Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil

Carlos de Castro y Elisa Hernández

Planteamos un problema de estructura multiplicativa —de descomposición de cantidades— en educación infantil (5-6 años). Se trata de descomponer una cantidad de 24 objetos en grupos (filas) iguales, determinando, tanto el número de filas, como el de objetos en cada fila. Los niños resolvieron el problema mediante estrategias de modelización directa, formando grupos iguales por ensayo y error y empleando estrategias de subdivisión y redistribución, para obtener unas soluciones a partir de otras. Algunos niños dieron una única solución al problema; otros, elaboraron un listado de hasta 5, de las 8 posibles soluciones.

Términos clave: Cantidad; Descomposición multiplicativa; Educación infantil; Modelización directa; Resolución de problemas

Verbal Problems of Multiplicative Decomposition of Quantities in Kindergarten

We posed a problem of multiplicative structure—of decomposition of quantities—in Kindergarten. The problem consists in decomposing a quantity of 24 objects into equal groups (lines), determining both the number of lines and the objects in each line. Children solved the problem using direct modeling strategies, forming equal groups by trial and error and using subdivision and redistribution strategies to obtain new solutions from old ones. Some children gave only one solution to the problem, while others drew up a list of up to 5, from 8 possible solutions.

Keywords: Direct modelling; Kindergarten; Multiplicative decomposition; Problem solving; Quantity

Durante la década de 1980 a 1990 se experimentó un gran auge en la investigación sobre problemas aritméticos de enunciado verbal y se llegó a cierto

De Castro, C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114.

consenso en la clasificación semántica de los problemas de estructura aditiva —problemas de cambio, combinación, comparación, e igualación— (Riley, 1981). Numerosos estudios se centraron en determinar el nivel de dificultad de los problemas y las estrategias de resolución, en función de la categoría semántica y del lugar que ocupa la incógnita en el enunciado del problema (Castro, 2008).

En estas investigaciones, se partía del presupuesto de que un resolutor de problemas competente es capaz de elaborar una representación del enunciado del problema que le permite comprender la situación y elegir, de acuerdo con esta representación, la operación adecuada para la resolución del problema. Sin embargo, estas investigaciones mostraron que muchos alumnos omitían esta fase de representación-comprensión del problema y elegían la operación, guiados por características superficiales, como la presencia en el enunciado de palabras clave que sugerirían el uso de una u otra operación, como la palabra *quedan* indicando resta, o la expresión *en total*, señalando la suma (Verschaffel, Greer y De Corte, 2007). Puig y Cerdán (1988, p. 116) completaron esta visión al señalar que determinadas estrategias de enseñanza de resolución de problemas se basan en localizar palabras clave. Estos autores indican que es necesario favorecer una lectura y una comprensión globales de los enunciados en lugar de una lectura local, que conlleva únicamente realizar la operación que parece ir asociada a la palabra clave. En este sentido, Fuson, Clements y Beckman (2009) advierten que "es muy importante que los maestros de niños de 5-6 años no enseñen estrategias de 'palabras clave', en que una sola palabra te indica qué operación hacer… el énfasis debe estar en comprender la situación, no solo una palabra" (p. 49).

Con respecto a la finalidad de los problemas dentro de la enseñanza, Verschaffel et al. (2007, p. 582) indican que, históricamente, los problemas tenían una función de aplicación de los conocimientos adquiridos: los niños debían aprender las operaciones aritméticas formales, y luego aplicarlas en la resolución de problemas de la vida diaria. Esta finalidad sigue presente en el currículo español, aunque no es la única. El Real Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencia [MEC], 2006) propone como criterio de evaluación para el primer ciclo "Resolver problemas sencillos relacionados con objetos, hechos y situaciones de la vida cotidiana, seleccionando las operaciones de suma y resta y utilizando los algoritmos básicos correspondientes…" (p. 43098). Aprender primero la suma y la resta, para después aplicarlas, reduce, dentro del proceso de resolución, la fase de traducción —el paso del enunciado verbal a la operación aritmética (Puig y Cerdán, 1995)— a una elección: sumar o restar. Tales indicaciones curriculares pueden favorecer el uso de palabras clave y una lectura superficial de los enunciados.

