ALXEBRA

41

PASCUAL JARA MARTINEZ

Teorías de Torsión: Zócalo y Radical

Prof. E. G.-Rodeja F.
Departamento de Algebra y Fundamentos
Universidad de Santiago de Compostela
España

T-17-…

TEORIAS DE TORSION: ZOCALO Y RADICAL

por

PASCUAL JARA MARTINEZ

Universidad de Granada, 1.983

D.L.: C –35-1985 **ISBN:** 84-398-3125-0 **ISSN:** 0211-5239

Imprenta Universitaria - Pabellón de Servicios
Universidad de Santiago

Tesis Doctoral dirigida por el Dr. D. José Luis Bueso Montero, Profesor Adjunto de Algebra de la Universidad de Granada, y defendida por D. Pascual Jara Martínez el día 19 de Septiembre de 1.983, ante el tribunal formado por los profesores García-Rodeja Fernández; Rodríguez-Grandjean López-Valcarcel; Menal Brufat; Varea Agudo y Bueso Montero. Obtuvo la calificación de Sobresaliente "cum laude".

CONTENIDOS.

INTRODUCCION

El nacimiento de las teorias de torsión está conectado con el estudio de los anillos de cocientes. La aproximación general ha sido desarrollada bajo diferentes puntos de vista por Gabriel, Maranda, Chew, Dickson y Goldman.

P. Gabriel en, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France, 90, 323-448, (1.962), desarrollando ideas de Grothendieck dadas en Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J., 9, 119-221, (1.957), construye la categoría cociente de una categoría abeliana por una subcategoría localizante (construcción utilizada por Serre implicitamente en un trabajo sobre grupos de homología).

En 1.964, J. M. Maranda, en Injective structures, Trans. Amer. Math. Soc., 110, 98-135, (1.964), introduce los conceptos de pre-radical, radical y radical torsión, demostrando una correspondencia biyectiva entre las topología de Gabriel del anillo (que el propio Gabriel habia demostrado que se encontraban en correspondencia biyectiva con las subcategorías localizantes) y los radicales torsión.

K. L. Chew en [17], introduce el concepto de operador clausura en el retículo de los submódulos de un R-módulo, estableciendo una biyección entre el conjunto de todas las topologias de Gabriel del anillo y el conjunto de los operadores clausura modulares.

En 1.966, S. E. Dickson en [28], introduce la axiomática de una teoria de torsión en una categoría abeliana, demostrando que dicho concepto es equivalente a la noción de radical idempotente en el sentido de Maranda. Además, establece una correspondencia biyectiva entre las teorias de torsión hereditarias y los radicales exactos a izquierda.

Posteriormente, O. Goldman, en [40], utilizando el concepto de inyectividad relativa a una teoría de torsión hereditaria, da una construcción elemental del módulo de cocientes, e introduce los R-módulos soporte para una teoría de torsión hereditaria, que cogeneran unas teorias de torsión denominadas primas, y que vienen a ser una generalización de los ideales primos para un anillo conmutativo. Por otra parte, cuando se considera la teoría de torsión trivial, esto es; todo R-módulo es libre de torsión, entonces los R-módulos soporte son exactamente los R-módulos simples.

En 1.971, J. Raynaud, en,Localisations et anneaux semi-noéthériens à droite, Publ. Dép. Math. (Lyon), 8, 77-112, (1.971), utilizando el concepto de R-módulo soporte dado por Goldman, introduce las teorias de torsión fuertemente semi-primas, como aquellas que son intersección de teorias de torsión cogeneradas por R-módulos soporte, caracterizando los anillos seminoetherianos, como aquellos para los que toda teoría de torsión es fuertemente semi-prima.

Una teoría de torsión de especial relieve, es la introducida por A. Goldie en Torsion free modules and rings, J. Algebra, 1, 268-287, (1.964). Goldie propone la siguiente definición,

$$Cl^M(N) = \{x/\ x \in M \text{ y } (N:x) \text{ es un ideal esencial de } R\}$$

para un submódulo N de M. J. S. Alin y S. E. Dickson en,Goldie's torsion theory and its derived functor, Pacific J. Math., 24, 195-203, (1.968), que $Z_2(M) = Cl^M Cl^M(O)$ es un radical torsión, que da lugar a la teoría de torsión de Goldie.

Así, un R-módulo M es libre de torsión para esta teoría de torsión, si y solo si es no singular. K. R. Goodearl en [41], realiza un estudio en profundidad de esta teoría de torsión.

Para una teoría de torsión hereditaria arbitraria, el concepto de radical de Jacobson de un anillo, se encuentra en J. S. Golan, [36], definido como la intersección de todos los ideales derecha τ-cocríticos, si no existen ideales derecha τ-cocríticos, entonces de define igual al anillo R, para un R-módulo arbitrario el estudio de dicho radical ha sido abordado entre otros por W. G. Lau en [55],por M. L. Teply en [83] y por B. A. Benander en [8]. Cuando se considera la teoria de torsión trivial, entonces se obtiene el radical de Jacobson ordinario. Diversas generalizaciones del zócalo de un R-módulo para una teoria de torsion hereditaria arbitraria tambien han sido consideradas por los autores anteriormente citados. En particular, para el caso de la teoría de torsión de Goldie, este estudio ha sido abordado por J. Dauns en [22] y [23], obteniendo mediante el estudio de la estructura de las envolventes inyectivas para R-módulos semicríticos relativos a esta teoría de torsión, un teorema de estructura para el anillo maximal de cocientes de un anillo no singular.

En [55] y [83], Lau y Teply abordan el estudio de R-módulos finitamente semicríticos relativos a una teoría de torsión hereditaria, los cuales son caracterizados como R-módulos libres de torsión, artinianos relativos a la teoria de torsión, y verificando que cada submódulo esencial es denso.

En 1.968, C. Năstăsescu y N. Popescu, en [63], definen un anillo semiartiniano derecha a partir de la definición de zócalo, el cual es una generalización de anillo perfecto derecha de Bass ,

[5], Análogamente, definen los R-módulos semiartinianos, estos son exactamente los R-módulos torsión para la teoria de torsión de Dickson, [28], esto es; la teoria de torsión generada por todos los R-módulos simples. El radical torsión asociado a esta teoría de torsión, se puede construir por el procedimiento standar de asociar a un preradical idempotente un radical idempotente dado en [82], obtenemos de esta forma una cadena de submódulos, que es conocida como la serie de Loewy, la cual ha sido estudiada por Shores en [74] y [75] y por Fuchs en, Torsion preradicals and ascending Loewy series of modules, J. Reine und Ang, Math., 239/240, 169-179, (1.969).

Si bien los primitivos trabajos sobre anillos de cocientes y teorias de torsión (Utumi, Johnson, Findlay-Lambek,...), se habian realizado en anillos no necesariamente son identidad, la influencia de la escuela bourbakista, hace que estos pasen a realizarse sobre anillos con identidad.

Independientemente de esta razon, ocurre que para una teoria de torsión hereditaria en la categoría Mod-R de los R-módulos a derecha no necesariamente unitarios, no existe, en general, una topología de Gabriel asociada, por lo que se pierde la correspondencia biyectiva entre teorias de torsión hereditarias y topologias de Gabriel para anillos con identidad. Este inconveniente es subsanado en el capítulo primero de la presente memoria, mediante la introducción de las teorias de torsion regulares y hereditarias.

El ejemplo más sencillo de una teoria de torsión hereditaria y regular es la teoría de torsión cogenerada por la clase de los R-módulos verificando la propiedad (R), esto es; si $mR = 0$ para $m \in M$, entonces $m = 0$. Esta teoria de torsion ha sido estudiada por Kellett en [50] y por Gardner en [34] y [35], entre otros.

El estudio de las topologias de Gabriel en anillos no necesariamente con identidad fué considerado por Chew en [17]. En [6] Baumont estudia dichas topologias relacionandolas con topologias de Gabriel en la extensión de Dorroh del anillo R.

XXXXXXXX

El objetivo de la presente memoria es estudiar teorias de torsión en la categoría Mod-R de los R-módulos derecha sobre un anillo R no necesariamente con identidad, y en especial aquellas que tienen asociada una topologia de Gabriel.

La primera sección del primer capítulo está dedicada a este fin. Tales teorías de torsión las llamamos regulares, y están caracterizadas por la propiedad de que todos los R-módulos libre de torsión verifican la propiedad (R), ó equivalentemente, que todos los R-módulos triviales son torsión. Un R-módulo M tiene la propiedad (R) cuando para cada $m \in M$ se tiene que $mR = 0$ implica $m = 0$, y es trivial si $MR = 0$. Si llamamos R_1 a la extensión de Dorroh del anillo R, entonces tenemos siguiendo la construccion dada por Baumont que si $\mathcal{X}$ es una topología de Gabriel en R, entonces

$$\mathcal{X}_1 = \{I_1 \leq R/ \text{ existe } I \in \mathcal{X} \text{ tal que } I \leq I_1\}$$

es una topologia de Gabriel en R_1, y reciprocamente, si $\mathcal{X}_1$ es un filtro de Gabriel en R_1 tal que $R \in \mathcal{X}_1$, entonces

$$\mathcal{X} = \{I_1 \cap R/ \; I_1 \in \mathcal{X}\}$$

es una topología de Gabriel en R. Además esta correspondencia es biyectiva, (1.1.27).

En la segunda sección estudiamos el retículo de los submódulos cerrados para una teoría de torsión hereditaria y regular, ya que cuando la teoría de torsión no es regular, los elementos del retículo de los cerrados no pueden ser caracterizados en función de elementos de la topología de Gabriel, lo que impide obtener propiedades "buenas". Estudiamos el operador clausura asociado a la teoría de torsión, y las operaciones a que da lugar en $C_\tau(M)$, para las cuales es un retículo modular completo y pseudo-complementado. A continuación se estudian los morfismos de retículos inducidos por morfismos de R-módulos, caracterizando submódulos cerrados y densos mediante isomorfismos de retículos.

En la sección tercera estudiamos algunos elementos distinguidos del retículo de los submódulos cerrados, caracterizando los submódulos τ-cocríticos como elementos maximales y los submódulos τ-críticos como aquellos cuya τ-clausura es un elemento minimal. A continuación estudiamos los ideales biláteros τ-cerrados, llegandose a que un ideal maximal entre los biláteros contenidos en el retículo de los cerrados es un ideal primo. Por último, estudiamos como cambia una teoria de torsión mediante un morfismo de anillos, y qué relación existe entre los módulos críticos para cada teoría de torsión.

La cuarta sección está dedicada a mostrar ejemplos de teorias de torsión, y a estudiar cuando la teoría de torsión hereditaria cogenerada por un R-módulo es regular, y damos dos teoremas que nos permiten construir teorias de torsión hereditarias y regulares.

El segundo capítulo está dedicado principalmente al estudio del zócalo relativo a una teoría de torsión, generalizando el zócalo de un anillo.

En la sección primera determinamos que para cada submódulo cerrado N de M, siendo M una clausura de una suma de submódulos τ-críticos, existe una familia independiente maximal de submódulos τ-críticos, cuya suma no corta a N, y tal que la clausura de la suma de N con la suma de esta familia es igual a M. Como consecuencia, para cada M verificando la anterior propiedad, se tiene que es la clausura de una suma directa de submódulos τ-críticos, y que el τ-zócalo, definido como la clausura de la suma de todos los submódulos, adopta tambien esta forma. Por ser una propiedad casi exclusiva de retículos, podemos, aplicando los resultados del capítulo primero, conocer las relaciones existentes entre algunos módulos, submódulos suyos, y tambien módulos cocientes. Llamamos R-módulo τ-semicrítico a un R-módulo que coincide con su τ-zócalo, y estudiamos condiciones necesarias y suficientes para que un R-módulo sea τ-semicrítico. Un anillo R se llama τ-semicrítico cuando es τ-semicrítico como R-módulo a la derecha, y estudiamos condiciones sobre los R-módulos para que el anillo R sea τ-semicrítico. Por último definimos el radical relativo a una teoría de torsión, el τ-radical, como la interseccion de todos los anuladores de todos los R-módulos τ-críticos, y demostramos que coincide con la intersección de todos los ideales derecha τ-cocríticos. En [15], hemos demostrado que una teoría de torsión es fuertemente semiprima si y solo si está cogenerada por un R-módulo semicrítico.

En la segunda sección construimos la serie de Loewy relativa a una teoria de torsión, y llamamos τ-módulo de Loewy a un R-módulo M verificando $S_{\tau}^{\lambda}(M) = M$ para algún ordinal λ, y τ-longitud de Loewy al menor ordinal λ tal que $S_{\tau}^{\lambda}(M) = S_{\tau}^{\lambda+1}(M)$, demostramos que la τ-longitud de Loewy del anillo R es una cota superior de las τ-longitudes de Loewy de todos los R-módulos.

En la sección tercera damos el concepto de R-módulo τ-semiartiniano, y demostramos que un R-módulo es τ-semiartiniano si, y solo si, es un τ-módulo de Loewy, y damos condiciones necesarias y suficientes para que el anillo R sea τ-semiartiniano. Damos un teorema análogo al clásico teorema de anillos semiartinianos, esto es; si R es un anillo τ-semiartiniano con τ-longitud finita, entonces todo R-módulo no nulo y libre de τ-torsión contiene un submódulo τ-cocrítico. Por último, estudiamos la relación existente entre anillos τ-semiartinianos y condiciones de finitud relativas a la teoría de torsión.

En la cuarta sección, estudiamos la descomposición del τ-zócalo,definido en la sección primera, mediante la siguiente relación de equivalencia en la clase de los R-módulos τ-críticos; dos R-módulos τ-críticos son equivalentes si tienen envolventes inyectivas isomorfas. Como consecuencia, tenemos un nuevo concepto de dimensión relativa a una teoría de torsión, que generaliza la dimensión reducuda de Goldie, y un teorema de estructura para el anillo de endomrfismos de la envolvente τ-inyectiva de un R-módulo τ-semicrítico y libre de torsión.

El tercer capítulo está dedicado a la obtención de radicales y quasi-radicales de anillos.

En la primera sección desarrollamos el concepto de distribución, y damos algunos ejemplos de distribuciones.Obtenemos las distribuciones definidas por de la Rosa en [25], y damos un nuevo ejemplo que resuelve el problema planteado por de la Rosa. Por último generalizamos el λ-radical, caracterizando aquellos anillos R tales que los ideales derecha del anillo de matrices R_n son de la forma suma de ideales con solo una fila no nula, y donde todos los elementos no nulos pertenecen a un ideal derecha de R.

La segunda sección está dedicada al estudio de R-módulos e ideales derecha primos, y su relación con el retículo de los cerrados, e introducimos un nuevo radical especial utilizando la clase de los R-módulos críticos y primos.

NOTACION.

1. R designará un anillo no necesariamente con identidad.
2. Mod-R es la categoria de R-módulos derecha.
3. MOD-R es la categoria de R-módulos derecha unitarios, cuando R tiene identidad.
4. $I \leq R$ significa que I es un ideal derecha de R.
5. $_R(I:R) = \{r \in R/\ rR \leq I\}$.
6. $N(I) = \{r \in R/\ rI \leq I\}$. Se llama el idealizador de I en R.
7. $N \leq M$ significa que N es un submódulo de M.
8. $(N:M) = (N:M)_R = \{r \in R/\ Mr \subseteq N\}$.
9. $x \in M$ significa que x es un elemento de M.
10. $x \notin M$ significa que x no es un elemento de M.
11. $N \lneq M$ significa que N es un submódulo de M, distinto de M.
12. $N \nleq N'$ significa que N no es un submódulo de N'
13. $x \in M \setminus N$ significa que x es un elemento de M y no de N.
14. Toda clase de R-módulos se supone siempre cerrada para isomorfismos.

CAPITULO 1

TEÓRIAS DE TORSION

1.1. TEORIAS DE TORSION Y TOPOLOGIAS DE GABRIEL.

(1.1.1) R denotará un anillo asociativo, no necesariamente con identidad y Mod-R (respectivamente R-Mod), la categoría de los R-módulos por la derecha (respectivamente, R-módulos por la izquierda). Cuando sea un anillo unitario, llamamos MOD-R (respectivamente, R-MOD) a la categoría de los R-módulos a la derecha (respectivamente, a la izquierda) unitarios.

Salvo que se indique otra cosa, R-módulo significará R-módulo por la derecha no necesariamente unitario.

(1.1.2) Una teoría de torsión en Mod-R es un par de clases $\tau = (T_\tau, F_\tau)$ de R-módulos, verificando los siguientes axiomas:

A-I. $T_\tau \cap F_\tau = 0$.

A-II. T_τ es cerrada para cocientes.

A-III. F_τ es cerrada para submodulos.

A-IV. Para cada R-módulo M existe una sucesión exacta corta $0 \longrightarrow T \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow 0$, con $T \in T_\tau$ y $F \in F_\tau$.

La clase T_τ se llama <u>clase de torsión de τ</u> y la clase F_τ se llama <u>clase libre de torsión de τ</u>. Los elementos de T_τ se llaman de <u>τ-torsión</u> y los de F_τ se llaman <u>libres de τ-torsión</u>.

(1.1.3) LEMA. Para cada R-módulo M, en el axioma A-IV, el R-módulo T es único salvo isomorfismo y determina un submodulo $T_\tau(M)$ de M.

(1.1.4) LEMA. Para R-módulos M y M' y para un morfismo de R-módulos $f:M \longrightarrow M'$ se tienen:

1. $T_\tau(M)$ es el mayor submodulo de M contenido en T_τ.
2. $T_\tau T_\tau(M) = T_\tau(M)$.
3. $T_\tau(M/T_\tau(M)) = 0$.
4. $f(T_\tau(M)) \subseteq T_\tau(M')$.
5. $T_\tau(M) = \cap \{ N/\ N \leq M \text{ y } M/N \in F_\tau \}$.

Llamamos a $T_\tau(M)$ el submodulo de τ-torsión de M.

(1.1.5) LEMA. 1. Una clase $\underline{\underline{T}}$ de R-módulos es una clase de torsión para una teoría de torsión si y solo si es cerrada para extensiones coproductos y cocientes.

2. Una clase $\underline{\underline{F}}$ de R-módulos es una clase libre de torsión para una teoría de torsión si y solo si es cerrada para extensiones, productos y submódulos.

[82, prop. VI.2.1 y 2.2].

(1.1.6) Una teoría de torsión se llama hereditaria si la clase de torsión es cerrada para submódulos.

(1.1.7) LEMA. Sea τ una teoría de torsión. Son equivalentes los siguientes enunciados:

1. τ es hereditaria.
2. Para cada submodulo N de M se verifica la igualdad $T_\tau(N) = N \cap T_\tau(M)$.
3. La clase F_τ es cerrada para extensiones esenciales.

[82 . prop. VI.3.2].

(1.1.8) Si τ y σ son dos teorías de torsión en Mod-R, decimos que τ es menor ó igual que σ y lo representamos $\tau \leq \sigma$, si para todo R-módulo M se verifica $T_\tau(M) \leq T_\sigma(M)$, ó equivalentemente $T_\tau \subseteq T_\sigma$, ó equivalentemente $F_\tau \supseteq F_\sigma$.

(1.1.9) Sea $\underline{\underline{C}}$ una clase de R-módulos, definimos:

$$\underline{\underline{F}} = \{ M \in \text{Mod-R} / \ \text{Hom}_R(C,M) = 0 \text{ para cada } C \text{ de } \underline{\underline{C}} \} \quad \text{y}$$

$$\underline{\underline{T}} = \{ M \in \text{Mod-R} / \ \text{Hom}_R(M,F) = 0 \text{ para cada } F \text{ de } \underline{\underline{F}} \}$$

Se tiene que $(\underline{\underline{T}}, \underline{\underline{F}})$ es una teoría de torsión, y es la menor para la que todo elemento de $\underline{\underline{C}}$ es torsión. Se dice que $\underline{\underline{C}}$ <u>genera</u> la teoría.

(1.1.10) Sea $\underline{C}$ una clase de R-módulos, definimos:

$$\underline{T} = \{ M \in \text{Mod-R} / \ \text{Hom}_R(M,C) = 0 \text{ para cada } C \text{ de } \underline{C} \} \quad \text{y}$$

$$\underline{F} = \{ M \in \text{Mod-R} / \ \text{Hom}_R(T;M) = 0 \text{ para cada } T \text{ de } \underline{T} \}.$$

Se tiene que $(\underline{T}, \underline{F})$ es una teoría de torsión, y es la mayor para la que todo elemento de $\underline{C}$ es libre de torsión. Se dice que $\underline{C}$ <u>cogenera</u> la teoría.

(1.1.11) <u>LEMA</u>. Una teoría de torsión es hereditaria si y solo si está cogenerada por un R-módulo inyectivo.
[82 , prop. VI.3.7].

(1.1.12) Si τ es una teoría de torsión, un submodulo N de un R-módulo M se llama <u>τ-denso</u> si M/N es τ-torsión. Llamamos $\mathcal{L}_\tau(M)$ al conjunto de todos los submodulos de M τ-densos en M.

(1.1.13) <u>LEMA</u>. Sea τ una teoría de torsión hereditaria. Para R-módulos M y M' y para $f: M \longrightarrow M'$ morfismo de R-módulo se tienen:

1. Si $N \leq L$ son submodulos de M y N es τ-denso en M, entonces L es τ-denso en M.

2. Si N y L son submodulos de M τ-densos, entonces $N \cap L$ es τ-denso en M.

3. Si N' es un submodulo de M' τ-denso, entonces $f^{-1}(N')$ es τ-denso en M.

4. Si f es un epimorfismo y N es un submodulo τ-denso de M, entonces f(N) es τ-denso en M'.

5. Si $L \leq N$ son submodulos de M, N es τ-denso en M y L es τ-denso en N, entonces L es τ-denso en M.

Demostración. 1. Si $N \leq L$ y N es τ-denso en M, entonces M/N es τ-torsión, como M/L es un cociente de él y T_τ es cerrada para cocientes, entonces L es τ-denso.

2. Consideramos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N/(L \cap N) \longrightarrow M/(L \cap N) \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

Por hipotesis M/L y M/N son τ-torsión, y como $N/(L \cap N) = (L + N)/L$ es un submodulo de M/L, tenemos que $M/(N \cap L)$ es τ-torsión y por tanto $N \cap L$ es τ-denso.

3. Basta probar que el morfismo inducido $f':M/f^{-1}(N') \longrightarrow M'/N'$ es un monomorfismo. Supongamos que $f'(m + f^{-1}(N'))= = \bar{0}$, para m un elemento de M, entonces $f(m) \in N'$, luego $m \in f^{-1}(N')$ y por tanto $m + f^{-1}(N') = \bar{o}$.

4. Basta probar que el morfismo inducido $f':M/N \longrightarrow M'/f(N)$ es un epimorfismo. Supongamos que $m' + f(N) \in M'/f(N)$, entonces existe $m \in M$ tal que $f(m) = m'$, es claro entonces que $f'(m + N) = m' + f(N)$.

5. Tenemos que $L \leq N \leq M$, entonces por hipotesis M/N es τ-torsión, y N/L es τ-torsión. Si consideramos la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow N/L \longrightarrow M/L \to M/N \longrightarrow 0$, es claro que M/L es τ-torsión.

(1.1.14) Si R es un anillo unitario y τ es una teoría de torsión hereditaria en MOD-R, entonces $\mathfrak{L}_\tau(R)$ verifica las siguientes propiedades:

F-I. Si $I \leq J$ son ideales derecha de R con $I \in \mathcal{L}_\tau(R)$, entonces $J \in \mathcal{L}_\tau(R)$.

F-II. Si I y J son ideales derecha de R tales que $I, J \in \mathcal{L}_\tau(R)$, y $f: I \longrightarrow R$ es un morfismo de R-módulos, entonces $f^{-1}(J) \in \mathcal{L}_\tau(R)$.

F-III. Si I es un ideal derecha de R y existe un ideal derecha $J \in \mathcal{L}_\tau(R)$ tal que para cada $y \in J$ se tiene $(I:y) \in \mathcal{L}_\tau(R)$, entonces $I \in \mathcal{L}_\tau(R)$.

Además, toda familia de ideales derecha de R verificando estos axiomas determina una teoría de torsión hereditaria, y esta correspondencia es biyectiva.

(1.1.15) Una familia no vacia $\mathcal{L}$ de ideales derecha en un anillo arbitrario R verificando los axiomas F-I, F-II y F-III se llama una <u>topología de Gabriel</u> en R. (Tambien se la llama <u>filtro de Gabriel</u> en R).

(1.1.16) <u>LEMA</u>. Sea $\mathcal{L}$ una familia no vacia de ideales derecha de R verificando F-I y F-III. Entonces son equivalentes F-II y

F-II'. Para cada ideal derecha $I \in \mathcal{L}$, y para cada $r \in R$, se tiene $(I:r) \in \mathcal{L}$.

<u>Demostración</u>.

<u>F-II $\Rightarrow$ F-II'</u>. Como $\mathcal{L}$ es no vacio y verifica F-I, tenemos que $R \in \mathcal{L}$. Si $I \in \mathcal{L}$, entonces para todo r de R, $f_r: R \longrightarrow R$ definido $f_r(x) = rx$ es un morfismo de R-módulos, y se tiene $(f_r)^{-1}(I) = (I:r)$.

