) Igitur corpora univerſa quæ circa terram ſunt, ſive ligna, ſive metalla, ſive lapides, ſive aqua, ſive aer, ſive vapores, gravia ſunt in terram; & pro ratione materiæ æqualiter gravia. Si Cortex, vel Lana, vel Aer, pondo unius libræ in vacuo æquivaleat, & Aurum, vel Argentum vivum, vel Æs eidem pondo ibidem æquivaleat, Quantitas materiæ erit in omnibus omnino æqualis.

Coroll. (3.) Pondus itaque corporum quorumcunque in vacuo eſt certiſſimus quantitatis materiæ Index. In corporibus enim mole æqualibus tanta eſſe ſolet denſitatis diverſitas, ut ex apparente corporis magnitudine nullo modo de materiæ in eodem contentæ quantitate ſtatui poſſit. Cum vero illa ponderi ſit ubique proportionalis, ex eodem pondere certiſſime determinari poteſt.

Coroll. (4.) Itaque Vacuum neceſſario datur. Nam ſi ſpatia omnia Plena eſſent, gravitas ſpecifica fluidi quo Regio aeris impleretur, imo & vacui cujuſvis quod vocamus Boyleanum ob denſitatem materiæ omnino ſummam & perfectiſſimam, ſive potius infinitam, nil cederet gravitati ſpecificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuſcunque denſiſſimi. Et propterea nec aurum ipſum cor-

corporum omnium ſpecifice graviſſimum, in aere deſcendere poſſet: omnino contra experientiam. Ut omittam argumenta omnem omnino motum in ſpatio pleno tollentia; quæ quidem ſatis per ſe ſolida videntur.

Coroll. (5.) Cum ex pondere æque ac reſiſtentia quantitas materiæ ubique innoteſcat; & cum ex pondere liqueat corpora pleraque omnia apud terram multo plus ſpatii vacui quam materiæ ſolidæ in ſe continere; cum etiam ex minima & plane imperceptibili Planetarum Cometarumque reſiſtentia liqueat ſpatia cœleſtia ſive ætherea omni quaſi materia eſſe vacua; quin & Planetas & Cometas ipſos, imo & Solem Stellaſque fixas, quaſi nihili puncta, inſtar ætheris vacui quaſi evaneſcere; Palam eſt rerum naturam adeo non *à Vacuo abhorrere*, quod ſomniarunt haud pauci, præſertim Carteſiani, ut ea potius parum in ſe præter Vacuum contineat. Tantillum poteſt ingenium humanum in Operibus Dei inveſtigandis, ubi Experimenta deſunt, & ratiocinia Mathematica! Vix enim, ut opinor, Sagaciſſima Carteſii ipſius mens, hiſce fundamentis deſtituta, vel ſemel veras rerum cauſas Phyſicas, & inventis nuperis congruas excogitare potuit.

Coroll. (6.) Gravitatis vis eſt generis diverſi à vi magnetica. Attractio enim magnetica non eſt ut materia attracta; cum corpora aliqua magis, alia minus, plurima non omnino attrahantur. Eſtque vis magnetica longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, cum magnes perexiguus ipſam totius telluris vim attrahentem exuperare poſſit, & clavem ferream ſuſtollere. Sed & vis magnetica in eodem corpore intendi & remitti poteſt; in receſſu vero à magnete decreſcit in ratione diſtantiæ pluſquam duplicata, quæ tamen eſt ratio gravitatis perpetua, propterea quod vis longe fortior ſit in ſuperficierum contactu quam cum attrahentia vel minimum ab invicem ſeparantur.

LXXXII. Vis gravitatis corpora univerſa, Syſtema ſaltem Solare occupantia, ſpectat; & proportionalis eſt quantitati materiæ in ſingulis. Planetas omnes in ſe mutuo graves eſſe; & gravitatem in unumquemque ſeorſim ſpectatum eſſe reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum à centro Planetæ jamjam probavimus. Si quid dubii oriri poſſet illud certe eſſet de gravitate unius Primarii Planetæ in alium: nam de communi omnium ad centralia ſua corpora gravitate res per demonſtrata priora planior eſt quam ut ullo modo poſſit labefactari. Quin & non deeſt indicium apertum gravitatis etiam Planetas diverſos ſpectantis. Cum enim ante aliquot annos Saturnus circa conjunctionem cum Jove diu hæſiſſet, & proinde ob corporis magnitudinem & viciniam non potuit non ſenſibiles aliquos effectus in Jovis Satellitibus perturbandis edere, ſi modo Jupiter cum ſuis Satellitibus ad Saturnum pro univerſa hac attractionis mutuæ lege gravitaret, res ipſa revera ita ſe habuiſſe eſt comperta. Ipſe enim Cl. Flamſtedius qui primitus talem ullam in motibus Satellitum Jovis perturbationem abnueret, re melius perpenſa, & obſervationibus cum calculo accuratius collatis ingenue faſſus eſt iſtam univerſalem gravitatis legem etiam hoc caſu valuiſſe; motuſque iſtos, prout fieri debuit, perturbatos à Saturni vicinia, & calculis prioribus minus congruos reapſe apparuiſſe. Conſequens itaque eſt per Prop. 81. ejuſque Corollaria gravitatem dari in omnes Planetas, & eam proportionalem eſſe materiæ in iiſdem contentæ.

Porro, cum Planetæ cujuſvis, puta Mercurii, partes omnes graves ſint in Planetam quemvis alium, puta Venerem; & gravitas particulæ cujuſque, ſit ad gravitatem totius, ut materia partis, ad materiam totius; & actioni omnis reactio (per motus Legem 5.) æqualis ſit, Venus in partes omnes Mercurii viciſſim gravitabit; & erit Gravitas Veneris in partem unamquamque, ad gravitatem ſuam in totum, ut materia partis, ad materiam totius.

Corollarium. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam quemvis totum ex gravitate in partes ſingulas

las; uti fit in attractionibus Magneticis, & Electricis; ubi quo majus eſt attrahens, eo cæteris paribus major eſt attractio. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes ſingulas; nec aliter res rite concipi poteſt. Hoc facilius intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores, omnia corpora ſeorſim attrahentes, in unum globum coire, & majorem Planetam componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri omnino debet. Si quis objiciat, Quod corpora omnia quæ apud nos ſunt, hac lege gravitare deberent in ſe mutuo; cum tamen ejuſmodi gravitas neutiquam ſentiatur; Reſponſio facilis eſt; quod gravitas in hæc corpora, cum ſit ad gravitatem in terram totam, pari diſtantia, ut ſunt hæc corpora, ad Terram totam, longe minor eſt, quam ut ullo indicio ſenſibili dignoſci poſſit.

Coroll. (2.) Gravitatio in ſingulas corporis particulas æquales eſt reciproce ut quadratum diſtantiæ locorum à particulis.

LXXXIII. Si Globorum duorum in ſe mutuo gravitantium materia undique in regionibus quæ à centris æqualiter diſtant homogenea ſit, erit pondus Globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum diſtantiæ inter centra.

Poſtquam inveniſſet Cl. Newtonus gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes, & eſſe in partes ſingulas reciproce proportionalem quadratis diſtantiarum à partibus, dubitabat, an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex partibus pluribus compoſita; an vero quamproxime. Nam fieri potuit ut proportio illa in majoribus diſtantiis ſatis obtineret; at prope ſuperficiem Planetæ ob inæquales particularum diſtantias & ſitus diſſimiles notabiliter erraret. Tandem vero per Prop. 44 & 45. & ipſarum Corollaria eandem proportionem in ſphæricis corporibus, ad eandem ubique à centris diſtantiam æque denſis, accurate obtinere intellexit.

LXXXIV.

LXXXIV. *Problema.* Pondera corporum in diverſos Planetas vel in Solem, ad datas diſtantias ab iſtorum centris definire.

CASUS (1.) Pondera corporum extra Planetarum ſuperficiem ad diſtantias æquales definire. Nimirum cum pondera ad diſtantias æquales ſint ut quantitates materiæ in Planetis verſus quos fit gravitatio, & cum iſtud pondus vel materiæ quantitas ex ejus attractionis quantitate, tanquam cauſa ab effectu, unice dignoſci poſſit; cum demum iſta attractionis quantitas ſit proportionalis velocitatum in æqualibus hiſce circulis quadratis directe, vel temporum periodicorum quadratis reciproce; ex velocitatum quadratis Rationes Ponderum facillime innoteſcent. Ex Temporibus itaque periodicis Planetarum alios circa ſe revolventes habentium prius exhibitis hujuſmodi orietur ratio ponderum in Solem, Jovem, Saturnum, ac Terram reſpective:

Pondus in	*Solem* ——	229600
	Jovem ——	208L72
	Saturnum ——	97L328
	Terram ——	1
	Et *in Lunam* —	$0\frac{1}{26}$.

Iidem autem numeri qui *ponderis* rationem etiam & *quantitatis materiæ* rationem oſtendunt Hac autem analogia tempora periodica diſtantiis realibus congrua ad periodica tempora diſtantiæ datæ cuilibet congrua facile reducentur: nimirum ut Diſtantiæ realis Cubus, ſe habet ad diſtantiæ datæ Cubum, ita Temporis realis periodici Quadratum, ad quartum numerum, ſive ad Temporis Periodici quæſiti Quadratum. Hujuſce igitur numeri radix quadratica dabit Tempus ipſum Periodicum quæſitum. Et hoc pacto rationes ponderum & materiæ in Sole, Jove, Saturno, & Terra obtinemus. Luna autem, cum nullum Satellitem circum ſe habeat, & proinde hujuſmodi indicium nullum ponderis

U 2 in

in se aut materiæ contentæ exhibeat, in æstu autem marino aliud indicium olim exponendum exhibeat, Inde nos eandem mutuo acceptam hic loci reliquis adscribendam duximus.

Cas. (2.) Pondera Corporum ad semidiametrorum Planetariarum distantias, sive in Planetarum superficiebus definire. Eadem nempe methodo ac in priore casu, & simili prorsus analogia ad particulares hasce distantias accommodata. Quo calculo, si semidiametros Planetarum juxta Flamstedium determinatas pro veris habeamus, sic se res habebit,

Sol		763460	
Saturnus	*Patet secundum diametrum.*	67870	*Milliaria Anglica.*
Jupiter		81155	
Mars		4444	
Tellus		7935	
Luna		2175	
Venus		7906	
Mercurius		4240	

Pondus ergo corporum æqualium in Planetarum superficiebus sic se habet.

In	*Solem*	24
	Terram	1
	Jovem	1⌊99
	Lunam	⌊515
	Saturnum	1⌊7

Atque hæc impræsentiarum sufficiant. Reliqua enim in Prælectionem proximam differentur.

April 26. 1708.

XXXV.

XXXV.

LXXXV. Problema. Densitates Planetarum definire. Nimirum cum quantitatem materiæ in Planetis quinque in casu priore ultimæ Propositionis determinatam habeamus; & cum Diametros omnium Planetarum secundum Flamstedium in casu secundo etiam habeamus determinatam; Exinde facile fuerit è data materiæ quantitate in datis sphæris contenta ejusdem materiæ densitatem calculo determinare: quam itaque Tabella apposita exhibebit.

Densitas	*Lunæ*	7⌊00
	Terræ	3⌊87
	Solis	1⌊00
	Jovis	⌊76
	Saturni	⌊60

LXXXVI. Gravitas pergendo à superficiebus Planetarum deorsum decrescit in simplici ratione distantiarum à centris quam proxime.

Si enim Planetæ materia quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc ratio accurate; per Prop. 47. Error igitur tantus est, quantus ab inæquali densitate oriri possit.

Corollarium. Gravitas itaque corporum in ipsis Planetarum superficiebus est omnium maxima, & utrinque decrescit; estque sursum in duplicata reciproca distantiæ ratione, deorsum vero in simplici ratione directa.

LXXXVII. Motus Planetarum & Cometarum in cœlis diutissime conservari possunt.

Cum enim Mediorum resistentia, quæ sola motus hosce semel incæptos retardare & sistere posset, minuatur in ratione ponderis sive materiæ densitatis; sic ut aqua, quæ vicibus fere quatuordecim levior est quam argentum vivum, minus resistat in eadem ratione; & aer, qui vicibus fere mille levior est quam aqua, minus re-

sistat

ſiſtat in eadem ratione; Si ultra Atmoſphæram noſtram, ipſam quoque quaſi in infinitum gradatim rareſcentem, in cœlos, ubi pondus vel denſitas medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immenſum, reſpiciamus, reſiſtentia tantilla erit ut per millennia aliquot vix evadat ſenſibilis: uti revera fuiſſe inſenſibilem motus cœleſtes à primis Aſtronomiæ incunabulis ſine notabili mutatione aut jactura hucuſque perſiſtentes evincunt.

Corollarium. Cum vero in tempore infinito perexigua iſta Reſiſtentia, ſi qua ſit, omnes iſtos motus debuerit retardare, penituſque ſiſtere, palam eſt ex iſta hypotheſi hodiernum cœlorum ſtatum nec à parte ante fuiſſe, nec à parte poſt futurum æternum. Præſertim autem hoc omnino valebit alio nomine, ſi nempe vim gravitatis in tota rerum Univerſitate, & non tantum in Syſtemate Solari obtinere, cum Newtono, ſtatuamus. Si enim Fixæ ſtellæ, ſive Soles, cum Planetis ſuis Cometiſque qualicunque exiſtunt numero, modo non ſit infinitus, Gravitatis vi ſubjecti fuerint, longo demum tempore vis iſta ea omnia una contraxiſſet, & in Univerſi gravitatis centro communi congeſta quieſcere juſſiſſet. Quod etiam tempore infinito futuro ex eodem hypotheſi, ſine Divinæ Providentiæ interpoſitu, neceſſario eſt eventurum. Ut itaque Præſens rerum ſtatus tempore certo cœpit, à Dei O. M. nutu & potentia inchoatus; ita tandem aliquando fieri poteſt ut finem ſortiatur: cum ſcilicet Beneplacito Divino id viſum fuerit: ſine cujus etiam perenni actione, unde Vis hæc miranda gravitatis dependet tota, ne minimum temporis ſpatiolum perdurare poteſt.

LXXXVIII. Commune centrum gravitatis Terræ, Solis, & Planetarum omnium aut quieſcit, aut movetur uniformiter in linea recta. Hoc ex prius demonſtratis liquet. Neque ſane ullo certo indicio apparet utrum quieſcat an moveatur. Hoc tantum ſtatuere licet, Quod ſi moveatur centrum illud, & cum eo Solare Syſtema ut moveatur eſt neceſſe. Stellæ enim fixæ

fixæ nos undique cingentes nec majores ex ulla parte nec minores nobis hodie apparent quam antiquis Aſtronomis ante annos bis mille apparuiſſe narrantur. Quod quidem phænomenon aut centri gravitatis quietem, aut ſaltem motum tardiuſculum monſtrare videtur.

Coroll. (1.) Hinc commune centrum gravitatis Solis & Planetarum omnium pro centro Syſtematis Solaris ſive Mundi Planetarii habendum eſt. Nam cum Sol & Planetæ omnes gravitent in ſe mutuo, & propterea pro vi gravitatis ſuæ ſecundum leges motus prius expoſitas perpetuo agitentur; Perſpicuum eſt quod horum centra mobilia pro Mundi centro quieſcente haberi nequeunt. Si corpus illud in Centro locandum ſit in quod corpora omnia maxime gravitant, & quod centro immobili eſt proximum, uti rationi eſt maxime conſentaneum, privilegium illud concedendum eſt Corpori Solari; quod itaque phyſice loquendo *Centrum Mundi Planetarii* jure merito eſt habendum. Sin accurate & mathematice loqui velimus, cum Sol ipſe moveatur, & nullum corpus ſenſibile quieſcat in centro, Eligendum erit Centrum Gravitatis totius Syſtematis pro Mundi noſtri Centro: quod quidem Centrum revera quieſcere videtur: & à quo Centrum Solis quam minime diſcedit. Phyſice itaque Sol ipſe, Mathematice autem Centrum iſtud Gravitatis eſt Mundi noſtri Centrum.

Coroll. (2.) Nulla ergo datur perfecta quies in natura rerum. Quieſcat enim commune Syſtematis Centrum; at *ſolum* certe quieſcit: omnibus Syſtematis partibus perpetuo motis. Et cum centrum gravitatis ſit non corpus phyſicum, ſive reale, ſed punctum mathematicum, ſive plane nihil, ex hoc ratiocinio ſequitur omnino nihil reale quieſcere; ſive nullam dari in Syſtemate Solari corporum realem & perfectam Quietem.

LXXXIX. Corpus Solare nunquam quieſcit; ſed motu perpetuo agitatur. Nunquam vero longe recedit à communi omnium Planetarum Gravitatis centro.

Nam

Nam cum quantitas materiæ in Sole, ſit ad quantitatem materiæ in Jove, ut 229.600 ad 208L72. ſive ut 1100 ad 1. & diſtantia Jovis à Sole, ſit ad ſemidiametrum Solis, ut 424.000.000, ad 381.730. ſive ut 1100 ad 1, hoc eſt, in eadem ratione circiter; Commune centrum gravitatis Jovis & Solis, ad diſtantiam corporibus ipſis reciproce proportionalem poſitum, incidet fere in ſuperficiem Solis. Eodem argumento cum quantitas materiæ in Sole, ſit ad quantitatem materiæ in Saturno, ut 229.600 ad 97L328. ſive ut 2360 ad 1. & diſtantia Saturni à Sole, ſit ad ſemidiametrum Solis ut 777.000.000 ad 381.730. ſive in ratione paulo minori; incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra ſuperficiem Solis. Unde Commune centrum gravitatis Jovis & Saturni ex parte una, & Solis ex altera parte poſitorum integra Solis Diametro à centro Solis minime diſtabit. Et ejuſdem calculi veſtigiis inſiſtendo, ſi Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte conſiſterent, propter reliquorum parvitatem & viciniam, Commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis Diametro à centro Solis diſtaret. Aliis vero in caſibus, quod plerumque fit, diſtantia centrorum minor erit: & ubi Planetæ hinc inde poſiti ſibi mutuo æquiponderent, plane nulla. Propterea, licet centrum illud gravitatis revera quieſcere ſupponatur, Sol pro vario Planetarum ſitu in omnes partes aliquantulum movebitur; ſed à communi illo gravitatis centro nunquam longe recedet.

XC. Planetæ omnes Primarii moventur in Ellipſibus, Umbilicum communem in Centro Solis habentibus; & radiis ad centrum illud ductis areas deſcribunt temporibus proportionales. Quæ etiam Propoſitio vera eſt in Secundariis circa Primariorum ſuorum centra revolventibus.