Dentro de la educación infantil, en el antiguo currículo de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (MEC, 1991), aparecía como contenido procedimental la "Resolución de problemas que impliquen la aplicación de sencillas operaciones (quitar, añadir, repartir)" (p. 29725). La aclaración entre paréntesis de esta cita indica que las operaciones a las que se refería el currículo de 1991 no eran operaciones aritméticas con números, sino operaciones físicas con cantidades. El currículo actual de educación infantil (MEC, 2008) no contradice este enfoque, al limitarse a establecer que los niños deben desarrollar la capacidad "para resolver sencillos problemas matemáticos de su vida cotidiana" (p. 1025), añadiendo después, en las consideraciones metodológicas, que la experimentación con objetos y materiales permite el conocimiento de la realidad desde una perspectiva lógico-matemática.

La línea que siguen los últimos currículos permite un planteamiento de la resolución de problemas en educación infantil más centrado en el razonamiento sobre las cantidades y las acciones físicas sobre ellas, que en las operaciones aritméticas con números. Esto posibilita una cierta ruptura de la relación tan rígida que suele establecerse entre problemas y operaciones aritméticas, del uso de palabras clave y del enfoque aplicacionista tradicional mencionado en párrafos anteriores. Uno de los elementos clave en esta ruptura es la ampliación del rango de problemas que se puede plantear en la educación infantil. En esta línea, nuestro trabajo aborda la resolución de problemas de estructura multiplicativa. Se refiere a problemas de descomposición multiplicativa de cantidades, con varias soluciones, que podrán resolverse antes del aprendizaje formal de las operaciones aritméticas, mediante acciones sencillas de repartir o agrupar objetos y a través del conocimiento sobre el conteo alcanzado en esta etapa educativa. Como veremos en el apartado siguiente, este planteamiento está refrendado por la literatura de investigación.

Marco teórico

Nuestro trabajo en resolución de problemas se basa en el modelo de Instrucción Guiada Cognitivamente (CGI por sus siglas en inglés) (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema y Weisbeck, 1993; Carpenter, Fennema, Franke, Levi y Empson, 1999). El modelo CGI tiene una componente de desarrollo profesional para maestros, basada en las investigaciones de los años 80 sobre el pensamiento matemático infantil en el ámbito de resolución de problemas, que se describe en Verschaffel et al. (2007, p. 607). Otra componente del modelo CGI es el desarrollo de experimentos de enseñanza orientados a estudiar cómo debe ser la instrucción que favorezca este desarrollo. Las investigaciones muestran que los niños pueden resolver una sorprendente variedad de problemas de estructura aditiva y multiplicativa, desde la educación infantil, basándose en estrategias informales de modelización directa, apoyándose en el uso de objetos y en el conteo (Carpenter et al., 1993; Warfield, 2001).

En particular, Carpenter et al. (1993) han estudiado cómo los niños de 5-6 años resuelven problemas de estructura multiplicativa de división medida y división partitiva. En los problemas de división medida, con la incógnita en el número de grupos, aplican estrategias de medida, dentro de la modelización directa, con dos variantes:

- tomar el número total de objetos, formar grupos con el número de objetos dado en el enunciado, y contar al final el número de grupos resultante; e
- ir formando grupos, llevando simultáneamente la cuenta de los objetos en cada grupo y de los objetos totales, hasta llegar al total indicado en el enunciado, y contar los grupos formados.

En los problemas de división partitiva, en los que la incógnita es el número de objetos en cada grupo, aplican estrategias de reparto con dos posibilidades:

- repartir los objetos uno a uno entre los grupos, en rondas de reparto sucesivas, hasta agotar los objetos a repartir, y contar los objetos en cada grupo; y
- repartir los objetos tanteando por ensayo y error, dando una misma cantidad a cada grupo, comprobando si la cantidad repartida coincide con el total a repartir, y ajustando la cantidad inicial de cada grupo según el resultado.

Bosch (2012), en su revisión sobre el pensamiento multiplicativo en los primeros niveles educativos, incluye otras investigaciones que concluyen que los problemas de estructura multiplicativa, siempre que se aborden a través de la manipulación de objetos, son adecuados al final de la educación infantil.

En cuanto al planteamiento de problemas que admiten varias soluciones, Dacey, Schulman y Eston (1999) proponen problemas verbales de descomposición aditiva a niños de 5-6 años. Las autoras encuentran que los niños tienden al principio a dar una única solución, pero que un ambiente propicio a la discusión sobre la validez de distintas soluciones, lleva a los niños a evolucionar hacia la elaboración de listados completos de descomposiciones. Manches, O’Malley y Benford (2010) plantean tareas de descomposición aditiva a niños de 4 a 8 años con materiales manipulativos físicos y virtuales. Al describir las posibles estrategias para obtener todas las posibles descomposiciones de un número, estos autores citan dos estrategias para obtener una descomposición a partir de otra dada: (a) invertir los números, aplicando intuitivamente la idea de conmutatividad; y (b) aumentar en una unidad uno de los sumandos y compensar disminuyendo el otro sumando también en una unidad.