<u>F-II' $\Rightarrow$ F-II</u>. Supongamos que $I, J \in \mathcal{L}$ y consideremos $f: I \longrightarrow R$ morfismo de R-módulos, tenemos $(f^{-1}(J):r) = (J:f(r))$, por (F-II'), como $J \in \mathcal{L}$, se tiene $(f^{-1}(J):r) \in \mathcal{L}$ para todo $r \in R$. Aplicando entonces (F-III), tenemos que $f^{-1}(J) \in \mathcal{L}$.

(1.1.17) Cuando τ es una teoría de torsión hereditaria en Mod-R, $\mathcal{L}_\tau(R)$ no necesariamente es una topología de Gabriel.

EJEMPLO.

Llamamos R al anillo $2\mathbb{Z}$ y consideramos en Mod-R la teoría de torsión hereditaria τ cogenerada por la envolvente inyectiva de $M = R/4\mathbb{Z}$. Por definición

$$\mathcal{L}_\tau(R) = \{ I \leq R / R/I \text{ es } \tau\text{-torsión}\}.$$

Tenemos que $6\mathbb{Z}$ es un ideal derecha τ-denso de $2\mathbb{Z}$ y además para cada $y \in 6\mathbb{Z}$ se verifica $(4\mathbb{Z} : y) = R \in \mathcal{L}_\tau(R)$. Por tanto $\mathcal{L}_\tau(R)$ no verifica F-III, ya que es claro que $4\mathbb{Z} \notin \mathcal{L}_\tau(R)$.

Vamos entonces a considerar en Mod-R aquellas teorías de torsión τ tales que $\mathcal{L}_\tau(R)$ sea una topología de Gabriel.

(1.1.18) Una teoría de torsion $\tau = (T_\tau, F_\tau)$ se llama regular si todo R-módulo trivial, esto es; $MR = 0$, es τ-torsión.

(1.1.19) TEOREMA. Si $\mathcal{L}$ es una topología de Gabriel en R, entonces

$$T_{\mathcal{L}} = \{ M \in \text{Mod-R} / \text{ para todo } m \in M \text{ se tiene } (0:m) \in \mathcal{L} \}$$

es una clase de torsión hereditaria y regular.

Demostración. Demostrar que $T_{\mathcal{L}}$ es una clase de torsión hereditaria es análogo al caso unitario. [82, Theorem VI.5.1]. Unicamente tenemos que comprobar que $T_{\mathcal{L}}$ es regular. Sea M un R-módulo trivial, entonces para todo $m \in M$ se tiene $(0:m) = R \in \mathcal{L}$, luego M es ·torsión.

(1.1.20) Si R es un anillo, definimos R_1 como la extensión de Dorroh de R, R_1 es un anillo unitario definido sobre el conjunto $R\times\mathbb{Z}$ con operaciones:

suma: $(r,n) + (s,m) = (r + s, n + m)$

producto: $(r,n)(s,m) = (rs + rm + sn, nm)$

para $r, s \in R$ y para $n, m \in \mathbb{Z}$. Es claro que el elemento identidad es (o,1).

Podemos identificar R con el ideal de R_1 formado por los elementos (r,o) para $r \in R$.

(1.1.21) LEMA. Si J es un ideal derecha (respectivamente izquierda, bilátero) de R, entonces J es un ideal derecha (respec. izquierda, bilátero) de R_1.

Demostración. Sea $y \in J$ con J ideal derecha de R, si $(r,n) \in R_1$, entonces se tiene $y(r,n) = yr + yn \in J$.

(1.1.22) LEMA. Si $f:R \longrightarrow S$ es un morfismo de anillos con S un anillo unitario, con identidad e, entonces existe un único morfismo de anillos unitarios $f_1:R_1 \longrightarrow S$ tal que $f = f_1\theta$, donde $\theta:R \longrightarrow R_1$ es el morfismo inclusión, definido $\theta(r) = (r,o)$.

Demostración. Definimos $f_1((r,n)) = f(r) + en$, es claro que f_1 es un morfismo de anillos unitarios, que verifica $f = f_1\theta$ y que es el único que satisface la igualdad.

(1.1.23) COROLARIO. Todo R-módulo tiene una estructura canónica de R_1-módulo unitario, y todo morfismo de R-módulos es tambien un morfismo de R_1-módulos. Por último, las categorías Mod-R y MOD-R_1 son isomorfas.

(1.1.24) En [6], Baumont asocia a cada topología de Gabriel $\mathcal{X}$ en R una topología de Gabriel en R_1, definida:

$$\mathcal{X}_1 = \{ I' / I' \leq R_1 \text{ y existe } I \in \mathcal{X} \text{ tal que } I \leq I' \}.$$

Donde $I' \leq R_1$ significa que I' es un ideal deracha de R_1.

Tambien a partir de una topología de Gabriel en R_1 que contenga a R, $\mathcal{X}$, podemos definir una topología de Gabriel en R mediante

$$\mathcal{X}_o = \{ I / I \leq R \text{ y existe } I' \in \mathcal{X} \text{ tal que } I = I' \cap R \}.$$

Claramente existe una correspondencia biunívoca entre topologias de Gabriel en R y topologias de Gabriel en R_1 conteniendo a R.

Ahora vamos a asociar a cada teoría de torsión hereditaria regular τ en Mod-R una topología de Gabriel en R.

(1.1.25) <u>TEOREMA</u>. Si τ es una teoría de torsión hereditaria y regular en Mod-R, entonces

$$\mathcal{L}_\tau(R) = \{I/\ I \leq R \text{ tal que } R/I \text{ es } \tau\text{-torsión}\}$$

es una topología de Gabriel.

<u>Demostración</u>.

<u>F-I</u>. Sea $I \in \mathcal{L}_\tau(R)$, y sea J un ideal derecha de R tal que $I \leq J$, entonces existe un epimorfismo,inducido por la inclusión,de R/I sobre R/J, por tanto R/J es τ-torsión y $J \in \mathcal{L}_\tau(R)$.

<u>F-II'</u>. Sea $I \in \mathcal{L}_\tau(R)$ y $r \in R$, llamamos $f:R \longrightarrow R$ al morfismo de R-módulos definido $f(x) = rx$, Es claro que $f^{-1}(I) = (I:r)$, y como consecuencia de (1.1.13), $(I:r) \in \mathcal{L}_\tau(R)$.

<u>F-III</u>. Sea I un ideal derecha de R y $J \in \mathcal{L}_\tau(R)$ verificando que para cada $y \in J$ se tiene $(I:r) \in \mathcal{L}_\tau(R)$. Consideramos el isomorfismo de R-módulos $(I + J)/I = J/(I \cap J)$, sea $y \in J$, entonces

$$(0:y + (I \cap J)) = (I \cap J:y) = (I:y),$$

entonces tenemos un isomorfismo de R-módulos $(y + (I \cap J))R = R_1/(I:y)$

Consideramos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow R/(I:y) \longrightarrow R_1/(I:y) \longrightarrow R_1/R \longrightarrow 0$$

Tenemos que $R/(I:y)$ y R_1/R son τ-torsión, luego $R_1/(I:y)$ es τ-torsión y por tanto $(I + J)/I = J/(I \cap J)$ es τ-torsión. Por el axioma (F-I), ya que $I \in \mathcal{L}_\tau(R)$, tenemos $I + J \in \mathcal{L}_\tau(R)$, luego de la consideración de la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow (I + J)/I \longrightarrow R/I \longrightarrow R/(I + J) \longrightarrow 0$$

deducimos que R/I es τ-torsión , y por tanto $I \in \mathcal{L}_\tau(R)$.

(1.1.26) COROLARIO. Si τ es una teoría de torsión hereditaria regular, entonces $\mathcal{L}_\tau(R_1) = (\mathcal{L}_\tau(R))_1$.

Demostración.

$\mathcal{L}_\tau(R_1) \subseteq (\mathcal{L}_\tau(R))_1$. Sea $I \in \mathcal{L}_\tau(R_1)$, entonces R_1/I es τ-torsión, y por tanto $R/(R \cap I)$ tambien lo es, entonces $R \cap I \in \mathcal{L}_\tau(R)$ e $I \in (\mathcal{L}_\tau(R))_1$.

$(\mathcal{L}_\tau(R))_1 \subseteq \mathcal{L}_\tau(R_1)$. Sea $I' \in (\mathcal{L}_\tau(R))_1$, entonces $I = R \cap I'$ pertenece a $\mathcal{L}_\tau(R)$. De (1.1.25) se tiene que R/I es τ-torsión. Existe un isomorfismo de R-módulos $(R + I')/I' = R/(R \cap I') = R/I$. Por ser la clase T_τ cerrada para cocientes, R_1/R es τ-torsión implica que $R_1/(R + I)$ es τ-torsión, y considerando la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow (R + I')/I' \longrightarrow R_1/I' \longrightarrow R_1/(R + I') \longrightarrow 0,$$

se deduce que R_1/I' es τ-torsión, y por tanto $I' \in \mathcal{L}_\tau(R_1)$.

(1.1.27) COROLARIO. Existe una correspondencia biunívoca entre:

1. Teorias de torsión hereditarias y regulares en Mod-R.
2. Topologias de Gabriel en R.
3. Topologias de Gabriel en R_1 conteniendo a R.
4. Teorias de torsión hereditarias en MOD-R_1 para las que R es un ideal denso de R_1.

1.2. EL RETICULO DE LOS SUBMODULOS τ-CERRADOS.

A lo largo de esta sección una teoría de torsión es una teoría de torsión hereditaria y regular, salvo que se indique lo contrario.

(1.2.1) Si τ es una teoría de torsión y M es un R-módulo, un submódulo N de M se llama <u>τ-cerrado</u> si M/N es libre de τ-torsión.

(1.2.2) En el conjunto de los submódulos de un R-módulo M definimos el siguiente operador:

$$Cl_\tau^M(N) = \cap \{L \;/\; L \leq M \text{ es } \tau\text{-cerrado y } N \leq L\}.$$

A $Cl_\tau^M(N)$ lo llamamos <u>τ-clausura</u> de N en M.

<u>LEMA</u>. Si N es un submódulo de M, entonces se verifica la siguiente igualdad $T_\tau(M/N) = Cl_\tau^M(N)/N$.

<u>Demostración</u>. Por (1.1.4), sabemos que $T_\tau(M/N)$ es la intersección de todos los submódulos τ-cerrados de M/N, entonces, basta comprobar que existe una correspondencia biunívoca entre los submódulos τ-cerrados de M/N y los submódulos τ-cerrados de M que contienen a N, lo cual es inmediato.

(1.2.3) <u>LEMA</u>. Si N es un submódulo de M, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$Cl_\tau^M(N) = \{m \in M/ \ (N:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)\}.$$

<u>Demostración</u>. Por (1.2.2) tenemos que $T_\tau(M/N) = Cl_\tau^M(N)/N$, y de (1.1.19) deducimos que $T_\tau(M/N) = \{m + N \in M/N/ \ (0:m + N) \in \mathcal{L}_\tau(R)\}$. Luego es claro que $Cl_\tau^M(N) = \{m \in M \;/\; (N:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)\}$.

(1.2.4) Si τ no es regular, entonces el resultado anterior no es cierto, como prueba el siguiente

EJEMPLO.

Consideramos el anillo y la teoría de torsión estudiada en (1.1.17). Tenemos que $4\mathbb{Z}$ es un ideal derecha τ-cerrado, y por tanto $Cl_\tau^R(4\mathbb{Z}) = 4\mathbb{Z}$ y $6 \notin 4\mathbb{Z}$ verifica $(4\mathbb{Z}:6) = R \in \mathcal{L}_\tau(R)$.

(1.2.5) LEMA. El operador Cl_τ^M es un operador clausura, esto es; para cada par de submódulos N y L de M se verifican:

1. $N \leq Cl_\tau^M(N)$.
2. $Cl_\tau^M Cl_\tau^M(N) = Cl_\tau^M(N)$.
3. Si $N \leq L$, entonces $Cl_\tau^M(N) \leq Cl_\tau^M(L)$.

Además, para todo endomorfismo de M $f:M \longrightarrow M$, se verifica:

4. $Cl_\tau^M(f^{-1}(N)) = f^{-1}(Cl_\tau^M(N))$.

y es regular en el siguiente sentido:

5. $Cl_\tau^M(NR) = Cl_\tau^M(N)$.

Demostración. 1, 2, y 3 son inmediatos a partir de la definición.
4. Vamos primeramente a demostrar que $f^{-1}(Cl_\tau^M(N))$ es τ-cerrado en M. supongamos que $m \in M \setminus f^{-1}(Cl_\tau^M(N))$, entonces

$$(f^{-1}(Cl_\tau^M(N)):m) = (Cl_\tau^M(N):f(m)) \notin \mathcal{L}_\tau(R),$$

ya que $Cl_\tau^M(N)$ es τ-cerrado en M. Se tiene entonces $f(m) \notin Cl_\tau^M(f^{-1}(Cl_\tau^M(N))$, y por tanto $Cl_\tau^M(f^{-1}(Cl_\tau^M(N)) = f^{-1}(Cl_\tau^M(N))$. Como consecuencia se tiene que $f^{-1}(N) \leq f^{-1}(Cl_\tau^M(N))$ y por tanto $Cl_\tau^M(f^{-1}(N)) \leq f^{-1}(Cl_\tau^M(N))$. Para probar la otra inclusión, sea $m \in f^{-1}(Cl_\tau^M(N))$, entonces $(f^{-1}(N):m) = (N:f(m)) \in \mathcal{L}_\tau(R)$ y por tanto $m \in Cl_\tau^M(f^{-1}(N))$.
5. Por (3) tenemos que $Cl_\tau^M(NR) \leq Cl_\tau^M(N)$. Sea $m \in Cl_\tau^M(N)$, entonces $(N:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$ para cada $r \in (N:m)$, se tiene $R \leq ((N:m):r)$, entonces tenemos $((N:m)R:r) = R \in \mathcal{L}_\tau(R)$ y $(N:m)R \in \mathcal{L}_\tau(R)$, ya que $(N:m)R \leq (NR:m)$, se tiene $(NR:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$, luego $m \in Cl_\tau^M(NR)$.

(1.2.6) LEMA. Si N y L son submodulos de un R-módulo M, se verifican:

1. $Cl_\tau^M(L \cap N) = Cl_\tau^M(L) \cap Cl_\tau^M(N)$.
2. $Cl_\tau^M(N + L) = Cl_\tau^M(Cl_\tau^M(N) + Cl_\tau^M(L))$.

Demostración.

1. Tenemos las siguientes equivalencias:

$m \in Cl_\tau^M(L \cap N)$ si y solo si

$(L \cap N:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$, si y solo si

$(L:m) \cap (N:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$, si y solo si

$(L:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$ y $(N:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$, si y solo si

$m \in Cl_\tau^M(L) \cap Cl_\tau^M(N)$.

2. Es claro que se tiene la inclusión

$$Cl_\tau^M(N + L) \leq Cl_\tau^M(Cl_\tau^M(N) + Cl_\tau^M(L)).$$

De $Cl_\tau^M(N) \leq Cl_\tau^M(N + L)$ y de $Cl_\tau^M(L) \leq Cl_\tau^M(N + L)$ se puede deducir la otra.

(1.2.7) LEMA. Sea $\{N_\alpha / \alpha \in A\}$ una familia de submódulos de un R-módulo M, entonces se verifican:

1. $Cl_\tau^M(\cap \{Cl_\tau^M(N_\alpha) / \alpha \in A\}) = \cap \{Cl_\tau^M(N_\alpha) / \alpha \in A\}$.
2. $Cl_\tau^M(\cap \{N_\alpha / \alpha \in A\}) \leq \cap \{Cl_\tau^M(N_\alpha) / \alpha \in A\}$.
3. $Cl_\tau^M(\Sigma \{N_\alpha / \alpha \in A\}) = Cl_\tau^M(\Sigma \{Cl_\tau^M(N_\alpha) / \alpha \in A\})$.

Demostración. 1. Es inmediato de la definición.

2. Por (1) es $\cap \{Cl_\tau^M(N_\alpha) / \alpha \in A\}$ τ-cerrado, luego la inclusión es consecuencia de la definición.

3. Se tienen las siguientes inclusiones

$$\begin{array}{ccc} \Sigma\{N_\alpha / \alpha \in A\} & \leq & \Sigma\{Cl_\tau^M(N_\alpha) / \alpha \in A\} \\ \mathrel{\rotatebox{90}{$\geq$}} & & \mathrel{\rotatebox{90}{$\geq$}} \\ Cl_\tau^M(\Sigma\{N_\alpha / \alpha \in A\}) & & Cl_\tau^M(\Sigma\{Cl_\tau^M(N_\alpha) / \alpha \in A\}) \end{array}$$

Por tanto, por la definición de τ-clausura, se tiene

$$Cl_\tau^M(\Sigma\{N_\alpha / \alpha \in A\}) \leq Cl_\tau^M(\Sigma\{Cl_\tau^M(N_\alpha) / \alpha \in A\}).$$

Por otra parte $Cl_\tau^M(N_\alpha) \leq Cl_\tau^M(\Sigma\{N_\alpha / \alpha \in A\})$ para todo α en A, luego $\Sigma\{Cl_\tau^M(N_\alpha)/ \alpha \in A\} \leq Cl_\tau^M(\Sigma\{N_\alpha / \alpha \in A\})$, y se tiene la otra inclusión $Cl_\tau^M(\Sigma\{Cl_\tau^M(N_\alpha)/ \alpha \in A\}) \leq Cl_\tau^M(\Sigma\{N_\alpha / \alpha \in A\})$.

La inclusión de (2) es en general estricta, como prueba el siguiente

EJEMPLO.

Consideramos el anillo y la teoría de torsión estudiada en (1.1.17). Para cada número natural n tenemos que $(3^n.2)\mathbb{Z}$ es un ideal τ-denso, luego la intersección de sus clausuras es igual a R, sin embargo, la clausura de su intersección es igual a O.

(1.2.8) El lema precedente permite definir un conjunto

$$C_\tau(M) = \{N/ N \text{ es un submódulo de } M\ \tau\text{-cerrado}\},$$

y en él dos operaciones:

$$N \vee L = Cl_\tau^M(N + L).$$
$$N \wedge L = N \cap L.$$

LEMA. $C_\tau(M)$ con estas operaciones es un retículo modular,completo y continuo superiormente.

Demostración. Por la definición de las operaciones y por el lema anterior, es claro que es completo.

Modular. Sean N, L y H submódulos τ-cerrados de M tales que $N \leq L$, entonces

$$L \cap (N \vee H) = Cl_\tau^M(L) \cap Cl_\tau^M(N + H) = Cl_\tau^M(L \cap (N + H)) =$$
$$= Cl_\tau^M((L \cap H) + N) = Cl_\tau^M(L \cap H) \vee Cl_\tau^M(N) =$$
$$= (L \cap H) \vee N.$$

Continuo superiormente. Sea $\{N_\alpha / \alpha \in A\}$ una familia dirigida superiormente de submodulos τ-cerrados de M, y N un submodulo τ-cerrado, entonces

$$(\vee \{N_\alpha / \alpha \in A\}) \cap N = Cl_\tau^M(\Sigma\{N_\alpha / \alpha \in A\}) \cap Cl_\tau^M(N) =$$

$$= Cl_{\tau}^{M}((\Sigma\{N_{\alpha} / \alpha \in A\}) \cap N) = Cl_{\tau}^{M}(\Sigma\{N_{\alpha} \cap N/ \alpha \in A\}) =$$

$$= \vee \{N_{\alpha} \cap N/ \alpha \in A\}.$$

(1.2.9) COROLARIO. El reticulo $C_{\tau}(M)$ es pseudo-complementado. [82, prop. III.6.3].

(1.2.10) LEMA. Sea $f:M \longrightarrow M'$ un morfismo de R-módulos y N' un submódulo de M', entonces

$$f^{-1}Cl_{\tau}^{M}(N') = Cl_{\tau}^{M}(f^{-1}(N')).$$

Demostración. Es análoga a la de (4) en (1.2.5).

(1.2.11) COROLARIO. Sea $f:M \longrightarrow M'$ un morfismo de R-módulos, entonces $f^{-1}:C_{\tau}(M') \longrightarrow C_{\tau}(M)$ es un morfismo de reticulos.

(1.2.12) LEMA. Sea $f:M \longrightarrow M'$ un morfismo de R-módulos, y N un submódulo de M, entonces $f(Cl_{\tau}^{M}(N)) \leq Cl_{\tau}^{M}(f(N))$.

Demostración. Sea $m' \in f(Cl_{\tau}^{M}(N))$, entonces existe $m \in Cl_{\tau}^{M}(N)$ tal que $f(m) = m'$. Tenemos

$$(f(N):m') = (N + Ker\ f:m) \geq (N:m) \in \mathcal{L}_{\tau}(R).$$

luego $m' \in Cl_{\tau}^{M}(f(N))$.

(1.2.13) LEMA. Sea $f:M \longrightarrow M'$ un epimorfismo de R-módulos con Ker f τ-torsión y N un submódulo de M, entonces:

$$f(Cl_{\tau}^{M}(N)) = Cl_{\tau}^{M}(f(N)).$$

Demostración. Por el lema anterior, únicamente tenemos que probar que $Cl_{\tau}^{M}(f(N)) \leq f(Cl_{\tau}^{M}(N))$, y para esto basta probar que $f(Cl_{\tau}^{M}(N))$ es τ-cerrado en M'. El epimorfismo $f:M \longrightarrow M'$ induce un epimorfismo $f':M/Cl_{\tau}^{M}(N) \longrightarrow M'/f(Cl_{\tau}^{M}(N))$, cuyo núcleo es

$$Ker\ f' = (Ker\ f + Cl_{\tau}^{M}(N))/Cl_{\tau}^{M}(N) \cong Ker\ f/(Ker\ f \cap Cl_{\tau}^{M}(N)),$$

y como Ker f es τ-torsión, tambien ker f' es τ-torsión, luego Ker f' es igual a cero y f' es un isomorfismo.

(1.2.14) COROLARIO. Sea $f:M \longrightarrow M'$ un epimorfismo de R-módulos con Ker f τ-torsión, entonces $f:C_{\tau}(M) \longrightarrow C_{\tau}(M')$ es un isomorfismo de retículos.

(1.2.15) COROLARIO. Para todo R-módulo M se tiene un isomorfismo de reticulos entre $C_\tau(M)$ y $C(M/T_\tau(M))$, definido por $L \longmapsto L/T_\tau(M)$.

(1.2.16) LEMA. Sea N un submódulo de un R-módulo M. Si N es τ-denso en M, entonces los reticulos $C_\tau(N)$ y $C_\tau(M)$ son isomorfos. Además, para cada submódulo H de N se verifica la igualdad:

$$Cl_\tau^N(H) = Cl_\tau^M(H) \cap N.$$

Demostración. Consideramos las aplicaciones

$$\theta : C_\tau(M) \longrightarrow C_\tau(N) \quad y \quad \theta' : C_\tau(N) \longrightarrow C_\tau(M),$$

definidas $\theta(L) = L \cap N$ y $\theta'(H) = Cl_\tau^M(H)$, para $L \in C_\tau(M)$ y $H \in C_\tau(N)$. Ambas están bien definidas y una es inversa de la otra. Para comprobar que $\theta\,\theta' = I$, basta que $Cl_\tau^M(H) = Cl_\tau^M(H) \cap N$, para cada submódulo H de N. Sea $n \in N$, entonces

$n \in Cl_\tau^N(H)$ si, y solo si, $(H:n) \in \mathcal{L}_\tau(R)$ si, y solo si,

$n \in Cl_\tau^M(H)$ si, y solo si, $n \in Cl_\tau^M(H) \cap N$.

Para comprobar que $\theta'\theta = I$, basta que $Cl_\tau^M(L) = Cl_\tau^M(L \cap N)$, para cada submódulo L de M. Sea $m \in M$, entonces $(N:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$ por ser N τ-denso y $(L \cap N:m) = (L:m) \cap (N:m)$, entonces

$m \in Cl_\tau^M(L)$ si, y solo si, $(L:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$ si, y solo si

$(L \cap N:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$ si, y solo si, $m \in Cl_\tau^M(L \cap N)$.

Como consecuencia de estas igualdades, es inmediato comprobar que θ es un morfismo de retículos.

Es claro que si θ es un isomorfismo de reticulos, entonces N es τ-denso en M.

(1.2.17) LEMA. Sea N un submódulo de un R-módulo. Si N es τ-cerrado, entonces $C_\tau(N)$ es isomorfo a un intervalo de $C_\tau(M)$. Además, para cada submódulo H de N se verifica la igualdad:

$$Cl_\tau^N(H) = Cl_\tau^M(H).$$

Demostración. Vamos a demostrar que $C_\tau(N)$ es isomorfo al intervalo $[T_\tau(M), N]$ en $C_\tau(M)$. Definimos la aplicación $\theta: C_\tau(N) \longrightarrow [T_\tau(M), N]$ mediante $\theta(H) = H$ para cada $H \in C_\tau(N)$. θ está bien definida como demuestra la consideración de la siguiente sucesión exacta corta para $H \in C_\tau(N)$

$$0 \longrightarrow N/H \longrightarrow M/H \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

θ es una biyección. Si H es un submódulo de N, entonces $Cl_\tau^N(H) = Cl_\tau^M(H)$, para demostrarlo, sea $m \in M$, entonces

$m \in Cl_\tau^N(H)$ si, y solo si, $m \in N$ y $(H:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$ y esto implica que $m \in Cl_\tau^M(H)$.