Hæc quidem ſupra ex Phænomenis Aſtronomicis deduximus. Jam vero cognitis & ſtabilitis motuum horum principiis, ex his colligimus motus cœleſtes à priori. Ex

Ex gravitatis enim directione verſus centra Solis & Planetarum Primariorum, arearum deſcriptarum æquabilitas; & ex gravitatis lege verſus iſta centra, nempe in diſtantiæ ratione reciproca duplicata, figura iſta Orbium Elliptica circa Centra iſta in Umbilicis poſita neceſſario ſequitur; uti olim è Newtono demonſtravimus. Et hæc quidem ſe haberent accurate, ſi Sol & Planetæ Primarii quieſcerent, neque ſe in mutuo agerent. Forent enim orbes eorum ad rigorem Geometricum Elliptici, Solem Planetaſque Primarios in Umbilicis habentes; atque areæ deſcriptæ eſſent accurate æquabiles, ſive temporibus proportionales. Actiones autem Solis & Planetarum in ſe mutuo perexiguæ ſunt, ut merito contemni poſſint. Et motus Planetarum in Ellipſibus circa Solem & Primarios mobiles quam ſi immobiles eſſent minus perturbantur, uti olim obſervavimus. Unde phyſice loquendo, Propoſitio etiamnum Vera eſt cenſenda. Actio quidem Jovis in Saturnum ejuſque 5. Satellites; & Saturni in Jovem ejuſque 4. Satellites non eſt omnino contemnenda. Cum hi planetæ ingentes ſint, & ad maximam à Sole diſtantiam poſiti. Unde attractionibus ſuis mutuis circa conjunctiones ſuas heliocentricas, ob motuum tarditatem haud parvo etiam tempore durantes, inæqualites nonnullæ tam in orbitarum figuris quam in motibus utrinque orientur: vix tamen in ipſis Planetarum horum Primariorum, adeo ac in Satellitum, præſertim Jovialium motibus inæqualibus dignoſcendæ.

Scholium. Ex Cl. Newtoni calculo vis perturbatrix ſive Gravitas Saturni in Jovem, eſt ad Gravitatem Saturni in Solem, circa Planetarum iſtorum conjunctionem, ut 1 ad 217 circiter. Et Gravitatum Solis in Saturnum, & Jovis in Saturnum differentia, eſt ad gravitatem Jovis in Solem, ut 1 ad 1867. Cui quidem differentiæ proportionalis eſt vis maxima perturbatrix Saturni in Jovem. Unde perturbatio orbis Jovialis longe minor eſt quam ea Saturnii. Reliquorum autem Orbium

Orbium perturbationes ex calculo adeo exiguæ deprehendentur, ut omnino debeant contemni.

XCI. Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.

Propter vim gravitatis in distantiæ ratione duplicata reciproca, Apsides & Aphelia per se quiescere debent; uti prius monitum. Et propter vim eandem, punctum fere immobile semper respicientem, Orbium plana etiam debent quiescere; & quiescentibus planis ut Nodi sive planorum intersectiones quiescant est necesse. Notandum tamen inæqualitates nonnullas à Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in se invicem labentibus seculis orituras; tantillas tamen, ut ob parvitatem plerumque contemni possint. Notandum etiam nos hic loci Centri Gravitatis systematis totius quietem, cum Astronomis omnino omnibus, supponere; etsi quietem istam, uti prius monuimus, nondum *demonstrare* licuerit. His autem positis sequentia Corollaria deducemus.

Coroll. (1.) Quiescunt stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodosque quiescentes positiones servant. Novum certe hoc ratiocinii Astronomici genus! ut ex Planetarum erraticorum systemate Inerrantium quies inferatur: cum è contra ex fixarum quiete supposita Planetarum motus determinare hactenus soliti fuerimus. Ignoratis nimirum ante Cl. Newtonum veris motuum cœlestium causis hujusmodi Corollaria nobilissima ut ignorarentur erat omnino necessum.

Coroll. (2.) Cum fixarum parallaxis, etiam annua, tantilla sit, ut vix Observatoribus accuratissimis se tandem prodat, vires earum, ob immensam corporum distantiam, nullos effectus sortientur sensibiles in regione systematis nostri.

Coroll. (3.) Unde sequitur *Astrologiam Judiciariam*, quam vocant, non solum Planetarum sed & Fixarum posituris & influentiis innixam, omni certo fundamento carere: cum vires maximas eorum corporum supponat quas minimas plane, sive potius omnino nullas esse superiori Corollario sit recte observatum. Quin & hoc etiam addere liceat, vires Planetarum præter Solem & Lunam reliquorum, quas tantopere crepant Astrologi, aut ob distantias enormes, aut ob corporum parvitatem tantillas esse in Atmosphæra nostra, & apud Tellurem, ut vix aut ne vix quidem ullo indicio *sentiri* possint; nedum ut effectus istos, magnos certe & admirandos, quos supponunt, ullo pacto producere queant. Qui Idololatrarum more Stellas Deos esse, vel Deos iis inesse Immortales opinantur, habent, quo patrocinentur hypothesi suæ. Qui vero tam crasso errori olim valedixerunt, mirum quo fato istis næniis, omni sana ratione cassis, tam pertinaci animo etiamnum adhæreant.

Maii 17°. 1708.

XXXVI.

XCII. PLANETARUM motus diurni uniformes sunt & æquabiles: & Librationes Lunæ, ex ipsius motu diurno æquabili, cum menstruo inæquabili collata, & secundum axem ad orbitam inclinatam peracto necessario oriuntur.

Hæc olim annotavimus; nec multis verbis hic opus. Quoniam vero Lunæ circa axem suum uniformiter revolventis dies menstruus est; (periodicum mensem hic volumus:) Hujus facies eadem *superiorem* fere Ellipseos Umbilicum, non vero Tellurem in *inferiori* positam semper respiciet; eo quod motus angularis quoque circa istum Umbilicum fere sit æquabilis, inæquabilis vero circa Tellurem. Et propterea pro situ Umbilici superioris deviabit plerumque hinc inde à Terra, & partes nunc orientaliores nunc occidentaliores nobis exhibebit:

bit: quæ eſt *Libratio Lunæ in Longitudinem*. *Libratio* autem *in Latitudinem*, qua partes nunc borealiores nunc auſtraliores nobis oſtenduntur, oriri debet ex inclinatione axis Lunaris ad planum ſuæ orbitæ; uti rem attentius conſideranti erit apertiſſimum.

Corollarium. Hic loci annotare placet quam accurate inter ſe conſentiant motus hi duo Lunares, neutiquam à ſe invicem dependentes; diurnus nempe & menſtruus: ita ut alter alterum ne minimum quidem antevertere, per bis mille ſaltem annos, ſit deprehenſus. *Non hoc* certe *ſine numine Divûm*, uti alias annotavimus.

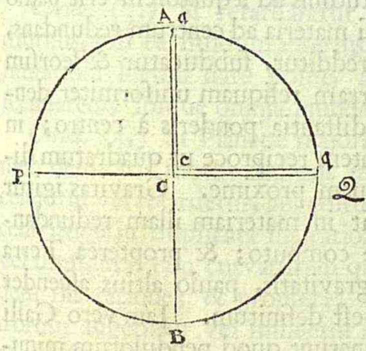
XCIII. Axes Solis & Planetarum motu diurno gaudentium Diametris quæ ad eoſdem axes normaliter ducuntur minores ſunt. Sive Figura Solis & Planetarum in ſe motu diurno revolventium ea eſt ſphæroidis oblatæ; hoc eſt, ſolidi revolutione Ellipſeωs circa axem minorem geniti.

Planetæ & corpora quævis cœleſtia ſublato omni motu circulari diurno figuram ſphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare & induere deberent. Per motum autem circularem diurnum fiet, ut partes ab axe motus neceſſario recedentes, & gravitati detrahentes juxta æquatorem, ubi motus eſt celerrimus, aſcendere conentur. Ideoque eo loci materia Planetæ, niſi admodum ſit ſolida, aſcenſu ſuo ad æquatorem ejuſdem diametros adaugebit; axem vero deſcenſu ſuo, gravitate partium ibi nihil diminuta, ad polos diminuet. Sic Jovis Diameter (conſentientibus obſervationibus Caſſini & Flamſtedii) brevior deprehenditur inter Polos quam ab oriente in occidentem. Eodem Argumento Terra noſtra axem ſuum Æquatoris diametris minorem habere debuit. Niſi enim ita ſe res haberet, & terra noſtra paulo eſſet altior ſub æquatore quam ad polos, maria, ob gravitatem majorem circa polos ſubſiderent, & juxta æquatorem aſcendendo omnia inundarent. Ob majorem vero motus diurni velocitatem & denſitatem minorem, Jupiter differentiam diametrorum multo ma-

gis

gis ſenſibilem quam reliquorum Planetarum quivis, vel Sol ipſe exhibere debet. Unde Obſervatores Aſtronomici in hoc ſolo Planeta hanc differentiam hactenus deprehendere potuerunt. Tellurem autem noſtram eandem figuram olim induiſſe patet, non tantum indicio nuperrime expoſito, ſed & per pendulorum experimenta accuratiſſime inſtituta. Quo enim horologia Oſcillatoria eadem penduli longitudine gaudentia Æquatori proprius admoventur, oſcillationes paulo tardiores, quo ad Polos propius accedunt paulo velociores obſervantur; eo nimirum quod in caſu priori centrum Telluris propius, in poſteriori remotius retardationem & accelerationem corporum pendulorum reſpective procuret, uti ex præſenti Propoſitione fieri erat neceſſe.

Scholium. Si Proportionem Axis Planetæ cujuſvis ad Æquatoris Diametros accurate reſcire cupiatis, Multiplices Calculi Newtoniani ambages obire oportebit. Sin calculi hujuſce fructum ſine calculi tædio percipere placeat, ſic accipitote.



Inito nimirũ calculo invenit Newtonus quod vis centrifuga partium terræ ſub æquatore, ex motu diurno oriunda, ſit ad vim gravitatis in terræ ſuperficie ut 1 ad $290\frac{4}{5}$. Unde ſi *APBQ* figurã Terræ deſignet revolutione ellipſeωs circa axem minorẽ *PQ* genitam; ſitque *ACQqca* canalis aquæ plena à Polo *Qq* ad centrum *Cc* & inde ad æquatorem *Aa* pergens, debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, eſſe ad pondus aquæ in crure altero *QCcq*, ut 291, ad 290 fere. Eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam è ponderis partibus 291 ſuſtinebit & detrahet; & pondus 290 in

altero

altero crure ſuſtinebit partes reliquas. Res enim vera eſt non tantum in ſuperficie Telluris, ſed in omnibus utriuſque cruris partibus, propter vim centrifugam & gravitatem partium inferiorum ſecundum diſtantias à centro proportionales ubique acceptas, eadem ſemper ratione in progreſſu ad centrum diminutas. Et calculum continuando, Fiet Gravitas in loco Q in Terram, ad gravitatem in loco A in Terram, ut 501 ad 500; & vis centrifuga $\frac{1}{290}$ efficiet ut altitudinis exceſſus in crure $ACca$ ſit altitudinis in crure altero $QCcq$ pars $\frac{3}{689} = \frac{1}{230}$. ſive in Tellure noſtra ut ſemidiameter Terræ ſecundum æquatorem, ejuſdem ſemiaxem ſive ſemidiametrum per Polum exuperet milliaribus 17. Hæc inquam ita ſe habebunt ex hypotheſi quod Terra ex uniformi materia conſtet. Nam ſi materia ad centrum paulo denſior ſit, uti certe eſſe debeat, quam ad ſuperficiem, exceſſus altitudinis ad æquatorem erit paulo major; propterea quod ſi materia ad centrum redundans, qua denſitas ibi major redditur, ſubducatur & ſeorſim ſpectetur, gravitas in terram reliquam uniformiter denſam erit reciproce ut diſtantia ponderis à centro; in materiam vero redundantem reciproce ut quadratum diſtantiæ à materia illa quam proxime. Gravitas igitur ſub æquatore minor erit in materiam illam redundantem quam pro ſuperiore computo; & propterea Terra ibi, propter defectum gravitatis, paulo altius aſcendet quam in præcedentibus eſt definitum. Jam vero Galli factis experimentis invenerunt quod pendulorum minutis ſingulis ſecundis oſcillantium longitudo æquatorem verſus minor ſit eâ verſus polos in majore ratione quam ſuperior calculus poſtulat. Et propterea Terra videtur eſſe aliquanto altior ſub æquatore quam pro calculo ſuperiore, & denſior ad centrum quam in fodinis prope ſuperficiem; prout ratio omnino poſtulat.

Coroll. (1.) Si exceſſus gravitatis in locis circumpo-

laribus

laribus ſupra gravitatem ad æquatorem experimentis majori cura inſtitutis accurate tandem determinetur, Determinabitur Menſura Univerſalis; ea nempe quæ penduli ſingulis minutis ſecundis in locis inter æquatorem & polos mediis oſcillantis longitudinem accurate definiat. Unde tam Æquatio Temporis per æqualia pendula in locis diverſis indicati, quam Proportio ſemidiametrorum Terræ, ac Denſitatis ejus ad centrum, modo uniformiter creſcere ſupponatur, una innoteſcent.

Coroll. (2.) Cum ratio ſit eadem in canali aqua pleno ac in canali fluido quovis pleno, eadem etiam ac in Terra intus fluida, dum interea in Terra ſolida res aliter ſe habeat; Cum etiam notum ſit per obſervata & experimenta, quod Terra noſtra revera altior ſit ad æquatorem quam ad polos, exinde conſtat aut Terram totam fluidam fuiſſe cum primum inciperet motus ejus diurnus, aut ſaltem ingens fluidum intus continuiſſe, quod cedendo partium ad Polos depreſſioni & ad æquatorem elevationi locum daret.

Coroll. (3.) Si retardaretur gradatim motus terræ diurnus, niſi ea fluidum interius contineat, quod figuræ mutationi locum dare poſſit, maria verſus polos deſcenderent, ibique omnia inundarent.

Coroll. (4.) Si Planetæ majoris vel minoris, datæ tamen denſitatis motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur inde vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione; propter auctas inde vel diminutas tam curvaturam quam velocitatem in eadem illa ratione; & propterea Differentia ſemidiametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione. Sin denſitas augeatur vel minuatur in ratione quacunque, propter gravitatem in eadem ratione auctam vel diminutam, differentia ſemidiametrorum minuetur vel augebitur in eadem illa ratione. Hoc eſt, Differentia ſemidiametrorum erit in ratione compoſita ex ratione Temporum Periodicorum duplicata, & ex ratione denſitatis ſimplici, utraque reciproca. Unde cum differentia

ferentia

ferentia ſemidiametrorum in Tellure ſit $\frac{3}{689}$ totius ſemidiametri, & Temporis periodici in Jove $9^h. 56'$. quadratum, ſit ad quadratum temporis periodici 24^h. in Tellure, ut 5 ad 29: & denſitas Jovis ſit ad denſitatem Telluris ut 76 ad 387. Differentia ſemidiametrorum Jovis, erit ad Differentiam ſemidiametrorum Telluris, ut $\frac{3 \times 29 \times 387}{689 \times 5 \times 76}$, ad 1. ſive ut $\frac{33669}{261820}$ ad 1. hoc eſt, ut 1 ad 8[illegible] circit. Eſt ergo ſemidiameter æquatoris Jovis ad ſemiaxem ut 9[illegible] ad 8[illegible] circit. Unde obiter mirum non eſt quod tanta differentia Obſervationi Aſtronomicæ pateat. Sed Notandum quod hæc ita ſe habent ubi uniformis eſt Planetæ denſitas. Sin Materia Jovis denſior ſit ad centrum quam ad circumferentiam, uti prius in genere obſervatum, differentia ſemidiametrorum erit adhuc major, & obſervatu facilior. Viderint itaque Obſervatores Aſtronomici, quam accurate hoc Corollarium cum Jovis diametris per micrometrum menſurandis conveniat.

XCIV. Incrementum ponderis pergendo ab æquatore ad polos eſt quam proxime ut Quadratum ſinus recti Latitudinis: ſive, quod perinde eſt, ut ipſi ſinus verſi Latitudinis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia ſunt, & in æquilibrio poſita; & pondera partium ſimilium cruribus totis ſimiliter ſitarum ſunt ad invicem ut pondera totorum, adeoque etiam æquantur inter ſe, erunt pondera æqualium & in cruribus ſimiliter ſitarum partium reciproce ut crura. Et par eſt ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus ſimiliter ſitorum corporum. Horum pondera ſunt reciproce ut crura, id eſt, reciproce ut diſtantiæ corporum à centro Terræ. Proinde, ſi corpora in ſupremis canalium partibus, ſive in ſuperficie Terræ conſiſtant, erunt pondera eorum ad invicem reciproce, ut diſtantiæ eorum à centro. Et eodem argumento pondera

dera in aliis quibuſcunque per totam Terræ ſuperficiem regionibus ſunt reciproce ut diſtantiæ locorum à centro: Et incrementum ponderis in Terra figuræ ſphæroidis oblatæ, quemadmodum demonſtravit Cl. Gregorius, ut quadratum ſinus recti Latitudinis loci; ſive, quod eodem redit, ut ſinus verſus Latitudinis quam proxime.

Aſtron. L.III. Prop. 52.

Vid. Prop. II. Coroll. 2. prius.

Corollarium. Cum itaque demonſtraverit etiam eodem in loco Gregorius longitudines pendulorum æquali tempore oſcillantium eſſe inter ſe ut diſtantiæ à centro Telluris reciproce, erit differentiæ longitudinis pendulorum ut quadratum ſinus recti latitudinis: atque ita ubique.

XCV. Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni motibus Lunæ inæqualibus ſunt plane ſimiles & analogi, & à cauſis ſimilibus & analogis oriuntur.

Motus nempe Nodorum in antecedentia, & Apſidum nunc in antecedentia tardius, nunc in conſequentia velocius, exceſſu vero motus poſterioris ſupra priorem in conſequentia. Motus etiam Variationis Satellitum & reliqui id genus eodem ſe habere debent modo in hiſce ſecundariis Planetis ac ſe habent in Luna, ſecundario pariter Planeta; ita ut eos hic loci ſeorſim tractare nullo modo ſit opus. Notandum tamen, parvitate harum inæqualitatum & tarditate motuum fieri ut motus Satellitum horum Circumjovialium & Circumſaturniorum præ motibus Lunæ conſimilibus ſumme regulares reperiantur; utque Aſtronomi recentiores aut motum omnem Nodis denegent, aut aſſerant tardiſſime retrogradum. Nam Cl. Flamſtedius collatis ſuis cum D. Caſſini obſervationibus nodos Satellitum Circumjovialium tarde regredi deprehendit, Nec dubitandum veniens ævum eccentricitates nonnullas, & apſidum progreſſus, nodos etiam, eorumque regreſſus cum reliquis motibus inæqualibus iis quæ apud Lunam adeo ſunt notabiles analogis certius & explicatius definiturum. Atque hæc impræſentiarum ſufficiant.

Maii 31°. 1708.

XXXVII.