En los problemas de descomposición factorial también hay soluciones vinculadas entre sí (por las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación). Por esa razón, debemos establecer la distinción, al estudiar las estrategias para obtener soluciones, entre aquellas que posibilitan una primera solución y otras que permiten obtener unas soluciones de otras.

Objetivos de la investigación

En esta investigación nos interesamos por problemas de estructura multiplicativa de descomposición (factorial) de cantidades. En particular, el problema que estudiamos consiste en encontrar todas las descomposiciones de una cantidad de 24 objetos en grupos iguales, determinando tanto el número de grupos como el de objetos en cada grupo.

El objetivo principal es analizar las estrategias que utilizan los niños de 5-6 años ante un problema del tipo indicado. Dado que algunas soluciones están relacionadas con otras, interesa diferenciar entre las estrategias empleadas para obtener la primera solución del problema y las que se utilizan para derivar unas soluciones de otras. Como objetivo secundario, el conocimiento de las estrategias y el número de niños que las aplican nos ayudarán a valorar el grado de dificultad de ese tipo de problemas, en términos del número de niños que encuentran al menos una solución.

Método

En este apartado, describimos los participantes del estudio, el problema planteado a los participantes, el desarrollo de las sesiones y el trabajo preparatorio. Además, detallamos el procedimiento que seguimos para la recogida de la información.

Participantes

El estudio se llevó a cabo en un aula de último curso de educación infantil de una escuela pública de Fuenlabrada (Madrid). Participaron 20 alumnos (11 niños y 9 niñas) que, en las sesiones de problemas, tenían edades comprendidas entre 5 años y 2 meses, y 6 años y 1 mes; con una edad media de 5 años y 7 meses. La maestra contaba con formación en CGI, cuyo modelo docente se sigue en las sesiones del taller.

Problema

La sesión del taller en que se planteó el problema estuvo precedida por varias lecturas del cuento “Cien hormigas hambrientas” (Pinczes y Mackain, 1993). La maestra dijo literalmente como explicación/enunciado del problema lo siguiente.

> *¿Os acordáis del cuento de las hormigas? Primero había 1 fila con 100 hormigas, después 2 filas de 50 hormigas, luego 4 filas de 25, 5 filas de 20, y al final, 10 filas de 10. Había muchas formas de ponerse en fila. ¿Qué pasaría en el cuento si hubiera 24 hormigas? Si hay 24 hormigas, ¿cómo se podrían poner en filas? ¿Cómo sería el cuento?*

Desarrollo de las sesiones y trabajo preparatorio

El problema se realizó en el aula, en un taller de resolución de problemas de 40 minutos de duración, aprovechando un desdoble de la clase, con la mitad de los alumnos en el aula de ordenadores. El primer día, 10 niños hicieron el problema; el segundo día, lo hicieron 7; el resto de los niños, que habían faltado los dos días anteriores (3), lo hicieron en el rincón de matemáticas, en una situación parecida a la de los talleres, mientras los demás niños trabajaban en otros rincones.

En las sesiones, primero hubo un trabajo individual, en que los niños debían encontrar las soluciones y anotarlas en un papel, seguido de una puesta en común. Durante el trabajo individual, la maestra preguntó a los niños, uno por uno, cómo habían resuelto el problema. Cuando fue necesario, la maestra intervino indirectamente. Por ejemplo, cuando vio que un niño no había contado correctamente los 24 objetos iniciales, le pidió que comprobara "si están las 24 hormigas".

Antes de abordar el problema de descomposición objeto de estudio, los niños habían realizado los problemas de estructura multiplicativa que se muestran en la tabla 1.

Tabla 1

Problemas de estructura multiplicativa del taller previos a la sesión

Tipo de problema	Enunciado
División partitiva	Marcel y Tristán se comieron 8 buñuelos de crema. ¿Cuántos se comió cada uno?
Multiplicación	Si cuadradito tiene 4 esquinitas, ¿cuántas esquinitas tienen 3 cuadraditos en total?
División cuotitiva	Si hay varios cuadraditos en la casa de los redonditos y en total hay 20 esquinitas, ¿cuántos cuadraditos hay?