Supongamos que $m \in Cl_\tau^M(N)$, entonces $(H:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$ y por tanto $(N:m) \in \mathcal{L}_\tau(R)$, luego $m \in N$, y la última implicación es tambien una equivalencia. Como consecuencia, es inmediato demostrar que θ es un morfismo de retículos.

Es claro que si θ es un isomorfismo de retículos, entonces N es un submódulo τ-cerrado de M.

(1.2.18) LEMA. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión, entonces todo submódulo pseudo-complemento es τ-cerrado.
[59 , prop. 7.19].

(1.2.19) LEMA. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $C_\tau(M)$ es un retículo complementado.
2. $C_\tau(M)$ coincide con el conjunto de todos los submódulos pseudo-complemento de M.
3. Todo submódulo esencial es τ-denso.

[59, prop. 7.10].

(1.2.20) Si M es un R-módulo, decimos que M es <u>τ-noetheriano</u> (respectivamente, <u>τ-artiniano</u>), cuando el retículo $C_\tau(M)$ es noetheriano (respectivamente, artiniano).

(1.2.21) <u>LEMA</u>. Sea M un R-módulo con $C_\tau(M)$ un retículo complementado. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M es τ-noetheriano.
2. M es τ-artiniano.

[17, Theorem 6.4].

1.3. MODULOS τ-CRITICOS.

A lo largo de esta sección, una teoría de torsión es una teoría de torsión hereditaria y regular, salvo que se indique lo contrario.

(1.3.1) Si τ es una teoría de torsión, un R-módulo no nulo M se llama <u>τ-crítico</u> si verifica:

K-I. Es libre de τ-torsión.

K-II. Todo submódulo no nulo de M es τ-denso.

(1.3.2) Un submódulo N de un R-módulo M se llama <u>τ-cocrítico</u> si M/N es un R-módulo τ-crítico.

(1.3.3) <u>PROPOSICION</u>. Sea M un R-módulo, un submódulo N de M es τ-cocrítico si y solo si es un elemento maximal de $C_\tau(M)$. (Entendemos elemento maximal de $C_\tau(M)$ como maximal entre los distintos de M).

<u>Demostración</u>. "$\Longrightarrow$" . Si $N \leq M$ es τ-cocritico, entonces $N \in C_\tau(M)$ Si $K \in C_\tau(M)$ verifica $N \underset{\neq}{<} K \leq M$, entonces $M/K \cong (M/N)/(K/N)$ es τ-torsión, y por tanto $K = M$.

"$\Longleftarrow$". Si $N \leq M$ es maximal en $C_\tau(M)$, entonces M/N es libre de τ-torsión y si $0 \neq K/N \leq M/N$, entonces $(M/N)/(K/N) \notin T_\tau$ implica que existe K' tal que $T_\tau(M/K) = K'/K$, luego $M/K' \in F_\tau$. Por la maximalidad de N, se tiene $K' = M$, luego $M/K \in T_\tau$, y por tanto todo submódulo de M/N es τ-denso.

(1.3.4) <u>LEMA</u>. Sea M un R-módulo. Son equivalentes los siguientes enunciados:

1. M es τ-critico.

2. M es libre de τ-torsión y todo submódulo cíclico es τ-denso.

3. $C_\tau(M) = \{0, M\}$.

Demostración. 1 $\Longrightarrow$ 2 y 1 $\Longleftrightarrow$ 3 son inmediatas.

2 $\Longrightarrow$ 1. Sea $0 \neq N \leq M$, entonces existe $n \in N$ tal que $n \neq 0$, por ser M libre de τ-torsión se tiene $nR \neq 0$, y por hipotesis nR es τ-denso. Por (1.1.13) tenemos que N es τ-denso.

(1.3.5) COROLARIO. 1. Cada submódulo no nulo de un R-módulo τ-crítico es τ-crítico.

2. Sea $f:M \longrightarrow M'$ un morfismo no nulo de R-módulos y M un R-módulo τ-crítico. Si M' es libre de τ-torsión, entonces f es inyectivo.

Demostración. 1. Sea $N \leq M$, consideramos $N \leq Cl_\tau^M(N) \leq M$, entonces $Cl_\tau^M(N) = M$ y existe un isomorfismo de retículos entre $C_\tau(N)$ y $C_\tau(M)$.
2. Por ser M τ-crítico si Ker $f = 0$, entonces es τ-denso y por tanto $M/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$ es τ-torsión, luego Im $f = 0$, lo que es una contradicción. Entonces necesariamente Ker $f = 0$.

(1.3.6) LEMA. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión. Si N es un submódulo τ-crítico de M, entonces $Cl_\tau^M(N)$ es tambien τ-crítico.

Demostración. Ya que N es τ-denso en $Cl_\tau^M(N)$, por (1.2.16), tenemos un isomorfismo de retículos entre $C_\tau(N)$ y $C_\tau(Cl_\tau^M(N))$, luego $Cl_\tau^M(N)$ es τ-crítico.

(1.3.7) COROLARIO. Sea M un R-módulo, si N es un submódulo τ-crítico de M, entonces $Cl_\tau^M(N)$ es un submódulo τ-cerrado minimal. (Entendemos por τ-cerrado minimal un elemento minimal entre los distintos de $T_\tau(M)$ en el retículo $C_\tau(M)$).

Demostración. Claramente $C_\tau(Cl_\tau^M(N)) = \{T_\tau(M), Cl_\tau^M(N)\}$, por (1.2.16). Como $Cl_\tau^M(N)$ es τ-cerrado, por (1.2.17) es minimal.

Si M es un R-módulo libre de τ-torsión, entonces para todo submódulo τ-cerrado N se verifica;

N es τ-crítico si y solo si es minimal en $C_\tau(M)$.

(1.3.8) LEMA. Sea M un R-módulo tal que ningún submódulo tiene submódulo τ-torsión esencial. Si N es un submódulo τ-cerrado minimal, entonces existe un submódulo τ-crítico K de M tal que $N = Cl_\tau^M(K)$.

Demostración. Tenemos que $T_\tau(N) = T_\tau(M)$ no es esencial en N, luego existe $x \in N \setminus T_\tau(M)$ tal que $xR_1 \cap T_\tau(M) = 0$, entonces $xR_1 \in F_\tau$, y por tanto $xR_1 \cong (xR_1 + T_\tau(M))/T_\tau(M) \leq N/T_\tau(M)$. Ya que N es τ-cerrado minimal, entonces $N/T_\tau(M)$ es τ-crítico y por tanto xR_1 es τ-crítico. Aplicando (1.3.7) $Cl_\tau^M(xR_1)$ es τ-cerrado minimal, y como $xR_1 \leq N$, entonces $Cl_\tau^M(xR_1) = N$.

(1.3.9) LEMA. Sea M un R-módulo y N un submódulo τ-cerrado de M. Si K es un submódulo de M τ-crítico, entonces $N \cap K = 0$ ó K.

Demostración. Supongamos que $N \cap K \neq 0$, entonces $N \cap K \leq K$ es τ-denso en K, luego $K/(N \cap K) \cong (N + K)/N \leq M/N$ y se deduce que $K = N \cap K$.

(1.3.10) LEMA. Sea $f: M \longrightarrow M'$ un morfismo de R-módulos y K un submódulo de M τ-crítico, entonces f(K) es un submódulo τ-crítico de M ó es τ-torsión.

Demostración. Supongamos que f(K) no es τ-torsión, entonces existe un morfismo no nulo de K en $f(K)/T_\tau(f(K))$, definido

$$k \longmapsto f(k) + T_\tau(f(K)),$$

entonces, como K es τ-crítico y $f(K)/T_\tau(f(K))$ es libre de τ-torsión, se tiene que es un monomorfismo, luego $T_\tau(f(K)) = 0$ y f(K) es isomorfo a K.

Vamos a buscar ahora una relación entre submódulos τ-críticos y submódulos τ-cocríticos de un R-módulo M.

(1.3.12) <u>TEOREMA</u>. Sea M un R-módulo tal que $C_\tau(M)$ es un retículo complementado. Si N es un submódulo τ-cerrado minimal, entonces el complemento de N en $C_\tau(M)$ es τ-cocrítico.

<u>Demostración</u>. Existe $N' \in C_\tau(M)$ tal que $N \cap N' = T_\tau(M)$ y $N \vee N' = M$. Consideramos $[N', M]$ el intervalo de $C_\tau(M)$ determinado por N' y M. Como $C_\tau(M)$ es complementado, se tiene que $[N', M]$ es complementado. Sea $H \in [N', M]$ y H' su complemento en $[N', M]$. Si $H \cap N \neq T_\tau(M)$, entonces $N \leq H$, por la minimalidad de N, analogamente $N \leq H'$, luego $N \leq H \cap H' \leq N'$, lo que es una contradicción. Supongamos por ejemplo que $H \cap N = T_\tau(M)$, entonces, ya que N' es el complemento de N, se tiene $H \leq N'$, luego $H = N'$, y por tanto N' es τ-cerrado maximal.

Como consecuencia, si N es un submódulo τ-crítico de M, entonces existe un submódulo τ-cocrítico en M.

(1.3.13) <u>LEMA</u>. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión, entonces $(0:M)$ es un ideal bilátero τ-cerrado de R.

<u>Demostración</u>. Llamamos $A = (0:M)$ y $J/A = T_\tau(R/A)$. M es un R/A-módulo y tenemos que $MT_\tau(R/A) \leq T_\tau(M) = 0$, luego $M(J/A) = 0$ y $MJ = 0$, entonces $J \leq A$ y $T_\tau(R/A) = 0$.

(1.3.14) <u>COROLARIO</u>. Sea I un ideal derecha τ-cerrado en R, entonces $(I:R)$ es un ideal τ-cerrado.

(1.3.15) Sea I un ideal derecha de R, entonces existe un único ideal bilátero maximal entre los ideales biláteros contenidos en I, este ideal lo llamamos I^*, y es igual a $(I:R_1) = (I:R) \cap I$.

(1.3.16) <u>COROLARIO</u>. Sea I un ideal derecha τ-cerrado de R, entonces I^* es un ideal bilátero τ-cerrado.

(1.3.17) <u>LEMA</u>. Sea I un ideal derecha τ-cocrítico de R, entonces, para cada $x \in R\setminus I$, se tiene que $(I:x)$ es un ideal derecha τ-cocrítico.

<u>Demostración</u>. Definimos la aplicación $f:R/(I:x) \longrightarrow R/I$ mediante $f(r + (I:r)) = xr + I$. Es claro que f está bien definida y es un morfismo de R-módulos. Tenemos que $R/(I:x) \neq 0$, ya que si es cero, se tiene $(I:x) = R$, luego $xR \leq I$ y $(x + I)R = 0$, por tanto R/I no es libre de τ-torsión, lo que es una contradicción. Además f es un inyectiva, y por tanto, $(I:x)$ es in ideal derecha τ-cocrítico.

(1.3.18) <u>LEMA</u>. Sea A un ideal τ-cerrado bilátero maximal, entonces A es un ideal primo.

<u>Demostración</u>. Supongamos que $x \in R\setminus A$, y que existe un ideal bilátero B tal que $xB \leq A$, entonces $B \leq (A:xR_1)$. Tenemos que $(xR_1 + A)/A \leq R/A$ es libre de τ-torsión, luego $(A:xR_1) = (0:(xR_1+A)/A)$ es τ-cerrado y es bilátero. Por ser A bilátero, se tiene $A \leq (A:xR_1)$, y ya que A es τ-cerrado bilátero maximal, tenemos $A = (A:xR_1)$ y por tanto $B \leq A$.

(1.3.19) <u>TEOREMA</u>. Sea $f:R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos y τ una teoría de torsión en Mod-R. Si S/f(R) es τ-torsión, entonces $\mathcal{L}^* = \tilde{\mathcal{L}}$ es una topología de Gabriel en S, donde

$$\mathcal{L}^* = \{I \leq S/\ S/I \in T_\tau\} \quad \text{y}$$
$$\tilde{\mathcal{L}} = \{I \leq S/\ f^{-1}(I) \in \mathcal{L}_\tau(R)\}.$$

Entonces $\mathcal{L}^*$ define una teoría de torsión en Mod-S, cuyas clases son:

$$T^* = \{M \in \text{Mod-S}/\ M \in T_\tau\} \quad \text{y}$$
$$F^* = \{M \in \text{Mod-S}/\ M \in F_\tau\}.$$

<u>Demostración</u>. Siempre se tiene la inclusión $\mathcal{L}^* \subseteq \tilde{\mathcal{L}}$, ya que $T^* = \{M \in \text{Mod-S}/\ M \in T_\tau\}$ es una clase de torsión hereditaria y regular en Mod-S, llamamos τ^* a la teoría de torsión que determina, entonces se tiene $\mathcal{L}_{\tau^*}(R) = \mathcal{L}^*$, y por tanto si $I \in \mathcal{L}^*$, entonces S/I es

τ^*-torsión, consideramos $f':R/f^{-1}(I) \longrightarrow S/I$, definida $f'(r + f^{-1}(I)) = r + I$, es claro que f' es un monomorfismo de R-módulos, luego $R/f^{-1}(I)$ es τ-torsión y $f^{-1}(I) \in \mathcal{L}_\tau(R)$.

Vamos ahora a probar la otra inclusión. Se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^* &= \{I \leq S/\ S/I \in T_\tau\} = \\ &= \{I \leq S/\ (I:s)_R \in \mathcal{L}_\tau(R) \text{ para todo } s \in S\} = \\ &= \{I \leq S/\ f^{-1}((I:s)_S) \in \mathcal{L}_\tau(R) \text{ para todo } s \in S\}.\end{aligned}$$

Sea $I \in \tilde{\mathcal{L}}$, y $s \in S$, tenemos que $(f(R):s)_R \in \mathcal{L}_\tau(R)$, entonces, para que $I \in \mathcal{L}^*$, bastaría demostrar que $(f^{-1}((I:s)_S):r)_R \in \mathcal{L}_\tau(R)$ para todo $r \in (f(R):s)_R$. Tenemos $(f^{-1}((I:s)_S):r)_R = f^{-1}((I:sf(r))_S$, como $sf(r) \in f(R)$, entonces existe $r' \in R$ tal que $sf(r) = f(r')$, se tiene entonces

$$f^{-1}((I:sf(r))_S) = f^{-1}((I:f(r'))_S) = (f^{-1}(I):r')_R \in \mathcal{L}_\tau(R).$$

Unicamente queda por probar que $F_{\tau^*} = \{M \in \text{Mod-}S/\ M \in F_\tau\}$. Es claro que $\{M \in \text{Mod-}S/\ M \in F_\tau\} \leq F_{\tau^*}$. Vamos a probar la otra inclusión. Sea $M \in F_{\tau^*}$ tal que $M \notin F_\tau$, entonces existe $m \in M$, $m \neq 0$ verificando $(0:m)_R \in \mathcal{L}_\tau(R)$, entonces $(f((0:m)_R)S_1$ es un ideal derecha de S, y se tiene $(0:m)_R \leq f^{-1}(((f((0:m)_R))S_1)$, luego $f^{-1}((f((0:m)_R))S_1) \in \mathcal{L}_\tau(R)$ y $(f((0:m)_R)S_1 \in \tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}^*$, luego $M \notin F_{\tau^*}$, lo que es una contradicción.

(1.3.20) <u>TEOREMA</u>. Sea τ una teoría de torsión en R, $f:R \longrightarrow S$ un morfismo de anillos verificando $S/f(R)$ es τ-torsión y M un S-módulo, entonces M es τ-crítico si, y solo si, M es τ^*-crítico.

<u>Demostración</u>. "$\Longrightarrow$". Si M es τ-crítico, entonces $M \in F_\tau$, lo que es equivalente a que $M \in F_{\tau^*}$, y cada S-submódulo no nulo N de M es un R-submódulo no nulo, luego $M/N \in T_\tau$, lo que es equivalente a que $M/N \in T_{\tau^*}$.

" $\Longleftarrow$". Si M es τ^*-crítico, entonces $M \in F_{\tau^*}$, lo que es equivalente a que $M \in F_\tau$ y cada R-submódulo no nulo N de M es un S-submódulo no nulo, ya que por hipotesis $S/f(R)$ es τ-torsión, lo que implica que es τ^*-torsión, y se tiene $N(S/f(R)) = 0$, por ser N τ^*-torsión. Luego M/N es τ^*-torsión, lo que es equivalente a que $M/N \in T_\tau$.

1.4. EJEMPLOS.

(1.4.1) Sea M un R-módulo. Un submódulo L de un R-módulo N se llama M-racional en N (ó N es una extensión M-racional de L) si para todo submódulo H de N tal que $L \leq H \leq N$ y para todo morfismo de R-módulos $f:H \longrightarrow M$ tal que $L \leq \mathrm{Ker}\ f$, se tiene que $f = 0$.

(1.4.2) LEMA. Sean M y N dos R-módulos y L un submódulo de N. Son equivalentes los siguientes enunciados:

1. N es una extensión M-racional de L.
2. Para todo $n \in N$ y para todo $m \in M$ no nulo, existe $r \in R_1$ tal que $nr \in L$ y $mr \neq 0$.
3. $\mathrm{Hom}_R(N/L, E(M)) = 0$.

Demostración.

2 ⟹ 1. Sea $f:H \longrightarrow M$ tal que $L \leq H \leq N$ y $f(L) = 0$, entonces si $f \neq 0$, existe $h \in H$ tal que $f(h) \neq 0$. Por hipotesis, existe $r \in R_1$ tal que $hr \in L$ y $f(h)r \neq 0$, lo que es una contradicción.

1 ⟹ 2. Supongamos que existen $n \in N$ y $m \in M$, $m \neq 0$, tal que para todo $r \in R_1$, $nr \notin L$ ó $mr = 0$. Entonces si $r \in (L:n)$, se tiene $mr = 0$, y por tanto $(L:n) \leq (0:m)$. Definimos la aplicación $f:(nR_1 + L)/L \longrightarrow M$, mediante $f(nx + L) = mx$. Es claro que f está bien definida y es un morfismo de R-módulos no nulo, ya que $f(n + L) = m \neq 0$. Luego (1) no se verifica.

1 ⟺ 3. Es inmediato.

(1.4.3) La teoría de torsión hereditaria cogenerada por M está entonces formada por las clases:

$$T_{\chi(M)} = \{K \in \text{Mod-}R / \operatorname{Hom}_R(K, E(M)) = 0\}$$

$$F_{\chi(M)} = \{K \in \text{Mod-}R / \operatorname{Hom}_R(T, K) = 0 \text{ para cada } T \in T_{\chi(M)}\}.$$

Como el ejemplo (1.1.17) demuestra, la teoría de torsión que se obtiene, no siempre es una teoría de torsión regular.

(1.4.4) Un R-módulo M tiene la propiedad (R) si para todo $m \in M$, se tiene $mR = 0$ implica $m = 0$.

(1.4.5) LEMA. La teoría de torsión hereditaria cogenerada por un R-módulo M es regular si y solo si M tiene la propiedad (R).

Demostración. Supongamos que $\tau = \chi(M)$ es la teoría de torsión hereditaria cogenerada por M. Si τ es regular, entonces M tiene la propiedad (R). Si M tiene la propiedad (R) y N es un R-módulo trivial que no es τ-torsión, entonces existe $f:N \longrightarrow E(M)$ morfismo de R-módulos no nulo. Si $m \in f(N) \cap M$, entonces $mR = 0$ y como M tiene la propiedad (R), se tiene $m = 0$, luego $f(N) = 0$ y $f = 0$, lo que es una contradicción.

La topología de Gabriel asociada a la teoría de torsión hereditaria cogenerada por un R-módulo M con la propiedad (R) está formada por los ideales derecha M-racionales en R.

(1.4.6) TEOREMA. Un R-módulo M es τ-crítico para una teoría de torsión hereditaria y regular τ si, y solo si, tiene la propiedad (R) y es extensión M-racional de cada submódulo no nulo.

Demostración. " $\Leftarrow$". Es inmediata.

" $\Rightarrow$ ". Ya que M es libre de τ-torsión, entonces M tiene la propiedad (R). Si N es un submódulo no nulo de M y existe $f:M/N \longrightarrow E(M)$, entonces M/N es τ-torsión y por tanto $f = 0$, luego M/N es $\chi(M)$-torsión.

Un R-módulo no nulo M se llama monoforme si es extensión M-racional de cada submódulo no nulo. Un submódulo N de un R-módulo M se llama

<u>comonoforme</u> si M/N es un R-módulo monoforme.

(1.4.7) Un R-módulo no nulo M se llama <u>crítico</u> si es τ-crítico para alguna teoría de torsión hereditaria y regular. Un submódulo N de un R-módulo M se llama <u>cocrítico</u> si M/N es un R-módulo crítico.

(1.4.8) <u>LEMA</u>. Un R-módulo M es crítico si, y solo si, es monoforme y tiene la propiedad (R).

(1.4.9) Un R-módulo M se llama <u>compresivo</u> si cada submódulo no nulo de M contiene una copia isomorfa a M y $MR \neq 0$.

Un R-módulo M se llama <u>primo</u> si para cada submódulo no nulo N se verifica $(0:N) = (0:M) \neq R$.

(1.4.10) <u>LEMA</u>. Si A es un ideal bilátero cocrítico de R, entonces R/A es un R-módulo compresivo.

<u>Demostración</u>. Consideramos $x \in R \setminus A$ y llamamos $J/A = (xR_1 + A)/A$. Definimos una aplicación $f: R/A \longrightarrow J/A$ mediante $f(r + A) = xr + A$. Es claro que f está bien definida y es un morfismo no nulo de R-módulos, ya que si $f = 0$, se tiene $(A:x) = R$, y como $((xR_1 + A)/A)R \neq 0$, se tiene que $xR_1R \nsubseteq A$ y por tanto $(A:x) \neq R$, lo que es una contradicción. Por hipotesis R/A es crítico y por tanto $\chi(R/A)$-crítico, como J/A es libre de $\chi(R/A)$-torsión, por (1.3.5). f es un monomorfismo, entonces R/A es compresivo.

(1.4.11) <u>LEMA</u>. Todo R-módulo compresivo es primo.

En general no se tiene que todo R-módulo crítico sea primo, como demuestra el siguiente

<u>EJEMPLO</u>.

Consideramos el anillo $R = \begin{pmatrix} F & F[x] \\ 0 & F[x] \end{pmatrix}$, con las operaciones usuales de suma y producto de matrices. Y consideramos el R-módulo

$M = \begin{pmatrix} F & F[x] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es claro que M es un R-módulo crítico,es monoforme y como R es unitario, verifica la propiedad (R). Sin embargo no es primo, ya que M es fiel y el anulador de $N = \begin{pmatrix} 0 & (x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es igual a $\begin{pmatrix} F & F[x] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tambien el siguiente ejemplo demuestra que las dos condiciones, crítico y primo, no implican la de compresivo.

EJEMPLO.

Sea F como en el ejemplo anterior un cuerpo e y una indeterminada, Llamamos F(y) al cuerpo de las funciones racionales de y sobre F y R al anillo $F(y)[[x, \alpha]]$, donde $\alpha: F(y) \longrightarrow F(y)$ está definido $\alpha(y) = y^2$, entonces para cada $g(y) \in F(y)$, se tiene $g(y)x = xg(y^2)$. El anillo R tiene las siguientes propiedades:

1. Es un anillo de integridad.

2. Es un anillo de ideales principales.

3. Los ideales de R forman una cadena, todos son de la forma x^nR, para n un número natural. Llamamos Q al anillo de cocientes derecha de R, y llamamos M al submódulo $M = x^{-1}R + (xy)^{-1}R$ de Q. Todo submódulo de M ó contiene a R ó forma parte de la cadena

$$R \leq xR \leq x^2R \leq \ldots$$

Como R es un anillo de integridad, entonces M es un R-módulo primo. En [42], Gordon y Robson demuestran que M es crítico y no es compresivo.

Vamos a estudiar ahora la menor teoría de torsión hereditaria y regular en Mod-R.

(1.4.12) Llamamos $F_{(R)}$ a la clase de los R-módulos con la propiedad (R).

LEMA. La clase $F_{(R)}$ es la clase libre de torsión para una teoría de torsión hereditaria y regular, a la que llamaremos $\tau_{(R)}$.

Demostración. $F_{(R)}$ es cerrada para submódulos y productos de forma obvia. Sea

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de R-módulos, con $M', M'' \in F_{(R)}$, y sea $m \in M$, entonces $\eta(m) \in M''$, y si $mR = 0$, entonces $\eta(m) = 0$, se tiene entonces que $m \in M'$, y por tanto $m = 0$. $F_{(R)}$ es cerrada para extensiones esenciales, ya que si N es esencial en M, entonces para $m \in M$ tal que $mR = 0$, se tiene que $mR_1 \cap N \neq 0$, luego existe $r \in R_1$ tal que $0 \neq mr \in N$ y se tiene que $mrR \leq mR = 0$, luego $mr = 0$, lo que es una contradicción. Por último, es claro que todos los R-módulos triviales están contenidos en la clase de torsión asociada a $F_{(R)}$.