XCVI. **F**Luxus & Refluxus Maris à gravitatione aquæ versus Solem & Lunam, sive ab attractionibus Solis & Lunæ oriuntur.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumescere debere, ac bis defluere, ex prius demonstratis patet. Quod vero aquæ altitudo maxima in maribus profundis & liberis appulsum Luminarium ad meridianum loci non comitatur quidem, sed sequitur, idque trium circiter horarum spatio, hoc in loco accuratius paulo explicari debet. Quod ita se res habet liquet ex observatis æstibus marinis, tam apud Mare Atlanticum & Æthiopici tractum totum orientalem inter Galliam & Promontorium Bonæ spei, quam apud Maris Pacifici littus Chilense & Peruvianum; in quibus omnibus littoribus æstus maximus in horam circiter tertiam incidit; nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Ratio autem hujus rei hæc est: Ubi Luminare est in Meridiano, conatus sive vis attrahens ad maximam suam quantitatem pertigit, illico minuenda; effectus autem hujus vis maximæ nondum ad ἀκμὴν suam pertigit. Motus enim omnis semel impressus perseverat uniformiter, usque dum motus contrarius eundem destruit, aut saltem retardat. Unde sequitur fluxum maris, sive potius oceani per sex circiter horas antemeridianas, si ita etiam de Luna loqui liceat, adauctum, & cum motu diurno conspirando acceleratum, celeritate hac sua majore ulterius pergere debere, & aquas etiam magis magisque protrudendo accumulare, usque dum vis eadem contra motum diurnum postea tendendo motus istius pergentis cursum paulatim sistat & sufflaminet; & easdem aquas mox etiam tardiore gradu incedere & oceani refluxum fieri procuret. Quæ motus retardatio maxime circa octantes sive horam tertiam notabilis esse debet. Exempla hujusmodi

modi effectuum maximorum post causas suas maximas aliquamdiu insequentium quotannis habemus in æstatis calore, hyemisque frigore, non in ipsis solstitiis æstivis hybernisque, sed circa octantes, ut ita dicam, vel sesquimensem abinde maxime intensis; & quotidie in diei calore summo, qui secunda aut tertia à meridie hora major est quam in ipso meridie; uti ex experentia indubia omnibus constare potest. Dum enim post vires maximas, & aquas inde maxime concitatas vires maximis proximæ & in partem contrariam vixdum conversæ etiamnum operentur, vires pauxillulum minores motibus à maximis concitatis & vi insita pergentibus superadditæ majorem illico effectum ut sortiantur est necesse, quam vires usque crescentes motibus minoribus superadditæ sortiri queant. Deinde notandum, vires ipsas attractrices, aquas directe sursum attrahentes, à maxima sua quantitate per horam unam vel etiam alteram postmeridianam vixdum quoad sensum deficere, licet directio attractionis aquas accelerantis vel retardantis in ipso meridiano ad limitem pertingat, & ibidem speciem mutet. Eo itaque in loco aquæ maxime in cumulum assurgent, ubi partes meridianum nuperrime cum velocitate summa prætergressæ in partes alteras ad quadraturam prius summe retardatas incidant, & ita mutuo conatu occurrentes fluxum omnium maximum efficiant, quod circa horam tertiam accidere est apertissimum. Horas enim hoc in loco non vulgares tantum, quod probe notandum, numeramus; sed eas quæ ab appulsu Solis aut Lunæ ad meridianum loci tam infra horizontem quam supra fluunt, & per Horas diei Lunaris intelligimus vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad meridianum loci cujuslibet revolvitur.

XCVII. Fluxus & refluxus maris, tam à vi Solis quam à vi Lunæ seorsim dependentes, non æstum duplicem sed unicum ex virium conjunctione æstimandum procurabunt.

 Quem-

Quemadmodum enim corpus quodvis duplici vi concitatum in lineis duabus pergere nequit, ſed ex conjunctis viribus in parallelogrammi diagonali eodem modo pergit ac ſi vi unica juxta diagonalis directionem concitatum eſſet; ita quidem pari ratione motus hi bini quos luminaria hæc duo excitant non cernentur diſtincte, ſed motum quendam mixtum efficient. In luminarium conjunctione & oppoſitione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus, è virium nimirum *ſumma* tum temporis oriundi. In luminarium quadraturis Sol attollet aquam, ubi Luna deprimit, deprimetque, ubi Luna attollit; & æſtus omnium minimus, è virium nimirum *differentia* tum oriundus, obſervabitur. Et quoniam, experientia teſte, multo major eſt effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra ſyzygias vero & quadraturas æſtus maximus, qui ſola vi Lunari incidere ſemper deberet in horam tertiam Lunarem, & ſola vi Solari in tertiam Solarem, compoſitis viribus incidet in tempus aliquod intermedium, quod tertiæ Lunari multo propinquius erit quam tertiæ Solari; adeoque in tranſitu Lunæ à ſyzygiis ad quadraturas, ubi Hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam Lunarem; idque maximo intervallo paulo poſt octantes Lunæ. Et paribus intervallis æſtus maximus ſequetur horam tertiam Lunarem in Tranſitu Lunæ à quadraturis ad ſyzygias, idque etiam maximo intervallo paulo poſt octantes Lunæ. Hæc nempe omnia in Oceano ſive aperto mari. Nam in Fluviorum Oſtiis fluxus majores cæteris paribus majus tempus requirent, atque ita tardius paulo ad ἀκμὴν ſuam pervenient.

XCVIII. Æſtus marinus propter diverſas luminarium diſtantias à terra tum per ſingulos annos, tum per ſingulos menſes diverſus eſſe debet; idque in triplicata diſtantiarum iſtarum ratione reciproca, ſive in triplicata diametrorum apparentium ratione directa.

Hoc

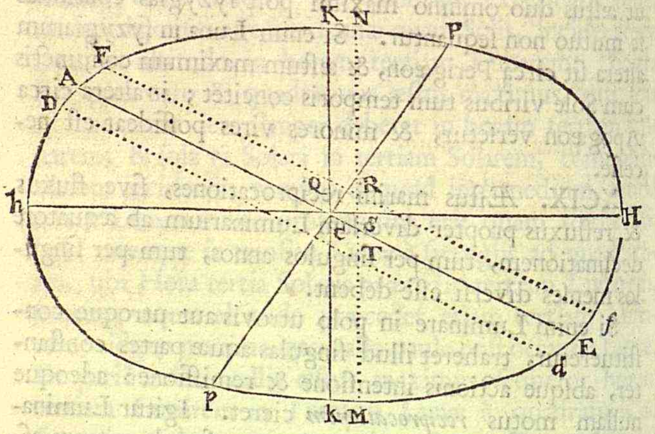
Hoc olim ſuo loco demonſtratum dedimus. Neque mirum certe hoſce & hujuſmodi effectus in minoribus diſtantiis majores, in majoribus minores eſſe. Quocirca Sol tempore hyberno circa Perigæon poſitus majores edet effectus, efficietque ut æſtus poſt ſyzygias paulo majores ſint, ob majorem virium *Summam*, & poſt quadraturas paulo minores, ob minorem virium *Differentiam*, quam æſtivo tempore; cæteris nimirum paribus. Et Luna poſt Perigæon ſingulis menſibus majores ciebit æſtus quam ante vel poſt quindecim dies, ubi in Apogæo verſatur. Unde ſi ſitus Lunæ Perigæus circa conjunctionem accidat, augebitur æſtus diurnus, minuetur nocturnus: ſin ſitus iſte circa oppoſitionem accidat, augebitur nocturnus, minuetur diurnus. Unde etiam fit ut æſtus duo omnino maximi poſt ſyzygias continuas ſe mutuo non ſequantur. Si enim Luna in ſyzygiarum altera ſit circa Perigæon, & æſtum maximum conjunctis cum Sole viribus tum temporis concitet; in altera circa Apogæon verſetur, & minores vires poſſideat eſt neceſſe.

XCIX. Æſtus marini reciprocationes, ſive fluxus & refluxus propter diverſam Luminarium ab æquatore declinationem, tum per ſingulos annos, tum per ſingulos menſes diverſi eſſe debent.

Si enim Luminare in polo utrovis aut utroque conſtitueretur, traheret illud ſingulas aquæ partes conſtanter, abſque actionis intenſione & remiſſione: adeoque nullam motus *reciprocationem* cieret. Igitur Luminaria recedendo ab æquatore polum verſus alterutrum effectus ſuos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æſtus poſt ſyzygias Solſtitiales quam poſt Æquinoctiales. Poſt quadraturas autem Solſtitiales majores evadent æſtus quam poſt quadraturas Æquinoctiales, eo quod Lunæ jam circa æquatorem conſtitutæ effectus maxime ſuperat effectum Solis. Incidunt igitur æſtus maximi poſt ſyzygias, & minimi poſt quadraturas Luminarium, utraſque nimirum Æquinoctiales; & æſtum maximum post syzygias comitatur semper minimus post quadraturas; ut experientia testatur. Per minorem autem distantiam Solis à Terra tempore hyberno quam æstivo fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant æquinoctium vernum quam sequantur; & sæpius sequantur autumnale quam præcedant.

C. Æstus marini Phænomena nonnulla & Luminarium effectus ex diversa locorum in Tellure Latitudine diversi sunt; & præcipue quidem quoad Diurnos & Nocturnos æstus, se invicem immediate consecutos.

Designet nimirum *ApEP* Tellurem, aquis si placet profundis undique coopertam. *C* centrum ejus *P. p.* Polos. *A. E.* æquatorem. *F* locum quemvis extra æ-



quatorem. *Ff* parallelum loci. *Dd* parallelum ei respondentem ex altera parte æquatoris. *H* locum Telluris ei loco quem Luna tribus ante Horis occupabat perpendiculariter subjectum, sive punctum medium aquæ maxime elevatæ. *h* locum huic oppositum, sive punctum medium aquæ ex altera Telluris parte maxime elevatæ. *K, k* loca inde gradibus 90 distantia. *CH, Ch* Maris altitudines maximas à Telluris centro mensuratas.

suratas. & *CK, Ck* altitudines minimas. Et si axibus *Hh, Kk* describatur Ellipsis, deinde Ellipseωs hujus revolutione circa axem majorem *Hh* describatur Sphærois *HPKhpk*, designabit hæc figuram maris quam proxime, & erunt *CF, Cf*; *CD, Cd*, altitudines Maris in locis *F, f* & *D, d*. Quinetiam si in præfata Ellipseωs revolutione punctum quodvis *N*, describat circulum *NM*, secantem parallelos *Ff, Dd* in locis quibusvis *R, T*, & æquatorem *AE* in *S*, erit *CN* altitudo Maris in locis omnibus *R, S, T* sitis in hoc circulo. Hinc in diurna revolutione loci cujusvis *F*, affluxus erit maximus in *F* hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem; postea defluxus maximus in *Q* hora tertia post occasum Lunæ; dein affluxus maximus in *f* hora tertia post appulsum Lunæ ad meridianum infra Horizontem, ultimo defluxus maximus in *Q* hora tertia post ortum Lunæ, & affluxus posterior in *f* erit minor quam affluxus prior in *F*. Distinguitur enim totus Oceanus in duos omnino fluctus hemisphæricos, unum in hemisphærio *KHkC*, ad Boream, alterum in hemisphærio opposito ad Austrum vergente, *KhkC*. quos igitur *Fluctum Borealem*, & *Fluctum Australem* nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuo oppositi veniunt per vices ad meridianos locorum singulorum; interposito nempe intervallo horarum Lunarium quasi duodecim. Cumque regiones boreales magis participant fluctum borealem, & Australes magis Australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores in locis sigulis extra æquatorem. Æstus autem major Luna in verticem loci declinante incidet in horam circiter tertiam post appulsum Lunæ ad meridianum supra horizontem; &, Luna declinationem mutante, & in partes à vertice remotiores concedente, vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima hac de causa incidet in tempora Solstitiorum: præsertim si Lunæ nodus ascendens versetur in principio Arietis; ut ita Luna & vertici proxima, & ab eodem remotiſſima eadem revolutione diurna pertranſeat. Sic ſane experientia compertum eſt æſtus matutinos hyberno tempore veſpertinos, & veſpertinos æſtivo tempore matutinos ſuperare; nimirum ad Plimuthum quidem altitudine pedis unius, ad Briſtoliam vero altitudine quindecim digitorum, Obſervantibus Colepreſſio & Sturmio. Quod vero differentiæ hæ non tantæ videntur quantæ in regionibus adeo ab æquatore remotis, jure poſſet ex hac cauſa expectari, ex alia ſane cauſa oriri poteſt. Motus enim hactenus deſcripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua maris æſtus, etiam ceſſantibus Luminarium actionibus, poſſet aliquamdiu perſeverare. Conſervatio hæc motus ſemel impreſſi minuit differentiam æſtuum alternorum, & æſtus proxime poſt ſyzygias majores reddit; eoſque proxime poſt quadraturas minuit. Hinc enim fit ut æſtus alterni ad Plimuthum & Briſtoliam non multo magis differant quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æſtus omnium maximi in iiſdem portubus non ſint primi à ſyzygiis, ſed tertii; quod cum prius dictis adprime convenit. Retardantur etiam motus omnes in tranſitu per vada, adeo ut æſtus omnium maximus in fretis quibuſdam & fluviorum oſtiis ſint quarti vel etiam quinti à ſyzygiis. Verum hæc hactenus.

Novemb. 8°. 1708.

XXXVIII.

CI. FLuxus Oceani & Refluxus Phænomena in locis particularibus, fretis nimirum, portubus, fluviorum oſtiis, maribus parvis, & cum oceano aut non omnino aut parum communicantibus; in iis etiam quæ longe ab æquatore diſtant; à generali æſtus marini lege haud parum recedunt, & à particularibus locorum circumſtantiis plerumque dependent. Exempli gratia; Fieri poteſt ut æſtus propagetur ob Oceano per freta diverſa ad eundem portum, & citius tranſeat per aliqua freta quam per alia: quo in caſu æſtus idem in duos vel plures ſucceſſive advenientes diviſus, componere poteſt motus novos diverſorum generum: Fieri etiam poteſt ut aut itineris longinquitate, aut flexuoſo ſitu, aut obſtaculorum impedimentis æſtus ſiſtatur fere, & minuatur. (Unde ubi plures Inſulæ, ut in Moluccis, Philippinis, in ſinu Mexicano, in Antillis, aut nullus fere aut longe minor eſt æſtus quam in patente & libero oceano.) Fieri poteſt ut æſtus in oceano mediocris, in fluviis evadat maximus, propter tranſitus anguſtias nimirum, & littorum ſenſim coeuntium convergentiam. In maribus etiam parvis nullus erit aut plane contemnendus aquarum motus. Cum enim æſtus maximus in oceano tantum profundo, per gradus 90 in orientem & occidentem patente, accidere debet; quo minus eſt mare, eo minor ut ſit aquarum acceleratio & retardatio, hoc eſt, minor fluxus & refluxus, eſt neceſſum: niſi ſaltem mare cum Oceano ipſo libere communicet. Si enim nihil aut parum cum Oceano communicet, uti fit in Mediterraneo, æſtus quoque eam ob cauſâ minor expectabitur. In iis etiam maribus quæ longe à partibus æquatoreis, ubi æſtus maxime propagari debet, diſtant; præſertim ſi cum Oceano quoque ægre communicent, minimus erit aquarum æſtus, uti fit in Mari Baltico & Septentrionali. Quod etiam fit in maribus Euxino atque Caſpio; non tantum ob ſitum paulo borealiorem, & minimam aut nullam cum Oceano communicationem, ſed ob marium horum etiam parvitatem. In maribus quæ ab oriente in occidentem late patent, uti in mari Pacifico, & Maris Atlantici & Æthiopici partibus extra Tropicos, aqua attolli ſolet ad altitudinem pedum 6. 9. 12. vel 15. In mari autem Pacifico, quod profundius eſt, & latius patet, æſtus dicuntur eſſe majores quam in Atlantico

lantico & Æthiopico. In mari Æthiopico aſcenſus aquæ intra Tropicos minor eſt quam in Zonis Temperatis, propter anguſtiam maris inter Africam & Auſtralem partem Americæ. In medio mari aqua nequit aſcendere niſi ad littus utrumque & orientale & occidentale ſimul deſcendat; cum tamen vicibus alternis ad littora illa in maribus noſtris anguſtis deſcendere debeat. Ea de cauſa refluxus & fluxus in Inſulis quæ à littoribus longiſſime abſunt perexiguus eſſe ſolet. In portubus quibuſdam, quod nuperrime obſervatum, ubi aqua impetu magno per loca vadoſa ad ſinus anguſtos alternis vicibus implendos & evacuandos influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus ſunt ſolito majores; uti ad Plimuthum, & Pontem Chepſtowæ, in Anglia; ad montes S^ti. Michaelis, & Urbem Abrincatuorum (vulgo Auranches) in Normania; ad Cambaiam & Pegu, in India Orientali. His in locis mare magna cum velocitate accedendo & recedendo littora nunc inundat, nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi poteſt quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30. 40. 50. aut interdum 60. Et par eſt ratio fretorum oblongorum, & vadoſorum, & anguſtorum, uti Magellanici, & ejus quo Anglia circundatur. Æſtus in hujuſmodi portubus & fretis per impetum curſus & recurſus ſupra modum augetur. Ad Littora vero, quæ deſcenſu præcipiti ad mare profundum & apertum ſpectant, ubi aqua ſine impetu effluendi & remeandi attolli libere & ſubſidere poteſt, æſtus ad 12. circiter pedum altitudinem, ſi quantitatem generalem mediocrem definire placeat, conſurgere eſt cenſendus; menſurando nimirum ab ima aquarum refluentium depreſſione, ad ſummam affluentium altitudinem. Omnium autem æſtuum maximorum maxime mirandus ille eſt, quem Cl. Halleius noſtras ex Nautarum Obſervationibus pateſecit in Portu Regni Tunquini ad Batſham, ſub latitudine boreali 20°. 50'. Ibi aqua die tranſitum Lunæ per æquatorem

rem ſequente ſtagnat; dein Luna ad boream declinante incipit fluere & refluere; non bis, ut in aliis portubus; ſed ſemel ſingulis diebus; & affluxus maximus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum; cum Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum; dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit quibus antea creverat: &, Luna declinationem mutante, ceſſat; ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ, & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc Portum fretaque vicina duplex patet, alter ab oceano Sinenſi, inter continentem & Inſulam Luconiam; alter à mari Indico inter continentem & Inſulam Borneo. Veriſimile videtur æſtus duos fere æquales à diverſis iſtis oceani æſtibus in hunc portum venire, quorum prior præcedat alterum ſpatio horarum ſex, incidatque in horam tertiam ab appulſu Lunæ ad meridianum portus. Ubi Luna in hocce ſuo ad meridianum appulſu verſatur in æquatore, venient ſingulis horis ſenis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eoſdem affluxibus æquabunt; & ſic ſpatio diei illius efficient, ut aqua nullo æſtu cieri videatur. Ubi Luna declinat ab æquatore, fient æſtus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti in Propoſitione penultima explicuimus; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores, & bini minores vicibus alternis. Affluxus autem bini majores aquas ſuas conjungendo component affluxum altiſſimum medio inter utrumque tempore: affluxus major & minor faciet ut aqua aſcendat ad mediocrem altitudinem medio ipſorum tempore, & inter affluxus binos minores aqua aſcendet ad altitudinem minimam. Sic ſpatio 24. horarum Lunarium aqua non bis, ut in aliis locis fieri ſolet, ſed ſemel tantum perveniet ad maximam altitudinem, & ſemel ad minimam; & altitudo maxima, ubi Luna declinat in polum ſupra Horizontem loci, incidet in horam ſextam ab appulſu Lunæ ad meridianum; atque

atque, Luna declinationem mutante, mutabitur in defluxum. Æſtus itaque alter ſpatio horarum 12. à mari Indico, & alter ſpatio horarum 6. à mari Sinenſi per freta illa prius memorata venientes, & ſic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, anomalos hos aquarum æſtus componere videntur. Sed Hæc & hujuſmodi particularia phænomena vicinorum littorum & marium obſervationibus ſunt ubique relinquenda.