Dado que los niños no habían hecho problemas con varias soluciones previamente, se realizó un trabajo específico de preparación con problemas de descomposición aditiva (Schulman y Eston, 1999). Por ejemplo, se plantearon los problemas siguientes.

> *Del árbol caen 10 bellotas. Algunas se las comen las cabras y otras las aplastan los caballos. ¿Cuántas se comen las cabras y cuántas aplastan los caballos?*
>
> *Algunas ramas del roble se cortan para hacer leña y otras las rompen los niños. Si hay 12 ramas, ¿cuántas usan para hacer leña y cuántas se romperían?*

Estos problemas de descomposición se planteaban en gran grupo, dentro de la asamblea, con cantidades menores que las de los problemas del taller. Los niños iban dando distintas soluciones al problema y la maestra enfatizaba que había varias soluciones válidas diferentes.

Recogida de información

La recogida de información se realizó a través de una entrevista siguiendo el modelo de Ginsburg, Jacobs y López (1998), basado en la entrevista clínica piagetiana adaptada para su uso en el aula. Este tipo de entrevista sigue los siguientes pasos que debe realizar el maestro: (a) plantea el problema; (b) se asegura de que los niños han comprendido bien la situación; (c) intenta averiguar cómo piensan los niños en el problema sin corregir respuestas consideradas erróneas y sin tratar de enseñar en este momento; (d) trata de interpretar las respuestas o soluciones de los niños, identificando sus potencialidades y deficiencias; y (e) toma nota de estos aspectos para utilizarlos con posterioridad en el proceso de aprendizaje de sus alumnos. El maestro va tomando notas en una parrilla de observación en la que aparecen el nombre del alumno, las soluciones halladas, los materiales empleados, y la descripción del procedimiento de resolución. Se recoge también documentación del taller a través de vídeo, fotografías, y las hojas de trabajo de los niños.

RESULTADOS

Llegamos a los siguientes resultados generales. De los 20 alumnos, 17 alcanzaron al menos una de las ocho posibles soluciones del problema (aceptando como solución trivial, 1 fila de 24) y siete niños dieron más de una solución (llegando tres niños a cinco soluciones). El número de alumnos que resolvieron satisfactoriamente el problema hace pensar que éste tiene una dificultad adecuada para los niños de 5-6 años, siempre que se plantee en unas condiciones similares a las propuestas en este trabajo.

Para realizar el análisis de las estrategias, nos basamos en los tipos de estrategias descritos por Carpenter et al. (1993). A partir de estas estrategias de modelización directa que se aplican en problemas de división partitiva y cuotitiva, afrontamos la interpretación de los procedimientos recogidos en la documentación.

La estrategia básica que detectamos es la de grupos iguales por tanteo. Esta estrategia consiste en seleccionar el número total de objetos, formar un grupo inicial, tanteando con un número de objetos en el grupo, e ir haciendo grupos iguales al primero hasta agotar los objetos seleccionados. Esta estrategia, que utiliza el ensayo y error, admite dos variantes en función de que sobren objetos con los que no se pueda formar un grupo más al final: (a) volver a comenzar desde el principio, probando con otro número de objetos en cada grupo (grupos iguales con tanteo puro); y (b) tratan de redistribuir los objetos sobrantes poniendo uno en cada grupo, o bien tomar objetos de los grupos ya formados para intentar formar un grupo más (grupos iguales con tanteo y redistribución).

En la figura 1, vemos ejemplificado el uso de grupos iguales con tanteo puro. Yasmine comienza formando filas de cuatro hormigas, hasta completar las seis filas. Dado que ella lo reconoce como solución, lo representa en el papel (figura 1, arriba-izquierda). Después, sin deshacer la solución inicial, comienza de nuevo probando con cinco en cada fila, pero le sobran cuatro (ver figura 1, arriba-derecha, en la mano izquierda). Esto le hace desechar este tanteo y probar con filas de siete cubos y después con filas de dos (figura 1, abajo).