(1.4.13) Para un R-módulo M, el submódulo de $\tau_{(R)}$-torsión es :

$$T_{(R)}(M) = \cap \{N \leq M/\ M/N \in F_{(R)}\}.$$

(1.4.14) LEMA. La teoría de torsión $\tau_{(R)}$ es la menor teoría de torsión hereditaria y regular en Mod-R.

Demostración. Supongamos que τ es una teoría de torsión hereditaria y regular y que $\tau_{(R)} \nleq \tau$, entonces existe $M \in T_{(R)} \setminus T_\tau$. Consideramos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow T_\tau(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/T_\tau(M) \longrightarrow 0$$

Como $M \notin T_\tau$, entonces $T_\tau(M) \neq M$. Llamamos $M' = \{m \in M/\ mR \leq T_\tau(M)\}$, tenemos que $T_\tau(M) \leq M'$ y $T_\tau(M) \neq M'$, ya que $M/T_\tau(M)$ es $\tau_{(R)}$-torsión, y no es nulo. Luego $M'/T_\tau(M) \leq M/T_\tau(M)$ es no nulo y libre de τ-torsión. Además, $(M'/T_\tau(M))R = 0$, lo que es una contradicción.

(1.4.15) Otra forma de obtener esta teoría de torsión ha sido dada por Gardner en [35]. Llamamos $\underline{\underline{M}}$ a la clase de R-módulos triviales, entonces:

LEMA. Los siguientes enunciados son equivalentes para una teoría de torsión τ:

1. $\tau = \tau_{(R)}$.
2. τ es la teoría de torsión generada por los R-módulos triviales.
3. $T_\tau = \{M \in \text{Mod-}R / \forall\, m \in M, \forall\ r_1, r_2, \ldots \in R \setminus \{0\}, \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $mr_1 \ldots r_n = 0\}$.

Demostración. [35, Theorem 2.1].

(1.4.16) COROLARIO. Un anillo R es $\tau_{(R)}$-torsión si y solo si es T-nilpotente a la izquierda.

(1.4.17) Un ideal derecha I de R es $\tau_{(R)}$-cerrado si R/I es libre de $\tau_{(R)}$-torsión, ó equivalentemente, si $I = {}_R(I:R)$.

(1.4.18) Si M es un R-módulo, llamamos submódulo singular de M a:

$$Z(M) = \{m \in M / (0:m) \text{ es esencial en } R\}.$$

Un R-módulo M se llama singular si $Z(M) = M$, y se llama no singular si $Z(M) = 0$.

(1.4.19) LEMA. Si N es un submódulo esencial de un R-módulo M, entonces $Z(M/N) = M/N$.

Demostración. Sea $m \in M \setminus N$, entonces se verifica que $(N:m)$ es esencial en R. Sea $0 \neq r \in R$ tal que $rR_1 \cap (N:m) = 0$, entonces $mrR_1 \cap N = 0$ y $mrR_1 = 0$, luego $mr = 0$ y $r \in (N:m)$, lo que es una contradicción.

En general no es cierto que si $Z(M/N) = M/N$, entonces N sea un submódulo esencial de M, como demuestra el siguiente EJEMPLO.

Consideramos sobre el grupo aditivo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ la estructura de anillo dada por la multiplicación trivial, y consideramos el ideal $I = \{(a,0) / a \in \mathbb{Z}_2\}$, si llamamos R al anillo, tenemos que $Z(R/I) = R/I$ y que I no es un ideal esencial de R.

(1.4.20) <u>LEMA</u>. Z_2 definido $Z_2(M)/Z(M) = Z(M/Z(M))$ es un radical torsión.

<u>Demostración</u>. Teniendo en cuenta el lema (1.4.19), podemos seguir la demostración dada por Stenström en [82, prop. VI.6.2].

(1.4.21) Llamamos τ_g a la teoría de torsión hereditaria asociada a Z_2, entonces la clase de torsión es

$$T_g = \{M \varepsilon \text{ Mod-R}/ \ Z_2(M) = M \}$$

y la clase libre de torsión es

$$F_g = \{M \varepsilon \text{ Mod-R}/ \ Z_2(M) = 0\} = \{M \varepsilon \text{ Mod-R}/ \ Z(M) = 0\}.$$

<u>LEMA</u>. g es una teoría de torsión regular.

<u>Demostración</u>. Sea M un R-módulo trivial, entonces para todo $m \varepsilon M$ se tiene $mR = 0$, y por tanto $(0:m)$ es esencial en R, tenemos entonces que $Z(M) = 0$, luego $Z_2(M) = 0$ y por tanto M es g-torsión.

(1.4.22) <u>LEMA</u>. Sea $\underline{\underline{M}}$ una clase de R-módulos cerrada para submódulos y conteniendo todos los R-módulos triviales, entonces la teoría de torsión que genera es una teoría de torsión hereditaria y regular.

<u>Demostración</u>. Es inmediata.

(1.4.23) <u>LEMA</u>. Sea $\underline{\underline{M}}$ una clase de R-módulos con la propiedad (R), cerrada para submódulos y extensiones esenciales, entonces la teoría de torsión cogenerada por $\underline{\underline{M}}$ es una teoría de torsión hereditaria regular y el radical torsión es $T_\tau(M) = \cap \{N \leq M/ \ \ M/N \ \varepsilon \ \underline{\underline{M}}\}$.

<u>Demostración</u>. Es inmediata.

CAPITULO 2

ZOCALO RELATIVO A UNA TEORIA DE TORSION

2.1 EL τ-ZOCALO Y EL τ-RADICAL.

A lo largo de este capítulo, una teoría de torsión es una teoría de torsión hereditaria y regular, salvo que se indique lo contrario, y tal que si $T_\tau(M)$ es esencial en M, entonces M es τ-torsion. Y adoptamos el siguiente convenio: una familia vacia de submódulos de un R-módulo M es independiente y su suma es cero.

(2.1.1) LEMA. Sea M un R-módulo tal que $M = Cl_\tau^M(\Sigma\{K_\alpha / \alpha \in A\})$ para una familia de submódulos τ-críticos de M. Si N es un submódulo τ-cerrado de M, entonces existe un subconjunto B de A tal que

1. La familia $\{K_\beta / \beta \in B\}$ es independiente.
2. $M = Cl_\tau^M(N \oplus (\oplus\{K_\beta / \beta \in B\}))$.

Demostración. Si N = M, podemos considerar $B = \emptyset$. Supongamos que $N \neq M$, entonces definimos $\Gamma = \{B / B \subseteq A$ y $\{K_\beta / \beta \in B\}$ es una familia independiente y $N \cap (\Sigma\{K_\beta / \beta \in B\}) = 0\}$. Ya que $\oplus\{K_\beta / \beta \in \emptyset\} = 0$, tenemos que Γ es no vacio. Γ es ordenado por la inclusión. Sea $B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \cdots \subsetneq B_n \subsetneq \cdots$ una cadena de elementos de Γ, entonces $B = \cup\{B_n / n \in \mathbb{N}\}$ es una cota superior, y vamos a demostrar que pertenece a Γ. Es claro que es una familia independiente, ya que si $\gamma \in B$, y $x \in K_\gamma \cap (\Sigma\{K_\beta / \gamma \neq \beta \in B\})$, entonces $x \in \Sigma\{K_\beta / \gamma \neq \beta \in B\}$ y existen $x_i \in K_{\beta_i}$ con $\beta_i \in B$ tal que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, existe entonces un número natural n tal que $\gamma, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in B_n$, y por tanto $x \in K_\gamma \cap (\Sigma\{K_\beta / \gamma \neq \beta \in B_n\}) = 0$ y $x = 0$. Para demostrar que $N \cap (\Sigma\{K_\beta / \beta \in B\}) = 0$, procedemos de forma análoga. Por el lema de Zorn, existe un elemento maximal B de Γ. Llamemos $H = N + (\Sigma\{K_\beta / \beta \in B\}) = N \oplus (\oplus\{K_\beta / \beta \in B\})$, vamos a demostrar que $Cl_\tau^M(H) = M$, supongamos que sea distinto, entonces, como es τ-cerrado, existe $\alpha \in A$ tal que $K_\alpha \cap Cl_\tau^M(H) = 0$, entonces la familia $\{K_\alpha\} \cup \{K_\beta / \beta \in B\}$ es independiente, y si $x \in N \cap (K_\alpha + (\Sigma\{K_\beta / \beta \in B\})$, entonces $x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_k$, con $x_0 \in K$ y $x_i \in K_{\beta_i}$, $\beta_i \in B$. Tenemos entonces que $x_0 = x - (x_1 + x_2 + \dots + x_k) \in H \cap K_\alpha = 0$, luego $x \in N \cap (\Sigma\{K_\beta / \beta \in B\}) = 0$. Se tiene entonces que $\{\alpha\} \cup B$ es un elemento de Γ, lo que es una contradicción.

(2.1.2) <u>COROLARIO</u>. Sea M un R-módulo tal que $M = Cl_\tau^M(\Sigma\{K_\alpha / \alpha \in A\})$ para una familia de submódulos τ-críticos de M, entonces existe un subconjunto B de A tal que $M = Cl_\tau^M(\oplus\{K_\beta / \beta \in B\})$.

<u>Demostración</u>. Tomar $N = T_\tau(M)$ en el lema (2.1.1).

(2.1.3) <u>COROLARIO</u>. Sea M un R-módulo tal que $M = Cl_\tau^M(\Sigma\{K_\alpha / \alpha \in A\})$ para una familia de submódulos τ-críticos de M, entonces $C_\tau(M)$ es un retículo complementado.

<u>Demostración</u>. Supongamos que $N \in C_\tau(M)$, si $N = M$, entonces $T_\tau(M)$ es su complemento en $C_\tau(M)$. Si $N \neq M$, entonces por el lema (2.1.1), existe una familia independiente $\{K_\beta / \beta \in B\}$ de submódulos τ-críticos de M tal que $N \cap Cl_\tau^M(\oplus\{K_\beta / \beta \in B\}) = T_\tau(M)$ y $Cl_\tau^M(N + Cl_\tau^M(\oplus\{K_\beta / \beta \in B\})) = M$. Es claro que $Cl_\tau^M(\oplus\{K_\beta / \beta \in B\})$ es el complemento de N en $C_\tau(M)$.

(2.1.4) Sea M un R-módulo, llamamos $S_\tau(M)$ al <u>τ-zócalo</u> de M, definido:

$$S_\tau(M) = Cl_\tau^M(\Sigma\{K / K \text{ es un submódulo } \tau\text{-crítico de } M\})$$

y si M no tiene submódulos τ-críticos, entonces

$$S_\tau(M) = T_\tau(M).$$

(2.1.5) <u>LEMA</u>. Sea $f: M \longrightarrow M'$ un morfismo de R-módulos, entonces $f(S_\tau(M)) \leq S_\tau(M')$.

<u>Demostración</u>. Cuando $S_\tau(M) = T_\tau(M)$ el resultado es cierto. Supongamos que $S_\tau(M) \neq T_\tau(M)$, entonces:

$$\begin{aligned} f(S_\tau(M)) &= f(Cl_\tau^M(\Sigma\{K/\ K \text{ es un submódulo } \tau\text{-crítico de } M\}) \\ &\subseteq Cl_\tau^{M'}(f(\Sigma\{K/\ K \text{ es un submódulo } \tau\text{-crítico de } M\}) \\ &= Cl_\tau^{M'}(\Sigma\{f(K)/\ K \text{ es un submódulo } \tau\text{-crítico de } M\}) \\ &\subseteq Cl_\tau^{M'}(\Sigma\{K'/\ K' \text{ es un submódulo } \tau\text{-crítico de } M'\}) \\ &= S_\tau(M'). \end{aligned}$$

(2.1.6) <u>COROLARIO</u>. Sea $f: M \longrightarrow M'$ un epimorfismo de R-módulos con Ker f τ-torsión, entonces $f(S_\tau(M)) = S_\tau(M')$.

<u>Demostración</u>. Es consecuencia de los lemas (1.2.13) y (2.1.5).

(2.1.7) <u>COROLARIO</u>. Sea M un R-módulo, entonces se verifica:

$$S_\tau(M/T_\tau(M)) = S_\tau(M)/T_\tau(M).$$

(2.1.8) <u>TEOREMA</u>. Sea M un R-módulo. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $M = S_\tau(M)$.
2. Para cada submódulo τ-cerrado N de M se tiene $N = S_\tau(N)$.
3. Para cada cociente M/N de M se tiene $M/N = S_\tau(M/N)$.
4. M tiene una suma directa τ-densa de submódulos τ-críticos.
5. Para cada submódulo τ-cerrado N de M, existe una familia independiente $\{K_\beta/\beta \in B$ de submódulos τ-críticos de M tal que $M = Cl_\tau^M(N \oplus (\oplus\{K\beta/\beta \in B\}))$.

<u>Demostración</u>. 5 ⟹ 4, 4 ⟹ 1, 2 ⟹ 1 y 3 ⟹ 1 son inmediatas.

1 ⟹ 5 es una consecuencia del lema (2.1.1).

5 ⟹ 3. Por el corolario (2.1.7), podemos tomar N τ-cerrado en M. Si suponemos que $N \neq M$, entonces $S_\tau(0) = 0$ y se tiene el resultado.

Si $N \nleq M$, entonces existe una familia independiente $\{K_\beta / \beta \in B\}$ de submódulos de M τ-críticos, tal que $M = Cl_\tau^M(N \oplus (\oplus\{K_\beta / \beta \in B\}))$. Si llamamos $L = Cl_\tau^M(\oplus\{K_\beta / \beta \in B\}$, entonces $Cl_\tau^M(N + L) = M$ y $N \cap L =$ $= T_\tau(M)$. Como $N + L$ es τ-denso en M, existe un isomorfismo de retículos entre $C_\tau(M/N)$ y $C_\tau(L/(L \cap N))$, y ya que $C_\tau(L)$ es isomorfo a $C_\tau(L/(L \cap N))$, se tiene un isomorfismo entre $C_\tau(L)$ y $C_\tau(M/N)$, entonces $S_\tau(M/N) = M/N$.

$5 \Longrightarrow 2$. Sea $N \leq M$ un submódulo τ-cerrado en M, entonces existe una familia independiente $\{K_\beta / \beta \in B\}$ de submódulos τ-críticos de M, tal que $Cl_\tau^M(N \oplus (\oplus\{K_\beta / \beta \in B\})) = M$. Llamamos $L = Cl_\tau^M(\oplus\{K_\beta / \beta \in B\})$, entonces $N + L$ es τ-denso en M y $N \cap L = T_\tau(M)$. Al igual que anteriormente, existe isomorfismos de retículos entre $C_\tau(N)$ y $C_\tau(M/L)$. Como se tiene ($3 \Longleftrightarrow 5$), entonces $M/N = S_\tau(M/N)$, por el isomorfismo de retículos se tiene $N = S_\tau(N)$.

(2.1.9) Un R-módulo M se llama <u>τ-semicrítico</u> si verifica las condiciones del teorema anterior.

(2.1.10) <u>LEMA</u>. Si M es un R-módulo, se tiene la igualdad:

$$S_\tau(M) = S_\tau S_\tau(M).$$

<u>Demostración</u>. $S_\tau(M)$ es un τ-cerrado de M, luego se tienen las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} S_\tau(M) &= Cl_\tau^M(\Sigma\{K/K \text{ es un submódulo } \tau\text{-crítico de } M\}) \\ &= Cl_\tau^M(\Sigma\{K/K \text{ es un submódulo } \tau\text{-crítico de } S_\tau(M)\}) \\ &= S_\tau S_\tau(M). \end{aligned}$$

ya que todo submódulo τ-crítico de M está contenido en $S_\tau(M)$.

(2.1.11) <u>LEMA</u>. Si N es un submódulo de un R-módulo M, entonces:

$$S_\tau(N) = S_\tau(M) \cap N.$$

<u>Demostración</u>. Si N es τ-denso en M, entonces los retículos $C_\tau(N)$ y $C_\tau(M)$ son isomorfos, y se obtiene el resultado. Si N es τ-cerrado en M, entonces claramente tenemos una inclusión $S_\tau(N) \leq S_\tau(M) \cap N$.

Si $S_\tau(M) \cap N$ es τ-torsión, entonces tenemos la inclusión contraria. Si $S_\tau(M) \cap N$ no es τ-torsión, como $S_\tau(M) \cap N \leq S_\tau(M)$, y $S_\tau(M)$ es τ-semicrítico, tenemos que $S_\tau(M) \cap N$ es τ-semicrítico, entonces existe una familia $\{K_\beta / \beta \in B\}$ de submódulos τ-críticos de $S_\tau(M) \cap N$ tal que $S_\tau(M) \cap N = Cl_\tau^N(\Sigma\{K_\beta / \beta \in B\})$, y por tanto tenemos que $S_\tau(M) \cap N \leq S_\tau(N)$.

(2.1.12) <u>COROLARIO</u>. Si M es un R-módulo τ-semicrítico, entonces todo submódulo N de M tambien lo es.

(2.1.13) <u>LEMA</u>. Si M es un R-módulo que no es τ-torsiõn, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M es τ-semicrítico.

2. Para cada submódulo τ-cerrado propio N de M, existe un submódulo τ-crítico K de M tal que $N \cap K = 0$.

<u>Demostración</u>. Si M no es τ-semicrítico, entonces $S_\tau(M) \neq M$. Como $S_\tau(M)$ es un submódulo τ-cerrado de M, por hipotesis se tiene que existe un submódulo K de M τ-crítico tal que $K \cap S_\tau(M) = 0$, entonces $K \nsubseteq S_\tau(M)$, lo que es una contradicción. Para demostrar la otra implicación, consideremos $N \neq M$ un submódulo τ-cerrado, entonces no todos los submódulos τ--críticos de M están contenidos en N, por lo tanto, existe un submódulo τ-crítico K de M tal que $K \cap N = 0$.

(2.1.14) <u>LEMA</u>. Si M es un R-módulo que no es τ-torsión, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M es τ-semicritico.

2. $C_\tau(M)$ es un retículo complementado y cada submódulo τ-cerrado N de M y no τ-torsión, contiene un submódulo τ-crítico.

<u>Demostración</u>. Si M es τ-semicrítico, entonces por (2.1.3) $C_\tau(M)$ es un retículo complementado. Si N es un submódulo τ-cerrado de M y no τ-torsión, entonces, ya que N es τ-semicrítico, debe de contener algún submódulo τ-crítico. Para demostrar la otra implicación,

es suficiente demostrar que para cada submódulo τ-cerrado N de M tal que $N \neq M$, existe un submódulo τ-crítico K de M tal que $K \cap N = 0$. Como $C_\tau(M)$ es complementado, existe $N' \in C_\tau(M)$ tal que $N \cap N' = T_\tau(M)$ y $Cl_\tau^M(N + N') = M$. Si $N' = T_\tau(M)$, entonces $N = M$, por tanto $N' \neq T_\tau(M)$. Por lo tanto, existe K submódulo τ-crítico de M tal que $K \leq N'$, y se tiene el resultado.

(2.1.15) <u>TEOREMA</u>. Para un anillo R, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. R es un R-módulo derecha τ-semicrítico.
2. Cada R-módulo es τ-semicrítico.

<u>Demostración</u>. Unicamente necesitamos demostrar que 1 $\Longrightarrow$ 2. Como R es un R-módulo τ-semicrítico, entonces existe una familia independiente $\{K_\alpha / \alpha \in A\}$ de submódulos τ-críticos tal que $R = Cl_\tau^R(\Sigma\{K_\alpha / \alpha \in A\})$. Es claro que todo R-módulo τ-torsión es τ-semicrítico, supongamos que M no es τ-torsión, entonces, para cada submódulo N de M τ-cerrado y para cada $x \in M\setminus N$, se tiene $(N:x) \notin \mathcal{L}_\tau(R)$. Si para cada $\alpha \in A$ se tiene $xK_\alpha \leq N$, entonces $x(\Sigma\{K_\alpha / \alpha \in A\}) \leq N$. Como $\Sigma\{K_\alpha / \alpha \in A\}$ es τ-denso en R, y está contenido en $(N:x)$, tenemos que $(N:x) \in \mathcal{L}_\tau(R)$, lo que es una contradicción. Por tanto, debe existir $\alpha \in A$ tal que $xK_\alpha \nleq N$. xK_α es un cociente de K , por tanto es τ-torsión ó τ-crítico, si es τ-torsión, entonces $xK_\tau \leq T_\tau(M) \leq N$, por tanto, necesariamente es τ-crítico y $xK_\alpha \cap N = 0$. Se sigue de ((2.1.13) que M es τ-semicrítico.

(2.1.16) Un anillo R se llama <u>τ-semicrítico</u> si verifica las condiciones equivalentes del teorema anterior.

(2.1.17) Si τ es una teoría de torsión en Mod-R, llamamos <u>τ-radical del anillo R</u> a $K_\tau(R)$, definido

$$K_\tau(R) = \cap \{(0:M) / \text{ M es un R-módulo } \tau\text{-critico}\}$$

y si no existen R-módulos τ-críticos, entonces:

$K_\tau(R) = R$.

Como consecuencia de la definición, se tiene que el τ-radical de un anillo es un ideal bilátero que contiene a $T_\tau(R)$.

(2.1.18) LEMA. Sea τ una teoria de torsión en Mod-R, si llamamos

$$L_\tau(R) = \cap \{I/\ I \leq R \text{ es } \tau\text{-cocrítico}\}$$

y $L_\tau(R) = R$ cuando no existen ideales derecha τ-cocríticos, entonces se tiene:

$$L_\tau(R) \leq K_\tau(R)$$

Demostración. Sea M un R-módulo τ-crítico, entonces para $m \in M$ se tiene $mR = 0$. Llamamos $I = (0:m)$, I es un ideal derecha de R. Tenemos un isomorfismo de R-módulos entre R/I y mR y por tanto R/I es isomorfo a un submódulo de un R-módulo τ-crítico, luego I es un ideal derecha τ cocrítico, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} L_\tau(R) &= \cap \{I/\ I \leq R \text{ es } \tau\text{-cocrítico}\} \\ &\leq \cap \{(0:m)/\ m \in M \text{ y } M \text{ es un R-módulo } \tau\text{-crítico}\} \\ &= \cap \{M/\ M \text{ es un R-módulo } \tau\text{-crítico}\} \\ &= K_\tau(R). \end{aligned}$$

(2.1.19) Sea I un ideal derecha de R, llamamos idealizador de I al mayor subanillo de R en el que I es un ideal bilátero, y lo notamos por N(I).

(2.1.20) LEMA. Sea τ una teoría de torsión en Mod-R, si para cada ideal derecha τ-cocrítico I de R se verifica $N(I)\setminus I \neq \emptyset$, entonces se tiene $K_\tau(R) = L_\tau(R)$.

Demostración. Sea $x \in K_\tau(R)$, entonces, si $x \notin L_\tau(R)$, existe un ideal derecha I de R τ-cocrítico tal que $x \notin I$. Tenemos que R/I es un R-módulo τ-crítico, luego $(R/I)x = 0$ y $Rx \leq I$. Como $N(I)\setminus I \neq \emptyset$, existe $y \in N(I)\setminus I$ tal que $yx \in I$, luego $(I:y) \nleq I$, por ser I τ-cocrítico, tambien (I:y) lo es, ambos son maximales en el retículo de los ideales derecha τ-cerrados de R, luego $I \nsubseteq (I:y)$ y se tiene $yI \nsubseteq I$, lo que es una contradicción.

(2.1.21) <u>COROLARIO</u>. Si R tiene una unidad a la izquierda, entonces

$$K_\tau(R) = L_\tau(R).$$

(2.1.22) <u>PROPOSICION</u>. Sea τ una teoría de torsión en Mod-R, y τ^* la teoría de torsión inducida por τ en MOD-R_1, entonces:

$$K_\tau(R) = K_{\tau^*}(R_1) \cap R.$$

<u>Demostración</u>. Si M es un R-módulo, entonces M es τ-crítico si, y solo si, es τ^*-crítico, además se verifica $(0:M)_R = (0:M)_{R_1} \cap R$, luego se tiene el resultado.

(2.1.23) <u>PROPOSICION</u>. Sea τ una teoría de torsión en Mod-R y τ^* la teoría de torsión inducida en MOD-R_1, entonces

$$L_\tau(R) = L_{\tau^*}(R_1) \cap R.$$

<u>Demostración</u>. Como R es in ideal τ-denso de R_1, tambien es un ideal τ^*-denso, entonces los retículos $C_\tau(R)$ y $C_{\tau^*}(R_1)$ son isomorfos, con isomorfismo definido

$$L \longmapsto Cl_{\tau^*}^{R_1}(L) \text{ para cada ideal } \tau\text{-cerrado } L \text{ de } R \text{ y}$$

$$H \longmapsto H \cap R, \text{ para cada ideal } \tau^*\text{-cerrado } H \text{ de } R_1.$$

Por tanto es claro que $L_\tau(R) = L_{\tau^*}(R_1) \cap R$.