Scholium. Si calculi Newtoniani ambages refugiamus, & virium quantitates ſolas reſcire velimus, ſic ſtatuendum. Summa virium Solarium tam in deprimendis aquis in regionibus quæ 90. gradibus diſtant à Sole, quam in elevandis in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, ſi conjunctim ſumantur; ſive vires totæ Solares ad agitandum mare ſe habent ad vim gravitatis apud nos, ut 1, ad 12.868.200. Cum autem vis centrifuga partium Terræ à diurno ejuſdem motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1, ad 291, efficiat ut altitudo aquæ ſub æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub polis menſura pedum Pariſienſium 85.200. Vis Solaris, de qua jam agimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12.868.200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 291 ad 12.868.200, ſeu 1 ad 44.221, efficiet ut altitudo aquæ in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, ſuperet altitudinem ejus in locis quæ 90. gradibus diſtant à Sole, menſura tantum pedis unius Pariſienſis, & digitorum undecim: nempe juxta hanc analogiam, $44.221 : 1 :: 85.200 : 1\frac{11}{12}$. Vires autem Lunæ ad mare movendum, quæ hic principalem locum obtinent, ex earundem ad ſolares ratione deducendæ ſunt; & per effectus ſive motuum in ſyzygiis *ſummas*, in quadraturis *differentias* dignoſcendæ: ſunt autem Vires Lunæ ex hoc calculo, ad Vires Solis, ex collatis obſervationibus ut $6\frac{1}{3}$, ad 1 quam proxime; ſive numero rotundo Secuplæ.

Coroll. (1.) Cum igitur, ut prius vidimus, Vires Solis aquam ad altitudinem duorum fere Pedum elevare debeant, Vires Lunæ paulo pluſquam ſecuplæ Solarium aquam ad altitudinem pedum 12. elevare debent: & Vires Lunares & Solares conjunctim in ſyzygiis eandem ad pedes 14, in quadraturis ad pedes 10. elevabunt. Tanta autem vis ad omnes maris motus excitandos abunde ſufficit; & motuum quantitati prius definitæ probe reſpondet; & tam probe reſpondendo æſtuum cauſam recte hic aſſignatam eſſe plane confirmat.

Coroll. (2.) Cum vis Lunæ ad mare movendum ſit ad vim gravitatis, ex prius demonſtratis, tantum ut 1, ad 2.031.821; perſpicuum eſt quod vis illa ſit longe minor quam quæ vel in Experimentis Pendulorum, vel in Staticis, aut Hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In æſtu marino ſolo hæc vis ſenſibilem effectum edere poteſt.

Coroll. (3.) Quoniam Vis Lunæ ad mare movendum, eſt ad Solis vim conſimilem ut $6\frac{1}{3}$ ad 1; & vires illæ ſunt ut denſitates corporum, ſive quantitates materiæ æquali ſpatio contentæ, & ut cubi diſtantiarum ſive diametrorum conjunctim: ipſa enim corpora æque denſa ſunt ut cubi diametrorum verarum directe, ad eandem nempe diſtantiam: & vires motrices in hoc caſu ſunt etiam ut cubi diſtantiarum reciproce, ſive ut diametrorum apparentium cubi directe; atque adeo perinde eſt ſive Sol propius ſit ſive remotius, ſive major ſit ſive minor, modo diameter apparens certa ſit ac determinata. Erit itaque denſitas Lunæ, ad denſitatem Solis, ut effectus; ſive ut $6\frac{1}{3}$, ad 1; & ut Cubus diametri apparentis Lunæ, ad Cubum diametri apparentis Solis, hoc eſt, ut $6\frac{1}{3}$ ad 1; & ut 720, ad 672 conjunctim $= 6\frac{1}{3} \times 720$ ad 1×672. ſive ut 34 ad 5. fere. denſitas autem Solis eſt ad denſitatem Terræ, ut 100 ad 387. Erit itaque denſitas Lunæ, ad denſitatem Terræ, ut 9 ad 5 quam proxime: ſive fere dupla. Eſt igitur corpus

corpus Lunæ fere duplo densius, &, ut ita dicam, terrestrius quam Terra nostra; uti olim anticipando exposuimus.

Coroll. (4.) Unde cum vera Lunæ diameter, sit ad veram Terræ diametrum, ut 5 ad 18, sive ut 1 ad 3 L65: erit massa Lunæ, ad massam Terræ, ut istorum numerorum Cubi, cum densitatis ratione compositi; sive ut 1 X 9 ad 49 X 5. hoc est, ut 1 ad 26, quam proxime.

Coroll. (5.) Gravitas acceleratrix, sive corporum æqualium pondus in superficie Lunæ, erit ut quantitas materiæ in Lunæ, ad quantitatem materiæ in Terra, cum duplicata distantiarum à centris ratione reciproca composita; hoc est, ut 1 X 13, ad 26 X 1, sive duplo minor quam gravitas acceleratrix in superficie Terræ, uti olim quoque anticipando docuimus.

CII. Figura corporis Lunaris (abstrahendo nimirum ab elevatione partium æquatorearum & depressione polarium, à motu ipsius diurno pendentium,) est aliquantulum Ovalis vel Sphæroidis oblongæ; cujus axis maximus productus per centrum terræ transit; & superat axes minores eidem normales excessu pedum 180 circiter. Si corpus Lunare fluidum esset ad instar maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus citimis & remotissimis elevandum, esset ad vim Lunæ, qua mare nostrum in partibus & sub Luna & iisdem oppositis attollitur, ut Vis attrahens Terræ, ad vim attrahentem Lunæ; sive ut quantitas materiæ in Terra, ad quantitatem materiæ in Luna, ob æquales nempe distantias; nisi quatenus minor Lunæ diameter eandem rationem demutat. Est ergo Vis illa tota in ratione composita ex 26 ad 1, & 5 ad 18; sive ut 26 X 5 ad 1 X 18: hoc est, ut 69 ad 9. Unde cum mare nostrum ex prius demonstratis attollatur vi Lunæ ad pedes 12, Fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes fere 90. Eaque de causa figura Lunæ sphærois esset, cujus maxima diameter sive axis major productus

ductus per centrum Terræ transiret, & superaret diametros sive axes perpendiculares excessu pedum circiter 180. Talem igitur figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit.

Corollarium. Inde vero forte fit ut eadem Lunæ facies directius quam alias oporteret in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen Oscillationes, ob parvitatem virium in tantillo axis majoris supra minores excessu, essent longe tardissimæ, adeo ut facies illa quæ Terram semper respicere deberet possit alterum Orbis Lunaris umbilicum, ob motus angularis circa ipsum æquabilitatem, respicere, uti prius expositum; neque statim abinde retrahi & in Terram converti.

CIII. Cometæ sunt Luna superiores, & in regione Planetarum Primariorum versantur.

CIV. Cometæ in sectionibus Conicis, Umbilicos in centro Solis habentibus, moventur; & radiis ad Solem ductis areas temporibus quidem æqualibus æquales, & in universum temporibus semper proportionales describunt.

CV. Cometarum corpora sunt solida, compacta, fixa, ac durabilia, ad instar corporum Planetarum; ingentibus autem atmosphæris plerumque cinguntur; & caudis nunc brevioribus nunc vero longioribus, ex iisdem in Solis vicinia natis, semper ornantur.

Hæ Propositiones Cometographiam Newtonianam continent, quatenus ad nostrum institutum Universam. Illæ autem tam clare & plene ab ipso Authore proponuntur & explicantur, ut nostro commentario minime indigeant. Manum itaque de tabula.

Novemb. 15°. 1708.

[Quæ sequuntur, è Newtono verbatim descripsimus.]

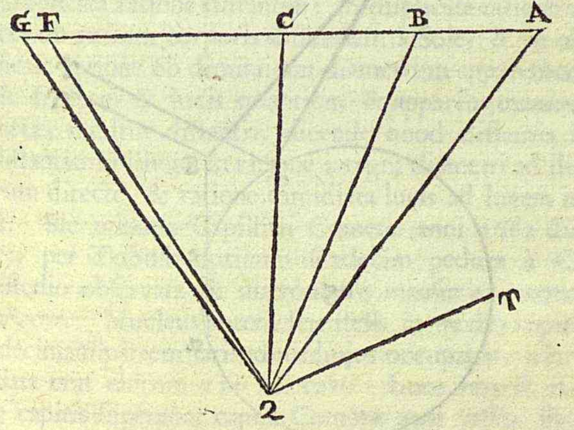
Cometas

Cometas eſſe Lunâ ſuperiores, & in regione Planetarum verſari.

UT defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas ſupra regiones ſublunares, ſic ex Parallaxi annua convincitur eorum deſcenſus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur ſecundum ordinem ſignorum ſunt omnes, ſub exitu apparitionis, aut ſolito tardiores aut retrogradi, ſi Terra eſt inter ipſos & Solem; at juſto celeriores ſi Terra vergit ad oppoſitionem. Et è contra, qui pergunt contra ordinem ſignorum ſunt juſto celeriores in fine apparitionis, ſi Terra verſatur inter ipſos & Solem; & juſto tardiores vel retrogradi ſi Terra ſita eſt ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu Terræ in vario ipſius ſitu, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conſpirante, vel contrario, nunc retrogradi ſunt, nunc tardius moveri videntur, nunc vero celerius. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem celerius fertur, Cometa è Terra ſpectatus, ob motum ſuum tardiorem, apparet eſſe retrogradus; ſin Terra tardius fertur, motus Cometæ, (detracto motu Terræ) fit ſaltem tardior. Ac ſi Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado diſtantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈ *QA*, ♈ *QB*, ♈ *QC* obſervatæ tres longitudines Cometæ, ſub initio motus, ſitque ♈ *QF* longitudo ultimo obſervata, ubi Cometa videri deſinit. Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, ſint ad invicem ut tempora inter obſervationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut ſit *AG* ad *AB* ut tempus inter obſervationem primam & ultimam, ad tempus inter obſervationem primam & ſecundam; & jungatur *QG*. Et ſi Cometa moveretur uniformiter in linea

atque

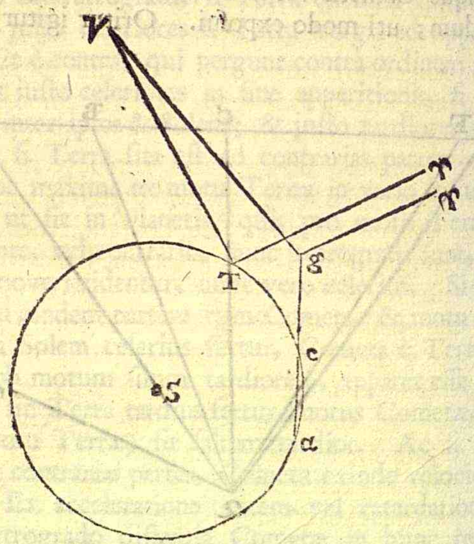
recta, atque Terra vel quieſceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus ♈ *QG* longitudo Cometæ tempore Obſervationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia eſt, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, ſi Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo *AQG*, & ſic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in eaſdem partes cum Terra, eidem ſubducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum; uti modo expoſui. Oritur igitur hic an-



gulus præcipue ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus eſt, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod à Cometæ motu inæquabili in orbe proprio oriri poſſit. Diſtantia vero Cometæ ex hac parallaxi ſic colligitur. Deſignet *S* Solem, *acT* orbem magnum, *a* locum Terræ in obſervatione prima, *c* locum Terræ in obſervatione ſecunda, *T* locum Terræ in obſervatione ultima, & *T*♈ lineam rectam verſus principium Arietis ductam.

Y Suma-

Sumatur angulus ♈ *TV* æqualis angulo ♈ *QF*, hoc est, æqualis longitudini Cometæ ubi Terra versatur in *T*. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut sit *ag* ad *ac*, ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in recta *ac* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur *g* ♈ ipsi *T* ♈ parallela, & capiatur angulus ♈ *gV* angulo ♈ *QG* æqualis, erit hic angulus ♈ *gV* æqualis lon-



gitudini Cometæ è loco *g* spectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur à translatione Terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus *V* orbe Jovis inferior esse solet.

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur majorem habet

bet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex Parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; & insignis ejus quantitas meo computo collocavit disparentes Cometas satis longe infra Jovem. Unde consequens est quod in Perigæis & Periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœlestis à Sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam à Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas, & apparens diameter Cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam Planetæ in ratione integra diametri ad diametrum directe, & ratione dimidiata lucis ad lucem inverse. Sic minima Capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum sexdecim pedum à Cl. Flamstedio observata & micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis superabat caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantia Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverse, & 12″ ad 30″ directe, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665 mense Aprili, ut Author est Hevelius, claritate sua pene fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris vide-

 licet

licet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat, & cum ſtellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quaſi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore intermedio Saturni, nunc ipſi æqualis judicabatur. Porro cum diameter Capillitii Cometarum raro ſuperet 8′ vel 12′, diameter vero Nuclei ſeu ſtellæ centralis ſit quaſi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas haſce ut plurimum ejuſdem eſſe apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux eorum cum luce Saturni non raro conferri poſſit, eamque aliquando ſuperet; manifeſtum eſt quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi ſint, vel non longe ſupra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illuſtrari deberent à Sole noſtro, quam Planetæ, qui hic ſunt, illuſtrantur à Stellis fixis.

Hæc diſputavimus non conſiderando obſcurationem Cometarum per fumum illum maxime copioſum & craſſum, quo caput circundatur, quaſi per nubem obtuſe ſemper lucens. Nam quanto obſcurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat neceſſe eſt, ut copia lucis à ſe reflexa Planetas æmuletur. Inde veriſimile fit Cometas longe infra Sphæram Saturni deſcendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi ſparſi per æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore caſu minuenda eſt diſtantia Cometarum, ne fumus à Capite ſemper ortus per ſpatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expanſione propagetur. In poſteriore referenda eſt lux omnis tam caudæ quam capillitii ad Nucleum capitis. Igitur ſi imaginemur lucem hanc omnem congregari & intra diſcum Nuclei coarctari, Nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentiſſimam emittit, Jovem ipſum ſplen-

ſplendore ſuo multum ſuperabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illuſtrabitur à Sole, adeoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita ſub Sole deliteſcentia, & caudas cum maximas tum fulgentiſſimas inſtar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis ſi in ſtellam congregari ſupponatur, ipſam Venerem, ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque ſuperaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum creſcente in receſſu Cometarum à Terra Solem verſus, ac decreſcente in eorum receſſu à Sole verſus Terram. Sic enim Cometa poſterior Anni 1665 (obſervante Hevelio,) ex quo conſpici cœpit, remittebat ſemper de motu ſuo, adeoque præterierat Perigæum; Splendor vero capitis nihilominus indies creſcebat, uſque dum Cometa radiis Solaribus obtectus deſiit apparere. Cometa Anni 1683, obſervante eodem Hevelio, in fine Menſis Julii ubi primum conſpectus eſt, tardiſſime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter ſingulis diebus in orbe ſuo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur uſque ad Sept. 4. quando evaſit graduum quaſi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis micrometro menſurata colligitur: quippe quam Hevelius reperit Aug. 6. eſſe tantum 6′. 5″. incluſa coma, at Sept. 2. eſſe 9′. 7″. Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem Hevelius. Proinde toto hoc tempore, ob receſſum ipſius à Sole, quoad lumen decrevit, non obſtante acceſſu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa Medium Menſis Decembris, & iſte Anni 1680 circa finem ejuſdem Menſis, celerrime movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum ſplendor maximus capitum contingit ante duas fere ſeptimanas, ubi modo exierant de radiis Solaribus; & ſplendor maximus

 cau-

caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes Cysati, Decem. 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & Decem. 16. (jam in Perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. Jan. 7. Keplerus de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis Dec. conspectum & à Flamstedio observatum est caput Cometæ posterioris, in distantia novem graduum à Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. Decem. 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique splendore Nubium juxta Solem occidentem. Decem. 26. velocissime motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, Stellæ tertiæ magnitudinis. Jan. 3. apparebat ut Stella quartæ, Jan. 9. ut Stella quintæ, Jan. 13. ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. Jan. 25. vix æquabat Stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia à Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales à Terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga Solis maxime splenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque situ differentia concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux Cometarum regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissime moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Coroll. (1.) Splendent igitur Cometæ luce Solis à se reflexa.

Coroll. (2.) Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturnum deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniores qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias Cometarum reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quam in Hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur à Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longe major sita est à latere Terræ quod Solem respicit; inque parte illa majore Cometæ Soli ut plurimum viciniores magis illuminari solent.

Coroll. (3.) Hinc etiam manifestum est, quod cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos etiam contra cursum Planetarum diutissime conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum à capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphæræ inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si è Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata, situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

Orbem Cometæ Anni 1680 & 168$\frac{0}{1}$ spectanti & reliqua Phænomena in animo revolventi haud difficulter constabit quod corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes Terræ, Solis, & Planetarum, Cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est reciproce ut quadratum distantiæ locorum à Sole. Ideoque cum di-

 stantia

ſtantia Cometæ à Sole Dec. 8. ubi in Perihelio verſabatur, eſſet ad diſtantiam Terræ à Sole ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æſtivi apud nos ut 1.000.000 ad 36, ſeu 28.000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis eſt quaſi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æſtivum Solem; ut expertus ſum: & calor ferri candentis (ſi recte conjector) quaſi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in perihelio verſantem ex radiis Solaribus concipere poſſet; quaſi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omniſque materia volatilis ſtatim conſumi ac diſſipari debuiſſent.

Cometa igitur in perihelio ſuo calorem immenſum ad Solem concepit, & calorem illum diutiſſime conſervare poteſt. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem ſuum omnem ſpatio horæ unius in aere conſiſtens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conſervaret in ratione diametri, propterea quod ſuperficies (ad cujus menſuram per contactum aeris ambientis refrigeratur) in illa ratione minor eſt pro quantitate materiæ ſuæ calidæ incluſæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id eſt pedes plus minus 40.000.000 latus, diebus totidē, & idcirco annis 50.000, vix refrigeſceret. Suſpicor tamen quod duratio Caloris ob cauſas latentes augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarem rationem veram per experimenta inveſtigari.