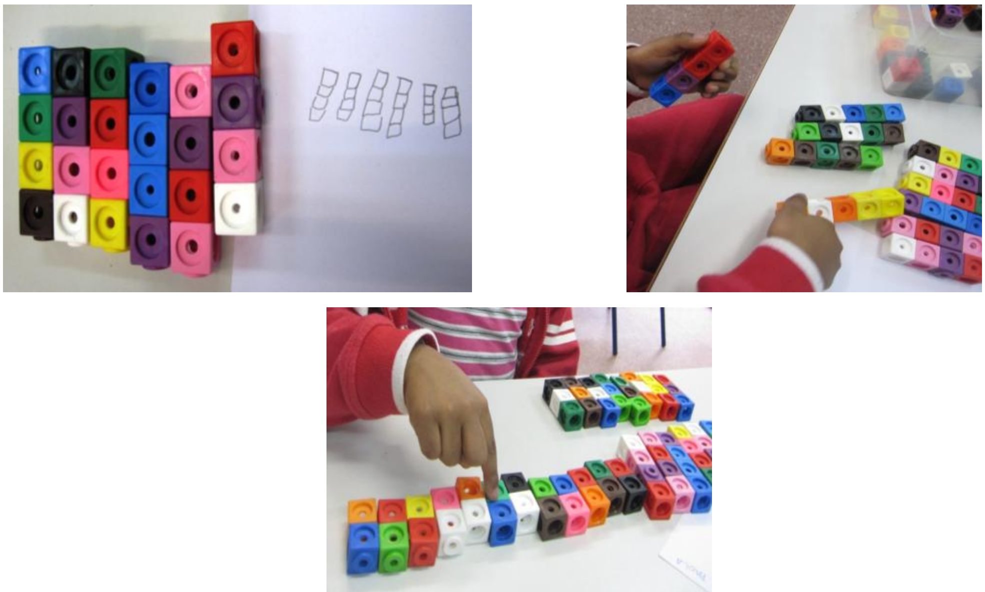

Figura 1. Estrategias de resolución de Yasmine

Como ejemplo de la estrategia de grupos iguales con tanteo y redistribución, presentamos el trabajo de Christian, que toma 24 cubos y comienza formando una fila de siete cubos encajados (figura 2). Después construye otra fila igual y compara las longitudes de ambas filas (figura 2, izquierda). Al formar la tercera fila de siete, observa que sobran tres cubos y los distribuye en las tres filas para obtener la primera solución de tres filas de ocho objetos (figura 2, derecha).

Figura 2. Christian forma tres grupos de 7 y redistribuye los tres cubos sobrantes

A partir de que se halla la primera solución, hemos encontrado tres estrategias para producir soluciones a partir de otras: (a) volver a la disposición inicial con todos los objetos de partida, (b) la subdivisión de los grupos encontrados y (c) la redistribución de objetos de los grupos para formar otros grupos.

El primer caso corresponde a lo que hemos visto en la figura 1. A partir de la solución de seis filas de cuatro, Ana podría haber aprovechado para formar filas de cinco deshaciendo una de las seis filas. Sin embargo, prefiere comenzar de nuevo el tanteo con filas de cinco sin aprovechar el trabajo previo. En la figura 3 vemos las dos estrategias de subdivisión y redistribución en la actuación de Diego. Primero forma dos filas de 12 (figura 3, izquierda). A partir de ahí, subdivide cada fila en filas de tres cubos (estrategia de subdivisión, figura 3, centro). Después, deshace dos de las ocho filas y redistribuye los cubos en las otras seis filas, formando seis filas de cuatro (estrategia de redistribución, figura 3, derecha). A partir de ahí, junta las tres filas para formar una sola (1 fila de 24 cubos, 2ª solución) y, finalmente, descompone la fila de 24 en filas de dos, para obtener 12 filas de dos.

Figura 3. Proceso de resolución de Diego: subdivisión y redistribución

La tabla 2 muestra la frecuencia con la que se ha utilizado cada una de las estrategias para la primera, segunda y quinta soluciones.

Tabla 2
Frecuencia de estrategia

Estrategias	n	%
Primera solución		
Grupos iguales por tanteo*	9	45
Grupos iguales con tanteo puro	1	5
Grupos iguales con tanteo y redistribución	5	25
Segunda y quinta soluciones		
Volver al inicio (ligada a Grupos iguales con tanteo puro)	1	5
Subdivisión	5	25
Redistribución	5	25

Nota. * = Situaciones en que no es necesaria redistribución.

El número de soluciones diferentes por alumno, la frecuencia absoluta y relativa se muestra en la tabla 3.