(2.1.24) <u>TEOREMA</u>. Sea τ una teoría de torsión en Mod-R, entonces

$$L_\tau(R) = K_\tau(R).$$

<u>Demostración</u>. Es inmediata.

2.2. τ-SERIE DE LOEWY.

(2.2.1) Sea M un R-módulo, definimos inductivamente una serie de submódulos de M de la siguiente forma:

$$S_\tau^0(M) = T_\tau(M),$$

$$S_\tau^1(M) = S_\tau(M),$$

$$S_\tau^\gamma(M)/S_\tau^{\gamma-1}(M) = S_\tau(M/S_\tau^{\gamma-1}(M)), \text{ si } \gamma \text{ no es un ordinal limite,}$$

$$S_\tau^\beta(M) = Cl_\tau^M(\Sigma\{S_\tau^\gamma(M)/\gamma < \beta\}), \text{ si } \beta \text{ es un ordinal limite.}$$

Se tiene

$$T_\tau(M) = S_\tau^0(M) \leq S_\tau^1(M) \leq \ldots \leq S_\tau^\gamma(M) \leq \ldots$$

una serie ascendente de submódulos de M, a la que llamamos τ-serie de Loewy de M.

(2.2.2) Siempre existe un menor ordinal λ tal que $S_\tau^\lambda(M) = S_\tau^{\lambda+1}(M)$. A este ordinal λ lo llamamos τ-longitud de Loewy de M, y se representa por $\lambda_\tau(M)$.

(2.2.3) LEMA. Para cada ordinal γ se tiene $S_\tau^\gamma(M) \in C_\tau(M)$.

Demostración. Vamos a probar el resultado por inducción transfinita. El resultado es cierto para $\gamma = 0$ y 1, supongamos entonces que es cierto para cada ordinal $\gamma < \beta$. En el caso en que β es un ordinal limite, es claro que $S_\tau^\beta(M) \in C_\tau(M)$. Si β no es un ordinal limite, entonces $S_\tau^\beta(M)/S_\tau^{\beta-1}(M) = S_\tau(M/S_\tau^{\beta-1}(M))$ es un submódulo τ-cerrado en $M/S_\tau^{\beta-1}(M)$, por tanto $S_\tau^\beta(M)$ es tambien un submódulo τ-cerrado de M.

(2.2.4) LEMA. Si N es un submódulo de un R-módulo M, entonces, para cada ordinal γ, se tiene

$$S_\tau^\gamma(N) = S_\tau^\gamma(M) \cap N.$$

Demostración. Vamos a probar el resultado por inducción transfinita. El resultado es cierto para $\gamma = 0$ y 1, supongamos que es cierto para cada ordinal $\gamma < \beta$. Si β es un ordinal limite y N es un submódulo τ-cerrado de M, entonces se tiene

$$\begin{aligned} S_\tau^\beta(M) \cap N &= Cl_\tau^M(\Sigma\{S_\tau^\gamma(M)/\ \gamma < \beta\}) \cap N \\ &= Cl_\tau^M(\Sigma\{S_\tau^\gamma(M) \cap N/\gamma < \beta\}) \\ &= Cl_\tau^M(\Sigma\{S_\tau^\gamma(N)/\gamma < \beta\}) \\ &= S_\tau^\beta(N), \end{aligned}$$

si N es un submódulo τ-denso, entonces por el isomorfismo de retículos entre $C_\tau(N)$ y $C_\tau(M)$ es facil deducir la igualdad, si N no es τ-cerrado ni τ-denso, entonces consideramos la cadena $N \leq Cl_\tau^M(N) \leq M$ y aplicamos los resultados anteriores. Si β no es un ordinal limite, un pequeño cálculo nos da el resultado.

(2.2.5) COROLARIO. Si N es un submódulo τ-denso de un R-módulo M, entonces $S_\tau^\gamma(N)$ es un submódulo τ-denso de $S_\tau^\gamma(M)$ para cada ordinal γ.
Demostración. Por el lema anterior tenemos que $S_\tau^\gamma(N) = S_\tau^\gamma(M) \cap N$, entonces;

$$S_\tau^\gamma(M)/S_\tau^\gamma(N) = S_\tau^\gamma(M)/(S_\tau^\gamma(M) \cap N) \cong (S_\tau^\gamma(M) + N)/N$$

es un submódulo de M/N, y por tanto τ-torsión.

(2.2.6) LEMA. Si $f:M \longrightarrow M'$ es un morfismo de R-módulos, entonces para cada ordinal γ, se tiene

$$f(S_\tau^\gamma(M)) \leq S_\tau^\gamma(M').$$

Demostración. Vamos a probar el resultado por inducción transfinita. El resultado es cierto para $\gamma = 0$ y 1, supongamos entonces que es cierto para cada ordinal $\gamma < \beta$. Si β es un ordinal limite tenemos:

$$\begin{aligned} f(S_\tau^\beta(M)) &= f(Cl_\tau^M(\Sigma\{S_\tau^\gamma(M))/\gamma < \beta\})) \\ &\subseteq Cl_\tau^{M'}(f(\Sigma\{S_\tau^\gamma(M)/\gamma < \beta\})) \end{aligned}$$

$$= Cl_\tau^{M'}(\Sigma\{f(S_\tau^\gamma(M)/\gamma < \beta\}))$$
$$\subseteq Cl_\tau^{M'}(\Sigma\{S_\tau^\gamma(M')/\gamma < \beta\})$$
$$= S_\tau^\beta(M').$$

Si β no es un ordinal limite, un pequeño cálculo nos da el resultado.

(2.2.7) COROLARIO. Si $f:M \longrightarrow M'$ es un epimorfismo de R-módulos con Ker f τ-torsión, entonces se tiene para cada ordinal γ

$$f(S_\tau^\gamma(M)) = S_\tau^\gamma(M').$$

(2.2.8) LEMA. Si $\{N_\alpha/\alpha \in A\}$ es una familia de submódulos de un R-módulo M verificando $M = \oplus\{N_\alpha/\alpha \in A\}$, entonces para cada ordinal γ

$$S_\tau^\gamma(M) = \oplus\{S_\tau^\gamma(N_\alpha)/\alpha \in A\}.$$

Demostración. Vamos a probar el resultado por inducción transfinita. El resultado es cierto para $\gamma = 0$. Siempre tenemos la inclusión

$$\oplus\{T_\tau(N_\alpha)/\alpha \in A\} \leq T_\tau(M),$$

si $x \in T_\tau(M)$, entonces $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, con $x_i \in N_{\alpha_i}$, si consideramos las proyecciones $\pi_\alpha:M \longrightarrow N_\alpha$, tenemos que $x_i \in T(N_{\alpha_i})$, luego $x \in \oplus\{T_\tau(N_\alpha)/\alpha \in A\}$. Supongamos que es cierto para cada ordinal $\gamma < \beta$. Si β es un ordinal limite, entonces

$$S_\tau^\beta(M) = Cl_\tau^M(\Sigma\{S_\tau^\gamma(M)/\gamma < \beta\})$$
$$= Cl_\tau^M(\Sigma\{\oplus\{S_\tau^\gamma(N_\alpha)/\alpha \in A\}/\gamma < \beta\})$$
$$= Cl_\tau^M(\oplus\{S_\tau^\beta(N_\alpha)/\alpha \in A\}),$$

si $x \in S_\tau^\beta(M)$, entonces $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, con $x_i \in N_{\alpha_i}$, si consideramos las proyecciones $\pi_\alpha:M \longrightarrow N_\alpha$, tenemos que $x_i \in S_\tau^\beta(N_{\alpha_i})$, luego $x \in \oplus\{S_\tau^\beta(N_\alpha)/\alpha \in A\}$. Como consecuencia se tiene la igualdad.

Si β no es un ordinal limite, un pequeño cálculo da el resultado.

(2.2.9) Un R-módulo M se llama <u>τ-módulo de Loewy</u>, si existe un ordinal λ tal que $S_\tau^\lambda(M) = M$, por tanto $\lambda \geq \lambda_\tau(M)$.

(2.2.10) <u>COROLARIO</u>. Si $\{N_\alpha/\alpha \in A\}$ es una familia de τ-módulos de Loewy, entonces $\oplus\{N_\alpha/\alpha \in A\}$ es un τ-módulo de Loewy.

<u>Demostración</u>. Por el lema anterior tenemos que para una cota γ de la familia de ordinales $\{\lambda_\tau(N_\alpha)/\alpha \in A\}$, se tiene $S_\tau^\gamma(M) = M$.

(2.2.11) <u>LEMA</u>. Sea N un submódulo de un R-módulo M y $\{N_\alpha/\alpha \in A\}$ una familia de submódulos, entonces se verifica:

1. $\lambda_\tau(N) \leq \lambda_\tau(M)$.
2. Si N es τ-denso en M, entonces $\lambda_\tau(N) = \lambda_\tau(M)$.
3. Si M es un τ-módulo de Loewy, entonces $\lambda_\tau(M/N) \leq \lambda_\tau(M)$.
4. $\lambda_\tau(M) \leq \lambda_\tau(N) + \lambda_\tau(M/N)$.
5. $\lambda_\tau(\oplus\{N_\alpha/\alpha \in A\}) = \sup\{\lambda_\tau(N_\alpha)/\alpha \in A\}$.

<u>Demostración</u>.

1. Ya que $S_\tau^\gamma(N) = S_\tau^\gamma(M) \cap N$, se tiene que si $\gamma = \lambda_\tau(M)$, entonces $S_\tau^{\gamma+1}(N) = S_\tau^{\gamma+1}(M) \cap N = S_\tau^\gamma(M) \cap N = S_\tau^\gamma(N)$, luego $\lambda_\tau(M) \geq \lambda_\tau(N)$.

2. Si suponemos que $\lambda_\tau(N) = \lambda_\tau(M)$, entonces existe un ordinal $\gamma \leq \lambda_\tau(M)$ tal que $S_\tau^\gamma(N) = S_\tau^{\gamma+1}(N)$, como los retículo $C_\tau(N)$ y $C_\tau(M)$ son isomorfos, se tiene que $S_\tau^\gamma(M) = S_\tau^{\gamma+1}(M)$, lo que es una contradicción.

3. Si suponemos que $\lambda = \lambda_\tau(M)$, por (2.2.6), se tiene

$$(N + S_\tau^\lambda(M))/N \leq S_\tau^\lambda(M/N),$$

luego $\lambda_\tau(M/N) \leq \lambda_\tau(M)$.

4. Supongamos que $\lambda = \lambda_\tau(M)$, $\lambda' = \lambda_\tau(N)$ y $\lambda'' = \lambda_\tau(M/N)$, entonces tenemos que $\lambda = \lambda_\tau(S_\tau^\lambda(M))$, y análogamente para λ' y λ''. Tambien tenemos que $S_\tau^\lambda(M)/S_\tau^{\lambda'}(N)$ es isomorfo a un submódulo de $S_\tau^{\lambda''}(M/N)$. Por (2.2.4) tenemos

$$S_\tau^{\lambda'}(N) = S_\tau^{\lambda'}(M) \cap N = S_\tau^{\lambda'} S_\tau^\lambda(M) \cap S_\tau^{\lambda'}(N),$$

luego $S_\tau^{\lambda'}(N) \leq S_\tau^{\lambda'} S_\tau^{\lambda}(M)$, y $S_\tau^{\lambda}(M)/S_\tau^{\lambda'} S_\tau^{\lambda}(M)$ es un cociente de $S_\tau^{\lambda}(M)/S_\tau^{\lambda'}(M)$. Aplicando (1) y (3) tenemos

$$\lambda_\tau(S_\tau^{\lambda}(M)/S_\tau^{\lambda'} S_\tau^{\lambda}(M)) \leq \lambda_\tau(S_\tau^{\lambda}(M)/S_\tau^{\lambda'}(M)) \leq \lambda_\tau(S_\tau^{\lambda''}(M/N)) = \lambda''.$$

Entonces tenemos

$$\lambda = \lambda_\tau(S_\tau^{\lambda}(M)) = \lambda_\tau(S_\tau^{\lambda'} S_\tau^{\lambda}(M)) + \lambda_\tau(S_\tau^{\lambda}(M)/S_\tau^{\lambda'} S_\tau^{\lambda}(M)) =$$

$$= \lambda' + \lambda_\tau(S_\tau^{\lambda}(M)/S_\tau^{\lambda'} S_\tau^{\lambda}(M)) \leq \lambda' + \lambda''.$$

5. Es claro que para todo $\alpha \varepsilon A$ se tiene $\lambda = \lambda_\tau(M) \geq \lambda_\tau(N_\alpha)$, luego si llamamos $\lambda' = \sup\{\lambda_\tau(N_\alpha)/\alpha \in A\}$, se tiene $\lambda \geq \lambda'$. Si $x \in S_\tau^{\lambda}(M)$, entonces $x = x_1 + x_2 + \dots + x_k$, con $x_i \in N_{\alpha_i}$, y por tanto se tiene

$x_i \in S_\tau^{\lambda}(N_{\alpha_i}) = S_\tau^{\lambda'}(N_{\alpha_i})$, luego $x \in \oplus\{S_\tau^{\lambda'}(N_\alpha)/\alpha \in A\} = S_\tau^{\lambda'}(M)$.

(2.2.12) <u>COROLARIO</u>. Si R es un R-módulo con τ-longitud de Loewy finita, entonces todo R-módulo M tiene τ-longitud de Loewy finita.

<u>Demostración</u>. Por hipotesis tenemos que R es τ-denso en R_1, y como todo R-módulo es un cociente de una suma directa de copias de R_1, entonces es claro que todo R-módulo tiene τ-longitud de Loewy finita.

2.3. ANILLOS Y MODULOS τ-SEMIARTINIANOS.

(2.3.1) Un R-módulo M se llama <u>τ-semiartiniano</u> si cada cociente no nulo tiene τ-zócalo no nulo.

(2.3.2) PROPOSICION. Sea M un R-módulo. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M es τ-semiartiniano.

2. Cada cociente no nulo y libre de τ-torsión de M contiene un submódulo τ-crítico.

Demostración.

1 $\Longrightarrow$ 2. Sea M/N un cociente de M no nulo y libre de τ-torsión, por $S_\tau(M/N) \neq 0$, necesariamente debe existir un submódulo τ-crítico de M/N.

2 $\Longrightarrow$ 1. Sea N un submódulo propio de M, si $T_\tau(M/N) \neq 0$, entonces por la inclusión $T_\tau(M/N) \leq S_\tau(M/N)$ se tiene que $S_\tau(M/N)$ es no nulo. Si $T_\tau(M/N) = 0$, entonces debe existir un submódulo τ-crítico de M/N, y por tanto se tiene que $S_\tau(M/N)$ es no nulo.

(2.3.3) LEMA. Sea M un R-módulo. $S_\tau(M)$ es esencial en M si, y solo si, cada submódulo no nulo y libre de torsión de M contiene un submódulo τ-crítico.

Demostración. " $\Longrightarrow$ ". Sea N un submódulo no nulo y libre de τ-torsión de M, por ser $S_\tau(M)$ esencial se tiene $S_\tau(N) = S_\tau(M) \cap N \neq 0$, y por ser libre de τ-torsión se tiene $S_\tau(N) \neq T_\tau(N)$, luego necesariamente N contiene un submódulo τ-crítico.

" $\Longleftarrow$ ". Sea N un submódulo no nulo de M, y supongamos que $N \cap S_\tau(M)$ es cero, entonces $N \cap T_\tau(M) = 0$ y N es libre de τ-torsión, por hipotesis debe de contener un submódulo τ-crítico, lo que es una contradicción.

(2.3.4) LEMA. Si M es un R-módulo τ-semiartiniano, entonces $S_\tau(M)$ es esencial.

Demostración. Por el lema anterior, es suficiente demostrar que cada submódulo no nulo y libre de τ-torsión de M contiene un submódulo τ-crítico. Sea N un submódulo no nulo y libre de torsión de M, consideramos $Cl_\tau^M(N)$, si $Cl_\tau^M(N) \neq M$, existe $N' \in C_\tau(M)$ maximal verificando $Cl_\tau^M(N) \cap N' = T_\tau(M)$, es inmediato comprobar que N' es maximal en $C_\tau(M)$ verificando $N \cap N' = 0$, y por tanto se deduce que N' es un pseudo-complemento de N en el retículo de todos los submódulos de M. Entonces el monomorfismo natural $f:N \longrightarrow M/N'$ tiene imagen esencial. Por hipotesis, ya que M/N' es libre de τ-torsión, M/N' contiene un submódulo τ-crítico K, entonces $K \cap f(N) \neq 0$ es un submódulo τ-crítico de f(N), y por tanto, N contiene un submódulo τ-crítico. Cuando $Cl_\tau^M(N) = M$, se tienen los siguientes isomorfismos de retículos:

$$C_\tau(N) \cong C_\tau(Cl_\tau^M(N)) \cong C_\tau(M) \cong C_\tau(M/T_\tau(M)),$$

por hipotesis $M/T_\tau(M))$ contiene un submódulo τ-crítico, luego por (1.3.7), $C_\tau(M/T_\tau(M))$ contiene un elemento minimal, y por (1.3.8), N contiene un submódulo τ-crítico.

(2.3.5) PROPOSICION. Un R-módulo M es τ-semiartiniano si, y solo si, es un τ-módulo de Loewy.

Demostración. " $\Longrightarrow$ ". Supongamos que M es τ-semiartiniano, si M no es un τ-módulo de Loewy, entonces $M/S_\tau(M) \neq 0$, para $\lambda = \lambda_\tau(M)$. Por ser M τ-semiartiniano, tenemos que

$$S_\tau^{\lambda+1}(M)/S_\tau^{\lambda}(M) = S_\tau(M/S_\tau^{\lambda}(M)) \neq 0$$

luego $S_\tau^{\lambda+1}(M) \neq S_\tau^{\lambda}(M)$, lo que es una contradicción.

" <== ". Supongamos que M es un τ-módulo de Loewy, y que $\lambda = \lambda_\tau(M)$. Si N es un submódulo τ-cerrado de M, entonces existe un ordinal γ mínimo entre los que verifican $S_\tau^\gamma(M) \nleq N$, es claro que γ no es un ordinal limite por ser N τ-cerrado, por tanto existe $\gamma-1$, y se verifica

$$S_\tau(M/S_\tau^{\gamma-1}(M)) = S_\tau^\gamma(M)/S_\tau^{\gamma-1}(M) \nleq N/S_\tau^{\gamma-1}(M).$$

Entonces existe un submódulo τ-crítico $K/S^{\gamma-1}(M)$ de $M/S^{\gamma-1}(M)$ no contenido en $N/S_\tau^{\gamma-1}(M)$, el morfismo canónico entre $M/S_\tau^{\gamma-1}(M)$ y M/N, determina entonces un submódulo τ-crítico de M/N, la imagen de $K/S^{\gamma-1}(M)$.

(2.3.6) PROPOSICION. Sea N un submódulo de un R-módulo M, entonces M es τ-semiartiniano si y solo si N y M/N son τ-semiartinianos.

Demostración. " ==> ". Sea L/N un submódulo propio τ-cerrado en M/N, entonces L es un submódulo τ-cerrado de M, y existe un submódulo τ-crítico K/L de M/L, luego M/N es un R-módulo τ-semiartiniano. Supongamoa ahora que L es un submódulo propio τ-cerrado en N, entonces N/L es un submódulo de M/L, como M/L es τ-semiartiniano, $S_\tau(M/N)$ es esencial, y se tiene $S_\tau(N/L) = S_\tau(M/N) \cap N/L \neq 0$, por ser N/L libre de τ-torsion, se tiene que existe un submódulo τ-crítico y N es τ-semiartiniano.

" <== ". Supongamos que L sea un submódulo propio τ-cerrado de M. Si $N \neq N \cap L$, entonces

$$N/(L \cap N) \cong (N + L)/L \leq M/L$$

y como $N/(L \cap N)$ es un cociente no nulo y libre de torsión de N, se tiene que contiene un submódulo τ-crítico, luego M/L contiene un submódulo τ-crítico. Si $N = N \cap L$, entonces $N \leq L$ y M/L es un cociente no nulo y libre de τ-torsión de M/N, por tanto contiene un submódulo τ-crítico. Como consecuencia tenemos que M es un R-módulo τ-semiartiniano.

(2.3.7) TEOREMA. Para un anillo R, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. R es un R-módulo derecha τ-semiartiniano.

2. Cada R-módulo es τ-semiartiniano.

3. Cada R-módulo libre de τ-torsión contiene un submódulo τ-crítico.

4. $S_\tau(M)$ es un submódulo esencial de M para cada R-módulo M.

Demostración. 1 $\Longrightarrow$ 2. Por (2.2.12), si R es un R-módulo τ-semiartiniano, tambien R_1 lo es, y por (2.2.10) y (2.3.6), todo R-módulo tambien lo es.

2 $\Longrightarrow$ 4. Es el lema (2.3.4).

4 $\Longleftrightarrow$ 3. Es el lema (2.3.3).

3 $\Longrightarrow$ 2. Es una consecuencia inmediata de la proposición (2.3.2).

2 $\Longrightarrow$ 1. Es inmediata.

(2.3.8) Un anillo R se llama τ-semiartiniano si verifica las condiciones equivalentes del teorema anterior.

(2.3.9) LEMA. Sea R un anillo τ-semiartiniano, entonces para cada R-módulo τ-semicrítico M se tiene $MK_\tau(R) \leq T_\tau(M)$.

Demostración. Si M es un R-módulo τ-semicrítico y libre de τ-torsión, por (2.1.3), $C_\tau(M)$ es un retículo complementado, y por (1.3.12), el complemento de cada elemento minimal es un submódulo τ-cocrítico. Llamamos

$$L = \cap \{H / \text{ H es un submódulo } \tau\text{-cocrítico de M}\}.$$

Tenemos que L = 0, ya que si fuese no nulo, por ser L libre de τ-torsión, existe un submódulo τ-crítico K de M contenido en L, el complemento de la clausura de K es un submódulo τ-cocritico, lo que es una contradicción. Tenemos entonces las siguientes igualdades:

$$(0:M) = (\ \cap \{H / \text{ H es un submódulo } \tau\text{-cocrítico de M}\} :M)$$

$$= \cap \{(H:M)/\ H \text{ es un submódulo } \tau\text{-cocrítico de } M\}$$
$$= \cap \{(0:M/H)/\ H \text{ es un submódulo } \tau\text{-cocrítico de } M\}$$
$$\geq K_\tau(R).$$

Luego $MK_\tau(R) = 0$. Si M es τ-semicrítico y no es libre de τ-torsión, por (2.1.6), tenemos que $M/T_\tau(M)$ es τ-semicrítico, y aplicando el resultado anterior tenemos que $(M/T_\tau(M))K_\tau(R) = 0$, de donde podemos deducir que $MK_\tau(R) \leq T_\tau(M)$.

(2.3.10) TEOREMA. Si τ es una teoría de torsión noetheriana, para un anillo R, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. R es un anillo τ-semiartiniano.
2. a) $K_\tau(R)/T_\tau(R)$ es T-nilpotente izquierda.
   b) $R/K_\tau(R)$ es τ^*-semiartiniano, donde τ^* es la teoría de torsión inducida por τ en Mod-$R/K_\tau(R)$.

Demostración. 1 ⟹ 2. (b) Tenemos que si M es un R-módulo, entonces M es τ-crítico si, y solo si, M es τ^*-crítico, ver (1.3.20), entonces si R es un anillo τ-semicrítico, $R/K_\tau(R)$ es un anillo τ^*-semiartiniano. (a) Por hipotesis $K_\tau(R)/T_\tau(R)$ es un R-módulo τ-semiartiniano, entonces $K_\tau(R)/T_\tau(R) = 0$ ó existe un ordinal λ tal que

$$K_\tau(R)/T_\tau(R) = S_\tau^\lambda(K_\tau(R)/T_\tau(R)) = S_\tau^\lambda(K_\tau(R))/T_\tau(R).$$

Para $\bar{a} \in K_\tau(R)/T_\tau(R)$ definimos $h(\bar{a})$ como el menor ordinal γ tal que $a \in S_\tau^\gamma(R)$. Es claro que $h(\bar{a})$ no es un ordinal limite, entonces $h(\bar{a}) = \gamma + 1$ para algún ordinal γ. Se verifica $S_\tau(R/S_\tau^\gamma(R))K_\tau(R) = 0$, luego $S_\tau^{\gamma+1}(R)K_\tau(R) \leq S_\tau^\gamma(R)$. Entonces para cada $0 \neq \bar{b} \in K_\tau(R)/T_\tau(R)$, tenemos $h(\overline{ab}) < h(\bar{a})$. Si suponemos que existe una sucesión $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \ldots$ de elementos de $K_\tau(R)/T_\tau(R)$, tal que $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_2 \neq 0$ para cada número natural n, entonces existe una sucesión estrictamente decreciente infinita de ordinales $h(\bar{a}_1) > h(\bar{a}_1\bar{a}_2) > \ldots$, lo que es imposible, luego necesariamente $K_\tau(R)/T_\tau(R)$ es T-nilpotente a la izquierda.