Porro notandum eſt quod Cometa Menſe Decembri, ubi ad Solem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & ſplendidiorem quam antea Menſe Novembri, ubi perihelinm nondum attigerat. Et univerſaliter caudæ omnes maximæ & fulgentiſſimæ è Cometis oriuntur ſtatim poſt tranſitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem

dinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud ſit quam vapor longe tenuiſſimus, quem caput ſeu Nucleus Cometæ per calorem ſuum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex eſt opinio, eas vel jubar eſſe Solis per tranſlucida Cometarum capita propagatum; vel oriri ex refractione lucis in progreſſu ipſius à capite Cometæ in Terram: vel denique nubem eſſe ſeu vaporem à capite Cometæ jugiter ſurgentem & abeuntem in partes a Sole averſas. Opinio prima eorum eſt qui nondum imbuti ſunt ſcientia rerum opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroſo non cernitur niſi quatenus lux reflectitur è pulverum & fumorum particulis per aerem ſemper volitantibus: adeoque in aere fumis craſſioribus infecto ſplendidius eſt, & ſenſum fortius ferit; in aere clariore tenuius eſt & ægrius ſentitur: in cœlis autem abſque materia reflectente nullum eſſe poteſt. Lux non cernitur quatenus in jubare eſt, ſed quatenus inde reflectitur ad oculos noſtros. Nam viſio non fit niſi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione Caudæ, ne cœlum totum luce Solis illuſtratum uniformiter ſplendeat. Opinio ſecunda multis premitur difficultatibus. Caudæ nunquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum ſolent eſſe comites inſeparabiles. Lux Fixarum & Planetarum diſtincte ad nos tranſmiſſa demonſtrat medium cœleſte nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur fixas ab Ægyptiis comatas nonnunquam viſas fuiſſe, id quoniam rariſſime contingit, aſcribendum eſt nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & ſcintillatio ad refractiones tum Oculorum tum aeris tremuli referendæ ſunt: quippe quæ admotis oculo Teleſcopiis evaneſcunt. Aeris & aſcendentium vaporum tremore fit ut radii facile de anguſto pupilli ſpatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde eſt quod ſcintillatio in priori caſu generetur, in poſteriore autem ceſſet: & ceſſatio in poſteriore caſu demonſtrat regularem

gularem tranſmiſſionem lucis per cœlos abſque omni refractione ſenſibili. Nequis contendat quod caudæ non ſoleant videri in Cometis cum eorum lux non eſt ſatis fortis, quia tunc radii ſecundarii non habent ſatis virium ad oculos movendos, & propterea caudas fixarum non cerni: ſciendum eſt quod lux fixarum plus centum vicibus augeri poteſt mediantibus Teleſcopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copioſior eſt, caudæ vero nullæ: Cometæ autem ſæpe caudatiſſimi ſunt, ubi capitum lux tenuis eſt & valde obtuſa: ſic enim Cometa Anni 1680, Menſe Decembri, quo tempore caput luce ſua vix æquabat ſtellas ſecundæ magnitudinis, caudam emittebat ſplendore notabili uſque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: poſtea Jan. 27 & 28 caput apparebat ut ſtella ſeptimæ tantum magnitudinis, cauda vero luce quidem pertenui ſed ſatis ſenſibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obſcuriſſima, quæ cerni vix poſſet, porrigebatur ad gradum uſque duodecimum vel paulo ultra: ut ſupra dictum eſt. Sed & Feb. 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri deſierat, caudam gradus duos longam per Teleſcopium contemplatus ſum. Porro ſi cauda oriretur ex refractione materiæ cœleſtis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppoſitione, deberet deflexio illa in iiſdem cœli regionibus in eandem ſemper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 Decemb. 28. hora $8\frac{1}{2}$ P.M. Londini, verſabatur in ♓ 8 *gr.* 41 cum latitudine boreali 28 *gr.* 6′, Sole exiſtente in ♑ 18 *gr.* 26′. Et Cometa Anni 1577 Dec. 29. verſabatur in ♓ 8 *gr.* 41′. cum latitudine boreali 28 *gr.* 40′. Sole etiam exiſtente in ♑ 18 *gr.* 26′ circiter. Utroque in caſu Terra verſabatur in eodem loco & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen caſu cauda Cometæ (ex meis & aliorum obſervationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppoſitione Solis Aquilonem verſus; in poſteriore vero (ex Obſervationibus Tychonis) declinatio erat graduum 21 in auſtrum. Igitur repudiata cœlorum

cœlorum refractione, ſupereſt ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem à capitibus oriri & in regiones à Sole averſas aſcendere confirmatur ex legibus quas obſervant. Ut quod in planis orbium Cometarum per Solem tranſeuntibus jacentes, deviant ab oppoſitione Solis in eas ſemper partes quas capita in orbibus illis progredientia relinquunt. Quod ſpectatori in his planis conſtituto apparent in partibus à Sole directe averſis; digrediente autem ſpectatore de his planis, deviatio paulatim ſentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor eſt ubi cauda obliquior eſt ad orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præſertim ſi ſpectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major eſt ubi major eſt deviatio, & magis ſenſibilis ubi cauda cæteris paribus longior eſt: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor eſt juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeo quod cauda convexo ſui latere partes reſpicit à quibus fit deviatio, quæque in recta ſunt linea à Sole per caput Cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores ſunt & latiores, & luce vegetiore micant, ſint ad latera convexa paulo ſplendidiores & limite minus indiſtincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ à motu capitis, non autem à regione cœli in qua caput conſpicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, ſed à capite ſuppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in aere noſtro fumus corporis cujuſvis igniti petit ſuperiora, idque vel perpendiculariter ſi corpus quieſcat, vel oblique ſi corpus moveatur in latus; ita in cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores aſcendere debent à Sole (uti jam dictum eſt) & ſuperiora vel rectâ petere, ſi corpus fumans quieſcit; vel oblique, ſi corpus progrediendo

endo loca semper deserit à quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel à mutationibus aeris nostri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obscurantium oriantur; vel forte à partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendis sufficiant, ex Cometarum Atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate aeris Nostri. Nam aer juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 vicibus majus quam aqua ejusdem ponderis, ideoque aeris columna Cylindrica pedes 850 alta ejusdem est ponderis cum aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem aeris ad summitatem Atmosphæræ assurgens æquat pondere suo columnam aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea si columnæ totius aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam aquæ altam pedes 32. Inde vero (ex Hypothesi multis experimentis confirmata, quod compressio aeris sit ut pondus Atmosphæræ incumbentis, quodque gravitas sit reciproce ut quadratum distantiæ locorum à centro Terræ) computationem per Coroll. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod aer, si ascendatur à superficie Terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quam apud nos in ratione longe majori, quam spatii omnis infra orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus aeris nostri digitum unum latus,

latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes Planetarum regiones ad usque sphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum aer adhuc altior in immensum rarescat; & coma seu Atmosphæra Cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quam rarissima. Et quamvis, ob longe crassiorem Cometarum Atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in se mutuo, fieri possit ut aer in spatiis cœlestibus inque Cometarum caudis non adeo rarescat; perexiguam tamen quantitatem aeris & vaporum ad omia illa caudarum phænomena abunde sufficere ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine sua paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam Lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam vero caudarum crassitudinem, luce pariter Solari illustratam, astra minima absque claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam aeris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo tempore vapor à capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci fere potest ducendo rectam à termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si rectà ascendat à Sole, ascendere cœpit à capite quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non rectà ascendit à Sole, sed motum Cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa quæ orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem à linea caudæ di-

divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ Jan. 25. ascendere cæperat à capite ante Decemb. 11. adeoque ascensu suo toto dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ Dec. 10. apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui à tempore perihelii Cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in vicinia Solis celerrime ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni constabat qui à tempore perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quam ob nimiam suam tam à Sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, à capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrime peragunt ac diutissime conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum & progressum in partes à Sole aversas Keplerus ascribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est à ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ, impeditissimis in regionibus nostris, à radiis Solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam à Sole ascendere. Cum autem gravitas corporum terrestrium sit ut materia in corporibus, adeoque servata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, suspicor ascensum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Ascendit fumus in camino impulsu aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus ascendit, ob diminutam suam gravitatem specificam, & fumum implicatum rapit secum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum ascenderit à Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, nisi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram æthream cui implicantur. Illa calore sibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem suam specificam qua prius tendebat in Solem, ascendet & secum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad ascensum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur à Sole recedere, at Solis Atmosphæra & materia cœlorum vel plane quiescit, vel motu solo quem à Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ sunt causæ ascensus caudarum in vicinia Solis, ubi orbes curviores sunt, & Cometæ intra densiorem & ea ratione graviorem Solis Atmosphæram consistunt, & caudas quam longissimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc nascuntur, conservando motum suum & interea versus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipsibus pro more capitum, & per motum illum capita semper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ postea decidant à capitibus Solem versus, quam gravitas capitum efficere possit ut hæc decidant à caudis. Communi gravitate vel simul in Solem cadunt, vel simul in ascensu suo retardabuntur, adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita positionem quamcunque ad invicem à causis jam descriptis aut aliis quibuscunque facillime accipiant & postea liberrime servent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum periheliis nascuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt,

bunt, & vel inde post longam annorum seriem cum iisdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefacti paulatim evanescent. Nam postea in descensu capitum ad Solem caudæ novæ breviusculæ lento motu à capitibus propagari debebunt, & subinde, in Periheliis Cometarum illorum qui adusque Atmosphæram Solis descendunt, in immensum augeri. Vapor enim in spatiis illis liberrimis perpetuo rarescit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem superiorem latior sit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per cœlos universos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem suam attrahi & cum eorum Atmosphæris misceri rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiose satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis Cometæ requiri videntur; ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuo suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuo decrescere deberent, ac tandem deficere. Porro suspicor spiritum illum, qui aeris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmosphæræ Cometarum in descensu eorum in Solem excurrendo in caudas diminuuntur, & (ea certe in parte

parte quæ Solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum à Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur; si modo Phænomena eorum Hevelius recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in Atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus crassior & nigrior esse solet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus à Sole ac Terra distantiis, obscurius apparuit post perihelium suum quam antea. Mense enim *Decem.* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at Mense *Novem.* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigiensi Novem.* 19. Cometa hicce luce sua quamtumvis plumbea & obtusa æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quam postea. Et *D. Storer* literis quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus Mense *Decembri*, ubi caudam maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere Cometæ qui Mense *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur quod materia capitis sub initio copiosior esset & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, describantur subobscura & exigua. Nam Anno 1668 Mart. 5. St. nov. hora septima Vesp. *R. P. Valentinus Estancius, Brasiliæ* agens, Cometam videt Horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda vero supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus è mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem splendor tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda.

Unde etiam in Portugallia quartam fere cœli partem (id est gradus 45) occupasse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra Horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est quod caput à Sole recessit, eique proximum fuit sub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et similis legitur Cometa anni 1101 vel 1106. *cujus Stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio Mensis Feb. circa vesperam ad occasum Solis brumalem. Inde vero & ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Parisiensis, *distabat quasi cubito uno, ab hora tertia* [rectius sexta] *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens.* Talis etiam erat ardentissimus ille Cometa ab *Aristotele* descriptus Lib. I. Meteor 6. *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente vero die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ scilicet] *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita est* [capiti] *Cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* [id est ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem tempore hyberno, & ascendens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit.* Cometa ille anni 1618, qui è radiis Solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem, vel etiam Lunam æquasse traduntur.

Diximus Cometas esse genus Planetarum in Orbibus valde excentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum è Planetis non caudatis, minores esse solent qui

qui in orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, sic etiam Cometas, qui in Periheliis suis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores esse, & in orbibus minoribus revolvi rationi consentaneum videtur. Orbium vero transversas diametros & revolutionum tempora periodica ex collatione Cometarum in iisdem orbibus post longa temporum intervalla redeuntium determinanda relinquimus.

XXXIX.

EXPOSITA jamjam Philosophia Newtoniana, *Halleianam Cometographiam*, Newtonianæ succenturiatam, & inædificatam, exponere conabimur. Et cum Opus hocce Cl. Halleii sit per se nobilissimum, at succinctius paulo atque obscurius traditum, utpote grandioris tantum operis prodromum; neque alibi in Tyronum usum facilius explicatum etiamnum extet, Integrum illud hoc in loco, verum perpetuo Commentario auctum atque illustratum exponere, & iterato in publicum dare volui. Præfatio quidem Historica eidem præfixa commentario non indiget; eandem tamen, nequid præclari hujusce operis hic loci desideretur, exscribere non gravabor. Sic vero se habet.

Astronomiæ Cometicæ Synopsis.

Act. Philosoph. Num. 297. pag. 1882, &c. An. Domini. 1705. Mense Martio.

" Veteres Ægyptii & Chaldæi, siqua Fides Dio-
" doro Siculo, longa observationum se-
" rie instructi, Cometarum ἐπιτολὰς [sive
" exortus] prænunciare valuerunt. Cum
" autem iisdem artibus etiam Terræ Mo-
" tus ac Tempestates prævidisse dican-
" tur, extra dubium est Astrologiæ potius calculo fa-
" tidico, quam Astronomicis motuum Theoriis, eo-

" rum de his rebus scientiam referendam esse. Ac vix
" alia à Græcis, utriusque populi victoribus, reperta
" est apud eos doctrina; adeo ut eam, quam nunc eo
" usque proveximus, Astronomiam, Græcis ipsis, præ-
" sertim magno Hipparcho, uti inventoribus, accep-
" tam debeamus. Apud hos vero Aristotelis senten-
" tia, qui Cometas nihil aliud esse voluit quam vapo-
" res sublunares, vel etiam Meteora aerea, tantum ef-
" fecit, ut hæc Astronomicæ scientiæ pars longe sub-
" tilissima omnino neglecta manserit; cum nemini o-
" peræ pretium visum fuerit vagas & incertas fluitan-
" tium in æthere vaporum semitas adnotare, scriptisque
" mandare; unde factum ut ab illis nihil certi de motu
" Cometarum ad nos transmissum reperiatur.

" Seneca autem Philosophus, perpensis duorum in-
" signium sui temporis Cometarum Phænomenis, non
" dubitavit iis loca inter corpora cœlestia assignare, Sy-
" dera esse cum mundo duratura existimans, quanquam
" motus eorum legibus nondum compertis regi fateatur.
" Tandemque Vaticinio non irrito promittit aliquando
" futura secula, quibus hæc tam occulta *dies extraheret*
" *ac longioris ævi diligentia*: quibusque admirationi fo-
" ret hæc *Veteres* nescire potuisse; postquam *Demon-*
" *straverit aliquis* Naturæ Interpres *in quibus Cœli parti-*
" *bus Cometæ errent, quanti, qualesque sint.* Ab hac
" autem Senecæ sententia in diversas partes abiit pene
" omnis Astronomorum Cohors; ac ipse Seneca, neque
" phænomena motus, quibus opinionem hanc tueretur,
" neque tempora adscribere dignatus est quæ posteris
" ad hæc definienda usui forent. Ac evolutis pluri-
" mis Cometarum historiis nihil omnino invenio quod
" huic negotio inservire possit ante annum à Christo
" nato 1337 quo Nicephorus Gregoras Historicus &
" Astronomus Constantinopolitanus nobis Cometæ se-
" mitam inter fixas satis accurate descripsit: tempora
" autem nimis laxe consignavit: ita ut non nisi
" quod abhinc quadringentis pene annis apparuerit lu-
" bri-

" bricus & incertus hic Cometa Catalogo, quem damus,
" inseri mereatur. Dein Cometa Anni 1472 om-
" nium velocissimus ac terris proximus Regiomonta-
" num habuit Observatorem. Hic magnitudine ac
" Coma terribilis, unius diei spatio 40 gradus sub cir-
" culo cœli maximo emensus est, ac omnium primus
" est de quo observata idonea ad nos pervenere. Quot-
" quot autem Cometas considerarunt, usque ad tem-
" pora Tychonis Brahe, magni illius Astronomiæ re-
" stauratoris, eos sublunares esse autumarunt, adeoque
" parvi penderunt, utpote pro Vaporibus habitos. Anno
" autem 1577. (Tychone jam studio astrorum serio
" incumbente, comparatisque Machinis ingentibus pro
" dimetiendis cœli arcubus majori cum cura & certitu-
" dine quam Veteribus sperare fas erat) Emersit Co-
" meta satis conspicuus; cui observando strenue sese ac-
" cinxit Tycho; multisque & fidis experimentis de-
" prehendit nulli, quæ sentiretur, Parallaxi diurnæ
" obnoxium fuisse; adeoque non tantum non fuisse
" Vaporem aereum, sed & etiam multo superiorem
" extisse Luna: imo nihil obstabat quin inter ipsos
" Planetas collocaretur; frustra interim contra obstre-
" pentibus Scholasticorum nonnullis.

" Tychonis vero eximiam in observando industri-
" am excepit Kepleri sagacissimum & pene divinum
" ingenium. Hic Tychonis laboribus fretus, & Sy-
" stema Mundi verum & Physicum adinvenit, ac sci-
" entiam Astronomicam in immensum auxit. Mon-
" strato scilicet Planetas omnes in planis per Solis Cen-
" trum transeuntibus revolvi, Curvasque Ellipticas de-
" scribere; ea lege, ut Areæ Sectorum Ellipticorum
" ad Centrum Solis in Ellipseωs foco constituti tem-
" poribus, quibus describantur arcus, semper propor-
" tionales sint. Invenit etiam Distantias Planetarum à
" Sole esse in sesquialtera ratione temporum periodico-
" rum; sive Cubos Distantiarum esse ut Quadrata Tem-
" porum. Tanto autem artifici affulsere duo Cometæ;

" quo-

" quorum alter maxime illustris. Ex horum observa-
" tis conclusit Keplerus, non uno parallaxis annuæ in-
" dicio Cometas inter Orbes Planetarum liberrime qua-
" quaversum ferri: motu quidem non multum à recti-
" lineo diverso; sed quem nondum definire licuit. Ac
" Hevelius, Tychonis æmulus, Kepleri vestigiis insi-
" stens eandem Hypothesim Motus rectilinei amplexus
" est; ipse plurium Cometarum Observator perquam
" subtilis. Cœlo tamen Calculum suum non penitus
" consentire questus est; Viamque Cometicam versus
" Solem incurvari ei suboluit. Tandem de summo
" cœlo lapsus est prodigiosus ille Cometa Anni 1680.
" quasi Casu perpendiculari Solem petens, & exinde
" pari velocitate assurgens: Hic per quatuor Menses
" continuos visus, insigni ac peculiari curvitate Or-
" bitæ ad investigationem Motus Theoriæ præ cæteris
" idoneus erat: instructis autem jampridem Regiis
" Observatoriis, Parisiensi & Grenovicensi, ac Astro-
" nomorum Clarissimorum curæ commissis, accidit ut
" hujus Cometæ Motus apparens, quantum forsan Mor-
" talibus fas est, accuratissime à Cassino & Flamstedio
" observaretur.

" Non multo post, dum Geometrarum Princeps il-
" lustrissimus Newtonus operam dabat *Principiis Philo-
" sophiæ Mathematicis*; Non solum inventa Kepleri in
" Systemate Planetario locum habere demonstravit, ve-
" rum etiam Cometarum Phænomena omnia ex iisdem
" Principiis evidenter consequi. Id quod exemplo
" prædicti Cometæ Anni 1680 abunde illustravit;
" modumque docuit Geometrice construendi Orbitas
" Cometarum, Problemaque arduum, ac tanto Oedipo
" dignum summa cum omnium admiratione resolvit.
" Cometam autem hunc in orbe parabolico Solem cir-
" cumiisse probat; ita ut areæ ad centrum Solis æsti-
" matæ temporibus proportionales fuerint.

" Tanti Viri vestigia insecutus eandem methodum
" calculo arithmetico accommodare aggressus sum,
" inquit

" inquit Cl. Halleius, nec irrito conamine. Undique
" enim conquisitis Cometarum Observationibus, Ta-
" bellam immensi pene calculi fructum obtinui; exi-
" guum quidem, sed non ingratum Astronomis munus.
" Hi etenim numeri vim habent omnia quæ de motu
" Cometarum hactenus observata sunt accuratissime re-
" præsentandi, ope solius Tabulæ Generalis insequentis:
" cui adornandæ nullis sane peperci laboribus, ut per-
" fecta prodiret; utpote posteritati consecrata, ac cum
" scientia Astronomica duratura.

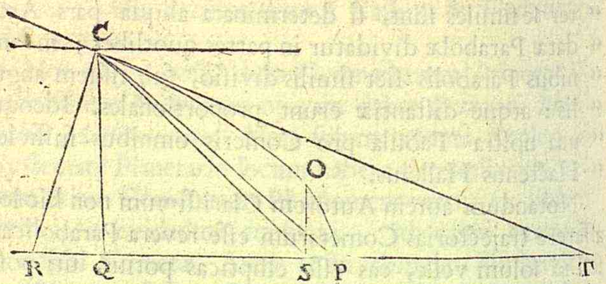
Hactenus Cl. Halleius sine Interprete. Jam vero reliquam Cometographiæ partem in membra discerptam ut Commentario illustremus res ipsa postulat.

Tabulæ generalis Constructio & Usus.

" Ut Planetæ in Orbibus Ellipticis, ita Cometæ
" in Parabolicis, Solem in Foco communi situm am-
" biunt; ea lege, ut Areæ æquales æqualibus tempori-
" bus describantur. Quoniam vero Parabolæ omnes in-
" ter se similes sunt, si determinata aliqua pars Areæ
" datæ Parabolæ dividatur in partes quotlibet; in om-
" nibus Parabolis fiet similis divisio, sub iisdem angu-
" lis: atque distantiæ erunt proportionales. Ideoque
" una nostra Tabula pro Cometis omnibus sufficiet.
" Hactenus Halleius.

Notandum autem Autorem Clarissimum non hic loci asserere trajectorias Cometarum esse revera Parabolicas; sed id solum velle, eas esse ellipticas potius, uti postmodum liquebit; sed adeo eccentricas, ut pars illa orbitarum ellipticarum quæ mundum Planetarium spectat, & quæ circa Solem & Tellurem versatur, sive quam nos Terricolæ videre possumus, tantillum à lineæ parabolicæ parte curvata & congeneri discrepare, ut vice ellipseos Parabola tuto & sine sensibili errore assumi possit. Prius enim monitum ellipses omnium specierum esse posse, & concentricas in Circulos, infinite eccentricas in Parabolas degenerare. Neque proinde mirum ſi loco ellipſeos, figuræ difficilioris contemplationis, & ignotæ, in hoc caſu, ſpeciei, Parabolam contemplatu longe faciliorem, & unius ſemper ſpeciei adhibere cupiamus: eo nempe in loco ubi phænomena Cometarum trajectorias tantum non Parabolicas nobis planiſſime exhibere dignoſcuntur. Areæ æquabilitatem, Planetas æque ac Cometas ſpectantem, olim expoſuimus; neque actum prius nunc agere ſuſtinebimus. Palam autem eſt ſimiles figuras, ut circulos & parabolas, qualeſcunque ſint, ſimiles partium, atque proportionales linearum correſpondentium diviſiones, numeris iiſdem exprimendas, admittere & poſtulare. Pergat Halleius.

“ Calculi autem hujus Tabulæ hæc eſt ratio. In
“ Schemate, ſit S. Sol. $P\ O\ C$ Orbita Cometæ. P
“ perihelion. O Locus ubi Cometa quadrante diſtat à
“ Perihelio. C locus quivis alius. Junge CP. CS;
“ ac fiant ST. SR æquales ipſi CS. ac ductis rectis



“ CR, CT. (quarum hæc Curvæ Tangens eſt, illa per-
“ pendicularis,) in axem $P\ S\ R$ demitte Normalem
“ CQ. Jam data quavis Area $COPS$ oportet angu-
“ lum CSP, & diſtantiam CS inquirere. Hæc Au-
“ thor.

Nimirum uti in Aſtronomia Planetaria locum Planetæ,

netæ, ſive diſtantiam ab Axe Ellipſeos angularem, quam ejuſdem *anomaliam veram* dicimus una cum *diſtantia à Sole* abſoluta, imprimis quærimus; ita & in Cometis, ſimilem angulum & diſtantiam ut primo inveſtigemus eſt neceſſe. Notandum autem ex natura Parabolarum omnium Lineam SO eſſe Lateris recti dimidiam. SP ejuſdem Lateris recti partem quartam, ſive ipſius SO dimidiam: atque ducta ad punctum quodvis ut C tangente CT, erectaque ad eandem linea perpendiculari CR, axem ſecante, & dimiſſa ab eodem puncto C ad axem perpendiculari CR, axem ſecante CQ; eſſe SC, SR, & ST inter ſe æquales: eſſe quoque lineas PQ, PT, inter ſe æquales; & lineam QR eſſe ipſi SO, ſive Lateris recti ſemiſſi æqualem. Quæ omnia ex Conicis ſunt notiſſima. Pergat Author.

“ Jam data quavis Area $COPS$ oportet angulum CPS,
“ & diſtantiam CS, inquirere. Quoniam ob naturam
“ Parabolæ recta RQ ubique æqualis eſt ſemilateri
“ recto. Ponatur latus rectum $= 2$; adeoque $RQ =$
“ 1: ac ſit recta $CQ = z$. erit itaque $PQ = \frac{1}{2} zz$;
“ ac Segmentum Parabolicum $COP = \frac{1}{12} zzz$; Tri-
“ angulum autem CSP erit $\frac{1}{4} z$. adeoque area mixti-
“ linea $COPS$ erit $= \frac{1}{12} z^3 + \frac{1}{4} z = a$. ac $z^3 +$
“ $3z = 12a$. Quare reſoluta hac æquatione Cubica,
“ z, ſive ordinatim applicata CQ innoteſcet. Hæc
“ Halleius.

Obſervandum autem probe viam hic analyticam ſterni inveniendæ anomaliæ coæquatæ in parabola, ex data ſemper anomalia media, hoc eſt, area deſcripta, tempori deſcriptionis ubique proportionali. Neque ſine analyſi ex data area ſive anomalia media, angulus CST ſive anomalia coæquata directe inveniri poteſt. Quod vero ex hypotheſi quod linea primo quærenda CQ (ex ea enim inventa angulus CST facile reperietur, uti mox patebit.) dicatur z, linea PQ æquabitur $\frac{1}{2} zz$ demonſtratu eſt perfacile: nam ut $RQ. = 1$, ad $CQ = z$, ita eadem $CQ. = z$, ad QT, ſive zz. cujus pars dimi-

dimidia proinde QP æquabitur $\frac{1}{2}zz$. Quod vero ſegmentum Parabolicum COP ex eadem hypotheſi recte exprimetur per $\frac{1}{12}zzz$ ex Conicis etiam facillime conſequitur. Eſt enim area $COPSQ$, ad triangulum CPQ, ſive CPT eidem æquale. ut 4 ad 3: atque adeo area parabolica COP ad CPQ ut 1 ad 3. & cum triangulum CPQ ex perpendiculari CQ ſive z in dimidiam baſin $\frac{1}{4}zz$ ducta, fit $\frac{1}{4}zzz$, erit ejus pars tertia neceſſario $\frac{1}{12}zzz$, æqualis areæ parabolicæ COP. Eſt quoque triangulum CSP, ex perpendiculari z in dimidiam baſin $\frac{1}{4}$, æquale $\frac{1}{4}z$: atque adeo ſumma arearum COP, & CPS, ſive integra area $COPS$ tempori proportionalis erit æqualis ſummæ harum quantitatum, quæ dicitur a: ſive orietur æquatio hæc $\frac{1}{12}z^3 * + \frac{1}{4}z * = a$: & multiplicando utrinque per 12. $z^3 + 3z = 12a$. Quæ eſt æquatio cubica, cujus termini ſecundus & quartus deſunt. Inventa itaque hujus æquationis radice, ſive ipſius z valore in numeris, per methodum, ſi placet, Halleianam alibi exhibitam, vel aliter, Lineæ CQ longitudo innoteſcet. *Q. E. I.*

Audiamus jam ipſum Authorem.

" Proponatur jam area OPS in partes centenas dividenda. Hæc area duodecima pars eſt quadrati lateris recti: adeoque $12a$ æquantur quadrato illo $= 4$. Si itaque ſucceſſive extrahantur radices æquationum $z^3 + 3z = 0,04 : 0,08 : 0,12 : 0,16$: &c. habebuntur totidem z, ſive ordinatim applicatæ CQ reſpective; ac diviſa erit area SOP in partes centenas. Eodemque modo ultra locum O continuandus eſt calculus. Radix autem hujus æquationis cum RQ ſit $= 1$. Tangens eſt tabularis anguli CRQ, ſive dimidii anguli CSP; adeoque angulus CSP datur. Ejus denique anguli CRQ ſecans RC media proportionalis eſt inter RQ, ſive unitatem, & RT, quæ dupla eſt ipſius SC; ut ex Conicis notiſſimum eſt. Quod ſi SP ponatur 1, adeoque latus rectum $= 4$, ut in Tabula noſtra, ipſa RT erit diſtantia quæſita, duplum ſcilicet ipſius SC in priore parabola. Ad hunc modum ſequentem Tabulam elaboravi, repræſentandis omnium Cometarum motibus inſervientem: hactenus enim nullus ex Obſervatis Parabolæ leges reſpuit. Hæc Author.

Quod vero area OPS ſit pars duodecima quadrati lateris recti hinc liquet; quod ex conicis area OPS ſit $\frac{2}{3}$ rectanguli OS in SP; hoc eſt, rectanguli dimidii lateris recti, in ejuſdem partem quartam. Nam $\frac{2}{3}$ in $\frac{1}{8} = \frac{1}{12}$. Numeri autem quivis ut 4. 8. 12. 16. Si in ſecundo Decimalium loco ponantur, uti hic fit, partes centenas rite exprimerit. Ideo autem angulo recto tanquam norma principali computationis contenti ſumus, quod periodo integra in parabolis caremus. Ob æquales vero SC, SR, angulus externus trianguli iſoſcelis CRS, duplo angulo CRS æquabitur. Datoque proinde per tabulas Tangentium angulo CRQ duplum ejus, ſive angulus CST, hoc eſt, *anomalia* Cometæ *coæquata* habetur. Pariter, dato jam angulo CST, ſi per auream regulam ſit, Ut $RQ = 1$, ad anguli iſtius ſecantem, ex iiſdem Tabulis deſumendam; ita iſta ſecans, ad tertiam proportionalem RT; Hujus ſemiſſis RS æquatur ipſi SC, ſive diſtantiæ Cometæ à Sole. *Q. E. I.*

Novemb. 29°. 1708.

XL.

" Restat jam, inquit Halleius, præcepti calculi tradere, modumque ſupputandi locum Cometæ viſum ex his numeris exhibere. Cometæ autem in Parabola moventis Velocitas ubique, eſt ad Velocitatem Planetæ gyrantis in circulo circa Solem, ad eandem à Sole diſtantiam; ut $\sqrt{2}$, ad 1. ut conſtat ex " Prin-

" Principiis Phil. Nat. Math. Lib. I. Prop. 16. Coroll.
" 7. Si itaque Cometa in perihelio ad distantiam æqua-
" lem distantiæ terræ à Sole supponatur, erit area diurna,
" quam describeret Cometa, ad aream quam descri-
" bit Terra, ut $\surd 2$ ad 1: ac proinde tempus annuum,
" ad tempus quo Cometa talis describeret quadrantem
" Orbitæ suæ à Perihelio, ut 3.14159, *&c.* (hoc est,
" ut area circuli) ad $\surd\frac{8}{9}$. Hæc ille.

Quod velocitas in parabola sit ad velocitatem, pro eadem distantia, in circulo ut $\surd 2$ ad 1, vel ut 10 ad 7 fere, olim demonstravimus: sive potius ex natura curvaturæ circularis & parabolicæ, & ratione subtensarum anguli contactuum in hisce curvis, instar Corollarii, deduximus. Tempus autem in circulo ecliptico annuum, sive tempus revolutionis integræ per circuli aream integram, ex semiperipheriæ in radium ductu æstimandam, expositum; erit ad tempus descriptionis arcus quadrantalis in parabola, per parabolæ aream quadrantalem ex ductu $\frac{2}{3}$ semilateris recti in ejusdem *lateris* sive *radii* quadrantem æstimandam, expositum; ut ipsæ areæ; sive ut altitudines rectangulorum ad communem basin: nisi quatenus velocitas descriptionis in Parabola istam temporum rationem turbat, & minuit, in ratione 1 ad $\surd 2$. itaque vice $\frac{2}{3}$ adhibeatur $\surd\frac{4}{9}$: & duplicetur numerator propter numerum quadratum, scilicet binarium, unitatis duplum, hoc est, pro circulo adhibeatur ejus area 3.141.59. pro Parabola $\surd\frac{8}{9}$. atque ita facile intelligetur ratiocinii Halleiani veritas. " Pergat autem ille:

Prop. XXII. *prius.*

" Cometa igitur describeret quadrantem illum diebus
" 109. 14^h. $46'$, adeoque area illa parabolica, areæ
" *POS* analoga, in centum particulas distributa, sin-
" gulis diebus competunt particulæ 0.912.280. cujus
" Logarithmus, nempe 9.960.128 in perpetuum usum
" servandus est. Tempora autem quibus Cometa in
" distantia majore vel minore quadrantes similes descri-
" beret, sunt ut revolutiones in circulis, hoc est, in
" sesqui-

" sesquiplicata ratione distantiarum; adeoque areæ di-
" urnæ, in partibus centesimis quadrantis æstimatæ,
" (quas medii motus mensuras, instar graduum poni-
" mus) sunt in singulis in subsesquialtera ratione distan-
" tiæ periheliæ à Sole.

Medius nempe motus diurnus 0.912.280 Logarithmo *Negativo* — 0.039.872 ex antiquiore more exprimendus, more hic loci novo *Positivo* 9.960.128. ad evitandas nempe characteristicæ negativæ moras, exprimitur: rejecto nimirum in additione denario, cum usus venerit, ut formæ consuetæ æquivaleat. Recte autem hic notat Halleius in diversis Parabolis quadrantem eodem quidem partium numero, nempe centenario, ubique censeri; ita tamen ut partes istæ revera inæquales, & pro magnitudine Parabolæ majores, pro parvitate minores sint, & ea quidem ratione majores vel minores, non qua ipsæ à Sole distantiæ crescunt, vel decrescunt, sed in ejusdem subsesquialtera: ita ut distantiarum Quadrata sint inter se ut harum partium Cubi reciproce.

" His necessario præmissis proponatur alicujus è Co-
" metis nostris Locum visum ad datum tempus suppu-
" tare. Primum itaque Solis locus ab æquinoctio in
" promptu sit; ejusdemque distantiæ à Terra Loga-
" rithmus. 2°. Capiatur intervallum temporis inter
" tempus Perihelii & tempus datum, in diebus parti-
" busque diei decimalibus. Hujus numeri Logarithmo
" addatur Logarithmus constans 9.960.128. ac com-
" plementum Arithmeticum sesquialterius Logarithmi
" distantiæ periheliæ à Sole. Summa, Logarithmus
" erit motus medii in prima columna tabulæ generalis
" quærendi. 3°. Cum motu medio capiatur in ta-
" bula correspondens angulus à Perihelio; & Loga-
" rithmus pro distantia à Sole: ac in Cometis directis
" *adde*, in retrogradis *subduc*; si fuerit tempus post
" perihelium: vel in directis *subduc*, & in retrogradis
" *adde*; si fuerit ante Perihelium; angulum sic inven-
" tum à loco, [subtrahe] vel ad locum Perihelii [adde]
" &

" & habebitur Locus Cometæ in Orbita propria: & ad
" Logarithmum pro distantia ibidem inventum adda-
" tur Logarithmus distantiæ periheliæ: Summa erit
" Logarithmus distantiæ veræ Cometæ à Sole. 4°. Cum
" Loco Cometæ in Orbita, dato loco Nodi, Capiatur
" distantia Cometæ à Nodo; ac dato Inclinatione plani,
" dabuntur notissimis Trigonometriæ præceptis Locus
" Cometæ ad Eclipticam reductus, cum inclinatione
" sive Latitudine Heliocentrica; ac distantiæ curtatæ
" Logarithmus. 5°. Ex his datis iisdem omnino re-
" gulis quibus loca Planetarum ex dato loco & distan-
" tia Solis, obtinebitur Locus Visus, seu Geocentri-
" cus, cum Latitudine Visa. Id quod exemplo uno
" vel altero operæ pretium erit illustrare. Hæc ille. Quod ad Locum Solis attinet, ejusque à Terra distantiam, utrumque calculo Astronomico reperire alibi docuimus. Distantiarum autem Logarithmos, incuria quadam illic omissos, ad calcem hic dabimus; ut huic negotio æque ac reliquis Astronomiæ usibus possit inservire. Ideo autem Logarithmus dierum additur dato unius diei Logarithmo, ut motus unius diei, per dierum numerum multiplicatus intelligatur: notum enim est additionem Logarithmorum, numerorum Logarithmis correspondentium multiplicationem inferre. Atque hæc suffecerint, modo Cometa in Perihelio suo ad distantiam Radio Orbis magni æqualem pertransire supponatur. Sin, quod plerumque (si non semper) usu venire solet, ad majorem distantiam, uti nonnunquam fit; aut ad minorem, uti sæpius, Cometæ pertranseat; area ista tempori proportionalis augenda est vel minuenda; idque in subsesquialtera istius minimæ à Sole distantiæ ratione: ut ita demum area ista *anomaliam mediam* recte exponere possit. Unde priori Logarithmorum summæ addendus est istius distantiæ sesquiplicatæ Logarithmus, & radius subducendus, juxta aureæ regulæ per Logarithmos administrandæ exigentiam: sive, quod perinde est, istius Logarithmi sesquialterius complemen-

mentum Arithmeticum solummodo addendum. Neque mirum videri debet quod in distantiis *minoribus addendo* Logarithmum, veram rationem adauctam atque eandem in *majoribus* distantiis diminutam obtineamus. Multiplicatio enim per fractionem vel partes decimales non minus minuit summam, quam multiplicatio per numeros integros eandem auget. Et par est ratio additionis Logarithmicæ: uti facile notum. Observandum autem Logarithmos in tertia Tabulæ generalis columella consignatos non esse numerorum distantiarum à Sole præter radium sive præter distantiam minimam ipsi radio addendorum, sed numerorum* quorum multiplicatione distantiam istam veram obtineretur. Unde eorundem Logarithmi sibi invicem superadditi Logarithmum istius distantiæ à Sole integræ facile exhibebunt. Hisce rite intellectis calculus haud ægre administrabitur; nempe ut apud Halleium sequitur.

*Vid. corr. T. p. 367.

EXEMPLUM I.

Quæritur Locus Cometæ Anni $166\frac{4}{5}$ Martii 1°. 7^h. 00′. P. M. Londini. Hoc est 96°. 19^h. 8′. post Perihelion ejus Novemb. 24°. 11^h. 52′. Celebratum.

Log. Dist. Perihel.	10.011.044		°. ′. ″.
Log. sesquialt. —	10.016.566	*Perihel.* ☊ ——	10.41.25
	———	*Ang. Correspond.*	83.38. 5
Comp. Arith. ——	9.983.434	*Comet. in Orb.* ♉	17. 3.20
	9.960.128	☊. ♊.	21.14.00
Log. Temp.	1.985.862	*Com. à Nodo.*	34.10.40
	———	*Red. ad Eclip.*	32.19. 5
Log. Med. Mot.	1.929.424		———
	———	*Com. Helioc.* ♉	.18.54.55
Medius Motus.	85.001	*Incl. Bor.*	11.46.50

Log. pro dist.	0. 2 5 5. 3 9 6
Log. Perihel.	0. 0 1 1. 0 4 4
Co-sin. Incl.	9. 9 9 0. 7 5 4
Log. dist. Curt.	0. 2 5 7. 1 6 7
Log. dist. ☉.	9. 9 9 7. 9 1 8

	°	′	″
☉. ♓. —	21.	44.	45.
Com. Vis. ♈.	29.	18.	30.
Lat. Vis. Bor.	8.	36.	15.