Tabla 3
Número de soluciones diferentes por alumno (N=20)

Número de soluciones	n	%
0	2	10
1 (1 fila de 24)	4	20
1 (otra solución)	7	35
2	1	5
3	3	15
4	0	0
5	3	15
6, 7 o 8	0	0
Total	20	100

Aunque no era un objetivo de la investigación examinar el papel de los materiales (cubos encajables, anillas, ceras, ábacos) en las estrategias, parece claro que han influido en ellas. El enunciado del problema se refiere a "filas" de hormigas. Los niños pueden contar hormigas o filas de hormigas. Los que hacían filas, uniendo cubos encajables o formando una cadena con anillas, no tuvieron problema al distinguir qué representaciones correspondían a las filas. Sin embargo, destacamos el caso de Ana, que utilizó anillas sin engancharlas unas con otras. Comenzó formando filas de cuatro (figura 4, izquierda), disponiendo las anillas en forma de matriz (figura 4, derecha). En la puesta en común, un rato después de resolver el problema, no recordó cuáles eran las filas, y le preguntó por ello a la maestra. Ante la respuesta de la maestra: "eso tienes que decírmelo tú", Ana acabó advirtiendo que una distribución matricial de seis por cuatro puede interpretarse como seis filas de cuatro (según su idea inicial) o como cuatro filas de seis, encontrando una relación entre dos soluciones del problema ligadas por la propiedad conmutativa de la multiplicación, y dando las dos soluciones. Así, los materiales que forman filas unidas físicamente, favorecen la distinción entre los tres tipos de cantidades del problema (filas, hormigas por fila, y hormigas totales). Sin embargo, el tipo de representación matricial, con objetos separados, promueve el cambio de atribución del papel de "fila". Esto produce una mayor flexibilidad y favorece la relación de unas soluciones con otras.

Figura 4. Inicio de la estrategia de Ana y disposición matricial

Por último, tras la resolución, al poner por escrito las soluciones del problema, las anotaciones son de los siguientes tipos: "3 filas de 8", "3 filas de 8 hormigas", "3 8", "8+8+8", "8 8 8", además de diversas representaciones gráficas de las soluciones, con dibujos de las filas, y representaciones con aspectos simbólicos y gráficos, como poner 3 seguido del dibujo de una fila de ocho cubos.

DISCUSIÓN

La estrategia básica de formar grupos iguales por tanteo guarda cierto parecido a la estrategia de medida, típica de los problemas de división medida. En la estrategia de medida, se forman grupos del tamaño del divisor y se cuenta el número de grupos. En nuestro caso, se van formando grupos iguales, tanteando con el número de objetos en cada grupo, buscando que al final no sobren objetos, o realizando una redistribución. También es semejante a la estrategia de reparto por ensayo y error, típica de los problemas de división partitiva, en la que se distribuyen un número de grupos con cierta cantidad de objetos, y se ajusta la cantidad de objetos del grupo por ensayo y error. En todos estos casos se da prioridad a la formación grupos iguales de objetos o se utiliza el ensayo y error para ajustar el tamaño de los grupos.

Nuestros resultados son similares a los de Bosch, Castro y Segovia (2007) que plantearon a niños de 5-6 años una situación en que una rana debe cruzar un río contando con 12 piedras equidistantes, pudiendo saltar sobre ellas de dos en dos, tres en tres, etc., dando lugar a problemas de división partitiva y de división cuotitiva, así como a valorar la relación entre la longitud del salto y el número de saltos. En nuestro caso, a pesar de la diferencia de las tareas, al tratar con situaciones de descomposición, también se han dado en las estrategias situaciones de ensayo y error.

Davis y Pepper (1992) consideran los problemas de reparto equitativo y redistribución (repartir 6 galletas entre 2 niñas y que luego venga una niña más) como "tareas pre-numéricas de resolución de problemas" (p. 402) que pueden ser resueltas mediante esquemas de acción primitivos, basados en la correspondencia uno a uno, como el de reparto por unidades (dealing). Coincidimos en su apreciación. En nuestro estudio, se dan estrategias de redistribución similares a las de Davis y Pepper (1992), más cercanas a sus "esquemas de acción" que a procedimientos numéricos (aritméticos). Además, la modelización directa se basa en una correspondencia uno a uno entre objetos del enunciado del problema y representaciones de los mismos.

También resulta de interés comparar las estrategias de los alumnos para obtener unas soluciones partiendo de otras, con los hallazgos del trabajo de Manches et al. (2010). En ambos casos, los alumnos derivan unas soluciones de otras, y aplican intuitivamente la idea de conmutatividad.