2 ==> 1. Si M es un R-módulo libre de τ-torsión, entonces M es un $R/T_\tau(R)$-módulo. Supongamos que para cada submódulo no nulo N de M se tiene $N(K_\tau(R)/T_\tau(R)) \neq 0$, entonces existe $\bar{a}_1 \in K_\tau(R)/T_\tau(R)$ tal que $M\bar{a}_1 \neq 0$. Si llamamos $M_1 = M\bar{a}_1R$, se tiene que es no nulo, y que $M_1(K_\tau(R)/T_\tau(R)) \neq 0$, luego existe $\bar{a}'_2 \in K_\tau(R)/T_\tau(R)$ tal que $M_1\bar{a}'_2 \neq 0$, entonces existe $\bar{a}_2 \in K_\tau(R)/T_\tau(R)$ tal que $M\bar{a}_1\bar{a}_2 \neq 0$. Siguiendo el proceso, llegamos a construir una sucesión de elementos de $K_\tau(R)/T_\tau(R)$, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n, \ldots$, tal que $\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_n \neq 0$ para cada número natural n, lo que es una contradicción. Por tanto, para cada R-módulo M libre de τ-torsión, existe un submódulo N tal que $N(K_\tau(R)/T_\tau(R)) = 0$. Entonces $NK_\tau(R) = 0$, y N es un $R/K_\tau(R)$-módulo, por ser $R/K_\tau(R)$ un anillo τ^*-semiartiniano y N libre de τ^*-torsión, N contiene un submódulo τ^*-crítico, y por tanto N contiene un submódulo τ-crítico. Como consecuencia R es un anillo τ-semiartiniano.

(2.3.11) TEOREMA. Si R es un anillo τ-semiartiniano y $\lambda_\tau(R)$ es finita, entonces cada R-módulo no nulo libre de τ-torsión contiene un submódulo τ-cocrítico.

Demostración. Sea M un R-módulo no nulo y libre de τ-torsión, por (2.2.12), $\lambda_\tau(M)$ es finita, y por (2.3.7) es τ-semiartiniano, entonces su τ-serie de Loewy es:

$$0 = S_\tau^0(M) \leq S_\tau^1(M) \leq \ldots \leq S_\tau^n(M) = M$$

para $n = \lambda_\tau(M)$, entonces $S_\tau^{n-1}(M) \neq M$. Tenemos:

$$S_\tau(M/S_\tau^{n-1}(M)) = S_\tau^n(M)/S_\tau^{n-1}(M) = M/S_\tau^{n-1}(M) \neq 0$$

y por tanto $M/S_\tau^{n-1}(M)$ es τ-semicrítico. Por (2.13), $C_\tau(M/S_\tau^{n-1}(M))$ es un retículo complementado, y como $S_\tau^{n-1}(M)$ es τ-cerrado en M, existe un submódulo τ-critico $K/S_\tau^{n-1}(M)$ en $M/S_\tau^{n-1}(M)$, el complemento de su τ-clausura es un submódulo τ-cocrítico de $M/S_\tau^{n-1}(M)$, y esta determina un submódulo τ-cocrítico de M.

(2.3.12) PROPOSICION. Todo R-módulo τ-artiniano es τ-semiartiniano.

Demostración. Sea N un submódulo τ-cerrado propio de M. Por ser M τ-artiniano, M/N tambien lo es, por tanto existen elementos minimales en el reticulo $C_\tau(M/N)$, y si como M/N es libre de τ-torsión, cada τ-cerrado minimal determina un submódulo τ-crítico, luego M/N contiene submódulo τ-críticos y por tanto M es τ-semiartiniano.

(2.3.13) TEOREMA. Sea M un R-módulo. Los siguientes ununciados son equivalentes:

1. M tiene una τ-serie de composición.
2. M es τ-artiniano y $\lambda_\tau(M)$ es finita.
3. M es τ-noetheriano y τ-semiartiniano.

Demostración. 1 $\Longrightarrow$ 2. Es bien conocido que si M tiene una τ-serie de composición, entonces M es τ-artiniano y τ-noetheriano. Y es inmediato comprobar que entonces $\lambda_\tau(M)$ debe de ser finita.

2 $\Longrightarrow$ 3. Sea $n = \lambda_\tau(M)$, entonces la τ-serie de Loewy de M es:

$$T_\tau(M) = S_\tau^o(M) \leq S_\tau^1(M) \leq \dots \leq S_\tau^n(M) \leq M$$

Ya que M es τ-artiniano, entonces, por (2.3.12), M es τ-semiartiniano, entonces $S_\tau^n(M) = M$. Como para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$ se tiene

$$S_\tau(M/S_\tau^i(M)) = S_\tau^{i+1}(M)/S_\tau^i(M),$$

entonces cada uno de los cocientes es τ-semicrítico, evidentemente tambien es τ-artiniano, entonces por (1.2.21) y (2.1.3), se tiene que cada cociente de la serie es τ-noetheriano, por tanto M lo es.

3 $\Longrightarrow$ 1. Ya que M es τ-semiartiniano, se tiene que $M = S_\tau^\lambda(M)$, donde $\lambda = \lambda_\tau(M)$, por ser τ-noetheriano, la τ-serie de Loewy es finita. Cada uno de los cocientes de la τ-serie es τ-semicrítico y τ-noetheriano, por lo tanto τ-artiniano. El R-módulo M es pues τ-noetheriano y τ-artiniano, por lo tanto tiene una τ-serie de composición.

(2.3.14) <u>TEOREMA</u>. Para cada anillo R, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. R es τ-artiniano.

2. R es τ-noetheriano y τ-semiartiniano.

<u>Demostración</u>. 1 ⟹ 2. Es consecuencia de (2.3.12) y de [58, theorem 1.4].

2 ⟹ 1. Es consecuencia del anterior teorema.

(2.3.15) <u>COROLARIO</u>. Si R es un anillo con τ-longitud de Loewy finita y M es un R-módulos, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M es τ-noetheriano.

2. M es τ-artiniano.

3. M tiene una τ-serie de composición.

(2.3.16) <u>TEOREMA</u>. Sea M un R-módulo verificando que cada submódulo esencial es τ-denso, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M es τ-semicrítico.

2. M es τ-semiartiniano.

<u>Demostración</u>. Unicamente vamos a demostrar 2 ⟹ 1, ya que 1 ⟹ 2 es evidente. Sea M τ-semiartiniano, por el lema (2.3.4), $S_\tau(M)$ es esencial en M, por tanto, $S_\tau(M)$ es τ-denso, y se tiene $M = S_\tau(M)$.

(2.3.17) <u>COROLARIO</u>. Sea M un R-módulo. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M es τ-semicrítico.

2. M es τ-semiartiniano y $C_\tau(M)$ es un retículo complementado.

<u>Demostración</u>. Si consideramos el isomorfismo entre los retículos $C_\tau(M)$ y $C_\tau(M/T_\tau(M))$, por el teorema anterior, $M/T_\tau(M)$ es τ-semicrítico si, y solo si es τ-semiartiniano, y ya que M es τ-semicrítico (τ-semiartiniano) si y solo si $M/T_\tau(M)$ lo es, tenemos el resultado.

2.4. DESCOMPOSICION DEL τ-ZOCALO.

(2.4.1) Dado un R-módulo M, llamamos $E_\tau(M)$ a la envolvente τ-inyectiva de M, es conocido que se verifica la siguiente igualdad:

$$E_\tau(M)/M = T_\tau(E(M)/M);$$

esto es; $E_\tau(M) = Cl_\tau^{E(M)}(M)$.

(2.4.2) Dos R-módulos τ-críticos N y K son equivalentes si $E_\tau(N)$ es isomorfo a $E_\tau(K)$, ó equivalentemente, si N y K tienen submódulos no nulos isomorfos. Esta relación es de equivalencia, y produce una partición de la clase de los R-módulo τ-críticos. Llamamos Ω a la clase cociente para esta relación, es claro que Ω es un conjunto; ya que si $\omega \in \Omega$, entonces existe $N \in \omega$ y para cada $0 \neq x \in N$ tenemos $R/(0:x) \cong xR \leq N$, luego $R/(0:x) \in \omega$, y existe una aplicación sebreyectiva del conjunto de los ideales derecha de R τ-cocríticos en ω.

(2.4.3) Para cada elemento $\omega \in \Omega$, podemos definir un zócalo y una serie zócalo relativos a la teoría de torsión τ, si M es un R-módulo, definimos:

$$S_{\omega\tau}(M) = Cl_\tau^M(\Sigma\{N/\ N \leq M;\ y\ N \in \Omega\})$$

y cuando M no tiene submódulo τ-críticos en ω, definimos

$$S_{\omega\tau}(M) = T_\tau(M).$$

Llamamos a $S_{\omega\tau}(M)$ el $\omega\tau$-zócalo de M, y verifica propiedades análogas al τ-zócalo asociado a la teoría de torsión τ. Además, permite obtener una descomposición del τ-zócalo de cada R-módulo.

$S_{\omega\tau}^\alpha(M)$ se definen de forma análoga para cada ordinal α.

(2.4.4) LEMA. Sea M un R-módulo, $N \leq M$ y $\{N_\alpha / \alpha \in A\}$ una familia de submódulos de M. Supongamos que $N \cap (\oplus\{N_\alpha / \alpha \in A\}) \neq 0$, entonces existe un N_α tal que N y N_α tienen un submódulo no nulo isomorfo.
Demostración. [30, Prop. 2].

(2.4.5) Por el lema (2.1.1), para cada R-módulo M, existe una familia independiente maximal $\{K_\alpha / \alpha \in A\}$ de submódulos τ-críticos, tal que $S_\tau(M) = Cl_\tau^M(\oplus\{K_\alpha / \alpha \in A\})$.

(2.4.6) LEMA. En la situación anterior, para cada $\omega \in \Omega$, se tiene que $S_{\omega\tau}(M) = Cl_\tau^M(\oplus\{K_\alpha / \alpha \in A$ y $K_\alpha \in \omega\})$. Y la familia definida por $A_\omega = \{\alpha \in A / K_\alpha \in \omega\}$ es maximal entre las familias de submódulos τ-críticos pertenecientes a la clase ω, cuya τ-clausura es $S_{\omega\tau}(M)$.
Demostración. [45, Lemme 1.2.1].

(2.4.7) LEMA. Sea M un R-módulo tal que $S_\tau(M) = Cl_\tau^M(\oplus\{K_\alpha / \alpha \in A\})$, y $\omega \in \Omega$, si llamamos $D_\omega = \oplus\{K_\alpha / \alpha \in A_\omega\}$, entonces la familia $\{D_\omega / \omega \in \Omega\}$ es independiente.

Demostración. Supongamos que ω_1 y ω_2 son elementos de Ω, entonces $D_{\omega_1} \cap D_{\omega_2} = 0$; supongamos que no sea nulo, entonces existe $0 \neq L \leq D_{\omega_1} \cap D_{\omega_2}$, por el lema (2.4.4), se tiene que L contiene un submódulo no nulo K, que pertenece a ω_1, entonces $K \cap (\oplus\{K_\alpha / \alpha \in A_{\omega_2}\})$ es no nulo, y por el mismo lema, K pertenece a ω_2, lo que es una contradicción. Sean ahora ω_1, ω_2 y ω_3 elementos de Ω distintos entre sí. Si $D_{\omega_1} \cap (D_{\omega_2} \oplus D_{\omega_3}) \neq 0$, entonces existe un submódulo no nulo L contenido en esta intersección. Por el lema (2.4.4), L contiene un submódulo no nulo K que pertenece a ω_1, y tambien por el mismo lema, K pertenece a $\omega_2 \cup \omega_3$, lo que es una contradicción. Como consecuencia, se tiene el resultado para toda familia finita de Ω. Supongamos ahora que $\omega \in \Omega$, y que $D_\omega \cap (\Sigma\{D_{\omega'} / \omega \neq \omega' \in \Omega\}) \neq 0$, entonces existe un subconjunto finito F de Ω tal que

$$D_{\omega} \cap (\Sigma\{D_{\omega'} / \omega \neq \omega' \in F\}) \neq 0,$$

lo que es una contradicción.

(2.4.8) <u>COROLARIO</u>. Sea M un R-módulo, entonces se tiene la igualdad

$$S_{\tau}(M) = Cl_{\tau}^{M}(\Sigma\{S_{\omega\tau}(M) / \omega \in \Omega\}),$$

(2.4.9) <u>COROLARIO</u>. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión, entonces

$$S_{\tau}(M) = Cl_{\tau}^{M}(\oplus\{S_{\omega\tau}(M) / \omega \in \Omega\}).$$

(2.4.10) <u>LEMA</u>. Sea M un R-módulo y $\{H_{\beta} / \beta \in B\}$ y $\{K_{\alpha} / \alpha \in A\}$ familias maximales independientes de submódulos τ-críticos de M, pertenecientes a la clase ω, tal que

$$S_{\omega\tau}(M) = Cl_{\tau}^{M}(\oplus\{H_{\beta} / \beta \in B\}) = Cl_{\tau}^{M}(\oplus\{K_{\alpha} / \alpha \in A\}),$$

entonces Card(B) = Card(A).

<u>Demostración</u>. [45, lemme 1.2.2].

(2.4.11) <u>PROPOSICION</u>. Sea M un R-módulo y $\{H_{\beta} / \beta \in B\}$ y $\{K_{\alpha} / \alpha \in A\}$ dos familias independientes maximales de submódulos τ-críticos de M, tales que

$$S_{\tau}(M) = Cl_{\tau}^{M}(\oplus\{H_{\beta} / \beta \in B\}) = Cl_{\tau}^{M}(\oplus\{K_{\alpha} / \alpha \in A\}),$$

entonces existe una biyección entre A y B, y un isomorfismo de R-módulos entre $\oplus\{E_{\tau}(H_{\beta}) / \beta \in B\}$ y $\oplus\{E_{\tau}(K_{\alpha}) / \alpha \in A\}$.

<u>Demostración</u>. Por el Corolario (2.4.8), $S_{\tau}(M) = Cl_{\tau}^{M}(\Sigma\{S_{\omega\tau}(M) / \omega \in \Omega\})$ y por el lema (2.4.6),

$$S_{\omega\tau}(M) = Cl_{\tau}^{M}(\oplus\{K_{\alpha} / \alpha \in A,\ K_{\alpha} \in \omega\}) = Cl_{\tau}^{M}(\oplus\{H_{\beta} / \beta \in B,\ K_{\beta} \in \omega\})$$

Por el lema (2.4.10), $Card(A_{\omega}) = Card(B_{\omega})$, y por tanto tenemos una biyección $\sigma : B \longrightarrow A$, como H_{β} y $K_{\sigma(\beta)}$ son equivalentes, entonces existe un isomorfismo entre $E_{\tau}(H_{\beta})$ y $E_{\tau}(K_{\sigma(\beta)})$, y estos isomorfismos inducen un isomorfismo $f : \oplus\{E_{\tau}(H_{\beta}) / \beta \in B\} \longrightarrow \oplus\{E_{\tau}(K_{\alpha}) / \alpha \in A\}$.

(2.4.12) Llamamos <u>τ-dimension</u> del R-módulo M al cardinal de una familia maximal independiente de submódulos τ-críticos de M, cuya τ-clausura sea $S_\tau(M)$.

Es una generalización de la dimensión reducida de Goldie.

(2.4.13) <u>LEMA</u>. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión, entonces

$$S_{\omega\tau}(E_\tau(M)) \leq E_\tau(S_{\omega\tau}(M)).$$

<u>Demostración</u>. Sea L un submódulo de $E_\tau(M)$ τ-crítico tal que $L \in \omega$, entonces $L \cap M \neq 0$ es un submódulo τ-crítico de M, luego $L \cap M \in \omega$ y se verifica $E_\tau(L \cap M) = E_\tau(L)$, luego $L \leq E_\tau(L \cap M) \leq E_\tau(S_{\omega\tau}(M))$.

(2.4.14) <u>LEMA</u>. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión, si

$$S_\tau(M) = Cl_\tau^M(\oplus\{K_\alpha / \alpha \in A\})$$

para una familia independiente de submódulo τ-críticos de M,entonces

$$S_{\omega\tau}(E_\tau(M)) = Cl_\tau^{E_\tau(M)}(\oplus\{E_\tau(K_\alpha)/\alpha \in A,\ K_\alpha \in \omega\}).$$

<u>Demostración</u>. Si $K_\alpha \in \omega$, entonces $E_\tau(K_\alpha) \in \omega$ y por tanto

$$\oplus\{E_\tau(K_\alpha)/\alpha \in A,\ K_\alpha \in \omega\} \leq S_{\omega\tau}(E_\tau(M)).$$

Sea $L \leq E_\tau(M)$ un submódulo τ-crítico, tal que $L \in \omega$, entonces $L \cap M \in \omega$, luego $L \cap M \leq S_\tau(M) = Cl_\tau^M[(\oplus\{K_\alpha/\alpha \in A \setminus A_\omega\}) \oplus (\oplus\{K_\alpha/\alpha \in A_\omega\})]$

Entonces

$$H = L \cap M \cap [(\oplus\{K_\alpha/\alpha \in A \setminus A_\omega\}) \oplus (\oplus\{K_\alpha/\alpha \in A_\omega\})] \neq 0$$

Si fuese $H \cap (\oplus\{K_\alpha/\alpha \in A_\omega\}) = 0$, entonces se tendría

$$H \cong \frac{H \oplus (\oplus\{K_\alpha/\alpha \in A_\omega\})}{\oplus\{K_\alpha/\alpha \in A_\omega\}} \leq \frac{\oplus\{K_\alpha/\alpha \in A\}}{\oplus\{K_\alpha/\alpha \in A_\omega\}} \cong \oplus\{K_\alpha/\alpha \in A \setminus A_\omega\},$$

lo que es una contradicción. luego la intersección es no nula y se tiene

$$L \cap (\oplus\{K_\alpha/\alpha \in A_\omega\}) \neq 0$$

entonces, para cada $0 \neq x \in L \cap (\oplus\{K_\alpha/\alpha \in A_\omega\})$, existe una familia finita $K_1, K_2, \ldots, K_n \in \omega$, tales que $x \in L \cap (K_1 + K_2 + \ldots + K_n)$, luego $E_\tau(xR) \leq \oplus\{E_\tau(K_i)/\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, y se tiene

$$L \leq E_\tau(L) = E_\tau(xR) \leq \oplus\{E_\tau(K_i)/i = 1, 2, \dots, n\} \leq$$

$$\leq \oplus\{E_\tau(K_\alpha)/\alpha \in A_\omega\},$$

luego $S_{\omega\tau}(E_\tau(M)) \leq Cl_\tau^{E_\tau(M)}(\oplus\{E_\tau(K_\alpha)/\alpha \in A_\omega\})$.

(2.4.15) COROLARIO. Sea M como en el lema anterior, entonces

$$S_\tau(E_\tau(M)) = Cl_\tau^{E_\tau(M)}(\oplus\{E_\tau(K_\alpha)/\alpha \in A\}.$$

Como consecuencia de este resultado, la τ-dimensión de M es igual a la τ-dimensión de $E_\tau(M)$.

(2.4.16) Un R-módulo M se llama τ-quasi-inyectivo si para todo submódulo N τ-denso y todo morfismo $f:N \longrightarrow M$, existe una extensión a un endomorfismo de M.

(2.4.17) LEMA. Sea M un R-módulo, M es τ-quasi-inyectivo si, y solo si, M es un (S_τ, R)-submódulo de $E_\tau(M)$, donde S_τ es el anillo de endomorfismos de $E_\tau(M)$.

(2.4.18) LEMA. Para cada R-módulo M existe una extensión esencial τ-quasi-inyectiva minimal; es la intersección de todos los (S_τ, R)-submódulos de $E_\tau(M)$ que contienen a M.

(2.4.19) LEMA. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión. Si M es τ-quasi-inyectivo y $C_\tau(M)$ es un retículo complementado, entonces M es quasi-inyectivo.

Demostración. Sea $N \leq M$, ya que N es τ-denso en $Cl_\tau^M(N)$, y todo τ-cerrado tiene un complemento, entonces si H es el complemento de $Cl_\tau^M(N)$ en $C_\tau(M)$, se tiene que $N \oplus H$ es τ-denso en M, si $f:N \longrightarrow M$, entonces f induce un morfismo

$$N \oplus H \longrightarrow N \xrightarrow{f} M,$$

ya que $N \oplus H$ es τ-denso, existe una prolongación de él a un endomorfismo de M, es claro que este endomorfismo tambien extiende a f.

(2.4.20) PROPOSICION. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. M es τ-quasi-inyectivo y $C_\tau(M)$ es complementado.

2. M es quasi-inyectivo y verifica que cada submódulo esencial es τ-denso.

Demostración. 1 $\Longrightarrow$ 2. Por el lema anterior tenemos que M es quasi-inyectivo, y por (1.2.19), todo submódulo esencial es τ-denso.

2 $\Longrightarrow$ 1. Es inmediata.

(2.4.21) PROPOSICION. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión y τ-quasi-inyectivo, entonces son equivalentes:

1. $C_\tau(M)$ es un retículo complementado.

2. Cada submódulo τ-cerrado es un sumando directo.

Demostración. 2 $\Longrightarrow$ 1. Es inmediata.

1 $\Longrightarrow$ 2. Supongamos que N es un submódulo τ-cerrado de M, entonces existe un complemento H en $C_\tau(M)$ y por tanto N + H es τ-denso, consideramos la composición

$$\sigma : N + H \longrightarrow M.$$

donde $\sigma((n,h)) = n$, este morfismo induce se extiende a un endomorfismo f de M, y es claro que $f(M) \leq f(Cl_\tau^M(N + H)) \leq Cl_\tau^M(f(N + H)) = Cl_\tau^M(N) = N$. Luego N es un sumando directo de M.

(2.4.22) PROPOSICION. Sea M un R-módulo τ-crítico, entonces S_τ es un anillo de división y $E_\tau(M)$ es quasi-inyectivo.

Demostración. $E_\tau(M)$ es τ-quasi-inyectivo y τ-crítico, luego es quasi-inyectivo. Llamamos J al radical de Jacobson del anillo S de los endomorfismo de E(M), vamos a demostrar que S/J es isomorfo a S_τ. Definimos $\delta : S/J \longrightarrow S_\tau$, mediante $\delta(f + J) = f/E_\tau(M)$, es correcto, ya que $E_\tau(M)$ es quasi-inyectivo. δ está bien definida, ya que si $f + J = g + J$, entonces $f - g \in J$ y por tanto $Ker(f - g)$ es esencial en E(M), luego $Ker(f - g) \cap E_\tau(M) \neq 0$, si $Ker(f - g) \cap E_\tau(M) \neq E_\tau(M)$, entonces es τ-denso, y como $(f - g)/E_\tau(M)$ extiende el morfismo cero de $\mathrm{Ker}(f - g) \cap E_\tau(M)$ a $E_\tau(M)$, por ser $E_\tau(M)$ fielmente τ-inyectivo, tenemos que $(f - g)/E_\tau(M) = 0$, luego $f/E_\tau(M) = g/E_\tau(M)$. Es claro que es un morfismo de anillos, y es inyectivo y sobreyectivo, luego tenemos el isomorfismo. Por [54, página 104], podemos deducir el resultado.

(2.4.23) El lema (2.4.18) nos asegura la existencia de una extensión esencial τ-quasi-inyectiva minimal, llamamos a esta extensión la <u>envolvente</u> <u>τ-quasi-inyectiva</u> de M; y la representamos por $\tilde{E}_\tau(M)$.

(2.4.24) <u>LEMA</u>. Sea M un R-módulo y N un submódulo de $E_\tau(M)$ τ-denso y τ-quasi-inyectivo, entonces se tiene el siguiente isomorfismo:

$$\mathrm{End}(N) \cong S_\tau .$$

<u>Demostración</u>. Definimos la aplicación $\ell:\mathrm{End}(N) \longrightarrow S_\tau$, mediante

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[r] & E_\tau(M) \\
E_\tau(M) \arrow[urr, "\ell(f)"'] & &
\end{tikzcd}$$

La unicidad de $\ell(f)$ es consecuencia de que $E_\tau(M)$ es fielmente τ-inyectivo, y tambien lo es el ser un morfismo de anillos, evidentemente ℓ es inyectiva y sobreyectiva.

(2.4.25) <u>PROPOSICION</u>. Sea M un R-módulo τ-crítico, entonces:

1. Los elementos de End(M) se extienden a elementos de $\mathrm{End}(\tilde{E}_\tau(M))$ de forma única.

2. $\mathrm{End}(\tilde{E}_\tau(M))$ es un anillo de división.

<u>Demostración</u>. 1. Sea $f:M \longrightarrow M$ un morfismo de R-módulos no nulo, por ser M τ-crítico, f es inyectivo, además $\tilde{E}_\tau(M)/M \leq E_\tau(M)/M$ es τ-torsión, luego M es τ-denso en $\tilde{E}_\tau(M)$, y podemos completar el dia-

grama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, dashed] & \tilde{E}_\tau(M) \\ \tilde{E}_\tau(M) \arrow[urr, "f'"'] & & \end{tikzcd}$$

Supongamos que existan dos extensiones f' y f'', entonces $0 \neq M \leq \mathrm{Ker}(f' - f'')$. Como $E_\tau(M)$ es τ-crítico, tambien lo es $\tilde{E}_\tau(M)$, luego $f' - f'' = 0$, y por tanto únicamente existe una extensión de f.

2. Por el lema anterior tenemos que $\mathrm{End}(\tilde{E}_\tau(M)) = S_\tau$, y por la proposición (2.4.22) S_τ es un anillo de división.

(2.4.26) <u>LEMA</u>. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión, si M es τ-semicrítico, entonces $E_\tau(M)$es τ-semicrítico.

<u>Demostración</u>. Como M es τ-denso en $E_\tau(M)$, los retículos $C_\tau(M)$ y $C_\tau(E_\tau(M))$ son isomorfos, y por tanto $E_\tau(M)$ es τ-semicrítico.

(2.4.27) <u>TEOREMA</u>. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión. Si M es τ-semicrítico, entonces

$$\mathrm{End}(E_\tau(M)) = \Pi\,\{\mathrm{End}(S_{\omega\tau}(E_\tau(M))/\omega \in \Omega\}.$$

<u>Demostración</u>. Por el lema anterior $E_\tau(M)$ es τ-semicrítico, por (2.4.7) se tiene que $\oplus\{S_{\omega\tau}(E_\tau(M))/\omega \in \Omega\}$ es τ-denso en $E_\tau(M)$, y por (2.4.24), se tiene el isomorfismo

$$\mathrm{End}(E_\tau(M)) \cong \mathrm{End}(\oplus\{S_{\omega\tau}(E_\tau(M))/\omega \in \Omega\})$$

y ya que $\mathrm{Hom}_R(S_{\omega\tau}(E_\tau(M)), S_{\omega'\tau}(E_\tau(M))) = 0$ si $\omega \neq \omega'$, se tiene el isomorfismo

$$\mathrm{End}(E_\tau(M)) \cong \Pi\,\{\mathrm{End}(S_{\omega\tau}(E_\tau(M))/\omega \in \Omega\}\ .$$

(2.4.27) Por último para conocer la estructura del anillo de endomosfismos de la envolvente τ-inyectiva de un R-módulo τ-semicrítico, solo nos falta conocer la estructura de $\mathrm{End}(S_{\omega\tau}(E_\tau(M))$, para cada elemento $\omega \in \Omega$.

(2.4.28) TEOREMA. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión y τ-semicrítico, entonces $\mathrm{End}(S_{\omega\tau}(E_\tau(M))$ es isomorfo a un anillo de endomorfismos de un espacio vectorial a la izquierda sobre un anillo de división.

Demostración. Sea $\{N_\alpha/\alpha \in A\}$ una familia independiente maximal de submódulos τ-críticos de M, cuya τ-clausura es M. Tenemos

$$S_{\omega\tau}(E_\tau(M)) \leq S_{\omega\tau}(E_\tau(S_{\omega\tau}(M))) = E_\tau(S_{\omega\tau}(M)),$$

ya que por (2.4.13) $S_{\omega\tau}(E_\tau(M)) \leq E_\tau(S_{\omega\tau}(M))$ y por (2.4.15) $S_{\omega\tau}(E_\tau(S_{\omega\tau}(M))) = E_\tau(S_{\omega\tau}(M))$, además siempre se tiene $E_\tau(S_{\omega\tau}(M)) \leq E_\tau(M)$, luego se tiene la igualdad

$$S_{\omega\tau}(E_\tau(M)) = E_\tau(S_{\omega\tau}(M)).$$

Entonces, ya que $S_{\omega\tau}(E_\tau(M)) = Cl_\tau^{E_\tau(M)}(\oplus\{E_\tau(N_\alpha)/\alpha \in A_\omega\})$, se tiene que $\oplus\{E_\tau(N_\alpha)/\alpha \in A_\omega\}$ es τ-denso en $E_\tau(S_{\omega\tau}(M))$, y es claro que tambien es τ-quasi-inyectivo, luego por (2.4.24),

$$\mathrm{End}(S_{\omega\tau}(E_\tau(M))) = \mathrm{End}(\oplus\{E_\tau(N_\alpha)/\alpha \in A_\omega\}).$$

Vamos a estudiar la estructura de este último anillo. Llamamos E a un R-módulo isomorfo a $E_\tau(N_\alpha)$, y $\sigma_\alpha : E \longrightarrow E_\tau(N_\alpha)$ al isomorfismo. Definimos el siguiente morfismo de R-módulos

$$E \xrightarrow{\sigma_\alpha} E_\tau(N_\alpha) \xrightarrow{\rho_\alpha} \underset{\alpha}{\oplus} E_\tau(N_\alpha) \xrightarrow{f} \underset{\alpha}{\oplus} E_\tau(N_\alpha) \xrightarrow{\pi_\beta} E_\tau(N_\beta) \xrightarrow{\sigma_\beta^{-1}} E$$

donde ρ_α y π_β son los morfismos canónicos. Para casi todos los índices β, este endomorfismo es cero; supongamos que $0 \neq x \in E$, entonces

$$\sigma_\beta^{-1}\pi_\beta f \rho_\alpha \sigma_\alpha(x) = \sigma_\beta^{-1}\pi_\beta(x_{i_1} + \dots + x_{i_k})$$

y si $\beta \notin \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq A_\omega$, entonces el resultado es cero, luego $x \in \mathrm{Ker}(\sigma_\beta^{-1}\pi_\beta f \rho_\alpha \sigma_\alpha)$, y por ser E τ-crítico, ha de ser el morfismo cero, todo esto para $\beta \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Definimos entonces un espacio vectorial a la izquierda sobre el anillo de división

$S' = End(E)$, de dimensión $Card(A_\omega)$. Sea $\{e_\alpha / \alpha \in A_\omega\}$ una base de V sobre S'. Definimos $f' : V \longrightarrow V$ mediante.

$$(e_\alpha)f' = \sum_{\beta \in A_\omega} (\sigma_\beta^{-1} \pi_\beta f \rho_\alpha \sigma_\alpha) e_\beta .$$

Se tiene así una aplicación $f \longmapsto f'$, de $End(\oplus\{E\tau(N_\alpha)/\alpha \in A_\omega\})$ en $End_{S'}(V)$, que es un morfismo de anillos inyectivo y sobreyectivo.

(2.4.29) COROLARIO. Sea M un R-módulo libre de τ-torsión y τ-semicrítico, entonces $End(E_\tau(M))$ es isomorfo a un producto directo de anillos de endomorfismos de espacios vectoriales.

CAPITULO 3

RADICALES DE ANILLOS Y TEORIAS DE TORSION

3.1. τ-RADICAL.

A lo largo de este capítulo, una teoria de torsión es una teoría de torsión hereditaria y regular, salvo que es indique lo contrario.

(3.1.1) Si τ es una teoría de torsión, en (2.1.17) definimos el τ-radical de R como

$K_\tau(R) = \cap \{(0:M)/$ M es un R-módulo τ-crítico$\}$ y

$K_\tau(R) = R$ si no existen R-módulos τ-críticos.

En (2.1.24), demostramos que $K_\tau(R) = L_\tau(R)$, donde

$L_\tau(R) = \cap \{I/$ I es un ideal derecha τ-cocrítico$\}$ y

$L_\tau(R) = R$ si no existen ideales derecha τ-cocríticos.

(3.1.2) Si consideramos en el anillo $R/K_\tau(R)$ la teoria de torsión τ^* inducida por τ, entonces tenemos:

<u>LEMA</u>. $K_{\tau^*}(R/K_\tau(R)) = 0$.

<u>Demostración</u>. La teoria de torsión τ^* está estudiada en (1.3.19), y por (1.3.20), sabemos que para un $R/K_\tau(R)$-módulo M, son equivalentes: M es τ^*-crítico y M es τ-crítico, entonces de la igualdad

$$(0:M)_{R/K_\tau(R)} = (0:M)_R \big/ K_\tau(R)$$

se tiene $K_{\tau^*}(R/K_\tau(R)) = 0$.

(3.1.3) Vamos a extender la definición de radical a cada R-módulo M. Utilizando la igualdad de (3.1.1), definimos:

$K_\tau(M) = \cap\{N/\ N$ es un submódulo τ-cocrítico de $M\}$ y

$K_\tau(M) = M$, si M no contiene submódulos τ-cocríticos.

(3.1.4) <u>LEMA</u>. Sea M la clase de todos los R-módulos τ-críticos junto con el R-módulo cero, entonces $\underline{\underline{M}}$ define un radical r mediante:

$r(M) = \cap\{\mathrm{Ker}\ f/\ f:M \longrightarrow K$ es un epimorfismo con $K \in \underline{\underline{M}}\}$.

Además, $K_\tau(M) = r(M)$ y verifica $r(N) \leq N \cap r(M)$, para cada submódulo N de M.

<u>Demostración</u>. Evidentemente, $r(M) = K_\tau(M)$ y $r(M/r(M)) = 0$. Supongamos que $N \leq M$, si existe $f:M \longrightarrow K$ epimorfismo de R-módulos, con $K \in \underline{\underline{M}}$, y tal que $r(N) \nleq \mathrm{Ker}\ f$, entonces f induce un morfismo no nulo $g:N \longrightarrow K$, por tanto, su imagen es no nula y pertenece a $\underline{\underline{M}}$, luego $r(N) \leq \mathrm{Ker}\ g \leq \mathrm{Ker}\ f$, lo que es una contradicción.

(3.1.5) En Mod-R una <u>distribución</u> es una colección

$\Sigma = \{\Sigma_M/$ M es un R-módulo$\}$,

donde Σ_M es una familia de submódulos de M verificando:

1. Si $f:M \longrightarrow M'$ es un epimorfismo de R-módulos, enton- existe una biyección entre $\{N/\ N \in \Sigma_M$ y $\mathrm{Ker}\ f \leq N\}$ y $\Sigma_{M'}$, definida por $N \longmapsto f(N)$.

2. Si $T \leq M$, $N \in \Sigma_M$ y $T \cap N \neq T$, entonces $T \cap N \in \Sigma_T$.

(3.1.6) <u>LEMA</u>. Sea Σ una distribución, entonces $N \in \Sigma_M$ si, y solo si, $0 \in \Sigma_{M/N}$.

(3.1.7) <u>LEMA</u>.[25]. Sea Σ una distribución, entonces r definido

$r(M) = \cap\{N/\ N \in \Sigma_M\}$ y

$r(M) = M$ cuando Σ_M es vacia

es un radical que verifica $r(N) \leq N \cap r(M)$ para cada submódulo N de M.

Como consecuencia, r es un radical completo, esto es; si $N \leq M$ y $r(N) = N$, entonces $N \leq r(M)$.

(3.1.8) COROLARIO. [25]. Un R-módulo no nulo M es isomorfo a un producto subdirecto de R-módulos del tipo M/S, con $S \in \Sigma_M$ si, y solo si, $r(M) = 0$.

(3.1.9) Algunos ejemplos de distribuciones son los siguientes:

1. Sea τ una teoría de torsión hereditaria y regular, entonces si definimos $\Sigma_M = C_\tau(M)$, Σ es una distribución.

2. Para cada R-módulo M definimos $\Sigma_M = \{N / N$ es un submódulo irreducible$\}$, entonces Σ es una distribución. Un submódulo N de un R-módulo M se llama irreducible si M/N es un R-módulo uniforme.

3. Para cada R-módulo M definimos $\Sigma_M = \{N / N$ es un submódulo τ-cocrítico$\}$, siendo τ una teoría de torsión hereditaria y regular, entonces Σ es una distribución.

4. Para cada R-módulo M definimos $\Sigma_M = \{N / N$ es un submódulo irreducible y M/N es un R-módulo primo$\}$, entonces Σ es una distribución.

(3.1.10) Un submódulo N de un R-módulo M se llama modular a la derecha si existe $r \in R$ tal que para cada $x \in M$, se tiene $xr - x \in N$

(3.2.11) Consideramos ahora la teoría de torsión hereditaria y regular $\tau_{(R)}$, asociadas a ella tenemos las siguientes distribuciones:

$\Sigma^1_M = \{N / N$ es un submódulo $\tau_{(R)}$-cerrado de $M\}$,

$\Sigma^2_M = \{N / N$ es un submódulo $\tau_{(R)}$-cocrítico de $M\}$,

$\Sigma^3_M = \{N / N$ es un submódulo $\tau_{(R)}$-cocrítico y modular derecha de $M\}$,

Σ_M^4 = {N/ N es un submódulo $\tau_{(R)}$-cocrítico y maximal de M},

Σ_M^5 = {N/ N es un submódulo maximal y modular derecha de M}.

Llamamos r_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, al radical que determina la distribución Σ_M^i, entonces se tienen las siguientes relaciones:

$$r_1(M) \leq r_2(M) \leq r_4(M) \leq r_5(M) \quad y$$

$$r_2(M) \leq r_3(M) \leq r_5(M)$$

para cada R-módulo M.

(3.1.12) Cuando consideramos el anillo R, las distribuciones anteriores determinan ideales derecha de R, los cuales podemos relacionarlos con los radicales clásicos de teoría de anillos. Las relaciones establecidas en el apartado anterior, siguen siendo ciertas. Además, $r_1(R) \leq \beta(R)$, donde β es el radical de Baer, ya que si $r_1(R) = R$, entonces R es T-nilpotente, y existen ejemplos de anillos tales que $\beta(R) = R$ y no son T-nilpotentes. Tambien se verifica $r_2(R) \leq r_4(R) \leq J(R)$, donde J es el radical de Jacobson, aquí tambien tenemos que la igualdad no ha de verificarse en general. Por último, $r_3(R) \leq r_5(R) \leq B(R)$, donde B es el radical de Brown-McCoy, sabemos que $r_3 \neq r_5$, como demuestra el siguiente ejemplo, pero no sabemos que ocurre con r_5 y B, aunque según [2], lo más probable es que sean distintos.

(3.1.13) El siguiente ejemplo demuestra que $r_2 \neq r_4$ y $r_3 \neq r_5$.

EJEMPLO.

Consideramos el anillo $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}$, los únicos ideales $\tau_{(R)}$-cocríticos son H e I, donde

$$H = \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \\ 2\mathbb{Z}_4 & 2\mathbb{Z}_4 \end{pmatrix}$$

ya que es claro que $R/I \cong R/H$ es un R-módulo simple, y por tanto tiene la propiedad (R) y es $\tau_{(R)}$-crítico. H es un ideal modular a la derecha, ya que $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ verifica que para cada $x \in R$ se tiene $x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} - x \in H$, pero I no es modular a la derecha, entonces tenemos las siguientes igualdades:

$$r_2(R) = r_4(R) = H \cap I$$

$$r_3(R) = r_5(R) = H \neq R.$$

(3.1.14) En [24],de la Rosa define ideal quasi-semi-primo, como una generalización de ideal semiprimo, y estudia el anillo de matrices de un anillo. Un ideal quasi-semi-primo es un ideal bilátero que es $\tau_{(R)}$-cerrado a izquierda y derecha, vamos a generalizar los resultados de de la Rosa, estudiando ideales derecha $\tau_{(R)}$-cerrados.

(3.1.15) Consideramos $\underline{\underline{T}}$ la clase de todos los anillos tales que el retículo de ideales derecha $\tau_{(R)}$-cerrados, coincida con el retículo de todos los ideales derecha.

<u>PROPOSICION</u>. $\underline{\underline{T}}$ es una clase radical.

<u>Demostración</u>. 1. $\underline{\underline{T}}$ es cerrada para cocientes. Sea $R \in \underline{\underline{T}}$ y A un ideal bilátero de R, si I/A es un ideal derecha de R/A y $r \in R$ verifica $\bar{r}\,(R/A) \leq I/A$, entonces $rR \leq I$ y $r \in I$, luego $\bar{r} \in I/A$.

2. $\underline{\underline{T}}$ es cerrada para extensiones. Sea

$$0 \longrightarrow R' \longrightarrow R \xrightarrow{\pi} R'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de anillos, con $R', R'' \in \underline{\underline{T}}$, si I es un ideal derecha de R y $r \in R$ verifica $rR \leq I$, entonces $\pi(r)\pi(R) \leq \pi(I)$, por tanto $\pi(r) \in \pi(I)$, y existen $r' \in R'$ y $x \in I$ tales que $r = r'+x$. Se tiene $r'R = (r - x)R \leq rR + xR \leq I$. Si $I \cap R' = 0$, entonces $r'R' \leq I \cap R' = 0$, y $r' = 0$, entonces $r = x \in I$. Si $I \cap R' \neq 0$, entonces $r'R' \leq I \cap R'$, y $r' \in I \quad R'$, luego $r \in I$.

3. $\underline{\underline{T}}$ es inductiva. Sea

$$R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_\alpha \leq \dots$$

una cadena creciente de ideales de un anillo R tal que $R_\alpha \in \underline{\underline{T}}$, entonces si I es un ideal derecha del anillo $S = \cup \{R_\alpha / \alpha \in A\}$, y $r \in S$ verifica $rS \leq I$, entonces existe $\alpha \in A$ tal que $r \in R_\alpha$, luego se tiene $rR_\alpha \leq R_\alpha$ I, y por tanto $r \in I$.

Un anillo R pertenece a la clase $\underline{\underline{T}}$ si y solo si para cada ideal derecha I de R se tiene IR = I.

(3.1.16) LEMA. Sea I un ideal dcha de R, $xR=0 \Rightarrow x=0$, entonces I es $\tau_{(R)}$-cerrado en R si, y solo si, $(I_n)^i$ es un ideal dcha, $\tau_{(R)}$-cerrado, donde $(I_n)^i$ es el conjunto de matrices con cero en todo lugar, salvo posiblemente en la fila i, cuyos coeficientes pertenecen a I.

Demostración.

" $\Longrightarrow$ ". Sea $(a_{ij}) \in R_n$ tal que $(a_{ij})R_n \leq (I_n)^i$, si $(a_{ij}) \notin (I_n)^i$, entonces, existe k tal que $a_{ik} \notin I$, ó existen h y k, $h \neq i$, tales que $a_{hk} \neq 0$. En el primer caso, por ser I $\tau_{(R)}$-cerrado, existe $r \in R$ tal que $a_{ik}r \notin I$, luego $(a_{ij})x \notin (I_n)^i$, lo que es una contradicción. En el segundo caso, podemos multiplicar (a_{ij}) por cada elemento de R, obteniendo $a_{hk}R = 0$, luego $a_{hk} = 0$, lo que es una contradicción.

" $\Longleftarrow$ ". Supongamos que $(I_n)^i$ es $\tau_{(R)}$-cerrado en R_n, y $a \in R$ tal que $aR \leq I$, entonces $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a & \dots & a \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} R_n \leq (I_n)^i$, luego $a \in I$.

Hemos llamado x a la matriz diag{x, ... , x}.

(3.1.17) LEMA. Sea J un ideal derecha de R_n, entonces los conjuntos

$$J^{(i)} = \{a_{1j} / (a_{ij}) \in J\}$$

son ideales derecha de R.

(3.1.18) <u>TEOREMA</u>. Los ideales derecha del anillo R_n son de la forma $(I_{1n})^1 + (I_{2n})^2 + \dots + (I_{nn})^n$, donde I_i, $i = 1, 2, \dots, n$, es un ideal derecha de R, si y solo si $R \in \underline{\underline{T}}$.

<u>Demostración</u>.

"$\Longrightarrow$". Sea I un ideal derecha de R, entonces consideramos el siguiente ideal derecha de R_n

$$I' = \begin{vmatrix} I & IR & IR & \dots & IR \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

entonces I' debe ser de la forma $(I_n)^1$, y por tanto $IR = I$, luego $R \in \underline{\underline{T}}$.

"$\Longleftarrow$". Sea J un ideal derecha de R_n, podemos suponer que J tiene cero las filas $2, 3, \dots, n$, Por el lema (3.1.17), $J^{(1)}$ es un ideal derecha de R. Sea $(a_{ij}) \in J$, entonces

$$(a_{ij}) \begin{array}{c} \qquad\quad j \\ \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & r & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} a_{1j}r & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

para cada $r \in R$, luego $a_{1j}R \le J^{(1)}$, y por tanto $a_{1j} \in J^{(1)}$, luego $J = (J_n^{(1)})^1$.

(3.1.19) <u>COROLARIO</u>. El anillo $R_n \in \underline{\underline{T}}$ si, y solo si, $R \in \underline{\underline{T}}$.

3.2. MODULOS PRIMOS Y TEORIAS DE TORSION

(3.2.1) Un R-módulo M se llama <u>primo</u> si verifica las condiciones siguientes:

1. $MR \neq 0$.
2. Si $0 \neq m \in M$ y A es un ideal bilátero de R tal que $mA = 0$. entonces $A \leq (0:M)$.

(3.2.2) <u>LEMA</u>. Para un R-módulo M verificando $MR \neq 0$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. M es primo.
2. Para todo $0 \neq m \in M$ y para todo $r \in R$, si $mRr = 0$, entonces $r \in (0:M)$.
3. Para todo $0 \neq m \in M$ y para todo $r \in R$, si $mR_1r = 0$, entonces $r \in (0:M)$.
4. Para todo $0 \neq N \leq M$ se tiene $(0:N) = (0:M)$.

<u>Demostración</u>.[21, theorem 1.3].

(3.2.3) Un ideal bilátero A de R, $A \neq R$, se llama <u>primo</u> si verifica para cada par de ideales biláteros B y C de R que $BC \leq A$, implica $B \leq A$ ó $C \leq A$.

(3.2.4) <u>LEMA</u>. Sea A un ideal bilátero de R, $A \neq R$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. A es un ideal primo.
2. Para todo $a, b \in R$ tal que $aRb \leq A$, se tiene $a \in A$ ó $b \in A$.
3. Para todo $a, b \in R$ tal que $aR_1b \leq A$, se tiene $a \in A$ ó $b \in A$.

4. Para todo a, b ε $R \setminus A$, existe r ε R tal que arb ε $R \setminus A$.

<u>Demostración</u>. Unicamente vamos a demostrar $3 \Longrightarrow 1$.

Sean B, C ideales biláteros de R tales que $BC \leq A$, si $B \nleq A$, entonces existe $b \in B \setminus A$, para cada $x \in C$, se tiene $bR_1x \leq A$, luego $x \in A$, y por tanto, $C \leq A$.

(3.2.5) <u>LEMA</u>. Si M es un R-módulo primo, entonces (O:M) es un ideal bilátero primo.

<u>Demostración</u>. Sean B y C ideales biláteros de R tales que $BC \leq (O:M)$, entonces, para cada $O \neq m \in M$, se tiene $mBC = O$, si $mB = O$, entonces $B \leq (O:M)$, si $mB \neq O$, entonces, existe $O \neq x \in mB$ tal que $xC = O$, luego $C \leq (O:M)$.

(3.2.6) Un ideal derecha I de R, $I \neq R$, se llama <u>primo</u> si para todo par de ideales derecha J y K de R, tales que $JK \leq I$, se tiene $J \leq I$ ó $K \leq I$.

(3.2.7) <u>LEMA</u>. Sea I un ideal derecha de R, $I \neq R$, los siguientes enunciados son equivalentes:

1. I es un ideal derecha primo.

2. Para todo a, b ε R tales que $aRb \leq I$, se tiene $a \in I$ ó $b \in I$.

3. Para todo a, b ε R tales que $aR_1b \leq I$, se tiene $a \in I$ ó $b \in I$.

4. Para todo a, b ε $R \setminus I$, existe r ε R tal que arb ε $R \setminus I$.

<u>Demostración</u>.

$1 \Longrightarrow 3$. Supongamos que $aR_1b \leq I$, entonces $aR_1bR_1 \leq I$ y por tanto $aR_1 \leq I$ ó $bR_1 \leq I$, luego $a \in I$ ó $b \in I$.

$3 \Longrightarrow 2$. Supongamos que $aRb \leq I$ y que $a \notin I$. Si $aR_1b \leq I$, entonces $b \in I$. Si $aR_1b \nleq I$, entonces existe $s \in R_1$ tal que $asb \notin I$, consideramos $asbR_1b$, se tiene $asbR_1b \leq aRb \leq I$, luego $b \in I$.

2 ⟹ 4. Sean a, b ε $R\setminus I$, si aRB $\leq$ I, entonces a ε I ó b ε I, lo que es una contradiccion. por tanto existe r ε R tal que arb ε $R\setminus I$.

4 ⟹ 1. Sean J y K ideales derecha de R tales que JK $\leq$ I, si J $\not\leq$ I, entonces existe x ε $J\setminus I$, y se tiene xRy $\leq$ I para cada y ε K, luego y ε I, y por tanto se tiene K $\leq$ I.

(3.2.8) Un ideal derecha I de R se llama <u>modular</u>, si existe e ε R tal que ex - x ε I para cada x ε R.

(3.2.9) Un ideal derecha I de R, I $\neq$ R, se llama <u>quasi-modular</u>, si (I:R) $\leq$ I, ó equivalentemente, si I^* = (I:R).

(3.2.10) <u>LEMA</u>. Todo ideal derecha primo de R es quasi-modular.

<u>Demostración</u>. Siempre se verifica que R(I:R) $\leq$ I, luego, ya que I $\neq$ R, se tiene (I:R) $\leq$ I.

(3.2.11) <u>LEMA</u>. Si I es un ideal derecha, son equivalentes:

1. I es un ideal primo.
2. R/I es un R-módulo primo.

<u>Demostración</u>.

1 ⟹ 2. Sea r ε $R\setminus I$ tal que rA $\leq$ I para un ideal bilátero A de R entonces rRA $\leq$ I, y por tanto A $\leq$ I, ya que I es quasi-modular se tiene A $\leq$ (I:R).

2 ⟹ 1. Sean a, b ε R tales que aRb $\leq$ I, entonces se tiene a ε I ó b ε (O:R/I) = (I:R), y ya que R^2 $\not\leq$ I, existe x ε $R\setminus(I:R)$, entonces bRx $\leq$ I, y por tanto b ε I.

(3.2.12) <u>COROLARIO</u>. Si I es un ideal derecha primo de R, entonces I^* es un ideal primo bilátero.

(3.2.13) <u>LEMA</u>. Si I es un ideal derecha primo, entonces para cada x ε $R\setminus I$,el ideal (I:x) es un ideal derecha primo.

<u>Demostración</u>. Supongamos que (I:x) = R, entonces, ya que R $\neq$ I, existe y ε R I, entonces xRy $\leq$ I, y se tiene x ε I, lo que es una

contradicción. Sean J y K ideales derecha de R tales que $JK \leq (I:x)$, entonces $xJK \leq I$ y $(xJ)(RK) \leq I$, por tanto $xJ \leq I$ ó $RK \leq I$, luego $J \leq (I:x)$ ó $K \leq (I:x)$.

(3.2.14) <u>LEMA</u>. Sea M un R-módulo primo, si $0 \neq m \in M$, entonces $(0:m)$ es un ideal derecha primo.

<u>Demostración</u>. Supongamos que $a, b \in R$ verifican $aRb \leq (0:m)$, entonces $maRb = 0$, y $ma = 0$ ó $b \in (0:M)$, luego $a \in (0:m)$ ó $b \in (0:m)$.

(3.2.15) <u>LEMA</u>. Sea A un ideal bilátero, entonces A es un ideal primo si, y solo si, $A = (I:R)$ para algún ideal derecha I de R primo.

<u>Demostración</u>. "$\Longrightarrow$". Es inmediata.

"$\Longleftarrow$". Sea I un ideal derecha primo, por (3.2.12), $(R:I)$ es un ideal primo, luego si $A = (I:R)$, entonces A es un ideal bilátero primo.

(3.2.16) <u>LEMA</u>. Todo ideal derecha primo es $\tau_{(R)}$-cerrado.

<u>Demostración</u>. Sea I un ideal derecha primo y $a \in R$ verificando $aR \leq I$, entonces, ya que $I \neq R$, existe $x \in R \setminus I$, entonces $aRx \leq I$, y por tanto $a \in I$.

(3.2.17) Un submódulo N de un R-módulo M se llama <u>primo</u> si M/N es un R-módulo primo.

(3.2.18) <u>PROPOSICION</u>. Sea τ una teoría de torsión, definimos

$$\Sigma_M = \{N/\ N \text{ es un submódulo } \tau\text{-cerrado y primo de } M\}.$$

Entonces Σ es una distribución.

<u>Demostración</u>. 1. Sea $f:M \longrightarrow M'$ un epimorfismo y $N \in \Sigma_M$, tal que $\mathrm{Ker}\, f \leq N$, entonces $f(N) = N/\mathrm{Ker}\, f$, y por tanto es τ-cerrado y primo, luego $f(N) \in \Sigma_{M'}$, la biyección es obvia.

2. Sea $T \leq M$, y $N \in \Sigma_M$, si $T \cap N \neq T$, entonces por

$$T/(T \cap N) \cong (T + N)/N \leq M/N,$$

$T/(T \cap N)$ es libre de τ-torsión, y como es un submódulo de un R-módulo primo, tambien es primo, luego $T \cap N \in \Sigma_T$.

Consecuencias inmediatas de los lemas anteriores son:

1. Si $N \in \Sigma_M$, entonces $(M:N)$ es un ideal τ-cerrado y primo.

2. Si llamamos r al radical que determina Σ, entonces un anillo R con un R-módulo fiel M tal que $r(M) = 0$ es semiprimo y libre de τ-torsión.

Una distribución de este tipo fué estudiada por Feller y Swokowski en "Prime modules" y "Semi-prime modules", considerando como teoria de torsión la teoria de torsión de Goldie.

((3.2.19) Si consideramos

$$\Sigma_R = \{A/\ A \text{ es un ideal bilátero } \tau_{(R)}\text{-crítico}\},$$

entonces $r(R)$, definido como en (3.1.7) es una intersección de ideales completamente primos, ya que si $a, b \in R$ y $A \in \Sigma_R$ verifican $ab \in A$, entonces si $a \notin A$, definimos $I = aR + A$, y se tiene que R/I es $\chi(R/A)$-torsión, por (1.4.6). Entonces el morfismo $f: R/I \longrightarrow R/A$, definido por $f(\overline{r}) = \overline{br}$, es el morfismo cero, luego $bR \leq A$, como R/I verifica la propiedad (R), se tiene que $b \in A$. Se verifica entonces la siguiente relación; $\beta(R) \leq r(R)$ para cada anillo R.

Como consecuencia, si $r(R) = 0$, entonces R es un producto subdirecto de anillos R/A, donde $A \in \Sigma_R$, además estos anillos son dominios de integridad y son dominios de Ore a la derecha, ya que A es un ideal irreducible de R.

(3.2.20) Vamos ahora a introducir un radical de anillos.

Una <u>clase especial de módulos</u>, es una familia

$$\Delta = \{\Delta_R/\ R \text{ es un anillo}\},$$

donde Δ_R es una clase de R-módulos primos verificando:

1. $M \in \Delta_A$ y A es un ideal bilátero de R, entonces $MA \in \Delta_R$.

2. $M \in \Delta_R$ y A es un ideal bilátero de R, tal que $MA \neq 0$, entonces $M \in \Delta_A$.

3. $M \in \Delta_R$ y A es un ideal bilátero de R tal que $A \leq (0:M)$, entonces $M \in \Delta_{R/A}$.

4. $M \in \Delta_{R/A}$ con A un ideal bilátero de R, entonces $M \in \Delta_R$.

(3.2.21) TEOREMA. La clase Δ, definida por

$$\Delta_R = \{M/ \text{ M es un R-módulo crítico y primo}\}$$

es una clase especial de módulos.

Demostración.

1. Sea $x \in MA$ tal que $xR = 0$, entonces $xA = 0$, y por tanto $x = 0$; luego MA verifica la propiedad (R). Sea $0 \neq N \leq N' \leq MA$ una cadena de R-submódulos, evidentemente tambien son A-submódulos de M, si $f:N' \longrightarrow MA$ es un morfismo de R-módulos, tambien $f:N' \longrightarrow M$ es un morfismo de A-módulos, si $f(N) = 0$, entonces $f = 0$, y MA es extension MA-racional de cada uno de sus submódulos, luego es crítico, evidentemente tambien es primo, [78].

2. Sea $x \in M$ tal que $xA = 0$, por ser M un R-módulo primo, se tiene $x = 0$ ó $A \leq (0:M)$, como $MA = 0$, necesariamente se tiene $x = 0$, y M verifica la propiedad (R). Sea $0 \neq N \leq N' \leq M$ una cadena de A-submódulos de M y $f:N' \longrightarrow M$ un morfismo de A-módulos tal que $f(N) = 0$, entonces $\bar{f}:N'A \longrightarrow MA$ es un morfismo de R-módulos, y por tanto, ya que si $f(N) = 0$, entonces $\bar{f}(NA) = 0$, se tiene que $\bar{f} = 0$, entonces $f(N'S) = 0$ y $f(N')A = 0$, por ser M un R-módulo primo, se tiene $f(N')$ es cero ó $A \leq (0:M)$, por tanto necesariamente $f = 0$. Evidentemente M es un A-módulo primo.

3. Sea $x \in M$ tal que $x(R/A) = 0$, entonces $xR = 0$ y se tiene $x = 0$, luego M verifica la propiedad (R). Sea $0 \neq N \leq N' \leq M$ una cadena de R/A-submódulos de M, si $f:N' \longrightarrow M$ es un morfismo de R/A-módulos, verificando $f(N) = 0$, entonces, ya que tambien es un morfismo de R-módulos, se tiene $f = 0$. Evidentemente, M es un R/A-módulo primo.

4. Sea $x \in M$ tal que $xR = 0$, entonces $x(R/A) = 0$ y $x = 0$, luego M verifica la propiedad (R). Sea $0 \neq N \leq N' \leq M$ una cadena de R-submódulos de M, si $f: N' \longrightarrow M$ es un morfismo de R-módulos, entonces, ya que tambien es un morfismo de R/A-módulos, se tiene si $f(N) = 0$ que $f = 0$, luego M es extensión M-racional de cada uno de sus R-submódulos no nulos, por tanto crítico, evidentemente es un R-módulo primo.

(3.2.22) Entonces definiendo el radical de cada anillo como

$$\Delta(R) = \cap \{(0:M)/ \ M \in \Delta_R\},$$

tenemos que $\{R/ \ \Delta(R) = R\}$ es una clase radical especial de anillos. Ver [78].

(3.2.23) Procediendo en forma análoga que para K_τ, tenemos que:

$$\Delta(R) = R \cap \Delta(R_1) \text{ y}$$

$$\Delta(R) = \cap \{I/ \ I \text{ es un ideal derecha cocrítico y primo}\}.$$

B I B L I O G R A F I A

1. AMITSUR, S. A.
General theory of radicals. II. Amer. J. Math., 74, 100-125, 1.954.

2. ANDRUNAKIEVICH, A. V.; ANDRUNAKIEVICH, V. A.
Strictly modular ideals of a ring. Soviet Math. Dokl., 23, 203-206, 1.981.

3. ANDRUNAKIEVICH, A. V.; ANDRUNAKIEVICH, V. A.
One-sided ideals and radicals of rings. Algebra i Logika, 20, 489-510, 1.981.

4. ANDRUNAKIEVICH, V. A.; RJABUHIN, Ju. M.
Modules and radicals. Soviet Math. Dokl., 5, 728-731, 1.964.

5. BASS, H.
Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings. Trans. Amer. Math. Soc., 95, 466-488, 1.960.

6. BAUMONT, S.
Modules non unitaires: notion de module Σ-injectif, module Σ-quasi-injectif, Σ-condition de Baer, Σ-complement, Σ-dimension. C.R. Acad. Sci. Paris, 268, 8-10, 1.969.

7. BEHRENS, E.-A.
Ring theory. Academic Press. New York. 1.972.

8. BENANDER, B. A.
Torsion theory and modules of finite length. Ph.D. Thesis, 1.980. Kent State Univ.

9. BICAN, L.; KEPKA, T.; NĚMEC, P.
Rings, modules and preradicals. Marcel Dekker. New York. 1.982.

10. BLAND, P. B.; RILEY, S.
Density relative to a torsion theory. Proc. Amer. Math. Soc., 82, 527-532, 1.981.

11. BOYLE, A. K.; FELLER, E. H.
α-injectives and the semicritical socle series. Por aparecer en Comm. Algebra.

12. BOYLE, A. K.; SERVEN, R. J.
Krull dimension and torsion radicals. Por aparecer en Bull. Austr. Math. Soc.

13. BUESO, J. L.; JARA, P.
A generalization of semicritical modules. Por aparecer.

14. BUESO, J. L.; JARA, P.
Loewy series relative to a torsion theory. Por aparecer.

15. BUESO, J. L.; JARA, P.
A generalization of semisimple modules. Presentado en el NATO Advances Study Institute "Methods in Ring Theory", celebrado en la universidad de Amberes en agosto de 1.983.

16. CARREAU, F.
Sous-categories réflexives et la théorie générale des radicaux. Fund. Math., 71, 223-242, 1.971.

17. CHEW, K. L.
Closure operations in the study of rings of quotients. Bull. Math. Soc. Nanyag Univ., 1, 1-20, 1.965.

18. DAUNS, J.
One sided prime ideals. Pacific J. Math., 47, 401-412, 1.973.

19. DAUNS, J.
Quotient rings and one sided primes. J. Reine Angew. Math., 278/279, 205-224, 1.975.

20. DAUNS, J.
Generalized monoform and quasi-inyectives modules. Pacific J. Math., 66, 49-65, 1.976.

21. DAUNS, J.
Prime modules. J. Reine Angew. Math., 298, 156-181, 1.978.

22. DAUNS, J.
Uniform modules and complements. Houston J. Math., 6, 31-40, 1.980.

23. DAUNS, J.
Sums of uniform modules. En "Advances in non-commutative ring theory", Lect. Notes in Math., 951. Springer. 1.982.

24. de la ROSA, B.
Ideals and radicals. Ph. D. Thesis, 1.970. Univ. Delft.

25. de la ROSA, B.
Concrete radicals in general modules. Publ. Math. Debrecen, 27, 7-12, 1.980.

26. DESALE, G.; NICHOLSON, W. K.
Endoprimitive rings. J. Algebra, 70, 548-560, 1.981.

27. DESHPANDE, M. G.; FELLER, E. H.
The Krull radical. Comm. Algebra, 3, 185-193, 1.975.

28. DICKSON, S. E.
A torsion theory for abelian categories. Trans. Amer. Math. Soc., 121, 223-235, 1.966.

29. DIVINSKY, N. J.
Rings and radicals. Allen. London. 1.965.

30. FORT, J.
Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module. Math. Z., 103, 363-388, 1.968.

31. FUCHS, L.
Torsion preradicals and ascending loewy series of modules. J. Reine Angew. Math., 239/240, 169-179, 1.969.

32. FAITH, C.; UTUMI, Y.
Quasi-inyective modules and their endomorphism rings. Arch. Math., 15, 166-174, 1.964.

33. FAITH, C.; UTUMI, Y.
Baer modules. Arch. Math., 15, 266-270, 1.964.

34. GARDNER, B. J.
Some aspects of T-nilpotence. Pacific J. Math., 53, 117-130, 1.974.

35. GARDNER, B. J.
Some aspects of T-nilpotence II: Lifting properties over T-nilpotent ideals. Pacific J. Math., 59, 445-453, 1.975.

36. GOLAN, J. S.
Localization of noncommutative rings. Marcel-Dekker, New York, 1.976.

37. GOLDIE, A. W.
The structure of prime rings under ascending chain conditions. Proc. London Math. Soc., 8, 589-608, 1.958.

38. GOLDIE, A. W.
Semiprime rings with maximum condition. Proc. London math. Soc., 10, 201-220, 1.960.

39. GOLDIE, A. W.
The structure of noetherian rings. En "Lectures on Rings and Modules". Lect. Notes in Math., 246. Springer, Berlin, 1.972.

40. GOLDMAN, O.
Rings and modules of quotients. J. Algebra, 13, 10-47, 1.969.

41. GOODEARL, K. R.
Ring theory. Nonsingular rings and modules. Marcel Dekker, New York, 1.976.

42. GORDON, R.; ROBSON, J. C.
Krull dimension. Memoirs Amer. Math. Soc., 133. 1.973.

43. GRAY, M.
A radical approach to algebra. Addison-Wesley. London. 1.970.

44. HUDRY, A.
Sous-modules Σ-clos. C. R. Acad. Sci. Paris, 267, 789-791, 1.968.

45. HUDRY, A.
Aplications de la théorie de la localisation aux anneaux et aux modules. Thése 3ème cycle. Univ. Lyon. 1.970.

46. JACOBSON, N.
Structure of rings. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ, 37. 1.968.

47. JOHNSON, R. E.
Structure theory of faithful rings. Trans. Amer. Math. Soc., 84, 508-522. 1.957.

48. JOHNSON, R. E.
The extender centralizer of a ring over a module. Proc. Amer. Math. Soc., 2, 891-895, 1.951.

49. KASHU, A. I.
Closed classes of left Λ-modules and closed sets of left ideals of the ring Λ. Mat. Zametki, 5, 381-390, 1.969.

50. KELLETT, J. M.
A torsion theory for modules over rings without identities. Ph. D. Thesis, 1.968, Univ. Florida.

51. KEZLAN, T. P.
On K-primitive rings. Proc. Amer. Math. Soc., 74, 24-28, 1.979.

52. KOH, K.
Quasi-simple modules and other topics in ring theory. En "Lectures on Rings and Modules". Lect. Notes in Math., 246. Springer. Berlin. 1.972.

53. KOH, K.; MEWBORN, A. C.
The weak radical of a ring. Proc. Amer. Math. Soc., 18, 554-559, 1.967.

54. LAMBEK, J.
Lectures on rings and modules. Chelsea. New York. 1.976.

55. LAU, W. G.
Torsion theoretic generalization of semisimple modules. Ph. D. Thesis, 1.980. Univ. Wisconsin-Milwaukee.

56. LOUDEN, K.
Torsion theories and ring extensions. Comm. Algebra., 4, 503-532, 1.976.

57. MEWBORN, A. C.
Quasi-simple modules and weak transitivity. En "Ring theory: Park City". Academic Press. New York. 1.972.

58. MILLER, R. W.; TEPLY, M. L.
The descending chain condition relative to a torsion theory. Pacific J. Math., 83, 207-219, 1.979.

59. NĂSTĂSESCU, C.
Inele. Module. Categorii. Ed. Academii Rep. Soc. Rom. Bucureşti. 1.976.

60. NĂSTĂSESCU, C.
Semiartinian rings. Stud. Cerc. Mat., 22, 1435-1507, 1.970.

61. NĂSTĂSESCU, C.
La structure des modules par rapport à une topologie additive. Tôhoku Math. J., 26, 173-201, 1.974.

62. NĂSTĂSESCU, C.
Modules injectifs de tipe fini par rapport à une topologie additive. Comm. Algebra, 9, 67-79, 1.981.

63. NĂSTĂSESCU, C.; POPESCU, N.
Anneaux semi-artiniens. Bull. Soc. Math. France, 96, 357-368, 1.968.

64. NICHOLSON, W. K.; WATTERS, J. F.
The strongly prime radical. Proc. Amer. Math. Soc., 76, 235-240, 1.979.

65. NICHOLSON; W. K.; WATTERS, J. F.
Normal radicals and normal classes of rings. J. Algebra, 59, 5-15, 1.979.

66. NICHOLSON, W. K.; WATTERS, J. F.
Normal classes of prime rings determined by modules. Proc. Amer. Math. Soc., 83, 27-30, 1.981.

67. NICHOLSON, W. K.; WATTERS, J. F.; ZELMANOWITZ, J.
On extensions of weakly primitive rings. Canad. J. Math., 32, 937-944, 1.980.

68. ORTIZ, A. H.
On the structure of semiprime rings. Proc. Amer. Math. Soc., 38, 22-26, 1.973.

69. OSŁOWSKI, B. J.
On the H and K radicals. Comm. Algebra, 9, 313-322, 1.981.

70. OSŁOWSKI, B. J.
A negative answer to three question on K-primitive rings. Proc. Amer. Math. Soc., 84, 33-34, 1.982.

71. R.-GRANDJEAN, A.; GOMEZ PARDO, J. L.
Radicales y polaridad. Collect. Math., 25, 245-254, 1.974.

72. SASIADA, E.; COHN, P. M.
An example of a simple radical ring. J. Algebra, 5, 373-377, 1.967.

73. SCHELTER, W.; SMALL, L. W.
Some pathological rings of quotients. J. London Math. Soc., (2), 14, 200-202, 1.976.

74. SHORES, T. S.
The structure of Loewy modules. J. Reine Angew. Math., 254, 203-220, 1.972.

75. SHORES, T. S.
Loewy series of modules. J. Reine Angew. Math., 265, 183-200, 1.974.

76. STORRER, H. H.
Rational extensions of modules. Pacific J. Math., 38, 785-794, 1.971.

77. STORRER, H. H.
On Goldman's primary decomposition. En "Lectures on Rings and Modules". Lect. Notes in Math., 246. Springer. Berlin. 1.972.

78. SZASZ, F. A.
Radicals of rings. John Wiley & Sons. Chichester. 1.981.

79. TUCCI, R. P.
Krull dimension and the Krull radical in arbitrary rings. Por aparecer.

80. WIEGANDT, R.
Radical and semisimple classes of rings. Queen's Paper in Pure and Applied Math., no.37. Queen's Univ.. Kingston. Ontario. 1.974.

81. ZELMANOWITZ, J.
Weakly primitive rings. Comm. Algebra, 9, 23-45, 1.981.

82. STENSTRÖM, B.
Rings of quotients. Springer. Berlin. 1.975.

83. TEPLY, M. L.
Torsionfree modules and the semicritical socle series. Notas manuscritas.

ALXEBRA

1. MONTERO LOPEZ, M. Categorías I. (1967).
2. VILLANUEVA NOVOA, E. Funtor envolvente o de capas inyectivas en M_R. (1969).
3. GOMEZ PARDO, J.L. Introducción a las categorías abelianas. (1970).
4. R-GRANJEAN L-VALCARCEL, A. Homología en categorías exactas. (1970).
5. CARUNCHO CASTRO, J.R. Teoría de triples. (1971).
6. TOUZON PEREZ, C. Homología y funtores derivados. (1971).
7. UBEDA BESCANSA, L. Teorema homológico de J. Lambek en una categoría hofmaniana. (1971).
8. VIÑA ESCALAR, A. Extensiones esenciales. (1971).
9. GOMEZ PARDO,J.L. Teorías de torsión en categorías exactas. (1972).
10. ALMUIÑA LOEDA, J. Aplicación de Euler-Poincaré en G-categorías.
    LORENZO MUIÑIZ, R. Lemas clásicos en γ-categorías. (1972).
11. FREIRE NISTAL, J.L. Propiedades universales en triples de grado superior. (1972).
12. VIÑA ESCALAR, A. Localización. (1973).
13. AMARO CAAMAÑO, B. Teorema del coeficiente universal para cohomología.
    HOSPIDO RODRIGUEZ, J.L. Nociones de tripleabilidad.
    LOPEZ PIÑEIRO, F. Categorías de conjuntos con filtro. (1973).
14. UBEDA BESCANSA, L. Invariantes de Lambek en categorías hofmanianas.
    R-GRANJEAN L- VALCARCEL, A. Pares exactos y sucesiones espectrales. (1974).
15. LABORDA GONZALEZ, M.J. Teoría de esquemas: Teoría local.
    RODRIGUEZ GONZALEZ, N. Teoría global. (1974).
16. CASTRO PERALTA, E. Introducción a los anillos de Witt.
    RODRIGUEZ GONZALEZ, M.A. Anillos de Witt y formas de Pfister. (1976).
17. LOPEZ LOPEZ, M.A. Algebras de Hopf respecto a un cotriple. (1976).

18. FRANCO FERNANDEZ, L. Formaciones de Fitting en una categoría de Burgin. (1976).
19. ROBRIGUEZ GONZALEZ, N. Preinteriores, resolubilidad y nilpotencia en categorías. (1977).
20. BARJA PEREZ, J.M. Teoremas de Morita para triples en categorías cerradas. (1978).
21. VALE GONSALVES, M.J. Cohomología de grupos y álgebras de Lie. RODRIGUEZ FERNANDEZ, C. Teoría general de variedades. (1978).
22. BARJA PEREZ, J. Algebras universales en el cálculo de proposiciones. (1978).
23. TARAZONA FERRER, D. Homología respecto a una variedad de álgebras de Lie. (1978).
24. MARTINEZ CEGARRA, A. Homología y triples. (1978).
25. LOPEZ LOPEZ, M.P. Objetos de Galois sobre un álgebra de Hopf finita. (1980).
26. Trabajos sobre triples. (1980).
27. GONZALEZ DORREGO, M.R. Producto de formaciones en categorías de Burgin. (1980).
28. RODRIGUEZ FERNANDEZ, C. Invariantes de Baer y cohomología en variedades de Ω-grupos. (1980).
29. JARA MARTINEZ, P. (G,n)-Extensiones especiales en la cohomología de grupos. (1980).
30. BUESO MONTERO, J.L. Invariantes de Baer en una categoría de Kurosh. (1980).
31. TORRECILLAS JOVER, B. Haz estructura sobre el espectro de un anillo no conmutativo. (1980).
32. MARTINEZ CEGARRA, A. Cohomología varietal. (1980).
33. AZNAR GARCIA, E.R. Cohomología no abeliana en categorías de interés. (1981).
34. BULLEJOS LORENZO, M. Algebra homológica relativa en categorías abelianas. (1982).
35. FERNANDEZ RODRIGUEZ, R.M. Categorías fibradas y funtores algebraicos. (1982).
36. BAHAMONDE RIONDA, A. Mínima realización para máquinas en una categoría. (1982).
37. VALE GONSALVES, M.J. Torsores, extensiones y cohomología. (1982).

38. BLANCO FERRO, A.A. Teorías de Descenso en Categorías Cerradas.

39. LADRA GONZALEZ, M. Módulos Cruzados y Extensiones de Grupos.