EXEMPLUM II.

Quæritur Locus Cometæ Anni 1683 Julii 23°. 13^h. 35′. P. M. Londini. Vel 13^h. 40′. T. æquat hoc est 21°. 10′. 50″. post Perihelion.

Log. Dist. Perihel.	9.748.343		° ′ ″
Log. sesquialt. ——	9.622.514	*Perihel.* ♊. — —	25.29.30
		Ang. Correspond.	56.47.20
Comp. Arith.	0.377.486	*Comet. in Orb.* ♈.	28.42.10
	9.960.128	☋. ♓.	23.23.00
Log. Temp.	1.310.723	*Com. à* ☋.	35.19.10
		Red. ad Eclip.	4.48.30
Log. Med. Mot.	1.648.337	*Com. Helioc.* ♓.	28.11.30
Medius Motus.	44L498	*Incl. Bor.*	35. 2. 0

Log. pro dist.	0. 1 1 1. 3 3 6
Log. Perihel.	9. 7 4 8. 3 4 3
Co-sin. Incl.	9. 9 1 3. 1 8 7
Log. dist. Curt.	9. 7 7 2. 8 6 6
Log. dist. ☉.	0. 0 0 6. 1 0 4

	°	′	″
☉ *Locus* ♌.	10.	41.	25.
Com. Visus ♋.	5.	11.	50.
Lat. Bor. —	28.	52.	00.

Jam

Jam vero, ut Calculus hicce Cometicus rite administretur, Notandum (1°) Logarithmum distantiæ minimæ, sive periheliæ, ea tantum de causa hic apponi, ut alterum Logarithmum, ejusdem sesquialterum, sive ad priorem ut 3 ad 2, rationis nempe sesquialteræ indicem, obtineamus. (2°) Hujus Logarithmi postremi complementum Arithmeticum Logarithmo constanti unius diei additum conficere Logarithmum integri temporis ante vel post perihelion. Per Logarithmos enim operando numeri ex. gr. in exemplorum priore sic sese habebunt. Logarithmus unius diei est 9.960.128. & dierum Logarithmus est 1.985.862. Hi soli simul additi Logarithmum medii motus conficicerent, si modo distantia perihelia esset unitati, sive radio Orbis magni æqualis: Sed cum augenda sit ista medii motus area in ratione istius distantiæ periheliæ sesquialterius, ad radium Orbis magni, addendus est Logarithmus iste sesquialter 0.016.566, ad priorem Logarithmum; & subtrahendus numeri denarii Logarithmus; sive, quod perinde est, addendum solummodo Logarithmi sesquialterius Complementum Arithmeticum: quod hoc in loco factitatum: Medius vero motus ex ejusdem Logarithmo jam dato facile innotescet. (3°) Dato jam motu medio, sive *anomalia media*, eidem in Tabula generali angulus correspondens est 83°. 38′. 5″. (inventis nimirum ubi opus, per auream regulam partibus ubique intermediis proportionalibus.) qui ex loco Perihelii apud Leonem 10°. 41′. 25″. *subductus*, propter motum nempe Cometæ retrogradum, & post perihelion, dat Locum Cometæ in Orbita Propria, sive *Anomaliam Coæquatam*, apud Taurum 17°. 3′. 20″. (4°) Locum hunc à Loco Nodi descendentis apud Geminos 21°: 14′. 00″. subtrahe: Reliqua erit distantiæ Cometæ à Nodo, 34°. 10′. 40″. (5°) Ut jam Locum Cometæ in Orbita propria ad Eclipticam, pro Planetarum more, reducamus, resolvendum est Triangulum Sphæricum Rectangulum, atque ex dato Angulo &

 Hypo-

Hypotenuſa, invenienda ſunt Latera reliqua. Nimirum pro reductione ad Eclipticam ſecundum Longitudinem Heliocentricam, ſequens analogia ſufficiet.

Ut Radius ——— ———		10.000.000
	°. ′. ″.	
Ad Co-ſin. Ang.	21.18.30.	9.969.248
Ita Tangens——	34.10.40.	9.831.890
Ad Tangentem ——— ———		9.801.138=32°.19′.5″.

Pro Inclinatione ſive Latitudine Heliocentrica ſequens analogia eſt adhibenda.

Ut Radius ——— ———		10.000.000
	°. ′. ″.	
Ad Sin. ———	34.10.40.	9.749.553
Ita Sin. Ang. Dat.	21.18.30.	9.560.369
Ad Sin. Ang. Quæſit. —		9.309.922=11°.46′.44″

(6°) Ut Logarithmum veræ Cometæ à Sole Diſtantiæ obtineamus, Logarithmum *pro diſtantia à Sole* in Tabula generali motui medio congruum Logarithmo diſtantiæ minimæ, ſive Periheliæ addere oportebit: *viz.* 0.255.369 + 0.011.044 = 0.266.413: & dein ſequentem inſtituere analogiam.

Ut Radius ——	10.000.000
Ad Diſt. à Sole --	0.266.413
Ita Co-ſin. Inclin.	9.990.754
Ad Diſt. Curt. --	0.257.167

Sive, quod eodem recidit, addendi ſunt tres Logarithmi, & abjiciendus, Radii Logarithmus; uti fit in exemplis noſtris. (7°) Ad Obtinendam Cometæ Longitudinem Geocentricam ſive Locum Viſum in Ecliptica, hac methodo utendum. Longitudinem Cometæ Heliocentricam 1ˢ. 18°. 54′. 55″. ſubtrahe à vero Solis

lis

lis Loco in Ecliptica. 11ˢ. 21°. 44′. 45″. reſtabit *Angulus Commutationis* 10ˢ. 2°. 49′. 50″. Cujus ad circulum complementum eſt 1ˢ. 27°. 10′. 10″. ſive graduum 57°. 10′. 10″. Hujus dimidium eſt 28°. 35′. 5″. Unde inſtituenda eſt hæc analogia.

Ut Diſt. Telluris —	9.997.918	
Ad Diſt. Com. Curtat.	10.257.167	
Ita Radius ——— —	10.000.000	°. ′. ″.
Ad Tangentem ———	10.259.249	= 61. 10. 3.
Rejectis vero gradibus 45 *reſt.* ———		16. 10. 3. *Ergo*
Ut Radius ——— ——	10.000.000	
Ad Tang. 16°. 10′. 3″.	9.462.265	°. ′. ″.
Ita Tangens ſemiſummæ	9.736.294	= 28. 35. 5.
Ad Tang. ſemidifferentiæ	9.198.559	= 8. 58. 36.

Qua ſemidifferentia ex ſemiſumma ablata, reſtant 19°. 36′. 29″. hoc eſt, *Orbis Parallaxis*. Hac autem Parallaxi à Loco Cometæ Heliocentrico hoc in caſu ſubtracta, datur Locus ejuſdem Geocentricus ♈. 29°. 18′. 26″. paulo accuratius, opinor, quam calculus Halleianus eundem exhibet. Quod ſi Cometæ Diſtantia à Sole Curtata minor ſit diſtantia Telluris à Sole, uti fit in exemplorum altero, calculus eſt inſtituendus juxta morem pro Planetis *inferioribus*; (uti hic inſtituitur juxta morem pro ſuperioribus.) Et ſemidifferentia angulorum, *elongationem à Sole* eo in caſu exhibitura, Longitudini Solis in Ecliptica addenda eſt, vel ab eadem auferenda, ut Locum Cometæ Geocentricum habeamus.

(8°) Ad Latitudinem Cometæ Geocentricam definiendam hæc anologia eſt adhibenda. (Angulo Elongationis ex aggregato ſemiſummarum conflato.)

	°. ′. ″.	
Ut Sinus Anguli Commutationis	57.10.10.	9.924.423
Ad Sinum Anguli Elongationis —	37.33.41.	9.785.053
Ita Tangens Inclinationis —— ——	11.46.44.	9.319.161
Ad Tangentem Latitudinis ———	(8.36.09)	9.179.791

Aa2 “ Mo-

“ Momento autem primi Exempli, *Londini* obſervatum eſt Cometam applicari ad Stellam ſecundam *Arietis*; ita ut novem minutis illa borealior repertus ſit, ac tribus minutis orientalior: Obſervante D^no^. *Roberto Hookio*. In ſecundo autem Exemplo ipſe, in vicinia *Londini*, inſtrumentis quibus olim Stellas Auſtrales obſervaveram, Cometæ locum deprehendi ♋. 5°. 11′. ½, cum Latitudine Boreali, 28°. 52′, conſentiente ad amuſſim obſervatione *Grenovicenſi* eodem pene momento facta.

“ Cometa autem Anni 1680, qui pene Solem attigit, (non enim triente ſemidiametri corporis Solaris à ſuperficie ejus diſtabat in Perihelio) cum Latus rectum exiguum admodum ſit, Tabula Generali haud coerceri potuit, ob immanem Motus medii velocitatem: præſtat itaque in hoc, poſtquam inventus fuerit Motus medius, ex eodem, ope præcedentis æquationis $zzz + 3z = \frac{4}{100}$ *Mot. med.* Tangentem dimidii anguli à Perihelio elicere, una cum Logarithmo pro diſtantia à Sole. Quibus datis iiſdem omnino regulis ac in cæteris procedendum eſt.

“ Ad hunc itaque modum Aſtronomico Lectori examinare licet numeros à me poſitos, quos ſumma cura ex obſervationibus quæ ſuppetebant exantlavi; neque enim, antequam probe ad incudem redacti fuerint, ac multorum annorum ſtudio quantum fieri poſſit politi, in publicum prodeunt. Hoc autem ſpecimen Aſtronomiæ Cometicæ, futuri operis Prodromum, editum eſſe volui; ne forte ſuperveniente fato perirent lucubrationes noſtræ, ob Calculi difficultatem non cuivis homini denuo ſuſcipiendæ. Monendus autem eſt Lector, quinque priores ordine Cometas, quorum tertius & quartus eſt à *Petro Apiano* obſervatus, quintus vero à *Paulo Fabricio*, uti & decimus à *Mæſtlino* (ni fallor) anno 1596 conſpectus, non eundem certitudinis gradum cum reliquis præ ſe ferre. Neque enim debitis organis nec cura ad hoc requiſita obſervationes ipſæ peractæ ſunt; adeoque inter ſe diſſidentes nullo modo cum computo regulari conciliari poſſunt. Cometam anni 1684 unus videt *Blanchinus* obſervator *Romanus*: ultimum vero Anni ſc. 1698 *Pariſienſes* ſoli conſpexerunt, ejuſque curſum inſolito modo deſignarunt. Obſcurus hic admodum, etiamſi velox ac terris ſatis vicinus, noſtros ſane oculos alioquin non incurioſos effugit. Inſignes autem duos hac noſtra ætate Cometas, alterum Anno 1689 Menſe *Novembri* ortum, alterum Menſe *Februario* Anni 1702, Catalogo ſubjungere non licuit, propter defectum obſervationum. Etenim verſus mundi plagas Auſtrales curſum dirigentes, ac in *Europa* vix conſpicui, contemplatores non habuere negotio pares. Quod ſi forſan ex partibus *Indicis* advectæ fuerint accuratæ obſervationum ſeries ad hoc neceſſariæ; lubens calculum repetere, horumque Orbitas, reliquorum ad modum, Numeris deſignandi laborem ſuſcipere non gravabor.

“ Quibus perpenſis, ac collatis inter ſe cæteris horum Cometarum motuum Elementis, videre eſt, nullo ordine diſpoſitos eſſe Orbitas; neque ipſos, Planetarum more, Zodiaco comprehendi poſſe, quaquaverſum tam retrograde quam directe indifferenter latos; unde manifeſtum eſt eos motu vorticali nullo modo circumagi. Quinetiam diſtantiæ Perihelii nunc majores nunc minores reperiuntur; unde pronum eſt ſuſpicari etiam multo plures eſſe Cometas, qui in partibus à Sole remotioribus, obſcuri caudaque deſtituti, adeoque nobis inconſpicui, præterlabi poſſunt.

“ Hactenus Cometarum Orbes conſideravimus ut perfecte Parabolicos; quo ſuppoſito conſequeretur Cometas, vi Centripeta verſus Solem impulſos, à ſpatiis infinite diſtantibus deſcendere, caſuque ſuo velocitatem tantam acquirere, ut iterum in ſpatia Mundi remotiſſima ſeſe abdere poſſent, perpetuo niſu ſurſum tendentes,

" tendentes, ac ad Solem nunquam reverſuri. Cum autem ſatis frequentes ſint Cometarum adventus; ac eorum nullus reperiatur motu ferri Hyperbolico, ſeu velociore quam cadendo ad Solem acquirere debeat, credibile eſt potius in Orbibus valde Excentricis revolvi eos circa Solem, ac poſt longiſſimas periodos reverti. Sic enim Numerus eorum præfinitus eſſet, ac fortaſſe non uſque adeo magnus. Spatia autem inter Solem Fixaſque tanta ſunt, ut Cometæ revolventi cum Periodo quantumvis longa ſatis loci ſit. Latus autem rectum Ellipſis eſt ad Latus rectum Parabolæ eandem Periheliam diſtantiam habentis, ut diſtantia Aphelia in Ellipſi eſt ad Axem totum Ellipſis; Velocitates autem ſunt in dimidiata ratione eorundem: quapropter in Orbibus valde Excentricis ratio hæc accedit proxime ad rationem æqualitatis. Tantilla autem differentia, quæ intercedit ratione majoris in Parabola velocitatis, facillime in ſitu Orbis determinando compenſatur. Hujus itaque Tabulæ Elementorum Motuum uſus præcipuus eſt, atque etiam propter quem illam conſtruere operæ prætium duxi, ut, ſi quando novus Cometa emerſerit, poſſimus collatis elementis dignoſcere an poterit eſſe aliquis ex antiquis, necne; ac proinde Periodum Orbitæque Axem determinare, reditumque prædicere. Ac ſane multa me ſuadent ut credam Cometam anni 1531 ab *Apiano* obſervatum, eundem fuiſſe cum illo qui anno 1607 deſcriptus eſt à *Keplero & Longomontano*, quemque ipſe iterum reverſum vidi ac obſervavi anno 1682. Quadrant Elementa omnia, ac ſola inæqualitas periodorum adverſari videtur: hæc autem tanta non eſt ut cauſis Phyſicis non poſſit attribui. *Saturni* enim motus à cæteris, præſertim *Jove*, ita interturbatur, ut per aliquot dies integros incertum ſit hujus Planetæ tempus Periodicum. Qanto magis talibus erroribus obnoxius erit Cometa, qui quatuor pene vicibus altius excurrit *Saturno*, cujuſque velocitas, vel tantil-

" lum aucta, Orbem ab Elliptico in Parabolicum poſſit immutare? Confirmatur etiam eundem eſſe potuiſſe ex eo, quod anni 1456 æſtate, conſpectus fuerit Cometa eodem pene modo inter Solem & Terram tranſiens retrograde: quem, licet à nemine obſervatus fuerit Aſtronomice, ex periodo modoque tranſitus non diverſum à prædictis extitiſſe conjicio. Unde auſim ejuſdem reditum fidenter prædicere, anno ſcil. 1758. Quod ſi hoc evenerit, nulla amplius erit dubitandi cauſa, quin redire debeant cæteri. Habebunt ergo Aſtronomi in hac arenâ quo ſe exerceant per multa Secula, priuſquam tot tantorumque Corporum circa commune centrum Solis revolventium numerus cognoſcatur, ac motuum ſymptomata certis regulis coerceantur. Crediderim equidem Cometam etiam anni 1532, eundem fuiſſe cum illo, qui ab *Hevelio* obſervabatur ineunte anno 1661: ſed obſervationes *Apiani*, quas ſolas de primo habemus, nimis rudes ſunt, nec quicquam certi in re tam ſubtili ex iiſdem elici poteſt. Juſto volumine hæc omnia exequi mihi animus eſt, nec Aſtronomiæ promovendæ hac in re deero, ſi Deo O. M. viſum fuerit vitam facultateſque prorogare. Interim quicunque modum Conſtruendi Cometarum Orbes per tres obſervationes accurate habitas addiſcere cupit, ſub finem libri de Syſtemate Mundi, ſive tertii *Philoſophiæ Nat. Princip. Math.* magni ipſius Inventoris methodum inveniet: Quam poſtea Digniſſimus Collega meus *D. Gregorius*, Lib. V. pereruditæ Aſtronomiæ ſuæ Phyſicæ & Geometricæ plene & luculenter illuſtravit.

" Unicum autem non abs re erit nec injucundum, hic loci Lectorem monere Aſtronomum; nempe quod nonnulli ex his Cometis Nodos ſuos habeant adeo Orbi Terræ annuo vicinos, ut ſi forte acciderit, tempore reditus Cometæ *Terram* occupare Loca in orbe ſuo Nodo proxima, dum Cometa incredibili cum Velocitate præterierit, Parallaxin etiam habitu-

" rus ſit valde obſervabilem, quæque fuerit ad Solis " parallaxin in ratione data. Unde occaſione talium " tranſituum oblata erit anſa, rara quidem ſed optima, " determinandi Solis à *Terra* diſtantiam ; quam hacte- " nus non niſi mediante parallaxi *Martis* Acronychii, " vel *Veneris* perigææ, triplo quidem ſolari majore, ſed " quæ vix ullis inſtrumentis ſentiatur, laxe admodum " concludere licuit. Quem Cometarum uſum ſug- " geſſit Clariſſimus Geometra Ds. *Nic. Facio.* Cometa " etenim anni 1472 parallaxin habuit pluſquam vigeſies " Solari majorem. Ac ſi Cometa anni 1618 appuliſ- " ſet, juxta medium Menſis *Martii*, ad Nodum ejus " Deſcendentem ; vel ſi Cometa anni 1684 paulo ci- " tius ad Nodum Aſcendentem perveniſſet, profecto " Terris admodum propinqui etiam adhuc magis nota- " biles habuiſſent parallaxes : Inter omnes vero nullus " propiore appulſu Terris minatus eſt quam ille anni " 1680 : Hic initio Calculo non amplius ad Boream " diſtabat ab Orbe noſtro annuo, quam ſemidiametro " ſolari (ſive Radio Lunaris Orbitæ uti exiſtimo) id- " que Novemb. 11°. 1h. 6′. P. M. Quo tempore, ſi " Terræ quoad Longitudinem conjunctus fuiſſet, pa- " rallaxis ſane Lunari æqualis in Cometæ motu obſer- " vari potuiſſet. Hæc Aſtronomis dicta ſunto. Quæ " vero ab hujuſmodi allapſu, vel contactu vel denique " colliſione Corporum cœleſtium (quæ quidem om- " omnino non impoſſibilis eſt) conſequi debeant, re- " rum Phyſicarum ſtudioſis diſcutienda relinquo.

Come-

Cometarum omnium hactenus rite Obſervatorum, Motuum in Orbe Parabolico Elementa Aſtronomica.

Com. An.	Nodus Aſcend.	Inclin. Orbitæ.	Perihelion.	Diſtan. Perihel. à Sole.	Log. Diſt. Perihel à Sole.	Temp. æquat. Perihelii.	Perihelion à Nodo.	
	gr. ′. ″	gr. ′. ″	gr. ′. ″			d. h. ′.	gr. ′. ″	
1337	♊ 24.21. 0	32.11. 0	♉ 5.79. 0	40666	9.609236	*Jun.* 2. 6.25	46.22. 0	Retrog.
1472	♑ 11.46.20	5.20. 0	♉ 15.33.30	54273	9.734584	*Feb.* 28.22.23	123.47.10	Retrog.
1531	♉ 19.25. 0	17.56. 0	♒ 1.39. 0	56700	9.753583	*Aug.* 24.21.18½	107.46. 0	Retrog.
1532	♊ 20.27. 0	32.36. 0	♋ 21. 7. 0	50910	9.706803	*Octob.* 19.22.12	30.40. 0	Direct.
1556	♍ 25.42. 0	32. 6.30	♑ 8.50. 0	46390	9.666424	*April* 21.20. 3	103. 8. 0	Direct.
1577	♈ 25.52, 0	74.32.45	♌ 9.22. 0	18342	9.263447	*Octob.* 26.18.45	103.30. 0	Retrog.
1580	♈ 18.57.20	64.40. 0	♋ 19. 5.50	59628	9.775450	*Nov.* 28.15.00	90. 8.30	Direct.
1585	♉ 7.42.30	6. 4. 0	♈ 8.51. 0	109358	0.038850	*Sept.* 27.19.20	28.51.30	Direct.
1590	♍ 15.30.40	29.40.40	♏ 6.54.30	57661	9.760882	*Jan.* 29. 3.45	51.23.50	Retrog.
1596	♒ 12.12.30	55.12. 0	♏ 18.16. 0	51293	9.710058	*Jul.* 31.19.55	83.56.30	Retrog.
1607	♉ 20.21. 0	17. 2. 0	♒ 2.16. 0	58680	9.768490	*Octob.* 16. 3.50	108.05. 0	Retrog.
1618	♊ 16. 1. 0	37.34. 0	♈ 2.14. 0	37975	9.579498	*Octob.* 29.12.23	73.47. 0	Direct.
1652	♊ 28.10. 0	79.28. 0	♈ 28.18.40	84750	9.928140	*Nov.* 2.15.40	59.51.20	Direct.
1661	♊ 22.30.30	32.35.50	♋ 25.58.40	44851	9.651772	*Jan.* 16.23.41	33.28.10	Direct.
1664	♊ 21.14. 0	21.18.30	♌ 10.41.25	102575½	0.011044	*Nov.* 24.11.52	49.27.25	Retrog.
1665	♏ 18.02. 0	76.05. 0	♊ 11.54.30	10649	9.027309	*April* 14. 5.15½	156. 7.30	Retrog.
1672	♑ 27.30.30	83.22.10	♉ 16.59.30	69739	9.843476	*Feb.* 20. 8.37	09.29. 0	Direct.
1677	♏ 26.49.10	79.03.15	♌ 17.37. 5	28059	9.44807[illegible]	*April* 26.00.37½	99.12. 5	Retrog.
1680	♑ 2. 2. 0	60.56. 0	♐ 22.39.30	00612½	7.787106	*Dec.* 8.00. 6	19.22.30	Direct.
1682	♉ 21.16.30	17.56. 0	♒ 2.52.45	58328	9.765877	*Sept.* 4.07.39	108.23.45	Retrog.
1683	♍ 23.23. 0	83.11. 0	♊ 25.29.30	56020	9.748343	*Jul.* 3. 2.50	87.53.30	Retrog.
1684	♐ 28.15. 0	65.48.40	♏ 28.52. 0	96015	9.982339	*Maii* 29.10.16	29.23.00	Direct.
1686	♓ 20.34.40	31.21.40	♊ 17.00.30	32500	9.511883	*Sept.* 6.14.33	86.25.50	Direct.
1698	♐ 27.44.15	11.46. 0	♑ 00.51.15	69129	9.839660	*Octob.* 8.16.57	3. 7. 0	Retrog.

Hæc Tabula vix indiget explicatione, cum ex Titulis ſatis pateat quid ſibi velint Numeri. Diſtantiæ autem Periheliæ æſtimantur in ejuſmodi partibus quales media diſtantia Terræ a Sole habet centies millenas.

Tabula Generalis pro supputando motu Cometarum in Orbe Parabolico.

Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.	Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.
o	gr. '. ''.		o	gr. '. ''.	
1	1.31.40	0.000077	31	42.55.06	0.062400
2	3. 3.15	0.000309	32	44. 3.20	0.065838
3	4.34.43	0.000694	33	45.10.29	0.069319
4	6. 6. 0	0.001231	34	46.16.35	0.072839
5	7.37. 1	0.001921	35	47.21.36	0.076396
6	9. 7.43	0.002759	36	48.25.33	0.079984
7	10.38. 2	0.003745	37	49.28.27	0.083600
8	12. 7.54	0.004876	38	50.30.19	0.087244
9	13.37.17	0.006151	39	51.31. 8	0.090910
10	15. 6. 7	0.007564	40	52.30.56	0.094596
11	16.34.20	0.009115	41	53.29.44	0.098300
12	18. 1.54	0.010798	42	54.27.32	0.102019
13	19.28.47	0.012609	43	55.24.21	0.105752
14	20.54.54	0.014550	44	56.20.12	0.109490
15	22.20.14	0.016607	45	57.15. 6	0.113240
16	23.44.44	0.018783	46	58. 9. 3	0.116995
17	25. 8.22	0.021072	47	59. 2. 4	0.120756
18	26.31. 8	0.023470	48	59.54.11	0.124518
19	27.52.55	0.025969	49	60.45.25	0.128278
20	29.13.47	0.028570	50	61.35.45	0.132035
21	30.33.40	0.031263	51	62.25.14	0.135792
22	31.52.32	0.034045	52	63.13.52	0.139544
23	33.10.23	0.036916	53	64. 1.40	0.143291
24	34.27.12	0.039864	54	64.48.38	0.147029
25	35.42.59	0.042892	55	65.34.50	0.150762
26	36.57.41	0.045989	56	66.20.13	0.154482
27	38.11.20	0.049154	57	67.04.50	0.158192
28	39.23.54	0.052382	58	67.48.22	0.161890
29	40.35.23	0.055668	59	68.31.50	0.165578
30	41.45.47	0.059009	60	69.14.16	0.169254

Tabula Generalis pro Supputando.

Med. mot.	Angul. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.	Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.
o	gr. '. ''.		o	gr. '. ''.	
61	69.55.58	0.172914	91	86.20.34	0.274176
62	70.36.56	0.176557	92	86.46.20	0.277239
63	71.17.16	0.180188	93	87.11.43	0.280284
64	71.56.56	0.183803	94	87.36.45	0.283306
65	72.35.57	0.187404	95	88.01.27	0.286308
66	73.14.15	0.190978	96	88.25.49	0.289293
67	73.51.59	0.194540	97	88.49.48	0.292252
68	74.29. 6	0.198085	98	89.13.32	0.295201
69	75.05.38	0.201614	99	89.36.54	0.298122
70	75.41.35	0.205122	100	90.00.00	0.301030
71	76.16.56	0.208612	102	90.45.14	0.306782
72	76.51.43	0.212080	104	91.29.18	0.312469
73	77.25.57	0.215529	106	92.12.14	0.318060
74	77.59.41	0.218963	108	92.54. 4	0.323587
75	78.32.54	0.222378	110	93.34.52	0.329042
76	79. 5.35	0.225769	112	94.14.40	0.334424
77	79.37.45	0.229142	114	94.53.30	0.339736
78	80. 9.23	0.232488	116	95.31.22	0.344979
79	80.40.34	0.235809	118	96. 8.22	0.350153
80	81.11.16	0.239127	120	96.44.30	0.355262
81	81.41.31	0.242416	122	97.19.48	0.360306
82	82.11.19	0.245684	124	97.54.17	0.365284
83	82.40.40	0.248933	126	98.28.00	0.370200
84	83. 9.34	0.252159	128	99.00.57	0.375052
85	83.38. 4	0.255366	130	99.33.11	0.379842
86	84. 6. 8	0.258552	132	100. 4.43	0.384576
87	84.33.49	0.261720	134	100.35.45	0.389252
88	85. 1. 5	0.264865	136	101. 5.48	0.393868
89	85.27.58	0.267989	138	101.35.22	0.398428
90	85.54.27	0.271092	140	102. 4.19	0.402930

Motu Cometarum in Orbe Parabolico.

Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.	Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.
o	gr. '. ''.		o	gr. '. ''.	
142	102.32.41	0.407380	204	113.37.25	0.523406
144	103.00.31	0.411784	208	114. 9.52	0.529705
146	103.27.47	0.416132	212	114.41.23	0.535886
148	103.54.31	0.420430	216	114.12.02	0.541958
150	104.20.43	0.424676	220	115.41.51	0.547922
152	104.46.22	0.428866	224	116.10.52	0.553782
154	105.11.33	0.433012	228	116.39. 7	0.559538
156	105.36.16	0.437110	232	117. 6.38	0.565199
158	106.00.32	0.441164	236	117.33.27	0.570762
160	106.24.23	0.445178	240	117.59.35	0.576233
162	106.47.47	0.449144	244	118.25. 5	0.581616
164	107.10.44	0.453060	248	118.49.57	0.586912
166	107.33.17	0.456936	252	119.14.14	0.592122
168	107.55.27	0.460772	256	119.37.56	0.597252
170	108.17.14	0.564208	260	120. 1. 6	0.602301
172	108.38.37	0.468318	264	120.23.44	0.607274
174	108.59.39	0.472030	268	120.45.52	0.612174
176	109.20.20	0.475705	272	121. 7.30	0.616998
178	109.40.40	0.479340	276	121.28.39	0.621750
180	110.00.40	0.482937	280	121.49.22	0.626438
182	110.20.20	0.486498	284	122. 9.38	0.631056
184	110.39.41	0.490022	288	122.29.28	0.635608
186	110.58.44	0.493512	292	122.48.54	0.640098
188	111.17.28	0.496965	296	123. 7.57	0.644525
190	111.35.55	0.500384	300	123.26.36	0.648893
192	111.54.05	0.503769	310	124.11.40	0.659559
194	112.11.58	0.507121	320	124.54.36	0.669880
196	112.29.34	0.510441	330	125.35.34	0.679876
198	112.46.55	0.513729	340	126.14.44	0.689568
200	113. 4.00	0.516984	350	126.52.12	0.698970

Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.	Med. mot.	Ang. à perihelio.	Logar. pro dist. à Sole.
o	gr. '. ''.		o	gr. '. ''.	
360	127.28. 6	0.708104	820	141.49.24	0.970836
370	128. 2.33	0.716976	840	142.10.00	0.978397
380	128.35.38	0.725606	860	142.29.56	0.985771
390	129. 7.27	0.734006	880	142.49.10	0.992970
400	129.38. 4	0.742186	900	143. 7.48	1.000000
410	130. 7.34	0.750160	920	143.25.51	1.006871
420	130.36. 2	0.757930	940	143.43.21	1.013586
430	131. 3.30	0.765516	960	144.00.18	1.020155
440	131.30. 2	0.772918	980	144.16.46	1.026583
450	131.55.41	0.780148	1000	144.32.46	1.032876
460	132.20.30	0.787216	1500	149.26. 8	1.158188
470	132.44.32	0.794122	2000	152.26.15	1.246058
480	133. 7.50	0.800882	2500	154.32.20	1.313703
490	133.30.25	0.807494	3000	156. 7.27	1.368678
500	133.52.20	0.813969	3500	157.22.49	1.414974
520	134.34.18	0.826522	4000	158.24.36	1.454950
540	135.14. 0	0.838600	4500	159.16.36	1.490125
560	135.51.28	0.850187	5000	160. 1.12	1.521521
580	136.27. 6	0.861369	5500	160.40. 5	1.549874
600	137.00.57	0.872155	6000	161.14.24	1.575718
620	137.33.13	0.882575	6500	161.45.00	1.599460
640	138. 3.58	0.892649	7000	162.12.34	1.621417
660	138.33.21	0.902401	7500	162.37.34	1.641838
680	139. 1.29	0.911866	8000	163.00.23	1.660922
700	139.28.25	0.921012	8500	163.21.20	1.678834
720	139.54.16	0.929907	9000	163.40.42	1.695708
740	140.19. 5	0.938549	9500	163.58.38	1.711662
760	140.42.56	0.946951	10000	164.15.20	1.726784
780	141.05.55	0.955124	50000	170.52. 0	2.197960
800	141.28. 3	0.963082	100000	172.45.44	2.399655

[*Poſt pag.* 339. *Aſtronom. noſtr. deſideratur hæc Tabula.*]

Tabula Logarithmorum Diſtantiarum Terræ à Sole.
Anomalia Terræ Media.

°	*Sign.* 0.	*Sign.* 1.	*Sign.* 2.	*Sign.* 3.	*Sign.* 4.	*Sign.* 5.	°
0	5.007287	5.006375	5.003778	5.000128	4.996381	4.993588	30
1	5.007286	5.006313	5.003669	4.999999	4.996267	4.993522	29
2	5.007284	5.006249	5.003559	4.999870	4.996154	4.993459	28
3	5.007280	5.006184	5.003447	4.999740	4.996042	4.993398	27
4	5.007273	5.006117	5.003334	4.999611	4.995931	4.993339	26
5	5.007264	5.006048	5.003220	4.999482	4.995822	4.993282	25
6	5.007253	5.005977	5.003105	4.999352	4.995714	4.993226	24
7	5.007240	5.005904	5.002989	4.999223	4.995607	4.993173	23
8	5.007225	5.005829	5.002872	4.999094	4.905501	4.993122	22
9	5.007208	5.005753	5.002755	4.998965	4.995397	4.993074	21
10	5.007189	5.005675	5.002636	4.998837	4.995294	4.993028	20
11	5.007167	5.005595	5.002516	4.998702	4.995193	4.992984	19
12	5.007144	5.005513	5.002396	4.998581	4.995094	4.992942	18
13	5.007119	5.005430	5.002275	4.998454	4.994996	4.992903	17
14	5.007092	5.005345	5.002153	4.998327	4.994899	4.992866	16
15	5.007062	5.005258	5.002030	4.998200	4.994804	4.992831	15
16	5.007030	5.065170	5.001907	4.998074	4.994711	4.992798	14
17	5.006997	5.005080	5.001787	4.997948	4.994619	4.992768	13
18	5.006961	5.004988	5.001659	4.997823	4.994529	4.992740	12
19	5.006923	5.004885	5.001534	4.997698	4.994441	4.992714	11
20	5.006883	5.004801	5.001408	4.997574	4.994354	4.992691	10
21	5.006842	5.004705	5.001282	4.997451	4.994269	4.992670	9
22	5.006798	5.004607	5.001155	4.997329	4.994186	4.992652	8
23	5.006752	5.004508	5.001028	4.997207	4.994105	4.992636	7
24	5.006704	5.004408	5.000909	4.997086	4.994025	4.992622	6
25	5.006654	5.004306	5.000772	4.996966	4.993947	4.992611	5
26	5.006602	5.004203	5.000644	4.996847	4.993871	4.992602	4
27	5.006548	5.004099	5.000515	4.996729	4.993798	4.992595	3
28	5.006492	5.003983	5.000384	4.996612	4.993726	4.992591	2
29	5.006434	5.003886	5.000257	4.996496	4.993656	4.992589	1
30	5.006375	5.003778	5.000128	4.996381	4.993588	4.992588	0
°	*Sign.* 11.	*Sign.* 10.	*Sign.* 9.	*Sign.* 8.	*Sign.* 7.	*Sign.* 6.	°

[*Ad pag.* 332. *Aſtron. Noſtræ deſiderantur hæ Tabellæ.*]

Annis Chriſt. Curr.	*Præceſ. Æquin.* s.	°	'	''	*Menſibus Anni Commun.*	s.	°	'	''
1	0.	5.	19.	20	*Jan.*	0.	0.	0.	0
1501	0.	26.	9.	20	*Feb.*	0.	0.	0.	4
1581	0.	27.	16.	0	*Mart.*	0.	0.	0.	8
1601	0.	27.	32.	40	*April*	0.	0.	0.	12
1621	0.	27.	49.	20	*Mai.*	0.	0.	0.	16
1641	0.	28.	6.	0	*Jun.*	0.	0.	0.	21
1661	0.	28.	22.	40	*Jul.*	0.	0.	0.	25
1681	0.	28.	39.	20	*Aug.*	0.	0.	0.	29
1701	0.	28.	56.	0	*Sept.*	0.	0.	0.	33
1721	0.	29.	12.	40	*Octob.*	0.	0.	0.	38
1741	0.	29.	29.	20	*Nov.*	0.	0.	0.	42
1761	0.	29.	46.	0	*Decem.*	0.	0.	0.	46
1781	0.	30.	2.	40					
1801	0.	30.	19.	20	*Pro Annis Expanſis adi Col.* 3. *pag.* 333.				
1901	0.	31.	42.	40					
2001	0.	33.	6.	0					

FINIS.

CORRIGENDA.

PAG. 47. Lin. 30. 31. Lege $29\frac{1}{10}$ bis. & dele $14\frac{2}{3}$ ad 1 bis. Pag. 53. Lin. Ult. *Nota quod ablato* 4 *de* 6 *reſtant* 2 *poſitive; unde pergit corpus primum poſt occurſum; & inde motus ſecundi additione obtinetur,* 10 + 2 = 12. *Ubi vero reſtat nihil corpus primum quieſcet. Ubi reſiduum eſt minus nihilo, ſive quantitas negativa corpus primum regredietur, & motus ſecundi ſubtractione obtinebitur.* Pag. 304. Lin. 8. *Leg. Ut* 1 *ad* 8. *circiter Lin.* 9. *Leg. ut* 9 *ad* 8. *circiter.* Pag. 351. Lin. 12, 13. *Leg. Numerorum pro ipſis diſtantiis, unitate pro diſtantia minima ubique accepta. licet unitas iſta ſit valoris diverſi, pro diverſis diſtantiis perihelii in priori Elementorum Tabula diſtincte per Logarithmos conſignatis.*

Catalogus Librorum Impensis Benj. Took.

ARITHMETICA UNIVERSALIS sive de Compositione & Resolutione Arithmetica Liber. Cui accessit Halleiana Æquationum Radices Arithmetice inveniendi methodus. In Usum Juventutis Academicæ.

PRÆLECTIONES ASTRONOMICÆ Cantabrigiæ in Scholis Publicis Habitæ à GULIELMO WHISTON, A. M. & Matheseωs Professore Lucasiano. Quibus Accedunt Tabulæ Plurimæ Astronomicæ Flamstedianæ Correctæ, Halleianæ, Cassinianæ, & Streetianæ. In Usum Juventutis Academicæ.

TELLURIS *Theoria Sacra*: Orbis Nostri Originem & Mutationes Generales, quas aut jam subiit, aut olim subiturus est, Complectens. Libri duo Priores de Diluvio & Paradiso. Editio Tertia, recognita & contracta. Authore T. BURNETIO.

A NEW *Theory of the Earth*, from its Original, to the Consumation of all Things: Wherein the Creation of the World in Six Days, the Universal Deluge, and the General Conflagration, *as laid down in the Holy Scriptures*, are shewn to be perfectly agreeable to Reason and Philosophy. With a large Introductory Discourse concerning the Genuine Nature, Stile, and Extent of the *Mosaick* History of the Creation. The *Second Edition*, with great Additions, Improvements and Corrections. By WILLIAM WHISTON, M. A. Professor of the *Mathematicks* in the University of *Cambridge*.