CONCLUSIONES

En la sección anterior, hemos comparado los resultados del presente estudio con otros antecedentes sobre resolución de problemas con alumnos de 5-6 años. Nuestra primera conclusión es que todas las estrategias que hemos hallado encajan dentro del ámbito de la modelización directa (Carpenter et al., 1993; Carpenter et al., 1999), en que cada objeto citado en el enunciado es representado por un objeto físico, una marca, etc. Al haber ampliado el rango de problemas resolubles mediante modelización directa en esta edad, añadiendo los problemas de descomposición multiplicativa, nuestra valoración discurre en la línea de Carpenter et al. (1993) al apreciar que los niños de 5-6 años resuelven una vasta gama de problemas mediante el uso de estrategias válidas.

La perspectiva teórica conjunta que proporcionan los antecedentes y los resultados de este trabajo es que en los últimos cursos de educación infantil (de 4 a 6 años) predomina, en la resolución de problemas, un tipo de pensamiento numérico caracterizado por el uso de la modelización directa (Carpenter et al., 1993; Carpenter et al., 1999), en la que interviene un tipo de conteo perceptual o figurativo (Steffe, 1988, 2004). La frontera entre este tipo de pensamiento y el pensamiento aditivo está marcada por el uso del "counting on", o conteo a partir de un número dado, que supone en el modelo de conteo de Steffe (1988) el primer esquema verdaderamente numérico de conteo ("initial number sequence"). De forma enfática, Olive (2001) señala que la "necesidad de contar todos [uso del "count all"] distingue al niño pre-numérico del niño numérico" (p. 5). Fuson (1992) establece la misma frontera, en la adquisición de las estructuras conceptuales de la suma y la resta, entre un nivel 1, caracterizado por las estrategias de modelización directa (p. 251), y el nivel 2, marcado por el uso de procedimientos de conteo abreviados (p. 254). A este pensamiento lo llamamos pre-aditivo.

Clements (2004), sintetizando el trabajo de un panel de expertos sobre el currículo matemático de la educación infantil, sitúa el aprendizaje de la estrategia de contar todos en los 4-5 años, del conteo a partir de un número en torno a los 5-6 años, y de la estrategia de contar hasta ("counting on up"), o conteo desde un número hasta otro, propio de la sustracción, y de los problemas de cambio creciente con incógnita en la cantidad de cambio, hacia los 6-7 años. Hemos adoptado estas referencias al establecer, en el párrafo anterior, que el pensamiento pre-aditivo es característico de los 4 a 6 años.

Al igual que hay un salto importante entre el pensamiento aditivo y el multiplicativo, descrito en diversos trabajos (Castro y Castro, 2010; Jacob y Willis, 2003), y varios pasos necesarios en el desarrollo del pensamiento multiplicativo y tareas que los facilitan (Tzur, Johnson, McClintock, Kenney, Xin, Si, et al., 2013), pensamos que un cambio igualmente profundo se produce entre el pensamiento pre-aditivo y el aditivo, propio de los primeros cursos de educación primaria. Consideramos que es importante conocer mejor, tanto el pensamiento pre-aditivo, como su transición al pensamiento aditivo, y cómo promover esta en la enseñanza.

En cuanto a las limitaciones del estudio, cabe decir que, aunque con 20 alumnos se pueden observar regularidades en los procesos de resolución, es evidente que abordar este tipo de problemas con mayor número de niños de 5 y 6 años facilitará una perspectiva más amplia sobre sus estrategias. También ha resultado evidente para los investigadores participantes que el tiempo dedicado al taller, de 40 minutos, ha sido insuficiente para el desarrollo completo del mismo. Entre las estrategias, hemos echado en falta las de composición para pasar, por ejemplo, de una solución de 12 grupos de dos, a seis grupos de cuatro, uniendo grupos de dos para formar grupos de cuatro. También hemos observado que algunos niños dieron como primera descomposición de 24, dos grupos de 12. Pensamos que en estos casos se produce una estrategia adicional, no descrita en este estudio, de partición del total de objetos en dos grupos, de la cual tenemos indicios en la documentación, pero no suficiente información. Por todo esto, se hace necesario profundizar en este tipo de problemas con más alumnos y poniendo más atención a los aspectos reseñados.

Pensamos que también puede ser interesante plantear este mismo tipo de problemas a alumnos de educación primaria, dado que el problema permitirá gran diversidad de soluciones a medida que los niños vayan incorporando conocimientos matemáticos como la descomposición aditiva, en primer ciclo de primaria; la división, en segundo ciclo; o la descomposición factorial, en tercer ciclo de primaria. Esto posibilitaría estudiar las transiciones entre un tipo de pensamiento pre-aditivo, el pensamiento aditivo, y el multiplicativo.

Como implicación para la enseñanza, hay un fuerte contraste entre las recomendaciones del NCTM para la elaboración de currículos, de los "curriculum focal points" (Fuson et al., 2009) y las orientaciones curriculares extraídas del trabajo de síntesis de Clements (2004), basado en resultados de investigación. En las primeras, se plantea que los problemas verbales adecuados para niños de 5-6 años son los de cambio creciente y decreciente, con incógnita en la cantidad final, y los problemas de combinación, con números del 1 al 10 (Fuson et al., 2009, pp. 44-48); en las segundas, se establece como práctica matemática adecuada al desarrollo infantil, la realización de problemas de reparto equitativo de 4-6 años y los problemas de división agrupamiento con 5-6 años (Clements, 2004, p. 36). Nuestra opción, más en la línea de Clements, es que la capacidad de resolver problemas a través de la modelización directa se desarrollará de forma más completa cuanto mayor sea el rango de problemas que abordan los niños, incluyendo los de estructura multiplicativa, como el planteado en este estudio.

REFERENCIAS

Bosch, M. A. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 15-37.

Bosch, M. A., Castro, E. y Segovia, I. (2007). El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles: una investigación en curso. *PNA, 1*(4), 179-190.

Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. y Weisbeck, L. (1993). Models of problem solving: a study of Kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(5), 428-441.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Castro, E. y Castro, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 54*, 31-40.

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. En D. H. Clements, J. Sarama y A. M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dacey, L., Schulman, L. y Eston, R. (1999). *Growing mathematical ideas in kindergarten*. Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Davis, G. y Pepper, K. (1992). Mathematical problem solving by pre-school children. *Educational Studies in Mathematics, 23*(4), 397-415.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En D. C. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). Nueva York, NY: Macmillan.

Fuson, K. C., Clements, D. H. y Beckman, S. (2009). *Focus in prekindergarten: Teaching with curriculum focal points*. Reston, VA/Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics & Naeyc.

Ginsburg, H., Jacobs, S. F. y Lopez, L. S. (1998). *The teacher's guide to flexible interviewing in the classroom: Learning what children know about math*. Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.

Jacob, L. y Willis, S. (2003). The development of multiplicative thinking in young children. En L. Bragg, C. Campbell, G Herbert y J. Mousley (Eds.), *MERINO: Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity* (Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematical Education Research Group of Australasia, pp. 460-467). Sydney, Australia: Deakin University.

Manches, A., O'Malley, C. y Benford, S. (2010). The role of physical representations in solving number problems: A comparison of young children's use of physical and virtual materials. *Computers & Education, 54*(3), 622-640.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991). *Real Decreto 1333/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Infantil*. (Vol. BOE, n°216, pp. 29716-29726). Madrid, España: Autor.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria* (Vol. BOE, n° 293, pp. 43053-43102). Madrid, España: Autor.

Ministerio de Educación y Ciencia (2008). *Orden ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil* (Vol. BOE, n ° 5, pp. 1016-1036). Madrid, España: Autor.

Olive, J. (2001). Children's number sequences: An explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator, 11*(1), 4-9.

Pinczes, E. J. y Mackain, B. (1993). *One hundred hungry ants*. Nueva York, NY: Houghton Miffin Company.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid, España: Síntesis.

Riley, M. S. (1981). *Conceptual and procedural knowledge in development*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Pittsburg, Estados Unidos.

Steffe, L. (1988). Children's construction of number sequences and multiplying schemes. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 119-140). Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum associates.

Steffe, L. (2004). PSSM from a constructivist perspective. En D.H. Clements, J. Sarama y A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 221-251). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Tzur, R., Johnson, H. L., McClintock, E., Kenney, R. H., Xin, Y. P., Si, L., et al. (2013). Distinguishing schemes and tasks in children's development of multiplicative reasoning. *PNA, 7*(3), 85-101.

Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Warfield, J. (2001). Teaching kindergarten children to solve word problems. *Early Childhood Education Journal*, *28*(3), 161-167.

Carlos de Castro Hernández
Universidad Autónoma de Madrid
carlos.decastro@uam.es

Elisa Hernández Gutiérrez
CEIP Chaves Nogales
elisa.hernandez.gutierrez@gmail.com

Recibido: Septiembre de 2013. Aceptado: Diciembre de 2013.
Handle: