R. 31.593

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS
SALIDA N.º 136
Fecha 31 ENE. 1986

COHOMOLOGIA NO ABELIANA

(La sucesión exacta larga)

Por

Manuel Bullejos Lorenzo

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento b1336442x
Nº Copia 10303469

Memoria realizada en el Departamento de Algebra y Fundamentos de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada , bajo la dirección del profesor Dr. Enrique R. Aznar Garcia, titular de Algebra en esta Universidad, para obtener el grado de Doctor en Ciencias sección Matemáticas, por la Universidad de Granada.

Vº Bº

El Director

E. Aznar

Aspirante al grado de doctor

Parte de esta investigación ha sido realizada gracias a una beca del Comité Conjunto Hispano – Norteamericano para la Cooperación cultural y Educativa.

1

60

Tesis doctoral dirigida por el Dr. D. Enrique Rafael Aznar Garcia, Profesor titular de Algebra de la Universidad de Granada, y defendida el dia 20 de Diciembre de 1.985, ante el tribunal formado por los profesores A. Rodriguez-Granjean Lopez-Valcarcel; V. Varea Agudo; J. Otal Cinta; J. Duskin y A. Martinez Cegarra. Obtuvo la calificación de Apto " cum laude ".

Quiero expresa mi agradecimiento a los profesores E.R.Aznar y J.Duskin de quienes he aprendido gran parte de mis conocimientos en cohomología no abeliana y quienes me han animado en algunos momentos y guiado, alternativamente, durante el periodo de realización de esta memoria. Así como a los profesores A.M.Cegarra y F.W. Lawvere quienes con sus observaciones han facilitado una mejor exposición matemática de algunas ideas en este trabajo.

Hago extensivo este agradecimiento a todos los miembros del departamento de Algebra y Fundamentos de la Universidad de Granada y a todas las personas que han colaborado en la mecanografía y realización final de este manuscrito.

A mi padre.

INDICE .-

CAPITULO 2 .- GRUPOIDES CRUZADOS.-

CAPITULO 3.- LOS CONJUNTOS H^n DE COHOMOLOGIA.-

CAPITULO 4.- LA SUCESION EXACTA LARGA EN COHOMOLOGIA NO ABELIANA.-

CAPITULO 5.- EJEMPLOS .-

INTRODUCCION .-

Supongamos que $\mathbb{C}$ es una categoría y $G' \overset{i}{\hookrightarrow} G \overset{p}{\twoheadrightarrow} G''$ una sucesión exacta corta de objetos grupo en $\mathbb{C}$. Es un hecho bien conocido que para cada objeto X de $\mathbb{C}$ la sucesión de grupos :

$$(\mathrm{I}) \qquad 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G') \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'')$$

es exacta y que en general el morfismo de grupos p_* no es un epimorfismo. Se plantea entonces el medir la desviación de la exactitud del funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, -)$, para lo cual se tratará de extender la sucesión (I) . Siempre es posible extender esta sucesión añadiendo el conúcleo de p_* :

$$1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G') \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'') \xrightarrow{p_*^c} \mathrm{Coker}\,(p_*) \longrightarrow 1$$

esto resolvería el problema, pero equivaldría a conocer p_* lo cual no será posible en general. Por lo tanto la solución estará en ir añadiendo morfismos a conjuntos que dependan solamente de los datos iniciales G' ,G,G'' y p pero no de p_* .

Así el siguiente morfismo no puede ser en general sobre y una solución sería ir añadiendo morfismos a la sucesión (I) , de forma que cada morfismo mida la exactitud del anterior, esto es que la sucesión prolongada siga siendo exacta. Se intenta además dar una definición axiomática de los puntos a añadir de tal forma que dependan funtorialmente , si es posible, de los datos iniciales ; el cuarto punto de X y G' , el quinto de X y G , el sexto de X y G'' y así sucesivamente.

Este es el problema teórico planteado por Grothendieck a principios de la decada de los 50 , dió origen a la cohomología no abeliana. Su resolución será el principal objetivo de este trabajo.

Si la categoría $\mathbb{C}$ es abeliana, la exactitud del funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, -)$ puede ser medida por el funtor valuado en grupos $H^1(X, -) = \mathrm{Ext}^1[X, -]$ (clases de isomorfismo de extensiones), obteniendose el morfismo de conexión $\partial_0 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'') \longrightarrow H^1(X,G')$ levantando por pullback la extensión $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$ via los elementos de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'')$. De forma analoga, la desviación de la exactitud del funtor $H^1(X, -)$ puede ser medida por el funtor tambien valuado en grupos $H^2(X, -) = \mathrm{Ext}^2[X, -]$ y así sucesivamente obtenemos asociada a la sucesión exacta corta en $\mathbb{C}$ una sucesión exacta larga de grupos:

$$1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'') \longrightarrow H^1(X,G') \longrightarrow H^1(X,G) \quad . \; . \; .$$

$$. \; . \; . \quad H^n(X,G'') \longrightarrow H^{n+1}(X,G') \longrightarrow H^{n+1}(X,G) \longrightarrow H^{n+1}(X,G'') \longrightarrow . \quad . \quad .$$

llamada sucesión exacta larga de cohomología, donde $H^n(X, -) = \mathrm{Ext}^n\left[X, -\right]$ está dado mediante clases de Yoneda de n-extensiones.

Las teorías generales de cohomología, desarrolladas después del trabajo de Grothendieck : "Sur quelques points d'algebre homologique " (Tohoku Math. J. 9 , 1957), permiten resolver este problema , para un amplio margen de categorías , cuando la sucesión exacta corta sea de objetos grupo abelianos. Así por ejemplo si la categoría $\mathbb{C}$ es tripleable sobre una categoría $\mathbb{B}$ que tiene límites inversos finitos y $\mathbb{G}$ es el cotriple, inducido por la adjunción $C \underset{U}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathbb{B}$; utilizando las tecnicas de Barr y Beck para la cohomología del cotriple, si $G' \xhookrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G''$ es una sucesión exacta corta de objetos grupo abelianos en $\mathbb{C}$, el primer grupo de cohomología del cotriple de X con coeficientes en G', $H^1_{\mathbb{G}}(X,G')$, será el que nos mida la desviación de la exactitud del funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, -)$. Obteniendose , al igual que en el caso anterior, una sucesión exacta larga de grupos

$$1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G') \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'') \xrightarrow{\partial_0} H^1_{\mathbb{G}}(X,G') \xrightarrow{i_*} H^1_{\mathbb{G}}(X,G) \quad \cdots$$

$$\cdots \quad H^n_{\mathbb{G}}(X,G'') \xrightarrow{\partial_n} H^{n+1}_{\mathbb{G}}(X,G') \xrightarrow{i_*} H^{n+1}_{\mathbb{G}}(X,G) \longrightarrow \quad \cdots$$

llamada la sucesión larga para la cohomología del cotriple . J. Duskin [25] en 1975 da una interpretación simplicial de estos grupos de cohomología del cotriple $H^n_{\mathbb{G}}(X,G)$ en términos de n-torsores (U-escindidos) de X sobre los complejos de Eilenberg-MacLane $K(G,n)$. Es aquí donde aparecen por primera vez ciertos hipergrupoides $K(G,n)$ como sistemas de coeficientes.

Notemos tambien que si $\mathbb{C}$ es un topo (que posee objeto de números naturales) , entonces la categoría de grupos abelianos internos en $\mathbb{C}$, $\mathrm{Ab}(\mathbb{C})$, es abeliana y el funtor de olvido $U : \mathrm{Ab}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ es monádico, si denotamos $F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Ab}(\mathbb{C})$ el funtor adjunto a la izquierda a U . Entonces dada una sucesión exacta corta de objetos grupo abelianos en $\mathbb{C}$ y tomando $X = \mathbb{1}$ (el objeto terminal de $\mathbb{C}$) se tiene que el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,-)$ es el funtor de secciones globales Γ y es bien conocido que la exactitud de este funtor puede ser medida por los funtores valuados en grupos $\mathrm{Ext}^n\left[\mathbb{Z}_{\mathbb{C}}, -\right]$, donde $\mathbb{Z}_{\mathbb{C}} = F(\mathbb{1})$. Obteniendose tambien en este caso una solución completa del problema. Sutituyendo a $\mathbb{C}$ por la coma categoría $\mathbb{C}/X$, tendriamos una solución al problema para cualquier objeto X.

En 1977 , P. Glenn en su tesis [31] engloba todas las soluciones (abelianas) mencionadas hasta ahora de la siguiente forma: Si $\mathbb{C}$ es una categoría exacta de Barr con objeto terminal $\mathbb{1}$, se asocia a cada sucesión exacta de objetos grupo abelianos en $\mathbb{C}$: $G' \xhookrightarrow{i} G \xrightarrow{p} G''$ y para cada X de $\mathbb{C}$ una sucesión exacta larga de grupos en la cohomología

$$1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G') \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'') \xrightarrow{\partial_0} H^1(X,G') \longrightarrow H^1(X,G) \ldots$$

$$\ldots H^n(X,G'') \xrightarrow{\partial_n} H^{n+1}(X,G') \longrightarrow H^{n+1}(X,G) \longrightarrow \ldots$$

que extiende la sucesión (I), donde los conjuntos de cohomología $H^n(X,G)$ están dados en términos de n-torsores de X sobre los complejos de Eilenberg-MacLane K(G,n). Apareciendo de nuevo estos hipergrupoides como sistemas de coeficientes idoneos para su cohomología abeliana .

Es de remarcar que en todas la soluciones ofrecidas hasta ahora hay una fuerte dependencia del caracter abeliano de los objetos grupo. A la vista de lo que antecede, la pregunta que surge es la siguiente:

¿ Que ocurre cuando estos objetos grupo no sean abelianos ?

Fueron los trabajos de Grothendieck (recogidos por Giraud [30]) y Frenkel [29] los que primeramente aproximaron una solución y en ellos se pone de manifiesto que esta estará estrictamente ligada al concepto de " fiber bundle " . Siguiendo las ideas de estos autores (quienes extendieron la sucesión (I) con tres conjuntos más cuando los objetos grupo no son abelianos) , pero traduciendo sus ideas a un lenguage común y tratando en la medida de lo posible imitar los métodos abelianos de Glenn, se pueden reformular sus ideas para extender la sucesión (I) tres puntos más como sigue:

Hemos de definir en primer lugar el "conjunto" de cohomología $H^1(X,G)$ y el morfismo de conexión $\partial_0 : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'') \longrightarrow H^1(X,G')$, suponiendo que $\mathbb{C}$ es una categoría exacta de Barr con objeto terminal $\mathbb{1}$.

Observamos entonces que la definición de $H^1(X,G')$ dada por Grothendieck en un topo (para $X=\mathbb{1}$)en términos de clases de isomorfismo de " espacios principales y homogéneos" del topo , sobre los que actua el grupo G' y la dada por Frenkel en términos de clases de "homotopía de cociclos " pueden ser identificados en este contexto de una categoría exacta de Barr, utilizando clases de isomorfismos de 1-torsores de X sobre el "grupoide" K(G,1).

Tomaremos entonces $H^1(X,G') = \mathrm{TORS}^1\left[X,K(G',1)\right]$ el conjunto de clases de isomorfismos de 1-torsores de X sobre G' . En este caso, la estructura de grupo del objeto G' NO induce de forma natural una estructura de grupo en $H^1(X,G')$ pero si una de conjunto punteado, verificandose además que $H^1(X,-) = \mathrm{TORS}^1\left[X, -\right]$ es un funtor de la categoría de grupos internos en $\mathbb{C}$, Gp($\mathbb{C}$), en la categoría de conjuntos punteados.

El 1-torsor de G'' sobre K(G',1) :

$$\begin{tikzcd}
G' \rtimes G \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "pr"] & G \arrow[r] & G'' \\
G' & &
\end{tikzcd}$$

donde $G' \rtimes G$ denota el objeto grupo producto semidirecto de G' y G, considerando la acción de G sobre G' por conjugación, nos permite definir (levantando por pullback via los elementos en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'')$) un "morfismo de conexión " $\partial_o : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'') \longrightarrow H^1(X,G')$ de forma que la sucesión :

$$(II) \quad 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G') \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G) \xrightarrow{p_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'') \xrightarrow{\partial_o} H^1(X,G')$$
$$\xrightarrow{i_*} H^1(X,G) \xrightarrow{p_*} H^1(X,G'')$$

es una sucesión exacta de conjuntos punteados; donde además en los tres primeros términos es de grupos.

Al intentar extender la sucesión exacta (II) , el primer problema que surge será el de definir el conjunto de cohomología $H^2(X,G')$:

¿Cuales serán los sistemas de coeficientes idóneos para definir los conjuntos de cohomología en dimensión dos ?

Podría pensarse en " K(G',2)" pero este "complejo simplicial" no es un 2-hipergrupoide (a menos que G' sea abeliano), por lo que no podemos definir $H^2(X,G')$ como clases de Yoneda de 2-torsores sobre K(G',2). Ni siquiera en el caso de ser G' abeliano, podriamos definir el segundo morfismo de conexión (con esta definición de $H^2(X,G')$) a menos que G' sea central en G y en este caso , todavía tendriamos problemas en definir H^2 para G y G''.

Existen algunos candidatos de conjuntos H^2 que permiten extender la sucesión (II) tres puntos más; por ejemplo los dados por Dedecker [19] para haces de un espacio topológico paracompacto, los dados por Giraud [30] para "general topoi " y los dados por Duskin (en cartas enviadas a Johnstone en 1976) para un topo.

Comentaremos a continuación estas aproximaciones brevemente:

Aproximación de Dedecker (mediante cohomología de Čech) .-

La aproximación de Dedecker para para $\mathbb{C}$ la categoría de haces sobre un espacio topológico para compacto X, se basa en la idea de que hay que introducir además de la sucesión exacta corta $G' \hookrightarrow G \longrightarrow G''$ (en este caso) de haces de grupos unos " sistemas de coeficientes " para la 2-cohomología , esta idea ha sido básica en los trabajos de Dedecker. Tales sistemas de coeficientes vienen a ser una traducción a la categoría de haces del concepto de módulo cruzado. Así un sistema de coeficientes para la 2-cohomología es una terna $\Phi = (H,N,\rho)$, donde H y N son haces de grupos, N "actua" sobre H y $\rho : H \longrightarrow N$ es un morfismo de haces de grupos verificando:

i) $\rho({}^{n}h) = n\,\rho(h)\,n^{-1}$

ii) ${}^{\rho(h)}h' = h\,h'\,h^{-1}$.

para elementos $n \in N$, $h,h' \in H$ en la misma fibra.

Estos sistemas de coeficientes, con la definición natural de morfismos entre ellos, forman una categoría $\mathbb{C}^2$. Dedecker define entonces los conjuntos de cohomología $H^2(X, \Phi)$ (a la manera de Cěch, usando recubrimientos de X) mediante clases de equivalencia de "2-cociclos" sobre Φ. Estos conjuntos ya no serán conjuntos punteados sino que en ellos existirán dos tipos de elementos distinguidos a los que Dedecker llama elementos " neutros" y elementos "nulos", verificandose que $H^2(X, -)$ es funtorial respecto a morfismos de sistemas de coeficientes.

Para extender la sucesión (II) se necesitará entonces un sistema de coeficientes $\Phi = (G, N, \rho)$ de forma que $\Phi' = (G', N', \rho/G')$ sea tambien un sistema de coeficientes. Utilizando técnicas muy particulares de la categoría de haces sobre un espacio topológico paracompacto, Dedecker define el segundo morfismo de conexión y extiende la sucesión (II) dos puntos más:

$$1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'') \longrightarrow H^1(X,G') \longrightarrow H^1(X,G) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(X,G'') \longrightarrow H^2(X,\Phi') \longrightarrow H^2(X,\Phi)$$

donde la exactitud en los últimos puntos está dada a partir de los elementos neutros y nulos.

La idea básica que ha dominado nuestra investigación en cohomología no abeliana ha sido la de obtener los conjuntos H^2 (y en general los H^n) en términos simpliciales, tomando como coeficientes 2-hipergrupoides (n-hipergrupoides). Así después de un detallado estudio de los 2-cociclos de Dedecker y sus sistemas de coeficientes, logramos asociar a cada sistema de coeficientes Φ un 2-hipergrupoide $G_{\Phi..}$ (estableciendo un funtor desde la categoría $\mathbb{C}^2$ a la categoría de 2-hipergrupoides en $\mathbb{C}$, 2-HPGPD(C)) de forma que los 2-cociclos de Dedecker desde un recubrimiento $\mathcal{U}$ de X en Φ correspondan a aplicaciones simpliciales desde el complejo simplicial asociado a $\mathcal{U}$ al 2-hipergrupoide $G_{\Phi..}$ (2-cociclos simpliciales). Fué posteriormente cuando conocí las ideas de Duskin, quien obtenía este 2-hipergrupoide $G_{\Phi..}$ utilizando un funtor clasificador $\overline{W}$, que generaliza al clásicamente conocido en la categoría de grupos simpliciales [11], [44].

Aproximación de Giraud .-

Supongamos que $\mathbb{C}$ es un "general topoi " y X el objeto terminal $\mathbb{1}$ en $\mathbb{C}$.

La aproximación de Giraud está basada en la siguiente observación de Grothendieck :

" La obstrucción al levantamiento de un G''-torsor por un G-torsor ya está encontrada". Considérese para cada G''-torsor $\alpha_{\bullet}$ (i.e. 1-torsor de $\mathbb{1}$ sobre K(G'',1))

$$\begin{tikzcd} E\times E \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\alpha"'] & E \arrow[r, two heads] & \mathbb{1} \\ G'' & & \end{tikzcd}$$

la siguiente categoría fibrada; Para cada objeto Y de $\mathbb{C}$, sea R (Y) ($R_E(Y)$) la categoría cuyos objetos son los levantamientos locales" del torsor $\alpha_{\bullet}$, i.e. diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} & F\times F \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr] & F \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & Y \arrow[dr] & \\ G \arrow[dr, "\rho"'] & & E\times E \arrow[r, shift left, no head] \arrow[r, shift right, no head] \arrow[dl, "\alpha"] & E \arrow[r, two heads] & \mathbb{1} \\ & G'' & & & \end{tikzcd}$$

donde $\beta_{\bullet}$ es un torsor en $TORS^1(Y,K(G,1))$ (notemos que esto es equivalente a dar el par ($\beta_{\bullet}$, ψ) donde ψ es un isomorfismo de los torsores,de Y, $p_*(\beta_{\bullet})$ y $\alpha_{\bullet}^{Y}$, este último está obtenido al levantar por pullback el G''-torsor $\alpha_{\bullet}$ via el morfismo $Y \twoheadrightarrow \mathbb{1}$) . Con la definición natural de morfismo, R (Y) viene a ser un grupoide para cada objeto Y y R (-) un "seudo funtor" sobre $\mathbb{C}$ (para cada morfismo $f:Y \longrightarrow Y'$ R (f) se obtendrá mediante levantamientos por pullback via f) .

Se tiene entonces que R es "trivial" si $R(\mathbb{1}) \neq 0$ i.e. si existe un levantamiento global , así $\alpha_{\bullet} \longmapsto R_{\alpha_{\bullet}}$ define la obstrucción .

La versión axiomática de tales categorías fibradas es llamada por Giraud "gerbe". Para recobrar algún lazo de unión con los grupos de partida Giraud tiene que introducir la noción de " lien" que desempeñará la función que tenian los grupos de coeficientes.

Cada "gerbe" está asociado a un "lien" así Giraud define $H^2(G')$ como el conjunto de clases de equivalencia (mediante morfismos "cartesianos") de "gerbes" cuyo "lien" es el grupo G' . El conjunto resultante no es funtorial (ni en grupos ni en "liens"), en el mejor de los casos se puede obtener asociado a un morfismo de "liens" o de grupos una "correspondencia" entre los conjuntos H^2 . Para un epimorfismo esta correspondencia si es funtorial, obteniendose una "sucesión exacta"

$$H^1(G) \longrightarrow H^1(G'') \longrightarrow O(p) \longrightarrow\!\!\circ \;\; H^2(G') \longrightarrow H^2(G'')$$

donde O(p) es el conjunto de (gerbes) "levantamientos locales" de G''-torsores; desafortunadamente estos "gerbes" no tienen por que tener a G' como "lien" asociado, y $\longrightarrow\!\!\circ$ denota solamente una correspondencia entre conjuntos.

Giraud prueba que si G' es central en G entonces O(p) coincide con $H^2(G')$ y en general para cualquier grupo abeliano A , $H^2(A)$ coincide con el conjunto de clases de Yoneda de 2-torsores (de π) sobre K(A,2).

Aproximación de Duskin .-

En la teoría de Giraud , se considera para cada G''-torsor $\alpha.$, el "gerbe" de los "levantamientos locales" de $\alpha.$, $R_{\alpha.}$. La axiomatización de esta noción en términos de categorías fibradas requiere una complicada maquinaria , por lo que esta aproximación encierra muchas dificultades.

La aproximación de Duskin está basada en la obserbación de que en lugar de considerar el "gerbe" $R_{\alpha.}$, hay objetos mucho más simples en el topo que pueden ser considerados : Dado un G''-torsor $\alpha.$, levantando por pullback este torsor via el epimorfismo p :G $\twoheadrightarrow$ G'' , obtenemos un grupoide $p^*(\alpha.)$ junto con un epimorfismo (proyección) a K(G,1)

$$\begin{tikzcd}
p^*(\alpha.) : & & E^p \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] \arrow[dd] & & E \arrow[dl, equal] \arrow[dd, dash] & \\
& E\times E \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd] & & E \arrow[rr] \arrow[dd, dash] & & \pi \\
& & G \arrow[rr] \arrow[dl] & & \pi \arrow[dl, equal] & \\
& G'' \arrow[rr] & & \pi & &
\end{tikzcd}$$

Este grupoide es conexo (i.e. el morfismo $E^p \longrightarrow E\times E$ es un epimorfismo) e "internamente no vacio " (i.e. $E \longrightarrow \pi$ es un epimorfismo) además el grupo de endomorfismos del grupoide $p^*(\alpha.)$ es isomorfo a $E\times G' \xrightarrow{pr} E$, verificandose que este grupoide es "esencialmente equivalente " al grupoide K(G',1).

A partir de estos grupoides se obtiene con la apropiada definición de morfismo una categoría, Duskin propone al conjunto de componentes conexas de esta categoría , $H^2_G(\pi,G')$, como candidato idóneo para continuar la sucesión. Con el morfismo de conexión $\partial_1 : H^1(\pi,G'') \longrightarrow H^2_G(\pi,G')$ dado por $[\alpha.] \longmapsto [p^*(\alpha.)]$. Además en el caso en el caso en que G actue sobre G' por automorfismos interiores de G' (este es el caso por ejemplo si G' es central en G) entonces $H^2_G(\pi,G')$ coincide con el conjunto de clases de Yoneda de 2-torsores sobre K(G',2).

Para comparar con las otras teorías Duskin necesita tener un " sistema de coeficientes" y definir via este el conjunto de cohomología $H^2_G(\pi,G')$, por lo que influenciado por el exito de su alumno P. Glenn, quien toma 2-hipergrupoides como sistemas de coeficientes en el caso abeliano , trata de identificar el conjunto de cohomología $H^2_G(\pi,G')$ con el conjunto de clases de Yoneda de 2-torsores sobre algún 2-hipergrupoide y definir tambien en estos términos los siguientes conjuntos de cohomología en dimensión dos. Es aquí donde entran en juego por primera vez el funtor $\overline{W}$ y los 2-hipergrupoides $\underline{\underline{\mathrm{Int}}}^2_G(G')$ y

$\underline{\underline{Int}}^2(G)$ obtenidos aplicando una generalización a la categoría de complejos simpliciales en $Gp(\mathbb{C})$ del funtor clasificador $\overline{W}$, a los grupoides en Gp ; $G' \rtimes Int(G) \rightrightarrows Int(G)$ y $G \rtimes Int(G) \rightrightarrows Int(G)$, obtenidos a partir de los módulos cruzados $\rho/G':G' \longrightarrow Int(G)$ $\rho: G \longrightarrow Int(G)$ respectivamente, donde ρ es el morfismo canónico.

Notemos que a partir de esta dimensión no existen en la bibliografía candidatos para definir los siguientes conjuntos de cohomología no abeliana.

El caso algebraico. -

El problema de medir la exactitud del funtor $Hom_{\mathbb{C}}(X, -)$, cuando la categoría $\mathbb{C}$ es "algebraica" y en ella tiene sentido definir sucesiones exactas cortas, tiene un enunciado diferente.

Por ejemplo si $\mathbb{C}$ es la categoría de grupos, Gp, es bien conocido que los objetos grupo en Gp son los grupos abelianos, por tanto dar una sucesión exacta corta de objetos grupo en Gp es equivalente a dar una sucesión exacta corta de grupos abelianos y así la solución abeliana valdría en este caso. Se toma entonces un grupo X y una sucesión exacta corta de X-grupos $G' \overset{i}{\hookrightarrow} G \overset{p}{\twoheadrightarrow} G''$, teniendose entonces una sucesión exacta de conjuntos punteados

(III) $1 \longrightarrow Der(X,G') \xrightarrow{i_*} Der(X,G) \xrightarrow{p_*} Der(X,G'')$

donde $Der(X,-)$ es el funtor derivaciones. El principal objetivo de la cohomología no abeliana en grupos será extender, de forma apropiada, la sucesión (III).

los trabajos más relevantes en este sentido son los de Dedecer [18], [20] al [24], Lavendhomme y Roisin [37] al [40] y Aznar [1], los cuales abordan el problema no solo para la categoría de grupos sino para un amplio margen de estas categorías algebraicas. Todos estos trabajos estan basados en la siguiente idea de Dedecker :

" Para extender la sucesión (III) tres puntos más, necesitaremos dar una categoría de coeficientes $\mathbf{C}^1$ en la que tengan sentido definir sucesiones exactas cortas, junto con un funtor de olvido $\mathbf{C}^1 \longrightarrow Gp$ que sea "exacto" (preserve sucesiones exactas cortas). Analogamente para extender la sucesión de seis puntos resultante, otros tres puntos más, se necesitará otra categoría de coeficientes $\mathbf{C}^2$ en la que tambien se puedan definir sucesiones exactas cortas, junto con un funtor de olvido "exacto" $\mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^1$ y así sucesivamente " .

Como categoría de coeficientes $\mathbf{C}^1$ Dedecker, en el caso de ser $\mathbb{C}$=Gp, y Aznar, en categorías de interés, toman la categoría de "módulos cruzados", definiendo una sucesión exacta corta de módulos cruzados como un diagrama :

$$\begin{tikzcd}
\Phi' \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, ".."] & \Phi \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, ".."] & \Phi'' \arrow[d, phantom, ".."] \\
G' \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\rho'"'] & G \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\rho"'] & G'' \arrow[d, "\rho''"] \\
& H \arrow[r, two heads, "q"] & H''
\end{tikzcd}$$

donde la sucesión $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$ es exacta de grupos y H'' es el grupo cociente de H por $\operatorname{Img}(\rho')$ que es un subgrupo normal .

Dada entonces una sucesión exacta corta de módulos cruzados y un morfismo $\varphi: X \longrightarrow H$ se obtiene una sucesión " exacta "

(IV) $$1 \longrightarrow H^0_\varphi(X, \Phi') \longrightarrow H^0_\varphi(X, \Phi) \longrightarrow H^0_{q\varphi}(X, \Phi'') \longrightarrow H^1_\varphi(X, \Phi')$$
$$H^1_\varphi(X, \Phi) \longrightarrow H^1_{q\varphi}(X, \Phi'')$$

donde $H^0_\varphi(X,\Phi')$ es el conjunto de morfismos de grupos $f:X \longrightarrow G' \rtimes H$ tales que compuestos con la proyección de $G' \rtimes H$ en H den el morfismo φ , o equivalentemente el conjunto de derivaciones de X en G' considerando la acción de X sobre G' inducida por la acción de H via el morfismo φ (analogamente para $H^0_\varphi(X,\Phi)$ y $H^{0'}_{q\varphi}(X,\Phi'')$) y los conjuntos H^1 vienen dados en téminos de clases de equivalencia de "cociclos". Notemos que en el caso de tener una sucesión exacta de X-grupos $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$, tomando como sucesión exacta corta de módulos cruzados a

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\rho'"'] & G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\rho"'] & G'' \arrow[d, "\rho''"] \\
& X \arrow[r, two heads] & H''
\end{tikzcd}$$

donde el módulo cruzado $\rho:G \longrightarrow X$ es el obtenido levantando por pullback el módulo cruzado de los automorfismos de G, $G \longrightarrow \operatorname{Aut}(G)$, via el morfismo $X \longrightarrow \operatorname{Aut}(G)$ inducido por la acción de X sobre G, la sucesion (IV) para $f = id_X$ extiende a la sucesión (III).

Para seguir extendiendo la sucesión (IV) otros tres puntos más , Dedecker y Lavendhomme [24], [37], [38] , tratan de tomar como siguiente categoría de coeficientes $\mathbf{C}^2$ la categoría de "2-categorias" en grupos (que coincide como vemos en 2.2 , con la categoría de "2-grupoides" en grupos). Aunque esta idea es correcta, la complejidad de su definición de 2-cociclo hace practicamente inviable su solución .

La solución al problema que aquí damos , engloba a las anteriores (tanto en el caso general como en el algebraico) y está dada en el contexto de una categoría exacta de Barr .

Nuestra idea primitiva estaba más en la linea de los trabajos de Dedecker y se basaba en la observación de que la categoría de módulos cruzados en Gp es equivalente a la categoría de grupoides en Gp, por tanto el concepto de sucesión exacta de módulos cruzados tiene un análogo en la categoría de grupoides en Gp .

A partir de ésta el profesor Aznar y yo logramos axiomatizar el concepto de sucesión exacta corta de grupoides en una categoría exacta de Barr (ver 1.1), así la categoría de grupoides en $\mathbb{C}$,GPD($\mathbb{C}$), se nos muestra idónea como categoría de coeficientes, definiendose los conjuntos H^1 como clases de equivalencia de 1-torsores . Obteniendose además, asociada a cada sucesión exacta corta de grupoides $G'_{.} \xhookrightarrow{i} G_{.} \xrightarrow{p} G''_{.}$ (junto con un morfismo $\varphi : X \longrightarrow G_o$) una sucesión"exacta " de seis puntos

$$
\begin{array}{ll}
(V) & 1 \longrightarrow H^o_{(\varphi)}(X,G'_{.}) \longrightarrow H^o_{(\varphi)}(X,G_{.}) \longrightarrow H^o_{(p_o\varphi)}(X,G''_{.}) \longrightarrow H^1_{(\varphi)}(X,G'_{.}) \\
 & \qquad H^1_{(\varphi)}(X,G_{.}) \longrightarrow H^1_{(p_o\varphi)}(X,G''_{.})
\end{array}
$$

que extiende a la sucesión (I) cuando la sucesión exacta corta de grupoides proviene de una sucesión exacta corta de objetos grupo en $\mathbb{C}$ y coincide con la sucesión (IV) cuando $\mathbb{C}$ sea la categoría de grupos (o una categoría de interés).

Pensamos entonces que la segunda categoría de coeficientes podría ser la de 2-hipergrupoides en $\mathbb{C}$, 2-HPGPD($\mathbb{C}$) , (estudiada en 1.2), ya que se dispone de un funtor de olvido U:2-HPGPD($\mathbb{C}$) $\longrightarrow$ GPD($\mathbb{C}$) y un candidato para los conjuntos H^2 con coeficientes en 2-hipergrupoides (clases de Yoneda de 2-torsores). Nuestros esfuerzos se dedicaron entonces a buscar una apropiada definición de sucesión exacta corta de 2-hipergrupoides, de forma que el funtor de olvido U fuese exacto.

Tras un periodo sin éxito, mi visita al departamento de matemáticas de S.U.N.Y. en Buffalo, me permitió conocer las ideas de profesor Duskin y su generalización a la categoría de complejos simpliciales dobles del clásico funtor $\overline{W}$ (ver 0.3) , comprobando que este funtor establece una equivalencia entre las categorías de 2-grupoides en $\mathbb{C}$, 2-GPD($\mathbb{C}$), y la de 2-hipergrupoides filtrados en $\mathbb{C}$,2-FHPGPD($\mathbb{C}$) , (ver 1.3). Así comenzamos a estudiar en profundidad estas categorías (y sus generalizaciones a dimensiones superiores , ver 1.3) descrbriendo lo que hemos llamado " complejo de Moore " de un 2-grupoide (ver 2.2) que nos permitió definir el concepto de grupoide cruzado (generalizado , ver 2.2) observando que las categorías GPD(Gp($\mathbb{C}$)) y 2-GPD($\mathbb{C}$) tienen muchas propiedades en común; por ejemplo , será equivalente dar un 2-grupoide o su complejo de Moore que es un grupoide cruzado. Así (cuando en la categoría Gp($\mathbb{C}$) tenga sentido el centro de un objeto, ver 0.1) podemos definir para cada grupoide $G_{.}$ el grupoide de sus automorfismos interiores, $INT(G_{\cdot})$, (ver 2.1) teniendose el grupoide cruzado generalizado $\Phi = (G_{\cdot}, INT(G_{\cdot}), \rho_{\cdot})$ de los automorfismos interiores, que nos define un 2-grupoide $INT(G_{\cdot})_{\cdot\cdot}$ y este via el funtor $\overline{W}$ un 2-hipergrupoide filtrado, $\overline{W}(INT(G_{\cdot})_{\cdot\cdot})$, (si $G_{\cdot} = K(G,1)$ para G un objeto grupo en $\mathbb{C}$ entonces $\overline{W}(INT(G_{\cdot})) = \underline{\underline{Int}}^{2}(G)$ definido por Duskin).

Obtenemos de esta forma, a partir de la sucesión exacta corta de grupoides una sucesión exacta corta de 2-grupoides $N'_{\cdot\cdot} \hookrightarrow INT(G_{\cdot})_{\cdot\cdot} \twoheadrightarrow N''_{\cdot\cdot}$, donde $N'_{\cdot\cdot}$ es el 2-grupoide asociado al grupoide cruzado generalizado $\Phi' = (G'_{\cdot}, INT(G_{\cdot}), \rho_{\cdot}/G'_{\cdot})$ y $N''_{\cdot\cdot}$ es el 2-grupoide cociente (ver 3.1), aplicando ahora el funtor $\overline{W}$ obtenemos una sucesión (exacta corta) de 2-hipergrupoides filtrados $\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}) \hookrightarrow \overline{W}(INT(G_{\cdot})_{\cdot\cdot}) \twoheadrightarrow \overline{W}(N''_{\cdot\cdot})$ que nos permite definir lo sistemas de coeficientes para los conjuntos H^{2} (ver 3.1) y extender la sucesión (V) tres puntos más, obteniendose así una sucesión "exacta" de nueve términos en cohomología no abeliana (ver 4.1) . Notemos que si la sucesión exacta corta de grupoides fuese la asociada a una sucesión exacta corta de objetos grupo en $\mathbb{C}$, $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$, entonces se tiene que $\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}) = \underline{\underline{Int}}^{2}_{G}(G')$ definido por Duskin .

Ahora bien, si aplicamos este razonamiento a la categoría $GPD(\mathbb{C})$, asociada a la sucesión exacta corta (de grupoides en $GPD(\mathbb{C})$) : $N'_{\cdot\cdot} \hookrightarrow INT(G_{\cdot})_{\cdot\cdot} \twoheadrightarrow N''_{\cdot\cdot}$ obtendremos una sucesión exacta corta de 2-grupoides en $GPD(\mathbb{C})$ (que además serán 3-grupoides en $\mathbb{C}$) : $\mathbb{Z}' \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}''$, donde $\mathbb{Z}$ es el 2-grupoide de los automorfismos interiores de $INT(G_{\cdot})_{\cdot\cdot}$ (en este caso "trivial" por ser $INT(G_{\cdot})_{\cdot\cdot}$ un grupoide abeliano en $GPD(\mathbb{C})$).

Aplicando entonces el funtor $\overline{W}$ obtenemos una sucesión (exacta corta) de 2-hipergrupoides en $GPD(\mathbb{C})$: $\overline{W}(\mathbb{Z}') \hookrightarrow \overline{W}(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \overline{W}(\mathbb{Z}'')$ y si lo aplicamos de nuevo, una sucesión (exacta corta) de 3-hipergrupoides filtrados en $\mathbb{C}$: $\overline{W}^{2}(\mathbb{Z}') \hookrightarrow \overline{W}^{2}(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \overline{W}^{2}(\mathbb{Z}'')$ que nos darán los sistemás de coeficientes para los conjuntos de cohomología en dimensión tres, H^{3}, así repitiendo este proceso obtendriamos los n-hipergrupoides filtrados sistemas de coeficientes para la cohomología en dimensión n .

Sin embargo, analizando la sucesión exacta corta de 2-grupoides $N'_{\cdot\cdot} \hookrightarrow INT(G_{\cdot})_{\cdot\cdot} \twoheadrightarrow N''_{\cdot\cdot}$ observamos que $N'_{\cdot\cdot}$ es "central" en $INT(G_{\cdot})_{\cdot\cdot}$ (en el sentido de que el grupo de endomorfismos de $N'_{\cdot\cdot}$ es central en $INT(G_{\cdot})_{\cdot\cdot}$, esto es la acción de $INT(G_{\cdot})_{\cdot\cdot}$ sobre $N'_{\cdot\cdot}$ es "casi trivial"). Este hecho facilita en gran medida la obtención de los 3-hipergrupoides que serán los sistemas de coeficientes, los cuales definimos axiomaticamente sin utilizar los 2-grupoides en $GPD(\mathbb{C})$ $\mathbb{Z}', \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}''$. Esta definición se generaliza a dimensiones superiores, sugiendo así los n-hipergrupoides filtrados $K_{INT(G_{\cdot})}(Z'_{\cdot}, n)$,

$K_{INT(G.)}(Z(G.),n)$ y $K_{INT(G.)}(Z(G.)/Z'.,n)$ (ver 3.1), que pueden ser utilizados para definir los conjuntos de cohomología H^n en términos de clases de Yoneda de n-torsores (ver 1.4 , 1.5 , 3.1 y 3.2 donde hemos estudiado detenidamente estos conjuntos). En estos conjuntos de cohomología no abeliana existen dos tipos de elementos distinguidos , los elementos " neutros"y los elementos"nulos " (ver 3.1) que nos permiten establecer los términos de la exactitud en la sucesión de cohomología.

De esta forma obtenemos a partir de la sucesión exacta corta de grupoides, los n-hipergrupoides que nos servirán como sistemas de coeficientes para definir los conjuntos de n-cohomología. Para esto hemos tenido que imponerle a nuestra categoría exacta que se puedan definir el objeto centro de un objeto grupo, podemos no obstante suprimir esta condición siempre que además de la sucesión exacta corta de grupoides tengamos como dato inicial un grupoide generalizado $\Phi = (G.,N.,\rho.)$ verificando ciertas condiciones (ver 3.1) .

El tercer morfismo de conexión se obtiene comparando la sucesión de nueve términos asociada a la sucesión exacta corta de grupoides en $\mathbb{C}$ y la sucesión de nueve terminos asociada a la sucesión exacta corta de 2-grupoides (grupoides en GPD($\mathbb{C}$)), por medio del funtor $\overline{W}$. Los morfismos de conexión en dimensiones superiores se obtienen utilizando medios muy similaras a los dados por Glenn [32] para el caso abeliano.

Obtenemos así una <u>sucesión exacta larga en cohomología no abeliana</u> (ver 4.2) que engloba los casos abelianos y las soluciones parciales mencionadas anteriormente (ver capitulo 5º) .

Notemos por último que los términos en que está expresada la exactitud de la sucesión en cohomología podrian ser enriquecidos mediante una apropiada teoría de " obstrucción" en dimensiones superiores que generalice a la dada en los casos algebraicos por A.M. Cegarra, A.R.Garzón y yo mismo en [12] , [13] y [14] , y de esta forma dotar,al igual que Dedecker [20] y Aznar [1] , a los conjuntos de cohomología de estructura (de pulpos, arañas, etc.) .

CAPITULO 0.- PRELIMINARES

(0.1) LA CATEGORIA BASE $\mathbb{C}$.-

Nuestro primer objetivo va a ser el escoger una categoría base ,a la que denotaremos a partir de ahora por $\mathbb{C}$"suficientemente buena" como para que podamos desarrollar en ella la teoría de cohomología de torsores y suficientemente "genérica" como para que se engloben los casos en los que ya se han desarrollado teorías de cohomología.

El contexto idoneo para desarrollar la teoría de cohomología de torsores será el de una categoría exacta de Barr [3] .Recodermos ahora alguna terminología:

Denotaremos por Hom$_{\mathbb{C}}$(X,Y) o simplemente Hom (X,Y),cuando no existe duda en la categoría en la que estamos ,al conjunto de morfismos en $\mathbb{C}$ del objeto X al objeto Y de $\mathbb{C}$. Dados morfismos f: $X\longrightarrow Y$ y g: $Y\longrightarrow Z$ denoteremos por g f a la composición $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$. Sea f: $X\longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathbb{C}$,el "par núcleo" de f (si existe) es el objeto pullback,

$$\begin{tikzcd}
X\times_{Y} X \arrow[r, "pr_0"] \arrow[d, "pr_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

junto con el par de morfismos (pr$_0$, pr$_1$) . Un par de morfismos p q : $X\longrightarrow Y$ se llama un "par de equivalencia" si para cada objeto Z en $\mathbb{C}$,la aplicación $\langle p_*, q_*\rangle$: Hom (Z, X) $\hookrightarrow$ Hom (Z,Y) x Hom (Z, Y) (donde p_* denota la aplicación Hom (Z,p) : Hom (Z,X) $\longrightarrow$ Hom (Z,Y) que asocia a cada morfismo f: $Z\longrightarrow X$, el morfismo composición pf : $Z\longrightarrow Y$,y $\langle p_*, q_*\rangle$ denota la aplicación que asocia a cada f: $Z\longrightarrow X$ el par de morfismos (pf , qf)) es inyectiva y su imagen define una relación de equivalencia en Hom(Z, Y) . Se verifica que cada par núcleo es un par de equivalencia ,sin embargo el recíproco no tiene porque ser cierto. Un par de equivalencia se dice " efectivo " si es el par núcleo de algún morfismo.

Un " epimorfismo regular " es un morfismo que es coigualador de algún par de morfismos, denotaremos "$\twoheadrightarrow$" a los epimorfismos regulares. En este trabajo nos interesan solamente aquellos epimorfismos que son regulares por lo tanto siempre que se diga epimorfismo se entenderá epimorfismo regular.

Una categoría se llamá" regular " si tiene límites finitos,coigualadores de pares núcleos y cada epimorfismo regular es estable (i.e. epimorfismos regulares son preservados por pullback).

Una categoría se llama "exacta" en el sentido de Barr si es regular y cada par de equivalencia es efectivo. Algunos ejemplos de categorías exactas son: La categoría de conjuntos (Set), la categoría de grupos (Gp), las categorías de interés[1], variedades de Mal'cev [46] y en general cualquier categoría monadica sobre conjuntos. Cualquier categoría abeliana, cualquier categoría de haces en conjuntos, cualquier categoría de funtores desde una categoría pequeña en conjuntos y en general cualquier topo .

Por tanto, tomando como categoría base a una categoría exacta de Barr estaremos en un contexto idóneo y además cubriremos como ejemplos las categorías mas usuales en las que se han desarrollado teorías de cohomología. Apartir de ahora $\mathbb{C}$ denotará a una categoría exacta de Barr en la que supondremos existe un objeto terminal, que denotaremos por $\mathbb{1}$.

En $\mathbb{C}$ se verificaran entre otras las siguientes propiedades:

(0.1.1) Cada morfismo se descompone de forma única salvo isomorfismo como un epimorfismo seguido de un monomorfismo.

(0.1.2) La composición de epimorfismos es un epimorfismo.

(0.1.3) Si la composición qp es un epimorfismo entonces tambien lo es q.

(0.1.4) Cada morfismo que sea monomorfismo y epimorfismo es un isomorfismo.

(0.1.5) Para cualquier objeto X de $\mathbb{C}$ la coma categoría $\mathbb{C}/X$, cuyos objetos son morfismos $T \longrightarrow X$ en $\mathbb{C}$ y cuyos morfismos son diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr] \arrow[dr] & & T' \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

en $\mathbb{C}$: es tambien exacta de Barr //

Un diagrama en $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, shift left, "f_o"] \arrow[r, shift right, "f_1"'] & X \arrow[r, two heads, "p"] & X'' \end{tikzcd}$$

se dirá "exacto" o "sucesión exacta en el sentido de Barr" si (f_o, f_1) es el par núcleo de p y p es el coigualador de (f_o, f_1).

ELEMENTOS

Aunque gran parte de la importancia de la teoría de categorías radica en la abstracción, evitandose el uso de argumentos en los que se utilicen elementos, algunos autores han reintroducido ciertas generalizaciones del concepto de elemento en categorías, de forma que algunos razonamientos categóricos pueden hacerse paralelamente a otros que son familiares en la categoría de conjuntos. A continuación introduciremos algunas de estas generalizaciones del concepto de elemento.

0.1.6) Elementos de Yoneda.

Sean X y T objetos en $\mathbb{C}$, un " elemento genérico " o " elemento de Yoneda " de X definido en T o variable en T es un morfismo $x:T \longrightarrow X$ en $\mathbb{C}$. Denotaremos por $x \overset{T}{\in} X$ o simplemente $x \in X$ a un elemento generico de X (definido en T).

Notemos que si $x \overset{T}{\in} X$ y $f:X \longrightarrow Y$ es un morfismo en $\mathbb{C}$, entonces el morfismo composición fx será un elemento de Y definido en T. Así cada morfismo "f" en $\mathbb{C}$ puede ser considerado como una aplicación desde los elementos de X (definidos en T) a los de Y (definidos en T). A menudo denotaremos por f(x) al elemento fx de Y. Reciprocamente: ¿cuando será suficiente dar una aplicación desde los elementos de Yoneda de X a los de Y, para tener definido un morfismo de X a Y?. La respuesta a esta pregunta se obtiene como un corolario inmediato de la siguiente proposición (ver[34]),

0.1.7) Proposición (Lema de Yoneda).

Sea τ una transformación natural del funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,-)$ en un funtor $F:C \longrightarrow \mathrm{Set}$. Entonces $\tau \longrightarrow \tau_X(id_X)$ define una correspondencia biyectiva entre el conjunto $[\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,-),F\ ]$ de transformaciones naturales de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,-)$ a F y el conjunto F(A).//

Como corolario, tomando $F=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X',-)$ ó $F=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,X')$ para X' un objeto de $\mathbb{C}$, obtenemos biyecciones de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X',X)$ con $[\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,-),\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X',-)\ ]$ y de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,X')$ con $[\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,X),\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,X')\ ]$. Usando tambien esta proposición podremos tambien asegurar que un objeto de $\mathbb{C}$ es un limite, cuando lo hayamos comprobado con sus elementos de Yoneda.

0.1.8) Elementos de Barr.

Un " elemento de Barr " de un objeto X de $\mathbb{C}$ es un elemento de F(X), para $F:\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{Set}$ cualquier funtor que preserve limites inversos y coigualadores.

Como consecuencia de la siguiente proposición (Metateorema de Barr[3]) tendremos que para comprobar una propiedad de un diagrama en $\mathbb{C}$ (que solo envuelva limites inversos y coigualadores), bastará con probarla con los elementos de Barr.

0.1.9) Proposición (Metateorema de Barr).

Cada diagrama pequeño, que mediante argumentos de caza de diagramas sea válido en Set , es válido en $\mathbb{C}$. Suponiendo que en el diagrama solo aparecen límites inversos finitos y coigualadores de pares de morfismos $f,g:X \longrightarrow Y$ tales que para todo objeto T de $\mathbb{C}$ $\langle f_*, g_* \rangle : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,Y) x \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,Y)$ tiene por imágen una relación de equivalencia en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T,Y)$.//

En lo que sigue llamaremos " elementos " indistintamente a los elementos de Yoneda o Barr.

0.1.10) Categorías internas en $\mathbb{C}$.

Una " categoría interna " $C_\bullet$ en $\mathbb{C}$ consiste de:

(i) Un par de objetos C_0 y C_1 de $\mathbb{C}$ (llamados objeto de objetos y objeto de morfismos o flechas respectivamente).

(ii) Cuatro morfismos en $\mathbb{C}$; $C_\bullet$:

$$\begin{tikzcd} C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "m"] & C_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right] & C_0 \arrow[l, bend right=60, "s_0"'] \end{tikzcd}$$

, donde $C_1 \times_{C_0} C_1$ es el objeto pullback de $C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xleftarrow{d_0} C_1$.

(iii) Verificando que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[d, "d_0"'] & C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[l, "pr_0"'] \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "m"'] & C_1 \arrow[d, "d_1"] \\ C_0 & C_1 \arrow[l, "d_0"'] \arrow[r, "d_1"] & C_0 \end{tikzcd}$$

(asociatividad)

$$\begin{tikzcd} C_1 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "m x id"] \arrow[d, "xid"'] & C_1 \times_{C_0} C1 \arrow[d, "m"] \\ C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "m"] & C_1 \end{tikzcd}$$

(unidades)

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "(s_0 d_0, id)"] \arrow[dr, equal, "id"'] & C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[d, "m"] & C_1 \arrow[l, "(id, s_0 d_1)"'] \arrow[dl, equal, "id"] \\ & C_1 & \end{tikzcd}$$

A los elementos de C_0 los llamaremos objetos de la categoría interna $C_\bullet$ y a los de C_1 morfismos o flechas, a los elementos en la imagen de $s_0 : C_0 \longrightarrow C_1$ los llamaremos identidades o unidades , a los morfismos d_0 y d_1 morfismos dominio y codominio respectivamente. A los morfismos "f" de $C_\bullet$ los representaremos por una fleccha

$$d_0(f) \xrightarrow{f} d_1(f)$$

Dado un elemento arbitrario (f,g) de $C_1 \times_{C_0} C_1$, que llamaremos par componible, denotaremos $m(f,g)=fg$ y lo representaremos

$$\begin{tikzcd} d_0(f) \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "fg"'] & d_1(f)=d_0(g) \arrow[r, bend left, "g"] & d_1(g) \end{tikzcd}$$

Notemos que aunque la composición de morfismos en la categoría $\mathbb{C}$, $X \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{q} Z$, la estamos denotando qp, la composición o multiplicación de morfismos en una categoría interna $C_\bullet$ la estamos denotando sin invertir el orden. Aunque esta notación pueda inducir a confusiones, la hemos adoptado para recarcar la similitud entrecategorías internas en $\mathbb{C}$ y monoides internos en $\mathbb{C}$, notemos también que esta notación ha sido utilizada por varios autores como son MacLane, Glenn, etc...

A menudo representaremos a una categoría interna $C_\bullet$ en $\mathbb{C}$ solamente por un diagrama

$$\begin{tikzcd} C_\bullet : & C_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & C_0 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

sin hacer mención explícita del morfismo multiplicación $m : C_1 \times_{C_0} C_{\sigma} \longrightarrow C_1$.

Un funtor interno $F_\bullet : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ entre categorías internas en $\mathbb{C}$ consta de un par de morfismos en $\mathbb{C}$, $F_0 : C_0 \longrightarrow C'_0$, $F_1 : C_1 \longrightarrow C'_1$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "F_1"'] & C_0 \arrow[l, bend right] \arrow[d, "F_0"] \\ C'_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & C'_0 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

y verificando que $F_1(fg) = F_1(f)F_1(g)$.

Adelantando resultados diremos que un grupoide interno en $\mathbb{C}$ será una categoría interna en la que toda flecha es invertible.

Ejemplos

-Cualquier categoría pequeña es una categoría interna en Set.

-Si M es un objeto monoide en $\mathbb{C}$ entonces $M \leftrightarrows \mathbb{1}$ es una categoría interna en $\mathbb{C}$, así mismo si $M \leftrightarrows X$ es un objeto monoide en $\mathbb{C}/X$ se considera como una categoría interna en $\mathbb{C}$.

0.1.11) Categorías "cartesianas cerradas". La categoría interna " Full ".

En § 2.1, definiremos el grupoide de Automorfismos. Como veremos para definir el grupoide de automorfismos necesitaremos que la categoría $\mathbb{C}$ sea además " Cartesiana cerrada ".

La categoría $\mathbb{C}$ es "cartesiana cerrada" si para cada objeto X de $\mathbb{C}$, el funtor

$(-)\times X : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tiene una adjunto derecha " funtor exponencial " $(\ )^X : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Notemos que si $\mathbb{C}$ es cartesiana cerrada ,también lo será cualquiera coma categoría $\mathbb{C}/X$,para todo X . Intuitivamente decir que $\mathbb{C}$ es cartesiana cerrada significa que para cada par de objetos X e Y en $\mathbb{C}$ existe un objeto de $\mathbb{C}$,denotado por X^Y ,cuyos elementos pueden ser representados por morfismos $f : Y \longrightarrow X$.

La siguiente definición nos dará un ejemplo de categoría interna en $\mathbb{C}$,cuando $\mathbb{C}$ sea cartesiana cerrada.

.1.12) Definición (La categoría Full)

Supongamos que $\mathbb{C}$ es cartesiana cerrada, sea $d : E \longrightarrow X$ un morfismo en $\mathbb{C}$, denotemos por pr_0 , $pr_1 : X\times X \longrightarrow X$ a los morfismos proyección y por $pr_0^*(E)$, $pr_1^*(E)$ a los objetos pullback

$$\begin{tikzcd} pr_0^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "d"] \\ X\times X \arrow[r, "pr_0"] & X \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} pr_1^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "d"] \\ X\times X \arrow[r, "pr_1"] & X \end{tikzcd}$$

respectivamente.Considerando a $pr_0^*(E) \longrightarrow X\times X$ y a $pr_1^*(E) \longrightarrow X\times X$ como objetos en la categoría (también cartesiana cerrada) $\mathbb{C}/X\times X$,definimos Full(E) como el objeto en $\mathbb{C}/X\times X$, $pr_0^*(E) \xrightarrow{pr_1^*(E)} X\times X$. Utilizando la adjunción $(-)\times pr_1^*(E) \dashv (\ )^{pr_1^*(E)}$ tenemos que dar un elemento t de Full(E) (en $\mathbb{C}/X\times X$) definido en $T \xrightarrow{(x,y)} X\times X$, i.e. un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, dashed, "t"] \arrow[dr, "(x,y)"'] & & \text{Full}(E) \arrow[dl] \\ & X\times X & \end{tikzcd}$$

es equivalente a dar un morfismo $t' : T \times_y E \longrightarrow pr_0^*(E)$ haciendo conmutar el cuadrado de la izquierda en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} T \times_y E \arrow[r, dashed, "t'"] \arrow[d] & pr_0^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "d"] \\ T \arrow[r, "(x,y)"] & X\times X \arrow[r, "pr_0"] & X \end{tikzcd}$$

notemos que se tiene un isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
T \times_y E \arrow[r, phantom, "\cong"] & T \times_{X\times X} pr_1^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & pr_1^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
 & T \arrow[r, "{(x,y)}"] & X \times X \arrow[r, "pr_1"] & X
\end{tikzcd}$$

Ahora bien dar el morfismo t' es equivalente a dar un morfismo $\bar{t} : T \times_y E \longrightarrow T \times_x E$ haciendo conmutar el triángulo

$$\begin{tikzcd}
T \times_y E \arrow[rr, dashed, "\bar{t}"] \arrow[dr] & & T \times E \arrow[dl] \\
 & T &
\end{tikzcd}$$

Si denotamos por $d_0, d_1 : Full(E) \longrightarrow X$ a los morfismos composición $Full(E) \longrightarrow X \times X \overset{pr_0}{\underset{pr_1}{\rightrightarrows}} X$ tenemos entonces que dar un elemento de $Full(E)$, $t : T \longrightarrow Full(E)$, con $d_0 t = x$ y $d_1 t = y$ es equivalente a dar un morfismo $\bar{t} : T \times_y E \longrightarrow T \times_x E$ haciendo conmutar el triángulo rallado del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & Full(E) \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
 & T \arrow[ur, dashed, "t"] \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] & X \\
T \times_x E \arrow[ur] & & E \arrow[u, "d"'] \\
T \times_y E \arrow[u, "\bar{t}"] \arrow[uur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

El morfismo $id: E \longrightarrow E$ induce un morfismo que denotaremos $s_0 : X \longrightarrow Full (E)$ verificando que $d_0 s_0 = d_1 s_0 = id$

$$\begin{tikzcd}
 & & & Full(E) \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
 & & X \arrow[ur, dashed, "s_0"] \arrow[r, shift left, "id"] \arrow[r, shift right, "id"'] & X \\
E \arrow[loop above, "id"] & \cong & X \times_{id} E \arrow[u] \arrow[r] & E \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Definamos una multiplicación entre elementos de Full(E): sean t, t': $T \longrightarrow \mathrm{Full}(E)$ dos elementos de Full(E) tales que $d_0 t = x$, $d_1 t = d_0 t' = y$ y $d_1 t' = z$ sean $\bar{t} : T \times_y E \longrightarrow T \times_x E$ y $\bar{t}' : T \times_z E \longrightarrow T \times_y E$ los morfismos asociados entonces la composición $\bar{t}\,\bar{t}'$ define un elemento t t' de Full(E)

$$\begin{tikzcd}
{} & {} & {} & \mathrm{Full}(E) \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \arrow[d, dashed, bend left, "s_0"] \\
{} & T \arrow[urr, shift left, "t"] \arrow[urr, shift right, "t'"'] \arrow[urr, dashed, bend left, "t\,t'"] \arrow[rr, shift left=2, "x"] \arrow[rr, "y"] \arrow[rr, shift right=2, "z"'] & {} & X \\
T \times_x E \arrow[ur] \arrow[rrr] & {} & {} & E \arrow[u] \\
{} & T \times_y E \arrow[uu] \arrow[urr] \arrow[ul, "\bar{t}"] & {} & {} \\
{} & {} & T \times_z E \arrow[uuul, bend right] \arrow[uur] \arrow[ul, "\bar{t}'"] \arrow[uull, dashed, bend left=60, "\bar{t}\,\bar{t}'"] & {}
\end{tikzcd}$$

De esta forma se define un morfismo en $\mathbb{C}$ $m : \mathrm{Full}(E) \times_X \mathrm{Full}(E) \longrightarrow X$ verificándose que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Full}(E)_\bullet = \mathrm{Full}(E) \times_X \mathrm{Full}(E) \arrow[r, "m"] & \mathrm{Full}\,(E) \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & X \arrow[l, bend right=60, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

es un categoría interna en $\mathbb{C}$.

0.1.13) <u>Categorías donde tiene sentido definir el centro de un objeto grupo.</u>

Dado un objeto grupo A en $\mathbb{C}$ no tiene porque existir un objeto en $\mathbb{C}$ cuyos elementos sean aquellos $z \in A$ que conmutan con cualquier otro elemento de A, i.e. $za = az$ $\forall a \in A$.

Barr en [4] da la siguiente definición :una categoría $\mathbb{B}$ es una Z-categoría si satisface las siguientes condiciones:

(Z1) $\mathbb{B}$ es punteada (tiene objeto cero)

(Z2) $\mathbb{B}$ tiene colímites finitos (límites proyectivos)

(Z3) Las inyecciones canónicas $X_1 \xrightarrow{(id,*)} X_1 \times X_2 \xleftarrow{(*,id)} X_2$ son colectivamente épicas para cada X_1, X_2 en $\mathbb{B}$. Donde hemos denotado por "$*$" al morfismo cero de X_i en X_i, i = 0,1.

(Z4) Cada morfismo f: $X \longrightarrow Y$ en $\mathbb{B}$ factoriza como $X \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y$ donde

$X \longrightarrow Y_o$ es un coigualador e $Y_o \longrightarrow Y$ es mónica.

(Z5) Si X es un objeto en $\mathbb{B}$ y $\{X_i\}$ es una familia dirigida de subobjetos de X, entonces colimX_i existe y es un subobjeto de X.

(Z6) Para cada X' en $\mathbb{B}$ el funtor $X\times -$ conmuta con aquellos límites inductivos mencionados en (Z4) y (Z5). Esto significa que si $f:X \longrightarrow Y$ es un morfismo con factorización $X \longrightarrow Y_o \longrightarrow Y$ como en (Z4), entonces $X'\times X \longrightarrow X'\times Y_o$ es también un coigulador y $X'\times Y_o \longrightarrow X'\times Y$ sigue siendo mónica. Analogamente si $\{X_i\}$ es una familia de subobjetos de X, entonces $\mathrm{colim}(X'\times X_i) \longrightarrow X'\times\mathrm{colim}\,X_i$ es un isomorfismo natural.

Y posteriormente prueba que si $\mathbb{B}$ es una Z-categoría entonces se puede definir el objeto centro de cualquier objeto de $\mathbb{B}$.

Si tomamos la categoría Gp ($\mathbb{C}$) de objetos grupos en $\mathbb{C}$ (recordemos que $\mathbb{C}$ es una categoría exacta de Barr), esta verifica los axiomas (Z1) (Z2) (Z3)(Z4) Y (Z6) y puede no verificar el axioma (Z5).

Si Gp($\mathbb{C}$) verifica el axioma (Z5) podemos hablar de centro de un objeto grupo en $\mathbb{C}$. Sin embargo no es necesario imponer a Gp ($\mathbb{C}$) el axioma (Z5) para que podamos hablar de centro de su objeto grupo en $\mathbb{C}$, por ejemplo: si $\mathbb{C}$ es una variedad de Mal'cev, todo objeto grupo de $\mathbb{C}$ es abeliano y por tanto el centro de un objeto grupo en $\mathbb{C}$ es él mismo. Así aunque $\mathbb{C}$ no satisfaga los axiomas " Z" tiene trivialmente sentido hablar del centro de un objeto grupo en $\mathbb{C}$.

Otro ejemplo en el que se puede definir el centro de un objeto grupo en $\mathbb{C}$ y no tiene porque verificarse los axiomas " Z " en Gp($\mathbb{C}$), es cuando $\mathbb{C}$ sea cartesiana cerrada. Veamos como se define en este caso el centro de un objeto grupo A en $\mathbb{C}$; denotemos por $m:A\times A \longrightarrow A$ el morfismo multiplicación de A y por $t: A\times A \longrightarrow A\times A$ el morfismo transposición ($t(a,b)=(b,a)$). Utilizando la adjunción $-\times A \dashv (\ )^A$, el par de morfismos $m, mt: A\times A \longrightarrow A$ inducen dos morfismos $u,v:A \longrightarrow A^A$, entonces el centro de A, $Z(A)$ se define como el igualador de u,v.

$$Z(A) = \mathrm{Equ}(u,v) \hookrightarrow A \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} A^A.$$

Notemos que u y v están definidas (utilizando elementos) por

$$u : a \longmapsto m(a,-) : A \longrightarrow A$$
$$b \longmapsto m(a,b) = a.b$$

$$v : a \longmapsto m(-,a) : A \longrightarrow A$$
$$b \longmapsto m(b,a) = b.a$$

Por tanto cuando hablemos del centro de un objeto grupo en $\mathbb{C}$ (y posteriormente del centro de un grupoide en $\mathbb{C}$) supondremos que la categoría Gp($\mathbb{C}$) verifica(Z5) ó bien que $\mathbb{C}$ es cartesiana cerrada ó bien que es trivial la definición de centro en Gp($\mathbb{C}$) . Notemos que todos los ejemplos de categorías exactas de Barr que mencionamos en la página 14 satisfacen una de estas tres condiciones.

(0.2) OBJETOS SIMPLICIALES Y HOMOTOPIAS

En esta sección recordaremos algunas definiciones y propiedades relativas a los objetos simpliciales en $\mathbb{C}$, para obtener información adicional sobre el tema el lector puede dirigirse a Cartan [11] ,Moore [45] ,May [44] ,Curtis [16] ,ó Duskin [25]

Objetos simpliciales.

Sea Δ la categoría cuyos objetos son conjuntos no vacíos finitos totalmente ordenados $[n] \doteq \{0,1,2,\dots,n\}$ y cuyos morfismos son las aplicaciones no decrecientes . Entre todas las aplicaciones no decrecientes se encuentran las siguientes:

$\delta_i : [n] \longrightarrow [n+1]$ definida para i=0........n+1 por

$$\delta_i(j) = \begin{cases} j & 0 \leq j \leq i-1 \\ j+1 & i \leq j \leq n \end{cases}$$

y $\sigma_i : [n+1] \longrightarrow [n]$ para i=o,.........,n definida por

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j & o \leq j \leq i \\ j-1 & i+1 \leq j \leq n+1 \end{cases}$$

Se verifica que cualquier otro morfismo en Δ se obtiene como composición de morfismos δ_i y σ_j .Así podemos representar la categoría Δ como

$$\begin{tikzcd}
\Delta = {[0]} \arrow[r, bend left=40, "\delta_0"] \arrow[r, shift left, "\delta_1"'] & {[1]} \arrow[l, shift left, "\sigma_0"] \arrow[r, bend left=60, "\delta_2"] \arrow[r, bend left=40, "\delta_1"'] \arrow[r, bend left=20, "\delta_0"'] & {[2]} \arrow[l, shift left, "\sigma_0"'] \arrow[l, shift left=3, "\sigma_1"] \cdots {[n]} \arrow[r, bend left=50, "\delta_{n+1}"] \arrow[r, bend left=20, dotted, "\delta_0"'] & {[n+1]} \cdots \arrow[l, shift left, "\sigma_0"'] \arrow[l, shift left=3, dotted, "\sigma_n"]
\end{tikzcd}$$

Un " objeto simplicial " ó " complejo simplicial " en $\mathbb{C}$ es por definición un funtor contravariante de Δ en $\mathbb{C}$,ó bien un funtor $X_\bullet : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbb{C}$.Denotaremos por $Simpl(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\Delta^{op}}$ la categoría de objetos simpliciales y morfismos de objetos simpliciales ,que corresponderan a las transformaciones naturales entre funtores de Δ^{op} en $\mathbb{C}$. Denotaremos por $Simpl(X_\bullet, Y_\bullet)$ ó simplimente $(X_\bullet, Y_\bullet)$ al conjunto de morfismos simpliciales de $X_\bullet$ a $Y_\bullet$.

Si $X_\bullet : \Delta^{op} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un objeto simplicial, denotaremos:

$X_\bullet[n] = X_n$, $X_\bullet(\delta_i) = d_i$ y $X_\bullet(\sigma_i) = s_i$

llamaremos a X_n objeto de símplices de dimensión n (ó n-símplices), operadores caras a los mismos morfismos d_i y degeneración a los s_i . Así un objeto simplicial $X_\bullet$ en $\mathbb{C}$ será representado por un diagrama en $\mathbb{C}$.

).2.1)

$$\begin{tikzcd}
X_\bullet = \cdots & X_{n+1} \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right=2, "d_{n+1}"'] & X_n \arrow[l, bend right=40, "s_0"'] \arrow[l, bend right=60, "s_n"'] & \cdots & X_2 \arrow[r, shift left=3, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[r, shift right=3, "d_2"'] & X_1 \arrow[l, bend right=40, "s_0"'] \arrow[l, bend right=60, "s_1"'] \arrow[r, shift left=1.5, "d_0"] \arrow[r, shift right=1.5, "d_1"'] & X_o \arrow[l, bend right=50, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

De las propiedades que satisfacen las aplicaciones δ_i y σ_i se deducen las siguientes ecuaciones que llamaremos <u>" identidades simpliciales "</u>:

).2.2)

$$\begin{cases}
d_i d_j = d_{j-1} d_i & o \leq i < j \leq n+1 \\
s_i s_j = s_{j+1} s_i & o \leq i \leq j \leq n-1 \\
d_i \quad s_j = \begin{cases} s_{j-1} \; d_i & i < j \\ id & i = j \quad , \quad i = j+1 \\ s_j \; d_{i-1} & i > j+1 \end{cases}
\end{cases}$$

En lo que sigue un objeto simplicial $X_\bullet$ en $\mathbb{C}$ será un diagrama (0.2.1) cuyos morfismos satisfacen las identidades simpliciales (0.2.2) . Dualmente se pueden definir co-complejos simpliciales.

Dado un objeto X de $\mathbb{C}$, el funtor constante de Δ^{op} en $\mathbb{C}$ que lleva todo conjunto finito $[n]$ en X y toda aplicación en Δ^{op} en id_X será denotado $K(X,0)$.

Un morfismo de objetos simpliciales $f_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ (i.e. una transformación natural de $X_\bullet$ a $Y_\bullet$) corresponderá a una familia $f_\bullet = \{f_n : X_n \longrightarrow Y_n \; , \; 0 \leq n\}$ de morfismos en $\mathbb{C}$ que conmutan con los operadores caras y degeneraciones.

Por otra parte, si denotamos por $\Delta \vee \{\emptyset\}$ a la categaría Δ junto con el conjunto vacío , llamaremos <u>"complejo simplicial aumentando en $\mathbb{C}$ "</u> a un funtor de $(\Delta \vee \{\emptyset\})^{op}$ en $\mathbb{C}$. Un complejo simplicial aumentado en $\mathbb{C}$ consiste de un complejo simplicial $X_\bullet$ junto con un morfismo $d_o : X_o \longrightarrow X_{-1}$ tal que $d_o d_o = d_o d_1$ y lo representaremos por

(0.2.3)

$$\begin{tikzcd}
X_\bullet = \cdots X_n \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right=2] & X_{n-1} \arrow[l, bend right=40] \arrow[l, bend right=60] & \cdots & X_1 \arrow[r, shift left=1.5, "d_0"] \arrow[r, shift right=1.5, "d_0"'] & X_o \arrow[l, bend right=30, "s_0"'] \arrow[r, "d_0"] & X_{-1}
\end{tikzcd}$$

diremos que el complejo simplicial $X_\bullet$ está aumentado por X_{-1}.

Normalmente en los diagramas (0.2.1) y (0.2.3) que representan objetos simpliciales, no escribiremos los operadores degeneración s_i .

Un "morfismo de complejos simpliciales aumentados" será un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "d_0"'] & Y_\bullet \arrow[d, "d_0"] \\
X_{-1} \arrow[r, "f_{-1}"] & Y_{-1}
\end{tikzcd}$$

Un morfismo de complejos simpliciales aumentados por un mismo objeto X será un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_\bullet \arrow[rr, "f_\bullet"] \arrow[dr, "d_0"'] & & Y_\bullet \arrow[dl, "d_0"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Es conveniente observar que la categoría de objetos simpliciales en $\mathbb{C}$ aumentadas por un objeto X es equivalente a la categoría de objetos simpliciales en la coma categoría $\mathbb{C}/X$.

Homotopías.

Sean $f_\bullet, g_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ dos morfismos simplíciales, una homotopía $h_\bullet : f_\bullet \longrightarrow g_\bullet$ de $f_\bullet$ a $g_\bullet$ es un sistema de morfismos $\{h_i^n : X_n \longrightarrow Y_{n+1} \quad , \quad 0 \leq i \leq n\}$

$$\begin{tikzcd}
X_\bullet : \arrow[d, shift right=2, "f_\bullet"'] \arrow[d, shift left=2, "g_\bullet"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{h_\bullet}"] & \cdots X_{n+1} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & X_n \arrow[dl, shift right=2, "h_0^n"'] \arrow[dl, phantom, "\cdots"] \arrow[dl, shift left=2, "h_n^n"] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & \cdots X_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift right, "f_2"'] \arrow[d, shift left, "g_2"] & X_1 \arrow[dl, shift right, "h_0^1"'] \arrow[dl, shift left, "h_1^1"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] & X_0 \arrow[dl, "h_0^0"'] \arrow[d, shift right, "f_0"'] \arrow[d, shift left, "g_0"] \\
Y_\bullet : & \cdots Y_{n+1} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right=2] & Y_n & \cdots Y_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & Y_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Y_0
\end{tikzcd}$$

satisfaciendo las identidades de homotopía

i.- $d_0 h_0^n = f_n \qquad d_{n+1} h_0^n = g_n$

ii.-
$$\left\{\begin{array}{lll} d_i h_j^n = h_{j-1}^{n-1} d_i & & i < j \\ d_{j+1} h_{j+1}^n = d_{j+1} h_i^n & & \\ d_i h_j^n = h_j^{n-1} d_{i-1} & & i > j+1 \end{array}\right. \qquad 0.2.4)$$

iii.-
$$\left\{\begin{array}{lll} s_i h_j^{n-1} = h_{j+1}^n s_i & & i \leq j \\ s_i h_j^{n-1} = h_j^n s_{i+1} & & i > j \end{array}\right.$$

Nornalmente omitiremos el super-índice para simplificar la notación .

Notemos que la relación de homotopía en Simpl($X_\bullet$, $Y_\bullet$) no es en general una relación de equivalencia .Si denotamos por R a la menor relación de equivalencia en Simpl($X_\bullet$,$Y_\bullet$) que contiene a la relación de homotopía ,denotaremos por Simpl $[X_\bullet, Y_\bullet]$ (o simplemente $[X_\bullet, Y_\bullet]$) al conjunto cociente de Simpl($X_\bullet$, $Y_\bullet$) por la relación de equivalencia R.

Notemos también que la relación de homotopía es compatible con la composición de morfismos simpliciales , i.e. si $h_\bullet : f_\bullet \longrightarrow g_\bullet$ es una homotopía y $a_\bullet$, $b_\bullet$ son morfismos simpliciales

$$\begin{tikzcd} X'_\bullet \arrow[r, "a_\bullet"] & X_\bullet \arrow[r, shift left=2, "f_\bullet"] \arrow[r, shift right=2, "g_\bullet"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow h_\bullet"] & Y_\bullet \arrow[r, "b_\bullet"] & Y'_\bullet \end{tikzcd}$$

se define el producto de " convolución" $h_\bullet * a_\bullet : \; f_\bullet a_\bullet \longrightarrow g_\bullet a_\bullet$ y

$$b_\bullet * h_\bullet \; : \quad b_\bullet f_\bullet \longrightarrow b_\bullet g_\bullet$$

por $(h_\bullet * a_\bullet)_i = h_i a_n$ y $(b_\bullet * h_\bullet)_i = b_{n+1} h_i$ obteniéndose homotopías de $f_\bullet a_\bullet$ a $g_\bullet a_\bullet$ y de $b_\bullet f_\bullet$ a $b_\bullet g_\bullet$ respectivamente.

Truncaciones esqueletos y coesqueletos .Núcleos simpliciales y "horns ".

Sea Δ_n la subcategoría plena de Δ cuyos objetos son los conjuntos finitos totalmente ordenados,de cardinal menor o igual que n . Los funtores de Δ_n^{op} en $\mathbb{C}$ son por definición los " objetos simpliciales truncados a nivel n" en $\mathbb{C}$ .Un objeto simplicial truncado a nivel n en $\mathbb{C}$ será por tanto equivalente a un diagrama en $\mathbb{C}$

O.2.5)
$$\begin{tikzcd} X_{tr_\bullet} \arrow[r, phantom, "="] & X_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\cdots"] & X_{n-1} \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend right=50] \arrow[r, phantom, "\cdots"] & X_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X_o \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

satisfaciendo las identidades simpliciales (0.2.2).

Denotaremos por Tr^n simpl($\mathbb{C}$) a la categoría de los objetos simpliciales en $\mathbb{C}$ truncados a nivel n ,con los correspondientes morfismos simpliciales truncados.

La inclusión $\Delta_n \hookrightarrow \Delta$ induce un funtor

tr^n : Simpli ($\mathbb{C}$) $\longrightarrow$ Tr^n simpl ($\mathbb{C}$) al que llamaremos " funtor truncación" , este funtor consiste en olvidar de cada complejo simplicial la parte en dimensiones mayores que n (si $X_\bullet$ está representado por el diagrama (0.2.1) entonces tr^n ($X_\bullet$) estará representado por (0.2.5)) .

Puesto que la categoría $\mathbb{C}$ tiene colímites finitos entonces el funtor tr^n tiene un adjunto izquierda sk^n : Tr^n simpl ($\mathbb{C}$) $\longrightarrow$ Simpl ($\mathbb{C}$) llamado " funtor n-esqueleto " y un adjunto derecha $cosk^n$: Tr^n simpl ($\mathbb{C}$) $\longrightarrow$ Simpl ($\mathbb{C}$) llamado " funtor n-coesqueleto " (ver [32]) .

Los endofuntores $SK^n = (sk^n)(t\,r^n)$ y $COSK^n = (cosk^n)(tr^n) : Simpl(\mathbb{C}) \longrightarrow Simpl(\mathbb{C})$ del triple y cotriple inducidos son también llamados funtores n-esqueleto y n-coesqueleto respectivamente.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Simpl}\,(C) \arrow[loop left, "COSK^n"] \arrow[loop right, "SK^n"] \arrow[d, "tr^n"] \\
Tr^n\ \mathrm{simpl}\,(\mathbb{C}) \arrow[u, bend left, "cosk^n"] \arrow[u, bend right, "sk^n"']
\end{tikzcd}$$

El funtor $cosk^n$ puede describirse usando el concepto de "<u>núcleo simplicial</u>". Sea $X_\bullet$ un objeto simplicial en $\mathbb{C}$, el <u>núcleo simplicial</u> de $d_o, \ldots, d_n : X_{n-1} \longrightarrow X_{n-2}$ ó n-ésimo núcleo simplicial de $X_\bullet$ es un objeto de $\mathbb{C}$ al que denotaremos por $\Delta_n(X_\bullet)$ junto con morfismos $p_o, \ldots, p_n : \Delta_n(X_\bullet) \longrightarrow X_{n-1}$ satisfaciendo que $d_i p_j = d_{j-1} p_i$ para $i<j$ y que tiene la siguiente propiedad universal:

Para cada familia de morfismos $x_o, \ldots, x_n : T \longrightarrow X_{n-1}$ tales que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ $i<j$, existe un único morfismo $x = \langle x_o, \ldots, x_n \rangle : T \longrightarrow \Delta_n(X_\bullet)$ tal que $p_i x = x_i$.

Como consecuencia un elemento x en $\Delta_n(X_\bullet)$ será representado como una (n+1)-upla $x = (x_o, \ldots, x_n)$ de elementos x_i en X_{n-1} tales que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ para $i<j$, siendo $p_i(x_o, \ldots, x_n) = x_i$.

Para cada j comprendido entre 0 y n-1 la familia de morfismos $(\alpha_{nj}, \ldots, \alpha_{1j}, \alpha_{oj})$ definidos por

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} s_{j-1}\, d_i & i<j \\ id & i = j, \qquad i = j+1 \\ s_j\, d_{i-1} & j+1 < i \leq n \end{cases}$$

inducen, via la propiedad universal de $\Delta_n(X_\bullet)$ morfismos únicos $s_j : X_{n-1} \longrightarrow \Delta_n(X_\bullet)$ satisfaciendo las identidades simpliciales(junto con los morfismos p_i), estos morfismos estarán dados por

$s_j(x) = (s_{j-1} d_o(x), \ldots, s_{j-1} d_{j-1}(x), x, x, s_j d_{j+2}(x), \ldots s_j d_{n-1}(x))$ para cualquier elemento x de X_{n-1}.

Elcomplejo simplicial truncado a nivel n

$$\begin{tikzcd}
X'_{\bullet\,tr} = \Delta_n(X_\bullet) \arrow[r, shift left=2, "p_o"] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=2, "p_n"'] & X_{n-1} \arrow[l, bend right=40, "s_o"'] \arrow[l, bend right=70, "s_n"'] \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] & X_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X_o \arrow[l, bend right=40]
\end{tikzcd}$$

satisface la siguiente propiedad universal:

Sea $T_\bullet \in Simpl(\mathbb{C})$ entonces cada morfismo simplicial truncado $f_\bullet : tr^n(T_\bullet) \longrightarrow tr^n(X_\bullet)$ puede ser extendido de forma única a un morfismo simplicial truncado $f'_\bullet : tr^{n+1}(T_\bullet) \longrightarrow X'_{\bullet\,tr}$

(notemos que $f'_n : T_n \longrightarrow \Delta_n(X_\bullet)$ esta definido por $f'_n(t) = (f_{n-1}d_0(t), \dots, f_{n-1}d_n(t))$ para cualquier elemento t de T_n).

El funtor $cosk^n : tr^n\, simpl(C) \longrightarrow Simpl(\mathbb{C})$ se obtiene asociando a cada complejo simplicial truncado el complejo simplicial obtenido por sucesivas iteraciones de núcleos simpliciales a partir de la dimensión n+1.

Si $X_\bullet \xrightarrow{d_0} X_{-1}$ es un complejo simplicial aumentado, interpretaremos el núcleo simplicial de $d_0 : X_0 \longrightarrow X_{-1}$ como su par núcleo y escribiremos $COSK^0(X_\bullet) = cosk^1(K \rightrightarrows X_0)$ donde $K \rightrightarrows X_0$ es el par núcleo de $d_0 : X_0 \longrightarrow X_{-1}$.

La unidad de la adjunción $tr^n \dashv cosk^n$, $D : id \longrightarrow COSK^n$ viene dada para cada complejo simplicial $X_\bullet$ por $D_\bullet : X_\bullet \longrightarrow COSK^n(X_\bullet)$ con $D_i = id_{X_i}$ $0 \leq i \leq n$, $D_{n+1} : X_{n+1} \longrightarrow \Delta_{n+1}(X_\bullet)$ es el único morfismo inducido por $d_0, \dots d_{n+1} : X_{n+1} \longrightarrow X_n$ así $D_{n+1}(x) = (d_0(x), \dots\dots, d_{n+1}(x))$ para todo x en X_{n+1}, inductivamente para $m > n+1$ $D_m : X_m \longrightarrow (COSK^n(X_\bullet))_m$ es el único morfismo inducido por $D_{m-1}d_0, \dots\dots, D_{m-1}d_m : X_m \longrightarrow (COSK^n(X_\bullet))_{m-1}$ por tanto $D_m(x) = (D_{m-1}d_0(x), \dots\dots, D_{m-1}d_m(x))$ para todo x en X_m.

Cuando queramos expresar que un complejo simplicial $X_\bullet$ consiste en núcleos simpliciales en dimensiones mayores que n escribiremos $X_\bullet = COSK^n(X_\bullet)$.

Notemos que si $X_\bullet = COSK^n(X_\bullet)$, un (n + 1) -simplice $\xi \in X_{n+1}$ será una (n+2)-upla $\xi = (x_0, \dots\dots, x_{n+1})$, con $x_i \in X_n$ verificando $d_i x_j = d_{j-1} x_i$, $i<j$.

Un (n+2)-simplice $z \in X_{n+2}$ será una (n+ 3) -upla $z = (\xi_0, \dots\dots\dots, \xi_{n+2})$ donde cada $\xi_i \in X_{n+1}$, por tanto z tendrá una expresión matricial.

$$z = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots\cdots & x_{0n} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n0} & x_{n1} & x_{n2} & \cdots\cdots & x_{nn} \\ x_{n+1\,0} & x_{n+1\,1} & x_{n+1\,2} & \cdots\cdots & x_{n+1\,n} \end{pmatrix}$$

verificándose que $x_{ji} = x_{i\,j-1}$ $i<j$ (Esta propiedad se ha reflejado en la matriz z mediante los rectángulos punteados, siendo iguales los elementos dentro de dos rectángulos con el mismo número de elementos.).

Es fácil de comprobar que cada fila (columna) de la matriz z queda totalmente determinada por las restantes filas (columnas).

Notemos que puesto que $\mathbb{C}$ tiene colímites finitos, un proceso dual puede ser utilizado para definir conúcleos simpliciales de los correspondientes sistemas de operadores degeneración $X_{n-1} \overset{s_{n-2}}{\underset{s_0}{\longleftarrow}} X_{n-2}$,obteniéndose el funtor sk^n por iteraciones sucesivas de conúcleos simpliciales a partir de la dimensión n+1 .Notemos que $SK^o(X_\bullet)$ es el complejo simplicial constante K (X ,o), en este caso la counidad de la adjunción $SK^o(X_\bullet) \xrightarrow{\sigma} X_\bullet$ viene dada por los operadores degeneración ($\sigma: X_o \longrightarrow X_n$, $\sigma_n = s_o^n$, $\sigma_o = id_{X_o}$) .

Análogamente a la definición de núcleo simplicial definiremos los objetos de "open i-horns".

Sea $X_\bullet$ un objeto simplicial en $\mathbb{C}$, se define el objeto de open i-horn en dimensión "n" de $X_\bullet$, como un objeto de $\mathbb{C}$ al que denotaremos por $\Lambda_n^i(X_\bullet)$, junto con morfismos $p_o, \ldots p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_n : \Lambda_n^i(X_\bullet) \longrightarrow X_{n-1}$ tales $d_j p_k = p_{k-1} d_j$ para $j < k$ y $j , k \neq i$, que satisface la siguiente propiedad universal: Para cada familia de morfismos $x_o, \ldots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \ldots, x_n : T \longrightarrow X_{n-1}$ tales que $d_j x_k = d_{k-1} x_j$ $j < k$,$j,k \neq i$ existe un único morfismo $x = \langle x_o, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \rangle : T \longrightarrow \Lambda_n^i(X_\bullet)$ tal que $p_j\, x = x_j$ .Como consecuencia un elemento x de $\Lambda_n^i(X_\bullet)$ será representado como una n-upla $x = (x_o, \ldots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ con x_k en X_{n-1} verificando $d_j x_k = d_{k-1} x_j$ $j<k$, $k,j \neq i$.

Si $\Delta_n(X_\bullet)$ es el núcleo simplicial de $X_\bullet$ en dimensión n ,los morfismos $p_j : \Delta_n(X_\bullet) \longrightarrow X_n$ $j \neq i$ inducen un único morfismo $H_n(i) : \Delta_n(X_\bullet) \longrightarrow \Lambda_n^i(X_\bullet)$ $(H_n(i)(x_o, \ldots, x_n) = (x_o, \ldots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \ldots, x_n))$ .Así para cada objeto simplicial $X_\bullet$ tenemos, en cada dimensión, un diagrama conmutativo

o.2.6)

$$\begin{tikzcd} & X_n \arrow[dl, "D_n"'] \arrow[dr, "K_n(i)"] & \\ \Delta_n(X_\bullet) \arrow[rr, "H_n(i)"] & & \Lambda_n^i(X_\bullet) \end{tikzcd}$$

donde D_n es el único morfismo inducido por $d_o, \ldots, d_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ $(D_n(x) = (d_o(x), \ldots, d_n(x)))$ y $K_n(i)$ el inducido por $d_o, \ldots d_{i-1}, d_{i+1} \ldots d_n : X_n \longrightarrow X_{n-}$ $(K_n(i)(x) = (d_o(x), \ldots, d_i(x), -, d_{i+1}(x), \ldots, d_n(x)))$.

Un objeto simplicial $X_\bullet$: se dirá asferical en dimensión "n" si D_n es un epimorfismo, de Kan en dimension "n" si $K_n(i)$ es un epimorfismo para todo i. $X_\bullet$ se dirá asferical (de Kan) si lo es en todas dimensiones mayores que cero. Si $X_\bullet$ está aumentado por X_{-1}

diremos que es asferical si es asferical en todas dimensiones mayores ó iguales que cero, entendiendo por asferical en dimensión cero que $d_0 : X_0 \longrightarrow X_{-1}$ es el coigualador de $d_0, d_1 : X_1 \longrightarrow X_0$.

Notemos que todo complejo asferical es de Kan. En algunas categorías como son grupos, categorías de interés ó más generalmente, variedades de Mal'cev se verifica que todo complejo simplicial es de Kan (ver[49]) .

Objetos simpliciales contractibles y objetos simpliciales escindidos. El funtor dec.

Sea $X_\bullet \xrightarrow{d_0} X_{-1}$ un objeto simplicial aumentado sobre X_{-1}, se dice que $X_\bullet$ es "contractible" (sobre X_{-1}) si el morfismo simplicial inducido $d_\bullet : X_\bullet \longrightarrow K(X_{-1}, 0)$ es una equivalencia homotópica (i.e. existe un morfismo simplicial $s_\bullet : k (X_{-1}, 0) \longrightarrow X_\bullet$ tal que $d_\bullet s_\bullet$ y $s_\bullet d_\bullet$ son homotópicas a las identidades correspondientes).

Un complejo simplicial aumentado $X_\bullet \xrightarrow{d_0} X_{-1}$ (análogamente para complejos simpliciales) se dice " escindido " si existe una familia de morfismos $\{s_{n+1} : X_n \longrightarrow X_{n+1}, n+1 \geq 0\}$ satisfaciendo todas las identidades simpliciales. La familia $\{s_{n+1}\}$ se llama "contracción" y se verifica que un complejo simplicial aumentado es contractible si y solo si es escindido.

Denotaremos por Coher AugSimpl ($\mathbb{C}$) a la categoría cuyos objetos son pares $(X_\bullet \longrightarrow X_{-1}, \{s_{n+1}, n+1 > 0\})$ formados por un complejo simplicial aumentado y escindido $X_\bullet \longrightarrow X_{-1}$, junto con una contracción fijada $\{s_{n+1}, n+1 > 0\}$ y cuyos morfismos son los morfismos de complejos simpliciales aumentados, que respetan las contracciones.

Si Δ_* la subcategoría de Δ cuyos objetos son los de Δ pero considerados como conjuntos punteados con elemento distinguido el último elemento de cada conjunto (([n] , n)) y cuyos morfismos son los morfismos en Δ que sean morfismos de conjuntos punteados . Entonces la categoría CoherAugSimpl ($\mathbb{C}$) = $\mathbb{C}^{\Delta_*^{op}}$

La inclusión $\Delta_* \hookrightarrow \Delta$ induce un funtor al que denotaremos dec : $\mathbb{C}^{\Delta^{op}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\Delta_*^{op}}$, si $X_\bullet$ es un complejo simplicial, el complejo simplicial aumentado que se obtiene olvidado el último operador cara de $X_\bullet$ junto con la contracción dada por el último operador degeneración en cada dimensión será dec ($X_\bullet$)

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathrm{dec}(X_\bullet) = \cdots X_{n+1} \arrow[r, shift left=2, "d_n"] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right=2, "d_0"'] & X_n \arrow[l, bend right=60, "s_n"'] \arrow[l, bend right=40, dotted, "s_{n-1}"'] \arrow[l, bend right=20, "s_0"'] \arrow[r, shift left=2, "d_{n-1}"] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right=2, "d_0"'] & X_{n-1} \arrow[l, bend right=60, "s_{n-1}"'] \arrow[l, bend right=45, "s_{n-2}"'] \arrow[l, bend right=30, dotted] \arrow[l, bend right=20, "s_0"'] & \cdots & X_2 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & X_1 \arrow[l, bend right=50, "s_1"'] \arrow[l, bend right=25, "s_0"'] \arrow[r, "d_0"] & X_0 \arrow[l, bend right=40, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

Este funtor tiene un adjunto izquierda $+ : \mathbb{C}^{\Delta_*^{op}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\Delta^{op}}$ que consiste en olvidar la contracción y la aumentación de cada objeto en $\mathbb{C}^{\Delta_*^{op}}$. Denotaremos por DEC (-)

al funtor composición $+\circ$ dec, que consiste en olvidar de cada complejo simplicial $X_\bullet$ el último operador cara y degeneración así como el objeto X_0. La unidad da la adjunción $\mathrm{DEC}(X_\bullet) \longrightarrow X_\bullet$ está dada en cada dimensión por el último operador cara

0.2.7)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{DEC}(X_\bullet) : \cdots \arrow[d] & X_{n+1} \arrow[r, shift left, "d_n"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] \arrow[d, "d_{n+1}"'] & X_n \cdots \arrow[l, bend right=40, "s_{n-1}"'] \arrow[l, bend right=20, "s_0"] \arrow[d, "d_n"'] & X_2 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] \arrow[d, "d_2"'] & X_1 \arrow[l, bend right=30, "s_0"'] \arrow[d, "d_1"] \\
X_\bullet : \cdots & X_n \arrow[r, shift left, "d_n"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & X_{n-1} \cdots \arrow[l, bend right=40, "s_{n-1}"'] \arrow[l, bend right=20, "s_0"] & X_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & X_0 \arrow[l, bend right=30, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

Notemos que el funtor dec: Simpl ($\mathbb{C}$) $\longrightarrow$ CoherAugSimpl ($\mathbb{C}$) es tripleable y que la " resolución estandar " de un complejo $X_\bullet$, dada por el cotriple DEC es

0.2.8)
$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X_\bullet) : \cdots \mathrm{DEC}^3(X_\bullet) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{DEC}^2(X_\bullet) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{DEC}(X_\bullet) \arrow[l, bend right] \arrow[r, two heads] & X_\bullet
\end{tikzcd}$$
que será un "complejo simplicial doble " aumentado (i.e. un complejo simplicial aumentado en la categoría de complejos simpliciales en $\mathbb{C}$), el cual es de la forma

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots X_6 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & X_5 \arrow[r, shift left, "d_5"] \arrow[r, shift right, "d_4"'] \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift right=3] & X_4 \arrow[r, "d_4"] \arrow[d, shift right=3, "d_0"'] \arrow[d, shift right=1, "d_1"'] \arrow[d, shift left=1, "d_2"'] \arrow[d, shift left=3, "d_3"'] & X_3 \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift right=3] \\
\cdots X_5 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & X_4 \arrow[r, shift left, "d_4"] \arrow[r, shift right, "d_3"'] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & X_3 \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, shift right=2, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[d, shift left=2, "d_2"] & X_2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
\cdots X_4 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & X_3 \arrow[r, shift left, "d_3"] \arrow[r, shift right, "d_2"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & X_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & X_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
\cdots X_3 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & X_2 \arrow[r, shift left, "d_2"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & X_1 \arrow[r, "d_1"] & X_0
\end{tikzcd}$$

Donde en la columna i-ésima aparece $\mathrm{DEC}^i(X_\bullet)$ y en la fila i-ésima ($\mathrm{dec}^i(X_\bullet^{op}))^{op}$ (el complejo simplicial $X_\bullet^{op}$ se obtiene invirtiendo la numeración de los operadores caras y degeneraciones, $X_n^{op} = X_n$, $d_i^{op} : X_n^{op} \longrightarrow X_{n-1}^{op}$ es d_{n-i}). Denotaremos por DEC^{op} al funtor definido por $\mathrm{DEC}^{op}(X_\bullet) = \mathrm{DEC}(X_\bullet^{op})^{op}$, que consiste en olvidar del complejo $X_\bullet$ los primeros operadores caras y degeneraciones en cada dimensión así como el objeto X_0. Este funtor será la composición $+\circ$ dec^{op}, donde dec^{op} viene dado por la inclusión $\Delta^* \hookrightarrow \Delta$, con Δ^* la subcategoría de Δ cuyos objetos son los objetos de Δ considerados como conjuntos con punto, siendo el cero el elemento distinguido de cada conjunto y los morfismos las aplicaciones de Δ que sean de conjuntos con punto.

Fibraciones exactas

Un morfismo simplicial $f_\bullet : X_\bullet \longrightarrow Y_\bullet$ se dice que es una " fibración exacta " en dimensión n si el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
X_n \arrow[r, "K_n(i)"] \arrow[d, "f_n"'] & \Lambda^i_n(X_\bullet) \arrow[d] \\
Y_n \arrow[r, "K_n(i)"] & \Lambda^i_n(Y_\bullet)
\end{tikzcd}$$

es un pullback para cada $i = o,\dots,n$. Se dirá que $f_\bullet$ es una fibración exacta si lo es en todas dimensiones $n > o$.

Si $f_\bullet$ es una fibración exacta entonces se verifica:

(a) $Y_\bullet$ es de Kan $\Longrightarrow$ $X_\bullet$ es de Kan

(b) $Y_\bullet$ es asferical $\Longrightarrow$ $X_\bullet$ es asferical

(c) $Y_\bullet \cong \mathrm{COSK}^n(Y_\bullet) \Longrightarrow X_\bullet \cong \mathrm{COSK}^n(X_\bullet)$

(d) $Y_n \cong \Lambda^i_n(Y_\bullet) \Longrightarrow X_n \cong \Lambda^i_n(X_\bullet)$.

(0.3) OBJETOS SIMPLICIALES DOBLES Y EL FUNTOR CLASIFICADOR $\overline{W}$.

En un estudio produndo de los métodos utilizados por Frenckel,Dedecker,Grothedieck y otros [29] [19] [30],para la obtención de una sucesión exacta de nueve puntos,de conjuntos con elementos distinguidos ,asociada a una sucesión exacta corta de grupos no abelianos y mientras tratábamos de unificar estos métodos y los utilizados en el caso abeliano por Glenn [32] ,desarrollando una teoría de cohomología en un topo ó en una categoría exacta de Barr $\mathbb{C}$,váli-da tanto para el caso abeliano como para el no abeliano.
Se pone de manifiesto la importancia que tiene para la obtención de los " 2-hipergrupoides" (sistemas de coeficientes) así como para definir el segundo morfismo de conexión , la categoría de los complejos simpliciales en grupos (internos en $\mathbb{C}$) y principalmente su relación con la categoría subyacente de los objetos simpliciales (en $\mathbb{C}$) , vía un funtor clasificador $\overline{W}$ que asocia a cada grupo simplicial $G_{\bullet\bullet}$ un complejo simplicial $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})$ que tiene la propiedad de que cada clase de isomorfismos de " principal bundle " sobre $G_{\bullet\bullet}$ con base $B_\bullet$ corresponden biyectivamente a una clase de homotopía de morfismos simpliciales de $B_\bullet$ en $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})$.

La observación de que cada grupo simplcial

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet} = \cdots G_3 \arrow[r, shift left=4.5] \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, shift right=1.5] \arrow[r, shift right=4.5] & G_2 \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=40] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r] \arrow[r, shift right=3] & G_1 \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, shift right=1.5] & G_0 \arrow[l, bend right=25]
\end{tikzcd}$$

puede ser considerado como un complejo simplicial doble, i.e. un complejo simplicial en Simpl($\mathbb{C}$)

0.3.1)

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet} = \cdots\cdots K(G_3,1) \arrow[r, shift left=4.5] \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, shift right=1.5] \arrow[r, shift right=4.5] & K(G_2,1) \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=40] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r] \arrow[r, shift right=3] & K(G_1,1) \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, shift right=1.5] & K(G_0,1) \arrow[l, bend right=25] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots\cdots G_3^2 \arrow[r, shift left=4.5] \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, shift right=1.5] \arrow[r, shift right=4.5] \arrow[d, shift right=3] \arrow[d] \arrow[d, shift left=3] & G_2^2 \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=40] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r] \arrow[r, shift right=3] \arrow[d, shift right=3] \arrow[d] \arrow[d, shift left=3] & G_1^2 \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, shift right=1.5] \arrow[d, shift right=3] \arrow[d] \arrow[d, shift left=3] & G_0^2 \arrow[l, bend right=25] \arrow[d, shift right=3] \arrow[d] \arrow[d, shift left=3] \\
\cdots\cdots G_3 \arrow[u, bend right=20] \arrow[u, bend right=35] \arrow[r, shift left=4.5] \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, shift right=1.5] \arrow[r, shift right=4.5] \arrow[d, shift right=1.5] \arrow[d, shift left=1.5] & G_2 \arrow[u, bend right=20] \arrow[u, bend right=35] \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=40] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r] \arrow[r, shift right=3] \arrow[d, shift right=1.5] \arrow[d, shift left=1.5] & G_1 \arrow[u, bend right=20] \arrow[u, bend right=35] \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, shift right=1.5] \arrow[d, shift right=1.5] \arrow[d, shift left=1.5] & G_0 \arrow[u, bend right=20] \arrow[u, bend right=35] \arrow[l, bend right=25] \arrow[d, shift right=1.5] \arrow[d, shift left=1.5] \\
\cdots\cdots \mathbb{1} \arrow[r, equal] & \mathbb{1} \arrow[u, bend right=30] \arrow[r, equal] & \mathbb{1} \arrow[u, bend right=30] \arrow[r, equal] & \mathbb{1} \arrow[u, bend right=30]
\end{tikzcd}$$

donde los objetos simpliciales K (G_i , 1) son los conocidos complejos de Eilenberg-Maclane del grupo G_i [32] , junto con un estudio detalllado del funtor "Dec " y las situaciones de adjunción que origina, han permitido a Duskin la generalización del clásico funtor $\overline{W}$ desde la categoría de grupos simpliciales a la categoría de complejos simpliciales (ver [11]) a un funtor al que también denotaremos $\overline{W}$ de la categoría de complejos simpliciales dobles en $\mathbb{C}$ a la de complejos simplíciales en $\mathbb{C}$. Este nuevo funtor $\overline{W}$ al igual que ocurre con el clásico, nos permitirá definir los "2-hipergrupoides " (y en general los " n-hipergrupoides") sistemas de coeficientes para nuestra teoría de cohomología así como los morfismos de conexión.

En estos momentos, no existe ninguna bibliografía a la que pueda remitir al lector interesado en las propiedades generales, así como en una más detallada construcción de este , llamemosle " nuevo funtor clasificador $\overline{W}$ "

Este apartado 0.3 está basado en algunas conversaciones particulares con el profesor Duskin y en él solo se pretende dar una definición esquemática de este funtor $\overline{W}$.

Nosotros estamos especialmente interesados en la restricci-ón de este funtor $\overline{W}$ a la categoría de " 2- grupoides " caso que estudiaremos con más detalle en las secciones 1.3 y 2.2 del presente trabajo.

0.3.2) Definición (Complejos simpliciales dobles).

Un complejo simplicial doble en $\mathbb{C}$ es por definición un complejo simplicial en Simpl($\mathbb{C}$).

Denotaremos por $X_{\bullet\bullet}$ a los complejos simpliciales dobles

).3.3)

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
X_{\bullet\bullet} = \cdots & X_{\bullet 4} \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, shift right=4] & X_{\bullet 3} \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=40] \arrow[l, bend right=50] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & X_{\bullet 2} \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=40] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & X_{\bullet 1} \arrow[l, bend right=25] \arrow[l, bend right=40] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & X_{\bullet 0} \arrow[l, bend right=30] \\
\cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & X_{40} \arrow[d, shift left=4] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, shift right=4] \\
\cdots & \vdots & \vdots & \vdots & X_{31} \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift right=3] & X_{30} \arrow[l, bend right=30] \arrow[u, bend right=20] \arrow[u, bend right=30] \arrow[u, bend right=40] \arrow[u, bend right=50] \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift right=3] \\
\cdots & \vdots & \vdots & X_{22} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & X_{21} \arrow[l, bend right=25] \arrow[l, bend right=40] \arrow[u, bend right=20] \arrow[u, bend right=30] \arrow[u, bend right=40] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, shift left=2, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[d, shift right=2, "d_2"'] & X_{20} \arrow[l, bend right=30] \arrow[u, bend right=20] \arrow[u, bend right=30] \arrow[u, bend right=40] \arrow[d, shift left=2, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"'] \arrow[d, shift right=2, "d_2"'] \\
\cdots & \vdots & X_{13} \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] & X_{12} \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=40] \arrow[u, bend right=25] \arrow[u, bend right=40] \arrow[r, shift left=2, "D_0"] \arrow[r, "D_1"] \arrow[r, shift right=2, "D_2"'] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] & X_{11} \arrow[l, bend right=25, "S_0"'] \arrow[l, bend right=40, "S_1"'] \arrow[u, bend right=25] \arrow[u, bend right=40] \arrow[r, shift left=1, "D_0"] \arrow[r, shift right=1, "D_1"'] \arrow[d, shift left=1, "d_0"'] \arrow[d, shift right=1, "d_1"'] & X_{10} \arrow[l, bend right=30, "S_0"'] \arrow[u, bend right=25, "s_0"'] \arrow[u, bend right=40, "s_1"'] \arrow[d, shift left=1, "d_0"'] \arrow[d, shift right=1, "d_1"'] \\
\cdots & X_{04} \arrow[r, shift left=4] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[r, shift right=4] & X_{03} \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=40] \arrow[l, bend right=50] \arrow[u, bend right=30] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & X_{02} \arrow[l, bend right=20] \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=40] \arrow[u, bend right=30] \arrow[r, shift left=2, "D_0"] \arrow[r, "D_1"] \arrow[r, shift right=2, "D_2"'] & X_{01} \arrow[l, bend right=25, "S_0"'] \arrow[l, bend right=40, "S_1"'] \arrow[u, bend right=30, "s_0"'] \arrow[r, shift left=1, "D_0"] \arrow[r, shift right=1, "D_1"'] & X_{00} \arrow[l, bend right=30, "S_0"'] \arrow[u, bend right=30, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

Ejemplos

).3.4) Sea $X_\bullet$ un objeto simplicial en $\mathbb{C}$ entonces mediante aplicaciones reiterativas del funtor DEC a $X_\bullet$ obtenemos el complejo simplicial doble (0.2.8)

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X_\bullet) : \dots \ \mathrm{DEC}^3(X_\bullet) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{DEC}^2(X_\bullet) \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & \mathrm{DEC}(X_\bullet)
\end{tikzcd}$$

0.3.5) Si $G_{\bullet\bullet}$ es un grupo simplicial entonces $G_{\bullet\bullet}$ tiene asociado un complejo simplicial doble al que notamos igual

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet} = \dots\dots \ K(G_2,1) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & K(G_1,1) \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & K(G_0,1)
\end{tikzcd}$$

0.3.6) Si denotamos por X_o = CAT la categoría de categorías pequeñas , X_1 el conjunto de funtores entre dos categorías pequeñas y X_2 el conjunto de transformaciones naturales entre funtores de X_1 se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
X_2 \arrow[r, shift left=1, "D_1"] \arrow[r, shift right=1, "D_o"'] \arrow[d, shift right=1, "d_o"'] \arrow[d, shift left=1, "d_1"] & X_1 \arrow[l, bend right=50, "S_o"'] \arrow[d, shift right=1, "d_o"'] \arrow[d, shift left=1, "d_1"] \\
X_o \arrow[u, bend right=40, "s_o"'] \arrow[r, equal] & X_o \arrow[u, bend right=40, "s_o"']
\end{tikzcd}$$

donde D_i, d_i son las aplicaciones "origen" y "final" , $s_0 : X_0 \longrightarrow X_1$ asocia a cada categoría el funtor identidad, $S_0 : X_1 \longrightarrow X_2$ asocia a cada funtor la transformación natural identidad y $s_0 : X_0 \longrightarrow X_2$ a cada categoría la transformación natural identidad del funtor identidad. Este diagrama simplicial doble truncado puede completarse a un complejo simplicial doble

$$\begin{tikzcd}
 & & \vdots & \vdots \\
 & \cdots & X_2 \times_{X_0} X_2 \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift right=2, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"] \arrow[d, shift left=2, "d_2"] & X_1 \times_{X_0} X_1 \arrow[l, bend right=40, "S_0"'] \arrow[d, shift right=2, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"] \arrow[d, shift left=2, "d_2"] \\
\cdots & X_2 \times_{X_1} X_2 \arrow[r, shift left=2, "D_2"] \arrow[r, "D_1"] \arrow[r, shift right=2, "D_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & X_2 \arrow[l, bend right=30] \arrow[l, bend right=50] \arrow[u, bend right=30] \arrow[u, bend right=50] \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & X_1 \arrow[l, bend right=40, "S_0"'] \arrow[u, bend right=30] \arrow[u, bend right=50] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
\cdots & X_0 \arrow[u, bend right=40, "s_0"'] \arrow[r, equal] & X_0 \arrow[u, bend right=40, "s_0"'] \arrow[r, equal] & X_0 \arrow[u, bend right=40, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

donde $X_1 \times_{X_0} X_1$, $X_2 \times_{X_0} X_2$, $X_2 \times_{X_1} X_2$, son los conjuntos de pares componibles, $d_0, d_2 : X_1 \times_{X_0} X_1 \longrightarrow X_1$ $d_0, d_2 : X_2 \times_{X_0} X_2 \longrightarrow X_2$ y $D_0, D_2 : X_2 \times_{X_1} X_2 \longrightarrow X_2$ son las respectivas proyecciones, $d_1 : X_1 \times_{X_0} X_1 \longrightarrow X_1$ esta dada por la composición de funtores $d_1 : X_2 \times_{X_0} X_2 \longrightarrow X_2$ por la composición horizontal de transformaciones naturales y $D_1 : X_2 \times_{X_0} X_2 \longrightarrow X_2$ por la composición vertical de transformaciones naturales, los objetos en dimensiones superiores serán núcleos simpliciales.

Este es un importante ejemplo de complejo simplicial doble que además es una " 2-categoría " .

La construcción de $\overline{W}$ que Duskin tiene en mente está basada en varias observaciones sobre categorías monádicas y sus teorías de cohomología asociadas, en el caso de que existan ciertas adjunciones. Esquematicemos aquí estas propiedades; si $U: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{B}$ es un funtor con un adjunto izquierda F, entonces el cotriple $\mathbb{G}: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ definido por la adjunción $F \dashv U$ puede ser iterado para producir, para cada objeto X de $\mathbb{E}$, un complejo simplicial aumentado $\mathbb{G}_\bullet(X) \twoheadrightarrow X$ elcual viene a ser una resolución ("proyectiva") estandar de X. Si G es un objeto de $\mathbb{E}$ que tiene una estructura algebráica definida por límites inversos, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(X, G)$ es un conjunto con el mismo tipo de estructura algebráica, aplicando entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(-,G)$ término a término a la resolución estandar de X obtenemos un co-complejo simplicial aumentado en conjuntos que tiene el mismo tipo de estructura algebráica que G.

Por ejemplo si G es un objeto grupo abeliano en $\mathbb{E}$, el cocomplejo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(X,G) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(\mathbb{G}_\bullet(X),G)$ puede ser usado para definir, usando sumas alternadas un complejo de cadenas y así de la manera usual subgrupos $\mathbb{Z}^n(X,G)$ de n-cociclos normalizados y los grupos de cohomología $H^n_{\mathbb{G}}(X,G)$ de X con coeficientes en G. Si la categoría $\mathbb{E}$ tiene productos, entonces los grupos $\mathbb{Z}^n(X,G)$ son siempre representables en la categoría de objetos simpliciales en $\mathbb{E}$ mediante morfismos simpliciales de $\mathbb{G}_\bullet(X)$ a los conocidos complejos de Eilenberg-Maclane $K(G,n)$ (ver [25]) y los grupos de cohomología $H^n_{\mathbb{G}}(X,G)$ corresponden a clases de homotopía de estos morfismos simpliciales de $\mathbb{G}_\bullet(X)$ en $K(G,n)$. Además si U es monádico, cada uno de estos grupos puede representarse por los $K(G,n)$-torsores de X (ver [25]). En dimensión uno, estos son los " principal G-bundles " en $\mathbb{E}$ de X (relativos a U) i.e. objetos $E \xrightarrow{p} X$ en $\mathbb{E}/X$ sobre los cuales el grupo G opera principal y transitivamente y los cuales escinden al aplicar el funtor U (i.e. $U(E) \underset{U(p)}{\overset{\leftarrow - s -}{\longrightarrow}} U(X)$).

El caso que es especialmente interesante es aquel en que el funtor U tiene, además de F, un adjunto a la derecha $V : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{E}$.

En este caso, el cotriple $\mathbb{G}$ tiene un adjunto derecha (triple) $\mathbb{W} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} \arrow[loop left, "\mathbb{G}"] \arrow[loop right, "\mathbb{W}"] \arrow[d, shift right=2, "F"'] \arrow[d, shift left=2, "V"] \\
\mathbb{B} \arrow[u, "U"]
\end{tikzcd}$$

el cual puede usarse para producir mediante aplicaciones sucesivas, para cada objeto G de $\mathbb{E}$; un co-complejo aumentado $G \longrightarrow \mathbb{W}_\bullet(G)$ el cual viene a ser una resolución (" inyectiva ") estandar de G. Si G tiene una estructura algebráica definida por límites inversos los cuales existen en $\mathbb{E}$ el co-complejo $G \longrightarrow \mathbb{W}_\bullet(G)$ tiene la misma estructura. Por la adjunción, para cada X y cada G los complejos en conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(\mathbb{G}_\bullet(X),G)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(X,\mathbb{W}_\bullet(G))$ son isomorfos y tienen la misma aumentación $\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(X,G)$ para cualquiera que sea la estructura algebráica de G. Este hecho tiene numerosas consecuencias: por ejemplo, si G es un objeto grupo abeliano en $\mathbb{E}$ y $\mathbb{E}$ tiene límites finitos entonces el funtor valuado en grupos abelianos $\mathbb{Z}^n(X,G)$

es representable siempre por un objeto grupo abeliano de $\mathbb{E}$. Además si designamos por $\overline{W}$ (G) al objeto grupo abeliano de $\mathbb{E}$ que representa el grupo de los 1- cociclos $\mathbb{Z}^1(X,G) \cong \mathrm{Hom}(X,\overline{W}(G))$ se tiene entonces un funtor $\overline{W}$: Grab ($\mathbb{E}$) → Grab ($\mathbb{E}$) verificándose que el grupo de los n-cociclos de X sobre G es representable por $\overline{W}^n(G)$

$$\mathbb{Z}^n(X,G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(X,\overline{W}^n(G))$$

Además se verifica que $\overline{W}(G)$ tiene una estructura de " grupoide " interno en $\mathbb{E}$ teniéndose una equivalencia de grupoides

$$\mathrm{TORS}^1(X,G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}}(X,\overline{W}(G))$$

de tal forma que clases de isomorfismos de G-torsores de X corresponden a clases de "homotopía" de morfismos de X en $\overline{W}(G)$, exactamente igual que en el caso topológico (ver[11]).

Las construcciones anteriores, al menos en dimensiones bajas, no dependen de que el "sistema de coeficientes" sea un grupo abeliano, por ejemplo si G es un grupo no abeliano, es facil definir un conjunto de 1-cociclos sobre el cual el grupo de 0-cocadenas opera para producir un conjunto punteado $H^1(X,G)$ y la interpretación citada anteriormente es cierta tambien para este conjunto; es decir $H^1(X,G)$ corresponde a clases de isomorfismos de "principal fiber bundles" U-escindidos. En este caso el complejo $\overline{W}(G)$ es solo un objeto de $\mathbb{E}$, no obstante la equivalencia entre "G-torsores" de X y morfismos de X a $\overline{W}(G)$ sigue siendo cierta.

Analogamente, estas construcciones pueden hacerse para objetos "grupoides" en $\mathbb{E}$ e incluso para categorías internas, pudiendo ser generalizadas a dimensiones superiores por ejemplo para categorías multiples o grupoides multiples.

Aplicaremos ahora las observaciones anteriores a la categoría $\mathbb{E} = \mathrm{Simpl}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\Delta^{op}}$ y $\mathbb{B} = \mathrm{CoherAugSimpl}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\Delta_{\bullet}^{op}}$, donde el funtor de olvido U es el funtor dec, su adjunto por la izquierda es F= + . La categoría $\mathbb{C}^{\Delta^{op}}$ es siempre monádica sobre $\mathbb{C}^{\Delta_{\bullet}^{op}}$, puesto que dar un álgebra sobre el "triple " en $\mathbb{C}^{\Delta^{op}}$ definido por el par adjunto $+ \dashv$ dec es precisamente suministrar el operador olvidado d_n en cada dimensión, Además como $\mathbb{C}$ tiene productos finitos, el funtor dec tiene un adjunto derecha $V: \mathbb{C}^{\Delta_{*}^{op}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\Delta^{op}}$, pudiendose por lo tanto aplicar lo dicho anteriormente a la situación

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{\Delta^{op}} \arrow[loop left, "DEC"] \arrow[loop right, dashed, "W"] \arrow[d, "dec"] \\
\mathbb{C}^{\Delta_{\bullet}^{op}} \arrow[u, shift left=4, "+"] \arrow[u, shift right=2, "V"']
\end{tikzcd}$$

Un objeto grupo $G_\bullet$ en $\mathbb{C}^{\Delta^{op}}$ es un grupo simplicial y un 1-cociclo para el "cotriple" DEC (en su forma no homogénea) es un "twisting functor " .La construcción de un torsor sobre $G_\bullet$ a partir de un 1-cociclo es precisamente la construcción de un "twisted cartesian product " a partir de una " twisted function " (ver [11]) y $\overline{W}$ y $\mathbb{W}$ son los mismos funtores definidos por Eilenberg-Maclane y Cartan (ver [11]) cuando $\mathbb{C}$ es la categoría de conjuntos. Utilizando entonces la propiedad universal que caracteriza a $\overline{W}$ de cualquier estructura algebráica $G_{\bullet\bullet}$ en $\mathbb{C}^{\Delta^{op}}$ i.e.

$$\mathbb{Z}^1 (\mathrm{DEC}_\bullet (X_\bullet) , G_{\bullet\bullet}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\Delta op}} (X_\bullet , \overline{W} (G_{\bullet\bullet}))$$

Es posible generalizar la definición clásica de $\overline{\mathbb{W}}$ de un grupo simplicial en conjuntos primero a una categoría interna en $\mathrm{Set}^{\Delta^{op}}$,posteriormente a un complejo simplicial doble en conjuntos y por último a un complejo simplicial doble en $\mathbb{C}$. Obteniéndose la siguiente definición del funtor $\overline{W}$: $\mathrm{Simpl} (\mathrm{Simpl} (\mathbb{C})) \longrightarrow \mathrm{Simpl} (\mathbb{C})$.
Sea $X_{\bullet\bullet}$ un complejo simplicial doble (ver (0 .3.3)) , $\overline{W} (X_{\bullet\bullet})$ viene dado como sigue:
$\overline{W} (X_{\bullet\bullet})_0 = X_{00}$, $\overline{W} (X_{\bullet\bullet})_1$ es el objeto pullback

0.3.7)

$$\begin{tikzcd}
\overline{W} (X_{\bullet\bullet})_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_{1o} \arrow[d, "d_o"] \\
X_{o1} \arrow[r, dash, "D_1"] & X_{oo}
\end{tikzcd}$$

sus elementos serán pares $(x_{o1} , x_{1o}) \in X_{o1} \times X_{1o}$ verificando que $D_1 (x_{o1}) = d_o (x_{1o})$
$\overline{W} (X_{\bullet\bullet})_2$ es el objeto pullback que aparece en el ángulo superior izquierdo del siguiente diagrama en el que todos los cuadrados son pullback

(0.3.8)

$$\begin{tikzcd}
\overline{W} (X_{\bullet\bullet})_2 \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, dash] & X_{2o} \arrow[d, "d_o"] \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & X_{11} \arrow[r, "D_1"] \arrow[d, "d_o"'] & X_{1o} \\
X_{o2} \arrow[r, "D_2"] & X_{o1} &
\end{tikzcd}$$

sus elementos serán ternas $(x_{o2} , x_{11} , x_{2o}) \in X_{o2} \times X_{11} \times X_{2o}$ verificando que $D_2 (x_{o2}) = d_o (x_{11})$, $D_1 (x_{11}) = d_o (x_{2o})$.

En general $\overline{W} (X_{\bullet\bullet})_n$ es el objeto pullback que aparece en el ángulo superior izquierdo del siguiente diagrama,en el que todos los cuadrados son pullback

0.3.9)
$$\begin{tikzcd}
\overline{W}(X_{..})_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, dotted] & \cdots \arrow[r, dotted] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & X_{no} \arrow[d, "d_o"] \\
\vdots \arrow[rrr, dotted] & & & X_{n-1,n} \arrow[r, "D_1"] & X_{n-1,o} \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[r] \arrow[d] & X_{2n-2} \arrow[r, "D_{n-2}"] \arrow[d, "d_o"] & {} & \\
{} \arrow[r] \arrow[d] & X_{1n-1} \arrow[r, "D_{n-1}"] \arrow[d, "d_o"] & X_{1n-2} & & \\
X_{on} \arrow[r, "D_n"] & X_{on-1} & & &
\end{tikzcd}$$

sus elementos serán $(n+1)$-uplas $(x_{on}, x_{1n-1}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{n-1\,1}, x_{no}) \in \prod_{i+j=n} X_{ij}$ verificándose que $D_j(x_{ij}) = d_o(x_{i+1,j-1})$ con $i+j = n$.

Los operadores caras $d_i : \overline{W}(X_{..})_n \longrightarrow \overline{W}(X_{..})_{n-1}$ vienen dados por :

$d_o, d1 : \overline{W}(X_{..})_1 \longrightarrow \overline{W}(X_{..})_o$

$d_o(x_{o1}, x_{1o}) = D_o(x_{o1})$

$d_1(x_{o1}, x_{1o}) = d_1(x_{1o})$

$d_o, d_1, d_2 = \overline{W}(X_{..})_2 \longrightarrow \overline{W}(X_{..})_1$

$d_o(x_{o2}, x_{11}, x_{2o}) = (D_o(x_{o2}), D_o(x_{11}))$

$d_1(x_{o2}, x_{11}, x_{2o}) = (D_1(x_{o2}), d_1(x_{2o}))$

$d_2(x_{o2}, x_{11}, x_{22}) = (d_1(x_{11}), d_2(x_{2o}))$

$d_o, d_1, d_2, d_3 : \overline{W}(X_{..})_3 \longrightarrow \overline{W}(X_{..})_2$

$d_o, (x_{o3}, x_{12}, x_{21}, x_{3o}) = (D_o(x_{o3}), D_o(x_{12}), D_o(x_{21}))$

$d_1(x_{o3}, x_{12}, x_{21}, x_{3o}) = (D_1(x_{o3}), D_1(x_{12}), d_1(x_{3o}))$

$d_2(x_{o3}, x_{12}, x_{21}, x_{3o}) = (D_2(x_{o3}), d_1(x_{21}), d_2(x_{3o}))$

$d_3(x_{o3}, x_{12}, x_{21}, x_{3o}) = (d_1(x_{12}), d_2(x_{21}), d_3(x_{3o}))$

en general $d_o \ldots d_n : \overline{W}(X_{..})_n \longrightarrow \overline{W}(X_{..})_{n-1}$

$d_o(x_{on}, x_{1n-1}, x_{2n-2}, \ldots, x_{no}) = (D_o(x_{on}), D_o(x_{1n-1}), \ldots, D_o(x_{n-1,1}))$

$d_1(x_{on}, x_{1n-1}, \ldots, x_{no}) = (D_1(x_{on}), \ldots, D_1(x_{n-2,2}), d_1(x_{no}))$

$d_2(x_{on}, x_{1n-1}, \ldots, x_{no}) = (D_2(x_{on}), \ldots, D_2(x_{n-3,3}), d_1(x_{n-1,o}), d_2(x_{n,o}))$

. . . .

$$d_i\ (x_{on},\ldots,x_{no}) = (D_i\ (x_{no}),\ldots\ldots,D_i\ (x_{n-1,i+1})\ ,d_1\ x_{n-i+1,i-1}),\ldots,d_i\ (x_{no}))$$

. . . .

$$d_n\ (x_{on},\ldots,x_{no}) = (d_1(x_{1n-1})\ ,d_2\ (x_{2n-2}),\ldots\ldots\ldots,\ d_n\ (x_{no})\ )$$

Las operaciones degeneración $s_i : \overline{W}\ (X_{\bullet\bullet})_{n-1} \longrightarrow \overline{W}\ (X_{\bullet\bullet})_n$ vienen dados por:

$$s_o : \overline{W}\ (X_{\bullet\bullet})_o \longrightarrow \overline{W}(X_{\bullet\bullet})_1$$

$$s_o\ (x) = (S_o(x)\ ,s_o\ (x)\ )$$

$$s_o,s_1 : \overline{W}\ (X_{\bullet\bullet})_1 \longrightarrow \overline{W}\ (X_{\bullet\bullet})_2$$

$$s_o\ (x_{o1},x_{1o}) = (S_o\ (x_{o1})\ ,S_o(x_{1o})\ ,s_o(x_{1o})\ )$$

$$s_1\ (x_{o1},x_{1o}) = (S_1\ (x_{o1})\ ,s_o(x_{o1})\ ,s_1\ (x_{1o})\ )$$

$$s_o s_1 s_2 : \overline{W}\ (X_{\bullet\bullet})_2 \longrightarrow \overline{W}\ (X_{\bullet\bullet})_3$$

$$s_o\ (x_{o2},x_{11},x_{2o}) = (S_o\ (x_{o2}),S_o\ (x_{11}),S_o\ (x_{2o}),s_o\ (x_{2o})\ )$$

$$s_1\ (x_{o2},x_{11},x_{2o}) = (S_1\ (x_{o2}),\ S_1(x_{11})\ ,\ s_o\ (x_{11})\ ,\ s_1\ (x_{2o})\ )$$

$$s_2\ (x_{o2},x_{11},x_{2o}) = (S_2\ (x_{o2})\ ,s_o\ (x_{o2})\ ,s_1(x_{11})\ ,s_2\ (x_{2o})\ )$$

En general $s_o,\ldots,s_{n-1} : \overline{W}\ (X_{\bullet\bullet})_{n-1} \longrightarrow \overline{W}(X_{\bullet\bullet})_n$

$$s_o\ (x_{on-1},x_{1n-2},\ldots,x_{n-1,o}) = (S_o\ (x_{on-1}),S_o(x_{1n-2})\ ,\ldots,S_o\ (x_{n-1,o}),s_o(x_{n-1,o}))$$

$$s_1\ (x_{on-1},x_{1n-2},\ldots,x_{n-1,o}) = (S_1\ (x_{on-1}),\ldots,S_1(x_{n-2,1}),s_o(x_{n-2,1}),s_1(x_{n-1,o}))$$

$$s_2\ (x_{on-1},x_{on-2},\ldots,x_{n-1,o}) = (S_2(x_{on-1}),\ldots,S_2(x_{n-3,2}),s_o(x_{n-3,2}),s_1(x_{n-2,1}),s_2\ (x_{n-1,o})\ )$$

. . . .

$$s_i(x_{on-1},\ldots,x_{n-1}) = (S_i(x_{on-1}),\ldots,S_i(x_{n-i,i}),s_o(x_{n-i,i}),s_1(x_{n-i,i-1}),\ldots,s_i(x_{n-1,o})\ )$$

. . . .

$$s_{n-1}(x_{on-1},\ldots,x_{n-1}) = (S_{n-1}(x_{on-1}),s_o(x_{on-1}),s_1\ (x_{1n-2}),\ldots,s_{n-1}(x_{n-1,o})).$$

El morfismo simplicial $\overline{W}(f_{\bullet\bullet}) : \overline{W}(X_{\bullet\bullet}) \longrightarrow \overline{W}(Y_{\bullet\bullet})$,para $f_{\bullet\bullet}: X_{\bullet\bullet} \longrightarrow Y_{\bullet\bullet}$ un morfismo simplicial doble cualquiera, será el único inducido por $f_{\bullet\bullet}$ utilizando las propiedades universales de los objetos pullback que definen $\overline{W}\ (Y_{\bullet\bullet})$.

Si definimos $\overline{W}^{op}\ (X_{\bullet\bullet})$ como el objeto simplicial que tiene en dimensión n al objeto pullback que aparece en el ángulo superior izquierdo del siguiente diagrama, en el que todos los cuadrados son pullback

.3.10)

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}^{op}(X_{\bullet\bullet})_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[rr] & {} \arrow[d] & X_{no} \arrow[d, "d_n"] \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \arrow[r] & X_{n-1\,1} \arrow[r, "D_o"] & X_{n-1\;o} \\
\cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & X_{2n-2} \arrow[r, "D_o"] \arrow[d, "d_2"] & {} & & \\
{} \arrow[r] \arrow[d] & X_{1n-1} \arrow[r, "D_o"] \arrow[d, "d_1"] & X_{1n-2} & & & \\
X_{on} \arrow[r, "D_o"] & X_{on-1} & & & &
\end{tikzcd}$$

cuyos elementos serán (n+1)-uplas de elementos $(x_{on}, x_{1n-1}, \ldots, x_{n-1,1}, x_{no}) \in X_{on} \times X_{1n-1} \times \ldots \times X_{n-1\;1} \times X_{no}$ verificando que $D_o\, x_{ij} = d_{i+1}\, x_{i+1\; j-1}$ .Con operadores caras y degeneración análogos a los definidos para $\overline{W}$ obtenemos un funtor $\overline{W}^{op}$: Simpl(Simpl ($\mathbb{C}$)) $\longrightarrow$ Simpl($\mathbb{C}$) con las mismas propiedades que el funtor $\overline{W}$.

Ejemplos

.3.11) Si $X_{\bullet\bullet}$ es el objeto simplicial doble constante K ($X_\bullet$,o), para $X_\bullet$ un objeto simplicial en $\mathbb{C}$, entonces $\overline{W}\;(X_{\bullet\bullet}) = X_\bullet$.

.3.12) Si $G_{\bullet\bullet}$ es un grupo simplicial en $\mathbb{C}$ (i.e. $G_{\bullet\bullet}$ es un objeto simplicial en Gp ($\mathbb{C}$)) entonces al aplicar el funtor $\overline{W}$ clásico a $G_{\bullet\bullet}$ obtenemos el mismo objeto simplicial que si aplican este nuevo funtor $\overline{W}$ al complejo simplicial doble

$G_{\bullet\bullet}$: ......K(G_n,1) $\overset{\leftleftarrows}{\rightrightarrows}$ K (G_{n-1},1). . . . K(G_1,1) $\overset{\longleftarrow}{\rightrightarrows}$ K (G_o,1).

CAPÍTULO 1.- HIPERGRUPOIDES Y TORSORES .-

(1.1) GRUPOIDES Y SUCESIONES EXACTAS CORTAS DE GRUPOIDES .-

1.1.1) Definición (Grupoide 1ª definición)

Un grupoide en $\mathbb{C}$ es una categoría interna

$$\begin{tikzcd} G_\bullet = G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, "m"] & G_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & G_0 \arrow[l, bend right=50, "s_0"'] \end{tikzcd}$$

en $\mathbb{C}$ en la que toda flecha es invertible (ver (0.1.10)) .Esto es;para cada elemento f de G_1 existe un único elemento f^{-1} de G_1 verificando:

$$m(f, f^{-1}) = f f^{-1} = s_0 d_0 f$$

$$m(f^{-1}f) = f^{-1} f = s_0 d_1 f$$

1.1.2) Definición (Grupoide 2ª definición)

Un grupoide en $\mathbb{C}$ es un objeto simplicial $G_\bullet$ en $\mathbb{C}$ verificando el axioma GPD siguiente:

Ax. GPD :para todo $m > 1$ y todo $i=o,\ldots\ldots,m$ el morfismo canónico

$K_m(i)$: $G_m \longrightarrow \Lambda^i_m(G_\bullet)$ es un isomorfismo.

Es fácil de comprobar que las definiciones de grupoide (1.1.1y2) son equivalentes (ver[32]).

Por otra parte si un objeto simplicial $G_\bullet$ satisface el axioma GPD entonces,para $m > 2$, se tiene que los morfismos

$$\begin{tikzcd} & G_m \arrow[dl, "D_m"'] \arrow[dr, "K_m(i)"] & \\ \Delta_m(G_\bullet) \arrow[rr, "H_m(i)"] & & \Lambda^i_m(G_\bullet) \end{tikzcd}$$

son todos isomorfismos (ver [32]).

A partir de ahora denotaremos por $G_\bullet$ a un grupoide en $\mathbb{C}$ y lo representaremos indistintamente mediante el objeto simplicial truncado

$$\begin{tikzcd} G_\bullet = G_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & G_0 \arrow[l, bend right=50, "s_0"'] \end{tikzcd}$$

(sobre entendiendo el morfismo multiplicación m: $G_1 \times_{G_0} G_1 \longrightarrow G_1$) ó mediante el objeto simplicial

$$\begin{tikzcd} G_\bullet = \ldots\ \Delta_n(G_\bullet) \arrow[r, dotted, shift left] \arrow[r, dotted] \arrow[r, shift right] & \Delta_{n-1}(G_\bullet) \arrow[l, dotted, bend right, shift right] \arrow[l, dotted, bend right=40] \ldots \Delta_3(G_\bullet) \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, shift right=3] & G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[l, bend right, shift right] \arrow[l, bend right=40] \arrow[l, bend right=50, shift left] \arrow[r, shift left=2, "pr_1"] \arrow[r, "m"] \arrow[r, shift right=2, "pr_0"'] & G_1 \arrow[l, bend right=30, "{(id, s_0 d_0)}"'] \arrow[l, bend right=50, "{(s_0 d_1, id)}"'] \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & G_0 \arrow[l, bend right=50, "s_0"'] \end{tikzcd}$$

.1.3) Definición (morfismo de grupoides)

Un morfismo o funtor de grupoides $f_\bullet : G_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$ es un morfismo simplicial,ó equivalentemente un morfismo simplicial truncado

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "f_1"'] & G_o \arrow[l, bend right] \arrow[d, "f_o"] \\ G'_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G'_o \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

verificando: $f_1(gg') = f_1(g)\, f_1(g')$ y $f_1(g)^{-1} = f_1(g^{-1})$

para cada par componible (g,g') en $G_1 \underset{G_o}{x} G_1$.

Denotaremos por GPD ($\mathbb{C}$) la categoría de grupoides internos en $\mathbb{C}$ y morfismos de grupoides. Notemos que si $\mathbb{C}$ es exacta de Barr también lo será GPD ($\mathbb{C}$).

1.1.4) Definición (Grupo de endomorfismos de un grupoide)

Sea $G_\bullet$ un grupoide, una flecha $g \in G_1$ se llamará un endomorfismo si $d_0 g = d_1 g$.

Sea E el " subobjeto " de G_1 de todos los endomorfismos de $G_\bullet$ i.e. $E = Equ(d_0 d_1 : G_1 \rightarrow G_0)$ entonces End ($G_\bullet$) = $E \underset{d_0=d_1=d}{\overset{s_0}{\leftrightarrows}} G_0$ es un grupo en la coma categoría $\mathbb{C}\ /\ G_o$ al que llamaremos grupo de endomorfismos del grupoide $G_\bullet$.

1.1.5) Definición (Grupoide Abeliano)

Un grupoide $G_\bullet$ se dice abeliano si su grupo de endomorfismos es un grupo abeliano en $\mathbb{C}\ /\ G_o$. Si $\mathbb{C}$ es la categoría de grupos (o más generalmente cualquier variedad de Mal'cev) es un hecho conocido que todo grupo interno en $\mathbb{C}$ es abeliano. Esto tambien es cierto para grupoides en $\mathbb{C}$, es decir: todo grupoide en $\mathbb{C}$ es abeliano (ver[2]).

1.1.5) Definición (Centro de un grupoide)

Si $\mathbb{C}$ verifica que en la categoría Gp($\mathbb{C}$) existen los objetos centro y $G_\bullet$ es un grupoide en $\mathbb{C}$, definimos el centro de $G_\bullet$, $Z(G_\bullet)$, como el objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}/G_o$ centro de su grupo de endomorfismos: $Z(G_\bullet)=Z(End(G_\bullet))$.

Ejemplos

1.1.7) Sea X un objeto en $\mathbb{C}$, el objeto simplicial constante K(X,0), satisface trivialmente el axioma GPD. Asi la categoría $\mathbb{C}$ puede considerarse como una subcategoría plena de GPD($\mathbb{C}$) mediante el funtor $\mathbb{C} \longrightarrow$ GPD($\mathbb{C}$) que asocia a cada objeto X de $\mathbb{C}$ el complejo simplicial constante K(X,0) y a cada morfismo $f:X \longrightarrow Y$ el correspondiente morfismo simplicial constante definido por f.

1.1.8) Sea $f:X \longrightarrow Y$ un morfismo en $\mathbb{C}$ y $X_\bullet = cosk^o(f:X \longrightarrow Y)$. Trivialmente $X_\bullet$ satisface el axioma GPD, asi $X_\bullet$ será un grupoide.

.1.9) Sea A un objeto grupo en $\mathbb{C}$ (no necesariamente abeliano), denotaremos por K(A,1) (complejo de Eilenberg-MacLane) al grupoide

$$\begin{tikzcd} K(A,1): A\times A \arrow[r, "m"] & A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathbb{1} \arrow[l, bend right=50, "s_o"'] \end{tikzcd}$$

donde $s_o : \mathbb{1} \longrightarrow A$ es el morfismo constante al elemento neutro de A y "m" es el morfismo multiplicación del grupo A. Como consecuencia, podemos considerar la categoría de grupos internos en $\mathbb{C}$ como ia subcategoría plena de GPD($\mathbb{C}$) de los grupoides $G_\bullet$ con objeto de objetos $G_o = \mathbb{1}$.

I.1.10) Para cada objeto X en $\mathbb{C}$, consideraremos a los objetos grupo $E \underset{d}{\overset{s}{\leftrightarrows}} X$ en $\mathbb{C}/X$ como grupoides , con $d_o = d_1 = d$ y $s_o = s$. //

Sea $G_\bullet$ un grupoide en $\mathbb{C}$ y

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[rr, "\langle d_o, d_1 \rangle"] \arrow[rd, two heads] & & G_o \times G_o \\ & K \arrow[ru, "\langle f_o, f_1 \rangle"'] & \end{tikzcd}$$

la descomposición en épica-mónica de $\langle d_o, d_1 \rangle$, con f_o, f_1 las composiciones $K \longrightarrow G_o \times G_o \underset{pr_1}{\overset{pr_o}{\rightrightarrows}} G_o$. Utilizando la multiplicación en G_1 y la existencia de inversos se prueba que el par (f_o, f_1) es un par núcleo,existirá por tanto su coigualador que coincidirá con el coigualador de (d_o, d_1), lo denotaremos por $\mathrm{CoEqu}(d_o, d_1) = G_o \overset{d_o}{\twoheadrightarrow} \widetilde{\pi}_o(G_\bullet)$ y lo llamaremos <u>objeto de componentes conexas del grupoide $G_\bullet$</u>. Se verifica entonces que $G_\bullet \overset{d_o}{\twoheadrightarrow} \widetilde{\pi}_o(G_\bullet)$ es asferical en todas dimensiones distintas de dos.

.1.11) <u>Definición</u> (Grupoides conexos)

Un grupoide $G_\bullet$ se dice conexo si su objeto de componentes conexas $\widetilde{\pi}_o(G_\bullet)$ es el objeto terminal $\mathbb{1}$ de $\mathbb{C}$; equivalentemente, $G_\bullet$ será conexo si dados dos objetos cualesqiera $x, y \in G_o$ de $G_\bullet$ existe una flecha $g \in G_1$ tal que $d_o(g) = x$ y $d_1(g) = y$.

Daremos ahora la definición de "equivalencia esencial" que es una versión interna del concepto de funtor fiel, denso y esencialmente epico.

.1.12) <u>Definición</u> (Equivalencia esencial)

Un morfismo de grupoides $f_\bullet : G_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$ se dice que es una equivalencia esencial, si satisface:

(a) $f_\bullet$ es denso y fiel , esto es el cuadrado

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\langle d_o, d_1 \rangle"'] & G'_1 \arrow[d, "\langle d_o, d_1 \rangle"] \\ G_o \times G_o \arrow[r, "f_o \times f_o"] & G'_o \times G'_o \end{tikzcd}$$

es un pullback .

(b) $f_\bullet$ es un epimorfismo esencial, es decir el morfismo composición $d_1 pr_1$

$$\begin{tikzcd} G_o \times_{G'_o} G'_1 \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_o"'] & G'_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "d_o"] & G'_o \\ G_o \arrow[r, "f_o"] & G'_o & \end{tikzcd}$$

es un epimorfismo.

Una equivalencia esencial $f_\bullet : G_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$ la lamaremos "equivalencia esencial fuerte" si se satisface la siguiente condición (b') en vez de (b):

(b') $f_\bullet$ es un epimorfismo.

Notemos que si se verifica la condición (a) entonces (b') es cierta si y solo si f_o es un epimorfismo.

.1.13) El grupoide asociado a una categoría interna.

Mediante un procedimiento analogo al que asocia a un monoide su grupo de unidades, vamos a asociar a una categoría $C_\bullet$ interna en $\mathbb{C}$ un grupoide, " el grupoide de los isomorfismos de $C_\bullet$".

Denotemos $C_1 \underset{(01)}{\times} C_1$ y $C_1 \underset{(10)}{\times} C_1$ los objetos pullback de $C_1 \xrightarrow{d_o} C_o \xleftarrow{d_1} C_1$ y $C_1 \xrightarrow{d_1} C_o \xleftarrow{d_o} C_1$ respectivamente. Tenemos morfismos:

(a) composición $m : C_1 \underset{(10)}{\times} C_1 \longrightarrow C_1$

(b) transposición $t : C_1 \underset{(01)}{\times} C_1 \longrightarrow C_1 \underset{(10)}{\times} C_1$ ($t(f,g) = (g,f)$).

Consideremos los objetos pullback

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_o"'] & C_o \arrow[d, "s_o"] \\
C_1 \underset{(10)}{\times} C_1 \arrow[r, "m"] & C_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_o"'] & C_o \arrow[d, "s_o"] \\
C_1 \underset{(01)}{\times} C_1 \arrow[r, "mt"] & C_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ddrr, dashed, "\partial"] & & B \arrow[d, "pr_o"] \\
 & & C_1 \underset{(01)}{\times} C_1 \arrow[d, "pr_1"] \\
A \arrow[r, "pr_o"] & C_1 \underset{(10)}{\times} C_1 \arrow[r, "pr_o"] & C_1
\end{tikzcd}$$

Los elementos de D seran pares $(g,g') \in C_1 \times C_1$ tales que $d_o(g) = d_1(g')$, $d_1(g) = d_o(g')$, $m(g,g') = s_o d_o(g)$ y $m(g',g) = s_o d_1(g)$. Es fácil de comprobar que el morfismo diagonal $D \xrightarrow{\partial} C_1$ ($(g,g') \longmapsto g$) es un monomorfismo, si denotamos por G_1 al subobjeto de C_1 imagen de este morfismo, los elementos de G_1 seran aquellos en C_1 que son isomorfismos (i.e. aquellas flechas de $C_\bullet$ que tienen inverso), claramente el morfismo $s_o : C_o \longrightarrow C_1$ factoriza por G_1 y la composición de elementos en G_1 es un elemento de G_1, asi

$$\begin{tikzcd}
G_\bullet : G_1 \underset{C_o}{\times} G_1 \arrow[r, "m"] & G_1 \arrow[r, shift left, "d_o"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & C_o \arrow[l, bend right=50, "s_o"']
\end{tikzcd}$$

es un grupoide al que llamaremos grupoide de isomorfismos de $C_\bullet$. Notemos que la inclusión $G_1 \hookrightarrow C_1$ induce un funtor inclusión $G_\bullet \hookrightarrow C_\bullet$.

Subgrupoides normales, núcleos , conúcleos y cocientes .

.1.14) Definición (Subgrupoides y subgrupoides normales)

Un subgrupoide de un grupoide $G_\bullet$ será un morfismo de grupoides $i_\bullet : G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ donde

i_o e i_1 son monomorfismos.

Desde este momento, consideraremos los monomorfismos como inclusiones respecto de los elementos.

Un subgrupoide $i_\bullet : G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ se dirá subgrupoide normal si verifica las condiciones siguientes:

(a) $i_o = id : G_o \longrightarrow G_o$ (i.e. $G'_\bullet$ tiene todas las identidades)

(b) Para todo endomorfismo $b \in G'_1$ $(d_o(b)=d_1(b))$ y toda flecha $g \in G_1$ tal que $d_o(b)=d_o(g)$, el elemento $g^{-1}bg$ pertenece a G'_1.

Esto generaliza el concepto de subgrupo normal de un grupo, de forma que si A' es un subgrupo normal de un objeto grupo A de C, entonces A' es un subgrupo normal de A sii K(A',1) es un subgrupoide normal de K(A,1).

Por otra parte, si $G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ es un subgrupoide normal de $G_\bullet$ entonces el grupo de endomorfismos de $G'_\bullet$ es un subgrupo normal del grupo en $\mathbb{C}/G_o$, de los endomorfismos de $G_\bullet$. Tambien se verifica que todo grupoide es un subgrupoide normal de si mismo. Esta definicion generaliza la dada por Higgins [33] en la categoría de conjuntos.

.1.15) Definición (Núcleos)

Dado un morfismo de grupoides $f_\bullet : G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ definimos el núcleo de $f_\bullet$, (Ker($f_\bullet$)), como el objeto pullback en GPD($\mathbb{C}$)

$$\begin{tikzcd}
Ker(f_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & K(H_o,0) \arrow[d, "\sigma_\bullet"] \\
G_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

donde $\sigma_\bullet : K(H_o,0) \longrightarrow H_\bullet$ es el morfismo conónico de $SK^o(H_\bullet) = K(H_o,0)$ en $H_\bullet$ (inducido por los operadores degeneración).

.1.16) Proposición. (Todo núcleo es un subgrupoide normal)

Sea $f_\bullet : G_\bullet \to H_\bullet$ un morfismo de grupoides, entonces $Ker(f_\bullet) \hookrightarrow G_\bullet$ es un subgrupoide normal de $G_\bullet$. Además se tienen los siguientes isomorfismos :

$$Ker(f_\bullet)_1 \cong Equ(f_1, s_o d_o f_1) \cong Equ(f_1, s_o d_1 f_1) .$$

Demostración.- Por definición de Ker($f_\bullet$), los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
Ker(f\,)_o \arrow[r] \arrow[d] & H_o \arrow[d, equal, "id"] \\
G_o \arrow[r, "f_o"] & H_o
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Ker(f\,)_1 \arrow[r] \arrow[d] & H_o \arrow[d, "\sigma_o = s_o"] \\
G_1 \arrow[r, "f_1"] & H_1
\end{tikzcd}$$

son pullback en $\mathbb{C}$, asi $Ker(f_\bullet)_o = G_o$ y un elemento en $Ker(f_\bullet)_1$ será un par $(g,x) \in G_1 x H_o$ tal que $f_1(g) = s_o(x)$. Ahora $f_1(g) = s_o(x) \Longrightarrow d_o f_1(g) = d_o s_o(x) \Longrightarrow x = d_o f_1(g) = f_o d_o(g)$.

Asi los elementos de $\mathrm{Ker}(f_\bullet)_1$ son pares $(g, f_0 d_0(g))$ tales que $f_1(g) = s_0 f_0 d_0(g)$, la proyección $\mathrm{Ker}(f)_1 \longrightarrow G_1$ es claramente mónica y su imagen es $\mathrm{Equ}(f_1, s_0 d_0 f_1)$. Por otra parte el morfismo $(\ )^{-1} : G_1 \longrightarrow G_1$ que asocia a cada flecha de $G_\bullet$ su inversa nos da un isomorfismo $\mathrm{Equ}(f_1, s_0 d_0 f_1) \cong \mathrm{Equ}(f_1, s_0 d_1 f_1)$.//

Consideraremos siempre $\mathrm{Ker}(f_\bullet) \hookrightarrow G_\bullet$, asi los elementos de $\mathrm{Ker}(f_\bullet)_1$ seran aquellas flechas $g \in G_1$ tales que $f_1(g)=s_0 d_0 f_1(g)$. Claramente para todo $x \in G_0$, la unidad $s_0(x) \in G_1$ satisface esta condición, además $\mathrm{Ker}(f_\bullet)_1$ es cerrado para la multiplicación "m" de $G_\bullet$ siendo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f_\bullet) = \mathrm{Ker}(f_\bullet)_1 \times_{G_0} \mathrm{Ker}(f_\bullet)_1 \arrow[r, "m"] & \mathrm{Ker}(f_\bullet)_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & G_0 \arrow[l, bend right=50, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

A continuación probaremos que todo subgrupoide normal es el núcleo de algún morfismo de grupoides, para esto construiremos seguidamente los grupoides cocientes. Sea $i_\bullet : G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ un subgrupoide normal de $G_\bullet$, denotemos por $G'_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G'_1$ al objeto pullback cuyos elementos son ternas $(a,g,a') \in G'_1 \times G_1 \times G'_1$ tales que $d_1(a) = d_0(g)$ y $d_1(g) = d_0(a)$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left, "a"] & \bullet \arrow[r, bend left, "g"] & \bullet \arrow[r, bend left, "a'"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Definimos $\bar{p}_0, \bar{p}_1 : G'_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G'_1 \longrightarrow G_1$ por: $\bar{p}_0(a,g,a') = aga'$ y $\bar{p}_1(a,g,a') = g$.
Sea

$$\begin{tikzcd}
G'_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G'_1 \arrow[rr, "\langle \bar{p}_0, \bar{p}_1 \rangle"] \arrow[dr, two heads] & & G_1 \times G_1 \\
& H \arrow[ur, hook, "\langle \pi_0, \pi_1 \rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

la descomposición en épica-mónica del morfismo $\langle \bar{p}_0, \bar{p}_1 \rangle$, donde π_0, π_1 son las composiciones de la inclusión $H \hookrightarrow G_1 \times G_1$ con las proyecciones de $G_1 \times G_1$ en G_1. Entonces el par (π_0, π_1) es un par de equivalencia y por tanto existe el coigualador de (π_0, π_1) que coincidirá con el coigualador de $(\bar{p}_0, \bar{p}_1)$, denotemos por $p_1 : G_1 \twoheadrightarrow G''_1$ a este coigualador

$$\begin{tikzcd}
G'_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G'_1 \arrow[r, shift left, "\bar{p}_1"] \arrow[r, shift right, "\bar{p}_0"'] & G_1 \arrow[r, two heads, "p_1"] & G''_1
\end{tikzcd}$$

Por otra parte, como vimos anteriormente, tambien existe el coigualador de $d_0, d_1 : G'_1 \rightrightarrows G_0$, al que denotabamos por $\widetilde{\Pi}_0(G'_\bullet)$, llamemos $G''_0 = \widetilde{\Pi}_0(G'_\bullet)$ y $p_0 : G_0 \twoheadrightarrow G''_0$ a la proyección canónica. tenemos entonces un diagrama

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[dr, shift left, "d_1"] \arrow[dr, shift right, "d_0"'] & G_1 \arrow[r, two heads, "p_1"] \arrow[d, shift right=2, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"] & G''_1 \arrow[d, dashed, shift right, "d_0"'] \arrow[d, dashed, shift left, "d_1"] \\
& G_0 \arrow[r, two heads, "p_0"] \arrow[ul, bend left=40, "s_0"] \arrow[u, bend right=40, "s_0"'] & G''_0 \arrow[u, dashed, bend right=40, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

los morfismos $p_od_o, p_od_1 : G_1 \longrightarrow G'_1$ coigualan a $(\bar{p}_o, \bar{p}_1)$, por tanto existen morfismos únicos, que tambien denotaremos por $d_o, d_1 : G''_1 \longrightarrow G''_o$ tales que $d_op_1 = p_od_o$ y $d_1p_1 = p_od_1$, por otra parte el morfismo $p_1s_o : G_o \longrightarrow G''_1$ coiguala a $d_o, d_1 : G'_1 \longrightarrow G_o$ y asi existe un morfismo único $s_o : G''_o \longrightarrow G''_1$ tal que $p_1s_o = s_op_o$, es fácil de comprobar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G''_1 \arrow[r, shift left=2, "d_o"] \arrow[r, shift right=2, "d_1"'] & G''_o \arrow[l, bend right=40, "s_o"'] \end{tikzcd}$$

es un objeto simplicial truncado, siendo $p_\bullet = (p_1, p_o)$ un morfismo simplicial truncado. Definamos ahora un morfismo multiplicación $m : G''_1 \underset{G''_o}{\times} G''_1 \longrightarrow G''_1$ de forma que el objeto simplicial anterior junto con esta multiplicación sea un grupoide $G''_\bullet$ y el morfismo $p_\bullet$ sea un morfismo de grupoides.

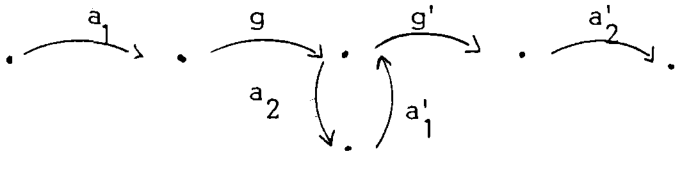
Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1) \underset{G_o}{\times} (G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1) \arrow[rrr, shift left, "q_o"] \arrow[rrr, shift right, "q_1"'] \arrow[d] \arrow[ddl] & & & G_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \arrow[rr, two heads, "p_1 x p_1"] \arrow[d] \arrow[ddl, "m"'] & & G''_1 \underset{G''_o}{\times} G''_1 \arrow[d] \arrow[ddl, dashed, "m"'] \\
 & G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1 \arrow[rrr, shift left, "\bar{p}_o"] \arrow[rrr, shift right, "\bar{p}_1"'] & & & G_1 \arrow[rr, two heads, "p_1"] \arrow[ddl, "d_1"] & & G''_1 \arrow[ddl, "d_1"] \\
G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1 \arrow[rrr, shift left, "\bar{p}_o"] \arrow[rrr, shift right, "\bar{p}_1"'] & & & G_1 \arrow[rr, two heads, "p_1"] \arrow[d, "d_o"'] & & G''_1 \arrow[d, "d_o"'] & \\
 & & & G_o \arrow[rr, two heads, "p_o"'] & & G''_o &
\end{tikzcd}$$

donde los elementos de $(G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1) \underset{G_o}{\times} (G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1)$ seran de la forma

$((a_1, g, a_2), (a'_1, g', a'_2)) \in (G'_1 x G_1 x G'_1) x (G'_1 x G_1 x G'_1)$ tales que:

$d_1a_1 = d_og$, $d_1g = d_oa_2$, $d_1a_2 = d_oa'_1$, $d_1a'_1 = d_og'$, $d_1g' = d_oa'_2$, $d_1g = d_og'$



y los morfismos $q_o, q_1 : (G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1) \underset{G_o}{\times} (G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1) \longrightarrow G_1 \underset{G_o}{\times} G_1$ vienen dados por:

$q_o((a_1, g, a_2), (a'_1, g'a'_2)) = (a_1g\,a_2, a'_1\,g'\,a'_2)$, $q_1((a_1, g, a_2), (a'_1, g', a'_2)) = (g, g')$.

Entonces $p_1 x p_1 : G_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \longrightarrow G''_1 \underset{G''_o}{\times} G''_1$ es el coigualador de (q_o, q_1) y la composición $p_1m : G_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \longrightarrow G_1 \twoheadrightarrow G''_1$ coiguala al par (q_1, q_o) por lo que existe un único morfismo al que tambien denotaremos $m : G''_1 \underset{G''_o}{\times} G''_1 \longrightarrow G''_1$ tal que $m(p_1xp_1) = p_1m$

$$\begin{tikzcd}
(G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1) \underset{G_o}{\times} (G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1) \arrow[r, shift left, "q_o"] \arrow[r, shift right, "q_1"'] & G_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \arrow[r, two heads, "p_1 x p_1"] \arrow[d, "m"] & G''_1 \underset{G''_o}{\times} G''_1 \arrow[d, dashed, "m"] \\
 & G_1 \arrow[r, two heads, "p_1"'] & G''_1
\end{tikzcd}$$

Con elementos m: $G''_1 \times_{G''_0} G''_1 \longrightarrow G''_1$ viene definido como sigue: Dados $(\bar{g},\bar{g}') \in G''_1 \times_{G''_0} G''$ con $g,g' \in G_1$ tales que $p_1(g) = \bar{g}$ y $p_1(\bar{g}') = \bar{g}'$, $m(\bar{g},\bar{g}') = \bar{g}\bar{g}' = p_1(gag')$ donde "a" es qualquier elemento de G'_1 tal que $d_0 a = d_1 g$ y $d_1 a = d_0 g'$ (notemos que este elemento existe por ser $p_0 d_1 g = d_1 \bar{g} = d_0 \bar{g}' = p_0 d_0 g'$ y que para qualquier otro $a' \in G'_1$ con $d_i a = d_i a'$ se tiene que $p_1(gag') = p_1(ga'g')$). La conmutatividad $m(p_1,p_1) = p_1 m$ nos dice que $p_1(gg') = p_1(g)p_1(g')$, por otra parte para cada elemento $\bar{g}$ en G''_1, si $g \in G_1$ es tal que $p_1(g) = \bar{g}$, entonces $\bar{g}^{-1} = p_1(g^{-1})$. Las demás condiciones de grupoide son de inmediata comprobación.

.1.17) Definición (Grupoide cociente)

Sea $i_\bullet : G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ un subgrupoide normal de $G_\bullet$, el grupoide $G''_\bullet$ construido anteriormente se llamará grupoide cociente de $G_\bullet$ por el subgrupoide normal $G'_\bullet$ y al morfismo de grupoides $p_\bullet : G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ lo llamaremos projección (canónica).

Notemos que si $A' \hookrightarrow A$ es un subgrupo normal del objeto grupo A en $\mathbb{C}$, el grupoide cociente de K(A,1) por K(A',1) es K(A/A',1). Además si $\mathbb{C}$ es la categoría de conjuntos la definición de grupoide cociente que aqui hemos dado, coincide con la dada por Higgins [33].

.1.18) Proposición (Todo grupoide normal es un núcleo)

Sea $i_\bullet : G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ un subgrupoide normal de $G_\bullet$, $G''_\bullet$ el grupoide cociente y $p_\bullet : G_\bullet \longrightarrow G''_\bullet$ la proyección. Entonces $Ker(p_\bullet) \cong G'_\bullet$.

Demostración.- Por la proposición (1.1.16) bastará con que probemos que $i_1 : G'_1 \hookrightarrow G_1$ es el igualador de $(p_1, s_0 d_0 p_1 : G_1 \longrightarrow G''_1)$. Sea $a \in G'_1$, entonces $(s_0 d_0 a, s_0 d_0 a, a)$ es un elemento en $G'_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G'_1$ y por tanto $p_1(s_0 d_0 a) = p_1(a)$. Reciprocamente; si $g \in G_1$ verifica que $p_1(g) = p_1(s_0 d_0 g)$ entonces deben existir $a,a' \in G'_1$ tales que $(a, s_0 d_0 g, a')$ sea un elemento de $G'_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G'_1$ y $g = a(s_0 d_0 g)a' = aa' \Longrightarrow g \in G'_1$ //.

.1.19) Proposición (Propiedad universal del grupoide cociente).

Sea $i_\bullet : G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ un subgrupoide normal de $G_\bullet$ y $p_\bullet : G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ la proyección al grupoide cociente $G''_\bullet$ de $G_\bullet$ por $G'_\bullet$. Entonces, para todo morfismo de grupoides $f_\bullet : G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ tal que $G'_\bullet$ sea un subgrupoide de $Ker(f_\bullet)$, existe un único morfismo de grupoides $f'_\bullet : G''_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ tal que $f_\bullet = f'_\bullet p_\bullet$.

$$\begin{tikzcd}
 & H & \\
G' \arrow[r, hook, "i_\bullet"] \arrow[dr, hook, "j_\bullet"'] & G \arrow[u, "f"] \arrow[r, two heads, "p_\bullet"] & G'' \arrow[ul, dashed, "f'_\bullet"'] \\
 & Ker(f) \arrow[u, hook, "i'_\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración.- Consideremos el siguiente diagrama :

$$\begin{tikzcd}
 & G'_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G'_1 \arrow[dr, shift left, "\bar{p}_1"] \arrow[dr, shift right, "\bar{p}_0"'] & & & H_1 \arrow[dd, shift left, "p_1"] \arrow[dd, shift right] & \\
G'_1 \arrow[rr, hook, "i_1"] \arrow[ddr, hook, "j_1"'] & & G_1 \arrow[urr, "f_1"] \arrow[rrr, two heads] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & & G''_1 \arrow[ul, dashed, "f'_1"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
 & & & & H_0 & \\
 & \mathrm{Ker}(f_1) \arrow[uur, hook, "i'_1"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \arrow[urr, "f_0"] \arrow[rrr, two heads, "p_0"] & & & G''_0 \arrow[ul, dashed, "f'_0"']
\end{tikzcd}$$

la conmutatividad del triangulo:

$$\begin{tikzcd}
G'_1 \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[dr, shift left, "d_1"] \arrow[dr, shift right, "d_0"'] & \mathrm{Ker}(f_1) \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
 & G_0
\end{tikzcd}$$

implica que f_0 coiguala a $d_0, d_1 : G'_1 \longrightarrow G_0$ por tanto existe un único morfismo $f'_0 : G''_0 \longrightarrow H_0$ tal que $f'_0 p_0 = f_0$. Por otra parte, para todo elemento (a,g,a') en $G'_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G'_1$ se tiene que $f_1(aga') = f_1(a) f_1(g) f_1(a') =$ (por $a,a' \in \mathrm{Ker}(f_\bullet)_1$) $= s_0 d_1 f_1(a) f_1(g) s_0 d_0 f_0(a') =$ $= f_1(g)$ asi f_1 coiguala a $(\bar{p}_0, \bar{p}_1)$, existirá por tanto un único morfismo $f'_1 : G''_1 \longrightarrow H_1$ tal que $f_1 = f'_1 p_1$. Por último es fácil de comprobar que (f_0, f_1) es un morfismo simplicial truncado, que verifica las condiciones de la definición (1.1.3) induciendo por tanto un único morfismo $f_\bullet : G''_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ tal que $f_\bullet = f'_\bullet p_\bullet$ //.

Dado un grupoide $G_\bullet$ existen unos subgrupoides normales suyos especiales, aquellos contenidos en el grupo de endomorfismos de $G_\bullet$, los grupoides cocientes de $G_\bullet$ por estos subgrupoides contenidos en $\mathrm{End}(G_\bullet)$ tienen como objeto de objetos el mismo que $G_\bullet$ (G_0), esto hace que el estudio de estos cocientes sea muy similar al estudio de grupos cocientes. Más precisamente, una de las propiedades técnicas que hacen posible el obtener la sucesión exacta larga en cohomología abeliana es que una sucesión de objetos grupo $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ con $A' \hookrightarrow A$ un subgrupo normal y A'' el grupo cociente, es equivalente a una sucesión exacta en el sentido de Barr $A' \times A \rightrightarrows A \twoheadrightarrow A''$, en términos de grupoides; la sucesión $K(A',1) \hookrightarrow K(A,1) \twoheadrightarrow K(A'',1)$ es equivalente a la sucesión exacta en el sentido de Barr en $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$, $K(A' \times A,1) \rightrightarrows K(A,1) \twoheadrightarrow K(A'',1)$.

Con grupoides en general, no se tiene la equivalencia entre sucesiones

.1.20) $$G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$$

con $G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ un subgrupoide normal y $G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ la proyección al cociente, y sucesiones exactas en el sentido de Barr en la categoría $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$. Sin embargo si $G'_\bullet$ esta "contenido en $\mathrm{End}(G_\bullet)$ esta equivalencia es fácil de obtener , como veremos seguidamente. Asi siguiendo los razonamientos abelianos, asociaremos a una sucección (1.1.20) con $G'_\bullet \hookrightarrow \mathrm{End}(G_\bullet)$ una "sucesión exacta larga" en la cohomología. Probaremos que todo grupoide cociente de $G_\bullet$ es esencialmente equivalente a otro cociente de $G_\bullet$ que tiene el mismo objeto de objetos que $G_\bullet$(esto es a un cociente de $G_\bullet$ por un subgrupoide normal contenido en End($G_\bullet$)).

Sea $i_\bullet : G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ un subgrupoide normal de $G_\bullet$ contenido en End($G_\bullet$) (i.e. $d_o a = d_1 a$ para toda flecha $a \in G'_1$). Denotemos $d = d_o = d_1 : G'_1 \longrightarrow G_o$ y consideremos el objeto pullback:

$$\begin{tikzcd} G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[d, "d_o"] \\ G'_1 \arrow[r, "d_1"] & G_o \end{tikzcd}$$

definimos $f_o, f_1 : G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \longrightarrow G_1$ por $f_o(a,g) = ag$ y $f_1(a,g) = g$, se verifica que el par (f_o, f_1) es un par de equivalencia, que define en G_1 la misma relación de equivalencia que el par $(\bar{p}_o, \bar{p}_1)$ pues para todo elemento (a,g,a') en $G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[loop left, "a"] \arrow[r, "g"] & \cdot \arrow[loop right, "a'"] \end{tikzcd}$$

se tiene $aga' = a(ga'g^{-1})g = bg$ con $b = aga'g^{-1} \in G'_1$ asi las imágenes de $\langle \bar{p}_o, \bar{p}_1 \rangle$ y $\langle f_o, f_1 \rangle$ en $G_1 x G_1$ coinciden. Por tanto el coigualador de $(\bar{p}_o, \bar{p}_1)$ y el de (f_o, f_1) coinciden, por otra parte el coigualador de (d,d) es $id : G_o \longrightarrow G_o$. Asi el grupoide cociente será $G''_\bullet : G''_1 \rightrightarrows G_o$.

Por otra parte, la sucesión $G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \overset{f_o}{\underset{f_1}{\rightrightarrows}} G_1 \xrightarrow{p_1} G''_1$ es exacta en $\mathbb{C}$, además si consideramos el objeto simplicial truncado

$$\begin{tikzcd} G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \arrow[r, shift left, "d_o"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & G_o \arrow[l, bend right, "s_o"'] \end{tikzcd}$$

con $d_i(a,g) = d_i g$ $i = o,1$ y $s_o(x) = (s_o(x), s_o(x))$ junto con el morfismo multiplicación $m : (G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1) \underset{G_o}{\times} (G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1) \longrightarrow G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1$ definido por $m((a,g),(a',g')) = (aga'g^{-1}, gg')$ tenemos un grupoide al que denotaremos $G'_\bullet \rtimes G_\bullet$ (<u>grupoide producto semidirecto de $G'_\bullet$ por $G_\bullet$</u>), de forma que los morfismos f_o y f_1 inducen morfismos simpliciales $f_{\bullet o}, f_{\bullet 1} : G'_\bullet \rtimes G_\bullet \longrightarrow G_\bullet$, siendo la sucesión

.1.21)
$$\begin{tikzcd} G'_\bullet \rtimes G_\bullet \arrow[r, shift left, "f_{\bullet o}"] \arrow[r, shift right, "f_{\bullet 1}"'] \arrow[d, dash, dotted] & G_\bullet \arrow[r, two heads, "p_\bullet"] \arrow[d, dash, dotted] & G''_\bullet \arrow[d, dash, dotted] \\ G'_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \arrow[r, shift left, "f_o"] \arrow[r, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_1 \arrow[r, two heads, "p_1"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G''_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ G_o \arrow[r, equal] & G_o \arrow[r, equal] & G_o \end{tikzcd}$$

exacta en la categoría GPD($\mathbb{C}$). Esta sucesión (1.1.21) determina univocamente a la sucesión (1.1.20) ($G'_\bullet$ será el grupoide Ker($f_{\bullet 1}$)) por lo que tenemos una equivalecia entre las sucesiones (1.1.20) y (1.1.21).

.1.22) Si el grupoide $G'_\bullet$ es el grupo de endomorfismos de $G_\bullet$, $G'_\bullet$ = End($G_\bullet$), entonces es fácil de comprobar que el grupoide cociente de $G_\bullet$ por su grupo de endomorfismos es el grupoide trivial $COSK^{o}(G_\bullet) = \;\ldots\; G_o \times_{\pi_o(G_\bullet)} G_o \times_{\pi_o(G_\bullet)} G_o \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; G_o \times_{\pi_o(G_\bullet)} G_o \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; G_o$

siendo exacta la sucesión $End(G_\bullet) \rtimes G_\bullet \underset{f_1}{\overset{f_o}{\rightrightarrows}} G_\bullet \xrightarrow{D_\bullet} COSK^{o}(G_\bullet)$ en $GPD(\mathbb{C})$.

.1.23) Proposición.

Todo grupoide cociente $G''_\bullet$ de un grupoide $G_\bullet$ es fuertemente esencialmente equivalente a un grupoide cociente $G^{\#}_\bullet$ de $G_\bullet$ con el mismo objeto de objetos que $G_\bullet$ ($G^{\#}_o = G_o$).

Demostración.- Sea $i_\bullet : G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ un subgrupoide normal de $G_\bullet$ y $p_\bullet : G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ la proyección al grupoide cociente, consideremos el subgrupoide normal de $G'_\bullet$, $End(G'_\bullet)$, este grupoide es tambien un subgrupoide normal de $G_\bullet$ que claramente está contenido en $End(G_\bullet)$. Sea $G^{\#}_\bullet$ el cociente de $G_\bullet$ por $End(G'_\bullet)$, entonces $G^{\#}_o = G_o$ y tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd}
End(G'_\bullet) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & G_\bullet \arrow[r, two heads, "p'_\bullet"] \arrow[d, equal] & G^{\#}_\bullet \arrow[d, dashed, "\gamma_\bullet"] \\
G'_\bullet \arrow[r, hook] & G_\bullet \arrow[r, two heads, "p_\bullet"] & G''_\bullet
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del grupoide cociente (proposición (1.1.19)) el morfismo $p_\bullet : G_\bullet \rightarrow G''_\bullet$ induce un único morfismo de grupoides $\gamma_\bullet : G^{\#}_\bullet \longrightarrow G_\bullet$

$$\begin{tikzcd}
 & & G'_1 \arrow[rr, hook] & & G_1 \arrow[rr, two heads, "p_1"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G''_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
End(G') \arrow[urr, hook] \arrow[rrr, hook] & & & G_1 \arrow[ur, equal] \arrow[rr, two heads, "p'_1"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G^{\#}_1 \arrow[ur, dashed, "\gamma_1"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
 & & & & G_o \arrow[rr, two heads] & & G''_o \\
 & & & G_o \arrow[ur, equal] \arrow[rr, equal] & & G_o \arrow[ur, dashed, "\gamma_o = p_o"'] &
\end{tikzcd}$$

Veamos que $\gamma_\bullet$ es una equivalencia esencial fuerte: Puesto que $\gamma_o = p_o$, la condición (b') de la definición de equivalencia esencial fuerte (1.1.12) se satisface trivialmente. Para probar que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
G^{\#}_1 \arrow[r, "\gamma_1"'] \arrow[d, "\langle d_o{,}d_1 \rangle"'] & G''_1 \arrow[d, "\langle d_o{,}d_1 \rangle"] \\
G_o \times G_o \arrow[r, "p_o \times p_o"] & G''_o \times G''_o
\end{tikzcd}$$

es un pullback (condición (a) de (1.1.12)), Bastará con ver que si g y g' son dos elementos de G_1 tales que $d_i g = d_i g'$ y $p_1(g) = p_1(g')$ entonces $p'_1(g) = p'_1(g')$, es decir; si las clases en G''_1 de dos flechas en G_1 con el mismo dominio y codominio coinciden, entonces tambien coinciden sus clases en $G^{\#}_1$.

Ahora bien $p_1(g) = p_1(g') \Longrightarrow$ existen $a, a' \in G'_1$ tales que $g' = a g a'$, pero $d_i(g) = d_i(g') \Longrightarrow a, a' \in End(G') \Longrightarrow g' = (a g a' g^{-1}) g = bg$ con $b = a g a' g^{-1} \in End(G') \Longrightarrow p'_1(g') = p'_1(g)$ .//

Sucesiones exactas cortas y extensiones de grupoides .

.1.24) Definición (sucesion exacta corta de grupoides).

Una sucesión de grupoides $G'_\bullet \xhookrightarrow{i_\bullet} G_\bullet \xrightarrow{p_\bullet} G''_\bullet$ se dirá que es exacta corta si $i_\bullet : G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ es un subgrupoide normal y $p_\bullet : G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ es la proyección al grupoide cociente.

Claramente si $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ es una sucesión exacta de objetos grupo en $\mathbb{C}$, entonces la sucesión de grupoides inducida $K(A',1) \hookrightarrow K(A,1) \twoheadrightarrow K(A'',1)$ es exacta corta, siendo tambien cierto el recíproco.

.1.25) Proposición.

Sea $G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ una sucesión exacta corta de grupoides. Entonces $\widetilde{\Pi}_0(G'_\bullet) = G_0$ y $\Pi_0(G_\bullet) \cong \widetilde{\Pi}_0(G''_\bullet)$.

Demostración.- Por definición tenemos que $G''_0 = \widetilde{\Pi}_0(G'_\bullet)$. Probemos que $\widetilde{\Pi}_0(G_\bullet) \cong \widetilde{\Pi}_0(G''_\bullet)$, sea $q' : G''_0 \twoheadrightarrow \widetilde{\Pi}_0(G''_\bullet)$ el coigualador de $d_0, d_1 : G''_1 \longrightarrow G''_0$; probemos que la composición $q'p_0 = q : G_0 \twoheadrightarrow \widetilde{\Pi}_0(G''_\bullet)$ es el coigualador de $d_0, d_1 : G_1 \longrightarrow G_0$. Claramente $d_0 q = d_1 q$, sea $f : G_0 \longrightarrow X$ un morfismo cualquiera tal que $fd_0 = fd_1$

$$\begin{tikzcd}
G'_1 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & G_1 \arrow[rr, two heads, "p_1"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & & G''_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
& G_0 \arrow[rr, two heads, "p_0"] \arrow[d, "q'p_0"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & & G''_0 \arrow[d, "q'"] \arrow[ddl, dashed, "f'"'] \\
& \widetilde{\Pi}_0(G''_\bullet) \arrow[rr, equal] & & \widetilde{\Pi}_0(G''_\bullet) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\
& & X &
\end{tikzcd}$$

$fd_0 = fd_1 \Rightarrow fd_0 i_1 = fd_1 i_1 \Longrightarrow$ existe un único morfismo $f' : G''_0 \longrightarrow X$ tal que $f'p_0 = f$, por otra parte f' coiguala a $d_0, d_1 : G''_1 \longrightarrow G''_0$ puesto que $f'd_0 p_1 = f'p_0 d_0 = fd_0 = fd_1 = f'p_0 d_1 = f'd_1 p_1$ y p_1 es un epimorfismo. Asi existe un único $\bar{f} : \widetilde{\Pi}_0(G'') \longrightarrow X$ tal que $f' = \bar{f} q'$ por tanto existe un único morfismo $\bar{f}$ tal que $f = f'p_0 = \bar{f} q'p_0$ .//

Sea $G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ una sucesión exacta corta de grupoides, como vimos en la proposición (1.1.23) la sucesión anterior induce una sucesión tambien exacta corta de grupoides $\mathrm{End}(G'_\bullet) \hookrightarrow G_\bullet \twoheadrightarrow G^{\#}_\bullet$ y un diagrama conmutativo

.1.26)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}(G'_\bullet) \arrow[r, hook] \arrow[d] & G_\bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & G^{\#}_\bullet \arrow[d, "\gamma_\bullet"] \\
G'_\bullet \arrow[r, hook] & G_\bullet \arrow[r, two heads] & G''_\bullet
\end{tikzcd}$$

con $\gamma_\bullet$ una equivalencia esencial fuerte. Se verifica que los grupos de endomorfismos de la sucesión superior del diagrama anterior (1.1.26) son $\mathrm{End}(G'_\bullet)$, $\mathrm{End}(G_\bullet)$ y $\mathrm{End}(G_\bullet)/\mathrm{End}(G'_\bullet)$ respectivamente, es decir la sucesión exacta corta $\mathrm{End}(G'_\bullet) \hookrightarrow G_\bullet \longrightarrow G^{\#}_\bullet$ induce una sucesión exacta corta de objetos grupo en $\mathcal{C}/G_0$, $\mathrm{End}(G'_\bullet) \hookrightarrow \mathrm{End}(G_\bullet) \twoheadrightarrow \mathrm{End}(G^{\#}_\bullet)$.

Por otra parte, el hecho de ser $\gamma_\bullet$ una equivalencia esencial fuerte implica que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}(G_\bullet)/\mathrm{End}(G'_\bullet) \cong \mathrm{End}(G^{\#}_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & \mathrm{End}(G''_\bullet) \arrow[d, "d"] \\
G_0 \arrow[r, two heads] & G''_0
\end{tikzcd}$$

es un pullback, donde el morfismo de $\mathrm{End}(G^{\#}_\bullet)$ en $\mathrm{End}(G''_\bullet)$ es el inducido por $\gamma_\bullet$.

1.27) Definición. (Extensiones de grupoides)

Una extensión $\mathbb{E}$ de un grupoide $G_\bullet$ por otro $H_\bullet$ es una sucesión exacta corta de grupoides $\mathbb{E} = G_\bullet \hookrightarrow E_\bullet \twoheadrightarrow H_\bullet$.

Un morfismo de extensiones $\Gamma : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}'$ es un diagrama conmutativo en $\mathrm{GPD}(\mathcal{C})$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} = \arrow[d, "\Gamma"'] & G_\bullet \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & E_\bullet \arrow[r, two heads] \arrow[d] & H_\bullet \arrow[d, equal] \\
\mathbb{E}' = & G_\bullet \arrow[r, hook] & E'_\bullet \arrow[r, two heads] & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

Denotaremos por $\mathrm{Ext}(G_\bullet, H_\bullet)$ la categoría de extensiones de $G_\bullet$ por $H_\bullet$ y morfismos de extensiones.

La siguiente proposición se demuestra utilizando elementos , de forma totalmente analoga a la correspondiente proposición para extensiones de grupos.

.1.28) Proposición.

Para dos grupoides cualquiera $G_\bullet$ y $H_\bullet$ la categoría $\mathrm{Ext}(G_\bullet, H_\bullet)$ es un grupoide(i.e. todo morfismo de extensiones de $G_\bullet$ por $H_\bullet$ es un isomorfismo).//

(1.2) HIPERGRUPOIDES.-

Como veiamos en el apartado anterior (definición (1.1.2)) un grupoide $G_\bullet$ es un objeto simplicial verificando el axioma GPD, i.e. en dimensiones $m > 1$ los objetos G_m son isomorfos a los objetos de " open i-horns" $\Lambda^i_m(G_\bullet)$ para todo $0 \leq i \leq m$ y $m > 1$. El siguiente axioma es una generalizasión del axioma GPD.

1.2.1) Axioma n-HPGPD ($n > 0$)

Un objeto simplicial $G_\bullet$ satisface el axioma n-HPGPD si y solo si los morfismos

$$K_m(i) : G_m \longrightarrow \Lambda^i_m(G_\bullet)$$

son isomorfismos para todo $m > n$ y todo $0 \leq i \leq m$.

Los objetos simpliciales que satisfacen este axioma juegan un papel importante en cohomología no abeliana , seran los sistemas de coeficientes que permitiran definir los conjuntos de cohomología en dimensiones superiores.

1.2.2) Definición (n-hipergrupoide).

Un objeto simplicial satisfaciendo el axioma n-HPGPD se llamará hipergrupoide de dimensión "n" o n-hipergrupoide.

Un morfismo de n-hipergrupoides será un morfismo simplicial entre ellos. Denotaremos por n-HPGPD($\mathbb{C}$) a la categoría de n-hipergrupoides (en $\mathbb{C}$) y morfismos de n-hipergrupoides.

Notemos que el axioma 1-HPGPD es precisamente el axioma GPD, por tanto un hipergrupoide de dimensión uno será un grupoide. Por otra parte , se tiene que el axioma n-HPGPD implica el m-HPGPD para todo $m > n$ por lo que todo n-hipergrupoide es un m-hipergrupoide para $m > n$.

Notemos tambien que al igual que en dimensión uno, si $G_\bullet$ es un n-hipergrupoide, todos los morfismos en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& G_m \arrow[dl, "D_m"'] \arrow[dr, "K_m(i)"] & \\
\Delta_m(G_\bullet) \arrow[rr, "H_m(i)"'] & & \Lambda^i_m(G_\bullet)
\end{tikzcd}$$

son isomorfismos, para $m > n+1$, por tanto $G_\bullet = COSK^{n+1}(G_\bullet)$.

El lector interesado en conocer más detalladamente algunos hechos básicos sobre n-hipergrupoides, que aqui solo mencionaremos sin demostraciones explicitas, puede dirigirse a [32] .

Ejemplos:

1.2.3) Sea $X_\bullet$ un objeto simplicial tal que $X_\bullet = COSK^{n-1}(X_\bullet)$. Entonces $X_\bullet$ es un n-hipergrupoide.

1.2.4) Sea A un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$, definimos el objeto simplicial K(A,n) (complejo de Eilenber- MacLane [32]) para $n \geq 1$, como sigue:

$$K(A,n)_m = \begin{cases} \mathbb{1} & 0 \leq m \leq n-1 \\ A & m = n \\ A^{n+1} & m = n+1 \end{cases}$$

los operadores caras y degeneración en dimensiones menores que n-1 son las identidades, $d_i : A \longrightarrow \mathbb{1}$ son los únicos morfismos que existen , $0 \leq i \leq n$, $s_i : \mathbb{1} \longrightarrow A$ es el morfismo cero de A , $0 \leq i \leq n-1$, $d_i : A^{n+1} \longrightarrow A$ las projecciones para $0 \leq i \leq n$, $d_{n+1} : A^{n+1} \longrightarrow A$ es la suma alternada $d_{n+1}(a_o, a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{A}(a_n, \ldots, a_o) = a_n + a_{n-1} - \ldots + (-1)^n a_o$, $s_i : A \longrightarrow A^{n+1}$ está definido por $s_i(a) = (0, \ldots, 0, a, a, 0, \ldots, 0)$ donde "a" aparece en los lugares "i" e "i+1" , $0 \leq i \leq n$ y $K(A,n) = COSK^{n+1}(K(A,n))$.

Claramente K(A,n) es un n-hipergrupoide. Notemos que si A no es abeliano, es imposible comprobar que $K(A,n)_{n+2}=\Delta_{n+2}(K(A,n))$ es isomorfo a $\Lambda^{i}_{n+2}(K(A,n))$ para $0\leqslant i\leqslant n+2$.

.2.5) Si X es un espacio topológico y denotamos por $X_\bullet$ el complejo singular de X, $X_\bullet$ es un conjunto simplicial (i.e. un complejo simplicial en conjuntos) de Kan . Se verifica entonces que la relación de "homotopía"en el conjunto de n-simplices X_n : $x\sim y$ sii existe un (n+1)-simplice $z\in X_{n+1}$ tal que $d_i(z) = s_{n-1}d_i(x)$ para $0\leqslant i\leqslant n-1$, $d_n(z) = x$ y $d_{n+1}(z) = y$ (esto implica que $d_i(x) = d_i(y)$ para todo i) , es una relación de equivalencia. Si definimos $G_\bullet$ por: $G_m=X_m$ para $0\leqslant m\leqslant n-1$, G_n el conjunto cociente de X_n por la relación de homotopía , $d_i(\bar{x}) = d_i x$ (para $\bar{x}$ la clase en G_n del n-simplice $x\in X_n$) , G_{n+1} = Imagen de la aplicación composición $X_{n+1}\longrightarrow\Delta_{n+1}(X_\bullet)\longrightarrow\Delta_{n+1}(d_o, \dots, d_n : G_n\longrightarrow G_{n-1})$ y $G_\bullet = \mathrm{COSK}^{n+1}(G_\bullet)$. Se verifica que $G_\bullet$ es un n-hipergrupoide llamado <u>n-hipergrupoide fundamental de X</u>, este n-hipergrupoide tiene los mismos grupos de homotopía que el espacio topológico X en dimensiones menores que n+1. Se dice entonces que los n-hipergrupoides son suficientes para calcular los grupos de homotopía hasta dimensión n de cualquier espacio topológico. (ver [32]).

Operaciones corchete, hiperunidades e hiperasociatividades.

Sea $G_\bullet$ un n-hipergrupoide, entonces en el triangulo conmutativo

$$\begin{tikzcd}
G_{n+1} \arrow[d, "D_{n+1}"'] \arrow[dr, "K_{n+1}(n+1)"] & \\
\Delta_{n+1}(G_\bullet) \arrow[r, "H_{n+1}(n+1)"'] & \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_\bullet)
\end{tikzcd}$$

$K_{n+1}(n+1)$ es un isomorfismo por tanto D_{n+1} es un monomorfismo. partir de ahora interpretaremos los elementos de G_{n+1} como elementos en la imagen de D_{n+1} asi un elemento $z\in G_{n+1}$ será una (n+2)-upla $z = (x_o, x_1, \dots, x_{n+1})\in\Delta_{n+1}(G_\bullet)$ $(x_i = d_i(z))$, donde cada elemento x_i está determinado univocamente por los (n+1)-elementos restantes. En particular el elemento x_{n+1} está determinado por los elementos $x_o, \dots, x_n$, denotaremos $x_{n+1}=[x_o, \dots, x_n]$. Tenemos asi definido un morfismo en $\mathbb{C}$ que llamaremos <u>operación corchete</u>

$$[\ \ ] : \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_\bullet)\longrightarrow G_n$$

por la composición $\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_\bullet)\xrightarrow{K_{n+1}(n+1)^{-1}} G_{n+1}\xrightarrow{d_{n+1}} G_n$.

Para cada $0\leqslant i\leqslant n$ tenemos operadores degeneración $s_i : G_n\longrightarrow\Delta_{n+1}(G_\bullet)$ definidos por $s_i(x) = (s_{i-1}d_o(x), \dots, s_{i-1}d_{i-1}(x), x, x, s_i d_{i+1}(x), \dots, s_i d_n(x))$. Ahora bien, s_i debe factorizar por G_{n+1}, asi para todo $x\in G_n$; $s_i(x)\in G_{n+1}$ implica :

.2.6) $$s_i d_n(x) = [s_{i-1}d_o(x), \dots, s_{i-1}(x), x, x, s_i d_{i+1}(x), \dots, s_i d_{n-1}(x)] \qquad 0 \leqslant i < n-1$$
$$x = [s_{n-1}d_o(x), \dots, s_{n-1}d_{n-1}(x), x] \ .$$

Las identidades anteriores (1.2.6) son llamadas usualmente hiper unidades .

Por otra parte, tambien identificaremos a G_{n+2} con $\Delta_{n+2}(G_\bullet)$ asi un elemento de G_{n+2} será representado por una matriz

$$\begin{pmatrix} x_{oo} & x_{o1} & x_{o2} & \dots & x_{o\,n+1} \\ x_{1o} & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1\,n+1} \\ x_{2o} & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2\,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1\,o} & x_{n+1\,1} & x_{n+1\,2} & \dots & x_{n+1\,n+1} \\ x_{n+2\,o} & x_{n+2\,1} & x_{n+2\,2} & \dots & x_{n+1\,n+1} \end{pmatrix}$$

con $x_{ij} = x_{ij-1}$, $i < j$, donde cada elemento en cada fila está determinado por los (n+1) elementos restantes; en particular $x_{i\,n+1} = [x_{io}, \dots, x_{in}]$ y cada fila está determinada (univocamente) por las (n+2) filas restantes; en particular en la última fila se tiene que $x_{n+2\,i} = x_{i\,n+1} = [x_{io}, \dots, x_{in}]$ y $x_{n+2\,n+1} = [x_{n+2\,o}, \dots, x_{n+2\,n}]$ implica

.2.7) $$[[x_{oo}, \dots, x_{on}], [x_{1o}, \dots, x_{1n}], \dots, [x_{no}, \dots, x_{nn}]] = [x_{on}, x_{1n}, \dots, x_{nn}] .$$

Esta propiedad de la operación corchete se suele llamar propiedad de hiper asociatividad .

1.2.8) Por último, los isomorfismos $\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_\bullet) \cong G_{n+1} \cong \Lambda^{i}_{n+1}(G_\bullet)$ para $0 \leqslant i \leqslant n$ implican que para todo elemento $(x_o, \dots, x_{i-1}, -, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \in \Lambda^{i}_{n+1}(G_\bullet)$ existe un único elemento. $x \in G_n$ tal que

$$[x_o, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n] = x_{n+1}$$

A esta pnpiedad de la operación corchete la llamaremos existencia de hiper inversos .

1.2.9) Proposición (Definición alternativa de n-hipergrupoide)

Un objeto simplicial truncado

$$\begin{tikzcd} G_{\bullet tr} = G_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] & G_{n-1} \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend right=50, "\cdots"'] & \cdots & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_o \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

junto con un morfismo (operación corchete) $[\ ] : \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet tr}) \longrightarrow G_n$ satisfaciendo:

(a) $d_i([x_o, \dots, x_n]) = d_n(x_i) \qquad 0 \leqslant i \leqslant n$

(b) Hiper unidades. (1.2.6)

(c) Hiper asociatividad. (1.2.7)

(d) Existencia de hiperinversos. (1.2.8)

Determina de forma única un n-hipergrupoide $G_\bullet$ con truncación $G_{\bullet tr}$ y operación corchete el morfismo dado.

Demostración.- Las condiciones (a) y (b) implican que

$$\begin{tikzcd}
G'_{\bullet tr} = \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet tr}) \arrow[r, shift left=2, "d_{n+1}"] \arrow[r, dotted] \arrow[r, shift right=2, "d_o"'] & G_n \arrow[l, bend right=60, "s_n"'] \arrow[l, bend right=35, dotted, "s_o"'] \arrow[r, shift left, "d_n"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & G_{n-1} \arrow[l, bend right=60, "s_{n-1}"'] \arrow[l, bend right=35, dotted, "s_o"'] & \cdots & G_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & G_o \arrow[l, bend right=40, "S_o"']
\end{tikzcd}$$

con $d_i : \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet tr}) \longrightarrow G_n$ las proyecciones para $i=o \ldots n$, $d_{n+1} : \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{tr}) \longrightarrow G_n$ el morfismo dado , $d_{n+1} = [\,]$, y $s_i : G_n \longrightarrow \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet tr})$ dadas por la composición $G_n \xrightarrow{s_i} \Delta_{n+1}(G_{\bullet tr}) \xrightarrow{H_{n+1}(n+1)} \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet tr})$, es un objeto simplicial truncado. Entonces $G_\bullet = \mathrm{Cosk}^{n+1}(G'_{\bullet tr})$, la condición (c) implica que $\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet tr}) \cong \Lambda^{i}_{n+1}(G_{\bullet tr})$ para $i = 0 \ldots n$ y la condición (d) implica que $\Delta_m(G_\bullet) \cong \Lambda^{i}_{m}(G_\bullet)$ para $m > n+1$ y $0 \leq i \leq m$.‖

Notemos que para A un objeto grupo en $\mathbb{C}$, el morfismo suma alternada desde A^{n+1} en A, no verifica la condición (d) (hiper asociatividad) de la proposición (1.2.9) a menos que A sea abeliano.

.2.10) Nota.- En algunas categorías como por ejemplo grupos, categorías de interés o en general variedades de Mal'cev, la operación corchete de un n-hipergrupoide $G_\bullet$ viene univocamente determinada por las operaciones existentes en G_n . Asi por ejemplo si $\mathbb{C}$ es una variedad de Mal'cev y $G_\bullet$ es un n-hipergrupoide en $\mathbb{C}$, se verifica que

$$[x_o, \ldots, x_n] = P(x_n, [x_o, \ldots, x_{n-1}]^{n-1}, [s_{n-1}d_n x_o, \ldots, s_{n-1}d_n x_{n-1}]^{n-1})$$

donde "P" denota la operación de Mal'cev en G_n y el corchete $[\;]^{n-1}$ está dado por recurrencia como sigue:

$$[x_o, x_1]^1 = P(x_1, x_o, s_o d_1 x_o)$$

$$[x_o, x_1, x_2]^2 = P(x_2, [x_o, x_1]^1, [s_1 d_2 x_o, s_1 d_2 x_1]^1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[x_o, x_1, \ldots, x_{n-1}]^{n-1} = P(x_{n-1}, [x_o, \ldots, x_{n-2}]^{n-2}, [s_{n-2}d_{n-2}x_o, \ldots, s_{n-2}d_{n-1}x_{n-1}]^{n-2})$$

Es lógico pensar (despues de estudiar algunos casos particulares) que un objeto simplicial truncado a nivel n , $G_{\bullet tr}$, determina un n-hipergrupoide si y solo si la expreción formal que define a $[\;]^n$ determina un morfismo de la categoría $\mathbb{C}$. Esto supone poder demostrar que si $[\;]^n$ es un morfismo entonces se verifican las condiciones (a),(b), (c) y (d) dadas en la proposición (1.2.9) . No hay ningún problema en probar (a) y (b), además para n=1 ,2 tambien se verifican (c) y (d) siempre que $[\,]^n$ sea morfismo. Para $n > 2$ arbitrario , el problema continua abierto , notemos que si $\mathbb{C}$ es una variedad de Ωgrupos (donde la operación ternaria de Mal'cev puede definirse como $P(x,y,z)=x-y+z$) o $\mathbb{C}$ es la variedad de Algebras de Boole, entonces si es posible establecer este resultado para todo n . Por tanto donde la conjetura está por resolver sería para Algebras de Heyting y para cuasigrupos (que son los otros ejemplos usuales de variedades de Mal'cev) ver [2] .

1.2.11) Hipergrupoides asociados a un n-hipergrupoide.

Sea $G_\bullet$ un n-hipergrupoide con $n>1$ y m un entero positivo menor que n, consideremos el objeto simplicial truncado

$$\begin{tikzcd}
G'_{\bullet tr} = & G'_m \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_m"'] & G'_{m-1} \arrow[l, bend right=40, "S_0"'] \arrow[l, bend right=70, "S_{m+1}"'] & \cdots\cdots & G'_1 \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & G'_0 \arrow[l, bend right=50, "S_0"']
\end{tikzcd}$$

dado por $G'_o=G_{n-m}$, $G'_k=\{ x\in G_{n-m+k} / d_i(x) = s_{n-m-1}d_i d_{n-m}(x) \ , 0 \leq i \leq n-m-1 \}$, para $k \leq m$. Los operadores caras $D_i: G'_{k+1} \longrightarrow G'_k$ vienen dados por rectricción de los operadores caras d_{n-m+i} y los degeneración $S_i:G'_k \longrightarrow G'_{k+1}$ por restricción de los operadores degeneración $s_{n-m+i}:G_{n-m+k} \longrightarrow G_{n-m+k+1}$. La operación corchete del n-hipergrupoide $G_\bullet$ induce una operación corchete en G'_m por la fórmula

1.2.12)
$$[x_o, \dots ,x_m]' = [s_{n-m-1}d_o x_o, \dots ,s_{n-m-1}d_{n-m-1}x_o,x_o, \dots ,x_m]$$

de forma que $G'_{\bullet tr}$ junto con esta operación corchete determinan un m-hipergrupoide $G'_\bullet$ que llamaremos m-hipergrupoide asociado al n-hipergrupoide $G_\bullet$ (ver [32]).

Notemos que para $k > m$, $G'_k \cong \{ x\in G_{n-m+k} / d_i(x)=s_{n-m-1}d_i d_{n-m}(x), 0\leq i \leq n-m-1\}$ usualmente consideraremos este isomorfismo como una igualdad.

Claramente para cualquier $m < n$, cada morfismo de n-hipergrupoides $f_\bullet:G_\bullet \to H_\bullet$ induce un morfismo entre los m-hipergrupoides asociados $f'_\bullet:G'_\bullet \longrightarrow H'_\bullet$ con f'_k dado por restricción de f_{n-m+k} . Esta construcción nos determina un funtor

$$\text{n-HPGPD}(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{m-HPGPD}(\mathbb{C})$$

Ejemplos.

1.2.13) Tendrá un especial interés el 1-hipergrupoide (grupoide) asociado a un n-hipergrupoide $G_\bullet$, que viene dado por:

$G'_o = G_{n-1}$, $G'_1=\{x\in G_n / d_i(x)=s_{n-2}d_i d_{n-1}(x), \ 0\leq i \leq n-2 \}$, $D_o(x) = d_{n-1}(x)$ y $D_1(x)=d_n(x)$ para todo elemento $x \in G'_1$. El corchete de $G'_\bullet$ está dado por

$$[x_o,x_1]' = [s_{n-2}d_o x_o, \dots ,s_{n-2}d_{n-2}x_o,x_o,x_1]$$

y el morfismo multiplicación por $xy = [[x,s_o d_o x]',y]'$.

1.2.14) Si A es un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$, el m-hipergrupoide asociado a $K(A,n)$,$n>m$, es $K(A,m)$.

n-Hipergrupoides filtrados .

I.2.15) Definición (Filtraciones).

Sea $G_\bullet$ un n-hipergrupoide, una m-filtración $(m \leqslant n)$ de $G_\bullet$ es una cadena de morfismos simpliciales mónicos

$$G^m_\bullet \xhookrightarrow{\sigma^m_\bullet} G^{m-1}_\bullet \quad . \quad . \quad . \quad G^2_\bullet \xhookrightarrow{\sigma^2_\bullet} G^1_\bullet \xhookrightarrow{\sigma^1_\bullet} G_\bullet$$

verificando: (i) $G^k_\bullet$ es un (n-k)-hipergrupoide con $G^k_i = G_i$ para $i = 0 \ldots n-k$ y $k \leqslant m$.

(ii) $\sigma^k_i = id$ para $i = 0 \ldots n-k$ y $k \leqslant m$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & & G^1_n \arrow[r, hook, "\sigma^1_n"] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] & G_n \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] \\
 & & & G^2_{n-1} \arrow[r, hook, "\sigma^2_{n-1}"] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] & G_{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] & G_{n-1} \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] \\
 & & & G_{n-2} \arrow[r, equal] & G_{n-2} \arrow[r, equal] & G_{n-2} \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & G^{m-1}_{n-m+2} \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] & \cdots & G_{n-m+2} \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] & G_{n-m+2} \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] & G_{n-m+2} \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] \\
G^m_{n-m+1} \arrow[r, hook, "\sigma^m_{n-m+1}"] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] & G_{n-m+1} \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] & \cdots & G_{n-m+1} \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] & G_{n-m+1} \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] & G_{n-m+1} \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, leftarrow] \\
G_{n-m} \arrow[r, equal] & G_{n-m} & \cdots & G_{n-m} \arrow[r, equal] & G_{n-m} \arrow[r, equal] & G_{n-m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
G_0 \arrow[r, equal] & G_0 & \cdots & G_0 \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[r, equal] & G_0
\end{tikzcd}$$

Diremos que un n-hipergrupoide es m-filtrado si tiene una m-filtración. A un n-hipergrupoide n-filtrado lo llamaremos n-hipergrupoide filtrado y a su n-filtración la llamaremos filtración .

Notemos que dar una 1-filtración (analogamente m-filtración) de un n-hipergrupoide $G_\bullet$ consiste en darle una estructura de (n-1)hipergrupoide a la (n-1)-truncación de $G_\bullet$ que sea comp-atible con la estructura de n-hipergrupoide de $G_\bullet$ (la compatibilidad está dada por la existencia del morfismo simplicial $\sigma^1_\bullet$). Si la categoría $\mathbb{C}$ es grupos o en general una variedad de Mal'cev, como ya dijimos anteriormente , existe en cada objeto simplicial truncado una única estructura "posible" de hipergrupoide (ver[2]) . Por tanto si $G_\bullet$ es un n-hipergrupoide en $\mathbb{C}$ (= Gupos, variedad de Mal'cev ...) solo existe una posible

1-filtración (m-filtración) de $G_\bullet$. Sin embargo si $\mathbb{C}$ es cualquier categoría exacta de Barr pueden existir distintas 1-filtraciones (m-filtraciones) de un n-hipergrupoide en $\mathbb{C}$.

Si $G_\bullet = K(A,n)$, para A un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$, entonces $G_\bullet$ es tanbien un n-hipergrupoide en $Gp(\mathbb{C})$ y por tanto existe solo una posible 1-filtración de $K(A,n)$.

Cuando hablemos de un n-hipergrupoide m-filtrado $G_\bullet$, estaremos dando implicitamente una m-filtración de $G_\bullet$. Un morfismo simplicial $f_\bullet : G_\bullet \to H_\bullet$ entre n-hipergrupoides m-filtrados se llamará morfismo simplicial m-filtrado sii $f_\bullet$ induce un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G^m_\bullet \arrow[r, hook, "\sigma^m_\bullet"] \arrow[d, "f/G^m_\bullet"] & G^{m-1}_\bullet \arrow[d, "f/G^{m-1}_\bullet"] & \ldots & G^2_\bullet \arrow[d, "f/G^2_\bullet"] & G^1_\bullet \arrow[l, hook', "\sigma^2_\bullet"'] \arrow[r, hook, "\sigma^1_\bullet"] \arrow[d, "f/G^1_\bullet"] & G_\bullet \arrow[d, "f_\bullet"] \\
H^m_\bullet \arrow[r, hook, "\gamma^m_\bullet"] & H^{m-1}_\bullet & \ldots & H^2_\bullet \arrow[r, hook, "\gamma^2_\bullet"] & H^1_\bullet \arrow[r, hook, "\gamma^1_\bullet"] & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

i.e. $f_\bullet$ se restringe a las filtraciones. Un morfismo simplicial n-filtrado entre n-hipergrupoides filtrado se llamará simplemente filtrado .

Denotaremos por $\binom{n}{m}$- FHPGPD($\mathbb{C}$) a la categoría cuyos objetos son los n-hipergrupoides m-filtrados (i.e. cada objeto será un n-hipergrupoide junto con una m-filtración fijada) y los morfismos morfismos simpliciales m-filtrados. Si m = n a la categoría $\binom{n}{n}$-FHPGPD($\mathbb{C}$) la denotaremos n-FHPGPD($\mathbb{C}$).

Notemos que el funtor de olvido U :$\binom{n}{m}$-FHPGPD($\mathbb{C}$) $\longrightarrow$ n-HPGPD($\mathbb{C}$) que asocia a cada n-Hipergrupoide m-filtrado $G_\bullet$ el n-hipergrupoide $G_\bullet$ olvidando la m-filtración no es en general una inclución. Sin embargo si $\mathbb{C}$ es una variedad de Mal'cev U es una inclusión. Como veremos en capitulos posteriores los n-hipergrupoide m-filtrados tienen propiedades que facilitan el estudio de "torsores" y "cociclos" sobre ellos por lo que sería interesante el estudio de funtores adjuntos del funtor U.

Ejemplos.-

.2.16) Si A es un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$, $K(A,n)$ es un n-hipergrupoide filtrado con la única filtración posible: $K(\Pi,0) = K(\Pi,0)$ . . . . $K(\Pi,0) \longrightarrow K(A,n)$.

En general, si $G_\bullet$ es un n-hipergrupoide en $Gp(\mathbb{C})$ con todos los objetos grupo G_i abelianos. Entonces $G_\bullet$ es filtrado en $Gp(\mathbb{C})$, con las únicas estructuras posibles de m-hipergrupoides en las m-truncaciones de $G_\bullet$. Verificandose además que todo morfismo de n-hipergrupoides en $Gp(\mathbb{C})$, $f_\bullet : G_\bullet \to H_\bullet$ con G_i y H_i abelianos es filtrado.

.2.17) Sea $G_\bullet$ un k-hipergrupoide $k > 0$ entonces para $n > k$, $G_\bullet$ puede considerarse como un n-hipergrupoide (n - k)-filtrado,con filtración $G_\bullet = G_\bullet \ldots G_\bullet = G_\bullet$.

Notemos que los n-hipergrupoides filtrados desempeñan un papel esencial en la construcción de los conjuntos de cohomología en dimensión n.

Adelantando algunos resultados ,diremos que una de las propiedades principales de un n-hipergrupoide filtrado (1-filtrado es suficiente) es la posibilidad de definir el " (n-1) - hipergrupoide fibra " de un n-torsor sobre él, pudiéndose como consecuencia adoptar métodos análogos a los abelianos para la construcción de los morfismos de conexión.Por otra parte ,los n-hipergrupoides filtrados son aquellos obtenidos mediante aplicaciones reiteradas del funtor $\bar{W}$ a n-grupoides.Además en categorías como Grupos, la categoría de n-hipergrupoides filtrados es equivalente a la categoría de T-hipergrupoides y a la de complejos cruzados (ver[8],[9], [10]).

(1.3) n-HIPERGRUPOIDES DOBLES Y n-HIPERGRUPOIDES EN CATEGORÌAS DE m-HIPERGRUPOIDES .

Grupoides dobles.

.3.1) Definición (Grupoide Doble).

Un grupoide doble $G_{\bullet\bullet}$ en $\mathbb{C}$ es por definición un objeto grupoide en la categoría GPD($\mathbb{C}$). La categoría GPD(GPD($\mathbb{C}$)) será entonces la categoría de los grupoides dobles en $\mathbb{C}$.

Representaremos a un grupoide doble $G_\bullet$ en $\mathbb{C}$ por un diagrama

$$\begin{tikzcd} G_{\bullet\bullet} = & G_{\bullet 1} \times_{G_{\bullet 0}} G_{\bullet 1} \arrow[r, "m_\bullet"] & G_{\bullet 1} \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & G_{\bullet 0} \arrow[l, bend right=40, "S_0"'] \end{tikzcd}$$

(en el que a menudo no escribiremos el morfismo multiplicaci ón m , suponiendola implicitamente),donde $G_{\bullet 1} \times_{G_{\bullet 0}} G_{\bullet 1}$ tiene la estructura de grupoide inducida por la de $G_{\bullet 1}$ y $m_\bullet$ es un morfismo de grupoides.Puesto que los productos fibrados en GPD ($\mathbb{C}$) se obtienen haciendo productos fibrados en cada dimensión en la categoría base $\mathbb{C}$,tenemos que

$$\begin{tikzcd} G_{\bullet 1} \times_{G_{\bullet 0}} G_{\bullet 1} = \ldots (G_{11} \times_{G_{01}} G_{11}) \times_{G_{10} \times_{G_{00}} G_{10}} (G_{11} \times G_{11}) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G_{11} \times_{G_{10}} G_{11} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_{01} \times_{G_{00}} G_{01} \end{tikzcd}$$

así el morfismo $m_\bullet$ en dimensiones cero y uno serán morfismos en $\mathbb{C}$

$$m_0 : G_{01} \times_{G_{00}} G_{01} \longrightarrow G_{01} \qquad m_1 : G_{11} \times_{G_{10}} G_{11} \longrightarrow G_{11} .$$

Puesto que $m_\bullet$ satisface las condiciones de morfismo de grupoide (Definición (1.1.3)) se verifica que

$$\begin{tikzcd} G_{0\bullet} : & G_{01} \times_{G_{00}} G_{01} \arrow[r, "m_0"] & G_{01} \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & G_{00} \arrow[l, bend right=40, "S_0"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G_{1\bullet} : & G_{11} \times_{G_{10}} G_{11} \arrow[r, "m_1"] & G_{11} \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & G_{10} \arrow[l, bend right=40, "S_0"'] \end{tikzcd}$$

son grupoides en $\mathbb{C}$; por tanto, representaremos también a un grupoide doble $G_{\bullet\bullet}$ por un diagrama en $\mathbb{C}$.

.3.2)

$$\begin{tikzcd}
 & G_{11}\times_{G_{01}}G_{11} \arrow[d, "m'_1"'] & & G_{10}\times_{G_{00}}G_{10} \arrow[d, "m'_0"] \\
G_{11}\times_{G_{10}}G_{11} \arrow[r, "m_1"] & G_{11} \arrow[rr, shift left, "D_0"] \arrow[rr, shift right, "D_1"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & & G_{10} \arrow[ll, bend right, "S_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
G_{01}\times_{G_{00}}G_{01} \arrow[r, "m_0"] & G_{01} \arrow[u, bend right, "s_0"'] \arrow[rr, shift left, "D_0"] \arrow[rr, shift right, "D_1"'] & & G_{00} \arrow[u, bend right, "s_0"'] \arrow[ll, bend right, "S_0"']
\end{tikzcd}$$

donde cada fila y columna es un grupoide en $\mathbb{C}$ y los morfismos "d" , " D " ," s" ,y "S" son morfismos de grupoides.

Debido a la complejidad del diagrama (1.3.2), cuando representemos un grupoide doble en $\mathbb{C}$, en el diagrama (1.3.2) no escribiremos los morfismos multiplicación, y muchas veces olvidaremos también los morfismos degeneración.

Llamaremos grupoide de objetos ó de 0-celdas a $G_{\bullet 0}$ y grupoide de flechas ó 1-celdas a $G_{\bullet 1}$. Representaremos por puntos a los elementos de G_{00}, por flechas horizontales $d_0(g)\bullet\xrightarrow{g}\bullet d_1(g)$ a los elementos $g\in G_{10}$, por flechas verticales

$$\begin{tikzcd}
D_0(f)\ \bullet \arrow[d, "f"] \\
\bullet\ D_1(f)
\end{tikzcd}$$

a los elementos $f\in G_{01}$ y por cuadrados (rellenos)

$$\begin{tikzcd}
D_0d_0(\alpha) = d_0D_0(\alpha)\ \bullet \arrow[r, "D_0(\alpha)"] \arrow[d, "d_0(\alpha)"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & \bullet\ d_1D_0(\alpha) = D_0d_1(\alpha) \arrow[d, "d_1(\alpha)"] \\
D_1d_0(\alpha) = d_0D_1(\alpha)\ \bullet \arrow[r, "D_1(\alpha)"'] & \bullet\ d_1D_1(\alpha) = D_1d_1(\alpha)
\end{tikzcd}$$

a los elementos $\alpha \in G_{11}$.

Notemos que podemos multiplicar dos flechas horizontales

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "m'_0(g,g')=gg'"'] & \bullet \arrow[r, "g'"] & \bullet \end{tikzcd}$$

ó flechas verticales

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend right=60, "f f' = m_0(f,f')"'] \\ \bullet \arrow[d, "f'"] \\ \bullet \end{tikzcd}$$

pero no podremos multiplicar flechas verticales con horizontales ni horizontales con verticales.

En G_{11} tenemos dos multiplicaciones (m_1 y m'_1) ;una que representaremos horizontalmente y que corresponderá a la multiplicación $m'_1 : G_{11} \underset{G_{01}}{\times} G_{11} \longrightarrow G_{11}$ (representada verticalmente en el diagrama (1.3.2)) y que denotaremos $m'_1(\alpha, \alpha') = \alpha . \alpha'$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "D_0(\alpha)"] \arrow[d, "d_0(\alpha)"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha"] & \bullet \arrow[r, "D_1(\alpha')"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\alpha'"] & \bullet \arrow[d, "d_1(\alpha')"] \arrow[r, mapsto, "m'_1"] & \bullet \arrow[r, "D_0(\alpha)\ D_0(\alpha')"] \arrow[d, "d_0(\alpha)"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha \cdot \alpha'"] & \bullet \arrow[d, "d_1(\alpha')"] \\ \bullet \arrow[r, "D_1(\alpha)"'] & \bullet \arrow[r, "D_1(\alpha')"'] & \bullet & \bullet \arrow[r, "D_1(\alpha)\ D_1(\alpha')"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Notemos que por ser D_0 y D_1 morfismos de grupoides se tiene que $D_0(\alpha . \alpha') = D_0(\alpha).D_0(\alpha')$ y $D_1(\alpha \cdot \alpha') = D_1(\alpha).D_1(\alpha')$.

Y otra multiplicación que representaremos verticalmente,que corresponde a la multiplicación $m_1 : G_{11} \underset{G_{10}}{\times} G_{11} \longrightarrow G_{11}$ (representada horizontalmente en el diagrama (1.3.2)) y que denotaremos $m_1(\beta, \beta') = \beta \times \beta'$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "D_0(\beta)"] \arrow[d, "d_0(\beta)"'] \arrow[dr, phantom, "\beta"] & \bullet \arrow[d, "d_1(\beta)"] \arrow[r, mapsto, "m_1"] & \bullet \arrow[r, "D_0(\beta)"] \arrow[dd, "d_0(\beta)d_0(\beta')"'] \arrow[ddr, phantom, "\beta \times \beta'"] & \bullet \arrow[dd, "d_1(\beta)\ d_1(\beta')"] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[d, "d_0(\beta')"'] \arrow[dr, phantom, "\beta'"] & \bullet \arrow[d, "d_1(\beta')"] & & \\ \bullet \arrow[r, "D_1(\beta')"'] & \bullet & \bullet \arrow[r, "D_1(\beta')"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Notemos que por ser d_o y d_1 morfismos de grupoides se tiene que ;

$d_o(\beta\times\beta') = d_o(\beta)\, d(\beta')$ y $d_1(\beta\times\beta') = d_1(\beta)\, d_1(\beta')$.

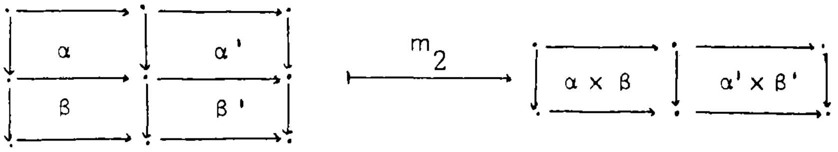
Denotaremos por α^{-1} al inverso del elemento $\alpha\in G_{11}$ para la multiplicación $m'_1 = " \bullet "$

y por $-\beta$ al inverso de $\beta\in G_{11}$ para la multiplicación $m_1 = " \times "$.

Por otra parte el morfismo simplicial $m_\bullet : G_{\bullet 1}\underset{G_{\bullet o}}{\times} G_{\bullet 1} \longrightarrow G_{\bullet 1}$ en dimensión dos

está dado por $m_2 : (G_{11}\underset{G_{o1}}{\times} G_{11}) \underset{\substack{G_{1o}\times G_{1o}\\ G_{oo}}}{\times} (G_{11}\underset{G_{o1}}{\times} G_{11}) \longrightarrow G_{11}\underset{G_{o1}}{\times} G_{11}$

$m_2((\alpha, \alpha'), (\beta, \beta')) = (\alpha\times\beta, \alpha'\times\beta')$



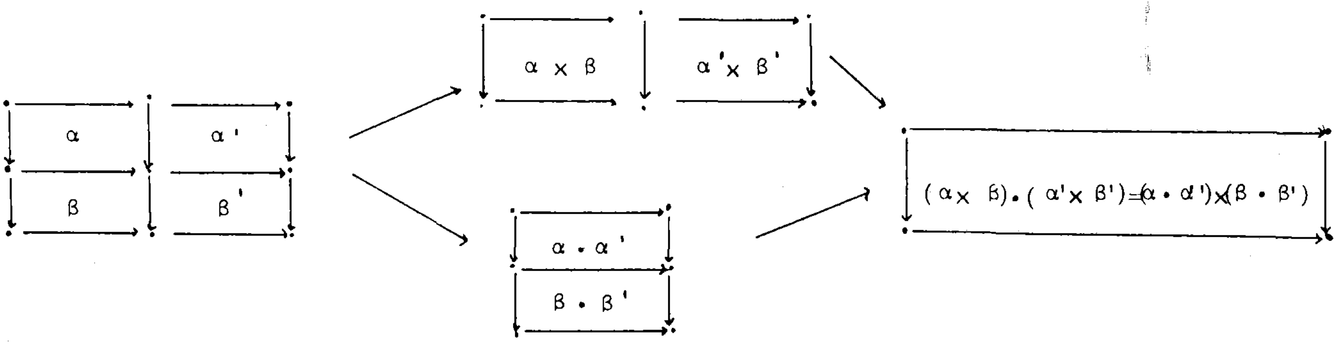
El hecho de ser $m_\bullet$ un morfismo de grupoides implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(G_{11}\underset{G_{o1}}{\times} G_{11}) \underset{\substack{G_{1o}\times G_{1o}\\ G_{oo}}}{\times} (G_{11}\underset{G_{o1}}{\times} G_{11}) \arrow[r, "m_2=m_1\times m_1"] \arrow[d, "m'_1\times m'_1"'] & G_{11}\underset{G_{o1}}{\times} G_{11} \arrow[d, "m'_1"] \\
G_{11}\underset{G_{1o}}{\times} G_{11} \arrow[r, "m_1"] & G_{11}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo por tanto se verifica la siguiente <u>ley de compatibilidad</u> entre las multiplicaciones en G_{11}:

.3.3) Para todo $((\alpha, \alpha'), (\beta, \beta')) \in (G_{11}\underset{G_{o1}}{\times} G_{11}) \underset{\substack{G_{1o}\times G_{1o}\\ G_{oo}}}{\times} (G_{11}\underset{G_{o1}}{\times} G_{11})$

$$(\alpha\times\beta)\bullet(\alpha'\times\beta') = (\alpha\bullet\alpha')\times(\beta\bullet\beta')$$



Recíprocamente un morfismo simplicial truncado

$$\begin{tikzcd}
G_{11} \times_{G_{1o}} G_{11} \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, shift right, "(d_0 \times d_0)"'] \arrow[d, shift left, "(d_1 \times d_1)"] & G_{11} \arrow[d, shift right, "d_o"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
G_{o1} \times_{G_{oo}} G_{o1} \arrow[r, "m_o"] & G_{o1}
\end{tikzcd}$$

verificando la ley de compatibilidad (1.3.3) induce un morfismo de grupoides $m_\bullet : G_{\bullet 1} \times_{G_{\bullet o}} G_{\bullet 1} \longrightarrow G_{\bullet 1}$ Tenemos así :

.3.4) **Proposición**

Un diagrama simplicial (1.3.2) de grupoides y morfismos de grupoides,determinan un único grupoide doble $G_{\bullet\bullet}$ si y solo sí las multiplicaciones horizontal y vertical en G_{11} satisfacen la ley de compatibilidad (1.3.3).//

Así un grupoide doble $G_{\bullet\bullet}$ quedará unívocamente determinado por cuatro grupoides $G_{\bullet o}$, $G_{\bullet 1}$, $G_{o\bullet}$, $G_{1\bullet}$ verificando ciertas condiciones de compatibilidad .Estas condiciones son totalmente simétricas,de forma que el objeto simplicial truncado

$$\begin{tikzcd}
G_{1\bullet} \arrow[d, shift right=2, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"] \\
G_{o\bullet} \arrow[u, bend right=40, "s_o"']
\end{tikzcd}$$

junto con el morfismo multiplicación $m'_\bullet : G_{1\bullet} \times_{G_{o\bullet}} G_{1\bullet} \longrightarrow G_{1\bullet}$ definido por m'_o y m'_1 , determinan un grupoide doble al que llamaremos grupoide doble transpuesto de $G_{\bullet\bullet}$ y lo denotaremos por $G^t_{\bullet\bullet}$. Esta relación nos define un endofuntor " T " de la categoría de grupoides dobles GPD (GPD ($\mathbb{C}$)) ($T : G_{\bullet\bullet} \longmapsto G^t_{\bullet\bullet}$).

2-grupoides

Los grupoides dobles que desempeñarán un papel importamte en cohomología no abeliana, serán aquellos $G_{\bullet\bullet}$ en los que el grupoide horizontal en dimensión cero $G_{o\bullet}$ es constante (i.e. los objetos G_{0k} son todos iguales para todo k y los morfismos caras y degeneración son todos identidades).

.3.5) <u>Definición</u> (2-grupoide)

Un grupoide doble $G_{\bullet\bullet}$ en el que el grupoide horizontal en dimensión cero $G_{0\bullet}$ es constante será llamado 2-grupoide.

Representaremos a un 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ por un diagrama simplicial truncado

$$\begin{tikzcd}
G_2 \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & G_1 \arrow[l, bend right=40, "s_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
G_0 \arrow[u, bend right=50, "s_0"'] \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[u, bend right=50, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

Llamarenos 0-celdas a los elementos de G_0 ,1-celdas a los de G_1 y 2-celdas a los de G_2 .Representaremos por puntos a las 0-celdas,por flechas horizontales a las 1-celdas y por diagramas

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
d_0(\alpha)\ \bullet \arrow[r, bend left, "D_0(\alpha)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "D_1(\alpha)"'{name=D}] & \bullet\ d_1(\alpha) \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"]
\end{tikzcd}$$

a las 2-celdas.Si los objetos de G_0 fuesen categorías,los de G_1 funtores y los de G_2 transformaciones naturales,las dos multiplicaciones en G_2 corresponderían a las clásicas composiciones horizontal y vertical de transformaciones naturales de modo que la ley de compatibilidad (1.3.3) corresponde a las "Leyes de oro de Godement ". Denotaremos por 2GPD($\mathbb{C}$) la correspondiente subcategoría plena de GPD(GPD($\mathbb{C}$)) cuyos objetos son los 2-grupoides en $\mathbb{C}$.

Notemos por otro lado,que la definición dada de 2-grupoide tiene claramente una dualización :un <u>" 2^*-grupoide "</u> es un grupoide doble $G_{\bullet\bullet}$ en el que el grupoide vertical en dimensión cero $G_{\bullet 0}$ (grupoide de objetos) es un objeto simplicial constante.La restricción del funtor transposición " T " nos dará un isomorfismo entre la categoría de 2-grupoides en $\mathbb{C}$ y su dual la de 2^*-grupoides.

Recordemos que la categoría $\mathbb{C}$ puede ser considerada como una subcategoría plena de GPD($\mathbb{C}$) mediante el funtor (inclusión) $K(-,0) : \mathbb{C} \longrightarrow$ GPD($\mathbb{C}$) que asocia a cada objeto X de $\mathbb{C}$ el complejo simplicial constante $K(X,0)$. Tomando como categoría base a GPD ($\mathbb{C}$) ,tenemos que para cada grupoide $G_\bullet$ el grupoide doble constante $K(G_\bullet,0) = \dots G_\bullet = G_\bullet = G_\bullet$ es un 2-grupoide,así la categoría GPD($\mathbb{C}$) se puede considerar como una subcategoría plena de 2-GPD($\mathbb{C}$) mediante el funtor (inclusión)

$K(-,0) : GPD(\mathbb{C}) \longrightarrow 2\text{-}GPD(\mathbb{C})$.

Así mismo , vimos que la categoría de grupos internos en $\mathbb{C}$, Gp($\mathbb{C}$), se podía considerar como una subcategoría plena de GPD ($\mathbb{C}$) mediante el funtor

$K(-,1) : Gp(\mathbb{C}) \longrightarrow GPD(\mathbb{C})$ que asocia a cada objeto grupo A el grupoide $K(A,1)$. Para GPD($\mathbb{C}$) ; la categoría de grupos internos en GPD ($\mathbb{C}$), Gp(GPD($\mathbb{C}$), que es equivalente de forma natural (ver [41]) a la categoría de grupoides en Gp($\mathbb{C}$) ($Gp(GPD(\mathbb{C})) \cong GPD(Gp(\mathbb{C}))$) puede considerarse como una subcategoría plena de la categoría de 2^*-grupoides mediante el funtor que asocia a cada grupoide $G_\bullet$ en Gp($\mathbb{C}$) el grupoide doble (2^*-grupoide) $K(G_\bullet,1) =$ $\begin{tikzcd} G_\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathbb{1}_\bullet \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$ donde $\mathbb{1}_\bullet = K(\mathbb{1},0)$ y los grupoides horizontales son $K(G_0,1)$ y $K(G_1,1)$ en dimensiones cero y uno respectivamente.

Consideraremos no obstante a la categoría de grupoides en Gp($\mathbb{C}$) como una subcategoría plena de 2-GPD($\mathbb{C}$) mediante el funtor composición

$T\,K(-,1) = K(-,1)^t : GPD(Gp(\mathbb{C})) \longrightarrow 2\,GPD(\mathbb{C})$ que asocia a cada grupoide $G_\bullet$ el transpuesto de $K(G_\bullet,1)$ i.e.

$$\begin{tikzcd} K(G_\bullet,1)^t = K(G_1,1) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & K(G_0,1) \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \vdots & \vdots \\ G_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_0 \arrow[l, bend right, "s_0"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ \mathbb{1} \arrow[u, bend right] \arrow[r, equal] & \mathbb{1} \arrow[u, bend right] \end{tikzcd}$$

Notemos que si A es un objeto grupo en $\mathbb{C}$. Aunque todo objeto del grupoide K(A,1) es un objeto grupo en $\mathbb{C}$, el morfismo multiplicación de $K(A,1)$ no es un morfismo de grupos internos en $\mathbb{C}$ a menos que A sea abeliano por tanto $K(A,1)$ no es un grupoide en Gp ($\mathbb{C}$) si A no es abeliano. Así el objeto simplicial doble truncado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathbb{1} \arrow[d, equal] \\ \mathbb{1} \arrow[r, equal] & \mathbb{1} \end{tikzcd}$$

junto con las multiplicaciones trivial en $\mathbb{1}$, y la multiplicación de A no determinarán un 2 - grupoide a menos que A sea abeliano.

A continuación veremos que algunas de las propiedades más significativas de los grupoides en la categoría de grupos internos en $\mathbb{C}$,como son :

(i) La multiplicación de un grupoide $G_\bullet$ en Gp($\mathbb{C}$) queda determinada de forma única por la multiplicación del objeto grupo G_1 .

(ii) Todo grupoide en Gp($\mathbb{C}$) es abeliano.

(iii) Toda categoría interna en Gp ($\mathbb{C}$) es un grupoide.

(iv) Un objeto simplicial truncado $G_1 \overset{\longleftarrow}{\rightrightarrows} G_0$ en Gp($\mathbb{C}$) determina un grupoide (necesariamente único) con truncación la dada si y solo si ios elementos de Ker(d_0) y los del Ker(d_1) conmutan.

Son también ciertas en la categoría 2GPD ($\mathbb{C}$) .

Obtendremos dichas propiedades como corolarios inmediatos de las proposiciones siguientes.

.3.6) Proposición

Sea $G_{\bullet\bullet}$ un 2-grupoide en $\mathbb{C}$ .Entonces la multiplicación vertical " x " en G_2 está determinada de forma única por la multiplicación horizontal "." en G_2.

Desmostración.-

Sea

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet} = & G_2 \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift right=2, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"] & G_1 \arrow[l, bend right=50, "S_0"'] \arrow[d, shift right=2, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"] \\
& G_0 \arrow[u, bend right, "s_0"'] \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[u, bend right, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

el morfismo simplicial truncado

$$\begin{tikzcd}
G_2 \underset{G_1}{\times} G_2 \arrow[r, "\text{"x"}"] \arrow[d, shift right=2, "d_0 pr_0"'] \arrow[d, "d_1 pr_0"] & G_2 \arrow[d, shift right=2, "d_0"'] \arrow[d, "d_1"] \\
G_0 \arrow[u, bend right, "\langle s_0 , s_0 \rangle"'] \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[u, bend right, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

debe de inducir un morfismo de grupoides (considerando a $G_2 \underset{G_1}{\times} G_2 \rightrightarrows G_0$ con la multiplicación inducida por la de G_2 , i.e. (α, β)$\cdot$(α',β') = ($\alpha\cdot\alpha'$, $\beta\cdot\beta'$)). Para cada par (α, α') $\in G_2 \underset{G_1}{\times} G_2$ se tiene :

$$\alpha \times \alpha' = (\alpha \cdot (S_0D_1(\alpha)-^1 . S_0D_1(\alpha))) \times ((S_0D_1(\alpha) . S_0D_1(\alpha)^{-1}) . \alpha') =$$

$$= ((\alpha . S_0 D_1 (\alpha)^{-1}) . S_0D_1(\alpha)) \times ((S_0D_1(\alpha) . S_0D_1(\alpha)^{-1}) . \alpha') =$$

=(Ley de compatibilidad (1.3.3))=

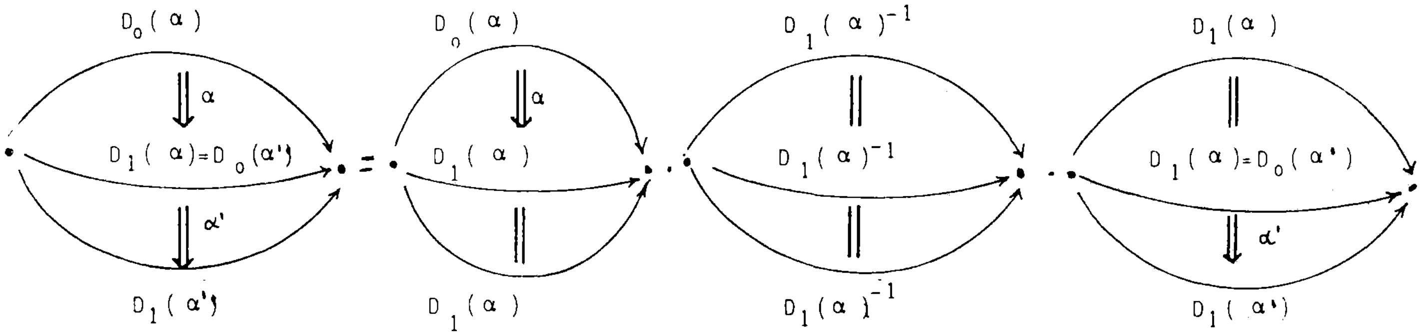
$= ((\alpha \cdot S_0 D_1(\alpha)^{-1}) \times (S_0 D_1(\alpha) \cdot S_0 D_1(\alpha)^{-1})) \cdot (S_0 D_1(\alpha) \times \alpha') =$

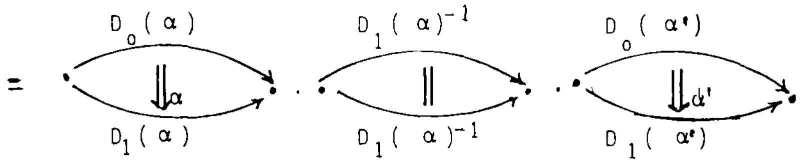
= (Ley de compatibilidad (1.3.3)) =

$= (\alpha \times S_0 D_1(\alpha)) \cdot (S_0 D_1(\alpha)^{-1} \times S_0 D_1(\alpha)^{-1}) \cdot (S_0 D_1(\alpha) \times \alpha') =$

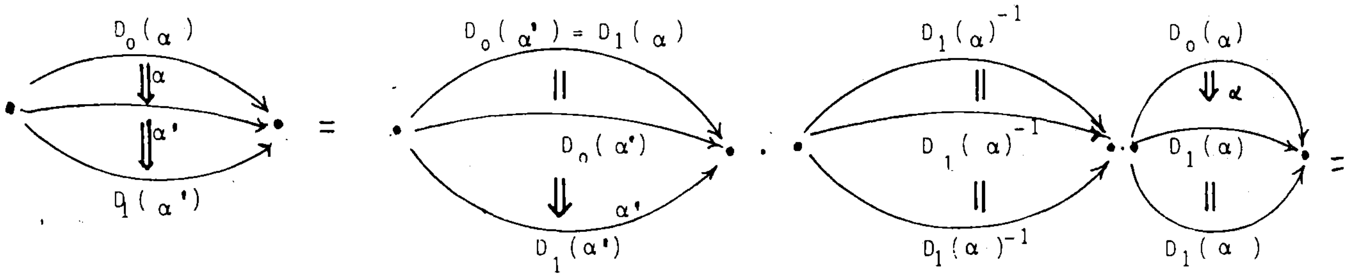
$= \alpha \cdot S_0 D_1(\alpha)^{-1} \cdot \alpha'$ así $\alpha \times \alpha' = \alpha \cdot S_0 D_1(\alpha)^{-1} \cdot \alpha'$.

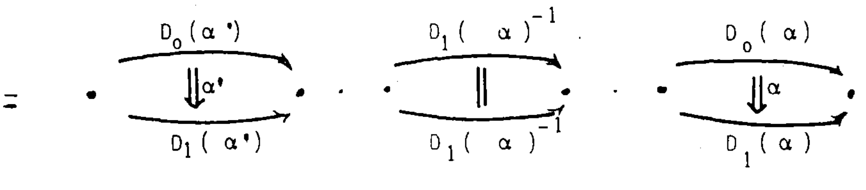
Pictóricamente





Análogamente ,se tiene





por lo que se deduce de forma análoga la igualdad $\alpha \times \alpha' = \alpha' \cdot S_0 D_1(\alpha)^{-1} \cdot \alpha$

Así tenemos

.3.7) $\alpha \times \alpha' = \alpha \cdot S_0 D_1(\alpha)^{-1} \cdot \alpha' = \alpha' \cdot S_0 D_1(\alpha)^{-1} \cdot \alpha$ .//

Al igual que en la categoría GPD(ℂ) ,el " grupo de endomorfismos " de un 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ será el objeto en GPD(ℂ) igualador de $D_0, D_1 : G_{\bullet 1} \longrightarrow G_{\bullet 0}$. Si denotamos por $E = Equ(D_0, D_1 : G_2 \longrightarrow G_1)$ entonces

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}(G_{\bullet\bullet}) = E \arrow[r, "D_0=D_1"] \arrow[d, shift right, "d_0/E"'] \arrow[d, shift left, "d_1/E"] & G_1 \arrow[l, bend right=60, "S_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
G_0 \arrow[u, bend right=60, "s_0"'] \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[u, bend right=60, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

será un objeto grupo en la coma categoría GPD ($\mathbb{C}$) / G_o, donde el objeto grupo $E \rightleftarrows G_1$ en $\mathbb{C}/ G_1$ es el grupo de endomorfismos del grupoide

$$\begin{tikzcd}
G_{1\bullet} = G_2 \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & G_1 \arrow[l, bend right=40, "S_0"']
\end{tikzcd}$$

De la proposición (1.3.6) anterior deducimos de forma inmediata los siguientes corolarios

1.3.8) Corolario

Todo 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ en $\mathbb{C}$ es abeliano, i.e. el grupo de endomorfismos $\mathrm{End}(G_{\bullet\bullet})$ es un grupo abeliano en GPD($\mathbb{C}$) / $G_{\bullet o}$ //

1.3.9) Corolario

Sea $C_{\bullet\bullet}$ una categoría interna en GPD($\mathbb{C}$)

$$\begin{tikzcd}
C_{\bullet\bullet} = C_{\bullet 1} \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & C_{\bullet o} \arrow[l, bend right=50, "S_0"'] = C_2 \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & C_1 \arrow[l, bend right=50, "S_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
& C_o \arrow[u, bend right=60, "s_0"'] \arrow[r, equal] & C_o \arrow[u, bend right=60, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

con la categoría horizontal en dimensión cero $C_{o\bullet}$ constante (i.e. las columnas serán grupoides en $\mathbb{C}$ y las filas categorías internas en $\mathbb{C}$ verificándose en C_2 la ley de compatibilidad (1.3.3) respecto de las multiplicaciones del grupoide $C_2 \overset{\longleftarrow}{\rightrightarrows} C_o$ y de la categoría interna $C_2 \overset{\longleftarrow}{\rightrightarrows} C_1$). Entonces $C_{\bullet\bullet}$ es un 2-grupoide (i.e. toda 2-celda es invertible respecto de la multiplicación vertical " x ") .

Demostración.- Al igual que probamos en la proposición (1.3.6) se verifica que la multiplicación vertical "x" de la categoría interna $C_2 \overset{\longleftarrow}{\rightrightarrows} C_1$ queda determinada por la multiplicación horizontal "•" del grupoide $C_2 \overset{\longleftarrow}{\rightrightarrows} C_o$ por la fórmula

$$\alpha \times \alpha' = \alpha \cdot S_o D_1(\alpha)^{-1} \cdot \alpha' = \alpha' \cdot S_o D_1 (\alpha)^{-1} \cdot \alpha .$$

Si consideramos para cada 2-celda $\alpha \in C_2$, la 2-celda $S_o D_1 (\alpha) \cdot \alpha^{-1} \cdot S_o D_o(\alpha)$ se tiene que :

$$\alpha \times (S_o D_1 (\alpha) \cdot \alpha^{-1} \cdot S_o D_o(\alpha)) = (\alpha \cdot s_o d_1 (\alpha)) \times (S_o D_1(\alpha) \cdot \alpha^{-1} \cdot S_o D_o (\alpha)) =$$

(Ley de compatibilidad (1.3.3)) =

$= (\alpha \times S_oD_1(\alpha)) \cdot (s_od_1(\alpha) \times (\alpha^{-1}\ S_oD_o(\alpha))) = \alpha \cdot (\alpha^{-1}\ S_oD_o(\alpha)) = S_oD_o(\alpha)$.

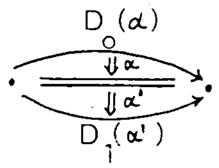
y analogamente

$(S_oD_1(\alpha)\cdot\alpha^{-1}\cdot S_oD_o(\alpha)) \times \alpha = (S_oD_1(\alpha).\alpha^{-1}.S_oD_o(\alpha)) \times (s_od_o(\alpha).\alpha\ ) =$
$= ((S_oD_1(\alpha).\alpha^{-1}) \times s_od_o(\alpha)) \cdot (S_oD_o(\alpha) \times \alpha) = (S_oD_1(\alpha).\alpha^{-1}).\alpha = S_oD_1(\alpha).$

Así $-\alpha = S_oD_1(\alpha).\alpha^{-1}.S_oD_o(\alpha)$ es el inverso de α para el producto "x" , por tanto toda 1-celda α es invertible para el producto "x" siendo entonces $C_2 \overset{\longleftarrow}{\rightrightarrows} C_1$ un grupoide y consecuentemente $C_{\bullet\bullet}$ un 2-grupoide. //

.3.10) <u>Proposición</u>.

Sea $G_{\bullet\bullet tr} = \begin{tikzcd} G_{\bullet 1} \arrow[r, shift left, "D_o"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & G_{\bullet o} \arrow[l, bend right=60, "S_o"'] \end{tikzcd}$ un complejo simplicial truncado en GPD($\mathbb{C}$). Entonces existe un 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ con truncación la dada si y solo si para cada par de elementos $\alpha, \alpha' \in G_2$ tales que : $D_1(\alpha) = s_od_1(\alpha) = s_od_1(\alpha') = D_o(\alpha')$

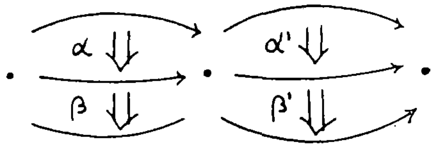


se verifica que $\alpha.\alpha' = \alpha'.\alpha$ (donde hemos denotado "$\cdot\!=\!=\!=\!\cdot$" a la identidad $s_od_1(\alpha) = s_od_o(\alpha)$).

<u>Demostración</u>.- Si existe el 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ con truncación $G_{\bullet\bullet tr}$, entonces tenemos una multiplicación vertical "x": $G_2 \underset{G_1}{\times} G_2 \longrightarrow G_2$ que por la proposición (1.3.6) , viene dada por la fórmula : $\alpha \times \alpha' = \alpha.S_oD_1(\alpha)^{-1}.\alpha' = \alpha'.S_oD_1(\alpha)^{-1}.\alpha$. Si α y α' verifican que $D_1(\alpha) = s_od_1(\alpha) = s_od_1(\alpha') = D_o(\alpha')$ se tiene entonces: $\alpha \times \alpha' = \alpha.S_o(s_od_1(\alpha))^{-1}.\alpha' =$
$\alpha'.S_o(s_od_1(\alpha))^{-1}.\alpha \Longrightarrow \alpha.\alpha' = \alpha'.\alpha$.

Reciprocamente; utilizando las proposiciones (1.3.4) y (1.3.6) tendremos solamente que probar que las multiplicaciones "." del grupoide $G_{\bullet 1}$ y "x": $G_2 \underset{G_1}{\times} G_2 \longrightarrow G_2$ definida por $\alpha \times \alpha' = \alpha.S_oD_1(\alpha)^{-1}.\alpha'$ verifican la ley de compatibilidad (1.3.3).

Sea $((\alpha,\alpha'),(\beta,\beta')) \in (G_2 \underset{G_o}{\times} G_2) \underset{G_1 \underset{G_o}{\times} G_1}{\times} (G_2 \underset{G_o}{\times} G_2)$



entonces $(\alpha.\alpha') \times (\beta.\beta') = (\alpha.\alpha').S_oD_1(\alpha.\alpha')^{-1}.(\beta.\beta') = \alpha.(\alpha'.S_oD_1(\alpha')^{-1}).(S_oD_1(\alpha)^{-1}.\beta).\beta' =$
$(*) = \alpha.(S_oD_1(\alpha)^{-1}.\beta).(\alpha'.S_oD_1(\alpha')^{-1}).\beta' = (\alpha \times \beta).(\alpha' \times \beta')$.

(*) Notemos que el par $((\alpha'.S_oD_1(\alpha')^{-1}),(S_oD_1(\alpha)^{-1}.\beta)$ está en las condiciones del enunciado de esta proposición por lo que se tiene esta igualdad . //

.3.11) Sub2-grupoides normales y 2-grupoides cocientes.

Aplicando los resultados obtenidos en la sección (1.1) a la categoría GPD($\mathbb{C}$) tenemos que un sub2grupoide de un 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ será un diagrama en GPD($\mathbb{C}$)

.3.12)
$$\begin{tikzcd}
G'_{\bullet\bullet}: \arrow[d, hook, "i_{\bullet\bullet}"'] & G'_{\bullet 1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, hook, "i_{\bullet 1}"'] & G_{\bullet 0} \arrow[d, equal] & :\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & G'_2 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, hook] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[dl, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
G_{\bullet\bullet}: & G_{\bullet 1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_{\bullet 0} & :\ \cdot\ \cdot\ \cdot & G_2 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
 & & & & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[dl, equal] \\
 & & & & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 &
\end{tikzcd}$$

El sub2grupoide $i_{\bullet\bullet}: G'_{\bullet\bullet} \hookrightarrow G_{\bullet\bullet}$ será normal si y solo si el plano

$$\begin{tikzcd}
G'_{1\bullet} \arrow[d, hook] : & G'_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, hook] & G_1 \arrow[d, equal] \\
G_{1\bullet} : & G_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_1
\end{tikzcd}$$

en el diagrama (1.3.12) representa un subgrupoide normal. El grupoide en GPD($\mathbb{C}$) cociente de $G_{\bullet\bullet}$ por el sub2-grupoide $G'_{\bullet\bullet}$ es de nuevo un 2grupoide $G''_{\bullet\bullet}$ y viene dado por:

$$\begin{tikzcd}
G'_2 \arrow[rr, hook] \arrow[dr, shift left, "D_0"] \arrow[dr, shift right, "D_1"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_2 \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, shift right, "D_0"'] \arrow[dl, shift left, "D_1"] \arrow[dd, dash, shift left] \arrow[dd, dash, shift right] & & G''_2 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
 & G_1 \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G''_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dr, equal] & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[dl, equal] \\
 & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 &
\end{tikzcd}$$

donde el grupoide $G''_1 \rightrightarrows G_0$ es el coigualador de $D_0, D_1 : G'_{\bullet 1} \rightrightarrows G_{\bullet 0}$ i.e. el grupoide de componentes conexas de $G'_{\bullet\bullet}$. El grupoide $G''_{1\bullet}: G''_2 \rightrightarrows G''_1$ es el grupoide cociente de $G_{1\bullet}$ por el subgrupoide normal $G'_{1\bullet} \hookrightarrow G_{1\bullet}$ y el grupoide $G''_{\bullet 0} : G''_1 \rightrightarrows G_0$ es el grupoide de componentes conexas del 2-grupoide $G'_{\bullet\bullet}$.

Notemos por otra parte que el núcleo de un morfismo $f_{\bullet\bullet}: G_{\bullet\bullet} \longrightarrow H_{\bullet\bullet}$ de 2-grupoides , no tiene porque ser de nuevo un 2-grupoide. Sin embargo si el morfismo $f_{\bullet\bullet}$ tiene la identidad en dimensión cero i.e. $f_0 = id : G_0 = G_0 = H_0$ el núcleo de $f_{\bullet\bullet}$, Ker $(f_{\bullet\bullet})$, vuelve a ser un 2-grupoide, que viene dado por:

$$\begin{tikzcd}
Ker(f_{\bullet\bullet}) = Ker(f_{\bullet 1}): \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \cdot\ \cdot & Ker(f_{\bullet 1})_1 = Ker(f_{1\bullet})_1 \arrow[rr, hook] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_2 \arrow[rr] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & H_2 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
 & G_{\bullet 0} :\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & G_1 \arrow[rr] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & H_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
 & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dr, equal] & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[dl, equal] \\
 & & & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 &
\end{tikzcd}$$

.3.13) Nota (n-grupoides) .- La noción de grupoide doble puede ser generalizada en el siguiente sentido : Un grupoide triple (cuadruple, ...) será un grupoide en la categoría de grupoides dobles (triples , ...). Lo mismo ocurre con el concepto de 2-grupoide que se podrá generalizar a 3-grupoide (4-grupoide , ...), asi por ejemplo un 3-grupoide será un 2-grupoide en la categoría de grupoides tal que el grupoide (en GPD($\mathbb{C}$)) en dimensión cero es constante. Un 3-grupoide será representado en GPD($\mathbb{C}$) por un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet 2} \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] \arrow[d, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift left, "D_1"] & G_{\bullet 1} \arrow[d, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift left, "D_1"] \\
G_{\bullet o} \arrow[r, equal] & G_{\bullet o}
\end{tikzcd}$$

donde cada objeto es un grupoide y cada fila o columna representa a un 2-grupoide en $\mathbb{C}$. a este 3-grupoide lo representaremos , en la categoría $\mathbb{C}$, por un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & G_3 \arrow[rr, shift left, "\partial_0"] \arrow[rr, shift right, "\partial_1"'] \arrow[dl, shift right, "D_0"'] \arrow[dl, shift left, "D_1"] \arrow[dd, shift right, "d_0"'] \arrow[dd, shift left, "d_1"] & & G_2 \arrow[dl, shift right, "D_0"'] \arrow[dl, shift left, "D_1"] \arrow[dd, shift right, "d_0"'] \arrow[dd, shift left, "d_1"] \\
G_1 \arrow[rr, equal] \arrow[dd, shift right, "d_0"'] \arrow[dd, shift left, "d_1"] & & G_1 \arrow[dd, shift right, "d_0"'] \arrow[dd, shift left, "d_1"] & \\
 & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[dl, equal] \\
G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 &
\end{tikzcd}$$

donde cada arista representa un grupoide y cada cara a un 2-grupoide. los elementos de G_3 (3-celdas) se pueden representar por diagramas $\cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad f \qquad} \\ \alpha\Downarrow \ \overset{h}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\beta \\ \xrightarrow[\qquad g \qquad]{} \end{array} \cdot$

pudiendose multiplicar estos elementos de tres formas distintas:

$$\cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad f \qquad} \\ \alpha\Downarrow \ \overset{h}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\beta \\ \xrightarrow[\qquad g \qquad]{} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad f' \qquad} \\ \alpha'\Downarrow \ \overset{h'}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\beta' \\ \xrightarrow[\qquad g' \qquad]{} \end{array} \cdot \quad \overset{\bullet}{\longmapsto} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad f.f' \qquad} \\ \alpha.\alpha'\Downarrow \ \overset{h \bullet h'}{\longrightarrow} \ \Downarrow\beta.\beta'. \\ \xrightarrow[\qquad g\,.\,g' \qquad]{} \end{array}$$

$$\cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad f \qquad} \\ \alpha\Downarrow \ \overset{h}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\beta \\ \longrightarrow \\ \alpha'\Downarrow \ \overset{h'}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\beta' \\ \xrightarrow[\qquad g \qquad]{} \end{array} \cdot \quad \overset{\times}{\longmapsto} \quad \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad f \qquad} \\ \alpha\times\alpha'\Downarrow \ \overset{h \times h'}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\beta\times\beta'. \\ \xrightarrow[\qquad g \qquad]{} \end{array}$$

$$\cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad\qquad f \qquad\qquad} \\ \alpha\Downarrow \ \overset{h}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\beta \ \overset{h'}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\gamma \\ \xrightarrow[\qquad\qquad g \qquad\qquad]{} \end{array} \cdot \quad \overset{*}{\longmapsto} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad f \qquad} \\ \alpha\Downarrow \ \overset{h * h'}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\gamma \\ \xrightarrow[\qquad g \qquad]{} \end{array}$$

.3.14) Estas tres multiplicaciones verifican una ley de compatibilidad que nos diría que todas las formas posibles de multiplicar los elementos en el siguiente diagrama, coinciden

$$\cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad\qquad f \qquad\qquad} \\ \alpha_0\Downarrow \ \overset{h_0}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\beta_0 \ \overset{h_1}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\gamma_0 \\ \longrightarrow \\ \alpha_1\Downarrow \ \overset{h_2}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\beta_1 \ \overset{h_3}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\gamma_1 \\ \xrightarrow[\qquad\qquad g \qquad\qquad]{} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad\qquad f' \qquad\qquad} \\ \alpha'_0\Downarrow \ \overset{h'_0}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\beta'_0 \ \overset{h'_1}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\gamma'_0 \\ \longrightarrow \\ \alpha'_1\Downarrow \ \overset{h'_2}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\beta'_1 \ \overset{h'_3}{\rightsquigarrow} \ \Downarrow\gamma'_1 \\ \xrightarrow[\qquad\qquad g' \qquad\qquad]{} \end{array} \cdot$$

Verificandose , tambien para 3-grupoides que la multiplicación "." determina de forma única las otras dos multiplicaciones..

n-hipergrupoides dobles , (n,1)-hipergrupoides y demás generalizaciones.

Asi como son de interés los grupoides en GPD($\mathbb{C}$), tambien lo será los n-hipergrupoides en GPD($\mathbb{C}$), ya que nos permitirán definir el 3º morfismo de conexión para la cohomología no abeliana.

.3.15) Definición (n-hipergrupoide doble).

Un n-hipergrupoide en GPD($\mathbb{C}$) se llamará n-hipergrupoide doble. A un n-hipergrupoide doble $G_{\bullet\bullet}$ lo representaremos por un diagrama

.3.16)
$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet}: \cdots\ G_{\bullet n} \arrow[r, shift left=2, "D_n"] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=2, "D_0"'] & G_{\bullet n-1} \arrow[l, bend right=40, "s_0"'] \arrow[l, bend right=60, "s_{n-1}"'] \cdots\ G_{\bullet 1} \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] & G_{\bullet 0} \arrow[l, bend right=40, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

en la categoría GPD($\mathbb{C}$) ó por un diagrama

.3 .17)
$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet}: \cdots\ G_{1n} \arrow[r, shift left=2, "D_n"] \arrow[r, shift right=2, "D_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left] & G_{1n-1} \arrow[l, bend right=40, "s_0"'] \arrow[l, bend right=60, "s_{n-1}"'] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left, "d_1"] & \cdots & G_{11} \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & G_{10} \arrow[l, bend right=40, "s_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
G_{0n} \arrow[u, bend left=50] \arrow[r, shift left=2, "D_n"] \arrow[r, shift right=2, "D_0"'] & G_{0n-1} \arrow[l, bend right=40, "s_0"'] \arrow[l, bend right=60, "s_{n-1}"'] \arrow[u, bend right=50, "s_0"'] & \cdots & G_{01} \arrow[u, bend left=50, "s_0"] \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] & G_{00} \arrow[l, bend right=40, "s_0"'] \arrow[u, bend right=50, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

(en los que a menudo omitiremos los operadores degeneración), junto con un morfismo de grupoides (operación corchete)

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{1\bullet}) \arrow[r, "{[\,]_1}"] \arrow[d, shift right, "(d_0)"'] \arrow[d, shift left, "(d_1)"] & G_{1n} \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
\Lambda^{n+1}_{n+n}(G_{0\bullet}) \arrow[r, "{[\,]_0}"] & G_{0n}
\end{tikzcd}$$

verificando las condiciones de la proposición (1.2.2) donde la estructura de grupoide en $\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{1\bullet}) \rightrightarrows \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{0\bullet})$ es la inducida por la de $G_{\bullet n}$. La condición de ser la operación corchete un morfismo de grupoides nos dice :

$[x_0,\ldots,x_n]_1\,[y_0,\ldots,y_n]_1 = [x_0y_0,\ldots,x_ny_n]$, para todo

$$((x_0,\ldots,x_n),(y_0,\ldots,y_n)) \in \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{1\bullet}) \underset{\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{0\bullet})}{\times} \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{1\bullet}) .$$

Esta propiedad es la generalización de la ley de compatibilidad (1.3.3) de los grupoides dobles.

Podemos generalizar la proposición (1.3.4) a n-hipergrupoides dobles, en el siguiente sentido:

1.3.18) Proposición

Un diagrama (1.3.17) de grupoides verticales y morfismos de grupoides (horizontales), n-hipergrupoides (horizontales) y morfismos de n-hipergrupoides (verticales) determinan un único n-hipergrupoide doble $G_{\bullet\bullet}$ si el corchete y la multiplicación en G_{1n} satisfacen la siguiente ley de compatibilidad (generalizada) :

1.3.19) $[x_0, \dots, x_n]_1 \cdot [y_0, \dots, y_n]_1 = [x_0 y_0, \dots, x_n y_n]_1$ para todo $((x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_n)) \in \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{1\bullet}) \times_{\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{0\bullet})} \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{1\bullet})$. //

Denotaremos por n-HPGPD (GPD($\mathbb{C}$)) a la categoría de n-hipergrupoides dobles.

1.3.20) Definición ((n,1)-hipergrupoide).

Un hipergrupoide doble $G_{\bullet\bullet}$ en el que el n-hipergrupoide en dimensión cero $G_{0\bullet}$ es constante se llamará un (n,1)-hipergrupoide, y será representado por un diagrama

1.3.21)
$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet} : G_{1n} \arrow[r, "\cdots"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_{1n-1} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \cdots\cdots & G_{11} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_{1o} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
G_o \arrow[r, equal] & G_o & \cdots\cdots & G_o \arrow[r, equal] & G_o
\end{tikzcd}$$

Denotaremos por (n,1) HPGPD($\mathbb{C}$) la subcategoría plena de la categoría nHPGPD(GPD($\mathbb{C}$)) de los (n,1)-hipergrupoides. Notemos que un (1,1)-hipergrupoide es lo que hemos llamado un 2-grupoide.

La categoría de n-hipergrupoides en la categoría de grupos internos en $\mathbb{C}$,nHPGPD(Gp($\mathbb{C}$), puede ser considerada como una subcategoría plena de (n,1)-HPGPD($\mathbb{C}$) mediante el funtor inclusión nHPGPD(Gp($\mathbb{C}$)) $\hookrightarrow$ (n,1)-HPGPD($\mathbb{C}$) que asocia a cada n-hipergrupoide $G_\bullet$ en Gp($\mathbb{C}$) el (n,1)-hipergrupoide

$$\begin{tikzcd}
K(G_n,1) \arrow[r, "\cdots"] & K(G_{n-1},1) \arrow[l, bend right, "\cdots"'] \arrow[l, bend right=50] & \cdots & K(G_1,1) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & K(G_0,1) \arrow[l, bend right] .
\end{tikzcd}$$

En particular, si A es un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$ el n-hipergrupoide K(A ,n) define un (n,1)-hipergrupoide el K (K(A ,1),n).

Como vimos anteriormente la proposición (1.3.6) generalizaba el hecho de que la operación multiplicación de un grupoide $G_\bullet$ en la categoría de grupos queda totalmente determinada por la operación multiplicación del grupo G_1. Este resultado de la categoría de grupos, no es solamente cierto para grupoides, sino que se generaliza a n-hipergrupoides como también dijimos anteriormente en (1.2.10). Verificándose que para un n-hipergrupoide $G_\bullet$ en grupos el corchete en G_n viene dado unívocamente por la fórmula

$$[x_o, \ldots, x_n] = x_n \cdot ([x_o, \ldots, x_{n-1}]^{n-1})^{-1} . [s_{n-1}d_n x_o, \ldots, s_{n-1}d_n x_{n-1}]^{n-1}$$

donde $[\;]^{n-1}$ está dado recurrentemente por :

$$[x_o, x_1]^1 = x_1 . x_o^{-1} . s_o d_1 x_o$$

. . . .

$$[x_o, \ldots, x_{n-1}]^{n-1} = x_{n-1} ([x_o, \ldots, x_{n-2}]^{n-2})^{-1} [s_{n-2}d_{n-1}(x_o), \ldots, s_{n-2}d_{n-1}(x_{n-1})]^{n-2}$$

este hecho que se puede ver demostrado en [2] se generaliza a la categoría de (n, 1)-hipergrupoides con una demostración totalmente análoga a la dada en la proposición (1.3.6).Así tenemos

1.3.22) Proposición

Sea G un (n, 1)-hipergrupoide.Entonces la operación corchete definida en G_{1n} q-ueda determinada unívocamente por la operaci-ón multiplicación del grupoide $G_{\bullet n}$. //

La proposición (1.3.10) ,al igual que en grupos ,admite también una generalización a la categoría de (n, 1)-hipergrupoides.Siendo las condiciones sobre un objeto simplicial truncado de un (n, 1)-hipergrupoide análogas a las dadas por Conduché [15]en la categoría de grupos.

Será tambien interesante el estudio de n-hipergrupoides en la categoría de m-hipergrupoides en particular los grupoides en m-hipergrupoides.Este estudio nos permitirá dar una definición de los morfismos de conexión para cohomología no abeliana en dimensiones superiores.Un grupoide en la categoría de m-hipergrupoides $G_{\bullet\bullet}$ será representado por un diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet} = G_{\bullet 1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_{\bullet o}: \arrow[l, bend right] & G_{m1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[d, phantom, "\vdots"] & G_{mo} \arrow[l, bend right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[d, phantom, "\vdots"] \\
 & & G_{m-1,1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, bend left, "\vdots"] & G_{m-1,o} \arrow[l, bend right] \arrow[u, bend right, "\vdots"'] \\
 & & \vdots & \vdots \\
 & & G_{11} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_{1o} \arrow[l, bend right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
 & & G_{o1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, bend left] & G_{oo} \arrow[l, bend right] \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}$$

donde cada fila representa un grupoide y cada columna un m-hipergrupoide.Será de un especial interés aquellos grupoides en m-HPGPD($\mathfrak{C}$) , $G_{\bullet\bullet}$, tales que los m-hipergrupoides $G_{\bullet 1}$ y $G_{\bullet o}$ tienen la misma (m-1)truncaci-ón siendo los grupoides $G_{i\bullet}$ constantes para $o \leq i \leq m-1$ .A estos grupoides los llamaremos (1,m)-grupoides y serán representados por un diagrama.

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet} : G_{\bullet 1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_{\bullet o} : & G_{m1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[d, dotted] & G_{mo} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[d, dotted] \\
& & G_{m-1} \arrow[u, bend left, dotted] \arrow[r, equal] & G_{m-1} \arrow[u, bend left, dotted] \\
& & \vdots & \vdots \\
& & G_{1} \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_{1} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
& & G_{o} \arrow[u, bend left] \arrow[r, equal] & G_{o} \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

Denotaremos por (1,m)-GPD($\mathbb{C}$) a la subcategoría plena de GPD(m-HPGPD($\mathbb{C}$)) de los (1,m)-grupoides.

El funtor $\overline{W}$ restringido a la categor-ía de los grupoides dobles.La equivalencia entre las categorías de2-grupoides y 2-hipergrupoides filtrados.

Los resultados que diremos a continu-ación fueron obtenidos en colaboración con el profesor Duskin y su estudiante Gary Nan Tie quien está especialmente interesado en las equivalencias entre las categorías de n-hipergrupoides filtrados,n-grupoides,T-n-hipergupoide etc...Algunos de estos resultados formarán parte de la futura tesis de Gary por lo que solamente esquematizaremos algunas de las demostraciones.

En el apartado (0.3) definíamos un funtor $\overline{W}$:Simpl(Simpl($\mathbb{C}$) $\longrightarrow$ Simpl($\mathbb{C}$) veamos ahora que ocurre cuando aplicamos este funtor $\overline{W}$ a un grupoide doble $G_{\bullet\bullet}$

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet} = \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \Delta \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift left=0.7] \arrow[d, shift right=0.7] \arrow[d, shift right=2] \\
\cdots & \cdots & \cdots & G_{11}\times_{G_{o1}}G_{11} \arrow[r, shift left] \arrow[r] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d] \arrow[d, shift right] & G_{1o}\times_{G_{oo}}G_{1o} \arrow[d, shift left] \arrow[d] \arrow[d, shift right] \\
\cdots & \cdots & G_{11}\times_{G_{1o}}G_{11} \arrow[r, shift left] \arrow[r] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_{11} \arrow[r, shift left, "D_o"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] \arrow[d, shift right, "d_o"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & G_{1o} \arrow[d, shift right, "d_o"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
\cdots & \Delta \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, shift left=0.7] \arrow[r, shift right=0.7] \arrow[r, shift right=2] & G_{o1}\times_{G_{oo}}G_{o1} \arrow[r, shift left] \arrow[r] \arrow[r, shift right] & G_{o1} \arrow[r, shift left, "D_o"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & G_{oo}
\end{tikzcd}$$

$$\bar{W}(G_{\bullet\bullet}) = \dots G_{01} \underset{G_{00}}{\times} G_{11} \underset{G_{00}}{\times} G_{10} \;\begin{smallmatrix} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow[d_2]{} \end{smallmatrix}\; G_{01} \underset{G_{00}}{\times} G_{10} \;\overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}}\; G_{00} \quad .$$

Gráficamente, representaremos a los elementos de G_{00} como puntos, a los elementos $x = (g_{01}, g_{10}) \in \bar{W}(G_{\bullet\bullet})_1 = G_{01} \underset{G_{00}}{\times} G_{10}$ por

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "g_{01}"'] & \\
\bullet \arrow[r, "g_{10}"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

con $d_0(x) = D_0(g_{01})$, $d_1(x) = d_1(g_{10})$.

A los elementos $z = (g_{01}, \alpha_{11}, g_{10}) \in \bar{W}(G_{\bullet\bullet})_2 =$

$= (G_{10} \underset{G_{00}}{\times} G_{01}) \underset{G_{01}}{\times} G_{11} \underset{G_{10}}{\times} (G_{10} \underset{G_{00}}{\times} G_{10}) = G_{01} \underset{G_{00}}{\times} G_{11} \underset{G_{00}}{\times} G_{10}$ los representaremos por

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "g_{01}"'] & & \\
\bullet \arrow[r, "D_0(\alpha_{11})"] \arrow[d, "d_0(\alpha_{11})"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha_{11}"] & \bullet \arrow[d, "d_1(\alpha_{11})"] & \\
\bullet \arrow[r, "D_1(\alpha_{11})"'] & \bullet \arrow[r, "g_{10}"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Un elemento $\xi \in \bar{W}(G_{\bullet\bullet})_3 = G_{01} \underset{G_{00}}{\times} G_{11} \underset{G_{10}}{\times} G_{11} \underset{G_{01}}{\times} G_{11} \underset{G_{00}}{\times} G_{10}$ estará representado por:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "g_{01}"'] & & & & \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\alpha_{11}"] & {} \arrow[d] & & & \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d, dash] \arrow[dr, phantom, "\beta_{11}"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, dash] \arrow[dr, phantom, "\gamma_{11}"] & {} \arrow[d] & & \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & {} & {} \arrow[r, "g_{10}"'] & {}
\end{tikzcd}$$

con $d_0(\xi) = (g_{01}, \alpha_{11}, D_0(\gamma_{11}))$

$d_1(\xi) = (g_{01}, \alpha_{11} \times \beta_{11}, D_1(\gamma_{11}) g_{10})$

$d_2(\xi) = (g_{01}, d_0(\alpha_{11}), \beta_{11} \; \gamma_{11}, g_{10})$

$d_3(\xi) = (d_1(\alpha_{11}), \gamma_{11}, g_{10})$

verificándose que ξ queda totalmente determinado por tres elementos cualesquiera del conjunto $\{d_0(\xi), d_1(\xi), d_2(\xi), d_3(\xi)\}$ así $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})_3 \cong \Lambda_i^3(\bar{W}(G_{\bullet\bullet}))$. En general para $n > 3$, $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})_n$ será un producto fibrado de núcleos simpliciales, puesto que colímites conmutan con colímites , es fácil de ver que $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})_n \cong \Delta_n(\bar{W}(G_{\bullet\bullet}))$. Verificándose por tanto que $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})$ es un 2-hipergrupoide en $\mathbb{C}$. Notemos que la operación corchete $[\,]$: $\Lambda^3_3(\bar{W}(G_{\bullet\bullet})) \longrightarrow \bar{W}(G_{\bullet\bullet})_2$ viene definida por :

$$[(g_{01},\alpha_{11},D_0(\gamma_{11})),(g_{01},\alpha_{11}\times\beta_{11},D_1(\gamma_{11})\,g_{10}),(g_{01}\,d_0(\alpha_{11}),\beta_{11}\;\gamma_{11},g_{10})] = (d_1(\alpha_{11}),\gamma_{11},g_{10})$$

Para cualquiera $g_{01} \in G_{01}$, $\alpha_{11},\beta_{11},\gamma_{11} \in G_{11}$ y $g_{10} \in G_{10}$ tales que entren en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "g_{01}"'] & & & \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rd, phantom, "\alpha_{11}"] & \bullet \arrow[d] & & \\
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rd, phantom, "\beta_{11}"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rd, phantom, "\gamma_{11}"] & \bullet \arrow[d] & \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "g_{10}"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Por tanto la imagen del funtor $\bar{W}$ restringido a la subcategoría plena GPDGPD($\mathbb{C}$) de Simpl(Simpl($\mathbb{C}$)) está contenida en la subcategoría plena 2-Hpgpd($\mathbb{C}$) de Simpl($\mathbb{C}$). Denotaremos también por $\bar{W}$: GPD(GPD($\mathbb{C}$)) $\longrightarrow$ 2-HPGPD($\mathbb{C}$) al funtor obtenido por restricción del funtor $\bar{W}$:Simpl (Simpl ($\mathbb{C}$)) $\longrightarrow$ Simpl ($\mathbb{C}$) .

Supongamos ahora que $G_{\bullet\bullet}$ es un 2-grupoide

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet} = \arrow[r, dotted, no head] & {} \arrow[r, dotted, no head] \arrow[ddd, dotted, no head] & {} \arrow[r, dotted, no head] \arrow[dd, dotted, no head] & {} \arrow[r, dotted, no head] \arrow[d, dotted, no head] & \Delta \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift right=3] \\
& {} \arrow[rr, dotted, no head] & & G_2\times_{G_0}G_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_1\times_{G_0}G_1 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
& {} \arrow[r, dotted, no head] & G_2\times_{G_1}G_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
& G_0 \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[r, equal] & G_0
\end{tikzcd}$$

Entonces $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})$ será un 2-hipergrupoide $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots\Lambda \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & G_2\times_{G_0}G_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & G_0
\end{tikzcd}$$

Donde los elementos de $x = (\alpha, g) \in G_2\times_{G_0}G_1 = \bar{W}(G_{\bullet\bullet})_2$ serán representados por

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left, "D_0(\alpha)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "D_1(\alpha)"'{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\alpha"] & \bullet \arrow[r, "g"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

con $d_0\ (\alpha, g) = D_0\,(\alpha)$

$d_1\ (\alpha, g) = D_1(\alpha)\, g$

$d_2\ (\alpha, g) = g$

Un elemento $\xi \in \overline{W}(G_{\bullet\bullet})_3$ será representado por

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\alpha\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\beta\Downarrow"] & \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \bullet \arrow[r, "g"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Siendo $d_0(\xi) = (\alpha\ ,\ D_0(\gamma))$

$d_1(\xi) = (\alpha \times \beta\ ,\ D_1\,(\gamma)\, g)$

$d_2(\xi) = (\beta \bullet \gamma, g)$

$d_3(\xi) = (\gamma, g)$

y como consecuencia $\left[(\alpha, D_0(\gamma))\ ;\ (\alpha\times\beta,\ D_1(\gamma)\ g\ ),\ (\beta\bullet\gamma, g)\right] = (\gamma,\ g)$.

El morfismo (canónico) de 2-grupoides

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & K(G_{\bullet 0},0):\dots \arrow[dl, "\sigma_{\bullet\bullet}"'] & G_1 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, "s_0"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[dl, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\ G_{\bullet\bullet}:\ \dots & G_2 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\ & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[dl, equal] \\ & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 & \end{tikzcd}$$

induce un morfismo simplicial:

$$\begin{tikzcd} \overline{W}(K(G_{\bullet 0}, 0)) = G_{\bullet 0}:\ \dots\ G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[d, "\sigma_\bullet = \overline{W}(\sigma_{\bullet\bullet})"', "\sigma_2 = s_0 \times id"] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal, "\sigma_1 = id"'] & G_0 \arrow[d, equal, "\sigma_0 = id"'] \\ \overline{W}(G_{\bullet\bullet}):\ \dots\ G_2 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \end{tikzcd}$$

$$\sigma_2 : \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "g"] & \bullet \arrow[r, "g'"] & {} \arrow[r, mapsto] & \bullet \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\parallel"] & \bullet \arrow[r, "g'"] & {} \end{tikzcd}$$

por lo que $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})$ es un 2-hipergrupoide filtrado con filtración $G_{\bullet 0} \overset{\sigma_\bullet}{\hookrightarrow} \overline{W}(G_{\bullet\bullet})$ .Notemos que el grupoide $\begin{tikzcd} G_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_1 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$ es el 1-grupoide asociado según la definición (1.2.11) del 2-hipergrupoide $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})$.

Así , por restricción del funtor $\overline{W}$ obtenemos un funtor al que también denotaremos $\overline{W}$

$$\overline{W}\ :\ 2\text{-}\mathrm{Gpd}(\mathbb{C}) \longrightarrow 2\text{-}\mathrm{FHPGP}(\mathbb{C})$$

.3.23) Notemos que si aplicamos este funtor al 2-grupoide $K(K(A,1),1) =$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, bend left=50, dash] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & 1 \arrow[d, equal] \\ 1 \arrow[u, bend right] \arrow[r, equal] & 1 \end{tikzcd}$$

para A un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$,obtenemos :

$$\begin{tikzcd} \overline{W}(K(K(A,1),1)) = K(A,2) = A^3 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \pi \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \pi . \end{tikzcd}$$

Recíprocamente ,sea $G'_{\bullet} \xhookrightarrow{\sigma_{\bullet}} G_{\bullet}$ un 2-hipergrupoide filtrado

$$\begin{tikzcd} G'_{\bullet} : \cdots\cdots \arrow[d, hook, "\sigma_{\bullet}"'] & \Delta^3(G'_{\bullet}) \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] \arrow[d, hook, "\sigma_3"'] & G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, hook, "\sigma_2"'] & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & G_0 \arrow[d, equal] \\ G_{\bullet} : \cdots\cdots & \Lambda^3_3(G_{\bullet}) \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & G_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \end{tikzcd}$$

Consideremos el grupoide asociado al 2-hipergrupoide $G_{\bullet}$ según la definición (1.2.11),que será

$$\begin{tikzcd} G'_2 \times_{G_1} G'_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G'_2 \arrow[l, bend right=20, shift right=4] \arrow[l, bend right=20, shift right=6] \arrow[r, shift left, "D_1=d_2/G'_2"] \arrow[r, shift right, "D_0=d_1/G'_2"'] & G_1 \arrow[l, bend right=40, "S_0=s_1"'] \end{tikzcd}$$

donde los elementos de G'_2 serán aquellos $\alpha \in G_2$ tales que $d_0\alpha = s_0 d_0 d_1 \alpha$ se tiene entonces un diagrama simplicial truncado doble

3.24)

$$\begin{tikzcd} G'_2 \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & G_1 \arrow[l, bend right=50, "S_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\ G_0 \arrow[u, bend right=50] \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[u, bend right=50] \end{tikzcd}$$

donde $d_0,d_1:G'_2 \longrightarrow G_0$ son las composiciones $G_2 \xrightarrow{d_1} G_1 \xrightarrow{d_0} G_0$ y $G_2 \xrightarrow{d_1} G_1 \xrightarrow{d_1} G_0$ respectivamente restringidos a G'_2 .

El morfismo $\sigma_2 : G_1 \times_{G_0} G_1 \longrightarrow G_2$ junto con la operación corchete en G_2 nos definen un morfismo multiplicación " $\bullet$ " : $G'_2 \times_{G_0} G'_2 \longrightarrow G'_2$ dado por

$\alpha \bullet \alpha' = [\alpha^{-1} , \alpha' , \sigma_2(d_1(\alpha)^{-1}, d_1(\alpha) \bullet \alpha')]$ donde α^{-1} es el inverso de α en el grupoide $\begin{tikzcd} G'_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_1 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$ que viene dado por $\alpha^{-1} = [s_1 d_1(\alpha) , \alpha , s_0 d_1(\alpha)]$ verifi-cándose que el diagrama simplicial doble truncado (1.3.24) junto con los morfismos multiplicación; de los grupoides $\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$, $\begin{tikzcd} G'_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_1 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$ y $\begin{tikzcd} G'_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$ definen un único 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$.Por otra parte los morfismos

$G_2 \longrightarrow G'_2$: $\alpha \longmapsto [s_0 d_0(\alpha) , \alpha , \sigma_2(d_0(\alpha), d_0(\alpha)^{-1} \cdot\cdot d_1(\alpha))]$

$G_2 \longrightarrow G_1 \quad : \quad \alpha \longmapsto d_1(\alpha)^{-1}$

nos darán un único morfismo $G_2 \longrightarrow G_2^{!} \underset{G_0}{\times} G_1$ que es un isomorfismo. Se tiene portanto el teorema siguiente:

.3.25) Teorema

El funtor $\overline{W}$ induce una equivalencia entre las categorías 2GPD($\mathbb{C}$) $\xrightarrow{\cong}$ 2FHPGPD($\mathbb{C}$)).//

Veamos que ocurre en la siguiente dimensión:

Sea $G_{\bullet\bullet}$:

$$\begin{tikzcd}
G_{12} \arrow[r, shift left=2, "D_2"] \arrow[r, "D_1"] \arrow[r, shift right=2, "D_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & G_{11} \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & G_{1o} \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
G_o \arrow[r, equal] & G_o \arrow[r, equal] & G_o
\end{tikzcd}$$

un (2,1)-hipergrupoide en $\mathbb{C}$. Si consideramos a $G_{\bullet\bullet}$ como un complejo simplicial doble sobre $\mathbb{C}$ y le aplicamos el funtor $\overline{W}$ obtenemos el siguiente objeto simplicial:

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}(G_{\bullet\bullet}) = \ldots\ldots G_{12} * G_{11} * G_{1o} \arrow[r, shift left=3, "d_0"] \arrow[r, shift left=1, "d_1"] \arrow[r, shift right=1, "d_2"] \arrow[r, shift right=3, "d_3"'] & G_{11} \underset{G_o}{\times} G_{1o} \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & G_{1o} \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & G_o
\end{tikzcd}$$

donde:

$d_o, d_1, d_2 = G_{11} \underset{G_{1o}}{\times} G_{1o} \longrightarrow G_{1o}$ están definidos por

$d_o(x_{11}, x_{1o}) = D_o(x_{11})$

$d_1(x_{11}, x_{1o}) = D_1(x_{11}) \cdot x_{1o}$

$d_2(x_{11}, x_{1o}) = x_{1o}$

$G_{12} * G_{11} * G_{1o}$ denota el objeto pullback cuyos elementos son ternas $(x_{12}, x_{11}, x_{1o}) \in G_{12} \times G_{11} \times G_{1o}$ tales que $d_1 x_{12} = d_o x_{11} = d_o x_{1o}$,

$d_o, d_1, d_2, d_3 : G_{12} \times G_{11} \times G_{1o} \longrightarrow G_{11} \underset{G_o}{\times} G_{1o}$

están definidas por

$d_o(x_{12}, x_{11}, x_{1o}) = (D_o(x_{12}), D_1(x_{11}))$

$d_1(x_{12}, x_{11}, x_{1o}) = (D_1(x_{12}), x_{1o})$

$d_2(x_{12}, x_{11}, x_{1o}) = (D_2(x_{12})\, x_{11}, D_1(x_{11})^{-1}\, x_{1o})$

$d_3(x_{12}, x_{11}, x_{1o}) = .(x_{11}, D_1(x_{11})^{-1}\, x_{1o})$.

$\overline{W}(G_{\bullet\bullet})_4 = G_{13} * G_{12} * G_{11} * G_{1o}$ donde sus elementos serán $(x^o_{12}, x^1_{12}, x^2_{12}, y_{12}, x_{11}, x_{1o}) \in G_{12} \times G_{12} \times G_{12} \times G_{12} \times G_{11} \times G_{1o}$

tales que $(x^{o}_{12}, x^{1}_{12}, x^{2}_{12}, \quad [x^{o}_{12}, x^{1}_{12}, x^{2}_{12}] \quad) \in G_{13} \cong \Lambda^{3}_{3}(G_{1\bullet})$
$d_1 [x^{o}_{12} \; x^{1}_{12} \; x^{2}_{12}] = d_o \, y_{12} = d_o \, x_{11} = d_o \, x_{1o}$ .Podemos entonces con cada elemento de $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})_4$ rellenar una matriz

$$\begin{pmatrix} x^{o}_{12} & D_o y_{12} & D_o x_{11} \\ x^{1}_{12} & D_1 y_{12} & D_1 x_{11} \\ x^{2}_{12} & x_{11} & x_{1o} \\ [x^{o}_{12} \; x^{1}_{12} \; x^{2}_{12}] \, y_{12} & D_2(y_{12})^{-1} x_{11} & x_{1o} \\ y_{12} & D_2(y_{12})^{-1} x_{11} & D^{2}_{1}(y_{12})^{-1} x_{1o} \end{pmatrix}$$

que representa un elemento(olvidando la fila correspondiente) de cualquiera de los objetos de "open horn" en dimensión 4 verificándose por tanto que $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})$ es un 3-hipergupoide. Tenemos por tanto que el funtor $\bar{W}$ restringido a la categoría de (2, 1)-hipergrupoides tiene su imagen en la de 3-hipergrupoides

$$\bar{W} : (2,1)\text{-}\mathrm{HPGPD}(\mathbb{C}) \longrightarrow 3\text{-}\mathrm{HPGPD}(\mathbb{C}).$$

En general podemos demostrar que $\bar{W}$ de cualquier (n, 1)-hipergrupoide en $\mathbb{C}$ es un (n+1)-hipergrupoide en $\mathbb{C}$; $\bar{W} : (n,1)\text{-}\mathrm{HPGPD}(\mathbb{C}) \longrightarrow (n+1)\,\mathrm{HPGPD}(\mathbb{C})$.
Notemos que si $G_{\bullet\bullet}$ fuese un (2,1)-hipergrupoide filtrado entonces $G_{\bullet\bullet}$ sería la imagen mediante $\bar{W}$ de un 2-grupoide en GPD($\mathbb{C}$) que sería además un 3-grupoide y $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})$ sería un 3-hipergrupoide filtrado. En general se verifica el siguiente teorema (que no demostraremos) .

3.26) Teorema

El funtor $\bar{W}$ establece una equivalencia natural entre las categorías de n-grupoides y n-hipergrupoides filtrados en $\mathbb{C}$ .//

3.27) Si A es un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$ y $G_{\bullet\bullet} = K(K(A,1),n)$ entonces $\bar{W}(G_{\bullet\bullet}) = K(A,n+1)$.
Por otra parte A también define un n-grupoide que será $K(K(\ldots(K(A,1),1)\ldots,1)$,
por ejemplo si n=3 sería:

$K(K(K(A,1),1)1) =$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathbb{1} \arrow[dl, equal] \arrow[dd, equal] \\
\mathbb{1} \arrow[rr, equal] \arrow[dd, equal] & & \mathbb{1} \arrow[dd, equal] & \\
 & \mathbb{1} \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & \mathbb{1} \arrow[dl, equal] \\
\mathbb{1} \arrow[rr, equal] & & \mathbb{1} &
\end{tikzcd}$$

entonces $\overline{W}(K(K(K(A,1),1),1) = K(K(A,1),2)$ y $\overline{W}^2(K(K(K(A,1),1),1) = K(A,3)$, en general $\overline{W}^{n-1}(K(\ldots(K(A,1),1)\ldots 1)) = K(A,n)$.

Veamos ahora como actua el funtor $\overline{W}$ sobre la categoría de los (1,n)- grupoides. Recordemos que habíamos llamado (1,n)-grupoide a un grupoide $G_{\bullet\bullet} : G_{\bullet 1} \rightrightarrows G_{\bullet o}$ en la categoría de n-hipergrupoides verificando que los grupoides $G_{i\bullet}$ son constantes para $i = o,\ldots\ldots,n-1$ y que lo representábamos por un diagrama:

$$G_{\bullet\bullet}= \begin{tikzcd}
 & \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet 1}) \arrow[d, "{[\;]_1}"'] & \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet o}) \arrow[d, "{[\;]_o}"] \\
G_{n1}\times_{G_{no}} G_{n1} \arrow[r, "\text{''}\bullet\text{''}"] & G_{n1} \arrow[r, shift left, "D_o"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] \arrow[d, shift right=3, "d_n"'] \arrow[d, phantom, "\vdots"] \arrow[d, shift left=3, "d_o"] & G_{no} \arrow[l, bend right=20, "S_o"'] \arrow[d, shift right=3, "d_n"'] \arrow[d, phantom, "\vdots"] \arrow[d, shift left=3, "d_o"] \\
 & G_{n-1} \arrow[u, bend right=30, "S_o"'] \arrow[u, bend right=60, "S_n"'] \arrow[r, equal] & G_{n-1} \arrow[u, bend right=30, "S_o"'] \arrow[u, bend right=60, "S_n"'] \\
 & \vdots & \vdots \\
 & G_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, shift right, "d_1"'] \arrow[d, shift left, "d_o"] & G_1 \arrow[d, shift right, "d_1"'] \arrow[d, shift left, "d_o"] \\
 & G_o \arrow[u, bend right=40, "S_o"'] \arrow[r, equal] & G_o \arrow[u, bend right=40, "S_o"']
\end{tikzcd}$$

Si aplicamos $\overline{W}$ al (1,n)-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ obtenemos el objeto simplicial en $\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}(G_{\bullet\bullet}) = \cdots\cdots G_{n1}\times_{G_{no}}\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet o}) \arrow[r, shift left=2, "d_{n+1}"] \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] \arrow[r, shift right=2, "d_o"'] & G_{no} \arrow[r, shift left=2, "d_n"] \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] \arrow[r, shift right=2, "d_o"'] & G_{n-1} \;\cdots\; G_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_o"'] & G_o
\end{tikzcd}$$

donde los elementos de $G_{n1}\times_{G_{no}}\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet o})$ serán de la forma

$(x_{n1},(D_1(x_{n1}),\, x^1_{no},\, \ldots\ldots\ldots, x^n_{no}, -)) \in G_{n+1}\times\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet o})$ y los morfismos

$d_i : G_{n1}\times_{G_{no}}\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet o}) \longrightarrow G_{no}$ están dados por :

$d_o(x_{n1}, (D_1(x_{n1}), x^1_{no}, \ldots, x^n_{no}, -)) = D_o(X_{n1})$

$d_i(x_{n1}, (D_1(x_{n1}), x^1_{no}, \ldots, x^n_{no}, -)) = x^i_{no} \qquad o < i \leqslant n$

$d_{n+1}(x_{n1}, (D_1(x_{n1}), x^1_{no}, \ldots, x^n_{ho}, -)) = [D_1(x_{n1}), x^1_{no}, \ldots, x^n_{no}]_o$.

Los elementos de $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})_{n+2}$ serán de la forma:

$$\xi = ((y_{n1}, x^{o}_{n1}), (x^{o}_{n1}, \ldots, x^{n}_{n1}, -), \begin{pmatrix} D_1(x^{o}_{n1}), D_1(x^{1}_{n1}) & \ldots\ldots\ldots & D_1(x^{n}_{n1}), - \\ D_1(x^{o}_{n1}), x^{oo} & \ldots\ldots\ldots & x^{on} \quad, - \\ D_1(x^{1}_{n1}), x^{1o} & \ldots\ldots\ldots & x^{1n} \quad, - \\ \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ D_1(x^{n}_{n1}), x^{no} & \ldots\ldots\ldots & x^{nn} \quad, - \end{pmatrix}) \in$$

$$\in (G_{n1} \underset{G_{no}}{\times} G_{n1}) \times \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet 1}) \times \Delta_{n+2}(G_{\bullet o}) .$$

Cada elemento ξ en $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})_{n+2}$ determina de forma única una matriz.

$$\begin{array}{l} \xi_o \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n+1} \\ \xi_{n+2} \end{array} \begin{pmatrix} y_{n1} & D_o(x^{o}_{n1}) & D_o(x^{1}_{n1}) & \ldots\ldots & D_o(x^{1}_{n1}) & - \\ y_{n1} x^{o}_{n1} & D_1(x^{o}_{n1}) & D_1(x^{1}_{n1}) & \ldots\ldots & D_1(x^{1}_{n1}) & - \\ x^{1}_{n1} & D_1(x^{o}_{n1}) & x^{oo} & \ldots\ldots & x^{on} & - \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x^{1}_{n1} & D_1(x^{n-1}_{n1}) & x^{n-1,o} & \ldots\ldots & x^{n-1,n} & - \\ x^{1}_{n1}, x^{1}_{n1}, \ldots, x^{1}_{n1} & D_1(x^{n}_{n1}) & x^{no} & \ldots\ldots & x^{nn} & - \end{pmatrix}$$

En la que cualquiera de las filas está determinada por las restantes, así si olvidamos la fila i-ésima la matriz $(\xi_o, \ldots\ldots, \xi_{i-1}, -, \xi_{i+1}, \ldots\ldots, \xi_{n+2})$ representa un elemento de $\Lambda^{i}_{n+2}(\overline{W}(G_{\bullet\bullet}))$. Tenemos entonces que $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})$ es un (n+1)-hipergrupoide con operación corchete $[\xi_o, \ldots\ldots, \xi_{n+1}] = \xi_{n+2}$. Además, si consideramos el morfismo simplicial doble $\sigma_{\bullet\bullet}$: $K(G_{\bullet o}, 0) \hookrightarrow G_{\bullet\bullet}$ y le aplicamos $\overline{W}$ obtenemos

$$G_{\bullet o} \xhookrightarrow{\overline{W}(\sigma_{\bullet\bullet})} \overline{W}(G_{\bullet\bullet})$$ que será una 1-filtración de $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})$.

Así el funtor $\overline{W}$ restringido a la categoría de (1,n)-grupoides tiene su imagen en la categoría de (n+1)-hipergrupoides, 1-filtrados i.e.

$$\overline{W} : (1,n)\,GPD(\mathbb{C}) \longrightarrow \binom{n+1}{1}\text{-FHPGPD}(\mathbb{C}) .$$

El siguiente teorema nos prueba que este funtor es una equivalencia de categorías.

.3.28) Teorema

El funtor $\overline{W}$ induce una equivalencia natural $\overline{W}: (1,n)GPD(\mathbb{C}) \longrightarrow \binom{n+1}{1}FHPGPD(\mathbb{C})$ entre las categorías de (1,n)-grupoides en $\mathbb{C}$ y de (n+1)-hipergrupoides en $\mathbb{C}$ 1-filtrados.

Demostración. Calculamos el funtor inverso salvo isomorfismo

$\Psi = \binom{n+1}{1}$-FHGPD ($\mathbb{C}$) $\longrightarrow$ (1,n)-GPD ($\mathbb{C}$) .Sea $G'_\bullet \xhookrightarrow{\sigma_\bullet} G_\bullet$ un (n+1)-hipergrupoide 1-filtrado

$$\begin{tikzcd}
G'_\bullet : \cdots \arrow[d, hook, "\sigma_\bullet"'] & \Lambda^{n+1}_{n+1}(G'_\bullet) \arrow[r, shift left, dash] \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] \arrow[r, shift right, dash] \arrow[d, "\sigma_{n+1}"'] & G'_n \cdots\cdots \arrow[d, "\sigma_n"'] & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & G_o \arrow[d, equal] \\
G_\bullet : \cdots & G^{n+1}_{n+1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots\cdots"] \arrow[r, shift right] & G_n \cdots\cdots & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_o
\end{tikzcd}$$

Este induce un diagrama simplicial doble truncado.

$$\begin{tikzcd}
G'_{n+1} \arrow[r, shift left, "D_1 = d_n / G'_{n+1}"] \arrow[r, shift right, "D_0 = d_{n-1} / G'_{n+1}"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, phantom, ":"] \arrow[d, shift left, "d_n"] & G_n \arrow[l, bend right=40, "S_0 = s_n"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, phantom, ":"] \arrow[d, shift left, "d_n"] \\
G_{n-1} \arrow[r, equal] & G_{n-1} \\
\vdots & \vdots \\
G_0 \arrow[r, equal] & G_0
\end{tikzcd}$$

donde $\begin{tikzcd} G'_{n+1} \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] & G_n \arrow[l, bend right=40, "S_0"'] \end{tikzcd}$ es el 1-grupoide asociado según la definición (1.2.11) al (n+1)-hipergrupoide $G_\bullet$ y los morfismos $d_i : G'_{n+1} \longrightarrow G_n$ son las composiciones $d_i D_o = d_i D_1$ $o \leqslant i \leqslant n$. Además la operación corchete de $G_\bullet$ junto con el morfismo $\sigma_\bullet$ induce una estructura de n-hipergrupoide en $G'_{n+1} \overset{\cdots\cdots}{\rightrightarrows} G_{n-1} \cdots G_1 \rightrightarrows G_o$ con la operación corchete definida por $[x_o, \ldots, x_n] = [x_o, \ldots, x_n, \sigma_{n+1}(D_o(x_o), \ldots, D_0(x_n), -)]$. Obteniéndose así un (1,n)-grupoide $\Psi(G_\bullet)$, se verifica que $\overline{W}(\Psi(G_\bullet))$ es isomorfo a $G_\bullet$ como hipergrupoide filtrado. Por otra parte si $G_{\bullet\bullet}$ es un (1,n)-grupoide el 1-grupoide asociado al (n+1)-hipergrupoide $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})$ es isomorfo a $G_{n1} \rightrightarrows G_{no}$ teniéndose un isomorfismo de (n,1)-grupoides $\Psi\overline{W}(G_{\bullet\bullet}) \cong G_{\bullet\bullet}$ .//

.3.29) *Como ejemplo podemos observar que para cualquier objeto grupo abeliano* A *en* $\mathbb{C}$, se tiene que $\overline{W}$ del (1,n)-grupoide K(K(A,n),1) es K(A,n+1).Notemos por otra parte que si un (1,n)-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ tiene a un n-hipergrupoide filtrado como n-hipergrupoide de objetos (i.e. $G_{\bullet o}$ es filtrado) entonces $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})$ es un (n+1)-hipergrupoide filtrado (obteniéndose de esta forma otro método para demostrar el teorema (1.3.26)).

(1.4) TORSORES .-

En este capítulo estudiaremos los torsores sobre n-hipergrupoides,a partir de los cuales definiremos en el capítulo 3 los conjuntos de cohomología.

Acciones de grupoides (I) .

Daremos aquí una primera extensión del concepto de acción de un grupo sobre un conjunto.

Recordemos que una acción (derecha) de un grupo A sobre un conjunto E es una aplicación $\varphi : ExA \longrightarrow E$, $\varphi(x,a) = x^a$ que satisface los axiomas:

$$x^1 = x$$
$$(x^a)^b = x^{ab}$$

Si consideramos el conjunto simplicial $E_\bullet$ definido por $E_o = E$, $E_1 = ExA$ $d_o d_1 : ExA \longrightarrow E$ $d_o(x.a) = a$ $d_1(x,a) = x^a$, $s_o : E \longrightarrow ExA$ $s_o(x) = (x,1)$ y $E = \operatorname{cosk}^1(E_\bullet)$, la proyección $ExA \longrightarrow A$ junto con el morfismo trivial $E \longrightarrow 1\!\!1$ definen un morfismo simplicial $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow K(A,1)$ que es fibración exacta en dimensiones $n \geqslant 1$. Recíprocamente , si $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow K(A,1)$ es una fibración exacta(en conjuntos) para dimensiones $\geqslant 1$, entonces la aplicación composición:

$E_o \times A \cong E_1 \xrightarrow{d_1} E_o$ nos define una acción de A sobre E_o .

.4.1) Definición (acción)

Se define una acción de un grupoide $G_\bullet$ como un morfismo simplicial $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ que es fibración exacta en dimensiones mayores o iguales a uno.

Si $\alpha_\bullet$ es una acción de $G_\bullet$,considerando el morfismo composición

$\varphi : E_o * G_1 \cong E_1 \xrightarrow{d_1} E_o$ donde $E_o * G_1$ es el objeto pullback

$$\begin{tikzcd}
E_o * G_1 \arrow[r] \arrow[d] & E_o \arrow[d, "f_o"] \\
G_1 \arrow[r, "d_o"] & G_o
\end{tikzcd}$$

tenemos una " acción" de G_1 sobre E_o .Si denotamos por $x^g = \varphi(x,g)$ tenemos entonces:

i) $\alpha_o(x) = d_o g$, $\alpha_o(x^g) = d_1 g$

ii) $x^{s_o \alpha_o(x)} = x$

iii) $(x^g)^{g'} = x^{gg'}$

Además puesto que $G_m \cong \Lambda^i_m(G_\bullet)$ para todo $o \leqslant i \leqslant m$ y todo $m > 1$ entonces $E_m \cong \Lambda^i_m(E_\bullet)$ para todo $o \leqslant i \leqslant m$ y $m > 1$ así $E_\bullet$ será tanbién un grupoide.

Si identificamos E_1 con $E_o * G_1$ vía el isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[drr, bend left, "d_o"] \arrow[dr, phantom, "\cong"] \arrow[ddr, bend right, "f_1"'] & & \\
& E_o * G_1 \arrow[r] \arrow[d] & E_o \arrow[d, "\alpha_o"] \\
& G_1 \arrow[r, "f_o"] & G_o
\end{tikzcd}$$

tenemos que la multiplicación de $E_\bullet$ está dada por $(x,g)\cdot(x,g') = (x,gg'^{-1})$. Denotaremos por $\mathrm{OPER}_{\mathbb{C}}(G_\bullet)$ (ó solamente $\mathrm{OPER}(G_\bullet)$,cuando esté suficientemente claro en la categoría base en que estamos),a la categoría cuyos objetos son las acciones de $G_\bullet$ y cuyos morfismos son los morfismos simpliciales <u>$G_\bullet$-invariantes</u> i.e. diagramas commutativos

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[rr, "f_\bullet"] \arrow[dr, "\alpha_\bullet"'] & & E'_\bullet \arrow[dl, "\alpha'_\bullet"] \\
& G_\bullet &
\end{tikzcd}$$

Si X es un objeto de $\mathbb{C}$ denotaremos por $\mathrm{OPER}_{\mathbb{C}/X}(G_\bullet)$ a la categoría cuyos objetos son las acciones $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ de $G_\bullet$,con $E_\bullet$ aumentado sobre X y los morfismos son los morfismos de complejos simpliciales aumentados sobre X $G_\bullet$-invariantes:

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
E_\bullet \arrow[ur] \arrow[rr, "f_\bullet"] \arrow[dr, "\alpha_\bullet"'] & & E'_\bullet \arrow[ul] \arrow[dl, "\alpha'_\bullet"] \\
& G_\bullet &
\end{tikzcd}$$

Dado un morfismo de grupoides $f_\bullet : G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$,mediante pullback vía $f_\bullet$ se obtiene un funtor

.4.2) $$f^*: \mathrm{OPER}_{\mathbb{C}}(H_\bullet) \longrightarrow \mathrm{OPER}_{\mathbb{C}}(G_\bullet)$$

$$\begin{tikzcd}
f^*(E_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "f^*(\alpha)"'] & E_\bullet \arrow[d, "\alpha_\bullet"] \\
G_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"'] & H_\bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& f_1^*(E_1) \arrow[rrr] \arrow[dl, "f_1^*(\alpha_1)"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & & E_1 \arrow[dl, "\alpha_1"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
G \arrow[rrr, "f_1"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & & H_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& f_0^*(E_0) \arrow[rrr] \arrow[dl, "f_0^*(\alpha_0)"'] & & & E_0 \arrow[dl, "\alpha_0"] \\
G_0 \arrow[rrr, "f_0"] & & & H_0 &
\end{tikzcd}$$

Este funtor tiene un adjunto izquierda $f! \dashv f^*$

.4.3) $$f! : \mathrm{OPER}_{\mathbb{C}}(G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{OPER}_{\mathbb{C}}(H_\bullet)$$

que viene definido como sigue: Sea $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ una acción de $G_\bullet$, consideremos el complejo simplicial doble $\Gamma^{op}(H_\bullet)$: . . . $\mathrm{DEC}^{op^2}(H_\bullet) \rightrightarrows \mathrm{DEC}^{op}(H_\bullet) \longrightarrow H_\bullet$ levantando este complejo por pullback via el morfismo simplicial composición $f_\bullet\alpha_\bullet : E_\bullet \to G_\bullet \to H_\bullet$ obtenemos un diagrama de complejos simpliciales dobles:

.4.4)
$$\begin{tikzcd}
(f\alpha)^*(\Gamma^{op}(H_\bullet)) : \arrow[d] & \cdots & \mathrm{DEC}^{op^2}(H_\bullet) * E_\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \mathrm{DEC}^{op}(H_\bullet) * E \arrow[r] \arrow[d] & E_\bullet \arrow[d, "f_\bullet\alpha_\bullet"] \\
\Gamma^{op}(H_\bullet) : & \cdots & \mathrm{DEC}^{op^2}(H_\bullet) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{DEC}^{op}(H_\bullet) \arrow[r] & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

donde "$*$" denota producto fibrado en $\mathrm{Simpl}(\mathbb{C})$. Tenemos entonces que cada uno de los complejos simpliciales $\mathrm{DEC}^{op^{(i+1)}}(H_\bullet)$ está aumentado por H_i y cada uno de los complejos $DEC^{op^{(i+1)}}(H_\bullet)*E_\bullet$ está aumentado por E'_i=coequ($D_0, D_1 : G_{i+2} * E_1 \longrightarrow G_{i+1} * E_0$) por lo que el diagrama anterior (1.4.4) puede completarse a un diagrama en Simpli($\mathbb{C}$)

.4.5)
$$\begin{tikzcd}
\cdots & & DEC^{op^3}(H_\bullet)*E_\bullet \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dl] \arrow[dd] & & DEC^{op^2}(H_\bullet)*E_\bullet \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, no head] \arrow[dd] & & DEC^{op}(H_\bullet)*E_\bullet \arrow[rr] \arrow[dl, no head] \arrow[dd] & & E_\bullet \arrow[dl] \\
\cdots & DEC^{op^3}(H_\bullet) \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dd] & & DEC^{op^2}(H_\bullet) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd] & & DEC^{op}(H_\bullet) \arrow[rr] \arrow[dd] & & H_\bullet & \\
\cdots & & E'_2 \arrow[rr, dashed, shift left] \arrow[rr, dashed, shift right] \arrow[dl, dashed, "\alpha'_2"] & & E'_1 \arrow[rr, dashed] \arrow[dl, dashed, "\alpha'_1"] & & E'_0 \arrow[dl, dashed, "\alpha'_0"] & & \\
\cdots & H_2 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & H_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & H_0 & & &
\end{tikzcd}$$

Si escribimos el diagrama (1.4.5) en la categoría $\mathbb{C}$ tenemos:

.4.6)
$$\begin{tikzcd}
\cdots & & H_3 * E_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] \arrow[dd, shift right, "D_0"'] \arrow[dd, shift left, "D_1"] & & H_2 * E_1 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, shift right, "D_0"'] \arrow[dd, shift left, "D_1"] & & E_1 \arrow[dl, "f_1\alpha_1"] \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, shift left] \\
\cdots & H_3 \arrow[rr, shift left, "d_0"] \arrow[rr, shift right, "d_1"'] \arrow[dd, shift right, "d_2"'] \arrow[dd, shift left, "d_3"] & & H_2 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dd, shift right, "d_1"'] \arrow[dd, shift left, "d_2"] & & H_1 \arrow[dd, shift right, no head] \arrow[dd, shift left, no head] & \\
\cdots & & H_2 * E_0 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] \arrow[dd] & & H_1 * E_0 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & E_0 \arrow[dl, "f_0\alpha_0"] \\
\cdots & H_2 \arrow[rr, shift left, "d_0"] \arrow[rr, shift right, "d_1"'] \arrow[dd, "d_2"'] & & H_1 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dd, no head] & & H_0 & \\
\cdots & & E'_1 \arrow[rr, dashed, shift left] \arrow[rr, dashed, shift right] \arrow[dl, dashed, "\alpha'_1"] & & E'_0 \arrow[dl, dashed, "\alpha'_0"] & & \\
\cdots & H_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & H_0 & & &
\end{tikzcd}$$

se verifica entonces que $\alpha'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ es una acción de $H_\bullet$, se define $f!(\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet) = (\alpha'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow H_\bullet)$. (Si el lector desea estudiar esta construcción más detalladamente puede dirigirse a [32]).

.4.7) La unidad de la adjunción $\eta : id \longrightarrow f^* f!$ viene dada como sigue:sea $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ una acción y $\alpha'_\bullet = E'_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ la acción $f!(\alpha)$ entonces $\eta_{\alpha_\bullet} : E_\bullet \rightarrow f^*(E'_\bullet)$ viene definida por: $\eta_{\alpha_0} : E_0 \longrightarrow G_0 * E'_0$ es el único morfismo inducido por la pareja (α_0, σ).

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[dr, dashed, "\eta_{\alpha_0}"'] \arrow[drr, bend left, "\sigma"] \arrow[ddr, bend right, "\alpha_0"'] & & \\
& G_0 * E'_0 \arrow[r] \arrow[d] & E'_0 \arrow[d] \\
& G_0 \arrow[r, no head] & H_0
\end{tikzcd}$$

donde $\sigma : E_0 \longrightarrow E'_0$ está definido por la composición $q_0 s : E_0 \xrightarrow{s} H_1 * E_0 \xrightarrow{q_0} E'_0$

$$\begin{tikzcd}
 & H_2 * E_1 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E_1 \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
H_2 \arrow[rr] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & H_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
 & H_1 * E_0 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, "q_0"'] & & E_0 \arrow[ll, dashed, bend right, "s"'] \arrow[dl] \arrow[ddll, dashed, "\sigma"] \\
H_1 \arrow[rr] & & H_0 \arrow[ll, bend right, "s_0"'] & \\
 & E'_0 & &
\end{tikzcd}$$

con elementos $\sigma(x) = q_0(s_0 f_0 \alpha_0(x), x)$. $\eta_{\alpha_1} : E_1 = G_1 \underset{G_0}{\times} E_0 \longrightarrow E'_1 = H_1 \underset{H_0}{\times} E'_0$

es el único morfismo inducido por la pareja (f_1, η_{α_0})

$$\begin{tikzcd}
G_1 \underset{G_0}{\times} E_0 \arrow[rr, "Pr_1"] \arrow[dr, dashed, "\eta_{\alpha_1}"] \arrow[dd, "Pr_0"'] & & E_0 \arrow[d, "\eta_{\alpha_0}"] \\
 & H_1 \underset{H_0}{\times} E'_0 \arrow[r] \arrow[d] & E'_0 \arrow[d, "\alpha'_0"] \\
G_1 \arrow[r, "f_1"] & H_1 \arrow[r, "d_0"'] & H_0
\end{tikzcd}$$

con elementos $\eta_{\alpha_1}(g, x) = (f_1(g), \eta_{\alpha_0}(x))$.

Notemos que si $\alpha_\bullet$ ($\alpha'_\bullet$) son acciones, la estructura de grupoide de $G_\bullet$ ($H_\bullet$) inducen una estructura de grupoide en $E_\bullet$($E'_\bullet$). Así, por ser $f_\bullet$ un morfismo de grupoides se tiene que $(\eta_{\alpha_0}, \eta_{\alpha_1})$ definen un morfismo de grupoides $\eta_{\alpha_\bullet} : E_\bullet \longrightarrow f^*(E'_\bullet)$.

.4.8) La counidad de la adjunción $\xi : f!\, f^* \longrightarrow id$ viene dada por : Sea $\beta_\bullet : F_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ una acción de $H_\bullet$ y sea $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ la acción de $G_\bullet$ dada por $f!\, f^*(\beta_\bullet)$ entonces $\xi_{\beta_\bullet} : E_\bullet \longrightarrow F_\bullet$ definida como sigue; $\xi_{\beta_0} : E_0 \longrightarrow F_0$ es el único morfismo inducido por $\xi : H_1 * G_0 \longrightarrow F_0$ en el diagrama :

$$\begin{tikzcd}
 & & H_2 * G_1 \arrow[rrrr] \arrow[dl] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] & & & & F_1 * G_1 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] \\
 & H_2 * F_1 \arrow[rrrr] \arrow[dl] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] & & & F_1 \arrow[dl] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] & & \\
H_2 \arrow[rrr, no head] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] & & & H_1 \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] & & G_1 \arrow[ll] & \\
 & & H_1 * G_0 \arrow[rrrr] \arrow[dl] \arrow[drrr, dashed, "\xi"] \arrow[ddd, no head] & & & & F_0 * G_0 \arrow[dll] \arrow[dl] \\
 & H_1 * F_0 \arrow[rrrr] \arrow[dl] & & & F_0 \arrow[dl] \arrow[ddll, dashed, "\xi_{\beta_0}"] & & \\
H_1 \arrow[rrr] & & & H_0 & & G_0 \arrow[ll] & \\
 & & E_0 & & & &
\end{tikzcd}$$

que coiguala a $D_0 D_1$: $H_2 * G_1 \longrightarrow H_1 * G_0$.

El morfismo $\xi_{\beta_1} : F_1 = H_1 \times_{H_0} F_0 \longrightarrow E_1 = H_1 \times_{H_0} E_0$ esta dado por $\xi_{\beta_1}(g,x) = (g, \xi_{\beta_0} x)$, así ξ_β es el único morfismo simplicial definido por el morfismo simplicial truncado$(\xi_{\beta_0}, \xi_{\beta_1})$

Notemos que si $f_\bullet : G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$, $h_\bullet : H_\bullet \longrightarrow K_\bullet$ son morfismos de grupoides, entonces $f^* h^*$ y $(h \; f)^*$ son dos funtores isomorfos pero no iguales, lo mismo ocurre con $h!\; f!$ y $(h \; f)!$.

Acciones prinicipales y 1-torsores.

Recordemos que una acción de un grupo A sobre un conjunto E , $\Upsilon : A\times E \longrightarrow E$, es principal sii ${}^{a}x = {}^{b}x \Longrightarrow a=b$ esto es equivalente a decir que el par de morfismos $d_0 = pr_1$, $d_1 = \Upsilon : A\times E \longrightarrow E$, induce un monomorfismo $\langle d_0, d_1 \rangle : A\times E \hookrightarrow E\times E$. Así la acción Υ es principal si el par de morfismos (d_0, d_1) es un par núcleo , siendo también cierto el recíproco.

.4.9) Definición(acción principal) .

Una acción $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ de G se dice principal si el par de morfismos $(d_0, d_1 : E_1 \longrightarrow E_0)$ es un par núcleo.

.4.10) Definición(1-torsor) .

Una acción principal $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ con $E_0 \twoheadrightarrow X = \text{coequ}(d_0, d_1 : E_1 \longrightarrow E_0)$ se llamará un 1-torsor de X sobre $G_\bullet$.

Los siguientes dos lemas serán de demostración inmediata, el primero de ellos nos dará una definición alternativa de 1-torsor que se podrá generalizar fácilmente a dimensiones superiores (ver [32]).

.4.11) Lema .(Definición alternativa de 1-torsor).

Sea $E_\bullet \longrightarrow X$ un objeto simplicial aumentado y $G_\bullet$ un grupoide. Un morfismo simplicial $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ es un 1-torsor de X sobre $G_\bullet$ si y solo sí se verifica:

(a) $E_\bullet$ es asferical (en dimensión cero $\Rightarrow E_0 \twoheadrightarrow X$ es un epimorfismo).

(b) $E_\bullet = \text{COSK}^0(E_\bullet)$.

(c) $\alpha_\bullet$ es una fibración exacta.

.4.12) Lema

Sea $E_\bullet \longrightarrow X$ un complejo simplicial aumentado sobre X con $E_\bullet = \text{COSK}^0(E_\bullet)$ y $G_\bullet$ un grupoide. Un morfismo simplicial $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ es un 1-torsor de X sobre $G_\bullet$ sí y solo sí $E_0 \twoheadrightarrow X$ es un epimorfismo y el cuadrado

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & E_0 \arrow[d, "\alpha_0"] \\ G_1 \arrow[r, dash, "d_0"] & G_0 \end{tikzcd}$$

es un pullback.

Sea $G_\bullet$ un grupoide, un primer ejemplo de 1-torsor sobre $G_\bullet$ es el dado por el morfismo canónico

$$\begin{tikzcd}
DEC\ (G_\bullet) : \cdots\cdots \arrow[d] & G_2 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[d, "d_2"] & G_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] & G_0 \\
G_\bullet \quad : \cdots\cdots & G_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

que será un 1-torsor de G_0 sobre $G_\bullet$ la acción de $G_\bullet$ sobre $DEC(G_\bullet)$ viene dada por la multiplicación a la derecha i.e. $g'^g = g'g$ .Este torsor verifica que $DEC\ (G_\bullet)$ es un complejo simplicial escindido.

.4.13) Definición (torsor escindido).

Un torsor $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ sobre $G_\bullet$ se dice escindido si $E_\bullet$ es escindido, como complejo simplicial aumentado.

.4.14) Lema (Caracterización de los 1-torsores escindidos).

Si $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ es un 1-torsor de X sobre $G_\bullet$ escindido, entonces $\alpha_\bullet$ factoriza por $DEC\ (G_\bullet) \longrightarrow G_\bullet$ .Recíprocamente cada torsor escindido de X sobre $G_\bullet$ se obtiene (salvo isomorfismos) levantado por pullback el objeto simplicial $DEC\ (G_\bullet)$ vía un morfismo de X a G_0 .

Demostración.- Sea $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ un 1-torsor escindido de X sobre $G_\bullet$,con una contracción .Definimos un morfismo de complejos simpliciales aumentados $f : E_\bullet \longrightarrow DEC(G_\bullet)$ por $f_{-1} : X \longrightarrow G_0$ la composición $X \xrightarrow{s_0} E_0 \xrightarrow{\alpha_0} G_0$ y

$f_n = \alpha_{n+1} s_{n+1} : E_n \longrightarrow G_{n+1}$

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, dashed, "f_1"'] \arrow[dd, "\alpha_1"] & & E_0 \arrow[ll, bend right=40, "s_1"'] \arrow[ll, bend right=20, "s_0"] \arrow[rr] \arrow[dl, dashed, "f_0"'] \arrow[dd, "\alpha_0"] & & X \arrow[ll, bend right, "s_0"'] \arrow[dl, dashed, "f_{-1}"] \\
G_1 \times_{G_0} G_1 \cong G_2 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr, "d_2"'] & & G_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "d_1"'] & & G_0 & \\
 & G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_0 & &
\end{tikzcd}$$

Notemos que puesto que los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & E_0 \arrow[d, "\alpha_0"] \\
G_1 \arrow[r, "d_0"'] & G_0
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
G_2 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_2"'] & G_1 \arrow[d, "d_1"] \\
G_1 \arrow[r, "d_0"'] & G_0
\end{tikzcd}$$

son pullbacks entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "d_o"] \arrow[d, "f_1"'] & E_o \arrow[d, "f_o"] \\
G_2 \arrow[r, "d_o"] & G_1
\end{tikzcd}$$

es un pullback y aplicando el lema de Grothendiek (ver [3]) al diagrama de sucesiones exactas :

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "f_1"] & E_o \arrow[r] \arrow[d, "f_o"] & X \arrow[d, "f_{-1}"] \\
G_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_1 \arrow[r] & G_o
\end{tikzcd}$$

se tiene que el cuadrado de la derecha en el diagrama anterior es un pullback ,así queda terminada la demostración.//

Denotaremos por $TORS^1$ ($X,G_\bullet$) la subcategoría plena de $OPER_{\mathbb{C}/X}$ ($G_\bullet$) de los 1-torsores de X sobre $G_\bullet$ y por $TORS^1$ [X ,$G_\bullet$] el correspondiente conjunto de componentes conexas de $TORS^1$(X ,$G_\bullet$) .Notemos que un morfismo de torsores será un diagrama conmutativo.

.4.15)

$$\begin{tikzcd}
 & G_\bullet & \\
E_\bullet \arrow[ur, "\alpha_\bullet"] \arrow[rr, "f_\bullet"] \arrow[dr] & & E'_\bullet \arrow[ul, "\alpha'_\bullet"'] \arrow[dl] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Cuando este suficientemente claro en el contexto ,denotaremos a un torsor $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ de X sobre $G_\bullet$ por "$\alpha_\bullet$" y a un morfismo de torsores (1.4.15) por $f_\bullet$: $E_\bullet \longrightarrow E'_\bullet$. Se verifica que cada morfismo de torsores es un isomorfismo (ver [32]) así la categoría $TORS^1$ ($X,G_\bullet$) es un grupoide.Representaremos por [$\alpha_\bullet$] ó [$\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$] la clase del torsor $\alpha_\bullet$ $\in$ $TORS^1$ (X, $G_\bullet$) en el conjunto $TOSR^1[X , G_\bullet]$

Notemos que [$\alpha_\bullet$] = [$\beta_\bullet$] sii existe un morfismo de torsores de $\alpha_\bullet$ a $\beta_\bullet$.

Cada morfismo en $\mathbb{C}$, $b: X \longrightarrow Y$,induce vía pullback un funtor

.4.16) $TORS^1$ ($b,G_\bullet$) : $TORS^1$ (Y ,$G_\bullet$) $\longrightarrow$ $TORS^1$ (X , $G_\bullet$)

verificándose que $TORS^1$ ($b\ b'$,$G_\bullet$) $\cong$ $TORS^1$ (b' , $G_\bullet$) $TORS^1$ (b, $G_\bullet$) .

Por otra parte,dado un morfismo de grupoides $f_\bullet$: $G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$,el funtor $f!$: $OPER_{\mathbb{C}/X}$ ($G_\bullet$) $\longrightarrow$ $OPER_{\mathbb{C}/X}$ ($H_\bullet$) lleva torsores en torsores,induciendo por tanto un funtor

.4.17)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{TORS}^1(X,f_\bullet) = f_*: \mathrm{TORS}^1(X,G_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{TORS}^1(X,H_\bullet) \arrow[d, hook] \\
\mathrm{OPER}_{\mathbb{C}/X}(G_\bullet) \arrow[r, shift left, "f!"] & \mathrm{OPER}_{\mathbb{C}/X}(H_\bullet) \arrow[l, shift left, "f^*"]
\end{tikzcd}$$

verificandose que: $\mathrm{TORS}^1(X,h_\bullet f_\bullet) \cong \mathrm{TORS}^1(X,h_\bullet)\ \mathrm{TORS}^1(X,f_\bullet)$.

Notemos por otra parte que f_* lleva torsores escindidos en torsores escindidos. Además el cuadrado

.4.18)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{TORS}^1\,[X,G_\bullet] \arrow[r, "{\mathrm{TORS}^1[X,f_\bullet]}"] \arrow[d, "{\mathrm{TORS}^1[b,G_\bullet]}"'] & \mathrm{TORS}^1\,[X,H_\bullet] \arrow[d, "{\mathrm{TORS}^1[b,H_\bullet]}"] \\
\mathrm{TORS}^1\,[Y,G_\bullet] \arrow[r, "{\mathrm{TORS}^1[Y,f_\bullet]}"] & \mathrm{TORS}^1\,[Y,H_\bullet]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para cada morfismo $b:Y \longrightarrow X$ en $\mathbb{C}$ y cada morfismo de torsores $f_\bullet:G_\bullet \to H_\bullet$. Donde $\mathrm{TORS}^1[b,G_\bullet]$ y $\mathrm{TORS}^1[X,f_\bullet]$ denota a las aplicaciones inducidas por los funtores $\mathrm{TORS}^1(b,G_\bullet)$ y $\mathrm{TORS}^1(X,f_\bullet)$ respectivamente (analogamente para Y y $H_\bullet$), ver [32].

Sea $\alpha_\bullet:E_\bullet \to G_\bullet$ un 1-torsor y $f_\bullet: G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ un morfismo de grupoides, denotemos $\alpha'_\bullet: E'_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ al 1-torsor $f_*(\alpha_\bullet)$. La unidad de la adjunción $f! \dashv f$ nos dará un morfismo " $G_\bullet$- invariante"

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[rr, "\eta_\alpha"] \arrow[dr] & & f^*(E'_\bullet) \arrow[dl] \\
& G_\bullet &
\end{tikzcd}$$

si componemos este morfismo η_α con el morfismo proyección $pr_\bullet: f^*(E'_\bullet) \longrightarrow E'_\bullet$, obtenemos un morfismo "equivariante" ("equivariant") de torsores :

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[r, "pr_\bullet \eta_\alpha = a_\bullet"] \arrow[d, "\alpha_\bullet"'] & E'_\bullet \arrow[d, "\alpha'_\bullet"] \\
G_\bullet \arrow[r] & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

.4.19) <u>Lema</u> (Propiedad universal del morfismo "$a_\bullet$") .

Sea $\alpha_\bullet: E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ un 1-torsor , $f_\bullet:G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ un morfismo de grupoides y $\alpha'_\bullet:E'_\bullet \to H_\bullet$ el 1-torsor $f^*(\alpha_\bullet)$. Entonces el morfismo $a_\bullet = pr_\bullet \eta_\alpha:E_\bullet \to E'_\bullet$ es universal respecto a morfismos " equivariantes" de $E_\bullet$ a torsores en $\mathrm{TORS}^1(X,H_\bullet)$, i.e. dado un 1-torsor $\beta_\bullet:F_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ en $\mathrm{TORS}^1(X,H_\bullet)$ y un diagrama conmutativo de morfismos simpliciales (morfismo "equivariante")

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[r, "u_\bullet"] \arrow[d, "\alpha_\bullet"'] & F_\bullet \arrow[d, "\beta_\bullet"] \\
G_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

existe un único morfismo de torsores $\bar{u}_\bullet: E'_\bullet \longrightarrow F_\bullet$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[rr, "a_\bullet"] \arrow[dr, "u_\bullet"'] & & E'_\bullet \arrow[dl, dashed, "\bar{u}_\bullet"] \\
& F_\bullet &
\end{tikzcd}$$

<u>Demostración</u>.- Dado un morfismo equivariante $u_\bullet : E_\bullet \longrightarrow F_\bullet$ con $\beta_\bullet : F_\bullet \rightarrow H_\bullet$ un torsor en $TORS^1(X,H_\bullet)$, puesto que $f^*(F_\bullet)$ se ha construido mediante pullback, existe un único morfismo simplicial $G_\bullet$-invariante $u'_\bullet : E_\bullet \longrightarrow f^*(F_\bullet)$ haciendo conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[rrd, bend left, "u_\bullet"] \arrow[rd, dashed, "u'_\bullet"] \arrow[rdd, bend right, "\alpha_\bullet"'] & & \\
& f^*(F_\bullet) \arrow[r, "pr_\bullet"] \arrow[d, "f^*(\beta_\bullet)"] & F_\bullet \arrow[d, "\beta_\bullet"] \\
& G_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

Ahora, por la adjunción $f! \dashv f^*$, $u'_\bullet$ induce un único morfismo de torsores $\bar{u}_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow F_\bullet$

$$\begin{array}{c} E_\bullet \xrightarrow{u'_\bullet} f(F_\bullet) \\ \hline f!(E_\bullet)=E'_\bullet \xrightarrow[\bar{u}_\bullet]{} F_\bullet \end{array}$$

que verifica las condiciones del Lema.//

El siguiente teorema (1.4.20) es un caso particular del teorema 5.9 de Duskin[27], que afirma entre otras cosas que una equivalencia esencial de grupoides induce ena equivalencia entre las categorías de torsores sobre ellos. Daremos aqui la demostración completa de este teorema (1.4.20) pues es interesante el observar como está dada esta equivalencia entre las categorías de torsores (La utilizaremos para definir el segundo morfismo de conexión en la sucesión exacta de cohomología en el caso general).

.4.21) <u>Teorema</u>.

Sea $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$ una equivalencia esencial fuerte de grupoides. Para cada objeto X de $\mathbb{C}$, el funtor $f^* : OPER_{\mathbb{C}/X}(H_\bullet) \longrightarrow OPER_{\mathbb{C}/X}(G_\bullet)$ lleva torsores en torsores, siendo

$$TORS^1(X,G_\bullet) \underset{f^*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} TORS^1(X,H_\bullet)$$

una equivalencia de categorías.

<u>Demostración</u>.- Sea $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ un torsor de X sobre $H_\bullet$, por ser $f_\bullet : G_\bullet \rightarrow H_\bullet$ una equivalencia esencial fuerte se tiene que $\Pi_0(G_\bullet) \cong \Pi_0(H_\bullet)$ por lo que $X = \Pi_0(E_\bullet) \cong \Pi_0(f^*(E_\bullet))$

$$\begin{tikzcd}
& G_1 \underset{H_1}{\times} E_1 \arrow[rr] \arrow[ld] \arrow[dd, shift left, "d_1"] \arrow[dd, shift right, "d_0"'] & & E_1 \arrow[ld, "\alpha_1"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
G_1 \arrow[rr] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & H_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& G_0 \underset{H_0}{\times} E_0 \arrow[rr] \arrow[ld] \arrow[dd] & & E_0 \arrow[ld, "\alpha_0"'] \arrow[dd] \\
G_0 \arrow[rr] \arrow[dd] & & H_0 \arrow[dd] & \\
& X \arrow[rr, equal, "\sim"] \arrow[ld, "\alpha_{-1}"'] & & X \arrow[ld, "\alpha_{-1}"'] \\
\Pi_0(G_\bullet) \arrow[rr, equal, "\sim"] & & \Pi_0(H_\bullet) &
\end{tikzcd}$$

por tanto el morfismo $G_o \underset{H_o}{\times} E_o \longrightarrow X$ es un epimorfismo. Para probar que $f^*(\alpha_\bullet):f^*(E_\bullet) \to G_\bullet$ es un torsor de X sobre $G_\bullet$ bastará con que probemos que los morfismos $(d_o, d_1 : G_1 \underset{H_1}{\times} E_1 \longrightarrow G_o \underset{H_o}{\times} E_o)$ sonun par núcleo lo cual quedará probado si vemos que el morfismo $\langle d_o, d_1 \rangle : G_1 \underset{H_1}{\times} E_1 \longrightarrow (G_o \underset{H_o}{\times} E_o) \times (G_o \underset{H_o}{\times} E_o)$ es un monomorfismo, donde $d_i(\, g,(x_o,x_1)\,) = (d_o(g), x_i)$, $i = 0,\ 1$ y $f_1(g) = \alpha_1(x_o,x_1)$.

Ahora si $d_i(\, g,(x_o,x_1)\,) = d_i(g',(y_o,y_1)\,)$, $i = 0,1$ y $f_1(g) = \alpha_1(x_o,x_1)$, $f_1(g') = \alpha_1(y_o,y_1)$. Entonces $(\ x_i = y_i\ ,\ d_i(g) = d_i(g')\ i = 0,1\ ) \Longrightarrow (\ d_i(g) = d_i(g')\ ,\ f_1(g) = f_1(g')\ ) \Longrightarrow$ (por ser $f_\bullet$ una equivalencia esencial) $\Rightarrow g = g'$,

Por tanto $f^*(E_\bullet) = COSK^o(f^*(E_\bullet)\,)$ y es aumentado por X, asi $f^*(\alpha_\bullet)$ es un 1-torsor de X sobre $G_\bullet$. La unidad y counidad de la adjunción $f_* \dashv f^*$ nos daran morfismos de torsores y por tanto isomorfismos : $\eta_{\alpha_\bullet} : E_\bullet \longrightarrow f^* f_*(E_\bullet)$ y $\varepsilon_{\beta_\bullet} : f_* f^*(F_\bullet) \longrightarrow F_\bullet$, para torsores cualesquiera $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ y $\beta_\bullet : F_\bullet \longrightarrow H_\bullet$. //

Acciones de n-hipergrupoides y n-torsores.

.4.22) Definición (Acción de un hipergrupoide).

Una acción de un n-hipergrupoide $G_\bullet$ es un morfismo simplicial $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ que es fibración exacta en dimensioes mayores o iguales a n.

Un morfismo equivariante entre acciones de n-hipergrupoides es un diagrama conmutativo de morfismos simpliciales:

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[r, "f'_\bullet"] \arrow[d, "\alpha_\bullet"'] & E'_\bullet \arrow[d, "\beta_\bullet"] \\
G_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

Un morfismo $G_\bullet$-invariante para dos acciones del n-hipergrupoide $G_\bullet$ es un diagrama comnutativo de morfismos simpliciales

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[rr, "f_\bullet"] \arrow[dr, "\alpha_\bullet"'] & & E'_\bullet \arrow[dl, "\alpha'_\bullet"] \\
& G_\bullet &
\end{tikzcd}$$

Dada $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ una acción del n-hipergrupoide $G_\bullet$, puesto que los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
E_m \arrow[r, "K_m(i)"] \arrow[d, "\alpha_m"'] & \Lambda^i_m(E_\bullet) \arrow[d] \\
G_m \arrow[r, "\cong", "K_m(i)"'] & \Lambda^i_m(G_\bullet)
\end{tikzcd}$$

son pullback y los morfismos $K_m(i) : G_m \xrightarrow{\ m\ } \Lambda^i_m(G_\bullet)$ son isomorfismos $0 \leqslant i \leqslant m$, $m > n$, se tiene que los morfismos $K_m(i) : E_m \longrightarrow \Lambda^i_m(E_\bullet)$ son isomorfismos para $m > n$ y $0 \leqslant i \leqslant m$. por tanto $E_\bullet$ es un n-hipergrupoide, con la estructura inducida por la de $G_\bullet$.

Asociados a los n-hipergrupoides $G_\bullet$ y $E_\bullet$ tenemos (según (1.2.11)) 1-grupoides $G'_\bullet$ y $E'_\bullet$ de forma que el morfismo simplicial $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ induce un morfismo simplicial $\alpha'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$. Recordemos que $G'_\bullet = G'_1 \rightrightarrows G'_o = G_{n-1}$ con $G'_1 = \{x \in G_n / d_i(x) = s_{n-2} d_i d_{n-1}(x),\ 0 \leqslant i \leqslant n-2\}$ y analogamente $E'_\bullet = E'_1 \rightrightarrows E'_o = E_{n-1}$ con $E'_1 = \{x \in E_n / d_i(x) = s_{n-2} d_i d_{n-1}(x),\ 0 \leqslant i \leqslant n-2\}$, el morfismo inducido $\alpha'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$ está dado por: $\alpha'_o = \alpha_{n-1}$ y α'_1 la restricción a

E'_1 del morfismo α_n.

.4.23) Proposición.

Sea $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ una acción del n-hipergrupoide $G_\bullet$. Entonces el morfismo simplicial inducido entre los 1-grupoides asociados, $\alpha'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$, es una acción del grupoide $G'_\bullet$.

Demostración.- En dimensión n tenemos un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & E'_1 \arrow[ld, hook] \arrow[rrd, shift left, "d_n"] \arrow[rrd, shift right, "d_{n-1}"'] \arrow[ddd, "\alpha'_1"] & & \\
E_n \arrow[rrr, shift left=2, "d_n"] \arrow[rrr, dotted] \arrow[rrr, shift right=2, "d_0"'] \arrow[rrd] \arrow[ddd, "\alpha_n"'] & & & E_{n-1} \arrow[ddd, "\alpha_{n-1} = \alpha'_0"] \\
 & & \Lambda^n_n(E_\bullet) \arrow[ru, dotted, shift left] \arrow[ru, dotted, shift right] \arrow[ddd] & \\
 & G'_1 \arrow[ld, hook] \arrow[rrd, shift left, "d_n"] \arrow[rrd, shift right, "d_{n-1}"'] & & \\
G_n \arrow[rrr, shift left=2, "d_n"] \arrow[rrr, dashed] \arrow[rrr, shift right=2, "d_0"'] \arrow[rrd] & & & G_{n-1} \\
 & & \Lambda^n_n(G_\bullet) \arrow[ru, shift left] \arrow[ru, shift right] &
\end{tikzcd}$$

donde el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
E_n \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^n_n(E_\bullet) \arrow[d] \\
G_n \arrow[r] & \Lambda^n_n(G_\bullet)
\end{tikzcd}$$

es un pullback, por tanto un elemento de E_n será una (n+1)-upla $x = (g,(x_0, \dots, x_{n-1},-))$ con $d_i(g) = \alpha_{n-1}(x_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Este elemento $x \in E_n$ estará en E'_1 si $x_i = d_i(x) = s_{n-2}d_i d_{n-1}(x) = s_{n-2}d_i(x_{n-1})$, $0 \leqslant i \leqslant n-2$ asi los elementos en E'_1 serán de la forma $x = (g,(s_{n-2}d_0(x_{n-1}), \dots, s_{n-2}d_{n-2}(x_{n-1}), x_{n-1},-))$ con $d_i(g) = s_{n-2}d_i\alpha_{n-1}(x_{n-1})$, para $i=0 \dots n-2$ y $d_{n-1}(x_{n-1}) = \alpha_{n-1}(x_{n-1})$ por tanto el elemento $g \in G_n$ será un elemento de G'_1, así el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
E'_1 \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha'_1"'] & E'_0 = E_{n-1} \arrow[d, "\alpha'_0 = \alpha_{n-1}"] \\
G'_1 \arrow[r] & G'_0 = G_{n-1}
\end{tikzcd}$$

es un pullback y por tanto $\alpha'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$ es una acción de $G'_\bullet$. //

.4.24) Definición (Acción principal).

Una acción $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ de un n-hipergrupoide se dice principal si $E_\bullet = \mathrm{COSK}^{n-1}(E_\bullet)$.

.4.25) El primer ejemplo de acción principal de un n-hipergrupoide $G_\bullet$ es el dado por el morfismo simplicial canónico $\mathrm{DEC}(G_\bullet) \longrightarrow G_\bullet$.

Notemos que si $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ es una acción pincipal, $E_\bullet = \mathrm{COSK}^{n-1}(E_\bullet) \Longrightarrow E'_\bullet = \mathrm{COSK}^0(E'_\bullet) = \mathrm{cosk}^0(\, D_{n-1} : E_{n-1} \longrightarrow \Delta_{n-1}(E_\bullet)\,)$, por tanto la acción del grupoide $G'_\bullet$ inducida $\alpha'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$ es tambien principal.

.4.26) Definición (Torsor n-dimensional).

Sea $G_\bullet$ un n-hipergrupoide. Una acción principal $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ de $G_\bullet$ es un torsor n-dimensional (o n-torsor) de un objeto X de $\mathbb{C}$, sobre $G_\bullet$ si $E_\bullet$ es un complejo simplicial aumentado sobre X y asferical.

La condición de asfericidad en dimensión cero nos dice que el morfismo aumentación $d_o : E_o \twoheadrightarrow X$ es un epimorfismo.

Denotaremos por $TORS^n(X,G_\bullet)$ a la categoría de los n-torsores de X sobre $G_\bullet$ y morfismos de n-torsores, donde un morfismo de torsores es un diagrama conmutativo de morfismos simpliciales:

$$\begin{tikzcd}
 & G_\bullet & \\
E_\bullet \arrow[ur, "\alpha_\bullet"] \arrow[rr, "f_\bullet"] \arrow[dr] & & E'_\bullet \arrow[ul, "\alpha'_\bullet"'] \arrow[dl] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

Denotaremos por $TORS^n[X,G_\bullet]$ al conjunto de componentes conexas de la categoría $TORS^n(X,G_\bullet)$. Dos torsores $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ y $\alpha'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ en $TORS^n(X,G_\bullet)$ estarán en la misma clase en $TORS^n[X,G_\bullet]$ si se pueden conectar mediante una cadena de morfismos de torsores

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[r] \arrow[drr, "\alpha_\bullet"'] & E^1_\bullet \arrow[dr, "\alpha^1_\bullet"] & E^2_\bullet \arrow[l] \arrow[d, "\alpha^2_\bullet"] \arrow[r, dotted, no head] & \cdots \arrow[r, dotted, no head] \arrow[dl, dotted] & E^n_\bullet \arrow[dll, "\alpha^n_\bullet"'] & E'_\bullet \arrow[l] \arrow[dlll, "\alpha'_\bullet"] \\
 & & G_\bullet & & &
\end{tikzcd}$$

.4.27) Notemos que si $E_\bullet = COSK^{n-1}(E_\bullet)$, para probar que un morfismo simplicial $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ es una acción del n-hipergrupoide $G_\bullet$, bastará con ver que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
E_n \arrow[rr, "K_n(i)"] \arrow[d, "\alpha_n"'] & & \Lambda^i_n(E_\bullet) \arrow[d] \\
G_n \arrow[rr, "K_n(i)"] & & \Lambda^i_n(G_\bullet)
\end{tikzcd}$$

es un pullback, para todo i = o ... n .

Cuando todos los datos que determinan un n-torsor $\alpha_\bullet : E_\bullet \rightarrow G_\bullet$ de X sobre $G_\bullet$ se deduzcan claramente del contexto, denotaremos al n-torsor por $\alpha_\bullet$ y a un morfismo de n-torsores de X sobre $G_\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
 & G_\bullet & \\
E_\bullet \arrow[ur, "\alpha_\bullet"] \arrow[rr, "f_\bullet"'] \arrow[dr] & & E'_\bullet \arrow[ul, "\alpha'_\bullet"'] \arrow[dl] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

por $f_\bullet : E_\bullet \longrightarrow E'_\bullet$.

.4.28) Definición (El 1-torsor asociado a un n-torsor).

Sea $\alpha_\bullet : E_\bullet \rightarrow G_\bullet$ un n-torsor de X sobre $G_\bullet$, por ser $E_\bullet = COSK^{n-1}(E_\bullet)$, podemos considerar a $E_\bullet$ como un n-hipergrupoide. Sean $E'_\bullet$, $G'_\bullet$ los 1-grupoides asociados a $E_\bullet$ y $G_\bullet$

respectivamente y sea $\alpha'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$ la acción de $G'_\bullet$ inducida por $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
 & E'_\bullet : \arrow[dl] \arrow[dd, "\alpha'_\bullet"] & \cdots & E'_1 = E_{n-1} \underset{\Delta_{n-1}(E_\bullet)}{\overset{x}{}} E_{n-1} \arrow[dl] \arrow[dd, dashed, "\alpha'_1"] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & & & & & & \\
E_\bullet : \arrow[dd, "\alpha_\bullet"'] & \cdots & E_n \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dd, no head] & & E_{n-1} \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr, dotted] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dr, no head] \arrow[dd, "\alpha_{n-1}"'] & & E_{n-2} \arrow[dd] & \cdots & E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dd] & E_0 \arrow[r, two heads] \arrow[dd] & X \\
 & G'_\bullet : \arrow[dl] & \cdots & G'_1 \arrow[dl] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & \Delta_{n-1}(E_\bullet) \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & & & & \\
G_\bullet : & \cdots & G_n \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, shift right=2] & & G_{n-1} \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, shift right=2] & & G_{n-2} & \cdots & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

que será un 1-torsor de $\Delta_{n-1}(E_\bullet)$ sobre $G'_\bullet$ al que llamaremos <u>1-torsor asociado</u> al n-torsor $\alpha_\bullet$. Notemos que $\alpha'_1 : E'_1 \longrightarrow G'_1$ está definido por:

.4.29) $$\alpha'_1(x,y) = \alpha_n(s_{n-2}d_o(x), \ldots ,s_{n-2}d_{n-2}(x),x,y)$$

.4.30) <u>Definición</u> (n-torsores casi escindidos).

Un n-torsor $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ de X sobre $G_\bullet$ se dice casi escindido si su 1-torsor asociado es escindido.

Dado un morfismo en $\mathbb{C}$, $b:X \longrightarrow Y$, mediante pullback via b obtenemos un funtor

.4.31) $$\mathrm{TORS}^n(b,G\ ) = b^*: \mathrm{TORS}^n(Y,G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{TORS}^n(X,G_\bullet)$$

para cada n-hipergrupoide $G_\bullet$, verificando que $\mathrm{TORS}^n(bb',G_\bullet) \cong \mathrm{TORS}^n(b,G_\bullet)\,\mathrm{TORS}^n(b',G_\bullet)$ para morfismos $X \xrightarrow{b} Y \xrightarrow{b'} Z$, ver [32] .

Por otra parte para cada morfismo de n-hipergrupoides $f_\bullet : G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ se tiene un funtor

.4.32) $$\mathrm{TORS}^n(X,f_\bullet) = f_* : \mathrm{TORS}^n(X,G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{TORS}^n(X,H_\bullet)$$

verificandose que $\mathrm{TORS}^n(X,f_\bullet f'_\bullet) \cong \mathrm{TORS}^n(X,f_\bullet)\,\mathrm{TORS}^n(X,f'_\bullet)$, ver [32].

Además el cuadrado de aplicaciones de conjuntos:

.4.33) $$\begin{tikzcd}
\mathrm{TORS}^n[X,G_\bullet] \arrow[r, "{\mathrm{TORS}^n[X,f\ ]}"] \arrow[d, "{\mathrm{TORS}^n[b,G]}"'] & \mathrm{TORS}^n\,[X,H_\bullet] \arrow[d, "{\mathrm{TORS}^n[b,H_\bullet]}"] \\
\mathrm{TORS}^n\,[Y,G_\bullet] \arrow[r, "{\mathrm{TORS}^n[Y,f_\bullet]}"] & \mathrm{TORS}^n[Y,H_\bullet]
\end{tikzcd}$$

inducido por los funtores $\mathrm{TORS}^n(X,f_\bullet)$, $\mathrm{TORS}^n(Y,f_\bullet)$, $\mathrm{TORS}^n(b,G_\bullet)$ y $\mathrm{TORS}^n(b,H_\bullet)$ es conmutativo, ver [32] .

.4.34) <u>Nota.-</u> En esta nota esquematizaremos la definición del funtor $f_* = \mathrm{TORS}^n(X,f_\bullet)$. El lector interesado en una verificación exhaustiva de los hechos que a continuación mencionaremos puede dirigirse a [32] .

Sea $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ un n-torsor de X sobre $G_\bullet$, un morfismo de n-hipergrupoides $f_\bullet : G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ induce un morfismo $f'_\bullet : G'_\bullet \longrightarrow H'_\bullet$ entre los 1-grupoides asociados a $G_\bullet$ y $H_\bullet$ respectivamente. Denotemos $K = \Delta_{n-1}(E_\bullet)$,entonces el 1-torsor asociado a $\alpha_\bullet$, $(\alpha'_\bullet : E'_\bullet \rightarrow G'_\bullet) \in \mathrm{TORS}^1(K,G'_\bullet)$

Sea $\tilde{\alpha}_\bullet : \widetilde{E}_\bullet \longrightarrow H'_\bullet$ el 1-torsor $f'_*(\alpha'_\bullet)$, tenemos entonces diagramas

$$\begin{tikzcd}
E'_1 \arrow[rr] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G'_1 \arrow[dr, hook] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& E_n \arrow[rr, "\alpha_n"] \arrow[dd, shift left=1.5] \arrow[dd, dotted] \arrow[dd, shift right=1.5] & & G_n \arrow[dd, shift left=1.5] \arrow[dd, dotted] \arrow[dd, shift right=1.5] \\
E'_0 \arrow[rr] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, "D"'] & & G'_0 \arrow[dr, equal] & \\
& E_{n-1} \arrow[rr, dash, "\alpha_{n-1}"'] \arrow[dd, shift left=1.5] \arrow[dd, dotted] \arrow[dd, shift right=1.5] & & G_{n-1} \arrow[dd, shift left=1.5] \arrow[dd, dotted] \arrow[dd, shift right=1.5] \\
K \arrow[dr, shift left=1.5] \arrow[dr, dotted] \arrow[dr, shift right=1.5] & & & \\
& E_{n-2} \arrow[rr, "\alpha_{n-2}"] \arrow[d, shift left=1.5] \arrow[d, dotted] \arrow[d, shift right=1.5] & & G_{n-2} \arrow[d, shift left=1.5] \arrow[d, dotted] \arrow[d, shift right=1.5] \\
& E_{n-3} \arrow[rr, "\alpha_{n-3}"] & & G_{n-3}
\end{tikzcd}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\widetilde{E}_1 \arrow[rr, "\tilde{\alpha}_1"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & H'_1 \arrow[dr, hook] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& & & H_n \arrow[dd, shift left=1.5] \arrow[dd, dotted] \arrow[dd, shift right=1.5] \\
\widetilde{E}_0 \arrow[rr, "\tilde{\alpha}_0"] \arrow[dd] & & H'_0 \arrow[dr, equal] & \\
& & & H_{n-1} \arrow[dd, shift left=1.5] \arrow[dd, dotted] \arrow[dd, shift right=1.5] \\
K \arrow[dr, shift left=1.5] \arrow[dr, dotted] \arrow[dr, shift right=1.5] & & & \\
& E_{n-2} \arrow[rr, "f_{n-2}\alpha_{n-2}"] \arrow[d, shift left=1.5] \arrow[d, dotted] \arrow[d, shift right=1.5] & & H_{n-2} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
& E_{n-3} \arrow[rr, "f_{n-3}\alpha_{n-3}"] & & H_{n-3}
\end{tikzcd}$$

Recordemos que $\widetilde{E}_1$ viene dado por el coigualador de D_o, D_1 en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& H'_2 \arrow[rr] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & H'_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
E_{n-1} \overset{*}{} G'_1 * H'_2 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, shift right, "D_o"'] \arrow[dd, shift left, "D_1"] & & E_{n-1} \overset{*}{} G'_1 \arrow[ur] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& H'_1 \arrow[rr] & & H'_0 \arrow[ll, dashed, bend right, "s_0"'] \\
E_{n-1} \overset{*}{} H'_1 \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d, "q"'] & & E_{n-1} \arrow[ur] \arrow[ll, dashed, bend right, "s"'] \arrow[d, "D"] & \\
\widetilde{E}_1 \arrow[rr] & & K &
\end{tikzcd}$$

Los morfismos simpliciales $s_i : E_{n-2} \longrightarrow E_{n-1}$, $i = o \dots n-2$, inducen (por composición) morfismos "s_i" :

$$\begin{tikzcd}
E_{n-2} \arrow[r, "s_i"] \arrow[rrr, bend right, "s_i"'] & E_{n-1} \arrow[r, "s"] & E_{n-1} \overset{*}{} G'_1 \arrow[r, two heads, "q"] & \widetilde{E}_1
\end{tikzcd}$$

satisfaciendose que

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{E}_{\bullet tr} = \widetilde{E}_1 = \widetilde{E}_{n-1} \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, dotted] \arrow[r, shift right=1.5] \arrow[dr] & E_{n-2} \arrow[r, shift left=1.5] \arrow[r, dotted] \arrow[r, shift right=1.5] & E_{n-3} & \dots & E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & E_o \arrow[r, two heads] & X \\
& K \arrow[u, shift left=1.5] \arrow[u, dotted] \arrow[u, shift right=1.5] & & & & &
\end{tikzcd}$$

es un objeto simplicial truncado aumentado por X y asferical, y que $\tilde{\alpha}_{\bullet tr} : \widetilde{E}_{\bullet tr} \longrightarrow tr^{n-1}(H_\bullet)$ definido por $\tilde{\alpha}_i = f_i\, \alpha_i$ $i = 0 \dots n-2$ y $\tilde{\alpha}_{n-1} = \tilde{\alpha}_1$ es un morfismo simplicial truncado. Consideremos ahora el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[rr, shift left=1.5] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, shift right=1.5] \arrow[d, shift right, "D_o"'] \arrow[d, shift left, "D_1"] & & E_{n-1} \overset{*}{} G'_1 * H'_2 \arrow[rr, shift left=1.5, "d_{n-1}\, pr"] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, shift right=1.5, "d_o\, pr"'] \arrow[d, shift right, "D_o"'] \arrow[d, shift left, "D_1"] & & E_{n-2} \arrow[d, equal] & \\
S_o \arrow[rr, shift left=1.5] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, shift right=1.5] \arrow[dr, dashed, "q"] \arrow[dd] & & E_{n-1} \overset{*}{} H'_1 \arrow[rr, shift left=1.5, "d_{n-1}\, pr"] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, shift right=1.5, "d_o\, pr"'] \arrow[dd, two heads, "q_o"'] & & E_{n-2} \arrow[dd, equal] & \\
& H_n \arrow[rr, shift left=1.5] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, shift right=1.5] & & H_{n-1} \arrow[rr, shift left=1.5] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, shift right=1.5] & & H_{n-2} \\
\widetilde{E}_n \arrow[ur, dashed, "\tilde{\alpha}_n"] \arrow[rr, shift left=1.5] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, shift right=1.5] & & \widetilde{E}_{n-1} \arrow[ur, "\tilde{\alpha}_{n-1}"'] \arrow[rr, shift left=1.5] \arrow[rr, dashed] \arrow[rr, shift right=1.5] & & E_{n-2} \arrow[ur, "\tilde{\alpha}_{n-2}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde los objetos S_o y S_1 son los correspondientes núleos simpliciales . Entonces el coigualador del par $(D_o, D_1 : S_1 \longrightarrow S_o)$, $S_o \twoheadrightarrow \tilde{E}_n$, es justamente el núcleo simplicial de $\tilde{E}_{n-1} \overset{\cdots\cdots}{\rightrightarrows} E_{n-2}$. Definimos $\xi : S_o \longrightarrow H_n$ por :

$$\xi(\,(y_o,x_o),\ \dots\ ,(y_n,x_n)\,) = z$$

dode el elemento $z \in H_n$ está dado por la equación

$$x_n = [\,s_{n-2}d_n(x_o),\ \dots\ ,s_{n-2}d_n(x_{n-2}),[\,x_o,\dots,x_{n-1},f_n{}_n(y_o,\dots,y_n)],z\,] \ .$$

Entonces ξ coiguala a $D_o, D_1 : S_1 \longrightarrow S_o$ por lo que induce un único morfismo $\tilde{\alpha}_n : E_n \longrightarrow H_n$

siendo
$$\begin{tikzcd}
E_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}_n"] & E_{n-1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[d, "\tilde{\alpha}_{n-1}"] & E_{n-2} \arrow[d, "\tilde{\alpha}_{n-2}=f_{n-2}\alpha_{n-2}"] & \cdots\cdots & E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\tilde{\alpha}_1=f_1\alpha_1"] & E_o \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\tilde{\alpha}_o=f_o\alpha_o"] & X \\
H_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\cdots"] & H_{n-1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\cdots"] & H_{n-2} & \cdots\cdots & H_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & H_o &
\end{tikzcd}$$

un morfismo simplicial truncado que se extiende a un morfismo simplicial $\tilde{\alpha}_\bullet : \tilde{E}_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ que es un torsor de X sobre $H_\bullet$. Se define entonces $f_*(\alpha_\bullet) = \tilde{\alpha}_\bullet$.

.4.35) Puesto que en dimensión uno el funtor f_*^1 lleva torsores escindidos en torsores escindidos, en dimensión n el funtor f_* llevará torsores casi escindidos en torsores casi escindidos.

.4.36) Notemos por otra parte, que si $f_\bullet : G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ es una fibración exacta en dimensiones mayores o iguales a n-1, entonces el funtor $TORS^n(X,f_\bullet)$ se obtiene "salvo isomorfismo" por composición (i.e. $f(\alpha_\bullet) = f_\bullet\, \alpha_\bullet$)

.4.37) Sea $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ un n-torsor de X , $f_\bullet : G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ un morfismo de n-hipergrupoides y $\tilde{\alpha}_\bullet : \tilde{E}_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ el torsor $f_*(\alpha_\bullet)$. El morifismo de 1-torsores $a_\bullet : E_\bullet^1 \longrightarrow \tilde{E}_\bullet^1$ dado por el lema (1.4.19) induce un morfismo equivariante (al que tambien denotamos por "$a_\bullet$"):

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[r, "a_\bullet"] \arrow[d, "\alpha_\bullet"'] & \tilde{E}_\bullet \arrow[d, "\tilde{\alpha}_\bullet"] \\
G_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

donde "a_m" = id para m= 0 ...n-2 , "a_{n-1}" = $a_o : E'_o = E_{n-1} \longrightarrow \tilde{E}'_o = \tilde{E}_{n-1}$ y en dimensiones superiores los morfismos inducidos, utilizando que $E_\bullet = COSK^{n-1}(E_\bullet)$ y $\tilde{E}_\bullet = COSK^{n-1}(\tilde{E}_\bullet)$, ver [32] . Notemos que la propiedad universal que verificaba este morfismo en dimensión uno (lema (1.4.19)) no es,en general,cierta un dimensiones superiores.

Estudiaremos ahora que ocurre con los n-torsores sobre un m-hipergrupoide con $n > m$.

1.4.38) Lema .-

Sea $E_\bullet$ un objeto simplicial asferical y $G_\bullet$ un n-hipergrupoide. Entonces todo morfismo simplicial $f_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ factoriza a traves del morfismo canónico $D_\bullet : E_\bullet \rightarrow COSK^{n-1}(E_\bullet)$

de forma única:

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[dr, "D_\bullet"'] & G_\bullet \\
& \mathrm{COS}^{n-1}(E_\bullet) \arrow[u, dashed, "f'_\bullet"']
\end{tikzcd}$$

Demostración.- Sea

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet: \arrow[dd, "f_\bullet"'] & \cdots & E_{n+1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] \arrow[dd, "f_{n+1}"'] & E_n \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, phantom, "\cdots"] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr, "D_n"] \arrow[dd, "f_n"'] & & E_{n-1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & E_{n-2} \arrow[dd, "f_{n-2}"] & \cdots & E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dd, "f_1"] & E_0 \arrow[dd, "f_0"] \\
& & & & \Delta_n(E_\bullet) \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, phantom, "\cdots"] \arrow[ur, shift right] \arrow[dl, dashed, "f'_n"] & & & & & \\
G_\bullet: & \cdots & G_{n+1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] & G_n \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, phantom, "\cdots"] \arrow[rr, shift right] & & G_{n-1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] & G_{n-2} & \cdots & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0
\end{tikzcd}$$

denotemos por $p_o, p_1 : K \longrightarrow E_n$ el par núcleo del morfismo $D_n : E_n \longrightarrow \Delta_n(E_\bullet)$, veamos que el morfismo f_n coiguala al par (p_o, p_1): Sea $(x,y) \in K$, probemos que $f_n(x) = f_n(y)$, por (x,y) ser un elemento de K $(d_i(x) = d_i(y))$ se tiene que $(s_{n-1}d_o(x), \ldots, s_{n-1}d_{n-1}(x), x, y) \in \Delta_{n+1}(E_\bullet)$, existe por tanto un elemento $z \in E_{n+1}$ tal que $d_i(z) = s_{n-1}d_i(x)$, $i=0 \ldots n-1$, $d_n(z) = x$, $d_{n+1}(z) = y$ (por ser $E_\bullet$ asferical en dimensión n+1) . Entonces $f_n(y) = f_n d_{n+1}(z) = d_{n+1} f_{n+1}(z) = \left[f_n d_o(z), \ldots, f_n d_n(z)\right] =$
$= \left[s_{n-1}d_o f_n(x), \ldots, s_{n-1}d_{n-1}f_n(x), f_n(x)\right] =$ (hiper unidad) $= f_n(x)$.

Existe por tanto un morfismo único f'_n haciendo conmutar el triangulo rallado del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, shift left, "p_o"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] & E_n \arrow[r, two heads, "D_n"] \arrow[d, "f_n"'] & \Delta_n(E_\bullet) \arrow[dl, dashed, "f'_n"] \\
& G_n &
\end{tikzcd}$$

con elementos, el morfismo f'_n está definido por $f'_n(y_o, \ldots, y_n) = f_n(x)$ con x cualquier elemento de E_n verificando que $d_i(x) = y_i$. Claramente $(f_o, \ldots, f_{n-1}, f'_n)$ es un morfismo simplicial truncado. Notemos además que dado cualquier elemento $(z_o, \ldots, z_{n+1})$ en $\mathrm{COSK}^{n-1}(E_\bullet)_{n+1}$, si $x \in E_{n+1}$ es un elemento tal que $(d_o d_i(x), \ldots, d_n d_i(x)) = z_i$ entonces por ser $[f_n d_o(x), \ldots, f_n d_n(x)] = f_n d_{n+1}(x)$ se tiene que $[f'_n(z_o), \ldots, f'_n(z_n)] = f'_n(z_{n+1})$, así el morfismo simplicial truncado $(f_o, \ldots, f_{n-1}, f'_n)$ se extiende a un morfismo simplicial $f'_\bullet : \mathrm{COSK}^{n-1}(E_\bullet) \longrightarrow G_\bullet$ verificando claramente las condiciones del lema.//

.4.39) Proposición.

Sea $G_\bullet$ un n-hipergrupoide, entonces se tiene una biyección natural

$$\mathrm{TORS}^n[X, G_\bullet] \cong \mathrm{TORS}^m[X, G_\bullet]$$

para todo $m > n$ y todo objeto X de $\mathbb{C}$.

Demostración.- Claramente cada n-torsor de X sobre $G_\bullet$ puede ser considerado como un m-torsor de X sobre $G_\bullet$ para $m \geqslant n$ y además si dos n-torsores dan el mismo elemento en $\mathrm{TORS}^n[X, G_\bullet]$, tambien darán el mismo elemento en $\mathrm{TORS}^m[X, G_\bullet]$ por tanto tenemos una inclusión $\mathrm{TORS}^n[X,G_\bullet] \hookrightarrow \mathrm{TORS}^m[X,G_\bullet]$. Probemos entonces que en la clase de cualquier m-torsor $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ existe un n-torsor, sea $\alpha'_\bullet : \mathrm{COSK}^{n-1}(E_\bullet) \longrightarrow G_\bullet$ el morfismo a través del que factoriza $\alpha_\bullet$ según el lema (1.4.38).

El morfismo identidad de $\mathrm{COSK}^{n-1}(E_\bullet)$ es un n-torsor de X sobre $\mathrm{COSK}^{n-1}(E_\bullet)$, sea $\beta_\bullet : F_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ el n-torsor imagen de esta identidad por el funtor $\mathrm{TORS}^n(X,\alpha'_\bullet)$. Tenemos entonces un diagrama conmutativo (ver(1.4.37)) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{COSK}^{n-1}(E_\bullet) \arrow[r, "a_\bullet"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"'] & F_\bullet \arrow[d, "\beta_\bullet"] \\
\mathrm{COSK}^{n-1}(E_\bullet) \arrow[r, "\alpha'_\bullet"] & G_\bullet
\end{tikzcd}$$

y por tanto un morfismo de m-torsores

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[r, "D_\bullet"] \arrow[dr, "\alpha_\bullet"'] & \mathrm{COSK}^{n-1}(E_\bullet) \arrow[r, "a_\bullet"] & F_\bullet \arrow[dl, "\beta_\bullet"] \\
& G_\bullet &
\end{tikzcd}$$

donde hemos considerado a $\beta_\bullet$ como un m-torsor, y por tanto $\alpha_\bullet$ y $\beta_\bullet$ estan en la misma clase en $\mathrm{TORS}^m[X,G_\bullet]$ .//

A continuación veremos un lema técnico que nos será de utilidad posteriormente.

.4.40) Sea X un objeto en $\mathbb{C}$, denotaremos por $\mathrm{RE}(X)$ a la subcategoría plena de $\mathbb{C}/X$ que tiene por objetos los epimorfismos (regulares) con codominio X. Un morfismo en $\mathrm{RE}(X)$ será por tanto un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

a este morfismo lo representaremos $f:p \longrightarrow p'$. Dado un objeto $p:E_\bullet \twoheadrightarrow X$ en $\mathrm{RE}(X)$ y un 2-hipergrupoide $G_\bullet$, denotaremos por $\mathrm{TORS}^2(p,G_\bullet)$ la subcategoría plena de $\mathrm{TORS}^2(X,G_\bullet)$ cuyos objetos son aquellos 2-torsores de X sobre $G_\bullet$ que tienen al morfismo p como aumentación. El correspondiente conjunto de componentes conexas será denotado por $\mathrm{TORS}^2[p,G_\bullet]$. Dado un morfismo $f:p \longrightarrow p'$ en $\mathrm{RE}(X)$, por pullback via f obtenemos un funtor $f^*: \mathrm{TORS}^2\ p',G_\bullet \longrightarrow \mathrm{TORS}^2\ p,G_\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
f^*(E'_\bullet): \arrow[dd] & \cdots & f^*(E'_2) \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dr] \arrow[dd] & & f^*(E'_1) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr] \arrow[dd] & & E_0 \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dd] & X \arrow[dd, equal] \\
& & & \Lambda^i_2(f^*(E'_\bullet)) \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] \arrow[dd] & & K \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] \arrow[dd] & & \\
E'_\bullet : \arrow[dd] & \cdots & E'_2 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dr] \arrow[dd] & & E'_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr] \arrow[dd] & & E'_0 \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[dd] & X \\
& & & \Lambda^i_2(E'_\bullet) \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] \arrow[dd] & & K' \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & \\
G_\bullet : & \cdots & G_2 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dr] & & G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_0 & \\
& & & \Lambda^i_2(G) \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & & &
\end{tikzcd}$$

$f^*(E'_1)$ será el objeto pullback de $E'_1 \longrightarrow K' \longleftarrow K$ donde K y K' son los objetos pares núcleos de p y p' respectivamente, $f^*(E'_2)$ es el núcleo simplicial de los morfismos $f^*(E'_1) \longrightarrow K \rightrightarrows E_0$, verificandose que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
f^*(E'_2) \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^i_2(f^*(E'_\cdot)) \arrow[d] \\
E'_2 \arrow[r] & \Lambda^i_2(E'_\cdot)
\end{tikzcd}$$

es un pullback para i= 0,i,2. Asi $f^*(E'_\cdot) \longrightarrow G_\cdot$ es un 2-torsor sobre $G_\cdot$ con aumentación el morfismo p .

Los funtores $(g\,f)^*$ y f^*g^* , para morfismos $f:p \longrightarrow p'$ y $g:p' \longrightarrow p''$, coinciden salvo isomorfismo, tenemos definido un funtor

$$\begin{aligned} TORS^2[-,G_\cdot] : RE(X) &\longrightarrow Set \\ p &\longmapsto TORS^2[p,G_\cdot] \\ f &\longmapsto f^* \end{aligned}$$

1.4.41) Lema.

Para cada objeto X de $\mathbb{C}$ y cada 2-hipergrupoide $G_\cdot$ se tiene una biyección canónica

$$TORS^2[X,G_\cdot] \cong \varinjlim_{ER(X)} TORS^2[-,G_\cdot]$$

Demostración.- Para cada epimorfismo $p \in RE(X)$ tenemos la inclusión $TORS^2[p,G_\cdot] \xhookrightarrow{\theta_p} TORS^2[X,G_\cdot]$. Además si $f:p \longrightarrow p'$ es un morfismo en RE(X) se tiene un diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
TORS^2[p',G_\cdot] \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, hook, "\theta_p"] & \\
TORS^2[p\ ,G_\cdot] \arrow[r, hook, "\theta_{p'}"] & TORS^2[X,G_\cdot]
\end{tikzcd}$$

y por tanto tenemos una aplicación $\theta : \varinjlim_{ER(X)} TORS^2[-,G_\cdot] \longrightarrow TORS^2[X,G_\cdot]$.

Veamos que es sobreyectiva: Si $\alpha_\cdot : E_\cdot \longrightarrow G_\cdot$ es un torsor de X sobre $G_\cdot$ entonces $p = d_0 : E_0 \longrightarrow X$ es un objeto de la categoría RE(X) y la clase del torsor $\alpha_\cdot$ en $TORS^2[p,G_\cdot]$ se aplica por θ_p en la clase de $\alpha_\cdot$ en $TORS^2[X,G_\cdot]$.

Veamos ahora que θ es inyectiva: Para probar esto bastará con ver que si

$$\begin{tikzcd}
E_\cdot \arrow[rr, "f_\cdot"] \arrow[dr, "\alpha_\cdot"'] & & E'_\cdot \arrow[dl, "\alpha'_\cdot"] \\
& G_\cdot &
\end{tikzcd}$$

es un morfismo de torsores, entonces las clase de $\alpha_\cdot$ y $\alpha'_\cdot$ en $\varinjlim TORS^2[-,G_\cdot]$ coinciden. Ahora bién, el morfismo $f_0 : E_0 \longrightarrow E'_0$ nos da un morfismo en RE(X)

$$\begin{tikzcd}
E_0 \arrow[rr, "f_0"] \arrow[dr, "p=d_0"'] & & E'_0 \arrow[dl, "p'=d_0"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

de manera que la clase de $\alpha_\cdot$ y $f_0^*(\alpha'_\cdot)$ en $TORS^2[p,G_\cdot]$ coinciden y asi coincidiran las clases de $\alpha_\cdot$ y $\alpha'_\cdot$ en $\varinjlim_{ER(X)} TORS^2[-,G_\cdot]$.//

Para cada morfismo de 2-hipergrupoides y cada $p \in RE(X)$, el funtor $f_* = \mathrm{TORS}^2(X,f): \mathrm{TORS}^2(X,G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{TORS}^2(X,H_\bullet)$ induce por restricción un funtor $f_* = \mathrm{TORS}^2(p,f): \mathrm{TORS}^2(p,G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{TORS}^2(p,H_\bullet)$.

El lema (1.4.19)(propiedad universal del morfismo "$a_\bullet$") se generaliza en el siguiente sentido:

.4.42) Lema.-

Sea $p:E \twoheadrightarrow X$ un objeto de $RE(X)$ y $f_\bullet:G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ un morfismo de 2-hipergrupoides. Entonces, para cada torsor $\alpha_\bullet:E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ en $\mathrm{TORS}^2(p,G_\bullet)$, si denotamos por $\tilde{\alpha}_\bullet:\tilde{E}_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ al torsor $f_*(\alpha_\bullet)$, el morfismo canónico equivariante (1.4.37)

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[r, "a_\bullet"] \arrow[d, "\alpha_\bullet"'] & \tilde{E}_\bullet \arrow[d, "\tilde{\alpha}_\bullet"] \\
G_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

satisface la siguiente propiedad universal: Para cada morfismo simplicial equivariante

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[r, "b_\bullet"] \arrow[d, "\alpha_\bullet"'] & F_\bullet \arrow[d, "\beta_\bullet"] \\
G_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

con $\beta_\bullet:F_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ un 2-torsor en $\mathrm{TORS}^2(p,H_\bullet)$ existe un único morfismo de torsores en $\mathrm{TORS}^2(p,H_\bullet)$ $\bar{b}_\bullet: E_\bullet \longrightarrow F_\bullet$ tal que $b_\bullet = \bar{b}_\bullet a_\bullet$

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet \arrow[rr, "a_\bullet"] \arrow[dr, "b_\bullet"'] \arrow[dd, "\alpha_\bullet"'] & & E_\bullet \arrow[dl, dashed, "\bar{b}_\bullet"] \arrow[dd, "\tilde{\alpha}_\bullet"] \\
& F \arrow[dr, "\beta_\bullet"'] & \\
G_\bullet \arrow[rr] & & H_\bullet
\end{tikzcd}$$

Demostración.- La demostración de esta proposición se deduce de inmediato del lema (1.4.19) y del hecho de que todos los 1-torsores asociados a 2-torsores en $\mathrm{TORS}^2(p,G_\bullet)$ son 1-torsores del el mismo objeto (el objeto par núcleo del epimorfismo p).//

(1.5) TORSORES SOBRE HIPERGRUPOIDES FILTRADOS Y TORSORES EN CATEGORIAS DE HIPERGRUPOIDES .-

La idea básica con la que comencé mi investigación en cohomología no abeliana fué la de obtener asociada a una sucesión exacta corta de objetos grupos , no necesariamente abelianos, en $\mathbb{C}$ (y posteriormente grupoides) una " suceción exacta larga " en la cohomología. Donde los conjuntos de cohomología vendrian dados por torsores sobre hipergrupoides.

Cuando la sucesión exacta corta es de grupos abelianos, Duskin y Glenn en [32] consiguen interpretar los grupos de cohomología en términos de torsores, dando la sucesión exacta larga en cohomología (abeliana) con esta interpretación.

Una de las principales propiedades técnicas que hacen posible la obtención del segundo morfismo de conexión de la sucesión exacta larga en este caso abeliano (y posteriormente los restantes) es que para cada objeto grupo abeliano A en $\mathbb{C}$ es equivalente dar un 2-torsor sobre K(A,2) a dar un 1-torsor en la categoría GPD($\mathbb{C}$) sobre el 2-grupoide K(K(A,1),1). (En general dar un n-torsor sobre K(A,n) es equivalente a dar un 1-torsor en la categoría de (n-1)-hipergrupoides sobre el grupoide K(K(A,n-1),1) ver [32]). La noción básica que permite probar esta equivalencia es la de grupoide <u>fibra</u> de un 2-torsor abeliano (en general la de n-hipergrupoide fibra de un (n+1)-torsor abeliano).

Cuando sustituimos el 2-hipergrupoide K(A,2) por un 2-hipergrupoide cualquiera $G_\bullet$, no se tiene un concepto análogo al de "fibra" de un 2-torsor sobre $G_\bullet$, siendo imposible el " relacionar " en este sentido los 2-torsores sobre $G_\bullet$ con algún tipo de 1-torsores en la categoría GPD($\mathbb{C}$). A continuación veremos que si el 2-grupoide $G_\bullet$ es filtrado, se puede definir el grupoide fibra de un 2-torsor sobre $G_\bullet$ y utilizando el teorema (1.3.25) probaremos que dar un 2-torsor sobre $G_\bullet$ es equivalente a dar un 1-torsor en GPD($\mathbb{C}$) . siendo este resultado generalizable a dimensiones superiores.

<u>Fibras de torsores sobre n-hipergrupoides 1-filtrados</u>.

.5.1) <u>Definición</u> (Fibra de un torsor).

Sea $G_\bullet$ un n-hipergrupoide con una 1-filtración $G^1_\bullet \overset{\sigma_\bullet}{\hookrightarrow} G_\bullet$ y sea $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ un n-torsor de un objeto X sobre $G_\bullet$. Definimos la fibra de $\alpha_\bullet$ como el objeto pullback en Simpl($\mathbb{C}$)

$$\begin{tikzcd}
G(E_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & E_\bullet \arrow[d, "\alpha_\bullet"] \\
G^1_\bullet \arrow[r, hook, "\sigma_\bullet"] & G_\bullet
\end{tikzcd}$$

Si dibujamos el diagrama anterior en la categoría $\mathbb{C}$, obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots & G(E_\bullet)_n \arrow[rr, "\cdots"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & E_{n-1} \arrow[rr, "\cdots"] \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & & E_{n-2} \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & & \cdots & E_1 \arrow[rr, "\cdots"] \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & & E_0 \arrow[dr] \arrow[dd, equal] & \\
\cdots & & G^1_n \arrow[rr, "\cdots"] \arrow[dd, hook, "\sigma_n"] & & G_{n-1} \arrow[rr, "\cdots"] \arrow[dd, equal] & & G_{n-2} \arrow[dd, equal] & \cdots & & G_1 \arrow[rr, "\cdots"] \arrow[dd, equal] & & G_0 \arrow[dd, equal] \\
\cdots & E_n \arrow[rr, "\cdots"] \arrow[dr, "\alpha_n"'] & & E_{n-1} \arrow[rr, "\cdots"] \arrow[dr, "\alpha_{n-1}"'] & & E_{n-2} \arrow[dr, "\alpha_{n-2}"'] & & \cdots & E_1 \arrow[rr, "\cdots"] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & E_0 \arrow[dr, "\alpha_0"'] & \\
\cdots & & G_n \arrow[rr, "\cdots"] & & G_{n-1} \arrow[rr, "\cdots"] & & G_{n-2} & \cdots & & G_1 \arrow[rr, "\cdots"] & & G_0
\end{tikzcd}$$

.5.2) <u>Proposición</u> .-

$G(E_\bullet)$ es un (n-1)- hipergrupoide.

Demostración.- $G(E_\bullet)_n$ es el objeto pullback

$$\begin{tikzcd} G(E_\bullet)_n \arrow[r] \arrow[d] & E_n \arrow[d, "\alpha_n"] \\ \Lambda^i_n(G^1_\bullet) \cong G^1_n \arrow[r, "\sigma_n"] & G_n \end{tikzcd}$$

Por ser $\alpha_\bullet$ fibración exacta, tenemos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} E_n \arrow[r, "K_n(i)"'] \arrow[d, "\alpha_n"'] & \Lambda^i_n(E_\bullet) \arrow[d] \\ G_n \arrow[r, "K_n(i)"'] & \Lambda^i_n(G_\bullet) \end{tikzcd}$$

es un pullback y por tanto lo será el cuadrado

$$\begin{tikzcd} G(E_\bullet)_n \arrow[r] \arrow[d] & E_n \arrow[r] & \Lambda^i_n(E_\bullet) \arrow[d] \\ \Lambda^i_n(G^1_\bullet) \cong G^1_n \arrow[r, "\sigma_n"] & G_n \arrow[r] & \Lambda^i_n(G_\bullet) \end{tikzcd}$$

pero $\Lambda^i_n(G^1_\bullet) = \Lambda^i_n(G_\bullet)$ por tener $G^1_\bullet$ y $G_\bullet$ la misma (n-1)-truncación además $K_n(i)\sigma_n = id$ así se tiene un isomorfismo $G(E_\bullet)_n = \Lambda^i_n(E_\bullet) = \Lambda^i_n(G(E_\bullet))$.

El mismo razonamiento es válido en dimensiones superiores, y por tanto $G(E_\bullet)$ es un (n-1)-hipergrupoide. El morfismo corchete en $G(E_\bullet)$ estará definido como sigue:

$$[x_o, \dots, x_{n-1}] = x_n \iff \alpha_n(x_o, \dots, x_n) = \sigma_n(\alpha_{n-1}(x_o), \dots, \alpha_{n-1}(x_{n-1}))$$

$(\Rightarrow \alpha_{n-1}(x_n) = [\alpha_{n-1}(x_o), \dots, \alpha_{n-1}(x_{n-1})]^1$ con $[\ ]^1$ el corchete del hipergrupoide $G^1_\bullet$). //

.5.3) Nota.- Si la categoría base $\mathbb{C}$ es grupos (o una variedad de Mal'cev) , cada n-hipergrupoide 1-filtrado $G_\bullet$ tiene solo una única 1-filtración por lo que la definición de fibra de un torsor sobre $G_\bullet$ dependerá solamente de $G_\bullet$. Esto ocurre tambien cuando el n-hipergrupoide sea $K(A,n)$ para A un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$, por existir una única filtración de $K(A,n)$ aunque la categoría $\mathbb{C}$ no sea grupos (o una variedada de Mal'cev).

.5.4) Nota.- Si $G_\bullet$ es un n-hipergrupoide con una m-filtración ($m \leq n$)

$$\begin{tikzcd} G^m_\bullet \arrow[r, hook, "\sigma^m_\bullet"] & G^{m-1}_\bullet & \dots & G^1_\bullet \arrow[r, hook, "\sigma^1_\bullet"] & G_\bullet \end{tikzcd}$$

y $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ es un n-torsor sobre $G_\bullet$, se podrían definir fibras sucesivas del torsor mediante los objetos pullback en Simpl($\mathbb{C}$)

$$\begin{tikzcd} G^m_\bullet(E_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & G^{m-1}(E_\bullet) \arrow[d] & \dots & G(E_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ G^m_\bullet \arrow[r, hook, "\sigma^m_\bullet"] & G^{m-1}_\bullet & \dots & G^1_\bullet \arrow[r, hook, "\sigma^1_\bullet"] & G_\bullet \end{tikzcd}$$

No obstante los objetos simpliciales $G^i(E_\bullet)$ no serian en general hipergrupoides para $i \neq 1$.

1-Torsores en GPD($\mathbb{C}$). Los conjuntos $\mathbb{H}^1(X, G_\bullet)$.

Tendran un especial interés para nosotros los 1-torsores en la categoría GPD($\mathbb{C}$)

sobre 2-grupoides, en particular aquellos torsores de grupoides " triviales".

Sea $p:E \longrightarrow X$ un objeto en RE(X) y $E_\bullet = cosk^o(p)$ el grupoide trivial inducido por p, sea $\alpha_{\bullet\bullet}: E_{\bullet\bullet} \longrightarrow G_{\bullet\bullet}$ un 1-torsor en GPD($\mathbb{C}$) de $E_\bullet$ sobre un 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$. Por ser $\alpha_{\bullet\bullet}$ una fibración exacta, se tiene que $E_{\bullet\bullet}$ es un 2-grupoide "trivial" ($E_{oo} = E_{o1}$) , por ser $E_{\bullet\bullet} = COSK^o(E_{\bullet\bullet})$ y la aumentación $E_{\bullet o} \longrightarrow E_\bullet$ un epimorfismo, se tiene que $E_{oo} = E$ asi el 1-torsor $\alpha_{\bullet\bullet}$ será representado por un diagrama simplicial doble

.5.5)

$$\begin{tikzcd}
 & E_{11} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, "\alpha_{11}"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E_{1o} \arrow[r, two heads] \arrow[dl, "\alpha_{1o}"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & E \underset{X}{\times} E \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
G_2 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \\
 & E \arrow[rr, equal] \arrow[dl, "\alpha_{oo}"'] & & E \arrow[r, equal] \arrow[dl, "\alpha_{oo}"'] & E \arrow[dd] \\
G_o \arrow[rr, equal] & & G_o & & \\
 & & & & X
\end{tikzcd}$$

donde $\alpha_{1\bullet}: E_{1\bullet} \longrightarrow G_{1\bullet}$ (plano horizontal superior en el diagrama (1.5.5)) es un 1-torsor de $E \underset{X}{\times} E$ en $\mathbb{C}$. Denotaremos por $TORS^1(E_\bullet,G_{\bullet\bullet})$ a la categoría de 1-torsores en GPD($\mathbb{C}$) de $E_\bullet$ sobre $G_{\bullet\bullet}$.

.5.6) Denotaremos por $\underline{Tors}^1(E_\bullet,G_{\bullet\bullet})$ a la categoría cuyos objetos serán los 1-torsores de $E_\bullet$ sobre $G_{\bullet\bullet}$ y cuyos morfismos serán morfismos simpliciales dobles $G_{\bullet\bullet}$-invariantes

$$\begin{tikzcd}
E_{\bullet\bullet} \arrow[rr, "f_{\bullet\bullet}"] \arrow[dr] & & E'_{\bullet\bullet} \arrow[dl] \\
 & G_{\bullet\bullet} &
\end{tikzcd}$$

tales que el endomorfismo $f_{\bullet -1}: E_\bullet —— E_\bullet$ inducido en la aumentasión por $f_{\bullet\bullet}$ es un morfismo (no necesariamente la identidad) de complejos simpliciales aumentados por X i.e. el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_{\bullet\bullet} \arrow[rr, "f_{\bullet\bullet}"] \arrow[d] & & E'_{\bullet\bullet} \arrow[d] \\
E_\bullet \arrow[rr, "f_{\bullet -1}"'] \arrow[dr, "p"'] & & E_\bullet \arrow[dl, "p"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Notemos que esta categoría no es en general un grupoide y que contiene a $TORS^1(E_\bullet,G_{\bullet\bullet})$ como una subcategoría densa. Al correspondiente conjunto de componentes conexas de $\underline{Tors}^1(E_\bullet,G_{\bullet\bullet})$ lo denotaremos por $\underline{Tors}^1[E_\bullet,G_{\bullet\bullet}]$. Dado un morfismo de 2-grupoides $f_{\bullet\bullet}: G_{\bullet\bullet} \longrightarrow H_{\bullet\bullet}$, con una construcción analoga a la del funtor $TORS^1(E_\bullet,f_{\bullet\bullet}) = f_* : TORS^1(E_\bullet,G_{\bullet\bullet}) \longrightarrow TORS^1(E_\bullet,H_{\bullet\bullet})$, obtenemos un funtor $\underline{Tors}^1(E_\bullet,f_{\bullet\bullet}) = f_* : \underline{Tors}^1(E_\bullet,G_{\bullet\bullet}) \longrightarrow \underline{Tors}^1(E_\bullet,H_{\bullet\bullet})$ que será (al igual que el funtor $TORS^1(E_\bullet,f_{\bullet\bullet})$)una restricción del funtor f! adjunto izquierda del funtor f^*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{OPER}_{\mathrm{GPD}(\mathbb{C})}(G_{\bullet\bullet}) \arrow[r, shift left, "f!"] & \mathrm{OPER}_{\mathrm{GPD}(\mathbb{C})}(H_{\bullet\bullet}) \arrow[l, shift left, "f^{*}"]
\end{tikzcd}$$

verificandose además que para cualquier morfismo $h{:}p \longrightarrow p'$ en $RE(X)$ el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Tors}}^{1}[\mathrm{cosk}^{o}(p'),G_{\bullet\bullet}] \arrow[r, "f_{*}"] \arrow[d, "h^{*}"'] & \underline{\mathrm{Tors}}^{1}[\mathrm{cosk}^{o}(p'),H_{\bullet\bullet}] \arrow[d, "h^{*}"'] \\
\underline{\mathrm{Tors}}^{1}[\mathrm{cosk}^{o}(p),G_{\bullet\bullet}] \arrow[r, "f_{*}"] & \underline{\mathrm{Tors}}^{1}[\mathrm{cosk}^{o}(p),H_{\bullet\bullet}]
\end{tikzcd}$$

de las aplicaciones inducida en conjuntos es conmutativo.

.5.7) Definición (Los conjuntos $\mathbb{H}^{1}$)

Para cada objeto X y cada 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ definimos el conjunto

$$\mathbb{H}^{1}(X,G_{\bullet\bullet}) = \varinjlim_{p\in RE(X)} \underline{\mathrm{Tors}}^{1}[\mathrm{cosk}^{o}(p),G_{\bullet\bullet}]$$

para cada morfismo de 2-grupoides $f_{\bullet\bullet}: G_{\bullet\bullet} \longrightarrow H_{\bullet\bullet}$, denotaremos por $f_{*} = \mathbb{H}^{1}(X,f_{\bullet\bullet}): \mathbb{H}^{1}(X,G\ ) \longrightarrow \mathbb{H}^{1}(X,H_{\bullet\bullet})$ a la aplicación inducida por los funtores $\underline{\mathrm{Tors}}^{1}(\mathrm{cosk}^{o}(p),f_{\bullet\bullet})$, para $p \in RE(X)$.

El siguiente lema generalizará el apartado (a) del teorema(5.3.1) de Glenn [32], permitiendonos comparar 2-torsores en $\mathbb{C}$ sobre 2-hipergrupoides filtrados y 1-torsores en $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$ sobre 2-grupoides.

.5.8) Lema .-

Para cada epimorfismo regular $p{:}E \twoheadrightarrow X$ en $RE(X)$ y cada 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$, el funtor

$$\bar{W}: 2\text{-}\mathrm{GPD}(\mathbb{C}) \longrightarrow 2\text{-}\mathrm{FHPGPD}(\mathbb{C})$$

induce una biyección natural entre los conjuntos

$$\underline{\mathrm{Tors}}^{1}[\mathrm{cosk}^{o}(p),G_{\bullet\bullet}] \xrightarrow{\bar{W}} \mathrm{TORS}^{2}[p,\bar{W}(G_{\bullet\bullet})]$$

Demostración.- Sea $\alpha_{\bullet\bullet}{:}E_{\bullet\bullet} \longrightarrow G_{\bullet\bullet}$ un 1-torsor de $\mathrm{cosk}^{o}(p)$ sobre $G_{\bullet\bullet}$

$$\begin{tikzcd}
 & E_{11} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, "\alpha_{11}"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E_{1o} \arrow[r, two heads] \arrow[dl, "\alpha_{1o}"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & E \underset{X}{\times} E \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
G_{2} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_{1} \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \\
 & E \arrow[rr, equal] \arrow[dl, "\alpha_{oo}"'] & & E \arrow[r, equal] \arrow[dl, "\alpha_{oo}"] & E \arrow[dd] \\
G_{o} \arrow[rr, equal] & & G_{o} & & \\
 & & & & X
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor $\bar{W}$ obtenemos un diagrama en $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
\bar{W}(E_{\bullet\bullet}) : \arrow[d, "\bar{W}(\alpha_{\bullet\bullet})"'] & \cdot\ \cdot\ \cdot & E_{11} \underset{E}{\times} E_{1o} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "\alpha_{11}\times\alpha_{10}"'] & E_{1o} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\alpha_{1o}"'] & E \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\alpha_{oo}"'] & X \\
\bar{W}(G_{\bullet\bullet}) : & \cdot\ \cdot\ \cdot & G_{2} \underset{G_{o}}{\times} G_{1} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G_{1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_{o} &
\end{tikzcd}$$

veamos que $\bar{W}(\alpha_{\bullet\bullet})$ es un 2-torsor . Puesto que el morfismo $E_{10} \twoheadrightarrow E \underset{X}{\times} E$ es un epimorfismo, $\bar{W}(E_{\bullet\bullet})$ es aferical en dimensión uno y está aumentado por $p:E \twoheadrightarrow X$. Veamos que $\bar{W}(E_{\bullet\bullet}) = COSK^1(\bar{W}(E_{\bullet\bullet}))$, para lo cual puesto que $\bar{W}(E_{\bullet\bullet})$ es un 2-hipergrupoide, bastará con probar que $E_{11} \underset{E}{\times} E_{10} = \Delta_2(\bar{W}(E_{\bullet\bullet}))$. Tenemos que $E_{1\bullet} = COSK^0(E_{1\bullet})$ entonces $E_{11} = E_{10} {}_{E} \underset{X}{\overset{\times}{\times}} {}_{E} E_{10}$ asi los elementos de $E_{11} \underset{E}{\times} E_{10}$ serán ternas $((x_0,x_1),x_2) \in (E_{10} x E_{10}) x E_{10})$ tales que $d_0(x_0) = d_0(x_1)$, $d_1(x_0) = d_1(x_1) = d_0(x_2)$; entonces el morfismo $E_{11} \underset{E}{\times} E_{10} \longrightarrow \Delta_2(\bar{W}(E_{\bullet\bullet}))$ que asocia a cada $((x_0,x_1),x_2)$ el elemento $(x_0, x_0 \cdot x_1, x_2)$ es un isomorfismo.

Por último, puesto que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
E_{11} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\alpha_{11}"'] & E_{10} \arrow[d, "\alpha_{10}"'] \\
G_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_1
\end{tikzcd}$$

es un pullback, tanbien lo será el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
E_{11} \underset{E}{\times} E_{10} \arrow[r] \arrow[d] & E_{10} \underset{E}{\times} E_{10} \arrow[d] \\
G_2 \underset{G_0}{\times} G_1 \arrow[r] & G_1 \underset{G_0}{\times} G_1
\end{tikzcd}$$

verificandose por tanto que $\bar{W}(\alpha_{\bullet\bullet})$ es fibración exacta, asi $\bar{W}(\alpha_{\bullet\bullet})$ será un elemento de $TORS^2(p,\bar{W}(G_{\bullet\bullet}))$.

Reciprocamente; sea $\alpha_\bullet: E_\bullet \longrightarrow \bar{W}(G_{\bullet\bullet})$ un 2-torsor sobre $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})$ que tiene a $p:E \twoheadrightarrow X$ como aumentación. Recordemos que $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})$ es un 2-hipergrupoide filtrado con filtración $G_{\bullet 0} \hookrightarrow \bar{W}(G_{\bullet\bullet})$, considerando entonces a $E_\bullet$ como un 2-hipergrupoide filtrado, con filtración la dada por el grupoide fibra :

$$\begin{tikzcd}
G(E_\bullet) \arrow[r, hook] \arrow[d] & E_\bullet \arrow[d, "\alpha_\bullet"] \\
G_{\bullet 0} \arrow[r, hook] & \bar{W}(G_{\bullet\bullet})
\end{tikzcd}$$

existirá por el teorema (1.3.25) un 2-grupoide $E_{\bullet\bullet}$ con $E_{1\bullet} = G(E_\bullet)$ y un morfismo simplicial doble $\alpha_{\bullet\bullet}:E_{\bullet\bullet} \longrightarrow G_{\bullet\bullet}$ tal que $\bar{W}(E_{\bullet\bullet}) = E_\bullet$ y $\bar{W}(\alpha_{\bullet\bullet}) = \alpha_\bullet$. Este 2-grupoide $E_{\bullet\bullet}$ y este morfismo $\alpha_{\bullet\bullet}$ entan dados por:

$$\begin{tikzcd}
 & E_{\bullet\bullet}: \arrow[dl, "\alpha_{\bullet\bullet}"'] & \cdot & \cdot & \cdot & & E_{11} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, "\alpha_{11}"'] \arrow[dd] & & E_1 \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, "\alpha_1"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E \underset{X}{\times} E \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
G_{\bullet\bullet}: & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & G_2 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd] & & G_1 \arrow[dd] & & & \\
 & & & & & & E \arrow[rr, equal] \arrow[dl, "\alpha_0"'] & & E \arrow[rr, equal] \arrow[dl, "\alpha_0"'] & & E \arrow[dd, "p"] \\
 & & & & & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 & & & \\
 & & & & & & & & & & X
\end{tikzcd}$$

donde el plano horizontal superior representa el 1-torsor asociado al torsor $\alpha_\bullet$. Asi $\alpha_{\bullet\bullet}$ es un 1-torsor en GPD(ℂ) de $COSK^0(E_\bullet)$ sobre $\bar{W}(G_{\bullet\bullet})$, teniendose una equivalencia de categorías $\underline{\mathrm{Tors}}^1(\mathrm{cosk}^0(p), G_{\bullet\bullet}) \xrightarrow{\bar{W}} \mathrm{TORS}^2(p, \bar{W}(G_{\bullet\bullet}))$ que nos induce la biyección "natural" deseada : $\underline{\mathrm{Tors}}^1[\mathrm{cosk}^0(p), G_{\bullet\bullet}] \xrightarrow{\bar{W}} \mathrm{TORS}^2[p, \bar{W}(G_{\bullet\bullet})]$.

Con la naturalidad de esta biyección queremos decir:

i .- Para cualquier morfismo $f: p \longrightarrow p'$ en $RE(X)$ se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Tors}}^1[\mathrm{cosk}^0(p'), G_{\bullet\bullet}] \arrow[r, "\bar{W}"'] \arrow[d, "f^*"'] & \mathrm{TORS}^2[p', \bar{W}(G_{\bullet\bullet})] \arrow[d, "f^*"] \\
\underline{\mathrm{Tors}}^1[\mathrm{cosk}^0(p), G_{\bullet\bullet}] \arrow[r, "\bar{W}"'] & \mathrm{TORS}^2[p, \bar{W}(G_{\bullet\bullet})]
\end{tikzcd}$$

donde las aplicaciones f^* son obtenidas mediante pullback via el morfismo simplicial $f_\bullet : \mathrm{cosk}^0(p) \longrightarrow \mathrm{cosk}^0(p')$ inducido por $f: p \longrightarrow p'$. La conmutatividad de este diagrama se deduce de inmediato puesto que tanto el funtor $\bar{W}$ como f^* estan definidos usando colimites y colimites conmutan con colimites.

ii .- Para cualquier morfismo $f_{\bullet\bullet}: G_{\bullet\bullet} \longrightarrow H_{\bullet\bullet}$ de 2-grupoides y cualquier epimorfismo $p \in RE(X)$ se tiene un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Tors}}^1[\mathrm{cosk}^0(p), G_{\bullet\bullet}] \arrow[r, "\bar{W}"'] \arrow[d, "f_*"] & \mathrm{TORS}^2[p, \bar{W}(G_{\bullet\bullet})] \arrow[d, "f_*"] \\
\mathrm{Tors}^1[\mathrm{cosk}^0(p), H_{\bullet\bullet}] \arrow[r, "\bar{W}"'] & \mathrm{TORS}^2[p, \bar{W}(H_{\bullet\bullet})]
\end{tikzcd}$$

notemos que la conmutatividad de este diagrama es una consecuencia inmediata del lema (1.4.42). //

A partir del lema (1.5.8) anterior y del lema (1.4.41) deducimos el siguiente teorema, que nos será de gran utilidad para definir los morfismos de conexión de cohomología.

.5.9) Teorema (de comparación entre 1-torsores sobre 2-grupoides y 2-torsores sobre 2-hipergrupoides filtrados)

Para cada 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ y cada objeto X de $\mathbb{C}$, el funtor $\bar{W}$ induce una biyección natural

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^1(X, G_{\bullet\bullet}) \arrow[r, shift left, "\bar{W}"] & \mathrm{TORS}^2[X, \bar{W}(G_{\bullet\bullet})] \arrow[l, shift left, dashed, "\Phi"]
\end{tikzcd}$$

(Notemos que por el teorema (1.3.25) , todo 2-hipergrupoide filtrado es isomorfo a $\bar{W}$ de algún 2-grupoide).

n-Torsores en GPD($\mathbb{C}$). Los conjuntos $\mathbb{H}^n(X, G_{\bullet\bullet})$.

Estudiaremos en primer lugar los 2-torsores en GPD($\mathbb{C}$) sobre (2,1)-hipergrupoides.

Sea $G_{\bullet\bullet}$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots\; G_{12} \arrow[r, shift left=2, "D_0"] \arrow[r, "D_1" description] \arrow[r, shift right=2, "D_2"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & G_{11} \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & G_{1o} \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
G_o \arrow[r, equal] & G_o \arrow[r, equal] & G_o
\end{tikzcd}$$

un (2,1)-hipergrupoide en $\mathbb{C}$. Considerando a $G_{\bullet\bullet}$ como un 2-hipergrupoide en GPD($\mathbb{C}$), tendrá asociado segun (1.2.11) un grupoide $G'_{\bullet\bullet}$ en GPD($\mathbb{C}$) que será además un 2-grupoide en $\mathbb{C}$; $G'_{\bullet\bullet} =$

$$\begin{tikzcd}
G'_{12} \arrow[r, shift left, "D_o"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_{11} \arrow[l, bend right=50, "S_o"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
G_o \arrow[r, equal] & G_o
\end{tikzcd}
\qquad \text{donde} \qquad
\begin{tikzcd}
G'_{12} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, shift left, "d_o"] \arrow[dr, shift right, "d_1"'] & G_{12} \arrow[d, shift right, "d_o"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
& G_o
\end{tikzcd}$$

es un subgrupoide cuyas flechas son aquellos elementos x de G_{12} tales que $D_o(x)=S_oD_oD_1(x)$ y los morfismos $D_o, D_1 : G'_{12} \longrightarrow G_{11}$ y $S_o : G_{11} \longrightarrow G'_{12}$ se obtienen por restricción de los morfismos $D_1, D_2 : G_{12} \longrightarrow G_{11}$ y $S_1 : G_{11} \longrightarrow G_{12}$ respectivamente.

Supongamos ahora un epimorfismo $p : E \twoheadrightarrow X$ en $\mathbb{C}$ y un 2-torsor en GPD($\mathbb{C}$) del grupoide trivial $\operatorname{cosk}^o(p)$ sobre $G_{\bullet\bullet}$

$$\begin{tikzcd}
E_{\bullet\bullet}: \arrow[d, "\alpha_{\bullet\bullet}"'] & \cdots & & \Delta_{12} \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E_{11} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E_{1o} \arrow[r, two heads] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & E \times_X E \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
G_{\bullet\bullet}: & \cdots & G_{12} \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_{11} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_{1o} \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \\
& & & \Delta_{o2} \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dl] & & E_{o1} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] & & E_{oo} \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dl] & E \arrow[d, "p"] \\
& & G_o \arrow[rr, equal] & & G_o \arrow[rr, equal] & & G_o & & X
\end{tikzcd}$$

(donde Δ_{o2} y Δ_{12} denotan núcleos simpliciales) . El 1-torsor asociado a $\alpha_{\bullet\bullet}$ será

$$\begin{tikzcd}
E'_{\bullet\bullet}: \arrow[d, "\alpha'_{\bullet\bullet}"'] & \cdots & & \Delta'_{12} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E_{11} \arrow[r, two heads] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & E_{1o} \times_{E \times_X E} E_{1o} \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
G'_{\bullet\bullet}: & \cdots & G'_{12} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_{11} \arrow[dd, shift left, no head] \arrow[dd, shift right, no head] & & \\
& & & \Delta'_{o2} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] & & E_{1o} \arrow[r, two heads] \arrow[dl] & E_{oo} \times_E E_{oo} \\
& & G_o \arrow[rr, equal] & & G_o & &
\end{tikzcd}$$

puesto que el cuadrado horizontal inferior es un pullback tenemos que $\Delta'_{o2} = E_{o1}$ y por tanto $E_{1o} = E_{oo} \times_E E_{oo}$. Asi, si denotamos por E_o a E_{oo}, el 2-torsor $\alpha_{\bullet\bullet}$ será representado por un diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_{\bullet\bullet}: \arrow[d, "\alpha_{\bullet\bullet}"'] & \cdots & & \Delta_{12} \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dl, "\alpha_{12}"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E_{11} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, "\alpha_{11}"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E_{1o} \arrow[r, two heads] \arrow[dl, "\alpha_{1o}"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & E \times_X E \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
G_{\bullet\bullet}: & \cdots & G_{12} \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_{11} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_{1o} \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \\
& & & E_o \times_E E_o \times_E E_o \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dl] & & E_o \times_E E_o \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] & & E_o \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dl, "\alpha_{oo}"] & E \arrow[d, "p"] \\
& & G_o \arrow[rr, equal] & & G_o \arrow[rr, equal] & & G_o & & X
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor $\bar{W}$ a $E_{\bullet\bullet}$ obtenemos un complejo simplicial

$$\begin{tikzcd}
\bar{W}(E_{\bullet\bullet}): \;\cdots\; E_o * \Delta_{12} * E_{11} * E_{1o} \arrow[r, shift left=3, "d_o"] \arrow[r, shift left=1, "d_1" description] \arrow[r, shift right=1, "d_2" description] \arrow[r, shift right=3, "d_3"'] & E_o \times_E E_{11} \times_E E_{1o} \arrow[r, shift left=2, "d_o"] \arrow[r, "d_1" description] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & E_o \times_E E_o \arrow[r, shift left, "d_o"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & E_o
\end{tikzcd}$$

donde:

- Los elementos de $E_0 \underset{E}{\times} E_{10}$ son pares $(x_0, x_{10}) \in E_0 \times E_{10}$ tales que $q(x_0) = qd_0(x_{10})$, $d_0, d_1 : E_0 \underset{E}{\times} E_{10} \longrightarrow E_0$ estan definidas por; $d_0(x_0, x_{10}) = x_0$

$$d_1(x_0, x_{10}) = d_1(x_{10})$$

- Los elementos de $E_0 \underset{E}{\times} E_{11} \underset{E}{\times} E_{10}$ son ternas $(x_0, x_{11}, x_{10}) \in E_0 \times E_{11} \times E_{10}$ tales que $q(x_0) = q\, d_0 D_0(x_{11}) = qd_0 D_1(x_{11})$ y $d_1 D_1(x_{11}) = d_0(x_{10})$.
  $d_0, d_1, d_2 : E_0 \times E_{11} \underset{E}{\times} E_{10} \longrightarrow E_0 \underset{E}{\times} E_{10}$ están definidos por;
  $d_0(x_0, x_{11}, x_{10}) = (x_0, D_0(x_{11}))$
  $d_1\ (x_0, x_{11}, x_{10}) = (x_0,\ D_1(x_{11})\ x_{10})$
  $d_2(x_0, x_{11}, x_{10}) = (d_1 D_0(x_{11}), x_{10})$
- Los elementos de $E_0 * \Delta_{12} * E_{11} * E_{10}$ serán aquellos $(x_0, (\overset{0}{x}_{11}, \overset{1}{x}_{11}, \overset{2}{x}_{11}), y_{11}, x_{10})$ del producto $E_0 \times \Delta_{12} \times E_{11} \times E_{10}$ tales que $q(x_0) = qd_0 D_0(\overset{0}{x}_{11})$, $d_1(\overset{2}{x}_{12}) = d_0(y_{11})$, cada uno de estos elementos determina univocamente una matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & \overset{0}{x}_{11} & D_0(y_{11}) \\ x_0 & \overset{1}{x}_{11} & D_1(y_{11})\ x_{10} \\ x_0 & \overset{2}{x}_{11} y_{11} & x_{10} \\ d_1 D_0(\overset{0}{x}_{12}) & y_{11} & x_{10} \end{pmatrix}$$

que representa un elemento del núcleo simplicial $\Delta_3(\overline{W}(E_{\cdot\cdot}))$ y reciprocamente, de este modo tenemos que $\overline{W}(E_{\cdot\cdot}) = \mathrm{COSK}^2(\overline{W}(E_{\cdot\cdot}))$.

Por otra parte el morfismo $\alpha_{\cdot\cdot}$ induce un morfismo

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}(E_{\cdot\cdot}) : \arrow[d, "\alpha_{\cdot\cdot} = \overline{W}(\alpha_{\cdot\cdot})"'] & \cdots & E_0 * \Delta_{12} * E_{11} * E_0 \arrow[d, "\alpha 3"'] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & E_0 \underset{E}{\times} E_{11} \underset{E}{\times} E_{10} \arrow[d, "\alpha 2"'] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & E_0 \underset{E}{\times} E_{10} \arrow[d, "\alpha_{10}\,pr"'] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & E_0 \arrow[d, "\alpha_{00}"'] \\
\overline{W}(G_{\cdot\cdot}) : & \cdots & G_{12} * G_{11} * G_{10} \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & G_{11} \underset{G_0}{\times} G_{10} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G_{10} \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & G_0
\end{tikzcd}$$

con: $\alpha_0 = \alpha_{00} : E_0 \longrightarrow G_0$

$\alpha 1 = E_0 \underset{E}{\times} E_{10} \longrightarrow G_{10} \qquad (x_0, x_{10}) \longmapsto \alpha_{10}(x_{10})$

$\alpha 2 = E_0 {}_E E_{11} {}_E E_{10} \longrightarrow G_{11} {}_{G_0} G_{10} \qquad (x_0, x_{11}, x_{10}) \longmapsto (\alpha_{11}(x_{11}),\ \alpha_{10}(x_{10}))$

$\alpha 3 = E_0 * \Delta_{12} * E_{11} * E_{10} \longrightarrow G_{12} * G_{11} * G_{10}$

$(x_0, (\overset{0}{x}_{12}, \overset{1}{x}_{12}, \overset{2}{x}_{12}), y_{11}, x_{10}) \longmapsto (\alpha_{12}(\overset{0}{x}_{12}, \overset{1}{x}_{12}, \overset{2}{x}_{12}), \alpha_{11}(y_{11}),\ \alpha_{10}(x_{10}))$

Probemos ahora que $\alpha_{\bullet}$ es fibración exacta en dimensiones $\geqslant 3$, para lo cual, por ser $\overline{W}(E_{\bullet\bullet}) = \mathrm{COSK}^2(\overline{W}(E_{\bullet\bullet}))$ bastará que probemos que los cuadrados:

$$\begin{tikzcd}
E_o * \Delta_{12} * E_{11} * E_{1o} \arrow[r, "K_3(i)"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & \Lambda^i_3(\bar{W}(E_{\bullet\bullet})) \arrow[d, "\alpha"'] \\
G_{12} * G_{11} * G_{1o} \arrow[r, "K_3(i)"] & \Lambda^i_3(\bar{W}(G_{\bullet\bullet}))
\end{tikzcd}$$

son pullback para $o \leqslant i \leqslant 3$. Veamos por ejemplo que el cuadrado anterior es pullback para $i=o$ (los demás casos se probarían de forma análoga) .

Un elemento de $\Lambda^o_3(\bar{W}(E_{\bullet\bullet}))$ viene dado por una matriz:

$$z = \begin{pmatrix} - & - & - \\ x_o & x^1_{11} & D_1(y_{11})\, x_{1o} \\ x_o & x^2_{11} y_{11} & x_{1o} \\ d_1 D_o(x^1_{11}) & y_{11} & x_{1o} \end{pmatrix}$$

ó equivalentemente por $z = (x_{1o}, (- , x^1_{11}, x^2_{11}) , y_{11}, x_{1o})$ con las necesarias condiciones de compatibilidad, si tomamos un elemento (g_{21}, g_{11}, g_{1o}) en $\Lambda^o_3(\bar{W}(G_{\bullet\bullet}))$ tal que $\alpha(z) = K_3(0)(g_{21}, g_{11}, g_{1o})$ tenemos que $g_{11} = \alpha_{11}(y_{11})$ y $g_{1o} = \alpha_{1o}(D_1(y_{11} x_{1o})$ y que $\alpha_{21}(x'_{11}) = D_1(g_{12})$ y $\alpha_{21}(x^2_{11}) = D_2(g_{12})$ así por ser $\alpha_{\bullet\bullet}$ un 2-torsor el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{12} \arrow[r, "K_2(0)"] \arrow[d, "\alpha_{12}"'] & \Lambda^o_2(E_{1\bullet}) \arrow[d] \\
G_{12} \arrow[r, "K_2(0)"] & \Lambda^o_2(G_{1\bullet})
\end{tikzcd}$$

es un pullback y por tanto los elementos $(-, x^1_{11}, x^2_{11}) \in \Lambda^o_2(E_{1o})$ y $g_{12} \in G_{12}$ determina un único elemento $(x^o_{11}, x^1_{11}, x^2_{11}) \in \Delta_{12}$ tal que $\alpha_{12}(x^o_{11}, x^1_{11}, x^2_{11}) = g_{12}$ verificándose además que $\mathfrak{U} = ((x^o_{11}, x^1_{11}, x^2_{11}), y_{11}, x_{1o})$ es un elemento en $E_o * \Delta_{12} * E_{11} * E_{1o}$ tal que $\alpha_3(\mathfrak{U}) = (g_{12}, g_{11}, g_{1o})$. Además puesto que x^o_{11} está determinado de forma única por g_{12} y $(-, x^1_{11}, x^2_{11})$ se tiene que $\mathfrak{U}$ está determinado de forma única por (g_{12}, g_{11}, g_{1o}) y z con lo que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
E_o * \Delta_{12} * E_{11} * E_{1o} \arrow[r, "K_3(0)"] \arrow[d, "\alpha_3"'] & \Lambda^o_3(\bar{W}(E_{\bullet\bullet})) \arrow[d] \\
G_{12} * G_{11} * G_{1o} \arrow[r, "K_3(0)"] & \Lambda^o_3(\bar{W}(G_{\bullet\bullet}))
\end{tikzcd}$$

es un pullback.

Veamos por último que el coigualador de $d_o, d_1 : E_o \times_E E_{1o} \longrightarrow E_o$ es la composición $E_o \xrightarrow{q} E \xrightarrow{p} X$. Sea $f: E_o \longrightarrow T$ un morfismo que couguala a d_o, d_1 : $E_o \times_E E_{1o} \longrightarrow E_o$, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_0\times_E E_0 \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, shift left, "pr_1"] \arrow[dr, shift right, "pr_0"'] & & E\times_X E \arrow[d, shift right, "\pi_0"'] \arrow[d, shift left, "\pi_1"] & \\
E_0\times_E E_{10} \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] \arrow[urr, bend left, "t'"] & E_0 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[dl, dashed, "f'"] & X \arrow[dll, dashed, bend left, "\bar{f}"] \\
& T & &
\end{tikzcd}$$

donde $t(x,y)=(x,s_0y)$ y t'es la composición $E_0\times_E E_{10}\overset{pr}{\twoheadrightarrow} E_{10}\twoheadrightarrow E\times_X E$ .Si f coiguala a d_0 y d_1 también coiguala a $pr_0,pr_1 : E_0\times_{E_0} E_0\longrightarrow E_0$ y por tanto existe una únicaf$'$: $E\longrightarrow T$ tal que $f'q=f$, ahora f' coiguala a π_0 , π_1 : $E\times_X E\longrightarrow E$ puesto que coiguala a $\pi_0 t'$, $\pi_1 t'$ y t' es épica ,así existe un único morfismo $\bar{f}$: $X\longrightarrow T$ tal que $f'=\bar{f}p$ y por consiguiente $f=\bar{\bar{f}}pq$.

Denotaremos entonces,para cada (2,1)-hipergrupoides $G_{..}$y para cada epimorfismo $p:E\twoheadrightarrow X$, por $\underline{\mathrm{Tors}2}$ $(\mathrm{cosk}^0(p) , G_{..})$ la categoría cuyos objetos son 2-torsores en $GPD(\mathbb{C})$ de $\mathrm{cosk}^0(p)$ sobre $G_{..}$y cuyos morfismos son morfismos simpliciales dobles $G_{..}$-invariantes

$$\begin{tikzcd}
E_{..} \arrow[rr, dash, "f_{..}"] \arrow[dr, dash, "\alpha_{..}"'] & & E'_{..} \arrow[dl, dash, "\alpha'_{..}"] \\
& G_{..} &
\end{tikzcd}$$

tales que el endomorfismo simplicial $f_{..-1}$: $\mathrm{cosk}^0(p)\longrightarrow \mathrm{cosk}^0(p)$ inducido por la aumentación por $f_{..}$ es un morfismo (no necesariamente la identidad) de complejos simpliciales aumentados.Notemos(al igual que en dimensión 1) que esta categoría contiene a $\mathrm{TORS}^2(\mathrm{cosk}^0(p),G_{..})$ como una subcategoría densa. Denotaremos por $\underline{\mathrm{Tors}}^2\left[\mathrm{cosk}^0(p) , G_{..}\right]$al conjunto de componentes conexas de la categoría $\underline{\mathrm{Tors}}^2$ $(\mathrm{cosk}^0(p) , G_{..})$. Los razonamientos anteriores prueban el lema siguiente:

.5.10) Lema

Sea $G_{..}$un(2,1)-hipergrupoide y $p:E\twoheadrightarrow X$ un epimorfismo.Entonces el funtor $\bar{W}$ induce una aplicación "natural" : $\bar{W}^*: \underline{\mathrm{Tors}}^2\left[\mathrm{cosk}^0(p),G_{..}\right]\longrightarrow \mathrm{TORS}^3\left[x, \bar{W}(G_{..})\right]$.

Donde por natural entendemos que si:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

es un morfismo en $RE(X)$ entonces tenemos un diagrama commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Tors}}^2\left[\mathrm{cosk}^0(p') , G_{..}\right] \arrow[d, "f^*"'] \arrow[dr, "\bar{W}^*"] & \\
\underline{\mathrm{Tors}}^2\left[\mathrm{cosk}^0(p) , G_{..}\right] \arrow[r, "\bar{W}^*"'] & \mathrm{TORS}^3\left[X,\bar{W}(G_{..})\right]
\end{tikzcd}$$. //

1.5.11) Definición (Los conjuntos $\mathbb{H}^2$)

Para cada objeto X y cada (2,1)-hipergrupoide $G_{..}$ definimos

$$\mathbb{H}^2(X,G_{..}) = \varinjlim_{p\in RE(X)} \underline{Tors}^1\ [\operatorname{cosk}^0(p)\ ,\ G_{..}].$$

Para cada morfismo de (2,1)-hipergrupoides) $f_{..}: G_{..} \longrightarrow H_{..}$ los funtores : $\underline{Tors}^2\ (\operatorname{cosk}^0(p), f_{..}) : \underline{Tors}^2\ (\operatorname{cosk}^0(p)\ ;\ G_{..}) \longrightarrow \underline{Tosrs}^2\ (\operatorname{cosk}^0(p)\ ,\ H_{..})$ inducen para cada objeto X una aplicación $\mathbb{H}^2\ (X\ ,G_{..}) \xrightarrow{f_*=\mathbb{H}^2(X,f_{..})} \mathbb{H}^2\ (X,H_{..})$.

1.5.12) Usando el lema(1.5.10),el funtor $\bar{W}$ induce un morfismo $\Omega :\ \mathbb{H}^2(X,G_{..})\rightarrow TORS^3[X,\bar{W}(G_{..})]$. verificándose que para todo morfismo de (2,1)-hipergrupoides $f_{..}: G_{..}\longrightarrow H_{..}$ el cuadrado :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^2(X,G_{..}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\Omega_{G_{..}}"'] & \mathbb{H}^2(X,H_{..}) \arrow[d, "\Omega_{H_{..}}"] \\
TORS^3\ [X,\bar{W}(G_{..})] \arrow[r, "\bar{W}(f_{..})_*"] & TORS^3\ [X\ ,\bar{W}(H_{..})]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

1.5.13) Nota.

¿Establece la aplicación $\Omega : \mathbb{H}^2\ (X,G_{..}) \longrightarrow TORS^3[\ X\ ,\ \bar{W}(G_{..})]$ una biyección natural,al igual que ocurre en el caso en que $G_{..}$ sea un 2-grupoide? .

La respuesta a esta pregunta es,en estos momentos,desconocida por nosotros.Por ejemplo : si A es un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$ y $G_{..}$ es el (2,1)-hipergrupoide K(K(A, 1),2):

$$\begin{tikzcd}
G_{..} = K(K(A,1),2) = A \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathbb{1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & \mathbb{1} \arrow[d, equal] \\
\mathbb{1} \arrow[r, equal] & \mathbb{1} \arrow[r, equal] & \mathbb{1}
\end{tikzcd}$$

Entonces $\bar{W}\ (G_{..}) \simeq K(A,3)$ que es un 3-hipergrupoide filtrado.

Para responder a la pregunta : ¿ es $\Omega:\mathbb{H}^2(X\ ,K\ (K(A,1),2)\ ) \longrightarrow TORS^3\ [\ X, K(A,3)]$ una biyección ? , deberíamos primero responder a : ¿Dado un 3-torsor $\alpha_{.} : E \longrightarrow K(A,3)$ de X ,existe un 3-torsor $\alpha'_{.} : E' \longrightarrow K(A,3)$ de X en la misma clase de $\alpha_{.}$ con $G(E'_{.})$ isomorfo a $\bar{W}$ de un 2-grupoide? .La respuesta,para nosotros,es aún desconocida.

1.5.14) Si $G_{..}$ es un (n,1)-hipergrupoide y X es un objeto de $\mathbb{C}$, para cada epimorfismo $p:E \twoheadrightarrow X \in RE(X)$,definimos la categoría $\underline{Tors}^n(\operatorname{cosk}^0(p)\ ,G_{..})$ cuyos objetos serán n-torsore en GPD($\mathbb{C}$) de $\operatorname{cosk}^0(p)$ sobre $G_{..}$ y cuyos morfismos son morfismos simpliciales dobles $G_{..}$-invariantes:

$$\begin{tikzcd}
E_{..} \arrow[rr, "f_{..}"] \arrow[dr, "\alpha_{..}"'] & & E'_{..} \arrow[dl, "\alpha'_{..}"] \\
& G_{..} &
\end{tikzcd}$$

tales que los endomorfismos $f_{.-1}: \operatorname{cosk}^0(p) \longrightarrow \operatorname{cosk}^0(p)$ inducidosen la aumentación por $f_{..}$ es un morfismo simplicial de complejos simpliciales aumentados por X.

La categoría $TORS^n(\operatorname{cosk}^0(p),G_{..})$ es una subcategoría(densa) de $\underline{Tors}^n(\operatorname{cosk}^0(p),G_{..})$.Definimos los conjuntos $\mathbb{H}^{n}(X,G_{..}) = \varinjlim_{p\in RE(X)} \underline{\mathrm{Tors}}^{n}\left\{\mathrm{cosko}(p),\ G_{..}\right]$ donde $\underline{\mathrm{Tors}}^{n}\left[\mathrm{cosk}^{o}(p),\ G_{..}\right]$ denota el conjunto de componentes conexas de $\underline{\mathrm{Tors}}^{n}(\mathrm{cosk}^{o}(p), G_{.})$.

Se verifica que el funtor $\overline{W}$ induce un morfismo natural

1.5.15) $\Omega : \mathbb{H}^{n}(X,G_{..}) \longrightarrow \mathrm{TORS}^{n+1}\left[X,\overline{W}(G_{..})\right]$.

Este resultado se obtiene generalizando el lema (1.5.8) a dimensión "n". No daremos aqui su demostración pues no es imprescindible para alcanzar los objetivos planteados en este trabajo .

1-torsores en n-HPGPD($\mathbb{C}$) sobre (1,n)-grupoides.

Como corolario del teorema(1.3.28) obtenemos la siguiente proposición:

1.5.16)Proposición.

Sea

$$\begin{tikzcd}
X_{\cdot tr} = X_{n-1} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, dashed] \arrow[r, shift right=2] & X_{n-1} \arrow[l, bend right=40] \arrow[l, dashed, bend right=60] \arrow[l, bend right=80] \cdots X_{1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X_{0} \arrow[l, bend right=40] \arrow[r, two heads] & X
\end{tikzcd}$$

Un objeto simplicial aumentado truncado asferical y $G_{..}$ un (1,n)-grupoide en $\mathbb{C}$ .Se tiene entonces una equivalencia de categorías inducida por el funtor $\overline{W}$:

$$\overline{W}^{*} : \underline{\mathrm{Tors}}^{1}(\mathrm{cosk}^{n-1}(X_{\cdot tr}), G_{..}) \longrightarrow \mathrm{TORS}^{n+1}(X_{\cdot tr}, \overline{W}(G_{..}))$$

. Donde la categoría $\underline{\mathrm{Tors}}^{1}(\mathrm{cosk}^{n-1}(X_{\cdot tr}), G_{..})$ tiene por objetos los 1-torsores en n-HPGPD($\mathbb{C}$) de $\mathrm{cosk}^{n-1}(X_{\cdot tr})$ sobre $G_{..}$ y morfismos los morfismos $G_{..}$-invariantes:

$$\begin{tikzcd}
E_{..} \arrow[rr, "f_{..}"] \arrow[dr, "\alpha_{..}"'] & & E'_{..} \arrow[dl, "\alpha'_{..}"] \\
& G_{..} &
\end{tikzcd}$$

tales que el endomorfismo $f_{\cdot -1} : \mathrm{cosk}^{n-1}(X_{\cdot tr}) \longrightarrow \mathrm{cosk}^{n-1}(X_{\cdot tr})$ es un morfismo simplicial de complejos simpliciales aumentados sobre X . La categoría $\mathrm{TORS}^{n+1}(X_{\cdot tr}, \overline{W}(G_{..}))$ es la subcategoría plena de $\mathrm{TORS}^{n+1}(X, \overline{W}(G_{..}))$ de los torsores que tienen por n-2 truncación $X_{\cdot tr}$.

Demostración.

Sea $\alpha_{..} : E_{..} \longrightarrow G_{..}$ un 1-torsor de $\mathrm{cosk}^{n-1}(X_{\cdot tr})$ sobre $G_{..}$ en la categoría n-HPGPD($\mathbb{C}$) :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& E_{..} \arrow[rr, dash, dotted] \arrow[dl, "\alpha_{..}"'] & & E_{n1} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left=2] \arrow[dd, dotted] \arrow[dd, shift right=2] & & E_{n0} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left=2] \arrow[dd, dotted] \arrow[dd, shift right=2] & \Delta_{n}(X_{\cdot tr}) \arrow[dd, shift left=2] \arrow[dd, dotted] \arrow[dd, shift right=2] \\
G_{..} \arrow[rr, dash, dotted] & & G_{n1} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left=2] \arrow[dd, dotted] \arrow[dd, shift right=2] & & G_{n0} \arrow[dd, shift left=2] \arrow[dd, dotted] \arrow[dd, shift right=2] & & \\
& & & X_{n-1} \arrow[rr, equal] \arrow[dl] \arrow[dd, dash, dotted] & & X_{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[dl] \arrow[dd, dash, dotted] & X_{n-1} \arrow[dd, dash, dotted] \\
& & G_{n-1} \arrow[rr, equal] \arrow[dd, dash, dotted] & & G_{n-1} \arrow[dd, dash, dotted] & & \\
& & & X_{1} \arrow[rr, equal] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & X_{1} \arrow[r, equal] \arrow[dl, dash] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & X_{1} \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
& & G_{1} \arrow[rr, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_{1} \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \\
& & & X_{0} \arrow[rr, equal] \arrow[dl] & & X_{0} \arrow[r, equal] \arrow[dl] & X_{0} \arrow[d, two heads] \\
& & G_{0} \arrow[rr, equal] & & G_{0} & & X
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor $\overline{W}$ obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}(E_{\bullet\bullet}) : \ldots \arrow[d, "\overline{W}(\alpha_{\bullet\bullet})"] & E_{n1}\underset{E_{no}}{\times}\Lambda^{n+1}_{n+1}(E_{\bullet o}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & E_{no} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] & \ldots\ X_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & X_o \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X \\
\overline{W}(G_{\bullet\bullet}) : \ldots & G_{n1}\underset{G_{no}}{\times}\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet o}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] & G_{no} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] & G_{n-1} & \ldots\ G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_o &
\end{tikzcd}$$

Utilizando que $E_{n1} = E_{no}\underset{\Delta_n(X_{\bullet tr})}{\times}E_{no}$,tenemos que los elementos de $E_{n1}\times\Lambda^{n+1}_{n+1}(E_{\bullet o})$ serán aquellos $(x,(x_o,x_1 . . . ,x_n ,-))$ $\in$ $E_{no}\times\Lambda^{n+1}_{n+1}(E_{\bullet o})$ tales que $d_i(x) = d_i(x_o)$,$o \leq i \leq n$,en este caso $(x,x_1,. . . ,x_n,[x_o,. . . ,x_n])$ determina un elemento genérico del núcleo simplicial $\Delta_n(E_{\bullet o}) = \Delta_n(\overline{W}(E_{\bullet\bullet}))$ por lo que $\overline{W}(E_{\bullet\bullet}) = COSK^n(\overline{W}(E_{\bullet\bullet}))$.Además $\overline{W}(E_{\bullet\bullet})$ es asferical puesto que el morfismo $E_{no} \twoheadrightarrow \Delta_n(X_{\bullet tr})$ es épico y $X_{\bullet tr}$ es asferical,también es aumentado sobre X .Tenemos entonces que probar que los cuadrados:

$$\begin{tikzcd}
E_{n1}\underset{E_{no}}{\times}\Lambda^{n+1}_{n+1}(E_{\bullet o}) \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^{i}_{n+1}(E_{\bullet o}) \arrow[d] \\
G_{n1}\underset{G_{no}}{\times}\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet o}) \arrow[r] & \Lambda^{i}_{n+1}(G_{\bullet o})
\end{tikzcd}$$

son pullback $i=o,\ldots,n+1$ para lo cual bastará con probarlo para $i=n+1$ (por ser $E_{\bullet o}$ y $G_{\bullet o}$ n-hipergrupoides).Ahora por ser $\alpha_{\bullet\bullet}$ un 1-torsor tenemos que el cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
E_{n1} \arrow[r] \arrow[d] & E_{no} \arrow[d] \\
G_{n1} \arrow[r] & G_{no}
\end{tikzcd}$$

es un pullback y por tanto lo será el cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
E_{n1}\underset{E_{no}}{\times}\Lambda^{n+1}_{n+1}(E_{\bullet o}) \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^{n+1}_{n+1}(E_{\bullet o}) \arrow[d] \\
G_{n1}\underset{G_{no}}{\times}\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet o}) \arrow[r] & \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet o})
\end{tikzcd}$$

Así $\overline{W}$ de un torsor en $\underline{Tors}^1(cosk^{n-1}(X_{\bullet tr}),G_{\bullet\bullet})$ es un torsor en $TORS^{n+1}(X_{\bullet tr},\overline{W}(G_{\bullet\bullet}))$.

Recíprocamente sea $\alpha_\bullet : E_\bullet \longrightarrow \overline{W}(G_{\bullet\bullet})$ un $(n+1)$-torsor con $(n-1)$-truncación $X_{\bullet tr}$:

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet : \ldots\ldots\ldots \arrow[d, "\alpha_\bullet"'] & E_{n+1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & E_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & X_{n-1} \arrow[d] & \ldots\ldots X_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & X_o \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X \\
\overline{W}(G_{\bullet\bullet}) : \ldots\ldots\ldots & G_{n1}\underset{G_{no}}{\times}\Lambda^{n+1}_{n+1}(G_{\bullet o}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] & G_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\cdots"] \arrow[r, shift right] & G_{n-1} & \ldots\ldots G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_o &
\end{tikzcd}$$

Considerando a $E_\bullet$ como un n-hipergrupoide 1-filtrado,con filtración $G(E_\bullet) \hookrightarrow E_\bullet$, y aplicando el teorema (1.3.28) existe un (1,n)-grupoide $E_{\cdot\cdot}$ tal que $\bar{W}(E_{\cdot\cdot}) \cong E_{\cdot}$ además el morfismo $\alpha_{\cdot}$ inducirá un morfismo $\alpha_{\cdot\cdot}$ entre $E_{\cdot\cdot} = \Psi(E_{\cdot})$ y $\Psi(\bar{W}(G_{\cdot\cdot})) \cong G_{\cdot\cdot}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & E_{\cdot\cdot} : \arrow[dl, "\alpha_{\cdot\cdot}"'] \arrow[rrr, dotted, no head] & & & E'_{n+1} \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, shift right] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, dotted, no head] & & & E_n \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, dotted, no head] & \Delta_n(X_{\cdot tr}) \arrow[dd, equal] \arrow[dd, dotted, no head, shift left=2] \\
 & \Psi\bar{W}(G_{\cdot\cdot}) : \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[rrr, dotted, no head] & & & G'_{n1} \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, shift right] \arrow[ddl, equal, "\wr"'] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] \arrow[ddd, dotted, no head] & & & G_{n0} \arrow[ddl, equal] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] \arrow[ddd, dotted, no head] & & \\
 & & & & & X_{n-1} \arrow[rrr, equal] \arrow[ddl] & & & X_{n-1} \arrow[rr, equal] \arrow[ddl] & X_{n-1} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[d, dotted, no head] \\
G_{\cdot\cdot} \arrow[rrr, dotted, no head] & & & G_{n1} \arrow[rrr, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, dotted, no head] & & & G_{n0} \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, dotted, no head] & & & X_{n-2} \\
 & & & & G_{n-1} \arrow[rrr, equal] \arrow[dl, equal] & & & G_{n-1} \arrow[dl, equal] & & \\
 & & & G_{n-1} \arrow[rrr, no head] & & & G_{n-1} & & & \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & X'_0 \arrow[rrr, equal] \arrow[dl] & & & X_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl] & X_0 \arrow[dd] \\
 & & & & G_0 \arrow[rrr, equal] \arrow[dl, equal] & & & G_0 \arrow[dl, equal] & & \\
 & & & G_0 \arrow[rrr, equal] & & & G_0 & & & X
\end{tikzcd}$$

Notemos que :

$$\begin{tikzcd}
E'_{n+1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & E_n \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \Delta_n(X_{\cdot tr}) \\
G'_{n1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_{n0} &
\end{tikzcd}$$

es el 1-torsor asociado al (n+1)-torsor $\alpha_{\cdot}$. Así la composición $E_{\cdot\cdot} \xrightarrow{\alpha_{\cdot\cdot}} \Psi(\bar{W}(G_{\cdot\cdot})) \xrightarrow{\cong} G_{\cdot\cdot}$ es un 1-torsor de $\mathrm{cosk}^{n-1}(X_{\cdot tr})$ sobre $G_{\cdot\cdot}$. Tenemos por tanto un par de funtores : $\underline{\mathrm{Tors}}^1(\mathrm{cosk}^{n-1}(X_{\cdot tr}), G_{\cdot\cdot}) \underset{\Psi^*}{\overset{\bar{W}^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{TORS}^{n+1}(X_{\cdot tr}, \bar{W}(G_{\cdot\cdot}))$ que establece claramente una equivalencia de categorías.

Como consecuencia inmediata de esta proposición tenemos el siguiente corolario, que generalizará el teorema (5.3.1) de Glenn [32] .

1.5.17) Corolario.

Para cada objeto simplicial truncado asferical $X_{\cdot tr} = X_{n+1} \rightrightarrows X_n \ldots X_0 \twoheadrightarrow X$ y aumentado sobre X y para cada (1,n)-grupoide $G_{\cdot\cdot}$ el funtor $\bar{W}$ induce una biyección natural: $\bar{W}^*: \underline{\mathrm{Tors}}^1\left[\mathrm{cosk}^{n-1}(X_{\cdot tr}), G_{\cdot\cdot}\right] \cong \mathrm{TORS}^{n+1}\left[X_{\cdot tr}, \bar{W}(G_{\cdot\cdot})\right]$ //

CAPITULO 2 .- GRUPOIDES CRUZADOS

Recordemos que un módulo cruzado en la categoría de grupos Gp es una terna (H,G,ρ) donde $\rho:H \longrightarrow G$ es un morfismo de grupos, G actúa sobre H (i.e. se tiene un morfismo de grupos $\Psi:G \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(H)$) y se verifican los axiomas: (I) $\rho({}^{g}x) = g\,\rho(x)\,g^{-1}$

(II) $ {}^{\rho(x)}y = x\,y\,x^{-1}$

para todo $g \in G$, $x,y \in H$. Donde ${}^{g}x$ denota el elemento de H obtenido haciendo actuar g sobre x (i.e. ${}^{g}x = \Psi(g)(x)$).

Un morfismo de módulos cruzados es un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & H' \arrow[d, "\rho'"] \\ G \arrow[r, "\gamma"] & G' \end{tikzcd}$$

donde f es un morfismo de G-grupos (considerando a H' con la estructura de G-grupo inducida por γ) i.e. $f({}^{g}x) = {}^{\gamma(g)}f(x)$.

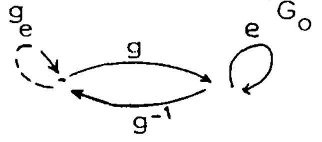
Si denotamos por MC(Gp) a la categoría de módulos cruzados en grupos, se tiene una equivalencia de categorías [1] $\mathrm{MC(Gp)} \cong \mathrm{GPD(GP)}$.

La categoría de módulos cruzados, juega un papel importante para la obtención de sucesiones de 6-puntos en cohomología no abeliana en categorías de grupos [29] o más generalmente en categorías de interes [1] y en categorías de haces sobre un espacio topológico [19]

Un primer ejemplo de módulo cruzado se obtiene tomando H como un subgrupo normal de G , $\rho:H \hookrightarrow G$ como la inclusión y la acción de G sobre H por conjugación ${}^{g}x = gxg^{-1}$.

Observese que los axiomas I, II de módulo cruzado generalizan las propiedades que tiene la inclusión de un subgrupo normal en el grupo. Estudiando las "inclusiones" $i_{\bullet}:H_{\bullet} \hookrightarrow G_{\bullet}$ en GPD($\mathbb{C}$) de un subgrupoide normal $H_{\bullet}$ en el grupoide $G_{\bullet}$, observamos:

i.-Por conjugación se tiene un morfismo en $\mathbb{C}$ "acción" $\Psi:G_1 \times \mathrm{End}(H_{\bullet}) \longrightarrow \mathrm{End}(H_{\bullet})$ definido por $\Psi(g,e) = {}^{g}e = g\,e\,g^{-1}$:



vericándose : (-) $d_0({}^{g}e) = d_1({}^{g}e) = d_1({}^{g}e) = d_0 g$

(-) ${}^{g}s_0 d_1 g = s_0 d_0 g$

(-) ${}^{s_0 d_0 e}e = e$

(-) ${}^{(g'g)}e = {}^{g'}({}^{g}e)$

(-) ${}^{g}(ee') = {}^{g}e\;{}^{g'}e$

ii.- La " inclusión " $i_{\bullet}: H_{\bullet} \hookrightarrow G_{\bullet}$ verifica:

(-) $i_1({}^{g}e) = g\,i_1(e)\,g^{-1}$

(-) ${}^{i_1(e)}e' = e\,e'\,e^{-1}$

Generalizaremos las propiedades en (i) definiendo acciones de un grupoide sobre otro y las propiedades en (ii) ,definiendo "grupoides cruzados generalizados ".

Otros ejemplos importantes de módulos cruzados en la categoría de grupos son los dados por los morfismos canónicos: $\rho : H \longrightarrow Aut(H)$ que envían cada elemento del grupo H en el automorfismo interior definido por él.

Cuando la categoría $\mathbb{C}$ sea cartesiana cerrada definiremos,para cada grupoide $H_\bullet$ en $\mathbb{C}$, su grupoide de automorfismos $AUT(H_\bullet)$ y veremos que dar una "acción " de $G_\bullet$ sobre $H_\bullet$ será equivalente a dar un morfismo de grupoides de $G_\bullet$ en $AUT(H_\bullet)$ .La"acción" de $H_\bullet$ sobre sí mismo por conjugación ,inducirá un morfismo canónico $\rho_\bullet : H_\bullet \longrightarrow AUT(H_\bullet)$ .El morfismo $id : AUT(H_\bullet) \longrightarrow AUT(H_\bullet)$ inducirá una acción de $AUT(H_\bullet)$sobre $H_\bullet$,generalizando también las propiedades de esta "acción" respecto del morfismo $\rho_\bullet$ obtendremos el concepto de "grupoide cruzado generalizado" . Este concepto juega, como veremos posteriormente,un papel importante en la obtención de la sucesión exacta larga para la cohomología no abeliana.

(2.1) ACCIONES EN GPD.LOS GRUPOIDES DE AUTOMORFISMOS Y AUTOMORFISMOS INTERIORES DE UN GRUPOIDE.-

Para establecer el concepto de grupoide de automorfismos,es necesario que la categoría exacta $\mathbb{C}$ sea cartesiana cerrada .Para definir el grupoide de automorfismos interiores necesitaremos que se pueda establecer el concepto de centro de un objeto grupo en $\mathbb{C}$, por tanto exigiremos que la categoría $\mathbb{C}$ esté en las condiciones dadas en (0.1.13) . Sin embargo para definir el concepto de " acción " no habrá que imponer nuevas condiciones a la categoría $\mathbb{C}$.

1.1) Definición (Acción de un grupoide sobre un objeto grupo)

Sea $G_\bullet$ un grupoide en $\mathbb{C}$ y $E_\bullet = E \underset{d}{\overset{s}{\rightleftarrows}} G_o$ un objeto grupo en $\mathbb{C}/G_o$. Una acción de $G_\bullet$ sobre $E_\bullet$ es un morfismo en $\mathbb{C}$:

$$\Psi : G_1 \underset{G_o}{\times} E \longrightarrow E \quad ; \quad (g,e) \longmapsto \Psi(g,e) = {}^{g}e$$

donde $G_1 \underset{G_o}{\times} E$ es el objeto pullback:

$$\begin{tikzcd}
G_1 \underset{G_o}{\times} E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "d"] \\
G_1 \arrow[r, "d_1"] & G_o
\end{tikzcd}$$

verificando: (A1) El cuadrado

$$\begin{tikzcd}
G_1 \underset{G_o}{\times} E \arrow[r, "\Psi"'] \arrow[d, "pr_o"'] & E \arrow[d, "d"] \\
G_1 \arrow[r, "d_o"] & G_o,
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, i.e. $d({}^g e) = d_0(g)$
$$\begin{tikzcd} {}^g e \arrow[loop left, dashed] \arrow[r, bend left, "g"] & e \arrow[loop right] \end{tikzcd}.$$

(A2) Para todo $(g',g) \in G_1 \times_{G_0} G_1$ y $(e,e') \in E \times_{G_0} G_1$ tales que $d(e)=d(e')=d_1(g)$ se verifica:

i) ${}^g(s_0 d_1(g)) = s_0 d_0(g)$

ii) ${}^{s_0 d(e)}e = e$

iii) ${}^{(g'g)}e = {}^{g'}({}^g e)$

iv) ${}^g(e e') = {}^g e \, {}^g e'$

.1.2) <u>Definición</u> (Acción de un grupoide sobre otro grupoide) .

Un grupoide $G_\bullet$ actua sobre otro grupoide $H_\bullet$ si actua sobre su grupo de endomorfismos ($End(H_\bullet)$) .

Notemos que si $G_\bullet$ actua sobre $H_\bullet$ entonces $G_0=H_0$. Esta condición restrictiva podría quitarse, generalizando de forma apropiada la definición (2.1.1). Sin embargo todas las acciones que utilizaremos en este trabajo verificaran esta condición por lo que no hemos considerado de interés dar una definición más general de acción en estos momentos.

Notemos también que todo grupoide actua " por conjugación" sobre todo subgrupoide normal suyo y en particular sobre él mismo . Por otra parte, si A y B son objetos grupos en $\mathbb{C}$, dar una acción de grupos de A sobre B es equivalente a dar una acción de $K(A,1)$ sobre $K(B,1)$.

<u>Los grupoides de automorfismos y automorfismos interiores.</u>

Cuando hablemos del grupoide de automorfismos supondremos $\mathbb{C}$ cartesiana cerrada y cuando hablemos del grupoide de automorfismos interiores supondremos $\mathbb{C}$ en las condiciones dadas en (0.1.13).

Sea $E_\bullet = \begin{tikzcd} E \arrow[r, "d"'] & G_0 \arrow[l, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$ un objeto grupo en $\mathbb{C}/G_0$, recordemos que la categoría $\mathrm{Full}(E_\bullet)_\bullet$ (ver (0.1.12)) está dada por :

$$\mathrm{Full}(E_\bullet)_\bullet = \mathrm{Full}(E_\bullet) = \begin{tikzcd} pr_0^*(E)^{pr_1^*(E)} \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & G_0 \arrow[l, bend right, "s_0"'] \end{tikzcd}$$

donde $pr_0, pr_1 : G_0 \times G_0 \longrightarrow G_0$ son las proyecciones canónicas. Recordemos además que dar una flecha de $\mathrm{Full}(E_\bullet)_\bullet$ $f: T \longrightarrow \mathrm{Full}(E_\bullet)$ con $d_0 f = x$, $d_1 f = y$ es equivalente a dar un morfismo $\bar{f}: T \times_y E \longrightarrow T \times_x E$ haciendo conmutativo el triangulo rallado del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Full}(E) \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
 & T \arrow[urr, dashed, "f"] \arrow[rr, shift left, "x"] \arrow[rr, shift right, "y"'] & & G_0 \arrow[u, bend right, "s_0"'] \\
T \times_x E \arrow[ur] \arrow[rr] & & E \arrow[ur, "d"'] & \\
 & T \times_y E \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[ul, dashed, "\bar{f}"] & &
\end{tikzcd}$$

Ahora, la estructura de grupo de $E_\bullet$ induce estructuras de grupos en $\mathbb{C}/T$ en los objetos pullback

$$\begin{tikzcd}
T \underset{x}{\times} E \arrow[r] \arrow[d, shift right] & E \arrow[d, shift right, "d"'] \\
T \arrow[u, dashed, shift right] \arrow[r, "x"] & G_o \arrow[u, bend right, "s"']
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
T \underset{y}{\times} E \arrow[r] \arrow[d, no head, shift right] & E \arrow[d, shift right, "d"'] \\
T \arrow[u, dashed, shift right] \arrow[r, "y"] & G_o \arrow[u, bend right, "s"']
\end{tikzcd}$$

.1.3) Denotemos por $Full_{gr}(E_\bullet)_\bullet$ a la subcategoría (densa) de ***Full*** $(E_\bullet)_\bullet$ que tiene por objetos todos los de $Full(E_\bullet)_\bullet$ ($Full_{gr}(E_\bullet)_o = G_o$) y por flechas $f : T \longrightarrow Full_{gr}(E_\bullet)_1$ con $d_of = x$, $d_1f = y$ aquellas flechas de $Full(E_\bullet)_\bullet$ que vienen inducidas por morfismos de grupos en $\mathbb{C}/T$:

$$\begin{tikzcd}
T \underset{y}{\times} E \arrow[rr] \arrow[dr] & & T \underset{x}{\times} E \arrow[dl] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Categoricamente el objeto $Full_{gr}(E_\bullet)_1$ viene definido como sigue: Consideremos los objetos pullback ;

$$\begin{tikzcd}
E \underset{G_o}{\times} E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "d"] \\
E \arrow[r, "d"] & G_o
\end{tikzcd}
\quad , \quad
\begin{tikzcd}
pr_o^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "d"] \\
G_o \times G_o \arrow[r, "pr_o"] & G_o
\end{tikzcd}
\quad y \quad
\begin{tikzcd}
pr_1^*(E \underset{G_o}{\times} E) \arrow[r] \arrow[d] & E \underset{G_o}{\times} E \arrow[d] \\
G_o \times G_o \arrow[r, "pr_1"] & G_o
\end{tikzcd}$$

y denotemos por D_o, D_1 a los morfismos composición $pr_o^*(E)^{pr_1^*(E \underset{G_o}{\times} E)} \longrightarrow G_o \times G_o \overset{pr_o}{\underset{pr_1}{\rightrightarrows}} G_o$ respectivamente. La adjunción $- \times pr_1^*(E \underset{G_o}{\times} E) \dashv (\ )^{pr_1^*(E \underset{G_o}{\times} E)}$ de endofuntores en en $\mathbb{C}/G_o \times G_o$, nos da una biyección entre morfismos $f : T \longrightarrow pr_o^*(E)^{pr_1^*(E \underset{G_o}{\times} E)}$ con $D_of = x$, $D_1f = y$ y morfismos $\bar{f} : T \underset{y}{\times} (E \underset{G_o}{\times} E) \longrightarrow T \underset{X}{\times} E$ que hacen conmutar el triangulo rallado del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& & & pr_o^*(E)^{pr_1^*(E \underset{G_o}{\times} E)} \arrow[d, shift right, "D_1"'] \arrow[d, shift left, "D_o"] \\
& T \arrow[urr, dashed, "f"] \arrow[rr, shift left, "x"] \arrow[rr, shift right, "y"'] & & G_o \\
T \underset{x}{\times} E \arrow[ur] \arrow[rr] & & E \arrow[ur] & \\
& T \underset{y}{\times} (E \underset{G_o}{\times} E) \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[ul, dashed, "\bar{f}"] & &
\end{tikzcd}$$

Definimos $\xi, \zeta : pr_o^*(E)^{pr_1^*(E)} \longrightarrow pr_o^*(E)^{pr_1^*(E \underset{G_o}{\times} E)}$ como sigue ;

Sea $f: T \longrightarrow pr_o^*(E)^{pr_1^*(E)}$ con $d_of = x$, $d_1f = y$ y $\bar{f} : T \underset{y}{\times} E \longrightarrow T \underset{x}{\times} E$ el correspondiente morfismo inducido por f , entonces

$$\xi(f) , \zeta(f) : T \longrightarrow pr_o^*(E)^{pr_1^*(E \underset{G_o}{\times} E)}$$

están inducidos por las composiciones $T \underset{y}{\times} (E \underset{G_o}{\times} E) \xrightarrow{idxm} T \underset{y}{\times} E \xrightarrow{f} T \underset{x}{\times} E$

y $\quad T \underset{y}{\times} (E \underset{G_0}{\times} E) \xrightarrow{\bar{f} \times \bar{f}} T \underset{x}{\times} (E \underset{G_0}{\times} E) \xrightarrow{id \times m} T \underset{x}{\times} E$ respectivamente, donde el morfismo "m" es el morfismo multiplicación del objeto grupo $E_\bullet$. Entonces:

$$\mathrm{Full}_{gr}(E_\bullet)_1 = \mathrm{Equ}(\xi, \zeta) \longrightarrow \mathrm{Full}(E_\bullet)$$

Claramente el morfismo $s_0 : G_0 \longrightarrow \mathrm{Full}(E_\bullet)$ factoriza por $\mathrm{Full}_{gr}(E_\bullet)_1$ y por restricción, el morfismo multiplicación de la categoría interna $\mathrm{Full}(E_\bullet)$ induce un morfismo multiplicación en $\mathrm{Full}_{gr}(E_\bullet)$.

.1.4) Definición (El grupoide de automorfismos).

En las condiciones anteriores, se define el grupoide de automorfismos del objeto grupo $E_\bullet = E \overset{\curvearrowleft}{\longrightarrow} G_0$ en $\mathbb{C}/G_0$ como el grupoide de isomorfismos de la categoria interna en $\mathbb{C}$ $\mathrm{Full}_{gr}(E_\bullet)$ (ver (1.1.13)) . Denotaremos a este grupoide por $AUT(E_\bullet) = AUT(E_\bullet)_1 \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} G_0$

Notemos que dar una flecha $f : T \longrightarrow AUT(E_\bullet)_1$ del grupoide $AUT(E_\bullet)$ con $d_0 f = x$, $d_1 f = y$ es equivalente a dar un isomorfismo de grupos en $\mathbb{C}/T$:

$$\begin{tikzcd} T \underset{y}{\times} E \arrow[rr, "\bar{f}"] \arrow[dr] & & T \underset{x}{\times} E \arrow[dl] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Si $G_0 = \mathbb{1}$, el objeto terminal en $\mathbb{C}$, entonces $AUT(E_\bullet) = K(Aut(E), 1)$.

Sea $G_\bullet$ un grupoide en $\mathbb{C}$ definimos el grupoide de automorfismos de $G_\bullet$ como el grupoide de automorfismos del objeto grupo $End(G_\bullet)$ i.e. $AUT(G_\bullet) = AUT(End(G_\bullet))$.

.1.5) Proposición (Definición alternativa de acción de un grupoide sobre otro).

Dar una acción de un grupoide $G_\bullet$ en otro $H_\bullet$ es equivalente a dar un morfismo de grupoides $\Psi_\bullet : G_\bullet \longrightarrow AUT(H_\bullet)$ con $\Psi_0 = id$.

Demostración.- Denotemos por d_i, s_0, d'_i y s'_0 los operadores cara y degeneración de $G_\bullet$ y $H_\bullet$ respectivamente y $End(H_\bullet) = E \overset{s'}{\underset{d'}{\rightleftarrows}} G_0$ al grupo de endomorfismos del grupoide $H_\bullet$ (hemos supuesto que $G_0 = H_0$).

Sea $\Psi : G_\bullet \longrightarrow AUT(H_\bullet)$ un morfismo de grupoides con $\Psi_0 = id_{G_0}$, el morfismo Ψ_1 induce (por la adjunción $- \times pr_1^*(E) \dashv (\ )^{pr_1^*(E)}$) un morfismo $\bar{\Psi}_1 : G_1 \underset{d_1}{\times} E \longrightarrow G_1 \underset{d_0}{\times} E$ haciendo conmutar el triangulo rallado del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & & & AUT(H_\bullet)_1 \arrow[d, shift right, "\bar{d}_0"'] \arrow[d, shift left, "\bar{d}_1"] \\ & G_1 \arrow[urr, "\Psi_1"] \arrow[rr, shift left, "d_0"] \arrow[rr, shift right, "d_1"'] & & G_0 \\ G_1 \underset{d_0}{\times} E \arrow[ur] \arrow[rr] & & E \arrow[ur, "d'"'] & \\ & G_1 \underset{d_1}{\times} E \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[ul, dashed, "\bar{\Psi}_1"] & & \end{tikzcd}$$

Sea $\varphi : G_1 \underset{d_1}{\times} E \longrightarrow E$ el morfismo composición $G_1 \underset{d_1}{\times} E \xrightarrow{\bar{\Psi}_1} G_1 \underset{d_0}{\times} E \xrightarrow{pr} E$

Se verifica entonces :

(A1) el cuadrado
$$\begin{tikzcd} G_1 \underset{d_1}{\times} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "pr"'] & E \arrow[d, "d'"] \\ G_1 \arrow[r, "d_o"] & G_o \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(A2) Denotemos ${}^{g}e = \varphi(g,e)$ para cada elemento $(g,e) \in G_1 \underset{d_1}{\times} E$. Entonces , por ser $\overline{\Psi}_1$ morfismo de grupos en $\mathbb{C}/G_1$ se tiene ;

$$\overline{\Psi}_1(g, s'd_1(g)) = (g, s'd_o(g))$$
$$\overline{\Psi}_1(g, ee') = \overline{\Psi}_1(g,e)\overline{\Psi}_1(g,e')$$

asi se verifica;

i) ${}^{g}(s'd_1(g)) = s'd_o(g)$

iv) ${}^{g}(ee') = {}^{g}e \; {}^{g}e'$

Por otra parte, la naturalidad de la adjunción $- \times pr_1^*(E) \dashv (\ )^{pr_1^*(E)}$ implica que el cuadrado rallado en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & & AUT(H_\bullet) \arrow[dl, "\Psi_1"'] \arrow[dr, shift left, "\bar{d}_0"] \arrow[dr, shift right, "\bar{d}_1"'] & \\
 & E \arrow[rr, "s_o d'"] \arrow[urrr, bend left, "\bar{s}_o d'"] & & G_1 \arrow[rr, shift left, "d_o"] \arrow[rr, shift right, "d_1"'] & & G_o \arrow[ll, bend right, "s_o"'] \arrow[ul, bend right, "\bar{s}_o"'] \\
E \underset{G_o}{\times} E \arrow[ur] \arrow[rr, "s_o d' x id"] & & G_1 \underset{d_o}{\times} E \arrow[ur] \arrow[rr] & & E \arrow[ur, "d'"'] & \\
 & E \underset{G_o}{\times} E \arrow[ul, "id"] \arrow[rr, "s_o d' x id"'] & & G_1 \underset{d_1}{\times} E \arrow[ul, "\overline{\Psi}_1"'] \arrow[uu] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, así $\overline{\Psi}_1(s_o d'(e), e) = (s_o d'(e), e)$ y por tanto se verifica;

iii) ${}^{(s_o d'(e))}e = e$.

Además puesto que $\Psi_\bullet$ es un morfismo de grupoides se tiene que para todo $g,g':T \longrightarrow G_1$ tales que $d_1(g) = d_o(g')$ se tiene que $\Psi_1(gg') = \Psi_1(g)\Psi_1(g')$. Los morfismos $\Psi_1(gg'), \Psi_1(g), \Psi_1(g') : T \longrightarrow AUT(H_\bullet)_1$ inducen (utilizando la adjunción $- \times pr_1^*(E) \dashv (\ )^{pr_1^*(E)}$) morfismos; $\overline{\Psi_1(gg')}$, $\overline{\Psi_1(g)}$ y $\overline{\Psi_1(g')}$ haciendo conmutar el triangulo

$$\begin{tikzcd}
T \underset{d(g')}{\times} E \arrow[r, "\overline{\Psi_1(g')}"] \arrow[dr, "\overline{\Psi_1(gg')}"'] & T \underset{d_o(g')=d_1(g)}{\times} E \arrow[d, "\overline{\Psi_1(g)}"] \\
 & T \underset{d_o(g)}{\times} E
\end{tikzcd}$$

Así se verifica: iii) ${}^{(gg')}e = {}^{g}({}^{g'}e)$.

Por tanto el morfismo $\varphi : G_1 \underset{d_1}{\times} E \longrightarrow E$ nos define una acción de $G_\bullet$ sbre $H_\bullet$

Reciprocamente; sea $\varphi : G_1 {}_{d_1}\!\times E \longrightarrow E$ ($\varphi(g,e) = {}^{g}e$) una acción de $G_\bullet$ sobre $H_\bullet$, definimos $\bar{\Psi}_1 : G_1 {}_{d_1}\!\times E \longrightarrow G_1 {}_{d_0}\!\times E$ por $\bar{\Psi}_1(g,e) = (g, {}^{g}e)$; por (A1) i) $(g, {}^{g}e)$ es un elemento en $G_1 {}_{d_0}\!\times E$. Los axiomas (A2) i, iv) implican que $\bar{\Psi}_1$ es un isomorfismo de grupos y por tanto $\bar{\Psi}_1$ induce un morfismo en $\mathbb{C}$, $\Psi_1 : G_1 \longrightarrow AUT(H_\bullet)$, tal que $\bar{d}_0 \Psi_1 = d_1$ y $\bar{d}_1 \Psi_1 = d_1$. El axioma (A2) ii) implica que $\Psi_1 s_0 = \bar{s}_0$ y el (A2) iii) implica que el morfismo simplicial truncado (Ψ_1, id) define un morfismo de grupoides $\Psi_\bullet : G_\bullet \longrightarrow AUT(H_\bullet)$.//

.1.6) Nota.- La acción de un grupoide $G_\bullet$ sobre si mismo por conjugación define, por la proposición (2.1.5) anterior, un morfismo de grupoides

$$\rho_\bullet : G_\bullet \longrightarrow AUT(G_\bullet)$$

Por otra parte el morfismo de grupoides $id : AUT(G_\bullet) \longrightarrow AUT(G_\bullet)$ define una acción del grupoide de automorfismos de $G_\bullet$, $AUT(G_\bullet)$, sobre $G_\bullet$ verificandose:

Si denotamos, para cada flecha $f \in AUT(G\ )_1$ y cada endomorfismo $e \in End(G_\bullet)$ con $d(e) = d_1(f)$, $f(e)$ al endomorfismo ${}^{f}e$ y por $\rho_g \in AUT(G_\bullet)_1$ al elemento imagen mediante ρ_1 de $g \in G_1$, entonces la conmutativvidad del cuadrado rallado en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & AUT(G_\bullet)_1 \arrow[dl, equal, "id"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
G_1 \arrow[r, "\rho_1"] & AUT(G\ )_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & G_0 \\
G_1 {}_{d_1}\!\times End(G_\bullet) \arrow[u] \arrow[r] & AUT(G_\bullet) {}_{d_1}\!\times End(G_\bullet) \arrow[u] \arrow[r] & End(G_\bullet) \arrow[u] \\
G_1 {}_{d_0}\!\times End(G_\bullet) \arrow[u, "\bar{\rho}_1"] \arrow[r] & AUT(G_\bullet) {}_{d_0}\!\times End(G_\bullet) \arrow[u, "\bar{id}"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

implica que $\underline{{}^{\rho_1(g)}e = g\, e\, g^{-1}}$ (axioma II de módulo cruzado) y ${}^{\rho_1(f(e))}e' = f(e)\, e'\, f(e)^{-1} = f(e\, f^{-1}(e')\, e^{-1}) = (f\ (e)\, f^{-1})(e')$ (axioma I de módulo cruzado)

.1.7) Lema .-

Para cada grupoide $G_\bullet$, el grupoide núcleo del morfismo canónico $\rho_\bullet : G_\bullet \longrightarrow AUT(G_\bullet)$ es el centro del grupoide $G_\bullet$.

Demostración.- Por la nota (2.1.6) anterior tenemos que para cualquier flecha $g \in G_1$ ρ_g actua sobre cualqier endomorfismo de $G_\bullet$ por conjugación, asi si ρ_g es una identidad en $AUT(G_\bullet)$ ha de verificarse que para todo endomorfismo $e \in G_1$ con $d(e) = d_1(g)$ $\rho_g(e) = e \Longleftrightarrow g\, e\, g^{-1} = e \Longleftrightarrow g$ es un elemento del centro de $G_\bullet$. El recíproco es inmediato.

.1.8) Definición (El grupoide de automorfismos interiores) .

Dado un grupoide $G_\bullet$, se define el grupoide de automorfismos interiores de $G_\bullet$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{INT}(G_{\bullet}) = \mathrm{INT}(G_{\bullet})_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] & G_0 \arrow[l, bend right=30] \end{tikzcd}$$

como el grupoide cociente de $G_{\bullet}$ por el subgrupoide normal suyo $Z(G_{\bullet}) \hookrightarrow G_{\bullet}$ (centro de $G_{\bullet}$) . Si $\mathbb{C}$ es cartesiana cerrada el grupoide $\mathrm{INT}(G_{\bullet})$ será el grupoide imágen del morfismo canónico $\rho_{\bullet}: G_{\bullet} \longrightarrow \mathrm{AUT}(G_{\bullet})_{\bullet}$, inducido por la acción de $G_{\bullet}$ sobre si mismo por conjugación:

$$\begin{tikzcd} Z(G_{\bullet}) \arrow[r, hook] & G_{\bullet} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & \mathrm{AUT}(G_{\bullet})_{\bullet} . \\ & & \mathrm{INT}(G_{\bullet}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Ejemplos.-

.1.9) Si A es un objeto grupo de $\mathbb{C}$ entonces $\mathrm{AUT}(K(A,1)) = K(\mathrm{Aut}(A),1)$ e $\mathrm{INT}(K(A,1)) = K(\mathrm{Int}(A),1)$.

.1.10) Si $G_{\bullet}$ es un grupoide abeliano, entonces la acción de $G_{\bullet}$ sobre si mismo por conjugación es trivial y por tanto $Z(G_{\bullet}) = \mathrm{End}(G_{\bullet})$,así $\mathrm{INT}(G_{\bullet}) = \mathrm{COSK}^0(G_{\bullet})$, considerando a $G_{\bullet}$ aumentado por $\pi_0(G_{\bullet})$.

.1.11) Nota.- Denotaremos tambien por $\rho_{\bullet}: G_{\bullet} \longrightarrow \mathrm{INT}(G_{\bullet})$ al morfismo proyección y por $\rho_g \in \mathrm{INT}(G_{\bullet})_1$ al elemento imagen de la flecha $g \in G_1$. Para dos flechas $g, g' \in G_1$ se tendrá $\rho_g = \rho_{g'}$ si existe un endomorfismo z en el centro de $G_{\bullet}$ verificando que $g' = zg$. Podemos entonces definir una acción de $\mathrm{INT}(G_{\bullet})$ sobre $G_{\bullet}$ dada por ${}^{\rho_g}e = {}^{g}e = g\,e\,g^{-1}$ (en el caso de existir AUT(G) esta acción viene inducida por la "inclusión" $\mathrm{INT}(G_{\bullet}) \longrightarrow \mathrm{AUT}(G_{\bullet})_{\bullet}$) verificandose trivialmente: (I) ${}^{\rho_g}e = g\,e\,g^{-1}$

(II) $\rho({}^{g}e) = \rho_g \cdot \rho_e \cdot \rho_g^{-1}$.

(2.2) GRUPOIDES CRUZADOS Y GRUPOIDES CRUZADOS GENERALIZADOS.-

.2.1) Definición (Grupoide cruzado)

Un grupoide cruzado o módulo cruzado en $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$ es una terna $(E_{\bullet}, G_{\bullet}, \rho_{\bullet})$ donde: $G_{\bullet}$ es un grupoide en $\mathbb{C}$, $E_{\bullet} = E \underset{d}{\overset{s}{\rightleftarrows}} G_0$ es un objeto grupo en $\mathbb{C}/G_0$, el grupoide $G_{\bullet}$ actua sobre $E_{\bullet}$ y $\rho_{\bullet}: E_{\bullet} \longrightarrow G_{\bullet}$ es un morfismo de grupoides con $\rho_0 = \mathrm{id}_{G_0}$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\rho_1 = \rho"] \arrow[dr, "d"] & G_1 \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\ & G_0 \arrow[ul, bend left=40, "s"] \arrow[u, bend right=40, "s_0"'] \end{tikzcd}$$

verificando los siguientes axiomas:

(XG I) $\rho({}^{g}e) = g\,\rho(e)\,g^{-1}$

(XG II) ${}^{\rho(e)}e' = e\,e'\,e^{-1}$

Para todo $g \in G_1$ y $e, e' \in E$ tales que $d_1(g) = d(e) = d(e')$ .. (hemos denotado ${}^{g}e$ al elemento de E obtenido haciendo actuar $g \in G_1$ sobre $e \in E$, además hemos considerado al objeto grupo $E_{\bullet}$ en $\mathbb{C}/G_0$ como un grupoide en $\mathbb{C}$).

A un grupoide cruzado $(E_\bullet, G_\bullet, \rho_\bullet)$ lo denotaremos tambien por el morfismo de grupoides $\rho_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$, suponiendo implicitamente dadas las demás condiciones de grupoide cruzado.

Ejemplos:

.2.2) Si $G_\bullet$ es un grupoide y $E_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ es un subgrupoide normal de $G_\bullet$ contenido en el grupo de endomorfismos de $G_\bullet$, considerando la acción de $G_\bullet$ sobre $E_\bullet$ por conjugación se tiene que la inclusión $E_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ es un grupoide cruzado.

.2.3) Sea $E_\bullet$ un objeto grupo en la coma categoría $\mathbb{C}/X$, para X un objeto cualquiera de $\mathbb{C}$, entonces los morfismos canónicos $\rho_\bullet : E_\bullet \longrightarrow INT(E_\bullet)$ y $\rho_\bullet : E \longrightarrow AUT(E_\bullet)$. (suponiendo que $\mathbb{C}$ está en las condiciones apropiadas para que existan $INT(E_\bullet)$ y $AUT(E_\bullet)$ respectivamente) con las acciones "canónicas de $INT(E_\bullet)$ y $AUT(E_\bullet)$ sobre $E_\bullet$ serán grupoides cruzados. Los llamaremos grupoide cruzado de los automorfismos interiores de $E_\bullet$ y grupoide cruzado de los automorfismos de $E_\bullet$ respectivamente.

.2.4) Si $\rho : H \longrightarrow G$ es un módulo cruzado en la categoría $Gp(\mathbb{C})$ entonces el morfismo de grupoides inducido $\rho_\bullet : K(H,1) \longrightarrow K(G,1)$ junto con la acción de $K(G,1)$ sobre $K(H,1)$ será un grupoide cruzado . En particular si A es un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$ el morfismo $A \longrightarrow \mathbb{1}$ induce un grupoide cruzado (trivial) $K(A,1) \longrightarrow K(\mathbb{1},0)$.

.2.5) *El concepto de grupoide cruzado en $\mathbb{C}$ generaliza el de " complejo cruzado de dimensión dos "* en la categoría de conjuntos (ver [10]). Recordemos que un complejo cruzado $\mathcal{C}_\bullet$ en conjuntos es una sucesión $\;\ldots\; C_n \xrightarrow{d} C_{n-1} \;\ldots\; C_2 \xrightarrow{d} C_1 \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} C_0$ satisfaciendo los siguientes axiomas:

- $C_1 \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} C_0$ es un grupoide
- para $n \geqslant 2$ C_n es una familia de grupos $\{C_n(x) \; , \; x \in C_0\}$ siendo los grupos $C_n(p)$ abelianos para $n \geqslant 3$,
- el grupoide $C_1 \rightrightarrows C_0$ actua sobre cada C_n $(n \geqslant 2)$ por una acción denotada $(a,x) \longmapsto {}^a x$ para $a \in C_1$, $x \in C_n(d_1(a))$ y ${}^a x \in C_n(d_0(a))$,
- la aplicación $d : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ $(n > 2)$ es un morfismo de grupos sobre C_0 que preserva la acción de C_1 , donde C_1 actua sobre los grupos $C_1(x) = \{ a \in C_1 / d_0(a) = d_1(a) = x \}$ por conjugación,
- $d\,d = 0 : C_n \longrightarrow C_{n-2}$, $n > 3$ y $d_0 d = d_1 d : C_2 \longrightarrow C_1$,
- si $c \in C_2$, $d(c)$ actua trivialmente sobre C_n para $n \geqslant 3$ y actua por conjugación sobre C_2 , i.e. ${}^{d(c)}x = c\,x\,c^{-1}$.

Un complejo cruzado se dice de dimensión dos si $C_n = 0$ para $n > 2$.

Notemos que estos complejos cruzados fueron utilizados para dar una interpretación de de los grupos de cohomología de un grupo G con coeficientes en un G-módulo A, ver [8] .

Un morfismo de grupoides cruzados es un diagrama conmutativo en Simpl($\mathbb{C}$)

$$\begin{tikzcd}
(E_\bullet,G_\bullet,\rho_\bullet): \arrow[d, "\Gamma"'] & E_\bullet \arrow[r, "\rho_\bullet"] \arrow[d, "\theta_\bullet"] & G_\bullet \arrow[d, "\gamma_\bullet"] \\
(E'_\bullet,G'_\bullet,\rho'_\bullet): & E'_\bullet \arrow[r, "\rho'_\bullet"] & G'_\bullet
\end{tikzcd} \quad ; \quad
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[rr] \arrow[dl, "\theta_1"'] \arrow[dr] & & G_1 \arrow[dl, "\gamma_1"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
E' \arrow[rr] \arrow[ddrr, "d'"'] & & G'_1 \arrow[dr, "d"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
 & & & G_0 \arrow[dl, "\gamma_0=\theta_0"] \\
 & & G'_0 &
\end{tikzcd}$$

con $\gamma_0 = \theta_0$ y donde $\theta_\bullet$ conserva la acción de $G_\bullet$ sobre $E'_\bullet$ inducida por $\gamma_\bullet$, esto es:

$$\theta_1({}^{g}e) = {}^{\gamma_1(g)}\theta_1(e)$$

para todo $g \in G_1$ y $e \in E$ tales que $d_1(g) = d(e)$. Denotaremos por XGPD($\mathbb{C}$) a la categoría de grupoides cruzados en $\mathbb{C}$ y morfismos de grupoides cruzados.

.2.6) Definición (Grupoide cruzado generalizado).

Un grupoide cruzado generalizado (en $\mathbb{C}$) es una terna $(H_\bullet,G_\bullet,\rho_\bullet)$ donde : $G_\bullet$ y $H_\bullet$ son grupoides, $G_\bullet$ actua sobre $H_\bullet$ y $\rho_\bullet : H_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ es un morfismo de grupoides con $\rho_0 = id_{G_0}$;

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[r, "\rho_1=\rho"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
G_0 \arrow[r, equal] & G_0
\end{tikzcd}$$

verificando los siguientes axiomas:

(GXG I) $\rho({}^{g}e) = g\ \rho(e)\ g^{-1}$.

(GXG II) ${}^{\rho(h)}e = h\,e\,h^{-1}$.

Para todo $e \in End(H)$, $h \in H_1$ y $g \in G_1$ tales que $d(e)= d_1(h)$ y $d(e) = d_1(g)$.

Notemos que si $(H_\bullet,G_\bullet,\rho_\bullet)$ es un grupoide cruzado generalizado, entonces $(End(H_\bullet),G_\bullet, \rho_\bullet/End(H_\bullet))$ es un grupoide cruzado, llamado grupoide cruzado asociado a $(H_\bullet,G_\bullet,\rho_\bullet)$.

Ejemplos:

.2.7) Todo grupoide cruzado es un grupoide cruzado generalizado.

.2.8) Si $i_\bullet : H_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ es un subgrupoide normal de $G_\bullet$, entonces $(H_\bullet,G_\bullet,i_\bullet)$ es un grupoide cruzado generalizado. Con la acción de $G_\bullet$ sobre $H_\bullet$ dada por conjugación.

.2.9) Sea $G_\bullet$ un grupoide entonces los morfismos canónicos $G_\bullet \xrightarrow{\rho_\bullet} INT(G_\bullet)$ y $G_\bullet \xrightarrow{\rho_\bullet} AUT(G_\bullet)$ (suponiendo que $\mathbb{C}$ está en las condiciones apropiadas para que existan $INT(G_\bullet)$ y $AUT(G_\bullet)$ respectivamente) con las acciones "canónicas de $INT(G_\bullet)$ y $AUT(G_\bullet)$ sobre $G_\bullet$ nos darán grupoides cruzados generalizados, a los que llamaremos grupoides cruzados generalizados de los automorfismos interiores y de los automorfismos de $G_\bullet$ respectivamente.

Denotaremos a un grupoide cruzado generalizado ($H_\bullet, G_\bullet, \rho_\bullet$) tambien por el morfismo $\rho_\bullet : H_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ suponiendo implicitamente dados los demás datos .

Un morfismo de grupoides gruzados generalizados será un diagrama conmutativo en Simpl($\mathbb{C}$) :

$$\begin{tikzcd}
(H_\bullet, G_\bullet, \rho_\bullet): \arrow[d, "\Gamma"'] & H_\bullet \arrow[r, "\rho_\bullet"] \arrow[d, "\theta_\bullet"'] & G_\bullet ; \arrow[d, "\gamma_\bullet"] \\
(H'_\bullet, G'_\bullet, \rho'_\bullet): & H'_\bullet \arrow[r, "\rho'_\bullet"] & G'_\bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& H_1 \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dl, "\theta_1"'] \arrow[ddrr, shift left] \arrow[ddrr, shift right] & & G_1 \arrow[dl, "\gamma_1"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
H'_1 \arrow[rr, "\rho'"] \arrow[ddrr, shift left] \arrow[ddrr, shift right] & & G'_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& & & G_0 \arrow[dl, "\theta_0 = \gamma_0"] \\
& & G'_0 &
\end{tikzcd}$$

tal que $\Gamma/(\mathrm{End}((H_\bullet), G_\bullet, \rho_\bullet/\mathrm{End}(H_\bullet)) : (\mathrm{End}(H_\bullet), G_\bullet, \rho_\bullet/\mathrm{End}(H_\bullet)) \longrightarrow (\mathrm{End}(H'_\bullet), G'_\bullet, \rho_\bullet/\mathrm{End}(H'))$ es un morfismo de grupoides cruzados . Denotaremos por GXGPD($\mathbb{C}$) a la categoría de los grupoides cruzados generalizados y morfismos de grupoides cruzados generalizados.

Es bien conocido, que si (H, G, ρ) es un módulo cruzado en Gp entonces el grupo Ker(ρ) es un grupo abeliano contenido en el centro del grupo H , verificandose además que la acción de G sobre H deja invariante al Ker(ρ) . El siguiente lema generaliza este resultado .

.2.10) Lema .-

Sea ($H_\bullet, G_\bullet, \rho_\bullet$) un grupoide cruzado generalizado. Entonces el grupoide Ker($\rho_\bullet$) es un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}/G_0$ cuyas flechas serán centrales en $H_\bullet$ (si existe el centro de $H_\bullet$, Ker($\rho_\bullet$) será un subgrupo de $Z(H_\bullet)$). Además la acción de $G_\bullet$ sobre $H_\bullet$ dejará invariante a Ker($\rho_\bullet$) .

Demostración.- Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(\rho_\bullet)_1 \arrow[r, hook] \arrow[dr, shift left] & H_1 \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
& G_0 \arrow[ul, shift left] \arrow[u, shift right=3] \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[u, shift right=3]
\end{tikzcd}$$

una flecha $a \in H_1$ estará en Ker($\rho_\bullet$)$_1$ sii $\rho(a) = s_0 d_0(a)$ entonces $d_i(a) = d_i \rho(a) = d_i s_0 d_0(a) = = d_0(a)$, $i=0,1 \Longrightarrow d_1(a) = d_0(a) \Longrightarrow \mathrm{Ker}(\rho_\bullet) \hookrightarrow \mathrm{End}(H_\bullet)$. Por otra parte para cada $a \in \mathrm{Ker}(\rho_\bullet)_1$ y cada $h \in \mathrm{End}(H_\bullet)$ con $d(h) = d(a)$ se tiene que ${}^{\rho(a)}h = a\,h\,a^{-1}$ pero $\rho(a) = s_0 d_0(a) \Longrightarrow {}^{\rho(a)}h = {}^{s_0 d_0(a)}h = h$ así $h = a\,h\,a^{-1} \Longrightarrow$ a es central en $H_\bullet$.

Por último, para cada $a \in \mathrm{Ker}(\rho_\bullet)_1$ y cada $g \in G_1$ con $d(a) = d_1(g)$ tenemos que $\rho({}^g a) = g\rho(a)\,g^{-1} = g\,s_0 d(a)\,g^{-1} = s_0 d_0(g) \Longrightarrow {}^g a \in \mathrm{Ker}(\rho_\bullet)_1$, así Ker($\rho_\bullet$) queda invariante por la acción de $G_\bullet$ sobre $H_\bullet$ .//

Supongamos $G_\bullet$ un grupoide en la categoría Gp de grupos y consideremos el grupo Ker(d_0) que será un subgrupo normal de G_1 :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(d_0) \arrow[r, hook] & G_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & G_0 \arrow[l, bend right=40, "s_0"'] .
\end{tikzcd}$$

Para cada elemento $x \in G_0$ y cada $g \in \mathrm{Ker}(d_0)$ se verifica que $s_0(x) \cdot g \cdot s_0(x)^{-1} \in \mathrm{Ker}(d_0)$

donde "." denota multiplicación del grupo G_1, asi G_o actua por conjugación via $s_o:G_o \longrightarrow G_1$ sobre el grupo $Ker(d_o)$ verificandose que $\rho = d_1/Ker(d_o):Ker(d_o) \longrightarrow G_1$ es un módulo cruzado en Gp. Definimos mediante este procedimiento un funtor

$$F : GPD(Gp) \longrightarrow MC(Gp)$$

que asocia a cada grupoide $G_\bullet$ el módulo cruzado $(Ker(d_o), G_o, d_1/Ker(d_o))$. Reciprocamente, dado un módulo cruzado en Gp ,(H,G,ρ), sea $H \rtimes G$ el grupo producto semidirecto de H y G (recordemos que $H \rtimes G$ es el conjunto producto cartesiano HxG con la estructura de grupo dada por $(h,g).(h',g') = (h.{}^{g}h', g.g')$), definimos morfismos de grupos $d_o, d_1 : H \rtimes G \longrightarrow G$ por $d_o(h,g) = g$ y $d_1(h,g) = \rho(h).g$. Entonces el complejo simplicial truncado

$$\begin{tikzcd} H \rtimes G \arrow[r, shift left, "d_o"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & G \arrow[l, bend right, "s_o"'] \end{tikzcd}$$

con $s_o(g) = (1,g)$, junto con el morfismo de grupos $m:(H \rtimes G) \underset{G}{\times} (H \rtimes G) \longrightarrow H \rtimes G$ definido por $m((h,g),(h',\rho(h).g)) = (h'.h^{-1}, g)$ define un grupoide $G_\bullet$ en Gp. Obteniendose de este modo un funtor

$$F': MC(Gp) \longrightarrow GPD(Gp)$$

de forma que los funtores F y F' establecen una equivalencia entre las categorías de grupoides en Gp y módulos cruzados en Gp (ver [1]).

El objetivo de los dos apartados siguientes será extender este resultado de la categoría de grupos a la categoría de grupoides en $\mathbb{C}$.

Productos semidirectos en la categoría GPD($\mathbb{C}$).

.2.11) Definición (Producto semidirecto de un objeto grupo y un grupoide)

Sea $G_\bullet$ un grupoide y $E_\bullet = E \overset{s}{\underset{d}{\rightleftarrows}} G_o$ un objeto grupo en $\mathbb{C}/G_o$ sobre el que actua $G_\bullet$. Se define el producto semidirecto de $E_\bullet$ y $G_\bullet$, $E_\bullet \rtimes G_\bullet$, como sigue:

$(E_\bullet \rtimes G_\bullet)_o = G_o$, $(E_\bullet \rtimes G_\bullet)_1$ es el objeto pullback

$$\begin{tikzcd} (E_\bullet \rtimes G_\bullet)_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[d, "d_o"] \\ E \arrow[r, "d"] & G_o \end{tikzcd}$$

(para simplificar notación , denotaremos $(E_\bullet \rtimes G_\bullet)_1 = E \rtimes G_1$) los elementos de $E \rtimes G_1$ seran pares $(e,g) \in E x G$ tales que $d(e) = d_o(g)$, $d_o, d_1 : E \rtimes G_1 \longrightarrow G_o$ estan dados por las composiciones $E \rtimes G_1 \xrightarrow{pr} G_1 \overset{d_o}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} G_o$ y $s_o:G_o \longrightarrow E \rtimes G_1$ será el único morfismo inducido por $s_o:G_o \longrightarrow G_1$ y $s: G_o \longrightarrow E$, i.e. $s_o(x) = (s(x), s_o(x))$.

Claramente $E_\bullet \rtimes G_\bullet : E \rtimes G_1$ $\begin{tikzcd} {} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & {} \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$ G_o es un complejo simplicial truncado. La multiplicación de $E_\bullet \rtimes G_\bullet$ viene definida por: $m:(E \rtimes G_1) \underset{G_o}{\times} (E \rtimes G_1) \longrightarrow (E \rtimes G_1)$

$m((e,g),(e',g')) = (e\,{}^{g}e', g\,g')$

El elemento inverso de $(e,g)\in E\rtimes G_1$ será $({}^{g^{-1}}(e^{-1}),\ g^{-1})$.

.2.12) Nota.- Es fácil de comprobar que el grupo de endomorfismos del grupoide $E_\bullet\rtimes G_\bullet$ es el grupo en $\mathbb{C}/G_0$ " producto semidirecto $E_\bullet\rtimes \mathrm{End}(G_\bullet)$ ".

Por otra parte si H y G son objetos grupos en $\mathbb{C}$, con G actuando sobre H, el grupoide producto semidirecto $K(H,1)\rtimes K(G,1)$ será $K(H\rtimes G,1)$.

El primer ejemplo de grupoide producto semidirecto es el de un subgrupoide $E_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ normal de $G_\bullet$ contenido en $\mathrm{End}(G_\bullet)$ y lo desarrollamos en pg 50) .

La equivalencia entre las categorías XGPD($\mathbb{C}$) y 2-GPD($\mathbb{C}$).

Sea $G_{\bullet\bullet}$ un 2-grupoide y $E_\bullet = \mathrm{Ker}(D_0)$:

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet = \mathrm{Ker}(D_0) \arrow[r, hook] & G_{\bullet 1} \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] & G_{\bullet 0} \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
\mathrm{Ker}(D_0)_1 = E \arrow[r, hook] \arrow[rd, shift left, "d"] & G_2 \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & G_1 \arrow[l, bend right=60, "s_0"'] \arrow[d, shift right, "d_0"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
 & G_0 \arrow[r, equal] \arrow[lu, shift left, "s"] & G_0
\end{tikzcd}$$

una 2-celda $\alpha\in G_2$ será un elemento de $\mathrm{Ker}(D_0)_1 = E$ sii $D_0\alpha = s_0 d_0\alpha$, entonces $d_i\alpha =$ $= d_i D_0\alpha = d_i s_0 d_0\alpha = d_0\alpha$, i=0,1 y por tanto $\mathrm{Ker}\,(D_0)$ es un objeto grupo en $\mathbb{C}/G_0$.
Por otra parte el morfismo degeneración $S_0 : G_{\bullet 0} \longrightarrow G_{\bullet 1}$ induce una acción (por conjugación del grupoide $G_{\bullet 0}$ sobre $E_\bullet$ que está dada por

$${}^{g}\alpha = S_0(g)\cdot\alpha\cdot S_0(g)^{-1}$$

$$d_0(g) \xrightarrow{g} d_1(g)=d(\alpha)\ \overset{=\!=\!=\!=}{\underset{D_1(\alpha)}{\xrightarrow{\Downarrow\alpha}}}\ d(\alpha) \longmapsto \overset{\xrightarrow{\quad g\quad}}{\underset{g}{\xrightarrow{S_0(g)\,\|}}}\cdot \overset{=\!=\!=\!=}{\underset{D_1(\alpha)}{\xrightarrow{\Downarrow\alpha}}}\cdot \overset{\xrightarrow{\quad g^{-1}\quad}}{\underset{g^{-1}}{\xrightarrow{S_0(g)^{-1}\,\|}}}\cdot =$$

$$\cdot\ \overset{\longrightarrow}{\underset{gD_1(\alpha)g^{-1}}{\xrightarrow{{}^{g}\alpha\,\Downarrow}}}\ \cdot$$

para todo $g\in G_1$ y $\alpha\in E$ tales que $d_1(g) = d(\alpha)$. Claramente se verifica que $D_1({}^{g}\alpha) = g\,D_1(\alpha)\,g^{-1}$. Veamos que tambien se tiene que ${}^{D_1(\alpha)}\alpha' = \alpha\,\alpha'\,\alpha^{-1}$ que será equivalente a probar que $S_0D_1(\alpha)\cdot\alpha'\cdot S_0D_1(\alpha)^{-1} = \alpha\cdot\alpha'\cdot\alpha^{-1}$, para todo $\alpha,\alpha'\in E$ tales que $d(\alpha) = d(\alpha')$: Por la proposición (1.3.10), puesto que $D_1(S_0D_1(\alpha)^{-1}\cdot\alpha) = s_0 d(\alpha) = s_0 d(\alpha') = D_0(\alpha')$, tenemos que $(S_0D_1(\alpha)^{-1}\cdot\alpha)\cdot\alpha' = \alpha'\cdot(S_0D_1(\alpha)^{-1}\cdot\alpha)$ y por tanto despejando obtendremos la igualdad deseada ${}^{D_1(\alpha)}\alpha' = \alpha\cdot\alpha'\cdot\alpha^{-1}$.

Así la terna $(E_\bullet=\mathrm{Ker}(D_0), G_{\bullet 0}, D_1/\mathrm{Ker}(D_0))$ es un grupoide cruzado . Además cada morfismo de 2-grupoides inducirá de forma natural un morfismo de grupoides cruzados.

Tenemos así definido un funtor :

$$F : \text{2-GPD}(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{XGPD}(\mathbb{C})$$

que asocia a cada 2-grupoide $G_{\bullet\bullet} = $ $\begin{tikzcd} G_{\bullet 1} \arrow[r, shift left, "D_o"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & G_{\bullet o} \arrow[l, bend right=60, "S_o"'] \end{tikzcd}$ el grupoide cruzado $F(G_{\bullet\bullet}) = (Ker(D_o), G_{\bullet o}, D_1/Ker(D_o))$ y a cada morfismo de 2-grupoides $f_{\bullet\bullet}: G_{\bullet\bullet} \longrightarrow G'_{\bullet\bullet}$ el morfismo de grupoides cruzados $F(f_{\bullet\bullet}) = (f_{\bullet 1}/Ker(D_o), f_{\bullet o})$.

Reciprocamente; sea $(E_{\bullet}, G_{\bullet}, \rho_{\bullet})$ un grupoide cruzado y sea $E_{\bullet} \rtimes G_{\bullet}$ el grupoide producto semidirecto de $E_{\bullet}$ por $G_{\bullet}$. Definimos morfismos $D_o, D_1: E \rtimes G_1 \longrightarrow G_1$ por , $D_o = pr$, $D_1(e,g) = \rho(e)\, g$ y $S_o: G_1 \longrightarrow E \rtimes G_1$ por $S_o(g) = (sd_o(g), g)$ tenemos entonces un diagrama simplicial doble trncado

.2.13)

$$\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=huge]
E \rtimes G_1 \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_o"'] \arrow[d, shift right, "d_o"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] & G_1 \arrow[l, bend right=20, "S_o"'] \arrow[d, shift right, "d_o"'] \arrow[d, shift left, "d_1"] \\
G_o \arrow[u, bend right=50, "s_o"'] \arrow[r, equal] & G_o \arrow[u, bend right=50, "s_o"']
\end{tikzcd}$$

Además se verifica:

-) $D_o((e,g)\cdot(e',g')) = D_o(e\, {}^{g}e', g\, g') = g\, g' = D_o(e,g)\, D_o(e',g')$

-) $D_1((e,g)\cdot(e',g')) = D_1(e\, {}^{g}e', g\, g') = \rho(e\, {}^{g}e')\, g\, g' = \rho(e)\, (g\, \rho(e')\, g^{-1})\, g\, g' = D_1(e,g)\, D_1(e',g')$

-) $S_o(g\, g') = (sd_o(g\, g'), g g') = (sd_o(g)\, sd_o(g'), g\, g') = S_o(g)\, S_o(g')$.

Por tanto D_o, D_1 y S_o serán morfismos de grupoides, además se tiene

$(e, \rho(e)^{-1})\, (e', s_o d(e')) = (e\, {}^{\rho(e^{-1})}e', \rho(e^{-1})) = (e'e, \rho(e^{-1})) = (e', s_o d(e'))\, (e, \rho(e^{-1}))$

así estaremos en las condiciones de la proposicion (1.3.10) , por tanto existirá un 2-grupoide $G_{\bullet\bullet} = $ $\begin{tikzcd} E_{\bullet} \rtimes G_{\bullet} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_{\bullet} \arrow[l, bend right=60] \end{tikzcd}$ con truncación dada por el diagrama (2.2.13). La multiplicación vertical de este grupoide viene dada por:

$$(e,g) x (e', \rho(e)\, g) = (e,g)\, (sd_1(g), g^{-1} \rho(e)^{-1})\, (e', \rho(e)\, g) = (e'e, g)$$

Por otra parte, cada morfismo de grupoides cruzados

$$\Gamma = (\theta_{\bullet}, \gamma_{\bullet}) : (E_{\bullet}, G_{\bullet}, \rho_{\bullet}) \xrightarrow{\hspace{2cm}} (E'_{\bullet}, G'_{\bullet}, \rho'_{\bullet})$$

induce un morfismo truncado de complejos simpliciales dobles

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& E \rtimes G_1 \arrow[rr, shift left, "D_o"] \arrow[rr, shift right, "D_1"'] \arrow[dl, "\theta_1 \times \gamma_1"'] \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, shift left] & & G_1 \arrow[dl, "\gamma_1"] \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, shift left] \\
E' \rtimes G'_1 \arrow[rr, shift left, "D'_o"] \arrow[rr, shift right, "D'_1"'] \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, shift left] & & G'_1 \arrow[dd, shift right] \arrow[dd, shift left] & \\
& G_o \arrow[rr, equal] \arrow[dl, "\gamma_o = \theta_o"'] & & G_o \arrow[dl, "\gamma_o"'] \\
G'_o \arrow[rr, equal] & & G'_o &
\end{tikzcd}$$

donde $(\theta_1 \times \gamma_1)(e,g) = (\theta_1(e), \gamma_1(g))$ verifica :

$$(\theta_1 \times \gamma_1)((e,g)\, (e',g')) = (\theta_1 \times \gamma_1)(e\, {}^{g}e', g\, g') = (\theta_1(e\, {}^{g}e'), \gamma_1(g\, g')) =$$

$$= (\theta_1(e)\, {}^{\gamma_1(g)}\theta_1(e'), \gamma_1(g)\, \gamma_1(g')) = (\theta_1 \times \gamma_1)(e,g)\, (\theta_1 \times \gamma_1)(e',g')$$

para cada elemento $((e,g),(e',g')) \in (E \rtimes G_1) \underset{G_1}{\times} (E \rtimes G_1)$. Por lo que el morfismo simplicial doble truncado inducido por Γ se extiende a un morfismo de 2-grupoides .

Tenemos definido de esta forma un funtor

$$F': \mathrm{XGPD}(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{2-GPD}(\mathbb{C})$$

.2.14) Teorema .-

Los funtores $\text{2-GPD}(\mathbb{C}) \underset{F'}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathrm{XGPD}(\mathbb{C})$ establecen una equivalencia entre las categorías de 2-grupoides y grupoides cruzados en $\mathbb{C}$.

Demostración.- Sea $(E_\bullet, G_\bullet, \rho_\bullet)$ un grupoide cruzado y $G_{\bullet\bullet}: E_\bullet \triangleleft G_\bullet \rightrightarrows G_\bullet$ el 2-grupoide asociado por el funtor F' , entonces $\mathrm{Ker}(D_0) \cong E_\bullet$ y la acción de $G_\bullet$ sobre $\mathrm{Ker}(D_0)$ por conjugación via S_0 viene dada por

$${}^{g}(e, s_0d_1(g)) = S_0(g).(e, s_0d_1(g)).S_0(g)^{-1} = ({}^{g}e, s_0d_0(g))$$

por tanto tenemos un isomorfismo de grupoides cruzados $(E_\bullet, G_\bullet, \rho_\bullet) \cong (\mathrm{Ker}(D_0), G_\bullet, D_1/\mathrm{Ker}(D_0))$ inducido por el isomorfismo $\mathrm{Ker}(D_0) \cong E_\bullet$.

Recíprocamente; sea $G_{\bullet\bullet}: G_{\bullet 1} \overset{D_0}{\underset{D_1}{\rightrightarrows}} G_{\bullet 0}$ un 2-grupoide y $(\mathrm{Ker}(D_0, G_{\bullet 0}, D_1/\mathrm{Ker}(D_0))$ el grupoide cruzado a $G_{\bullet\bullet}$ por el funtor F, entonces el par de morfismos

$D_0: G_2 \longrightarrow G_1$ y $u: G_2 \longrightarrow \mathrm{Ker}(D_0)$; $u: \alpha \longmapsto S_0D_0(\alpha)^{-1}$

inducen un único morfismo $\Psi: G_2 \longrightarrow \mathrm{Ker}(D_0) \triangleleft G_1$ haciendo conmutar los triangulos rallados en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_2 \arrow[dr, dashed, "\Psi"'] \arrow[drr, bend left, "D_0"] \arrow[ddr, bend right, "u"'] & & \\
& \mathrm{Ker}(D_0) \triangleleft G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[d, "d_0"] \\
& \mathrm{Ker}(D_0) \arrow[r, "d"] & G_0
\end{tikzcd}$$

que es trivialmente un isomorfismo. Además Ψ induce un isomorfismo de grupoides $\Psi_\bullet: G_{\bullet 1} \longrightarrow \mathrm{Ker}(D_0) \triangleleft G_{\bullet 0}$ puesto que para cualquiera dos 2-celdas $\alpha, \alpha' \in G_2$ tales que $D_0(\alpha') = D_1(\alpha)$ tenemos :

$$\Psi(\alpha) \cdot \Psi(\alpha') = (\alpha \cdot S_0D_0(\alpha)^{-1}, D_0(\alpha))\ (\alpha'.S_0D_0(\alpha')^{-1}, D_0(\alpha'))$$

$$= (\alpha.\alpha'.S_0D_0(\alpha.\alpha')^{-1}, D_0(\alpha.\alpha')) = \Psi(\alpha.\alpha')$$

y así un isomorfismo de 2-grupoides

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ker}(D_0) \triangleleft G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
G_2 \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[ur, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 \\
G_0 \arrow[ur, equal] \arrow[rr, equal] & & G_0 \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

//

.2.15) Corolario .-

Las categorías de módulos cruzados y grupoides en la categoría de grupos son equivalentes.//

.2.16) Nota.- A partir de ahora representaremos a un 2-hipergrupoide $G_{\bullet\bullet}$ por

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet} = E_\bullet \rtimes G_\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_\bullet \arrow[l, bend right] = & E \rtimes G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_1 \arrow[l, bend right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
& & G_o \arrow[u, bend right] \arrow[r, equal] & G_o \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

y llamaremos " Complejo de Moore de $G_{\bullet\bullet}$ " al grupoide cruzado $\rho_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ asociado a $G_{\bullet\bullet}$. El teorema (2.2.14) anterior prueba que es equivalente dar un 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ a dar su complejo de Moore .

.2.17) Nota.- Dado un 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ con $\rho_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ su complejo de Moore, el grupo abeliano en $GPD(\mathbb{C})/G_\bullet$ de sus endomorfismos será:

$$\begin{tikzcd}
End(G_{\bullet\bullet}) = Ker(\rho_\bullet) \rtimes G_\bullet \arrow[r, "pr"] & G_\bullet = & Ker(\rho_\bullet) \rtimes G_1 \arrow[r, "pr=D_o"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
& & G_o \arrow[r, equal] & G_o
\end{tikzcd}$$

.2.18) Nota.- Sea $G_\bullet$ un grupoide en $\mathbb{C}$ y $\rho_\bullet : End(G_\bullet) \longrightarrow AUT(G_\bullet)$, $\rho_\bullet : End(G_\bullet) \longrightarrow INT(G_\bullet)$ los grupoides cruzados asociados a los grupoides cruzados de automorfismos y automorfismos interiores de $G_\bullet$ (suponiendo que estos existan) . Asociados a estos grupoides cruzados tenemos los 2-grupoides

$AUT(G_\bullet)_{\bullet\bullet} = End(G_\bullet) \rtimes AUT(G_\bullet)_\bullet \longrightarrow AUT(G_\bullet)_\bullet$

$INT(G_\bullet)_{\bullet\bullet} = End(G_\bullet) \rtimes INT(G_\bullet) \longrightarrow INT(G_\bullet)$

Estudiemos más detalladamente el 2-grupoide $INT(G_\bullet)$; Puesto que el grupoide $INT(G_\bullet)$ se obtiene como un cociente de $G_\bullet$ ($INT(G_\bullet) = G_\bullet / Z(G_\bullet)$) se tiene que $\pi_o(INT(G_\bullet)) = \pi_o(G_\bullet)$, denotemos por $R = \pi_o(G_\bullet)$. se verifica entonces que el grupoide coigualador de los morfismos simpliciales $D_o, D_1 : End(G_\bullet) \rtimes INT(G_\bullet) \longrightarrow INT(G_\bullet)$ es el grupoide trivial $COSK^o(G_\bullet) = cosk^o(G_o \twoheadrightarrow R)$

$$\begin{tikzcd}
End(G_\bullet)_1 \rtimes INT(G_\bullet)_1 \arrow[r, shift left, "D_o"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & INT(G_\bullet)_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_o \times_R G_o \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
G_o \arrow[r, equal] & G_o \arrow[r, equal] & G_o \arrow[d, two heads] \\
& & R
\end{tikzcd}$$

Entonces para cualquiera dos flechas $\rho_g , \rho_{g'} \in INT(G_\bullet)_1$ con $d_i(\rho_g) = d_i(\rho_{g'})$ i=0,1 (notemos que $d_i(\rho_g) = d_i(g)$) existe una 2-celda $\alpha \doteq (g'g-1, \rho_g)$ tal que $D_o(\alpha) = \rho_g$ y $D_1(\alpha) = \rho_{g'}$. La propiedad del grupoide cruzado $End(G_\bullet) \xrightarrow{\rho_\bullet} INT(G_\bullet)$ que implica que $Coequ(D_o, D_1) = COSK^o(G_\bullet)$ es que el morfismo $\rho_\bullet : End(G_\bullet) \longrightarrow INT(G_\bullet)$ induce un epimorfismo $End(G_\bullet) \twoheadrightarrow End(INT(G_\bullet))$ (notemos que $End(INT(G_\bullet))$ es el grupo cociente en $\mathbb{C}/G_o$ de $End(G_\bullet)$ sobre $Z(G_\bullet)$).

Generalizando esta propiedad del grupoide cruzado $\rho_\bullet : End(G_\bullet) \longrightarrow INT(G_\bullet)$ tenemos:

.2.19) Definición (Grupoides cruzados conexos).

Un grupoide cruzado $\rho_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ se dice conexo si el morfismo inducido por $\rho_\bullet$ $E_\bullet \longrightarrow End(G_\bullet)$ es un epimorfismo .

Analogamente un grupoide cruzado generalizado $\rho_\bullet : H_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ se dice conexo si su grupoide cruzado asociado $\rho_\bullet/End(H_\bullet) : End(H_\bullet) \longrightarrow G_\bullet$ es conexo .

El siguiente lema es de demostración inmediata;

.2.20) Lema.-

Sea $G_{\bullet\bullet} = E_\bullet \rtimes G_\bullet \overset{D_o}{\underset{D_1}{\rightrightarrows}} G_\bullet$ un 2-grupoide con complejo de Moore $\rho_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$. Entonces si $\rho_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ es conexo , el grupoide coigualador de $D_o, D_1 : E_\bullet \rtimes G_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ es $COSK^o(G_\bullet) = cosk^o(G_o \twoheadrightarrow \Pi_o(G_\bullet))$.//

El siguiente lema(2.2.21) generalizará el siguiente resultado de la categoría de grupos: Sea $G_\bullet : G_1 \rightrightarrows G_o$ un grupoide en Gp , $\rho = d_1/ker(d_o) : Ker(d_o) \longrightarrow G_o$ su complejo de Moore y $G_o \twoheadrightarrow \Pi_o(G_\bullet)$ el coigualador de d_d, d_1. Entonces el grupo Ker(ρ) es un $\Pi_o(G_\bullet)$ módulo, siendo el morfismo cero $Z \longrightarrow \Pi_o(G_\bullet)$ un módulo cruzado.

.2.21) Lema.-

Sea $G_{\bullet\bullet} : E_\bullet \rtimes G_\bullet \rightrightarrows G_\bullet$ un 2-grupoide en $\mathbb{C}$, con $\rho_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ su complejo de Moore y $H_\bullet$ el grupoide de componentes conexas de $G_{\bullet\bullet}$. entonces $H_\bullet$ actua sobre el objeto grupo abeliano $Ker(\rho_\bullet)$ en $\mathbb{C}/G_o$ y el morfismo "trivial" $Ker(\rho_\bullet) \longrightarrow H_\bullet$ es un grupoide cruzado.

Demostración.- Usando el lema (2.2.10) el grupoide $G_\bullet$ actua sobre $Ker(\rho_\bullet)$ (por restricción de la acción de $G_\bullet$ sobre $E_\bullet$) . Sea $z \in Ker(\rho_\bullet)_1$, $g \in G_1$ y $e \in E$ tales que $d(z) = d_1(g)$ y $d(e) = d_o(g)$,entonces:

$$({}^{\rho(e)\,g})_z = {}^{\rho(e)}({}^{g}z) = e\,({}^{g}z)\,e^{-1} = {}^{g}z \quad \text{(por ser } Ker(\rho_\bullet) \text{ central en } E_\bullet)$$

Asi la acción de $G_\bullet$ sobre $Ker(\rho_\bullet)$ induce una acción de $H_\bullet$ sobre $Ker(\rho_\bullet)$ que estará dada por: $({}^{\overline{\rho}_g})_z = ({}^{\rho_g})_z$ siendo $\overline{\rho}_g$ la "clase" del elemento ρ_g en H_1.

El resto de la demostración se deduce de inmediato del hecho de ser $Ker(\rho_\bullet)$ central en $E_\bullet$.//

2.22) Sub2-grupoides normales y 2-grupoides cocientes .

Estudiaremos de nuevo los sub2-grupoides normales y los 2-grupoides cocientes, siendo este apartado complementario del que desarrollamos en (1.3.11) .

Sea

$$\begin{tikzcd}
H_{\bullet\bullet} : E'_\bullet \rtimes G_\bullet \arrow[r, shift left, "D'_0"] \arrow[r, shift right, "D'_1"'] \arrow[d, hook] & G_\bullet \arrow[d, equal] \\
G_{\bullet\bullet} : E_\bullet \rtimes G_\bullet \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & G_\bullet
\end{tikzcd}$$

un sub2-grupoide normal, tenemos entonces un diagrama con los complejos de Moore asociados :

$$\begin{tikzcd}
E'_\bullet \arrow[r, "\rho'_\bullet/E'"'] \arrow[d, hook] & G_\bullet \arrow[d, equal] \\
E_\bullet \arrow[r, "\rho_\bullet"] & G_\bullet
\end{tikzcd}$$

verificandose que el objeto grupo $E'_\bullet$ es un subgrupo normal de $E_\bullet$ en $\mathbb{C}/G_0$ y que la acción de $G_\bullet$ sobre $E'_\bullet$ es la restricción de la acción de $G_\bullet$ sobre $E_\bullet$. Recíprocamente; dado un grupoide cruzado $\rho_\bullet:E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ y un objeto subgrupo normal $E'_\bullet$ de $E_\bullet$ en $\mathbb{C}/G_0$ tal que la acción de $G_\bullet$ sobre $E_\bullet$ deje invariante a $E'_\bullet$ entonces $\rho_\bullet/E'_\bullet:E'_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ es un grupoide cruzado y el 2-grupoide que define es un sub2-grupoide del que define $\rho_\bullet:E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$. Además si $G''_\bullet$ es el grupoide coigualador de $D_0, D_1 : E'_\bullet \rtimes G_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ y $E''_\bullet$ es el objeto grupo en $\mathbb{C}/G_0$ cociente de $E_\bullet$ por $E'_\bullet$, entonces la acción de $G_\bullet$ sobre $E_\bullet$ induce una acción de $G''_\bullet$ sobre $E''_\bullet$ y el morfismo $\rho_\bullet$ induce un morfismo $\overline{\rho}_\bullet : E''_\bullet \longrightarrow G''_\bullet$ que nos determina un grupoide cruzado verificandose que el 2-grupoide asociado a $\overline{\rho}_\bullet$ es el cociente del 2-grupoide asociado a $\rho_\bullet$ por el sub2-grupoide normal asociado a $\rho_\bullet/E'_\bullet$

$$\begin{tikzcd}
E'_\bullet \arrow[rr, hook] \arrow[d, phantom, "\cdot\cdot"] & & E_\bullet \arrow[rr, two heads] \arrow[d, phantom, "\cdot\cdot"] & & E''_\bullet \arrow[d, phantom, "\cdot\cdot"] \\
E' \rtimes G_1 \arrow[rr, hook] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & E \rtimes G_1 \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] & & E'' \rtimes G''_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \\
& G_1 \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G''_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dr, equal] & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[dl, equal] \\
& G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 &
\end{tikzcd}$$

.2.23) El funtor $\overline{W}$: 2-GPD($\mathbb{C}$) $\longrightarrow$ 2-FHPGPD($\mathbb{C}$).

En este apartado estudiaremos de nuevo, despues de la interpretación que nos da el teorema (2.2.14) de cada 2-grupoide , el funtor $\overline{W}$: 2-GPD($\mathbb{C}$) $\longrightarrow$ 2-FHPGPD($\mathbb{C}$) .

Sea $G_{\bullet\bullet} = E_\bullet \rtimes G_\bullet \rightrightarrows G_\bullet$ un 2-grupoide y $\rho_\bullet:E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ su complejo de Moore . El 2-grupoide filtrado $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})$ será:

$$\begin{tikzcd}
G_\bullet : \arrow[d, hook] & \cdots & G_1 \underset{G_0}{\times} G_1 \arrow[r, shift left=2, "pr_0"] \arrow[r, "m" description] \arrow[r, shift right=2, "pr_1"'] \arrow[d, hook] & G_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[d, equal] & G_0 \arrow[d, equal] \\
\overline{W}(G_\bullet) : & \cdots & E_1 \underset{G_0}{\times} G_1 \underset{G_0}{\times} G_1 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1" description] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & G_1 \arrow[l, bend right=30, "s_1"'] \arrow[l, bend right=20, "s_0" description] \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & G_0 \arrow[l, bend right=30, "s_0"']
\end{tikzcd}$$

donde los elementos de $\overline{W}(G\ )_2 = E \underset{G_0}{\times} G_1 \underset{G_0}{\times} G_1$ serán ternas $(e, g_0, g_1) \in E \times G_1 \times G_1$ tales que

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "e"] \arrow[r, bend left, "g_0"'] & \bullet \arrow[r, bend left, "g_1"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

$d(e) = d_0(g_0)$, $d_1(g_0) = d_0(g_1)$

(notemos que podemos multiplicar g_0 con g_1 y $\rho(e)$ con g_0 pero no tiene sentido multiplicar e con g_0) . Los operadores caras $d_i : E \underset{G_0}{\times} G_1 \underset{G_0}{\times} G_1 \longrightarrow G_1$ vienen dados por:

$d_0(e,g_0,g_1) = g_0$

$d_1(e,g_0,g_1) = \rho(e)\, g_0 g_1$

$d_2(e,g_0,g_1) = g_1$

y los degeneración por : $s_i : G_1 \longrightarrow E \underset{G_0}{\times} G_1 \underset{G_0}{\times} G_1$; $s_0(g) = (sd_0(g), g, s_0 d_1(g))$

$s_1(g) = (sd_0(g), s_0 d_0(g), g)$.

La operación corchete $[\;] : \Lambda_3^3(\overline{W}(G_{\bullet\bullet})) \longrightarrow \overline{W}(G_{\bullet\bullet})_2$ está definida por :

$$\left[(e_0,g_0,g_1),(e_1,g_0,g_2),(e_2, \rho(e_0)g_0g_1, g_1^{-1}\rho({}^{g_0}(e_0^{-1}e_2^{-1}e_1))g_2) \right] = ({}^{g_0^{-1}}(e_1^{-1}e_2e_0), g_1, g_1^{-1}\rho({}^{g_0^{-1}}(e_0^{-1}e_2^{-1}e_1)g_2)$$

El teorema (1.3.25) nos dice que todo 2-hipergrupoide filtrado es isomorfo a uno de esta forma. Dado entonces un 2-hipergrupoide filtrado $G_\bullet$ al que representaremos a partir de ahora por un diagrama $G_\bullet = \ . \ . \ . \ E \underset{G_0}{\times} G_1 \underset{G_0}{\times} G_1 \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow} G_1 \rightrightarrows G_0$, llamaremos complejo de Moore de $G_\bullet$ a $E \xrightarrow{\rho} G_1 \rightrightarrows G_0$ el complejo de Moore del 2-grupoide $G_{\bullet\bullet}$ tal que $\overline{W}(G_{\bullet\bullet}) \cong G_\bullet$.

Ejemplos :

.2.24) Sea A un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$. El 2-hipergrupoide filtrado $K(A,2)$ se obtiene a partir del 2-grupoide $K(K(A,1),1)$ cuyo complejo de Moore es el grupoide cruzado trivial $K(A,1) \longrightarrow K(\Pi,0)$.

.2.25) Sea $G_\bullet$ un grupoide y $End(G_\bullet) \hookrightarrow G_\bullet$ el grupoide cruzado de sus endomorfismos donde $G_\bullet$ actua por conjugación sobre $End(G_\bullet)$. Sea $G_{\bullet\bullet} : End(G_\bullet) \rtimes G_\bullet \rightrightarrows G_\bullet$ el 2-grupoide definido por este grupoide cruzado , entonces $\overline{W}(G_{\bullet\bullet})$ es el 2-hipergrupoide filtrado $G_\bullet \hookrightarrow COSK^1(G_\bullet)$.

(2.3) EXTENSIONES DE GRUPOIDES Y TORSORES SOBRE LOS GRUPOIDES DE AUTOMORFISMOS.-

Dedicaremos esta sección a dar una generalización para la categoría de grupoides del siguiente resultado de la categoría de grupos :

Sean A y B dos grupos, se tiene entonces un isomorfismo de grupos

$$Ext(B,A) \cong TORS^1(A, K(Aut(B),1))$$

Este importante resultado fué el origen de las interpretaciones de los grupos de cohomologia abeliana en términos de torsores (los torsores se originan al "torcer" extensiones) . Dos son los hechos principales que dan lugar a este resultado :

(1º) Dar una extensión de grupos $B \hookrightarrow E \twoheadrightarrow A$ es equivalente a dar una sucesión exacta en el sentido de Barr $B \rtimes E \rightrightarrows E \twoheadrightarrow A$ en la categoría de grupos.

(2º) Sea $G_\bullet : G_1 \rightrightarrows G_0$ un grupoide en la categoría de grupos con $\rho : B \longrightarrow G_0$ su complejo de Moore entonces el morfismo de grupos $\Psi : G_0 \longrightarrow \mathrm{Aut}(B)$ dado por la acción de G_0 sobre B, induce una fibración exacta

$$\begin{tikzcd}
B \rtimes G_0 \cong G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_0 \arrow[l, bend right] \arrow[d, "\Psi"] \\
B \rtimes \mathrm{Aut}(B) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{Aut}(B) \arrow[l, bend right]
\end{tikzcd}$$

(i.e. todo grupoide $G_\bullet$ con $\mathrm{Ker}(d_0) = B$ se obtiene levantando por pullback el grupoide de los automorfismos de B via un morfismo de G_0 en $\mathrm{Aut}(B)$).

El primero de estos hechos admite, como vimos en (1.1) pg 50 , la siguiente generalizasión a la categoría da grupoides en $\mathbb{C}$:

.3.1) Lema.-

Sea $G_\bullet$ un grupoide en $\mathbb{C}$ y $E_\bullet = E \longrightarrow G_0$ un objeto grupo en $\mathbb{C}/G_0$. Entonces dar una extensión del grupoide $E_\bullet$ por el grupoide $G_\bullet$ $\mathbb{E} : E_\bullet \hookrightarrow F_\bullet \twoheadrightarrow G_\bullet$ es equivalente a dar una sucesión exacta en el sentido de Barr $E_\bullet \rtimes F_\bullet \rightrightarrows F_\bullet \twoheadrightarrow G_\bullet$ en la categoría $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$ .//

Por otra parte el resultado (2º) se generaliza a $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$ en el siguiente sentido:

.3.2) Lema.-

Sea $G_{\bullet\bullet}$ un 2-grupoide con complejo de Moore $\rho_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$. Entonces el morfismo de grupoides $G_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} \mathrm{AUT}(E_\bullet)$ dado por la acción de $G_\bullet$ sobre $E_\bullet$, induce una fibración exacta

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet\bullet} : \arrow[d, "\psi_{\bullet\bullet}"'] & E_\bullet \rtimes G_\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "id \times \psi_\bullet"] & G_\bullet \arrow[d, "\psi_\bullet"] \\
\mathrm{AUT}(E_\bullet)_{\bullet\bullet} : & E_\bullet \rtimes \mathrm{AUT}(E_\bullet)_\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{AUT}(E_\bullet)_\bullet
\end{tikzcd}$$

en la categoría $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$. (Hemos supuesto implicitamente, al igual que siempre que hablemos del grupoide AUT, que la categoría $\mathbb{C}$ es cartesiana cerrada).

Demostración .- En el siguiente diagrama que representa un morfismo simplicial doble truncado

$$\begin{tikzcd}
& E \rtimes G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, "id \times \psi_1"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[dl, "\psi_1"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
E \rtimes \mathrm{AUT}(E)_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{AUT}(E)_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 \\
G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[ur, equal] & & G_0 \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

los cuadrados horizontales son trivialmente pullback. Además este morfismo se extiende claramente a un morfismo simplicial doble $G_{\bullet\bullet} \xrightarrow{\psi_{\bullet\bullet}} \mathrm{AUT}(E_\bullet)_\bullet$ que será por tanto una fibración exacta .

A partir de los dos lemas anteriores deducimos el siguiente teorema :

.3.3) Teorema .-

Sea $G_\bullet$ un grupoide en $\mathbb{C}$ (cartesiana cerrada) y $E_\bullet$ un objeto grupo en $\mathbb{C}/G_o$. Entonces los grupoides $\mathrm{Ext}(E_\bullet, G_\bullet)$ y $\mathrm{TORS}^1(G_\bullet, \mathrm{AUT}(E_\bullet)_{\bullet\bullet})$ son isomorfos.

Demostración.- La demostración se deduce de inmediato de los lemas (2.3.1) y(2.3.2), observando que dada una extensión $\mathbf{E} : E_\bullet \hookrightarrow F_\bullet \twoheadrightarrow G_\bullet$ de $E_\bullet$ por $G_\bullet$, en la sucesión exacta $E_\bullet 1 F_\bullet \rightrightarrows F_\bullet \twoheadrightarrow G_\bullet$ el complejo de Moore del 2-grupoide $E_\bullet 1 F_\bullet \rightrightarrows F_\bullet$ esta dado por la inclusión $E_\bullet \hookrightarrow F_\bullet$. //

CAPITULO 3.- LOS CONJUNTOS H^n DE COHOMOLOGIA

(3.1) LOS CONJUNTOS H^n Y LOS HIPERGRUPOIDES SISTEMAS DE COEFICIENTES

.1.1) Los conjuntos de cohomología.

Para cada objeto X y cada n-hipergrupoide $G_\bullet$ en $\mathbb{C}$, tomaremos como conjunto de cohomología de dimensión n de X con coeficientes en $G_\bullet$:

$$H^n(X,G_\bullet) = \mathrm{TORS}^n[X,G_\bullet]$$

para todo entero $n>0$. Si $G_\bullet$ es un grupoide, denotaremos por

$$H^0(X,G_\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G_1)$$

Puesto que para todo morfismo $f:Y \longrightarrow X$ en $\mathbb{C}$ y todo morfismo de n-hipergrupoides $g_\bullet:G_\bullet \longrightarrow H_\bullet$ el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{TORS}^n[X,G_\bullet] \arrow[r, "{\mathrm{TORS}^n[X,g_\bullet] = g_*}"] \arrow[d, "{\mathrm{TORS}^n[f,G_\bullet] = f^*}"'] & \mathrm{TORS}^n[X,H_\bullet] \arrow[d, "{\mathrm{TORS}^n[f,H_\bullet] = f^*}"] \\
\mathrm{TORS}^n[Y,G_\bullet] \arrow[r, "{\mathrm{TORS}^n[Y,g_\bullet] = g_*}"] & \mathrm{TORS}^n[Y,H_\bullet]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, tenemos asi definido un bi-funtor

$$H^n(\,-,-\,) : \mathbb{C}\mathrm{x}n\text{-}\mathrm{HPGPD}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Set}$$

al que llamaremos funtor de cohomología en dimensión $n>0$.

Notemos que la proposición (1.4.39) muestra que para cualquier n-hipergrupoide $G_\bullet$ y cualquier $m>n$ se tiene una biyección natural

$$H^n(X,G_\bullet) \cong H^m(X,G_\bullet)$$

para todo objeto X .

Los sistemas de coeficientes.

El objetivo de este trabajo, como ya dijimos en la introducción, consiste en asociar a una sucesión exacta corta de grupoides una sucesión "exacta larga" en la cohomología. Necesitaremos por lo tanto asociar a cada sucesión exacta corta de grupoides, para cada $n>1$, unos n-hipergrupoides (sistemas de coeficientes) que nos permitan definir los conjuntos H^n de cohomología.

Sea $G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ una sucesión exacta corta de grupoides, consideremos el grupoide cruzado de los automorfismos interiores de $G_\bullet$(suponiendo que este tenga sentido):

$$\begin{tikzcd}
G_\bullet : \cdots \arrow[d, phantom, ""] & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\rho"'] & G_0 \arrow[d, equal] \\
\mathrm{INT}(G_\bullet) : \cdots & \mathrm{INT}(G_\bullet)_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0
\end{tikzcd}$$

con $\rho_\bullet$ la flecha vertical $G_\bullet \longrightarrow \mathrm{INT}(G_\bullet)$.

Puesto que $G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ es un subgrupoide normal de $G_\bullet$, la acción de $\mathrm{INT}(G_\bullet)$ sobre $G_\bullet$ deja invariante a $G'_\bullet$ por lo que $\rho_\bullet/G'_\bullet : G'_\bullet \longrightarrow \mathrm{INT}(G_\bullet)$ es tambien un grupoide cruzado generalizado, verificandose además que la inclusión $G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet$ induce un morfismo de grupoides cruzados generalizados:

$$\begin{tikzcd} G'_\bullet \arrow[r, "\rho_\bullet/G'_\bullet"'] \arrow[d, hook] & INT(G_\bullet) \arrow[d, equal] \\ G_\bullet \arrow[r, "\rho_\bullet"] & INT(G_\bullet) \end{tikzcd}$$

Denotaremos en lo que sigue $E_\bullet : E \overset{s}{\underset{d}{\rightleftarrows}} G_o$ al grupo de endomorfismos de $G_\bullet$ y análogamente $E'_\bullet$, $E''_\bullet$ a los grupos de endomorfismos de $G'_\bullet$ y $G''_\bullet$ respectivamente. Asociados a los grupoides cruzados generalizados $\rho_\bullet : G_\bullet \longrightarrow INT(G_\bullet)$ y $\rho_\bullet/G'_\bullet : G'_\bullet \longrightarrow INT(G_\bullet)$ tenemos los grupoides cruzados $\rho_\bullet/E_\bullet : E_\bullet \longrightarrow INT(G_\bullet)$ y $\rho_\bullet/E'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow INT(G_\bullet)$. Denotaremos

$$\begin{tikzcd} N_{\bullet\bullet} = INT(G)_{\bullet\bullet} = E_\bullet \ltimes INT(G_\bullet) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & INT(G_\bullet) \arrow[l, bend right] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} E \ltimes INT(G_\bullet)_1 \arrow[r, shift left, "D_1"] \arrow[r, shift right, "D_0"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & INT(G_\bullet) \arrow[l, bend right, "S_0"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ G_o \arrow[u, bend right] \arrow[r, equal] & G_o \arrow[u, bend right] \end{tikzcd}$$

y $N'_{\bullet\bullet} = \begin{tikzcd} E'_\bullet \ltimes INT(G_\bullet) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & INT(G_\bullet) \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$ a los 2-grupoides asociados según el teorema (2.2.14) a los grupoides cruzados $\rho_\bullet/E_\bullet : E_\bullet \longrightarrow INT(G_\bullet)$ y $\rho_\bullet/E'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow INT(G_\bullet)$ respectivamente. Puesto que $E'_\bullet$ es un subgrupo normal de $E_\bullet$, se tiene (2.2.22) que la inclusión

$$\begin{tikzcd} E'_\bullet \arrow[r, "\rho_\bullet/E'"'] \arrow[d, hook] & INT(G_\bullet) \arrow[d, equal] \\ E_\bullet \arrow[r, "\rho_\bullet"] & INT(G_\bullet) \end{tikzcd}$$

induce un morfismo de 2-grupoides $N'_{\bullet\bullet} \hookrightarrow N_{\bullet\bullet}$, verificando que $N'_{\bullet\bullet} \hookrightarrow N_{\bullet\bullet}$ es un sub2-grupoide normal de $N_{\bullet\bullet}$. Denotemos por $N''_{\bullet\bullet}$ al 2-grupoide cociente de $N_{\bullet\bullet}$ por $N'_{\bullet\bullet}$, este viene dado (ver (2.2.22)) por $N''_{\bullet\bullet} = E_\bullet/E'_\bullet \ltimes \bar{N}_\bullet \rightrightarrows \bar{N}_\bullet$:

$$\begin{tikzcd} N'_{\bullet\bullet} \arrow[rr, hook] \arrow[d, phantom, ":"] & & N_{\bullet\bullet} \arrow[rr, two heads] \arrow[d, phantom, ":"] & & N''_{\bullet\bullet} \arrow[d, phantom, ":"] \\ E' \ltimes INT(G_\bullet)_1 \arrow[rr, hook] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E \ltimes INT(G_\bullet)_1 \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E/E' \ltimes \bar{N}_1 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\ & INT(G_\bullet)_1 \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \bar{N}_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\ G_o \arrow[rr, equal] \arrow[dr, equal] & & G_o \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_o \arrow[dl, equal] \\ & G_o \arrow[rr, equal] & & G_o & \end{tikzcd}$$

donde $\bar{N}_\bullet$ es el grupoide coigualador de $D_o, D_1 : E'_\bullet \ltimes INT(G_\bullet) \longrightarrow INT(G_\bullet)$ y $E_\bullet/E'_\bullet$ denota el objeto grupo cociente de $E_\bullet$ por $E'_\bullet$ en $\mathbb{C}/G_o$.

Tenemos por tanto que la suceción $N'_{\bullet\bullet} \hookrightarrow N_{\bullet\bullet} \twoheadrightarrow N''_{\bullet\bullet}$ es una sucesión exacta corta de 2-grupoides en $\mathbb{C}$. Aplicando el funtor $\overline{W}$ a la sucesión anterior, obtenemos una sucesión (exacta corta) de 2-hipergrupoides filtrados

$$\begin{tikzcd} \overline{W}(N'_{\bullet\bullet}) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, ":"] & \overline{W}(N_{\bullet\bullet}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, ":"] & \overline{W}(N''_{\bullet\bullet}) \arrow[d, phantom, ":"] \\ E' \underset{G_o}{\times} INT(G_\bullet)_1 \underset{G_o}{\times} INT(G_\bullet)_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] & E \underset{G_o}{\times} IN(G_\bullet)_1 \underset{G_o}{\times} INT(G_\bullet)_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] & E/E' \underset{G_o}{\times} \bar{N}_1 \underset{G_o}{\times} \bar{N}_1 \arrow[d] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, shift right=2] \\ INT(G_\bullet)_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & INT(G_\bullet)_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \bar{N}_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ G_o \arrow[r, equal] & G_o \arrow[r, equal] & G_o \end{tikzcd}$$

que nos da los 2-hipergrupoides sistemas de coeficientes para los conjuntos de cohomología de dimensión dos , H^2.

.1.2) Nota.- Mientras que los 2-hipergrupoides filtrados $\overline{W}(N'_{\bullet\bullet})$ y $\overline{W}(N_{\bullet\bullet})$ aparecen como únicos candidatos a sistemas de coeficientes para los dos primeros conjuntos de cohomología en dimensión dos (de la sucesión exacta larga), no ocurre así con $\overline{W}(N''_{\bullet\bullet})$.

Si seguimos los métodos clásicos (ver [18]) para extender la sucesión exacta de seis puntos en la cohomología, asociada a una sucesión exacta de grupos (en conjuntos) $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$, a una sucesión exacta de nueve puntos. Mientras que los 2-hipergrupoides que corresponderían a los sistemas de coeficientes utilizados en este caso para definir los dos primeros conjuntos de cohomología en dimensión dos, se obtienen aplicando el funtor $\overline{W}$ clásico [11] a los grupos simpliciales $G' \rtimes Int(G) \rightrightarrows Int(G)$ y $G \rtimes Int(G) \rightrightarrows Int(G)$. El tercer 2-hipergrupoide correspondería al obtenido al aplicar este funtor $\overline{W}$ al grupo simplicial $G'' \rtimes Int(G'') \rightrightarrows Int(G'')$ teniendose así tambien una sucesión de 2-hipergrupoides en Set:

$$\begin{tikzcd}
G' \times Int(G)^2 \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & G \times Int(G)^2 \arrow[r] \arrow[d, no head, shift left=2] \arrow[d, no head] \arrow[d, no head, shift right=2] & G'' \times Int(G'') \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
Int(G) \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & Int(G) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & Int(G'') \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
1\!\!1 \arrow[r, equal] & 1\!\!1 \arrow[r, equal] & 1\!\!1
\end{tikzcd}$$

Generalizando este método a nuestro caso, surge la alternativa de elegir como 2-hipergrupoide sistema de coeficientes para el tercer conjunto de cohomología en dimensión dos al 2-hipergrupoide filtrado $\overline{W}(N''_{\bullet\bullet})$ construido anteriormente o al 2-hipergrupoide tambien filtrado $\overline{W}(INT(G''_\bullet)_{\bullet\bullet}) = E'' \underset{G''_0}{\times} INT(G'')_1 \underset{G''_0}{\times} INT(G'')_1 \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow} INT(G'')_1 \rightrightarrows G''_0$

Notemos que el morfismo de grupoides $INT(G_\bullet) \longrightarrow INT(G''_\bullet)$ inducido por el morfismo $G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ coiguala a $D_0, D_1 : E'_\bullet \rtimes INT(G_\bullet) \longrightarrow INT(G_\bullet)$ por lo que inducirá un único morfismo de grupoides $\overline{N}_\bullet \longrightarrow INT(G''_\bullet)$ haciendo conmutar el triangulo rallado del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E'_\bullet \rtimes INT(G_\bullet) \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & INT(G_\bullet) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \overline{N}_\bullet \arrow[dl, dashed] \\
 & INT(G''_\bullet) &
\end{tikzcd}$$

este morfismo junto con el morfismo proyección $E_\bullet/E'_\bullet \longrightarrow E''_\bullet$ (recordemos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
E/E' \arrow[r] \arrow[d] & E'' \arrow[d] \\
G_0 \arrow[r, two heads] & G''_0
\end{tikzcd}$$

es un pullback) inducen un morfismo de 2-hipergrupoides filtrados

$$\begin{tikzcd}
E/E' \times_{G_o} \bar{N}_1 \times_{G_o} \bar{N}_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & E'' \times_{G''_o} INT(G'')_1 \times_{G''_o} INT(G'')_1 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
\bar{N}_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & INT(G'')_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
G_o \arrow[r] & G''_o
\end{tikzcd}$$

y este una aplicación $H^2(X, \bar{W}(N''_{\bullet\bullet})) \longrightarrow H^2(X, \bar{W}(INT(G''_\bullet)_{\bullet\bullet})$. Es un problema abierto para nosotros comprobar si esta aplicación es o no una biyección.

Mientras a la hora de obtener una sucesión de nueve términos podemos tomar (al igual que ocurre en grupos) el 2-hipergrupoide $\bar{W}(N''_{\bullet\bullet})$ o $\bar{W}(INT(G''_\bullet)_{\bullet\bullet})$, siendo ambos válidos. Cuando tratamos de extender la sucesión otros tres puntos más, nos pareció más natural en esta dimensión tomar a $\bar{W}(N''_{\bullet\bullet})$ como 2-hipergrupoide sistema de coeficientes. Sin embargo, "intuitivamente" $\bar{W}(INT(G''_\bullet)_{\bullet\bullet})$ podría tambien ser válido, obteniendose "otra" extensión de la sucesión de seis puntos en cohomología que asociaremos a la sucesión exacta corta de grupoides.

Una disyunción análoga aparecerá en la siguiente dimensión por lo que estudiaremos primeramente los dos primeros 3-hipergrupoides sistemas de coeficientes y después el tercero.

Apliquemos el proceso anterior a la sucesión exacta corta de 2-grupoides $N'_{\bullet\bullet} \hookrightarrow N_{\bullet\bullet} \twoheadrightarrow N''_{\bullet\bullet}$. Calculemos en primer lugar el grupoide en GPD($\mathbb{C}$) de los automorfismos interiores de $N_{\bullet\bullet}$. Puesto que todo 2-grupoide es un grupoide abeliano en GPD($\mathbb{C}$) (corolario (1.3.8)) en particular lo será $N_{\bullet\bullet}$ y así (ver (2.1.10)) el grupoide en GPD($\mathbb{C}$) $INT(N_{\bullet\bullet})$ será trivial, es decir $INT(N_{\bullet\bullet}) = COSK^o(N_{\bullet\bullet})$, donde $N_{\bullet\bullet}$ se considera como grupoide en GPD($\mathbb{C}$) aumentado por su grupoide de componentes conexas. Por el lema (2.2.20), ya que $\rho_\bullet/E_\bullet : E_\bullet \longrightarrow INT(G_\bullet)$ es un grupoide cruzado conexo se tiene que el grupoide de componentes conexas de $N_{\bullet\bullet}$ es $COSK^o(INT(G_\bullet)) = COSK^o(G_\bullet)$, considerando a $G_\bullet$ aumentado por $R = \Pi_o(G_\bullet)$. Así $INT(N_{\bullet\bullet})$ será de nuevo un 2-grupoide:

$$\begin{tikzcd}
INT(N_{\bullet\bullet}): INT(G_\bullet)_1 \times_{G_o \times_R G_o} INT(G_\bullet)_1 \arrow[r, shift left, "D_o = pr_o"] \arrow[r, shift right, "D_1 = pr_1"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & INT(G_\bullet)_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_o \times_R G_o \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
G_o \arrow[r, equal] & G_o \arrow[r, equal] & G_o
\end{tikzcd}$$

Denotaremos a partir de ahora a $INT(G_\bullet)_1 \times_{G_o \times_R G_o} INT(G_\bullet)_1$ por $IN(G_\bullet)_1 * INT(G_\bullet)_1$, sus elementos serán pares $(\rho_g , \rho_{g'}) \in INT(G)_1 * INT(G)_1$ con $g, g' \in G_1$ tales que

$d_i(g) = d_i(g')$ $i=0,1$. Las multiplicaciones horizontal y vertical en $\mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1$ vienen dadas respectivamente por:

$$(\rho_{g_o}, \rho_{g'_o})\cdot(\rho_{g_1}, \rho_{g'_1}) = (\rho_{g_og_1}, \rho_{g'_og'_1}) \qquad \text{y}$$

$$(\rho_g, \rho_{g'})\times(\rho_{g'}, \rho_{g''}) = (\rho_g, \rho_{g''}) .$$

Consideremos ahora el grupoide gruzado generalizado de los automorfismos interiores de $N..$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
N.. : \;.\;.\;.\;.\;. \arrow[d, "\rho.."'] & & & E \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[dl, "\rho_{11}"'] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[dl, equal] \arrow[dd, equal] \\
\mathrm{INT}(N..) : \;.\;.\;. & & \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[dd, equal] & \\
& & & G_o \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_o \arrow[dl, equal] \\
& & G_o \arrow[rr, equal] & & G_o &
\end{tikzcd}$$

($\rho_{11} : E \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 \longrightarrow \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1$ está definido por $\rho_{11}(e, \rho_g) = (\rho_{eg}, \rho_g)$).
Este grupoide cruzado generalizado tiene un grupoide cruzado asociado (en GPD(C)) que viene dado por $\rho../\mathrm{End}(N..) : \mathrm{End}(N..) \longrightarrow \mathrm{COSK}^o(N..) = \mathrm{INT}(N..)$. Recordemos que $\mathrm{End}(N..) = Z(G.) \rtimes \mathrm{INT}(G.) \longrightarrow \mathrm{INT}(G.)$, donde $Z(G.) = Z \rightleftarrows G_o$ es el objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}/G_o$ centro de G, y que la acción de $\mathrm{INT}(G.)$ sobre $E.$ induce una acción de $\mathrm{COSK}^o(G.)$ sobre $Z(G.)$ (lema (2.2.21)) lo que significa que para cualquiera dos elementos $g, g' \in G_1$ tales que $d_i(g) = d_i(g')$ $i=0,1$ y cualquier $z \in Z$ con $d(z) = d_1(g) = d_1(g')$ se tiene que:

$${}^{\rho_g}z = g z g^{-1} = g' z g'^{-1} = {}^{\rho_{g'}}z \; .$$

en este sentido diremos que la acción de $\mathrm{INT}(G.)$ sobre $Z(G.)$ es " <u>casi trivial</u> " .

Entonces el grupoide cruzado en GPD(C), $\rho../\mathrm{End}(N..) : \mathrm{End}(N..) \longrightarrow \mathrm{COSK}^o(N..)$ viene dado por:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& Z \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[dl, "\rho_{11}"'] \arrow[rr, "D_o = D_1 = pr"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[dl, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
\mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& G_o \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_o \arrow[dl, equal] \\
G_o \arrow[rr, equal] & & G_o &
\end{tikzcd}$$

donde $\rho_{11}(z, \rho_g) = (\rho_{zg}, \rho_g) = (\rho_g, \rho_g)$ y la acción de $\mathrm{COSK}^o(N..)$ sobre $\mathrm{End}(N..)$ está dada por la acción del grupoide trivial $\begin{tikzcd} \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$ sobre el objeto grupo $\begin{tikzcd} Z \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[r] & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$ definida por:

$${}^{(\rho_g, \rho_{g'})}(z, \rho_{g'}) = ({}^{g}z, \rho_g) = ({}^{g'}z, \rho_g) \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g'"'] & \cdot \arrow[loop right, "z"] \end{tikzcd}$$

donde ${}^{g}z$ denota la acción por conjugación de g sobre z , notemos que por definición se tiene que ${}^{\rho_g}z = {}^{g}z$.

Utilizando ahora el teorema (2.2.14), el grupoide cruzado $\rho_{..}/\mathrm{End}(N_{..}):\mathrm{End}(N_{..}) \longrightarrow \mathrm{COSK}^o(N_{..})$ define un 2-grupoide en $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$ al que denotaremos por $\mathbb{Z}$ y que estará dado por:

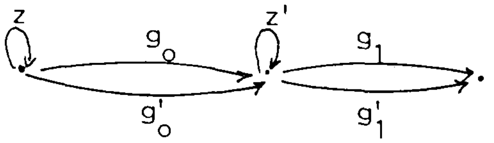
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} = \mathrm{End}(N_{..}) \rtimes \mathrm{COSK}^o(N_{..}) \arrow[r, shift left, "D_o"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & \mathrm{COSK}^o(N_{..}) \arrow[l, bend right, "S_o"'] .
\end{tikzcd}$$

El grupoide doble producto semidirecto en $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$ de $\mathrm{End}(N_{..})$ y $\mathrm{COSK}^o(N_{..})$ será:

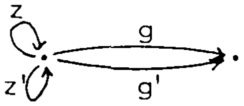
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}(N_{..}) \rtimes \mathrm{COSK}^o(N_{..}) = Z \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[r, "D_o = D_1 = pr"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
G_o \arrow[r, equal] & G_o
\end{tikzcd}$$

donde los elementos de $Z \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1$ serán ternas $(z, \rho_g, \rho_{g'})$ de elementos en $Z \times \mathrm{INT}(G\ )_1 \times \mathrm{INT}(G\ )_1$ tales que $d(z) = d_o(g) = d_o(g')$ y $d_1(g) = d_1(g')$, las multiplicasiones horizontal y vertical en $Z \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1$ están dadas respectivamente por:

$$(z, \rho_{g_o}, \rho_{g'_o}) \cdot (z', \rho_{g_1}, \rho_{g'_1}) = (z\,{}^{g_o}z', \rho_{g_og_1}, \rho_{g'_og'_1}) = (z\,{}^{g'_o}z', \rho_{g_og_1}, \rho_{g'_og'_1})$$



$$(z, \rho_g, \rho_{g'}) \times (z', \rho_g, \rho_{g'}) = (z\,z', \rho_g, \rho_{g'})$$



$\mathbb{Z}$ será por tanto un 3-grupoide en $\mathbb{C}$ al que representaremos por:

.1.3) $\mathbb{Z} = Z(G.) \rtimes \mathrm{COSK}^o(N_{..}) \xrightarrow[D_o = D_1 = pr]{} \mathrm{COSK}^o(N_{..})$ en la categoría 2-GPD($\mathbb{C}$) .

.1.4)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} = Z(G.) \rtimes \mathrm{INT}(G.) \underset{\mathrm{COSK}^o(G.)}{\times} \mathrm{INT}(G.) \arrow[r, "D_o = D_1 = pr"'] \arrow[d, shift right, "pr_1"'] \arrow[d, shift left, "pr_2"] & \mathrm{INT}(G.) \underset{\mathrm{COSK}^o(G.)}{\times} \mathrm{INT}(G.) \arrow[d, shift right, "pr_o"'] \arrow[d, shift left, "pr_1"] \\
\mathrm{INT}(G.) \arrow[r, equal] & \mathrm{INT}(G.)
\end{tikzcd}$$

en la categoría GPD($\mathbb{C}$)

.1.5)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} = & Z \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[rr, "D_o = D_1 = pr"'] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
\mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[rr, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G\ )_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& G_o \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_o \arrow[dl, equal] \\
G_o \arrow[rr, equal] & & G_o &
\end{tikzcd}$$

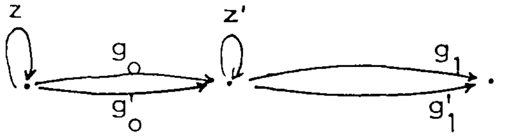
en la categoría $\mathbb{C}$.

Notemos que $\mathbb{Z}$ es un objeto grupo abeliano en $2\text{-}\mathrm{GPD}(\mathbb{C})/\mathrm{COSK}^o(N_{..})$, y un 3-grupoide en $\mathbb{C}$.

Las tres multiplicaciones en $Z \rtimes INT(G.)_1 * INT(G.)_1$ estan dadas por :

.1.6) La del grupoide $Z \rtimes INT(G.)_1 * INT(G.)_1 \rightrightarrows G_o$

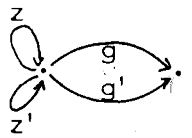
$$(z\ ,\ \rho_{g_o},\ \rho_{g'_o})\ (z'\ ,\ \rho_{g_1},\ \rho_{g'_1}) = (z\ {}^{g_o}z'\ ,\ \rho_{g_og_1},\ \rho_{g'_og'_1}) = (z\ {}^{g'_o}z',\ \rho_{g_og_1}\ ,\ \rho_{g'_og'_1})$$



.1.7) La del grupoide (grupo abeliano en $\mathbb{C}/ INT(G.)_1 * INT(G.)_1$)

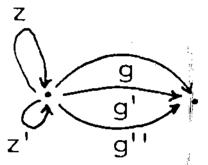
$$Z \rtimes INT(G.)_1 * INT(G.)_1 \xrightarrow{D_o = D_1 = pr} INT(G.)_1 * INT(G.)_1$$

$$(z\ ,\ \rho_g\ ,\ \rho_{g'})\times(z',\ \rho_g\ ,\ \rho_{g'}) = (\ z\ z'\ ,\ \rho_g\ ,\ \rho_{g'})$$



.1.8) La del grupoide $Z \rtimes INT(G.)_1 * INT(G.)_1 \rightrightarrows INT(G.)_1$

$$(\ z\ ,\ \rho_g\ ,\ \rho_{g'})\ \ (z'\ ,\ \rho_{g'}\ ,\ \rho_{g''}) = (\ z\ z'\ ,\ \rho_g\ ,\ \rho_{g''})$$



Verificandose la ley de compatibilidad (1.3.14) .

Al igual que en la dimensión anterior, puesto que $N'_{..} \hookrightarrow N_{..}$ es un sub2-grupoide normal, la acción de $INT(N..) = COSK^o(N..)$ sobre N..deja invariante a $N'_{..}$ siendo por tanto $\rho_{..}/N'_{..} : N'_{..} \longrightarrow COSK^o(N..)$ un grupoide cruzado generalizado en GPD($\mathbb{C}$).

En este caso el grupo en GPD($\mathbb{C}$)/ INT(G.) de los endomorfismos del 2-grupoide $N'_{..}$ viene dado por: $End(N'_{..}) = Z'_{\bullet} \rtimes INT(G.) \rightrightarrows INT(G.)$, donde $Z'_{\bullet} = Z(G'_{\bullet}:G_{\bullet}) = Z' \rightleftarrows G_o$ es el el objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}/G_o$ núcleo del morfismo de grupoides $\rho./G'_{\bullet}:G'_{\bullet} \longrightarrow INT(G.)$, los elementos de Z' serán aquellos $z' \in End(G'_{\bullet}) = E'$ tales que para todo $e \in End(G.) = E$ con $d(e) = d(z')$ se verifica: ${}^ez' = e\ z'\ e^{-1} = z'$. Por este motivo llamaremos a $Z'_{\bullet}$ "<u>Centralizador de $G'_{\bullet}$ en G.</u>" , claramente se tiene un monomorfismo (inclusión respecto a los elementos) $Z' \hookrightarrow Z(G.)$, verificandose además que $Z'_{\bullet}$ es un objeto sbgrupo de Z(G.) .

El grupoide cruzado en GPD($\mathbb{C}$) asociado al grupoide cruzado generalizado $\rho_{..}/N'_{..} : N'_{..} \longrightarrow COSK^o(N..)$ será:

$$\begin{tikzcd}
\rho_{..}/End(N'_{..}) : End(N'_{..}) \arrow[r] & COSK^o(N..) = Z'_{\bullet} \rtimes INT(G.) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & INT(G.) \underset{COSK^o_1(G_{\bullet})}{\times} INT(G.) \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
& INT(G.) \arrow[r, equal] & INT(G_{\bullet})
\end{tikzcd}$$

este tiene asociado (usando el teorema (2.2.14)) un 2-grupoide en GPD($\mathbb{C}$) al que denotaremos por $\mathbb{Z}' : End(N'_{..}) \rtimes COSK^o(N..) \underset{D_1}{\overset{D_o}{\rightrightarrows}} COSK^o(N..)$ (con S_o en sentido opuesto) y representaremos por:

.1.9) $$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}' = Z'. \rtimes \mathrm{COSK}^{0}(N..) \arrow[r, "D_0 = D_1 = pr"] & \mathrm{COSK}^{0}(N..) \arrow[l, bend right, "S_0"'] \end{tikzcd}$$ en la categoría 2-GPD($\mathbb{C}$) , por

.1.10) $$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}' = Z' \rtimes \mathrm{INT}(G.) \underset{\mathrm{COSK}^{0}(G.)}{\times} \mathrm{INT}(G.) \arrow[r, "D_0 = D_1 = pr"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathrm{INT}(G.) \underset{\mathrm{COSK}^{0}(G.)}{\times} \mathrm{INT}(G.) \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ \mathrm{INT}(G.) \arrow[r, equal] & \mathrm{INT}(G.) \end{tikzcd}$$

en la categoría GPD($\mathbb{C}$),

.1.11) $$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathbb{Z}' = & Z' \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[rrr, "D_0 = D_1 = pr"] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & & \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\ \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[rrr, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\ & G_0 \arrow[rrr, equal] \arrow[dl, equal] & & & G_0 \arrow[dl, equal] \\ G_0 \arrow[rrr, equal] & & & G_0 & \end{tikzcd}$$

Notemos que tambien $\mathbb{Z}'$ es un objeto grupo abeliano en 2-GPD($\mathbb{C}$)/COSK^{0}(G.) y un 3-grupoide en $\mathbb{C}$, donde las tres multiplicaciones en $Z' \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1$ estan dadas por restricción de las multiplicaciones en $Z \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1$ del 3-grupoide $\mathbb{Z}$.

Notemos que la inclusión $Z'. \hookrightarrow Z(G.)$ induce una inclusión de 3-grupoides en $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}' \hookrightarrow \mathbb{Z}$, verificandose que $\mathbb{Z}'$. es un subgrupoide (subgrupo en la coma categoría 2-GPD($\mathbb{C}$)/COSK^{0}(N..)) normal de $\mathbb{Z}$. Podemos entonces hacer el grupoide cociente en 2-GPD($\mathbb{C}$) (grupo cociente en 2-GPD($\mathbb{C}$)/COSK^{0}(N..)) de $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}'$, obteniendose así un grupoide $\mathbb{Z}''$ en 2-GPD($\mathbb{C}$) (grupo en 2-GPD($\mathbb{C}$)/COSK^{0}(N..)) y una sucesión exacta corta de grupos en 2-GPD($\mathbb{C}$)/COSK^{0}(N..)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}' \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\cdot\cdot"] & \mathbb{Z} \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, "\cdot\cdot"] & \mathbb{Z}'' \arrow[d, phantom, "\cdot\cdot"] \\ Z' \rtimes \mathrm{COSK}^{0}(N..) \arrow[r, hook] \arrow[dr, shift right] & Z(G\ ) \rtimes \mathrm{COSK}^{0}(N..) \arrow[r, two heads] \arrow[d, shift right] & Z(G.)/Z'. \rtimes \mathrm{COSK}^{0}(N..) \arrow[dl] \\ & \mathrm{COSK}^{0}(N..) \arrow[ul, shift right] \arrow[u, shift right] \arrow[ur, bend right] & \end{tikzcd}$$

Notemos que para definir el 2-grupoide producto semidirecto $Z(G.)/Z'. \rtimes \mathrm{COSK}^{0}(N..)$ necesitamos una acción de COSK^{0}(N..) sobre el objeto gruo en $\mathbb{C}/G_0$, $Z(G.)/Z'.$, y para tener esta acción necesitaremos una de INT(G.) sobre $Z(G.)/Z'.$. Si denotamos por $\bar{z}$ a la clase de $z \in Z(G.)$ en el cociente $Z(G.)/Z'.$, la acción " casi trivial " por conjugación de G. sobre Z(G.) induce una acción tambien "casi trivial " de G. sobre $Z(G.)/Z'.$ que estará definida por:

$$ {}^{g}\bar{z} = \overline{{}^{g}z} = \overline{g\,z\,g^{-1}} $$

notemos que si $z' \in Z'$, $z \in Z$ con $d(z) = d(z')$ entonces ; $g\,z'z\,g^{-1} = (g\,z'g^{-1})\,g\,z\,g^{-1}$ con $g\,z'g^{-1} \in Z' \Rightarrow \overline{{}^{g}(z'z)} = \overline{{}^{g}z}$ en $Z(G.)/Z'.$ así la acción está bien definida .

El 3-grupoide $\mathbb{Z}''$ estará entonces dado por :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}'' = & Z/Z' \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[rr, "D_o = D_1 = pr"] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
\mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[rr, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& G_o \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_o \arrow[dl, equal] \\
G_o \arrow[rr, equal] & & G_o &
\end{tikzcd}$$

donde las tres multiplicaciones en $Z/Z' \rtimes \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1$ estan dadas por:

.1.12) $(\bar{z}, \rho_{g_o}, \rho_{g'_o}) \cdot (\bar{z}', \rho_{g_1}, \rho_{g'_1}) = (\overline{z\,{}^{g_o}z'}, \rho_{g_og_1}, \rho_{g'_og'_1})$

.1.13) $(\bar{z}, \rho_{g}, \rho_{g'}) \times (\bar{z}', \rho_{g}, \rho_{g'}) = (\overline{z\,z'}, \rho_{g}, \rho_{g'})$

.1.14) $(\bar{z}, \rho_{g}, \rho_{g'}) \quad (\bar{z}', \rho_{g'}, \rho_{g''}) = (\overline{z\,z'}, \rho_{g}, \rho_{g''})$

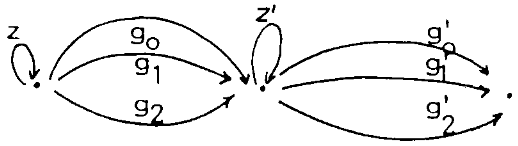
Consideremos ahora el funtor $\overline{W} : 2\text{-}\mathrm{GPD}(\mathrm{GPD}(\mathbb{C})) \longrightarrow 2\text{-}\mathrm{FHPGPD}(\mathrm{GPD}(\mathbb{C}))$ y apliquemoslo a la sucesión (exacta de 3-grupoides) $\mathbb{Z}' \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}''$. Comenzaremos aplicandoselo a $\mathbb{Z}$, $\overline{W}(\mathbb{Z})$ será el 2-hipergrupoide filtrado en $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathrm{COSK}^{o}(N..): \arrow[dl] & . \; . \; . & \mathrm{INT}(G)_1 * \mathrm{INT}(G)_1 * \mathrm{INT}(G)_1 \arrow[dl] \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G)_1 * \mathrm{INT}(G)_1 \arrow[dl, equal] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G)_1 \arrow[dl, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
\overline{W}(\mathbb{Z}): & . \; . \; . & Z \underset{G_o}{\times} \mathrm{INT}(G)_1 * \mathrm{INT}(G)_1 * \mathrm{INT}(G)_1 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G)_1 * \mathrm{INT}(G)_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \mathrm{INT}(G)_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& & & G_o \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_o \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_o \arrow[dl, equal] \\
& & G_o \arrow[rr, equal] & & G_o \arrow[rr, equal] & & G_o &
\end{tikzcd}$$

donde la multiplicación del grupoide $Z \underset{G_o}{\times} \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G.)_1 \rightrightarrows G_o$ está dada por:

$$(z, \rho_{g_o}, \rho_{g_1}, \rho_{g_2}) \cdot (z', \rho_{g'_o}, \rho_{g'_1}, \rho_{g'_2}) = (z\,{}^{g_i}z', \rho_{g_og'_o}, \rho_{g_1g'_1}, \rho_{g_2g'_2})$$

donde ${}^{g_i}z'$ indica cualquiera de los elementos g_i , $i=0,1,2$, actuando sobre z', notemos que ${}^{g_o}z' = {}^{g_1}z' = {}^{g_2}z'$



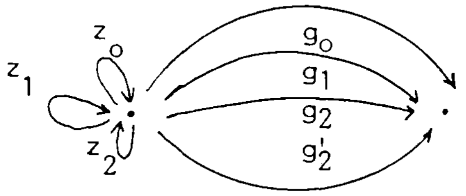
y el corchete del 2-hipergrupoide

$$\begin{tikzcd}
Z \underset{G_o}{\times} \mathrm{INT}(G.)_1 * \mathrm{INT}(G)_1 * \mathrm{INT}(G)_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{INT}(G)_1 * \mathrm{INT}(G)_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathrm{INT}(G)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
& \longmapsto (\rho_{g_o}, \rho_{g_1}) \\
(z, \rho_{g_o}, \rho_{g_1}, \rho_{g_2}) \quad & \longmapsto (\rho_{g_o}, \rho_{g_2}) \\
& \longmapsto (\rho_{g_1}, \rho_{g_2})
\end{aligned}$$

está dado por : $\left[(z_o, \rho_{g_o}, \rho_{g_1}, \rho_{g_2}), (z_1, \rho_{g_o}, \rho_{g_1}, \rho_{g'_2}), (z_2, \rho_{g_o}, \rho_{g_2}, \rho_{g'_2})\right] =$

$= (z_2 z^{-1} z \; , \rho_{g_1}, \rho_{g_2}, \rho_{g'_2})$



Notemos además que $\overline{W}(\mathbb{Z})$ es un (2,1)-hipergrupoide en $\mathbb{C}$. Si consideramos ahora el funtor $\overline{W} : (2,1)\text{-HPGPD}(\mathbb{C}) \longrightarrow 3\text{-HPGPD}(\mathbb{C})$ y se lo aplicamos a $\overline{W}(\mathbb{Z})$ obtenemos el siguiente 3-hipergrupoide filtrado :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{INT}(G.) : \;. \;\;. \;\;. \;\;. \;\;. \arrow[d, hook] & \mathrm{INT}(G)\underset{G_o}{\times}\mathrm{INT}(G) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, hook] & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & G_o \arrow[d, equal] \\
\mathrm{COSK}^1(\mathrm{INT}(G.)) : \ldots \Delta_3 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] \arrow[d, dash] & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, equal] & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & G_o \arrow[d, equal] \\
\overline{W}(\mathbb{Z}) : \;. \;\;. \;\;. \;\;. \;\;. \;Z \underset{G_o}{\times} \Delta_3 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_o
\end{tikzcd}$$

donde hemos denotado por Δ_i a $\mathrm{COSK}^1(\mathrm{INT}(G.))_i$, $i > 1$, y $Z \underset{G_o}{\times} \Delta_3$ al objeto pullback

$$\begin{tikzcd}
Z \underset{G_o}{\times} \Delta_3 \arrow[r] \arrow[d] & \Delta_3 \arrow[d, "d_o^3"] \\
Z \arrow[r, "d"] & G_o
\end{tikzcd}$$

además hemos utilizado isomorfismos como:

$$\mathrm{INT}(G.)_1 \; {}_{G_o}\underset{R}{\times}{}_{G_o} \; \mathrm{INT}(G.)_1 \underset{G_o}{\times} \mathrm{INT}(G.)_1 \;\cong\; \Delta_2$$

Los operadores caras $d_i : Z \underset{G_o}{\times} \Delta_3 \longrightarrow \Delta_2$ serán las composiciones $Z \times \Delta_3 \xrightarrow{pr} \Delta_3 \xrightarrow{d_i} \Delta_2$ y la operación corchete en $Z \underset{G_o}{\times} \Delta_3$ viene dada como sigue:

Un elemento $(\zeta_o, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, -) \in \Lambda_4^4(\overline{W}^2(\mathbb{Z}))$ está dado por una matriz

$$\begin{pmatrix} \zeta_o \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_o & x_o & x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & x_o & x_1' & x_2' & x_3' \\ z_2 & x_1 & x_1' & x_2'' & x_3'' \\ z_3 & x_2 & x_2' & x_2'' & x_3''' \end{pmatrix}$$

donde cada fila será un elemento de $Z \underset{G_o}{\times} \Delta_3$ así por ejemplo

$$(z_o, x_o, x_1, x_2) = \left(z_o , \begin{pmatrix} g_o , & g_1 , & g_2 \\ g_o , & g_1' , & g_2' \\ g_1 , & g_1' , & g_2'' \\ g_2 , & g_2' , & g_2'' \end{pmatrix} \right)$$

verificando que $d(z_o) = d_o(g_o)$. Entonces:

$$\left[\zeta_o, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \right] = ({}^{g_o^{-1}}(z_3 z_2^{-1} z_1 z_o^{-1}), x_3, x_3', x_3'', x_3''')$$

notemos que $d_o^2(\zeta_o) = d_o(x_o) = \rho_{g_o}$ y que ${}^{g_o^{-1}}(z_3 z_2^{-1} z_1 z_o^{-1})$ denota al elemento g_o^{-1} (o equivalentemente a $\rho_{g_o}^{-1}$) actuando sobre el producto alternado de los elementos $z_3, z_2, z_1, z_o \in Z$.

Analogamente , para los 3-grupoides $\mathbb{Z}'$ y $\mathbb{Z}''$ obtenemos 3-hipergrupoides filtrados

$$\begin{tikzcd}
\bar{W}(\mathbb{Z}') : \quad . \quad . \quad . \quad Z' \underset{G_o}{\times} \Delta_3 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & INT(G.)_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & G_o
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\bar{W}(\mathbb{Z}'') : \quad . \quad . \quad . \quad Z/Z' \underset{G_o}{\times} \Delta_3 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & INT(G.)_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & G_o
\end{tikzcd}$$

con filtraciones:

$$INT(G.) \hookrightarrow COSK^1(INT(G.)) \hookrightarrow \bar{W}(\mathbb{Z}'),$$

$$INT(G.) \hookrightarrow COSK^1(INT(G.)) \hookrightarrow \bar{W}(\mathbb{Z}'')$$

Analizando a los 3-hipergrupoides filtrados $\bar{W}(\mathbb{Z})$,$\bar{W}(\mathbb{Z}')$ y $\bar{W}(\mathbb{Z}'')$ observamos que quedan determinados por:

( ) Un grupoide (INT(G.)) .

( ) Un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}/G_o$ ($Z(G.)$, $Z'_.$ y $Z(G.)/Z'_.$ respectivamente).

( ) Una acción "casi trivial " del grupoide sobre el grupo abeliano .

A estos 3-hipergrupoides los denotaremos por $K_{INT(G.)}(Z(G.), 3)$, $K_{INT(G.)}(Z'_., 3)$ y $K_{INT(G.)}(Z(G.)/Z'_., 3)$ respectivamente.. La sucesión $\mathbb{Z}' \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}''$ inducirá una sucesión (" exacta de 3-hipergrupoides "):

$$\begin{tikzcd}
K_{INT(G.)}(Z'_.,3) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, ".."] & K_{INT(G.)}(Z(G.),3) \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, ".."] & K_{INT(G.)}(Z(G.)/Z'_.,3) \arrow[d, phantom, ".."] \\
Z' \underset{G_o}{\times} \Delta_3 \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift right=3] & Z \underset{G_o}{\times} \Delta_3 \arrow[r, two heads] \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift right=3] & Z/Z' \underset{G_o}{\times} \Delta_3 \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift right=3] \\
\Delta_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & \Delta_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & \Delta_2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
INT(G.)_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] & INT(G.)_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] & INT(G.)_1 \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \\
G_o \arrow[r, equal] & G_o \arrow[r, equal] & G_o
\end{tikzcd}$$

que nos darán los 3-hipergrupoides sistemas de coeficientes.

Podemos ahora repetir el proceso conla sucesión exacta corta de 3-grupoides $\mathbb{Z}' \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}''$ obteniendo de este modo los 4-hipergrupoides filtrados sistemas de coeficientes y así sucesivamente los n-hipergrupoides filtrados sistemas de coeficientes.

Estudiando a los 3-hipergrupoides $K_{INT(G.)}(Z'_.,3)$, $K_{INT(G.)}(Z(G.),3)$ y $K_{INT(G.)}(Z(G.)/Z'_.,3)$ observamos que son facilmente generalizables a dimensiones $n > 3$. Así por ejemplo definimos $K_{INT(G.)}(Z(G.),n)$, $n > 3$, como el n-hipergrupoide filtrado siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{INT}(G.): \arrow[d, hook] & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \mathrm{INT}(G.) \times_{G_0} \mathrm{INT}(G.) \arrow[d, hook] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[d, equal] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \arrow[d, equal] \\
\mathrm{COSK}^1(\mathrm{INTG.})): \ \cdots & \Delta_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & \Delta_{n-1} & \cdots & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \\
\vdots & & & & & & \\
\mathrm{COSK}^1(\mathrm{INT}(G.)): \ \cdots \arrow[d, hook] & \Delta_n \arrow[d, hook] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & \Delta_{n-1} \arrow[d, equal] & \cdots & \Delta_2 \arrow[d, equal] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[d, equal] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \arrow[d, equal] \\
K_{\mathrm{INT}(G)}(Z(G),n): \ \cdots & Z \times_{G_0} \Delta_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & \Delta_{n-1} & \cdots & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{INT}(G.)_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0
\end{tikzcd}$$

donde $\Delta_i = \mathrm{COSK}^1(\mathrm{INT}(G.))_i, i > 1$, $Z \times_{G_0} \Delta_n$ es el objeto pullback:

$$\begin{tikzcd}
Z \times_{G_0} \Delta_n \arrow[r] \arrow[d] & \Delta_n \arrow[d, "d_0^n"] \\
Z \arrow[r, "d"] & G_0
\end{tikzcd}$$

los operadores caras $d_i : Z \times_{G_0} \Delta_n \longrightarrow \Delta_{n-1}$ están dados por las composiciones $Z \times_{G_0} \Delta_n \xrightarrow{pr} \Delta_n \xrightarrow{d_i} \Delta_{n-1}$ y los degeneración $s_i : \Delta_{n-1} \text{———} Z \times_{G_0} \Delta_n$ los únicos morfismos inducidos por las parejas de morfismos $s_i : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n$ y $s d_0^{n-1} : \Delta_{n-1} \longrightarrow Z$.

Por último el corchete de $K_{\mathrm{INT}(G.)}(Z(G.),n)$ está dado por:

$$\left[(z_0, \xi_0), \ldots ,(z_n, \xi_n)\right] = ({}^{d_0^{n-1}(\xi_0)^{-1}} A(z_n, \ldots ,z_0),(d_n(\xi_0), \ldots ,d_n(\xi_n))$$

donde $(\xi_0, \ldots , \xi_n) \in \Delta_{n+1}$ y $A(z_n, \ldots ,z_0)$ denota el producto alternado de los elementos z_i (que estan todos en la misma fibra i.e. $d(z_i) = d(z_j)$, $i,j = 0 \ldots n$).

Analogamente definimos $K_{\mathrm{INT}(G.)}(Z'.,n)$ y $K_{\mathrm{INT}(G.)}(Z(G.)/Z'.,n)$. Estos n-hipergrupoides filtrados no solo para el grupoide INT(G.) y los objetos grupo $Z'.$, $Z(G.)$ y $Z(G.)/Z'.$ sino que podrán ser definidos para cualquier pareja (N., A.) formada por un grupoide N. y un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}/N_0$, A., sobre el que actue " casi trivialmente el grupoide N., más detalladamente:

.1.15) <u>Definición</u> (Los n-hipergrupoides filtrados $K_{N.}(A.,n)$) .

Sea $N. = N_1 \rightrightarrows N_0$ (con flecha $N_0 \to N_1$) un grupoide en $\mathbb{C}$, $A. = A \underset{d}{\overset{s}{\leftrightarrows}} N_0$ un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}/N_0$ y una acción "<u>casi trivial</u>" de N. sobre A. i.e. para todo $a \in A$, $n,n' \in N_1$ con $d(a) = d_1(n) = d_1(n')$ y $d_0(n) = d_0(n')$ se verifica que ${}^{n}a = {}^{n'}a$, equivalentemente ; la acción de N. sobre A. induce una acción de $\mathrm{COSK}^0(N.) = \mathrm{cosk}^1(N_0 \twoheadrightarrow \pi_0(N))$ sobre A. (el motivo por el cual hemos llamado a estas acciones casitriviales es porque el grupo de endomorfismos de N. actua trivialmente sobre A.) . En estas condiciones, definimos el n-hipergrupoide filtrado $K_{N.}(A.,n)$, $n > 2$, por:

$$\begin{tikzcd}
K_{N.}(A.,n) = \ \cdots & A \times_{N_0} \Delta_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & \Delta_{n-1} & \cdots & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & N_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N_0
\end{tikzcd}$$

donde $\Delta_i = \mathrm{COSK}^1(N_\bullet)_i$, $i \geqslant 2$, $A \underset{N_o}{\times} \Delta_n$ es el objeto pullback:

$$\begin{tikzcd} A \underset{N_o}{\times} \Delta_n \arrow[r] \arrow[d] & \Delta_n \arrow[d, "d_o^n"] \\ A \arrow[r, "d"] & N_o \end{tikzcd}$$

los operadores caras $d_i : A \underset{N_o}{\times} \Delta_n \longrightarrow \Delta_{n-1}$ están dados por las composiciones $A \underset{N_o}{\times} \Delta_n \xrightarrow{pr} \Delta_n \xrightarrow{d_i} \Delta_{n-1}$ y los degeneración estan inducidos por los morfismos $s_i : \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n$ y $sd_o^{n-1} : \Delta_{n-1} \longrightarrow A$. Por último la operación corchete está definida por:

$$\left[(a_o, \xi_o), \ . \ . \ . \ ,(a_n, \xi_n)\right] = (\ {}^{d_o^{n-1}(\xi_o)^{-1}} A(a_n, \ \ldots \ ,a_o),(d_n(\xi_o), \ \ldots \ ,d_n(\xi_n)))$$

para $(\xi_o, \ \ldots \ , \xi_n) \in \Delta_{n+1}$. La filtración está dada por :

$$N_\bullet \hookrightarrow \mathrm{COSK}^1(N_\bullet) = \quad . \quad . \quad . \quad = \mathrm{COSK}^1(N_\bullet) \hookrightarrow K_{N_\bullet}(A_\bullet, n)$$

1.16) Nota.- Si el grupoide $N_\bullet = K(\mathbb{1},0)$ entonces $K_n(A \ ,n) = K(A,n)$. Asi si la sucesión exacta corta de grupoides de partida fuese $K(A',1) \hookrightarrow K(A,1) \twoheadrightarrow K(A'',1)$ para A',A y A'' objetos grupos abelianos en $\mathbb{C}$, entonces $\mathrm{INT}(K(A,1)) = K(\mathbb{1},0)$ y los n-hipergrupoides sistemas de coeficientes serán $K(A,n)$,$K(A',n)$ y $K(A'',n)$.

.1.17) Nota.- Si el grupoide $N_\bullet$ y el objeto grupo abeliano $A_\bullet$ están en las condiciones de la definición (3.1.15), tambien lo estaran $\mathrm{COSK}^o(N_\bullet)$ y $A_\bullet$. Podemos entonces definir tambien los n-hipergrupoides $K_{\mathrm{COSK}^o(N_\bullet)}(A_\bullet,n)$, además el morfismo canónico $N_\bullet \longrightarrow \mathrm{COSK}^o(N_\bullet)$ induce un morfismo simplicial $K_{N_\bullet}(A_\bullet,n) \longrightarrow K_{\mathrm{COSK}^o(N_\bullet)}(A_\bullet,n)$. Este morfismo simplicial define para cada objeto X en $\mathbb{C}$ una aplicación

$$\mathrm{TORS}^n\left[X,K_{N_\bullet}(A_\bullet,n)\right] \longrightarrow \mathrm{TORS}^n\left[X,K_{\mathrm{COSK}^o(N_\bullet)}(A_\bullet,n)\right]$$

Es una cuestión abierta para nosotros si esta aplicación es una biyección, posteriormente veremos que la respuesta es afirmativa en el caso de ser N_o el objeto terminal $\mathbb{1}$ en C.

.1.18) Nota.- Si $(H_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet)$ es un grupoide generalizado conexo y denotamos por $A_\bullet = A \leftrightarrows N_o$ al objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}/N_o$, $\mathrm{Ker}(\rho_\bullet)$, entonces la pareja $(N_\bullet, A_\bullet)$ estará siempre en las condiciones de la definición (3.1.15) pudiendose definir entonces los n-hipergrupoides filtrados $K_{N_\bullet}(A_\bullet,n)$. Sin embargo si el grupoide cruzado generalizado no es conexo, la acción de $N_\bullet$ sobre $A_\bullet$ no tiene porque ser casi trivial . Podemos generalizar no obstante la definición de los n-hipergrupoides $K_{N_\bullet}(A_\bullet,n)$ de la siguiente forma:

Sea $\bar{H}_\bullet$ el grupoide coigualador de $D_o, D_1 : \mathrm{End}(H_\bullet) \ ] \ N_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ y $p : N_\bullet \twoheadrightarrow \bar{H}_\bullet$ el morfismo canónico. Para $n \geqslant 3$, definimos

$$K_{(H_\bullet,N_\bullet,\rho_\bullet)}(A_\bullet,n) = \ . \ . \ . \ A \underset{N_o}{\times} \Delta_n \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\vdots}} \Delta_{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad \Delta_2 \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} N_1 \rightrightarrows N_o$$

donde $\Delta_i = \mathrm{COSK}^1(N_\bullet)_i$, $i \geqslant 2$, $A \underset{N_o}{\times} \Delta_n$ el objeto pullback

$$\begin{tikzcd} A \underset{N_o}{\times} \Delta_n \arrow[r] \arrow[d] & \Delta_n \arrow[d] \\ A \arrow[r] & N_o \end{tikzcd}$$

los operadores caras y degeneraciones se obtienen como en la definición (3.1.15) y la operación corchete está dado por

$$\left[(a_0,\xi_0),\ \ldots\ ,(a_n,\xi_n)\right] = ({}^{(p_1 d_0^{n-1}(\xi_0))^{-1}} A(a_n,\ \ldots\ ,a_0),(d_n(\xi_0),\ \ldots\ ,d_n(\xi_0)))$$

.1.19) Nota.- Al igual que en dimensión dos, los 3-hipergrupoides sistemas de coeficientes para definir los dos primeros conjuntos de cohomología en dimensión tres, estan perfectamente determinados, serán $\overline{W}^2(\mathbb{Z}') = K_{INT(G_\cdot)}(Z'_\cdot,3)$ y $\overline{W}^2(\mathbb{Z})=K_{INT(G_\cdot)}(Z(G_\cdot),3)$. Como tercer 3-hipergrupoide sistema de coeficientes hemos elegido a $\overline{W}^2(\mathbb{Z}'')=K_{INT(G_\cdot)}(Z(G_\cdot)/Z'_\cdot,3)$ pero existe otro candidato con el que la sucesión de once términos puede extenderse a doce. Este viene dado como sigue:

Recordemos que habiamos elegido a $\overline{W}(N''_{\cdot\cdot})$ como tercer 2-hipergrupoide sistema de coeficientes, donde $N''_{\cdot\cdot}$ es el 2-grupoide cociente de $N_{\cdot\cdot}$ por $N'_{\cdot\cdot}$, el complejo de Moore de $N''_{\cdot\cdot}$ está dado por $\bar{\rho}_\cdot : E_\cdot/E'_\cdot \longrightarrow \bar{N}_\cdot$ donde $\bar{\rho}_\cdot$ es el morfismo inducido por la composición $E_\cdot \xrightarrow{\rho_\cdot/E_\cdot} INT(G_\cdot) \twoheadrightarrow \bar{N}_\cdot$, la acción de $\bar{N}_\cdot$ sobre $E_\cdot/E'_\cdot$ está dada por: ${}^{\overline{\rho_g}}\bar{e} = \overline{{}^{\rho_g}e} = \overline{{}^{g}e}$ donde $\overline{\rho_g}$ y $\bar{e}$ denotan elementos de $\bar{N}_1$ y E/E' respectivamente. El objeto grupo abeliano $Ker(\bar{\rho}_\cdot)$ es el cociente $Z(G_\cdot)/Z'_\cdot = Z/Z' \rightleftarrows G_0$. Se verifica que el coigualador de $D_0, D_1 : E_\cdot/E'_\cdot \rightrightarrows \bar{N}_\cdot \longrightarrow \bar{N}_\cdot$ coincide con $COSK^0(\bar{N}_\cdot) = COSK^0(G_\cdot)$ ($\Pi_0(\bar{N}) = \Pi_0(INT(G_\cdot)) = \Pi_0(G_\cdot)$) así por el lema (2.2.21) $\bar{N}_\cdot$ actua casi trivialmente sobre $Z(G_\cdot)/Z'_\cdot$. Podemos entonces definir el 3-hipergrupoide $K_{\bar{N}_\cdot}(Z(G_\cdot)/Z'_\cdot,3)$ obteniendose una sucesión de 3-hipergrupoides filtrados

$$K_{INT(G_\cdot)}(Z'_\cdot,3) \hookrightarrow K_{INT(G_\cdot)}(Z(G_\cdot),3) \twoheadrightarrow K_{\bar{N}_\cdot}(Z(G_\cdot)/Z'_\cdot,3)$$

Nos ha parecido, al igual que en dimensión dos, más natural tomar como tercer 3-hipergrupoide sistema de coeficientes a $K_{INT(G_\cdot)}(Z(G_\cdot)/Z'_\cdot,3)$ en vez de $K_{\bar{N}_\cdot}(Z(G_\cdot)/Z'_\cdot,3)$. Sin embargo parece "intuitivamente" posible el extender la sucesión en cohomología utilizando $K_{\bar{N}_\cdot}(Z(G_\cdot)/Z'_\cdot,3)$ y en general $K_{\bar{N}_\cdot}(Z(G_\cdot)/Z'_\cdot,n)$.

1.20) Nota.- Como hemos podido observar, los n-hipergrupoides sistemas de coeficientes que utilizaremos para asociar a una sucesión exacta corta de grupoides $G'_\cdot \hookrightarrow G_\cdot \twoheadrightarrow G''_\cdot$ una sucesión "exacta larga" en la cohomología depende solamente de los grupoides $G'_\cdot, G_\cdot$ y $G''_\cdot$ siendo necesario (para definir el grupoide $INT(G_\cdot)$) que en la categoría base $\mathbb{C}$ podamos definir el objeto centro de un grupo interno.

Analizando detenidamente el papel que juega el grupoide de automorfismos interiores de $G_\cdot$ en las construcciones anteriores observamos :

1º $INT(G_\cdot)$ permite definir un grupoide cruzado generalizado $\rho_\cdot : G_\cdot \longrightarrow INT(G_\cdot)$ verificandose que la acción de $INT(G_\cdot)$ deja invariante a $G'_\cdot$ siendo $\rho_\cdot/G'_\cdot : G'_\cdot \longrightarrow INT(G_\cdot)$

tambien un grupoide cruzado generalizado. Esto nos ha permitido definir los 2-hipergrupoides sistemas de coeficientes.

2º El grupoide cruzado generalizado $\rho_\bullet : G_\bullet \longrightarrow INT(G_\bullet)$ es conexo, así la acción inducida de $INT(G_\bullet)$ sobre el grupo abeliano $Ker(\rho_\bullet) = Z(G_\bullet)$ es casi trivial. Además puesto que la acción de $INT(G_\bullet)$ sobre $G'_\bullet$ está dada por restricción de la acción sobre $G_\bullet$, tambien $INT(G_\bullet)$ actua casi trivialmente sobre $Z'_\bullet = Ker(\rho_\bullet/G'_\bullet)$. Verificandose tambien que la acción de $INT(G_\bullet)$ sobre $Z(G_\bullet)$ induce una acción casi trivial de $INT(G_\bullet)$ sobre $Z(G_\bullet)/Z'_\bullet$. Esto nos ha permitido definir los n-hipergrupoides sistemas de coeficientes endimensiones $n > 2$.

Resumiendo; las dos propiedades esenciales son:

-) $\rho_\bullet : G_\bullet \longrightarrow INT(G_\bullet)$ es un grupoide cruzado generalizado conexo.

-) La accion de $INT(G_\bullet)$ se restringe a $G'_\bullet$ de forma que $\rho_\bullet/G'_\bullet : G'_\bullet \longrightarrow INT(G_\bullet)$ es tambien un grupoide cruzado generalizado .

Supongamos entonces que además de la sucesión exacta corta de grupoides $G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ tenemos un grupoide cruzado generalizado $(G_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet)$ verificando:

a) $(G_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet)$ es conexo.

b) La acción de $N_\bullet$ sobre $G_\bullet$ deja a $E'_\bullet = End(G'_\bullet)$ invariante verificandose que $(G'_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet/G'_\bullet)$ es tambien un grupoide cruzado grneralizado.

$$\begin{tikzcd}
G'_1 \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\rho_1/G'_1"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[r, two heads] \arrow[dl, "\rho_1"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & G''_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
& N_1 \arrow[dd, shift left, dash] \arrow[dd, shift right, dash] & & \\
G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dr, equal] & & G_0 \arrow[r] \arrow[dl, equal] & G''_0 \\
& G_0 & &
\end{tikzcd}$$

Seguiremos denotando $E_\bullet = End(G_\bullet)$, $E'_\bullet = End(G'_\bullet)$ y $E''_\bullet = End(G''_\bullet)$. Los grupoides cruzados $(E'_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet/E'_\bullet)$ y $(E_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet/E_\bullet)$ asociados a $(G'_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet/G'_\bullet)$ y $(G_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet)$ respectivamente, definen (Teorema (2.2.14)) dos 2-grupoides a los que denotaremos $N'_{\bullet\bullet}$ y $N_{\bullet\bullet}$, el morfismo de grupoides cruzados
$$\begin{tikzcd}
E'_\bullet \arrow[r, "\rho_\bullet/E'_\bullet"] \arrow[d, hook] & N_\bullet \arrow[d, equal] \\
E_\bullet \arrow[r, "\rho_\bullet/E_\bullet"] & N_\bullet
\end{tikzcd}$$
induce un morfismo de 2-grupoides $N'_{\bullet\bullet} \hookrightarrow N_{\bullet\bullet}$ verificandose (por ser $E'_\bullet$ un objeto subgrupo normal de $E_\bullet$) que $N'_{\bullet\bullet}$ es un sub2-grupoide normal de $N_{\bullet\bullet}$. Sea $N''_{\bullet\bullet}$ el 2-grupoide cociente de $N_{\bullet\bullet}$ por $N'_{\bullet\bullet}$ tenemos así una sucesión exacta de 2-grupoides: $N'_{\bullet\bullet} \hookrightarrow N_{\bullet\bullet} \twoheadrightarrow N''_{\bullet\bullet}$

$$\begin{tikzcd}
E' \rtimes N_1 \arrow[rr, hook] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E \rtimes N_1 \arrow[rr] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E/E' \rtimes \bar{N}_1 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
& N_1 \arrow[rr, dash] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \bar{N}_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dr, equal] & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[dl, equal] \\
& G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 &
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{N}_\bullet$ es el grupoide coigualador de $D_0, D_1 : E'_\bullet \rightrightarrows N_\bullet \longrightarrow N_\bullet$ y la acción de $\bar{N}_\bullet$ sobre $E_\bullet/E'_\bullet$ viene inducida por la de $N_\bullet$ sobre $E_\bullet$.

Aplicando el funtor $\bar{W}$ a la sucesión de 2-grupoides anterior, obtenemos una sucesión (exacta corta) de 2-hipergrupoides filtrados :

$$\begin{tikzcd}
\bar{W}(N'_{\bullet\bullet}) \arrow[r, hook] & \bar{W}(N_{\bullet\bullet}) \arrow[r, two heads] & \bar{W}(N''_{\bullet\bullet}) \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\
E' \times_{G_0} N_1 \times_{G_0} N_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & E \times_{G_0} N_1 \times_{G_0} N_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & E/E' \times_{G_0} \bar{N}_1 \times_{G_0} \bar{N}_1 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
N_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & N_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \bar{N}_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
G_0 \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[r, equal] & G_0
\end{tikzcd}$$

Denotemos por $Z'_\bullet : Z' \overset{\curvearrowleft}{\longrightarrow} G_0$ y $Z_\bullet : Z \overset{\curvearrowleft}{\longrightarrow} G_0$ a los objetos grupos abelianos en $\mathbb{C}/G_0$ $\mathrm{Ker}(\rho_\bullet/G'_\bullet)$ y $\mathrm{Ker}(\rho_\bullet)$ respectivamente . Puesto que $G'_\bullet$ es un subgrupoide normal de $G_\bullet$ se tiene que $Z'_\bullet$ es un objeto subgrupo de $Z_\bullet$(normal) . Por otra parte, por ser el grupoide cruzado generalizado $(G_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet)$ conexo, se tiene que la acción de $N_\bullet$ sobre $Z_\bullet$ es "casi tirvial" y lo mismo ocurre con la acción de $N_\bullet$ sobre $Z'_\bullet$ por ser esta una restricción de la anterior, verificandose además que la acción de $N_\bullet$ sobre $Z_\bullet$ induce una acción de $N_\bullet$ sobre el cociente $Z_\bullet/Z'_\bullet$ siendo esta tambien casi trivial. Podemos entonces definir los n-hipergrupoides filtrados $K_{N_\bullet}(Z'_\bullet, n)$,$K_{N_\bullet}(Z_\bullet, n)$ y $K_{N_\bullet}(Z_\bullet/Z'_\bullet, n)$, $n > 3$.

Asociaremos por lo tanto una sucesión exacta larga en cohomología a una sucesión exacta corta de grupoides $G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ en $\mathbb{C}$, junto con un grupoide cruzado generalizado $(G_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet)$ verificando las condiciones (a) y (b) anteriores.

Si el grupoide cruzado generalizado no verificase (a) (i.e. no fuese conexo), podriamos asociar a la sucesión exacta corta de grupoides junto con el grupoide cruzado generalizado una sucesión exacta en cohomología de nueve puntos pudiendose extenderse a infinitos puntos utilizando los n-hipergrupoides filtrados $K_{(G_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet)}(Z'_\bullet, n)$, $K_{((G_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet)}(Z_\bullet, n)$ y $K_{(G_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet)}(Z_\bullet/Z'_\bullet, n)$ definidos en (3.1.18), con lo que la condición (a) puede ser suprimida.

Si en la categoría $\mathbb{C}$ tiene sentido el centro de un objeto grupo (y por tanto $\mathrm{INT}(G_\bullet)$) podemos tomar como grupoide cruzado generalizado a $(G_\bullet, \mathrm{INT}(G_\bullet), \rho_\bullet)$, dependiendo los sistemas de coeficientes solamente de los grupoides $G'_\bullet, G_\bullet$ y $G''_\bullet$.

A partir de ahora mantendremos las notaciones adoptadas en esta nota (3.1.20) .

.1.21) El caso de objetos grupo .

Sea $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ una sucesión exacta corta de objetos grupos en $\mathbb{C}$, no necesariamente abelianos y $\rho : A \longrightarrow N$ un módulo cruzado en $\mathrm{Gp}(\mathbb{C})$ (como por ejemplo el módulo cruzado de los automorfismos interiores de A , $\rho : A \longrightarrow \mathrm{Int}(A)$, siempre que tenga sentido) verificando que $\rho/A' : A' \longrightarrow N$ es tambien un módulo cruzado entonces la sucesión exacta corta de 2-grupoides $N'_{\bullet\bullet} \hookrightarrow N_{\bullet\bullet} \twoheadrightarrow N''_{\bullet\bullet}$ está dada por:

$$\begin{tikzcd}
A' \rtimes N \arrow[rr, hook] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & A \rtimes N \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & A'' \rtimes \bar{N} \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
& N \arrow[rr] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \bar{N} \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
\mathbb{1} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, equal] & & \mathbb{1} \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & \mathbb{1} \arrow[dl, equal] \\
& \mathbb{1} \arrow[rr, equal] & & \mathbb{1} &
\end{tikzcd}$$

notemos que el plano horizontal superior representa una sucesión exacta corta de grupoides en $Gp(\mathbb{C})$ y que los 2-hipergrupoides filtrados $\bar{W}(N'_{\bullet\bullet})$, $\bar{W}(N_{\bullet\bullet})$ y $\bar{W}(N''_{\bullet\bullet})$ se obtienen aplicandole el funtor $\bar{W}$ clásico a esta sucesión de grupoides en $Gp(\mathbb{C})$:

$$\begin{tikzcd}
\bar{W}(N'_{\bullet\bullet}) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, ":"] & \bar{W}(N_{\bullet\bullet}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, ":"] & \bar{W}(N''_{\bullet\bullet}) \arrow[d, phantom, ":"] \\
A' \times N^2 \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & A \times N^2 \arrow[r, two heads] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & A'' \times \bar{N}^2 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
N \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & N \arrow[r, two heads] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \bar{N} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
\mathbb{1} \arrow[r, equal] & \mathbb{1} \arrow[r, equal] & \mathbb{1}
\end{tikzcd}$$

estudiando el trabajo de Dedecker [19] en el que asocia a una sucesión exacta corta de grupos internos en la categoría de haces sobre un espacio topológico paracompacto, junto con un "sistema de coeficientes " una sucesión "exacta " en la cohomología de Cěch y mientras tratabamos de dar una interpretación simplicial de sus conjuntos de cohomología en dimensión dos en téminos de"cociclos" sobre 2-hipergrupoides, aparecieron como traducción simplicial de los sistemas de coeficientes de Dedecker los 2-hipergrupoides filtrados anteriores. Fué posteriormente cuando el profesor Duskin me hizo notar que estos que estos 2-hipergrupoides se podian obtener utilizando el funtor $\bar{W}$ clásico y esta fué la idea básica que nos permitió , después de un detallado estudio de la categoría de 2-grupoides (el cual queda reflejado en el capitulo 2), construir los 2-hipergrupoides filtrados sistemas de coeficientes en el caso general.

Sean Z' y Z los obetos grupos abelianos en $\mathbb{C}$, $\mathrm{Ker}(\rho/A')$ y $\mathrm{Ker}(\rho)$ denotaremos por $K_N(Z,n)$ al n-hipregrupoide $K_{K(N,1)}(Z,n)$ (analogamente para Z' y Z/Z'). La siguente proposición muestra que es indistinto tomar como sistemas de coeficientes los n-hipergrupoides $K_{N'}(Z',n)$, $K_N(Z,n)$ y $K_N(Z/Z',n)$ o los n-hipergrupoides $K(Z',n)$ $K(Z,n)$ y $K(Z/Z',n)$ dando una respuesta parcial a la pregunta planteada en (3.1.17).

La demostración de esta proposición será inmediata cuando se tenga una interpretación de los conjuntos de cohomología (abelianos) en términos de clases de homotopía de " cociclos ". Por este motivo no hemos considerado de interés dar una demostración directa de esta proposición .

.1.22) Proposición.-

En las condiciones anteriores, el morfismo simplicial $K_N(Z,n) \longrightarrow K(Z,n)$ inducido por el morfismo canónico $K(N,1) \longrightarrow K(\pi,0)=\mathrm{COSK}^0(K(N,1))$, es una equivalencia homotópica y por tanto define una biyección natural

$$\mathrm{TORS}^n[X,K_N(Z,n)] \longrightarrow \mathrm{TORS}^n\,[X,K(Z,n)]$$

para cada objeto X de $\mathbb{C}$ (analogamente para Z' y Z/Z') .

Si el objeto grupo A es abeliano y tomamos como $N = \mathrm{Int}(A) = \pi$, entonces los 2-grupoides $N'_{\bullet\bullet}$, $N_{\bullet\bullet}$ y $N''_{\bullet\bullet}$ son $K(K(A',1),1)$, $K(K(A,1),1)$ y $K(K(A'',1,1)$ aplicando el funtor $\overline{W}$ obtenemos los usuales 2-hipergrupoides sistemas de coeficientes abelianos $K(A',2)$, $K(A,2)$ y $K(A'',2)$, y en dimensión n será los n-hipergrupoides $K(A',n)$, $K(A,n)$ y $K(A'',n)$ que son los hipergrupoides sistemas de coeficientes abelianos usuales (ver [32])

.1.23) El caso en que la categoría base $\mathbb{C}$ es una variedad de Mal'cev.

En una variedad de Mal'cev se verifica (al igual que en grupos o en categorías de Interés) que todo grupoide interno es abeliano (ver [2]) así si $\mathbb{C}$ es una variedad de Mal'cev y $G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ es una sucesión exacta corta de grupoides en $\mathbb{C}$, entonces $G_\bullet$ es abeliano y por tanto $\mathrm{End}(G_\bullet) = Z(G_\bullet)$. Si tomamos como grupoide cruzado generalizado el de los automorfismos interiores de $G_\bullet$

$$\mathrm{INT}(G_\bullet) = \mathrm{COSK}^0(G_\bullet) = \quad . \quad . \quad . \quad G_0 \times_R G_0 \times_R G_0 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; G_0 \times_R G_0 \rightrightarrows G_0 \twoheadrightarrow R = \pi_0(G_\bullet)$$

la acción de $\mathrm{INT}(G_\bullet)$ sobre $E_\bullet$ es casitrivial, podemos así hablar tambien de $K_{\mathrm{COSK}^0(G_\bullet)}(E_\bullet,2)$ y analogamente para $E'_\bullet$ y $E_\bullet/E'_\bullet$ siendo en este caso los n-hipergrupoides sistemas de coeficientes para $n > 2$:

$$\begin{tikzcd}
\underset{\bullet\bullet}{K_{\mathrm{COSK}^0(G_\bullet)}}(E'_\bullet,n) \arrow[r, hook] & \underset{\bullet\bullet}{K_{\mathrm{COSK}^0(G_\bullet)}}(E_\bullet,n) \arrow[r, two heads] & \underset{\bullet\bullet}{K_{\mathrm{COSK}^0(G_\bullet)}}(E_\bullet/E'_\bullet,n) \\
E' \times_{G_0} G_0 \times_R \overset{n+1}{\cdots\cdots} \times_R G_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, shift right=3] \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & E \times_{G_0} G_0 \times_R \overset{n+1}{\cdots\cdots} \times_R G_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, shift right=3] \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & E/E' \times_{G_0} G_0 \times_R \overset{n+1}{\cdots\cdots} \times_R G_0 \arrow[d, shift right=3] \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, phantom, "\cdots"] \\
G_0 \times_R \overset{n}{\cdots\cdots} \times_R G_0 \arrow[r, equal] & G_0 \times_R \overset{n}{\cdots\cdots} \times_R G_0 \arrow[r, equal] & G_0 \times_R \overset{n}{\cdots\cdots} \times_R G_0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
G_0 \times G_0 \arrow[r, equal] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & G_0 \times G_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_0 \times G_0 \arrow[d, two heads] \\
G_0 \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[r, equal] & G_0
\end{tikzcd}$$

Notemos que en este caso $D_0 = D_1 : E'_\bullet \rfloor \mathrm{COSK}^0(G_\bullet) \longrightarrow \mathrm{COSK}^0(G_\bullet)$ así $\overline{N}_\bullet = \mathrm{COSK}^0(G_\bullet)$.

Elementos neutros y elementos nulos .

Supondremos en todo este apartado : X un objeto de $\mathbb{C}$, $G'_\bullet \hookrightarrow G_\bullet \twoheadrightarrow G''_\bullet$ una sucesión exacta corta de grupoides en $\mathbb{C}$ y $(G_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet)$ un grupoide cruzado generalizado verificando las condiciones:

(a) $(G_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet)$ es conexo .

(b) La accion de $N_\bullet$ sobre $G_\bullet$ deja invariante a $E'_\bullet = \mathrm{End}(G'_\bullet)$ verificandose que $(G'_\bullet, N_\bullet, \rho_\bullet/G'_\bullet)$ es tambien un grupoide cruzado generalizado .

Seguiremos tambien las notaciones establecidas en (3.1.20) , así $N'_{\bullet\bullet} \hookrightarrow N_{\bullet\bullet} \twoheadrightarrow N''_{\bullet\bullet}$ será la sucesión exacta de 2-grupoides asociada y $K_{N_\bullet}(Z'_\bullet, n)$, $K_{N_\bullet}(Z_\bullet, n)$, $K_{N_\bullet}(Z/Z'_\bullet, n)$ los n-hipergrupoides sistemas de coeficientes $n > 2$.

Los conjuntos de cohomología con coeficientes en estos hipergrupoides no tienen en general estructura de grupo, como ocurre en el caso abeliano. Necesitaremos por tanto, para establecer los términos de la exactitud en la sucesión de cohomología, distinguir ciertos elementos en los conjuntos de cohomología, a los que llamaremos elementos neutros y elementos nulos.

Elementos neutro y nulos en dimensión cero.

El operador degeneración $s_0 : G_0 \longrightarrow G_1$ induce una aplicacíon

$$s_{0*} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, G_0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, G_1) = H^0(X, G_\bullet)$$

.1.24) Definición (Elementos neutros en dimensión cero, elemento nulo).

A los elementos en la imagen de la aplicación $s_{0*} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, G_0) \longrightarrow H^0(X, G_\bullet)$ los llamaremos elementos neutros de $H^0(X, G\ )$.

Supongamos un morfismo $\varphi : X \longrightarrow G_0$ en $\mathbb{C}$, denotaremos por

$$H^0_\varphi(X, G_\bullet) = \{ f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, G_1) \ / \ d_0 f = \varphi \}$$

este conjunto está contenido en $H^0(X, G_\bullet)$ y en él existe solamente un elemento neutro $s_0\varphi$ al que llamaremos " elemento nulo " de $H^0(X, G_\bullet)$.

Consideraremos a partir de ahora a $H^0(X, G_\bullet)$ como un conjunto con elementos distinguidos y a $H^0_\varphi(X, G_\bullet)$ como un conjunto punteado. Analogamente para los grupoides $G'_\bullet$, $G''_\bullet$ y en general para cualquier grupoide. Notemos que un morfismo de grupoides preserva a los elementos neutros.

Elementos neutros y nulos en dimensión uno .

Dado un morfismo $f : X \longrightarrow G_0$ levantando por pullback el 1-torsor escindido de G_0 $\mathrm{DEC}(G_\bullet) \longrightarrow G_\bullet$, via f, obtenemos un 1-torsor escindido de X sobre $G_\bullet$

$$\begin{tikzcd}
f^*(\mathrm{DEC}(G.)): \arrow[d] & \cdots & f^*(G_1 \times_{G_0} G_1) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & f(G_1) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{DEC}(G.): \arrow[d] & \cdots & G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[d, "d_2"'] & G_1 \arrow[r, two heads, "d_0"] \arrow[d, "d_1"'] & G_0 \\
G. : & \cdots & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

tenemos así definida una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G_0) & \longrightarrow & \mathrm{TORS}^1[X,G.] = H^1(X,G.) \\ f & \longmapsto & [f^*(\mathrm{DEC}(G.))] \end{array}$$

Notemos que, considerando a $\mathrm{DEC}(G.) = \mathrm{COSK}^0(\mathrm{DEC}(G.))$ como un grupoide se tiene una biyección $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G_0) \cong \mathrm{TORS}^1[X,\mathrm{DEC}(G.)] = H^1(X,\mathrm{DEC}(G.))$ entonces ψ puede ser considerado desde $H^1(X,\mathrm{DEC}(G.))$.

1.25) Definición (Elementos neutros y nulos en dimensión uno).

Llamaremos elementos neutros en $H^1(X,G.)$ a aquellos en la imágen de la aplicación

$$\psi : H^1(X,\mathrm{DEC}(G.)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G_0) \longrightarrow H^1(X,G.)$$

Si $\varphi : X \longrightarrow G_0$ es un morfismo en $\mathbb{C}$ denotaremos por $H^1_{\varphi}(X,G.)$ al conjunto punteado $(H^1(X,G.),[\psi(\varphi)])$ y llamaremos elemento nulo al elemento distinguido entre los elementos neutros $[\psi(\varphi)] = [\varphi^*(\mathrm{DEC}(G.) \longrightarrow G.)]$.

Esta definición se generaliza para cualquier grupoide. Además si $h. : H. \longrightarrow G.$ es un morfismo de grupoides, entonces el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{DEC}(H.) \arrow[r, "\mathrm{DEC}(h.)"'] \arrow[d] & \mathrm{DEC}(G.) \arrow[d] \\
H. \arrow[r, "h."] & G.
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y por tanto lo es el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
H^1(X,\mathrm{DEC}(H.)) \arrow[r, "\mathrm{DEC}(h.)_*"'] \arrow[d, "\psi_{H.}"'] & H^1(X,\mathrm{DEC}(G.)) \arrow[d, "\psi_{G.}"] \\
H^1(X,H.) \arrow[r, "h._*"] & H^1(X,G.)
\end{tikzcd}$$

verificandose por tanto que los elementos neutros se conservan por morfismos de grupoides.

Elementos nulos y neutros en dimensión dos .

Dado un 1-torsor $\alpha. : E. \longrightarrow N.$, levantando por pullback el 1-torsor escindido en $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$ de $N.$ sobre $N..$, $\mathrm{DEC}(N..) \longrightarrow N..$, via $\alpha.$ obtenemos un 1-torsor escindido de $E.$ sobre $N..$:

$$\begin{tikzcd}
\alpha^*(\mathrm{DEC}(N..)): \arrow[d] & \cdots & \alpha^*((E\rfloor N.) \times_{N.} (E\rfloor N.)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \alpha^*(E\rfloor N.) \arrow[r] \arrow[d] & E. \arrow[d, "\alpha."] \\
\mathrm{DEC}(N..)): \arrow[d] & \cdots & (E\rfloor N.) \times_{N.} (E | N.) \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] \arrow[d, "D_2"'] & E\rfloor N. \arrow[r] \arrow[d, "D_1"] & N. \\
N..: & \cdots & E\rfloor N. \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N. &
\end{tikzcd}$$

Obtenemos así, para cada torsor $\alpha.$ de X sobre $N.$, un torsor escindido en $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$ de $E.$ sobre $N..$. Este torsor (tomando clases) nos determina un elemento de $\mathbb{H}^1(X,N..)$, recordemos que $\mathbb{H}^1(X,N_{..}) = \varinjlim_{p\in RE(X)} \underline{\mathrm{Tors}}^1\left[\mathrm{cosk}^0(p),N_{..}\right]$ (definición (1.5.7)). Verificandose además que si $\alpha_.$ y $\beta_.$ son dos 1-torsores de X sobre $N_.$ que estan en la misma clase en $TORS^1\left[X,N_.\right]$ los 1-torsores escindidos $\alpha_.^*(DEC(N_{..}))$ y $\beta_.^*(DEC(N_{..}))$ estan en la misma clase en $\mathbb{H}^1(X,N_{..})$. Tenemos por tanto definida una aplicación

$$\theta: H^1(X,N_.) \longrightarrow \mathbb{H}^1(X,N_{..})$$

Utilizando ahora el teorema (1.5.9) tenemos que el funtor $\overline{W}$ induce una biyección natural $\mathbb{H}^1(X,N_{..}) \underset{\Phi}{\overset{\overline{W}}{\rightleftarrows}} TORS^2\left[X,\overline{W}(N_{..})\right] = H^2(X,\overline{W}(N_{..}))$, denotaremos Ψ a la composición:

$$\Psi : H^1(X,N_.) \xrightarrow{\theta} \mathbb{H}^1(X,N_{..}) \xrightarrow{\cong} H^2(X,\overline{W}(N_{..}))$$

Notemos que esta aplicación se obtiene tambien como la aplicación inducida por el morfismo simplicial $\sigma_.: N_. \longrightarrow \overline{W}(N_{..})$ (filtración del hipergrupoide $\overline{W}(N_{..})$)

$$\Psi = \sigma_{.*} : H^1(X,N_.) = H^2(X,N_.) \longrightarrow H^2(X,\overline{W}(N_{..})) \;)$$

donde hemos considerado a $N_.$ como un 2-hipergrupoide .

.1.26) Definición (Elementos neutros en dimensión dos) .

A los elementos en la imagen de la aplicación $\sigma_* = \Psi: H^1(X,N_.) \longrightarrow H^2(X,\overline{W}(N_{..}))$ los llamaremos elementos neutros de $H^2(X,\overline{W}(N_{..}))$.

Esta definición será válida para cualquier 2-grupoide $H_{..} = J_.\rtimes H_. \rightrightarrows H_.$. Puesto que cada morfismo de 2-grupoides $f_{..}:H_{..}\longrightarrow N_{..}$ induce un morfismo simplicial filtrado

$$\begin{tikzcd}
H_. \arrow[r, "f_{.0}"] \arrow[d, "\sigma_.'"'] & N_. \arrow[d, "\sigma_."] \\
\overline{W}(H_{..}) \arrow[r, "\overline{W}(f_{..})"] & \overline{W}(N_{..})
\end{tikzcd}$$

y este un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^1(X,H_.) \arrow[r, "f_{.0*}"] \arrow[d, "\Psi_{H_{..}}"'] & H^1(X,N_.) \arrow[d, "\Psi_{N_{..}}"] \\
H^2(X,\overline{W}(H_{..})) \arrow[r, "\overline{W}(f_{..})_*"] & H^2(X,\overline{W}(N_{..}))
\end{tikzcd}$$

tenemos que los elementos neutros se conservaran por morfismos de 2-grupoides.

Definamos ahora los elementos nulos.

Consideremos la acción de $G_.$ sobre su grupo de endomorfismos $E_.$ por conjugación, entonces el morfismo inclusión $E_.\hookrightarrow G_.$ determina un grupoide cruzado , denotaremos por $G_{..} = E_.\rtimes G_. \overset{\longleftarrow}{\rightrightarrows} G_.$ al 2-grupoide asociado a este grupoide cruzado. El morfismo de grupoides cruzados:

$$\begin{tikzcd}
E_. \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & G_. \arrow[d, "\rho_."] \\
E_. \arrow[r, "\rho_./E_."] & N
\end{tikzcd}$$

induce un morfismo de 2-grupoides :

$$\begin{tikzcd}
G_{..}: \arrow[d, "\rho_{..}"'] & E_.\rtimes G_. \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "id\times\rho_."'] & G_. \arrow[d, "\rho_."] \\
N_{..}: & E_.\rtimes N_. \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N_.
\end{tikzcd}$$

Aplicando ahora el funtor $\overline{W}$ al diagrama anterior, obtenemos un morfismo de 2-hipergrupoides filtrados $\overline{W}(\rho_{..}) : \overline{W}(G_{..}) \longrightarrow \overline{W}(N_{..})$, pero $\overline{W}(G_{..}) \cong COSK^1(G_.)$ así:

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}(G_{\bullet\bullet}) = \mathrm{COSK}^1(G_{\bullet}) = \arrow[d, dash, "\overline{W}(\rho_{\bullet\bullet})"'] & \cdots & E \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_0 \arrow[d, equal] \\
\overline{W}(N_{\bullet\bullet}) = & \cdots & E \times_{G_0} N_1 \times_{G_0} N_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & N_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0
\end{tikzcd}$$

este morfismo induce una aplicación:

$$H^2(X,\mathrm{COSK}^1(G_{\bullet})) \longrightarrow H^2(X,\overline{W}(N_{\bullet\bullet}))$$

1.27) Lema.-

Para cada objeto X y cada grupoide $G_{\bullet}$ en $\mathbb{C}$, si denotamos por $R = \pi_0(G_{\bullet})$, entonces se tiene una biyección natural

$$\rho : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,R) \xrightarrow{\cong} H^2(X,\mathrm{COSK}^1(G_{\bullet}))$$

Demostración.- Claramente el objeto simplicial aumentado $\mathrm{COSK}^1(G_{\bullet}) \twoheadrightarrow R$ es asferical siendo $id:\mathrm{COSK}^1(G_{\bullet}) \longrightarrow \mathrm{COSK}^1(G_{\bullet})$ un 2-torsor de R sobre $\mathrm{COSK}^1(G_{\bullet})$. Definimos, para cada mofismo $f:X \longrightarrow R$, $\rho(f)$ como la clase del torsor que se obtiene al levantar por pullback el torsor $id:\mathrm{COSK}^1(G_{\bullet}) \rightarrow \mathrm{COSK}^1(G_{\bullet})$ via f, i.e. $\rho(f) = [f^*(id)]$. Notemos por otra parte que cada torsor $\alpha_{\bullet}: E_{\bullet} \rightarrow \mathrm{COSK}^1(G_{\bullet})$ de X induce un morfismo $f = \alpha_{-1}: X \rightarrow R$ y que dos torsores en la misma clase en $\mathrm{TORS}^2[X,\mathrm{COSK}^1(G_{\bullet})]$ inducen el mismo morfismo en las aumentaciones. Verificandose por tanto que ρ es una biyección.

Denotemos por η a la aplicación composición :

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,R) \underset{\rho}{\xrightarrow{\cong}} H^2(X,\mathrm{COSK}^1(G_{\bullet})) \longrightarrow H^2(X,\overline{W}(N_{\bullet\bullet}))$$

1.28) Definición (Elementos nulos en dimensión dos) .

Llamaremos elementos nulos de $H^2(X,\overline{W}(N_{\bullet\bullet}))$ a los elementos en la imagen de la aplicación $\eta:\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,R) \longrightarrow H^2(X,\overline{W}(N_{\bullet\bullet}))$.

Esta definición puede generalizarse a cualquier conjunto $H^2(X,\overline{W}(H_{\bullet\bullet}))$ para $H_{\bullet\bullet}$ el 2-grupoide asociado a un grupoide cruzado generalizado $\varphi_{\bullet}:K_{\bullet} \longrightarrow H_{\bullet}$. Verificandose, que un morfismo de grupoides cruzados generalizados

$$\begin{tikzcd}
K_{\bullet} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{\bullet}"'] & H_{\bullet} \arrow[d, "\rho_{\bullet}"] \\
G_{\bullet} \arrow[r] & N_{\bullet}
\end{tikzcd}$$

induce un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{COSK}^1(K_{\bullet}) \arrow[r] \arrow[d] & \overline{W}(H_{\bullet\bullet}) \arrow[d] \\
\mathrm{COSK}^1(G_{\bullet}) \arrow[r] & \overline{W}(N_{\bullet\bullet})
\end{tikzcd}$$

y éste otro cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^2(X,\mathrm{COSK}^1(K_{\bullet})) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(X,\overline{W}(H_{\bullet\bullet})) \arrow[d] \\
H^2(X,\mathrm{COSK}^1(G_{\bullet})) \arrow[r] & H^2(X,\overline{W}(N_{\bullet\bullet}))
\end{tikzcd}$$

con lo que se tiene que los elementos nulos se conservan por morfismos de grupoides cruzados generalizados.

Observemos que en dimensiones cero y uno , solamente hay un elemento nulo en cada conjunto de cohomología, que es además un elemento neutro distinguido (para definirlo necesitabamos tener un morfimo $\varphi : X \longrightarrow G_o$) . No ocurre esto en dimensión dos, esto es existen elementos nulos (en general) que no tienen porque ser neutros.

Veamos ahora una condición sobre el grupoide cruzado generalizado que nos implica que todo elemento nulo es neutro.

El morfismo de grupoides $\rho. : G. \rightarrow N.$ induce un morfismo simplicialfiltrado:

$$\begin{tikzcd} G. \arrow[r] \arrow[d, "\rho."'] & COSK^1(G.) \arrow[d] \\ N. \arrow[r] & \overline{W}(N..) \end{tikzcd}$$

y este un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H^2(X,G.) = H^1(X,G.) \arrow[r] \arrow[dd] & H^2(X,COSK^1(G.)) \arrow[dd] \arrow[dr, "\cong"] & \\ & & Hom_{\mathbb{C}}(X,R) \arrow[dl, "\eta"] \\ H^2(X,N.) = H^1(X,N.) \arrow[r, "\psi_{N..}"] & H^2(X,\overline{W}(N..)) & \end{tikzcd}$$

Entonces si la composición $H^1(X,G.) \longrightarrow H^2(X,COSK(G.)) \cong Hom_{\mathbb{C}}(X,R)$, que asocia a cada elemento $[\alpha.]$ en $H^1(X,G.)$ el morfismo $\alpha_{-1} : X \longrightarrow R$ inducido en las aumentaciones, es sobre , todo elemento nulo es neutro. Notemos que si R es el objeto terminal $\mathbb{1}$ entonces solamente hay un elemento nulo que será neutro (si existe algún elemento neutro).

Como los 2-hipergrupoides $N'..$ y $N..$ provienen de los grupoides cruzados generalizados $\rho./G'.:G'. \longrightarrow N.$ y $\rho.:G. \longrightarrow N.$ tenemos definidos los elementos nulos en $H^2(X,\overline{W}(N'..))$ y $H^2(X,\overline{W}(N..))$, para definirlos en $H^2(X,\overline{W}(N''..))$, consideremos el grupoide $G.^{\#}$ cociente de G. por el subgrupoide normal $E'. = End(G'.)$. Tenemos entonces un diagrama

$$\begin{tikzcd} E'. \triangleleft G. \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "id \times \rho."'] & G. \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\rho."] & G.^{\#} \arrow[d, dashed, "\overline{\rho}."] \\ E'. \triangleleft N. \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N. \arrow[r, two heads] & \overline{N}. \end{tikzcd}$$

donde la sucesión superior es exacta en el sentido de Barr en la categoría GPD($\mathbb{C}$), el morfismo composición $G. \xrightarrow{\rho.} N. \twoheadrightarrow \overline{N}.$ induce un morfismo $\overline{\rho}.:G.^{\#} \longrightarrow \overline{N}.$ haciendo conmutar el cuadrado de la derecha en el anteriordiagrama. Además la acción de N. sobre E. induce una acción de $\overline{N}.$ sobre el grupo de endomorfismo de $G.^{\#}$ ($End(G.^{\#}) = E./E'.$) siendo $\overline{\rho}.:G.^{\#} \longrightarrow \overline{N}.$ un grupoide cruzado generalizado verificandose que $N''..$ es el 2-grupoide asociado al grupoide cruzado $\overline{\rho}./(E./E'.) : E./E'. \longrightarrow \overline{N}.$ (asociado a $\overline{\rho}.:G.^{\#} \longrightarrow \overline{N}.$) asi definiremos los elementos nulos de $H^2(X,\overline{W}(N''..))$ como aquellos en la imagen del morfismo $Hom_{\mathbb{C}}(X,R) = H^2(X,COS^o(G.)) \longrightarrow H^2(X,\overline{W}(N''..))$.

Notemos por otra parte que los elementos nulos en dimensión dos jugarán un papelimportante para la exactitud de la sucesión de cohomología , solamente en el punto del centro $H^2(X,\overline{W}(N..))$ por lo que no es necesario definirlos en $H^2(X,\overline{W}(N''..))$.

La siguiente proposición nos relaciona los elementos neutros en dimensión dos con los

2-torsores clasicamente distinguidos, los casi escindidos .

.1.29) Proposición.-

Si $\zeta \in H^2(X,\overline{W}(N_{..}))$) es un elemento neutro entonces existe un torsor casi escindido $\alpha_. : E_. \longrightarrow \overline{W}(N_{..})$ de X tal que su clase en $H^2(X,\overline{W}(N_{..}))$) es ζ ,i $[\alpha_.] = \zeta$.

Demostración .- Recordemos que los elementos neutros son aquellos en la imagen de la aplicación $\Psi : H^1(X,N_.) = H^2(X,N_.) \longrightarrow H^2(X,\overline{W}(N_{..}))$) inducida por la inclusión $\sigma_. : N_. \hookrightarrow \overline{W}(N_{..})$ que da la filtración del 2-hipergrupoide $\overline{W}(N_{..})$. Claramente todo 1-torsor sobre $N_.$, considerado como un 2-torsor es casi escindido (puesto que el 1-grupoide asociado a $N_.$ considerado este como 2-hipergrupoide es $K(N_1,0)$) Por tanto puesto que Ψ lleva torsores casi escindidos en casiescindidos tenemos que en la clase de todo elemento neutro hay un torsor casi escindido .//

Dos preguntas surgen despues de esta proposición (3.1.29):

1ª ¿ Es cierto el recíproco de (3.1.29) ? es decir ¿ es la clase de cualquier torsor casi escindido un elemento neutro? .

2ª ¿ Existe , para cada elemento nulo un torsor casi escindido cuya clase sea dicho elemento nulo ?

Las respuestas a estas preguntas es desconocida para nosotros, sin embargo parece intuitivamente que ambas son negativas en general.

Elementos neutros y nulos en dimensiones $n \geqslant 3$.

Definamos primero los elementos neutros y nulos en dimensión tres y generalicemos luego a dimensiones superiores.

Recordemos que a partir del grupoide cruzado generalizado $N_{..} \longrightarrow INT(N_{..}) = COSK^0(N_{..})$ definiamos un 3-grupoide $\mathbb{Z} =$

$$\begin{tikzcd}
 & Z \lhd N_1 * N_1 \arrow[rr, "D_0 = D_1 = pr"] \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1 * N_1 \arrow[dl, shift left] \arrow[dl, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
N_1 \arrow[rr, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
 & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[dl, equal] \\
G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 &
\end{tikzcd}$$

donde $N_1 * N_1$ denota el objeto par núcleo del morfismo $N_1 \longrightarrow G_0 \underset{\pi_0(N)}{\overset{x}{}} G_0$;$x \longmapsto (d_0(x), d_1(x))$) y $Z = Ker(\rho_. : G_. \longrightarrow N_.)$, a partir de $\mathbb{Z}$ obteniamos $K_{N_.}(Z ,3) = \overline{W}^2(\mathbb{Z})$.

Tenemos entonces, al igual que en el caso anterior, asociado al grupoide cruzado generalizado $N_{..} \longrightarrow INT(N_{..})$ morfismos simpliciales dobles:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{COSK}^0(N_{..})=\mathrm{INT}(N_{..}): \arrow[d, "\sigma_{..}"'] & \cdots & & N_1\ast N_1\ast N_1 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1\ast N_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1 \arrow[dl, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
\overline{W}(\mathbb{Z}): & \cdots & Z\times_{G_0}N_1\ast N_1\ast N_1 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1\ast N_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[dl, equal] \\
& & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathrm{COSK}^1(N_{..}): \arrow[d, "\zeta_{..}"'] & \cdots & & \Delta \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dl, "\zeta_2"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E\times_{G_0}N_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, "\zeta_1"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1 \arrow[dl, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
\overline{W}(\mathbb{Z}): & \cdots & Z\times_{G_0}N_1\ast N_1\ast N_1 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1\ast N_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[dl, equal] \\
& & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 &
\end{tikzcd}$$

notemos que un elemento generico del núcleo simplicial de $E\times_{G_0}N_1 \rightrightarrows N_1$ al que hemos denotado por Δ será $z = ((e_0n),(e_1,n),(e_2, \rho(e_0)n))$ verificando que $e_1e_0^{-1}e_2^{-1}$ es un endomorfismo de G. que está en Z, además $\zeta_1(e,n) = (n, \rho(e)n)$ y $\zeta_2(z) = (e_1e_0^{-1}e_2^{-1}, n_1\rho(e_0)n, \rho(e_2e_0)n) \in Z\times_{G_0}N_1\ast N_1\ast N_1$.

Los morfismos $\sigma_{..}$ y $\zeta_{..}$ definen para cada epimorfismo regular $p:E\twoheadrightarrow X$ en RE(X) aplicaciones:

$$\sigma_\ast : H^2(\mathrm{cosk}^0(p),\mathrm{COSK}^0(N_{..})) \longrightarrow H^2(\mathrm{cosk}^0(p), \overline{W}(\mathbb{Z}))$$

$$\zeta_\ast : H^2(\mathrm{cosk}^0(p),\mathrm{COSK}^1(N_{..})) \longrightarrow H^2(\mathrm{cosk}^0(p), \overline{W}(\mathbb{Z}))$$

que definen los elementos neutros y nulos en $H^2(\mathrm{cosk}^0(p), \overline{W}(\mathbb{Z}))$. Ahora bien en este caso se tienen biyecciones canónicas:

$$H^2(\mathrm{cosk}^0(p),\mathrm{COSK}^1(N_{..})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Simpl}(\mathbb{C})}(\mathrm{cosk}^0(p), \mathrm{COSK}^0(N_.))$$

$$H^2(\mathrm{cosk}^0(p),\mathrm{COSK}^0(N_{..})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Simpl}(\mathbb{C})}(\mathrm{cosk}^0(p), \mathrm{COSK}^0(N_.))$$

además el morfismo canónico $\mathrm{COSK}^1(N_{..}) \longrightarrow \mathrm{COSK}^0(N_{..})$ induce un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^2(\mathrm{cosk}^0(p),\mathrm{COSK}^1(N_{..})) \arrow[rr] \arrow[dr, "\cong"] & & H^2(\mathrm{cosk}^0(p),\mathrm{COSK}^0(N_{..})) \arrow[dl, "\cong"'] \\
& \mathrm{Hom}_{\mathrm{Simpl}(\mathbb{C})}(\mathrm{cosk}^0(p), \mathrm{COSK}^0(N_.)) &
\end{tikzcd}$$

por lo que tenemos que los elementos nulos y neutros en $H^2(\mathrm{cosk}^0(p), \overline{W}(\mathbb{Z}))$ coinciden para cada epimorfismo regular p en RE(X). Consideremos ahora las clases de dichos elementos en $\mathbb{H}^2(X,\overline{W}(\mathbb{Z}))$ tenemos entonces unos elementos distinguidos en $\mathbb{H}^2(X,\overline{W}(\mathbb{Z}))$ a los que llamaremos tambien neutros. Utilizando ahora la aplicación inducida por el funtor $\overline{W}$: $\Omega : \mathbb{H}^2(X, \overline{W}(\mathbb{Z})) \longrightarrow H^3(X, \overline{W}^2(\mathbb{Z}))$ (ver (1.5.12)) .

Los elementos neutros de $\mathbb{H}^2(X,\overline{W}(\mathbb{Z}))$ determinan via Ω unos elementos distinguidos en $H^3(X,\overline{W}^2(\mathbb{Z}))=H^3(X,K_{N.}(Z.,3))$ que serán los elementos neutros o nulos (en este caso coinciden) en $H^3(X,K_{N.}(Z.,3))$.

Vamos ahora a repetir los razonamientos anteriores, pero simplificandolos, de forma que no tengamos que hacer uso del 3-grupoide $\mathbb{Z}$ y asi podamos generalizar la definición de los elementos neutros (= nulos) a dimensiones superiores.

Aplicando $\overline{W}$ a lo morfismos simpliciales dobles $\sigma_{..}:COSK^o(N_{..})\longrightarrow\overline{W}(\mathbb{Z})$ y $\zeta_{..}:COSK^1(N_{..})\longrightarrow\overline{W}(\mathbb{Z})$ obtenemos morfismos simpliciales :

$$\begin{tikzcd}
COSK^1(N.)=\overline{W}(COSK^o(N_{..})) : \;\cdots \arrow[d, "\overline{W}(\sigma_{..})=\sigma."'] & \Delta_3 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] \arrow[d, hook] & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, equal] & N_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, equal] & G_o \arrow[d, equal] \\
K_N(Z,3)=\overline{W}^2(\mathbb{Z}) : \;\cdots & Z\times_{G_o}\Delta_3 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & N_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & G_o \\
COSK^2(\overline{W}(N\;))=\overline{W}(COSK^1(N\;)) : \;\cdots \arrow[d, "\overline{W}(\zeta_{..})=\Phi."'] & K \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] \arrow[d, "\phi_3"'] & E\times_{G_o}N_1\times_{G_o}N_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & N_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d] & G_o \arrow[d, equal] \\
K_N(Z,3)=\overline{W}^2(\mathbb{Z}) : \;\cdots & Z\times_{G_o}\Delta_3 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & N_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & G_o
\end{tikzcd}$$

donde hemos denotado por K el núcleo simplicial $\Delta_3(\overline{W}(N_{..}))$, un elemento genérico de K será:

$$z=((e_o,n_o,n_1),(e_1,n_o,n_1'),(e_2,\rho(e_o)n_on_1,n_1^{-1}\rho({}^{n_o^{-1}}(e_o^{-1}e_2^{-1}e_1))n_1'),(e_3,n_1,n_1^{-1}\rho({}^{n_o^{-1}}(e_o^{-1}e_2^{-1}e_1))n_1'))$$

con la condición de ser ${}^{n_o}e_3(e_o^{-1}e_2^{-1}e_1)$ un elemento de Z asi

$$\phi_3(z)=({}^{n_o}e_3(e_o^{-1}e_2^{-1}e_1),(n_o,n_1,n_1'))\in Z\times_{G_o}\Delta_3 \quad .$$

Notemos que los morfismos $\sigma.$ y $\Phi.$ podrian haberse obtenido directamente sin necesidad de aplicar $\overline{W}$ a los morfismos simpliciales dobles $\sigma_{..}$ y $\zeta_{..}$.

Estos morfismos simpliciales inducen ,para cada objeto X de $\mathbb{C}$ aplicaciones

$$\sigma_*:H^3(X,COSK^1(N.))=H^2(X,COSK^1(N.))\cong Hom_C(X,\Pi_o(N.))\longrightarrow H^3(X,K_{N.}(Z.,3))$$

$$\Phi_*:H^3(X,COSK^2(\overline{W}(N_{..}))\longrightarrow H^3(X,K_{N.}(Z.,3))$$

1.30) <u>Definición</u> (elementos neutros y nulos en dimensión 3).

los elementos en la imagen de σ_* se llamarán elementos neutros y los de la imagen de Φ_* elementos nulos de $H^3(X,K_{N.}(Z.,3))$.

Puesto que el grupoide cruzado $\rho./E.:E.\longrightarrow N.$ es conexo $\rho./E.:E.\longrightarrow End(N.)$ es un epimorfismo y por tanto el morfismo $E\times_{G_o}N_1\times_{G_o}N_1\longrightarrow\Delta_2(N_1)$ es un epimorfismo así $COSK^2(\overline{W}(N_{..}))$ es asferical y por tanto el morfismo $id:COSK^2(\overline{W}(N_{..}))\longrightarrow COSK^2(\overline{W}(N_{..}))$ es un 3-torsor de $\Pi_o(N\;)$ sobre $COSK^2(N\;)$.

podemos entonces definir una aplicación:

$$\Psi:Hom(X,\Pi_o(N.))\longrightarrow H^3(X,COSK^2(\overline{W}(N_{..})) \;;\; f\longmapsto[f^*(id_{COSK^2(\overline{W}(N_{..}))})]$$

Además si $\alpha.:E.\longrightarrow \mathrm{COSK}^2(\overline{W}(N..))$ es un 3-torsor de X sobre $\mathrm{COSK}^2(\overline{W}(N..))$ existe un morfismo de torsores $E.\longrightarrow \alpha^*_{-1}(\mathrm{id}_{\mathrm{COSK}^2(\overline{W}(N..))})$ por tanto Ψ es sobre, por otra parte como todos los 3-tors ores en la misma clase en $H^3(X,\mathrm{COSK}^2(\overline{W}(N..)))$ inducen el mismo morfismo en las aumentaciones (X y $\pi_0(N)$ respectivamente) tenemos que Ψ es tambien una biyección. Por último el morfismo canónico $\mathrm{COSK}^2(\overline{W}(N..))\longrightarrow \mathrm{COSK}^1(\overline{W}(N..))=\mathrm{COSK}^1(N.)$ induce un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H^3(X,\mathrm{COSK}^2(\overline{W}(N..))) \arrow[r] \arrow[dr, "\cong"] & H^3(X,\mathrm{COSK}^1(N.)) \arrow[d, "\cong"] \\ & \mathrm{Hom}(X,\pi_0(N.)) \end{tikzcd}$$

asi como consecuencia inmediata tenemos :

.1.31) Lema .-

Los elementos neutros y nulos en $H^3(X,K_{N.}(Z.,3))$ coinciden y son aquellos en la imagen de la aplicación : $\sigma_*:H^3(X,\mathrm{COSK}^1(N.))=\mathrm{Hom}(X,\pi_0(N.))\longrightarrow H^3(X,K_{N.}(Z.,3))$. //

La siguiente proposición establece la congruencia de la definición (3.1.30) con los razonamientos hechos anteriormente.

.1.32) Proposición.-

Un elemento $\xi\in H^3(X,K_{N.}(Z.,3))$ es un elemento neutro si y solo si existe un epimorfismo $p:E\twoheadrightarrow X$ en RE(X) y un 2-torsor $\alpha..:E..\longrightarrow \overline{W}(\mathbb{Z})$ en GPD($\mathbb{C}$) de $\mathrm{cosk}^0(p)$ sobre $\overline{W}(\mathbb{Z})$ que determina un elemento neutro en $H^2(\mathrm{cosk}^0(p),\overline{W}(\mathbb{Z}))$ tal que $\Omega([[\alpha..]])=\xi$ (donde $[[\ ]]$ denota clase en $\mathbb{H}^2(X,\overline{W}(\mathbb{Z}))$).

Demostración.- Sea $\alpha..:E..\longrightarrow \overline{W}(\mathbb{Z})$ un 2-torsor en GPD($\mathbb{C}$) de $\mathrm{cosk}^0(p)$, para $p\in RE(X)$, que determine un elemento neutro en $H^2(\mathrm{cosk}^0(p),\overline{W}(\mathbb{Z}))$. denotemos por $\alpha.:\mathrm{cosk}^0(p)\longrightarrow \mathrm{COSK}^0(N.)$ el morfismo simplicial inducido por $\alpha..$ entre las aumentaciones de E.. y de $\overline{W}(\mathbb{Z})$ respectivamente , y por $\alpha_{-1}:X\longrightarrow \pi_0(N.)$ el inducido por $\alpha.$ en las aumentaciones respectivas. Consideremos ahora el morfismo proyección:

$$\begin{tikzcd} \alpha^*_{-1}(\mathrm{COSK}^0(N))=\mathrm{cosk}^0(p'): \arrow[d, "pr."'] & \ldots & G_0\times_{\pi_0(N.)}G_0\times_{\pi_0(N.)}X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_0\times_{\pi_0(N.)}X \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\alpha_{-1}"] \\ \mathrm{COSK}^0(N.): & \ldots & G_0\times_{\pi_0(N.)}G_0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \arrow[r, two heads] & \pi_0(N.) \end{tikzcd}$$

y llamemos $\alpha'..$ al 2-torsor de $\mathrm{cosk}^0(p')$ sobre $\overline{W}(\mathbb{Z})$ imagen via el morfismo $\mathrm{TORS}^2(\mathrm{cosk}^0(p'),\sigma..):\mathrm{TORS}^2(\mathrm{cosk}^0(p'),\mathrm{COSK}^0(N..))\longrightarrow \mathrm{TORS}^2(\mathrm{cosk}^0(p'),\overline{W}(\mathbb{Z}))$ del 2-torsor obtenido al levantar por pullback via pr. , $\mathrm{id}:\mathrm{COSK}^0(N..)\longrightarrow \mathrm{COSK}^0(N..)$. entonces los elementos $[[\alpha..]]$ y $[[\alpha'..]]$ coinciden en $\mathbb{H}^2(X,\overline{W}(\mathbb{Z}))$. Además $\Omega[[\alpha'..]]\ \sigma_*(\alpha_{-1})$ será un elemento neutro.

Reciprocamente , sea ξ un elemento neutro en $H^3(X,K_{N.}(Z.,3))$ y $f:X\longrightarrow \pi_0(N.)$

un morfismo tal que $\sigma_*(f) = \sigma_*(f^*(id_{COSK^1(N.)}) = \zeta$

$$\begin{tikzcd}
f^*(COSK^1(N.)): \ldots \arrow[d] & \Delta_2 \times_{\pi_0(N.)} X \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & N_1 \times_{\pi_0(N.)} X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_0 \times_{\pi_0(N.)} X \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f."] \\
COSK^1(N.): \ldots & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & N_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \arrow[r, two heads] & \Pi_0(N.)
\end{tikzcd}$$

tenemos entonces un morfismo simplicial

$$\begin{tikzcd}
f^*(COSK^0(N.))= cosk^0(p'): \ldots \arrow[d, "f."'] & G_0 \times_{\pi_0(N)} G_0 \times_{\pi_0(N.)} X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "f_1=pr"] & G_0 \times_{\pi_0(N.)} X \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, "f_0=pr"] & X \arrow[d, "f"] \\
COSK^0(N.): \ldots & G_0 \times_{\pi_0(N.)} G_0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \arrow[r, two heads] & \Pi_0(N.)
\end{tikzcd}$$

levantando por pullback el 2-torsor en GPD($\mathbb{C}$) $id:COSK^0(N..) \longrightarrow COSK^0(N..)$ via f. obtenemos un 2-torsor de $cosk^0(p')$ sobre $COSK^0(N..)$, $f^*_.(id_{COSK^0(N.)})$ verificandose que $\Omega\left[\left[TORS^2(cosk^0(p'), \sigma..)(f^*_.(id_{COSK^0(N.)}))\right]\right] = \zeta$ .//

Así por el lema (3.1.31) definiremos solamente elementos neutros en dimensiones mayores que dos (serán suficientes para establecer la exactitud), De una forma global tenemos:

.1.33) <u>Definición</u> (Elementos neutros en dimensiones $\geqslant 3$).

Para cada entero $n \geqslant 3$ el morfismo simplicial

$$\begin{tikzcd}
COSK^1(N.): \ldots \arrow[d, hook] & \Delta_n \arrow[r, shift left, ":"] \arrow[r, shift right] \arrow[d, hook] & \Delta_{n-1} \arrow[d, equal] & \ldots & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, equal] & N_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, equal] & G_0 \arrow[d, equal] \\
K_{N.}(Z.,n): \ldots & Z \times_{G_0} \Delta_n \arrow[r, shift left, ":"] \arrow[r, shift right] & \Delta_{n-1} & \ldots & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & N_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0
\end{tikzcd}$$

dado por la 1-filtración de $K_{N.}(Z.,n)$ induce una aplicación

$$\sigma_*: H^n(X, COSK^1(N.)) = Hom(X, \Pi_0(N.)) \longrightarrow H^n(X, K_{N.}(Z.,n))$$

Los elementos en la imagen de σ_* serán llamados elementos neutros de $H^n(X, K_{N.}(Z.,n))$.

Notemos que esta definición es válida para cualquier n-hipergrupoide filtrado de la forma $K_{H.}(A.,n)$. Además si $f.:K_{N.}(Z.,n) \longrightarrow K_{H.}(A.,n)$ es un morfismo simplicial filtrado entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
COSK^1(N.) \arrow[r, "f./COSK^1(N.)"'] \arrow[d, hook] & COSK^1(H.) \arrow[d, hook] \\
K_{N.}(Z.,n) \arrow[r, "f."] & K_{H.}(A.,n)
\end{tikzcd}$$

que induce el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom(X, \Pi_0(N.)) = H^n(X, COSK^1(N.)) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\sigma_*"'] & H^n(X, COSK^1(H.)) = Hom(X, \Pi_0(H.)) \arrow[d, "\sigma_*'"] \\
H^n(X, K_{N.}(Z.,n)) \arrow[r, "f_*"] & H^n(X, K_{H.}(A.,n))
\end{tikzcd}$$

Así los elementos neutros se conservan por morfismos de n-hipergrupoides filtrados.

Claramente en la clase de cada elemento neutro en $H^n(X,K_{N_\bullet}(Z_\bullet,n))$ hay un torsor asi escindido, además como en la clase de todo torsor casi escindido existe uno obtenido levantando por pullback el torsor $id_{COSK^1(N_\bullet)}$ via un morfismo $f:X\longrightarrow \Pi_o(N_\bullet)$ tenemos:

.1.34) Proposición (Caracterización de los elementos neutros) .

Un elemento $\xi \in H^n(X,K_{N_\bullet}(Z_\bullet,n))$ es neutro si y solo si existe un torsor casi escindido cuya clase sea ξ.

Notemos por último que si $N_\bullet$ es un grupoide conexo ($\Pi_o(N_\bullet) = \mathbb{1}$) entonces existe solamente un morfismo en $Hom(X,\Pi_o(N_\bullet))$ y por tanto solo un elemento neutro en $H^n(X,K_{N_\bullet}(Z_\bullet, n))$. Si por ejemplo $K_{N_\bullet}(Z_\bullet,n) = K(Z,n)$ para Z un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$ el único elemento neutro de $H^n(X,K(Z,n))$ es el elemento "neutro " del grupo $H^n(X,K(Z,n))$.

(3.2) n-COCICLOS .

Las primeras interpretaciones simpliciales que se obtienen de los conjuntos de cohomología abeliana e incluso no abeliana son en términos de "cociclos" . Así por ejemplo como ya dijimos en (0.3), si $\mathbb{C}$ es una categoría monádica sobre Set con cotriple $\mathbb{G} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ los conjuntos (en este caso grupos) de cohomología del cotriple de X con coeficientes en un objeto grupo abeliano A de $\mathbb{C}$, $H^n_{\mathbb{G}}(X,A)$, pueden ser interpretados como clases de homotopía de morfismos simpliciales (cociclos) de la resolución estandar de X en el n-hipergrupoide $K(A,n)$

$$H^n_G(X,A) \cong [\mathbb{G}_\bullet(X), K(A,n)]$$

Se verifica por otra parte , que la resolución estandar de X ($\mathbb{G}_\bullet(X) \twoheadrightarrow X$) puede ser sustituida por complejos simpliciales asfericales aumentados sobre X , $E_\bullet \twoheadrightarrow X$, llamados hiperrecubrimientos de X . De forma que si denotamos por $HC(X)$ la categoría que tiene por objetos dichos complejos simpliciales aumentados sobre X y por morfismos los de complejos simpliciales aumentados, entonces (ver [12])

$$H^n_{\mathbb{G}}(X,A) \cong \varinjlim_{E_\bullet \in HC(X)} [E_\bullet, K(A,n)]$$

Los morfismos simpliciales de $E_\bullet \in HC(X)$ en $K(A,n)$ se llaman n-cociclos (abelianos) de X con coeficientes en $K(A,n)$. Estos conjuntos de cohomología han sido tambien interpretados en términos de torsores (ver [25]) así:

$$H^n_{\mathbb{G}}(X,A) \cong TORS^n[X,K(A,n)] \cong H^n(X,K(A,n)).$$

Por lo que, olvidando el cotriple, tenemos interpretados los conjuntos de cohomología en téminos de cociclos: $H^n(X,K(A,n)) = \varinjlim_{E_\bullet \in HC(X)} [E_\bullet , K(A,n)]$

Veremos en este apartado que este resultado sigue siendo válido aunque la categoría $\mathbb{C}$ no sea monádica sobre Set . Estudiaremos además que ocurre cuando sustituimos el n-hipergrupoide K(A,n) por un n-hipergrupoide cualquiera $G_\bullet$,conectando de este modo con las definiciones más clásicas de los conjuntos de cohomología no abeliana en dimensiones inferiores, que fueron dados en término de cociclos [1] ,[19] ,[29] .

Hiperrecubrimientos y cociclos.

.2.1) Definición (Hiperrecubrimiento).

Sea X un objeto de $\mathbb{C}$. Un hiperrecubrimiento de X es por definición un objeto simplicial aumentado sobre X, $E_\bullet \longrightarrow X$, que es asferical en todas dimensiones (i.e. los morfismos canónicos $D_n : E_n \longrightarrow \Delta_n(E_\bullet)$ $n > 0$ y el morfismo aumentación $E_0 \longrightarrow X$ son épicos). Denotaremos HC(X) la subcategoría plena de Simpl($\mathbb{C}$/X) de los hiperrecubrimientos de X. Diremos que un hiperrecubrimiento $E_\bullet \twoheadrightarrow X$ de X es un n-hiperrecubrimiento si $E_\bullet = COSK^{n-1}(E_\bullet)$. Denotaremos n-HC(X) la subcategoría plena de HC(X) de los n-hiperrecubrimientos de X . Un 1-hiperrecubrimiento de X será llamado recubrimiento .

.2.2) Definición (n-Cociclo).

Sea X un objeto y $G_\bullet$ un n-hipergrupoide en $\mathbb{C}$. un n-cociclo de X con coeficientes en $G_\bullet$ (o sobre $G_\bullet$) es un morfismo simplicial $f_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ con $E_\bullet$ un hiperrecubrimiento de X.

Denotaremos por

$$\check{H}^n(X,G_\bullet) = \varinjlim_{HC(X)} [- , G_\bullet]$$

a los elementos de $\check{H}^n(X,G_\bullet)$ los representaremos por $\bar{f}_\bullet , \bar{g}_\bullet , \dots$ donde $f_\bullet$, $g_\bullet$, ... son n-cociclos de X sobre $G_\bullet$ cuyas clases en $H^n(X,G_\bullet)$ son $\bar{f}_\bullet , \bar{g}_\bullet$, ... respectivamente.

2.3) Definición (El 1-cociclo asociado).

$f_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ un n-cociclo de X sobre el n-hipergrupoide $G_\bullet$ con $E_\bullet$ un n-hiperrecubrimiento. Entonces $E_\bullet = COSK^{n-1}(E_\bullet)$ puede ser considerado como unn-hipergrupoide, el morfismo simplicial inducido por $f_\bullet$ entre los grupoides asociados a $E_\bullet$ y $G_\bullet$ según (1.2.11), $f'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$ es un 1-cociclo de $\Delta_{n-1}(E_\bullet)$ sobre $G'_\bullet$ al que llamaremos 1-cociclo asociado al n-cociclo $f_\bullet$. (Notemos que $E'_\bullet = cosk^0(D_{n-1} : E_{n-1} \longrightarrow \Delta_{n-1}(E_\bullet))$ será un recubrimiento de $\Delta_{n-1}(E_\bullet)$).

Los siguientes dos lemas son lemas técnicos que nos facilitaran el estudio de morfismos simpliciales con codominio un hipergrupoide y de las homotopías entre ellos.

.2.4) Lema.-

Sea $E_\bullet$ un objeto simplicial y $G_\bullet$ un n-hipergrupoide en $\mathbb{C}$. Un morfismo simplicial truncado $f_{\bullet tr} = (f_n, \dots, f_o): tr^n(E_\bullet) \longrightarrow tr^n(G_\bullet)$ tiene una extensión, necesariamente única, a un morfismo simplicial $f_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ si y solo si

$$\left[f_n d_o(x), \dots, f_n d_n(x)\right] = f_n d_{n+1}(x)$$

para todo objeto x en E_{n+1}. Si $E_\bullet$ es un hiperrecubrimiento de X, a la condición anterior la llamaremos condición de cociclo.

Demostración.- Si $f_{\bullet tr}$ se extiende a un morfismo simplicial $f_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$, puesto que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_{n+1} \arrow[rr, "K_{n+1}(n+1)"'] \arrow[d, dash, "f_{n+1}"'] & & \Lambda^{n+1}_{n+1}(E_\bullet) \arrow[d, "f_n d_o \times \dots \times f_n d_n"] \\
G_{n+1} \arrow[rr, "\cong", "K_{n+1}(n+1)"'] \arrow[dr, "d_{n+1}"'] & & \Lambda^{n+1}_{n+1}(G_\bullet) \arrow[dl, "{[\ ]}"] \\
& G_n &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, tenemos que para todo elemento x en E_{n+1}:

$$d_{n+1} f_{n+1}(x) = \left[d_o f_{n+1}(x), \dots, d_n f_{n+1}(x)\right] = f_n d_{n+1}(x) = \left[f_n d_o(x), \dots, f_n d_n(x)\right].$$

Recíprocamente, si $f_{\bullet tr}$ satisface la condición en el enunciado del lema, definimos $f_{n+1}: E_{n+1} \longrightarrow G_{n+1}$ por $f_{n+1}(x) = y \in G_{n+1}$ el único elemento verificando que $d_i(y) = f_n d_i(x)$, $0 \leq i \leq n+1$. Claramente $(f_{n+1}, f_n, \dots, f_o)$ nos define un morfismo simplicial truncado de $tr^{n+1}(E_\bullet)$ en $tr^{n+1}(G_\bullet)$ que se extiende a un morfismo simplicial $f: E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ por ser $G_\bullet = COSK^{n+1}(G_\bullet)$. //

.2.5) Lema.-

Sea $f_\bullet, g_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ dos morfismos simpliciales, con $G_\bullet$ un n-hipergrupoide. Una homotopía truncada $h_{\bullet tr} = (h^k_i : E_k \longrightarrow G_{k+1};\ 0 \leq i \leq k \leq n-1): f_{\bullet tr} \longrightarrow g_{\bullet tr}$ tiene una extensión, necesariamente única, a una homotopía $h_\bullet : f_\bullet \rightarrow g_\bullet$ si y solo si se satisface la condición siguiente:

Condición de homotopía.- Sean $z_1, z_2, \dots, z_n : E_n \longrightarrow G_n$ morfismos definidos por:

$$\left[f_n, z_1, h^{n-1}_o d_1, \dots, h^{n-1}_o d_{n-1}\right] = h^{n-1}_o d_n$$

$$\left[h^{n-1}_o d_o, z_1, z_2, h^{n-1}_1 d_2, \dots, h^{n-1}_1 d_{n-1}\right] = h^{n-1}_1 d_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left[h^{n-1}_{n-2} d_o, \dots, h^{n-1}_{n-2} d_{n-2}, z_{n-1}, z_n\right] = h^{n-1}_{n-1} d_n$$

(Notemos que para cada $x \in E_n$, $z_1(x)$ es el único elemento de G_n tal que $\left[f_n(x), z_1(x), h^{n-1}_o d_1(x), \dots, h^{n-1}_o(x)\right] = h^{n-1}_o d_n(x)$ y analogamente para los demás z_i).

Entonces $\left[h^{n-1}_{n-1}d_o, \dots, h^{n-1}_{n-1}d_{n-1}, z_n\right] = g_n$.

Demostración.- Si $h_{\cdot tr}$ se extiende a una homotopía $h_\bullet : f_\bullet \longrightarrow g_\bullet$ entonces

$$\left[f_n, d_1h^n_o, h^{n-1}_o d_1, \dots, h^{n-1}_o d_{n-1}\right] = h^{n-1}_o d_n$$

$$\left[h^{n-1}_o d_o, d_1 h^n_o, d_2 h^n_o, h^{n-1}_1 d_2, \dots, h^{n-1}_1 d_{n-1}\right] = h^{n-1}_1 d_n$$

. . . .

$$\left[h^{n-1}_{n-2}d_o, \dots, h^{n-1}_{n-2}d_{n-2}, d_{n-1}h^n_{n-2}, d_n h^n_{n-1}\right] = h^{n-1}_{n-1}d_n$$

$$\left[h^{n-1}_{n-1}d_o, \dots, h^{n-1}_{n-1}d_{n-1}, d_n h^n_{n-1}\right] = g_n$$

así $z_i = d_i h^n_{i-1} : E_n \longrightarrow G_n$ verifican la condición del enunciado.

Reciprocamente; definimos $h^n_i : E_n \longrightarrow G_{n+1}$ como los únicos morfismos verificando:

$$D_n h^n_o = (f_n, z_1, h^{n-1}_o d_1, \dots, h^{n-1}_o d_n)$$

$$D_n h^n_1 = (h^{n-1}_o d_o, z_1, z_2, h^{n-1}_1 d_2, \dots, h^{n-1}_1 d_n)$$

. . . .

$$D_n h^n_{n-1} = (h^{n-1}_{n-2}d_o, \dots, h^{n-1}_{n-2}d_{n-2}, z_{n-1}, z_n, h^{n-1}_{n-1}d_n)$$

$$D_n h^n_n = (h^{n-1}_{n-1}d_o, \dots, h^{n-1}_{n-1}d_{n-1}, z_n, g_n)$$

donde $D_n : E_n \longrightarrow \Delta_{n+1}(G_\bullet)$ es el morfismo canónico que a cada $x \in E_n$ le hace corresponder $(d_o(x), \dots, d_{n+1}(x))$, e inductivamente:

$$h^m_o = (f_m, y_1, h^{m-1}_o d_1, \dots, h^{m-1}_o d_m) : E_m \longrightarrow G_{m+1}$$

$$h^m_1 = (h^{m-1}_o d_o, y_1, y_2, h^{m-1}_1 d_2, \dots, h^{m-1}_1 d_m) : E_m \longrightarrow G_{m+1}$$

. . . .

$$h^m_{m-1} = (h^{m-1}_{m-2}d_o, \dots, h^{m-1}_{m-2}d_{m-2}, y_{m-1}, y_m, h^{m-1}_{m-1}d_m) : E_m \longrightarrow G_{m+1}$$

$$h^m_m = (h^{m-1}_{m-1}d_o, \dots, h^{m-1}_{m-1}d_{m-1}, y_m, g_m) : E_m \longrightarrow G_m$$

para $m > n$, donde los morfismos $y_i : E_m \longrightarrow G_m$ estan definidos por:

$$y_1 = (d_o f_m, d_1 h^{m-1}_o d_1, \dots, d_1 h^{m-1}_o d_m)$$

$$y_2 = (d_1 h^{m-1}_o d_o, d_1 h^{m-1}_o d_1, d_2 h^{m-1}_1 d_2, \dots, d_2 h^{m-1}_1 d_m)$$

. . . .

$$y_{m-1} = (d_{m-2}h^{m-1}_{m-3}d_o, \dots, d_{m-2}h^{m-1}_{m-3}d_{m-2}, d_{m-1}h^{m-1}_{m-2}d_{m-1}, d_{m-1}h^{m-1}_{m-1}d_m)$$

$$y_m = (d_{m-1}h^{m-1}_{m-2}d_o, \dots, d_{m-1}h^{m-1}_{m-2}d_{m-1}, d_m h^{m-1}_{m-1}d_m)$$

Estos morfismos h^m_i satisfacen las identidades de homotopía (0.2.4) por lo que definen una homotopía $h_\bullet : f_\bullet \longrightarrow g_\bullet$. //

.2.6) Nota.- Si escribimos las condiciones de los lemas (3.2.4) y (3.2.5) para n=1 y $E_\bullet$ un recubrimiento de X obtenemos las clásicas condiciones de 1-cociclo y de homotopía entre 1-cociclos:

-) Un morfismo simplicial truncado:

$$\begin{tikzcd}
E_o \times_X E_o \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "f_1"'] & E_o \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "f_o"] & X \\
G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_o &
\end{tikzcd}$$

determina un 1-cociclo de X sobre $G_\bullet$ si y solo si se verifica:

$$f_1(y,z) = f_1(x,y)\, f_1(x,z)$$

para todo $x,y,z \in E_o$ tales que $p(x) = p(y) = p(z)$.

-) Dos 1-cociclos $f_\bullet$, $g_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ desde un recubrimiento $E_\bullet$ de X son homotópicos si y solo si existe un morfismo $h_o^o : E_o \longrightarrow G_1$

$$\begin{tikzcd}
E_o \times_X E_o \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] & E_o \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, shift right, "f_o"'] \arrow[d, shift left, "g_o"] \arrow[dl, "h_o^o"'] & X \\
G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_o &
\end{tikzcd}$$

verificando : i) $d_o h_o^o = f_o$

ii) $d_1 h_o^o = g_o$

iii) $g_1(x,y) = h_o^o(x)^{-1} f_1(x,y)\, h_o^o(y)$

para todo $x,y \in E_o$ tales que $p(x) = p(y)$, donde yustaposición denota la multiplicación del grupoide.

Claramente se verifica que la relación de homotopía entre 1-cociclos desde un mismo recubrimiento es de equivalencia.

.2.7) Nota.- Si escribimos ahora las condiciones de los lemas (3.2.4) y (3.2.5) para $G_\bullet = K(A,n)$ con A un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$ y $E_\bullet$ un hiperrecubrimiento de X, obtenemos las condiciones de cociclo abeliano y de homotopía entre cociclos abelianos:

-) Un morfismo $f_n : E_n \longrightarrow A$ tal que $f_n s_i = 0$, $0 \leq i < n$, determina un n-cociclo $f_\bullet : E_\bullet \longrightarrow K(A,n)$ de X sobre A si y solo si

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} f_n d_i = 0$$

donde hemos denotado por "+" la operación "suma" del objeto grupo abeliano A y por "0" el morfismo composición $E_n \longrightarrow \mathbb{1} \xrightarrow{s} A$ con s el morfismo cero de A.

-) Dos n-cociclos $f_\bullet, g_\bullet : E_\bullet \longrightarrow K(A,n)$ son homotópicos si y solo si existen morfismos $h_i^{n-1} : E_{n-1} \longrightarrow A$, $0 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{tikzcd}
E_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & E_{n-1} \arrow[d] \arrow[dl, shift right, "h_{n-1}^{n-1}"'] \arrow[dl, shift left, "h_o"] & \cdots E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & E_o \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X \\
A \arrow[r] & \mathbb{1} & \cdots \mathbb{1} \arrow[r] & \mathbb{1} &
\end{tikzcd}$$

verificando: i) $h^{n-1}_i s_j = 0$, $i \leq n-1$, $j \leq n-2$.

$$\text{ii)} \quad f_n - g_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j+1} h^{n-1}_j d_i \quad .$$

Observemos que tambien la relacción de homotopía entre cociclos desde el mismo hiperrecubrimiento sobre $K(A,n)$ es de equivalencia.

Notemos tambien que si $h.:f.\to g.$ es una homotopía entre cociclos $f.,g.: E.\longrightarrow K(A,n)$, tomando $\hat{h} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i h^{n-1}_i$, obtenemos una homotopía $\hat{h}.: f.\longrightarrow g.$ con $\hat{h}^{n-1}_i = 0$, $0\leq i \leq n-2$ y $\hat{h}^{n-1}_{n-1} = \hat{h}$. Por tanto dos n-cociclos abelianos $f.,\ g.:E.\longrightarrow K(A,n)$ serán homotópicos si y solo si existe un morfismo $\hat{h} : E_{n-1} \longrightarrow A$ tal que:

$$\text{i')} \quad \hat{h} s_j = 0 \quad , 0 \leq j \leq n-2 \ .$$

$$\text{ii')} \quad f_n - g_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \hat{h} d_i \quad .$$

2.8) Nota.- Puesto que si E. es un hiperrecubrimiento de X, entonces $COSK^{n-1}(E.)$ es un n-hiperrecubrimiento, utilizando los lemas (1.4.38) y (3.2.5) se demuestra de inmediato que los n-hiperrecubrimientos son suficientes para calcular los conjuntos $H^n(X,G.)$ i.e.

$$H^n(X,G.) = \varinjlim_{n\text{-}HC(X)} \left[- ,G.\right]$$

para cualquier objeto X y cualquier n-hipergrupoide G. en $\mathbb{C}$.

Cociclos sobre hipergrupoides filtrados.

Como hemos dicho en las notas (3.2.6) y (3.2.7) , la relación de homotopía entre cociclos desde el mismo hiperrecubrimiento E. sobre un n-hipergrupoide es de equivalencia si el n-hipergrupoide es un grupoide (n = 1) o es de la forma $K(A,n)$ para A un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$. Sin embargo no podemos asegurar (por ahora) que esto sea cierto para cualquier n y cualquier n-hipergrupoide. Seguidamente iremos estudiando casos particulares en los que este resultado sigue siendo cierto. Comenzaremos por estudiar los cociclos sobre 2-hipergrupoides filtrados.

.2.9) Nota.- Sea G. un 2-hipergrupoide filtrado, después de los teoremas (1.3.25) y (2.2.14) podemos escribir a G. como

$$G. = E \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G_1 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; G_1 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\; G_o$$

con $\rho. :E.\longrightarrow G.$ el complejo de Moore de G. . Además denotaremos G.. al 2-grupoide tal que $\overline{W}(G..) \simeq G.$.

Sea $f.:E.\longrightarrow G.$ un 2-cociclo, desde el 2-hiperrecubrimiento E. de X :

$$\begin{tikzcd}
E.: \arrow[d, "f."'] & \cdots & \Delta_2(E.)=E_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "f_2"] & E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "f_1"] & E_o \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_o"] & X \\
G.: & \cdots & E \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_o &
\end{tikzcd}$$

denotemos por $\hat{f}$ a la composición : $\hat{f} : E_2 \xrightarrow{f_2} E \underset{G_o}{\times} G \underset{G_o}{\times} G \xrightarrow{pr_o} E$. Entonces $f_2(x_o,x_1,x_2) = (\hat{f}(x_o,x_1,x_2),\ f_1(x_o),f_1(x_2))$, por lo que denotaremos a $\hat{f}_2=(f\ ,f_1d_o,f_1d_2)$.

Las condiciones simpliciales sobre f_2 , y la condición de cociclo(3.2.5) nos dicen:

(CC1) $\rho(\hat{f}(x_o,x_1,x_2))\cdot f_1(x_o)\cdot f_2(x_2) = f_1(x_1)$

(CC2) ${}^{f_o(x_o)^{-1}}(\ \hat{f}(x_o,y_1,y_2)^{-1}\hat{f}(x_1,y_1,z_2)\hat{f}(x_o,x_1,x_2)\ ) = \hat{f}(x_2,y_2,z_2)$

para todo elemento

$$\zeta = \begin{pmatrix} x_o & x_1 & x_2 \\ x_o & y_1 & y_2 \\ x_1 & y_1 & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \in \Delta_3(E_\bullet) = E_3$$

(recordar la definición de los operadores caras y de la operación corchete de $\overline{W}(G..)$ ver para ello (2.2.23)). Por tanto dar un 2-cociclo $f.: E. \longrightarrow G_\bullet$ es equivalente a dar un morfismo simplicial truncado (f_1,f_o): $tr^1(E.) \longrightarrow tr^1(G.)$ junto con un morfismo $\hat{f}:E_2 \longrightarrow E$ verificando las condiciones (CC1) y (CC2) . Notemos que en la condición (CC1) está implicito que $d\hat{f}(x_o,x_1,x_2) = d_of_1(x_o)$ para todo $(x_o,x_1,x_2) \in E_2$.

Supongamos ahora $f.$, $g.: E. \longrightarrow G_\bullet$ dos 2-cociclos y $h.:f. \longrightarrow g.$ una homotopía

$$\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift right, "f_2"'] \arrow[d, shift left, "g_2"] & E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift right, "f_1"'] \arrow[d, shift left, "g_1"] \arrow[dl, shift right, "h_1"'] \arrow[dl, shift left, "h_o"] & E_o \arrow[r, two heads] \arrow[d, shift right, "f_o"'] \arrow[d, shift left, "g_o"] \arrow[dl, "h_o"] & X \\
E \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_o &
\end{tikzcd}$$

Denotemos por $\hat{h}_i$,i = 0,1 , las composiciones $\hat{h}_i:E_1 \xrightarrow{h_i} E \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \xrightarrow{pr_o} E$, utilizando las identidades homotópicas , la expresión de los morfismos $h_o,h_1:E_1 \longrightarrow E \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G_1$ mediante sus componentes será:

$$h_o = (\hat{h}_o\ ,\ f_1\ ,\ h_od_1\ )$$

$$h_1 = (\hat{h}_1\ ,h_od_1,\ g_1\ )$$

verificandose :

(CH 1) $\rho(\hat{h}_o)\ f_1\ h_od_1 = \rho(\hat{h}_1)\ h_od_o\ g_1$ (identidad homotópica)

(CH2) ${}^{h_od_o(x_o)^{-1}}(\hat{h}_1(x_1)^{-1}\hat{h}_o(x_1)\hat{f}(x_o,x_1,x_2)\,{}^{f_1(x_o)}(\hat{h}_o(x_2)^{-1}\hat{h}_1(x_2))\,\hat{h}_o(x_o)^{-1}\hat{h}_1(x_o)\ ) = \hat{g}(x_o,x_1,x_2)$

para todo $(x_o,x_1,x_2) \in E_2$.

Así dar una homotopía $h_.: f_. \longrightarrow g_.$ es equivalente a dar morfismos

i) $h_0 : E_0 \longrightarrow G_1$ con $d_0 h_0 = f_0$ y $d_1 h_0 = g_1$

ii) $h_0, h_1 : E_1 \longrightarrow E$

verificando las condiciones (CH 1) y (CH 2) que llamaremos <u>condiciones de homotopía</u>.

.2.10) <u>Lema</u>.-

Sean $f_., g_. : E_. \longrightarrow G_.$ dos 2-cociclos sobre el 2-hipergrupoide filtrado $G_.$ y $h_.: f_. \longrightarrow g_.$ una homotopía entre ellos. Entonces existe otra homotopía $H_.: f_. \longrightarrow g_.$ tal que el morfismo $\widehat{H}_0 = pr_0 H_0 : E_1 \longrightarrow E \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G_1 \longrightarrow E$ es igual a la composición $sd_0 f_1 : E_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow E$.

<u>Demostración</u>.- La homotopía $H_.: f_. \longrightarrow g_.$ está dada por:

$$H_0 = h_0 : E_0 \longrightarrow G_1$$
$$\widehat{H}_0 = sd_0 f_1 ; \; \widehat{H}_1 = \widehat{h}_0^{-1} \; \widehat{h}_1 \; : E_1 \longrightarrow E$$

que verifican trivialmente las condiciones de homotopía . //

Notemos que si $h_.: f_. \longrightarrow g_.$ es una homotopía con $\widehat{h}_0 = sd_0 f_1$ las condiciones de homotopía (CH1) y (CH 2) quedan:

(HC1') $\quad f_1 \; (h_0 d_1) = \rho(\widehat{h}_1) \; (h_0 d_0) \; g_1$

(HC2') $\quad {}^{h_0 d_0 (x_0)^{-1}}(\widehat{h}_1(x_1)^{-1} \; \widehat{f}(x_0, x_1, x_2) \; {}^{f_1(x_0)}(\widehat{h}_1(x_2)) \; \widehat{h}_1(x_0)) = \widehat{g}(x_0, x_1, x_2)$

.2.11) <u>Proposición</u>.-

Sea $G_.$ un 2-hipergrupoide filtrado. Entonces para cada 2-hiperrecubrimiento (recubrimiento) $E_.$, la relación de homotopía en $Simpl(E_., G_.)$ es de equivalencia.

<u>Demostración</u>.-

Propiedad simétrica .- Sea $h_.: f_. \longrightarrow g_.$ una homotopía entre los 2-cociclos $f_., g_. : E_. \longrightarrow G_.$, supongamos que $\widehat{h}_0 = sd_0 f_1$ (lema(3.2.10)). Los morfismos:

$$H_0 = h_0^{-1} : E_0 \longrightarrow G_1 \quad (H_0(x) = h_0(x)^{-1}) \quad y$$
$$\widehat{H}_0, \widehat{H}_1 : E_1 \longrightarrow E \quad \text{definidos por;} \quad \widehat{H}_0 = sd_0 f_1 \;\; y \;\; \widehat{H}_1 = {}^{(h_0 d_0)^{-1}}(\widehat{h}_1^{-1}) = {}^{H_0 d_0}(\widehat{h}_1^{-1})$$

definen una homotopía $H_.: g_. \longrightarrow f_.$, que llamaremos <u>homotopía inversa</u> de $h_.$.

Propiedad transitiva.- Sean $h_.: f_. \longrightarrow g_.$ y $t_. : g_. \longrightarrow q_.$ dos homotopías entre cociclos $f_., g_., q_. : E_. \longrightarrow G_.$, supondremos $\widehat{h}_0 = sd_0 f_1$ y $\widehat{t}_0 = sd_0 g_1$. entonces los morfismos:

$$h_0 \cdot t_0 : E_0 \longrightarrow G_1 \quad y \quad sd_0 f_1 ; \widehat{h}_1 \, {}^{(h_0 d_0)}(\widehat{t}_1) : E_1 \longrightarrow E \qquad \text{definen una homotopía}$$

a la que denotaremos $h_. \cdot t_. : f_. \longrightarrow q_.$ y llamaremos <u>homotopía producto</u> de $h_.$ y $t_.$

Propiedad simétrica.- es inmediata. //

En el conjunto de homotopías entre cociclos desde un 2-hiperrecubrimiento $E_.$ a un 2-hipergrupoide filtrado $G_.$. podemos distinguir dos clases :

-) La clase $\mathbb{C}_o$ de todas las homotopías $h_\bullet$ que verifican que $h_o : E_o \longrightarrow G_1$ factorizan por $s_o : G_o \longrightarrow G_1$.

-) La clase $\mathbb{C}_1$ de todas las homotopías $h_\bullet$ verificando que $\widehat{h}_o, \widehat{h}_1 : E_1 \longrightarrow E$ factorizan por $s : G_o \longrightarrow E$.

3.2.12) Si $f_\bullet$, $g_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ son dos cociclos homotópicos mediante una homotopía en $\mathbb{C}_o$, podemos entonces (lema (5.2.10)) encontrar una homotopía $h_\bullet : f_\bullet \longrightarrow g_\bullet$ verificando que $h_o : E_o \longrightarrow G_1$ factoriza por $s_o : G_o \longrightarrow G_1$ ($\Rightarrow$ $f_o = g_o$) y $\widehat{h}_o : E_1 \longrightarrow E$ factoriza por $s : G_o \longrightarrow E$. las condiciones de homotoía quedaran entonces:

(CH1) $\quad f_1 = \rho(\widehat{h}_1)\, g_1$

(CH2) $\quad \widehat{h}_1(x_1)^{-1}\, \widehat{f}(x_o,x_1,x_2)\ {}^{f_1(x_o)}(\widehat{h}_1(x_2))\, \widehat{h}_1(x_o) = \widehat{g}(x_o,x_1,x_2)$

En este caso los 1-cociclos asociados a $f_\bullet$ y $g_\bullet$ estan dados por:

$$\begin{tikzcd}
E'_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift right, "f'_1"'] \arrow[dd, shift left, "g'_1"] & & E'_o = E_1 \arrow[r] \arrow[dd, shift right, "f_1"'] \arrow[dd, shift left, "g_1"] \arrow[ddll, dashed, "h'_o"'] & E_o \times_X E_o \\
 & & & \\
E \times_{G_o} G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_1 &
\end{tikzcd}$$

con $f'_1(x_o,x_1) = f_2(s_o d_o(x_o),x_o,x_1)$ para $(x_o,x_1) \in E'_1$ (i.e. $d_i(x_o) = d_i(x_1)$ $i=0,1,2$) y $g'_1(x_o,x_1) = g_1(x_o,x_1,x_2)$. Noremos que $d_o, d_1 : E \times_{G_o} G_1 \longrightarrow G_1$ están dados por $d_o(e,g) = \rho(e)\, g$, $d_1(e,g) = g$ y que la multiplicación está dada por

$$(e,g)\cdot(e',\rho(e')^{-1}g) = (\,ee'\ ,\ \rho(e')^{-1}g\,)$$

Entonces el morfismo $h'_o = (\widehat{h}_1, g_1) : E_1 \longrightarrow E \times_{G_o'} G_1$ nos da una homotopía $h'_\bullet : f'_\bullet \longrightarrow g'_\bullet$. Así si $f_\bullet$ y $g_\bullet$ son homotópicos mediante una homotopía en $\mathbb{C}_o$ los 1-cociclos asociados $f'_\bullet$ y $g'_\bullet$ son tambien homotópicos .

.2.13) Por otra parte, para cada 2-cociclo $f_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ denotaremos por $\widehat{E}_\bullet$ el objeto pullback en Simpl($\mathbb{C}$):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \widehat{E}_\bullet : \arrow[dl, "\widehat{\sigma}_\bullet"'] \arrow[dd, "\widehat{f}_\bullet"] & \cdots & & \widehat{E}_2 \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & E_1 \arrow[dl, equal] \arrow[dd] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & E_o \arrow[dl, equal] \arrow[dd] \arrow[rr, two heads] & & X \arrow[dl, equal] \\
E_\bullet : \arrow[dd, "f_\bullet"'] & \cdots & & E_2 \arrow[dd] \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & E_1 \arrow[dd] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & E_o \arrow[dd] \arrow[rr, two heads] & & X & \\
 & \widehat{G}_\bullet : \arrow[dl, "\sigma_\bullet"'] & \cdots & & G_1 \times_{G_o} G_1 \arrow[dl] \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & G_1 \arrow[dl, equal] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_o \arrow[dl, equal] & & \\
G_\bullet : & \cdots & & E \times_{G_o} G_1 \times_{G_o} G_1 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_o & & &
\end{tikzcd}$$

donde $\widehat{G}_\bullet \xrightarrow{\sigma_\bullet} G_\bullet$ es la filtración de $G_\bullet$. Los elementos de E_1 serán aquellos (x_o,x_1,x_2) en E_2 tales que $\widehat{f}(x_o,x_1,x_2) = sf_1(x_o)$, además $\widehat{E}_\bullet = \mathrm{COSK}^1(\widehat{E}_\bullet)$, sin embargo $\widehat{E}_\bullet$ no es en general un hiperrecubrimiento de X ya que no tiene por que ser asferical en dimensión dos . Este objeto simplicial $\widehat{E}_\bullet$ al que llamaremos <u>fibra del cociclo</u> $f_\bullet$ es un análogo a la fibra de un torsor (si $f_\bullet$ es un torsor entonces $\widehat{E}_\bullet = G(E_\bullet)$), sin embargo en general $\widehat{E}_\bullet$ no es un grupoide.

Si $h_\bullet : f_\bullet \longrightarrow g_\bullet$ es una homotopía en $\mathbb{C}_1$ entonces las fibras de los cociclos $f_\bullet$ y $g_\bullet$ coinciden, además $h_\bullet$ induce una homotopía $h_\bullet : f_\bullet \longrightarrow g_\bullet$ entre los morfismos simpliciales inducidos por $f_\bullet$ y $g_\bullet$ en la fibra .

El siguiente lema nos dice que las clases $\mathbb{C}_0$ y $\mathbb{C}_1$ "generan" el conjunto de homotopías entre cociclos en $\mathrm{Simpl}(E_\bullet, G_\bullet)$, para $E_\bullet$ un 2-hiperrecubrimiento y $G_\bullet$ un 2-hipergrupoide filtrado .

.2.14) Lema.-

Sea $G_\bullet$ un 2-hipergrupoide filtrado, $E_\bullet$ un 2-hiperrecubrimiento y $f_\bullet, g_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ dos 2-cociclos. Entonces cada homotopía $h_\bullet : f_\bullet \longrightarrow g_\bullet$ con $\widehat{h}_0 = sd_0 f_1$ se descompone como un producto de homotopías $h_\bullet = h'_\bullet \cdot h''_\bullet$ con $h'_\bullet$ en la clase $\mathbb{C}_1$ y $h''_\bullet$ en la clase $\mathbb{C}_0$.

Demostración.- Dados $f_\bullet, g_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ y $h_\bullet : f_\bullet \rightarrow g_\bullet$ definimos $q_\bullet : E_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ por:

$$q_0 = f_0 \quad , \quad q_1 = (h_0 d_0)\, g_1\, (h_0 d_1)^{-1} \quad , \quad \widehat{q} = {}^{(h_0 d_0)}\widehat{g} \; .$$

Es inmediato de comprobar que ($q_0, q_1, \widehat{q}$) verifican las condiciones de cociclo (CC1) y (CC2) . $h'_\bullet : f_\bullet \longrightarrow q_\bullet$ está definida por:

$$h'_0 = s_0 f_1 : E_0 \longrightarrow G_1 \; , \quad \widehat{h'_0} = sd_0 f_1 \quad , \quad \widehat{h'_1} = h_1$$

y $h''_\bullet : q_\bullet \rightarrow g_\bullet$ está dada por:

$$h''_0 = h_0 : E_0 \longrightarrow G_1 \quad , \quad \widehat{h''_0} = sd_0 q_1 = \widehat{h''_1} \quad .$$

2.15) Nota.- En esta nota estudiaremos los n-cociclos sobre n-hipergrupoides de la forma $K_{G_\bullet}(A_\bullet, n)$.

Sea $G_\bullet$ un grupoide que actua casitrivialmente sobre un objeto grupo abeliano $A_\bullet = A \underset{d}{\overset{s}{\rightleftarrows}} G_0$ en $\mathbb{C}/G_0$ y sea :

$$\begin{tikzcd}
E_\bullet : \arrow[d, "f_\bullet"'] & \cdots & E_n \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "f_n"'] & E_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"'] & \cdots & E_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "f_2"'] & E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "f_1"'] & E_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_0"'] & X \\
K_{G_\bullet}(A_\bullet, n) : & \cdots & A \underset{G_0}{\times} \Delta_n \arrow[r, shift left=2] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=2] & \Delta_{n-1} & \cdots & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

un n-cociclo de X sobre $K_{G_\bullet}(A_\bullet, n)$. Puesto que Δ_2 es el núcleo simplicial , el morfismo $f_2 : E_2 \longrightarrow \Delta_2$ queda determinado por f_1 , $f_2 = (f_1 d_0, f_1 d_1, f_1 d_2)$ e inductivamente el morfismo $f_i : E_i \longrightarrow \Delta_i$, $2 < i \leqslant n-1$, queda determinado por la fórmula $f_i = (f_{i-1} d_0, f_{i-1} d_1, \dots, f_{i-1} d_i)$. Por último el morfismo $f_n : E_n \longrightarrow A \underset{G_0}{\times} \Delta_n$ queda determinado por su componente en A i.e. por la composición $\widehat{f} : E_n \xrightarrow{f_n} A \underset{G_0}{\times} \Delta_2 \xrightarrow{pr} A$

Así $f_\bullet$ queda totalmente determinado por una terna $(f_0, f_1, \widehat{f})$ verificando las condiciones de cociclo que en este caso quedarán :

(nCC1) $(f_1, f_0) : tr^1(E.) \longrightarrow tr^1(K_{G.}(A.,n))$ es un morfismo simplicial truncado.

(nCC2) $A\,({}^{(f_1 d_0^n)}(\hat{f} d_n), \check{f} d_{n-1}, \ldots, \hat{f} d_0) = s f_0 d_0^n$

Donde hemos denotado por $A\,({}^{(f_1 d_0^n)}(\hat{f} d_{n+1}), \check{f} f_n, \ldots, \check{f} d_0)$ al producto alternado en A de los elementos en el parentesis . , notemos que en la condición (nCC2) está inplicito que $d\check{f} = f_0 d_0^n$:

$$\begin{tikzcd}
E_n \arrow[r, "\check{f}"'] \arrow[d, "d_0^n"'] & A \arrow[d, "d"] \\
E_0 \arrow[r, "f_0"] & G_0
\end{tikzcd}$$

Para estudiar ahora homotopías entre cociclos sobre $K_{G.}(A.,n)$ estudiaremos primero las homotopías entre cociclos sobre $COSK^1(G.)$, considerandolo como un 2-hipergrupoide filtrado . Veamos que para dar una homotopía entre dos cociclos $f.,g.:E. \longrightarrow COSK^1(G.)$ es suficiente con dar un morfismo $h_0 : E_0 \longrightarrow G_1$ verificando que $d_0 h_0 = f_0$ y $d_1 h_0 = g_0$: A partir de h_0 definimos (por ejemplo) $h_0^1, h_1^1 : E_1 \longrightarrow \Delta_2$ por ;

$$h_0^1 = (f_1, f_1(h_0 d_1), h_0 d_1) \quad y \quad h_1^1 = (h_0 d_0, f_1(h_0 d_1), g_1)$$

tenemos así definida una homotopía truncada que claramente satisface las condiciones en el lema (3.2.5) .

Supongamos ahora $f.,g.: E. \longrightarrow K_{G.}(A.,n)$ dos n-cociclos y $h.: f. \rightarrow g.$ una homotopía entre ellos . Los morfismos f. y g. determinan morfismos $f.^{\#}$, $g.^{\#} : E. \longrightarrow COSK^1(G.)$ dados por : $f_m^{\#} = f_m$ y $g_m^{\#} = g_m$, m = 0, 1, ... ,n-1 y $f_n^{\#} = pr_1 f_n$, $g_n^{\#} = pr_1 g_n : E_n \overset{f_n}{\underset{g_n}{\rightrightarrows}} A \underset{G_0}{\times} \Delta_n \longrightarrow \Delta$ (entonces $f_n = (\check{f}, f_n^{\#})$ y $g_n = (\hat{g}, g_n^{\#})$).

La homotopía $h.: f. \rightarrow g.$ determina una homotopía $h.^{\#} : f.^{\#} \rightarrow g.^{\#}$ dada por : $h_i^{\# m} = h_i^m$ $0 \leq i \leq m < n-1$ y $\hat{h}_i = pr_1 h_i^{n-1} : E_{n-1} \xrightarrow{h_i^{n-1}} A \underset{G_0}{\times} \Delta_n \xrightarrow{pr_1} A$. Teniendo en cuenta la definición del corchete en $K_{G.}(A.,n)$ la condicion de homotopía dada en el lema (3.2.5) se traduce en :

$$A\,(\hat{h}_0 d_{n-1}, \hat{h}_0 d_{n-2}, \ldots, \hat{h}_0 d_1, \hat{z}_1, \hat{f}) = {}^{(f_1 d_0^{n-1})}(\hat{h}_0 d_n)$$

$$A\,(\hat{h}_1 d_{n-1}, \hat{h}_1 d_{n-2}, \ldots, \hat{h}_i d_2, \hat{z}_2, \hat{z}_1, \hat{h}_0 d_0) = {}^{(f_1 d_0^{n-1})}(\hat{h}_1 d_n)$$

. . . .

$$A\,(\hat{z}_n, \hat{z}_{n-1}, \hat{h}_{n-1} d_{n-1}, \ldots, \hat{h}_{n-2} d_0) = {}^{(f_1 d_0^{n-1})}(\hat{h}_{n-1} d_n)$$

donde hemos denotado a los morfismos $z_i : E_n \longrightarrow A \underset{G_0}{\times} \Delta_n$ por $z_i = (\hat{z}_i, z_i^{\#})$. despejando en las ecuaciones anteriores los morfismos $\hat{z}_i$ y sustituyendolos en la ecuación

$$A\,(\hat{z}_n, \hat{h}_{n-1} d_{n-1}, \ldots, \hat{h}_{n-1} d_0) = {}^{(h_0 d_0^n)'}(\hat{g})$$

obtenemos la siguiente ecuación :

$$(\text{nCH }) \quad \hat{f}^{(h_o d_o^n)}(\hat{g}^{-1}) = {}^{(f_1 d_o^{n-1})}\Big(\prod_{j=0}^{n-1} (\hat{h}_j d_n)^{(-1)^{n+1}}\Big) \prod_{j=0}^{n-1}\prod_{i=0}^{n-1} (\hat{h}_j d_i)^{(-1)^{i+j+1}}$$

Llamaremos a esta ecuación <u>condición de homotopía</u> entre cociclos sobre $K_{G_\bullet}(A_\bullet,n)$. observese que si el hipergrupoide es $K(A\ ,n)$ para A un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$, esta condición es la dada en la nota (3.2.7) (ii) . Al igual que en el caso abeliano (nota(3,2,7)), a partir de una homotopía $h_\bullet : f_\bullet \longrightarrow g_\bullet$, sustituyendo los morfismos $\hat{h}_i : E_{n-1} \longrightarrow A$ por $sd_o^n h_o^{n-1}$, ... , $sd_o^n h_{n-2}^{n-1}$, $\hat{h} : E_{n-1} \longrightarrow A$ con $\hat{h} = \mathbf{A}(\hat{h}_n\ , \ldots ,\hat{h}_o)$, obtenemos una homotopía de $f_\bullet$ a $g_\bullet$ (recordar que A es un objeto grupo abeliano). Como consecuencia inmediata obtenemos :

.2.16) <u>Proposición</u> .-

Dados dos cociclos $f_\bullet , g_\bullet : E_\bullet \longrightarrow K_{G_\bullet}(A_\bullet,n)$ existe una homotopía $h_\bullet : f_\bullet \rightarrow g_\bullet$ si y solo si existen morfismos:

$$h_o : E_o \longrightarrow G_1 \quad \text{y} \quad \hat{h} : E_{n-1} \longrightarrow A$$

verificando:

$$(\text{nCH 1' }) \qquad d_o h_o = f_o \quad , \quad d_1 h_o = f_o$$

$$(\text{nCH 2'}) \quad \hat{f}^{(h_o d_o^n\ )}(\hat{g}^{-1}) = \mathbf{A}\big({}^{(f_1 d_o^{n-1})}(\hat{h} d_n), \hat{h} d_{n-1}, \ldots ,\hat{h} d_o\big) \quad .$$

Puesto que las condiciones simplificadas de homotopía (nCH 1') y (nCH 2') dadas por la proposición (3.2.16) anterior son totalmente simétricas, podremos"componer" homotopías así como obtener homotopias "inversas", de forma que la relación de homotopía entre cociclos desde un n-hiperrecubrimiento sobre un n-hipergrupoide de la forma $K_{G_\bullet}(A_\bullet,n)$ es de equivalencia.

2.17) <u>Nota</u>.- Si sustituimos el n-hipergrupoide filtrado $K_{G_\bullet}(A_\bullet,n)$ por cualquier n-hipergrupoide filtrado , el resultado anterior sigue siendo cierto , es decir:

" Para cualquier hiperrecubrimiento $E_\bullet$, la relación de homotopía en $\mathrm{Simpl}(E_\bullet,G_\bullet)$ es de equivalencia siempre que $G_\bullet$ sea un n-hipergrupoide filtrado ".

Para demostrar esta afirmación (siguiendo los pasos anteriores) tendriamos que estudiar detenidamente la equivalencia entre las categorías de n-grupoides y n-hipergrupoides filtrados , con el fin de de escribir (al igual que hicimos en dimensión dos) cada n-hipergrupoide filtrado en función de su " complejo de Moore ".

Sin embargo para n-hipergrupoides cualquiera, este resultado parece muy complicado de demostrar.

Al igual que ocurre en dimensión dos, en el conjunto de homotopías entre cociclos desde un n-hiperrecubrimiento $E_\bullet$ sobre un n-hipergrupoide filtrado de la forma $K_{G_\bullet}(A_\bullet,n)$ podemos diferenciar dos clases:

-) La clase $\mathbb{C}_o$ de aquellas homotopías $h.$ verificando que los morfismos $h_i^m : E_m \longrightarrow K_{G.}(A.,n)_{m+1}$, $0 \leq i \leq m < n-1$, factorizan a traves de los operadores degeneración $s_i : K_{G.}(A.,n)_m \longrightarrow K_{G.}(A.,n)_{m+1}$.

-) La clase $\mathbb{C}_1$ de las homotopías $h.$ que verifican que los morfismos $\breve{h}_i = prh_i^{n-1} : E_{n-1} \longrightarrow A \underset{G_o}{\times} \Delta_n \longrightarrow A$ factorizan por $s : G_o \longrightarrow A$.

.2.18) Si $f.,g. : E. \longrightarrow K_{G.}(A.,n)$ son dos cociclos desde un n-hiperrecubrimiento de X y $h. : f. \longrightarrow g.$ es una homotopía entre ellos en la clase $\mathbb{C}_o$. Entonces $h_o^o = s_o f_o \Rightarrow f_o = g_o$ y $(h_o^1 = s_o f_1 \ , \ h_1^1 = s_1 f_1) \Rightarrow f_1 = g_1$. Así los morfismos $f.^{\#}, g.^{\#} : E. \longrightarrow COSK^1(G.)$ inducidos por $f.$ y $g.$ respectivamente, coinciden ($f.^{\#} = g.^{\#}$). En este caso, puesto que $d_o h_o^o d_o^n = d_1 h_o^o d_o^n$, se tiene que $h_o d_o^n$ actua trivialmente sobre $\breve{g}^{-1}$ y por tanto la condición de homotopía (nCH 2') (suponiendo $h.$ una homotopía "simplificada") queda:

$$\widehat{f} \cdot \widehat{g}^{-1} = A \big({}^{(f_1 d_o^{n-1})}(\widehat{h}\, d_n), \widehat{h} d_{n-1}, \ . \ . \ . \ , \widehat{h} d_o \big)$$

Consideremos ahora los 1-cociclos asociados a $f.$ y $g.$

$$\begin{tikzcd}
E'_. : \arrow[d, shift right, "f'"'] \arrow[d, shift left, "g'"] & \cdots & E'_1 = E_{n-1} \underset{\Delta_{n-1}(E.)}{\times} E_{n-1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift right, "f'_1"'] \arrow[d, shift left, "g'_1"] & E'_o = E_{n-1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g_{n-1} = f_{n-1}"] \arrow[dl, dashed, "h'_o"'] & \Delta_{n-1}(E.) \\
K_{G.}(A.,n): & \cdots & A \underset{G_o}{\times} \Delta_{n-1} \arrow[r, "pr"] & \Delta_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

Si $x \in E'_1$ ($d_i(x) = s_{n-2} d_i d_{n-1}(x)$, $0 \leq i \leq n-2$) , entonces

$$\widehat{f}(x)\, \widehat{g}(x)^{-1} = A\big({}^{(f_1 d_o^{n-1}(x))}(\widehat{h}\, d_n(x)), \widehat{h} d_{n-1}(x), \ . \ . \ . \ , \widehat{h} d_o(x) \big) = \widehat{h}\, d_n(x) \cdot \widehat{h} d_{n-1}(x)^{-1}$$

puesto que $f_1 d_o^{n-1}(x)$ actua trivialmente sobre $\widehat{h} d_n(x)$ y $\widehat{h} d\ (x)$ es trivial para $i = 0, \ldots, n-2$. Así $h'_. : f'_. \longrightarrow g'_.$ ($h'_o = (\widehat{h}\ , s'_o f_{n-1})$ define una homotopía entre los 1-cociclos asociados a $f.$ y $g.$.

Por otra parte, si $h. : f. \longrightarrow g.$ es una homotopía en $\mathbb{C}_1$, entonces la condición (nCH 2') de homotopía quedaría:

$$\breve{f} = {}^{(h_o^o d_o^n)}\breve{g}$$

El siguiente lema nos muestra que las clases $\mathbb{C}_o$ y $\mathbb{C}_1$ "generan el conjunto de homotopías entre cociclos en $Simpl(E., K_{G.}(A.,n))$.

.2.19) Lema.-

Cada homotopía $h. : f. \longrightarrow g.$ entre cociclos $f.,g. : E. \longrightarrow K_{G.}(A.,n)$, con los morfismos $\widehat{h}_i$ factorizando por $s : G_o \longrightarrow A$ para $0 \leq i \leq n-2$, se descompone como un " producto " $h. = h'_. \cdot h''_.$ con $h'_.$ en $\mathbb{C}_o$ y $h''_.$ en $\mathbb{C}_1$.

Demostración.- Supongamos $h. : f. \longrightarrow g.$ una homotopía en las condiciones del enunciado, entonces se verifican las condiciones (nCH 1') y (nCH 2').

El morfismo simplicial truncado (f_o, f_1) junto con el morfismo $\overset{(h^o_o d^n_o)}{\hat{g}}$ verifican las condiciones de n-cociclo (nCC1) y (nCC2) por tanto definen un n-cociclo al que denotamos $q_{\bullet}: E_{\bullet} \longrightarrow K_{G_{\bullet}}(A_{\bullet}, n)$ verificando que $f^{\#}_{\bullet} = q^{\#}_{\bullet}: E_{\bullet} \longrightarrow COSK^1(G_{\bullet})$. El morfismo $\hat{h} = pr\, h^{n-1}_{n-1}: E_{n-1} \longrightarrow A$ nos determina una homotopía $h'_{\bullet} : f_{\bullet} \rightarrow q_{\bullet}$ en $\mathbb{C}_o$ y el morfismo $h^o_o : E_o \longrightarrow G_1$ nos determina una homotopía $h''_{\bullet} : q_{\bullet} \rightarrow g_{\bullet}$ en $\mathbb{C}_1$, siendo $h_{\bullet} = h'_{\bullet} \cdot h''_{\bullet}$.

<u>La relación entre cociclos y torsores</u> .

En este apartado estudiaremos la relación existente entre los conjuntos de cohomología H^n y los conjuntos $\hat{H}^n$.

.2.20) <u>Teorema</u> (de factorización de n-cociclos por n-torsores) .

Sea X un objeto de $\mathbb{C}$ y $G_{\bullet}$ un n-hipergrupoide. entonces para cada n-cociclo $f_{\bullet}: E_{\bullet} \rightarrow G_{\bullet}$ de X sobre $G_{\bullet}$ existe un n-torsor $\alpha^f_{\bullet}: E^f_{\bullet} \longrightarrow G_{\bullet}$ de X sobre $G_{\bullet}$ y un morfismo simplicial $a_{\bullet}: E_{\bullet} \longrightarrow E^f_{\bullet}$ en HC(X) $G_{\bullet}$-invariante (i.e. el siguiente triangulo conmuta)

$$\begin{tikzcd}
E_{\bullet} \arrow[rr, "a_{\bullet}"] \arrow[dr, "f_{\bullet}"'] & & E^f_{\bullet} \arrow[dl, "\alpha^f_{\bullet}"] \\
& G_{\bullet} &
\end{tikzcd}$$

verificando la siguiente propiedad universal: Si $\beta_{\bullet}: F_{\bullet} \longrightarrow G_{\bullet}$ es un n-torsor de X sobre $G_{\bullet}$ y $b_{\bullet}: E_{\bullet} \longrightarrow F_{\bullet}$ es un morfismo simplicial en HC(X) $G_{\bullet}$-invariante ($f_{\bullet} = \beta_{\bullet} \cdot b_{\bullet}$) entonces existe un morfismo de torsores $\bar{b}_{\bullet} : E^f_{\bullet} \longrightarrow F_{\bullet}$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_{\bullet} \arrow[rr, "a_{\bullet}"] \arrow[dr, "b_{\bullet}"] \arrow[ddr, bend right, "f_{\bullet}"'] & & E^f_{\bullet} \arrow[dl, "\bar{b}_{\bullet}"'] \arrow[ddl, bend left, "\alpha^f_{\bullet}"] \\
& F & \\
& G &
\end{tikzcd}$$

<u>Demostración</u>.- Por el lema (1.4.38) podemos suponer $E_{\bullet} = COSK^{n-1}(E_{\bullet})$. Si consideramos a $E_{\bullet}$ como un n-hipergrupoide y a $f_{\bullet} : E_{\bullet} \longrightarrow G_{\bullet}$ como un morfismo de n-hipergrupoides, tenemos un funtor

$$f_{*} = TORS^n(X, f_{\bullet}) : TORS^n(X, E_{\bullet}) \longrightarrow TORS^n(X, G_{\bullet})$$

por ser $E_{\bullet}$ un n-hiperrecubrimiento, $id: E_{\bullet} \longrightarrow E_{\bullet}$ es un n-torsor de X sobre $E_{\bullet}$ y así $\alpha^f_{\bullet} = f_{*}(id_{E_{\bullet}})$ es un n-torsor de X sobre $G_{\bullet}$ teniendose (ver (1.4.37)) un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E_{\bullet} \arrow[r, "a"] \arrow[d, equal, "id"'] & E^f_{\bullet} \arrow[d, "\alpha^f_{\bullet}"] \\
E_{\bullet} \arrow[r, "f_{\bullet}"] & G_{\bullet}
\end{tikzcd}$$

En este caso el n-torsor $\alpha^f_{\bullet}$ puede obtenerse como sigue (recordar la definición del funtor f_*) :

S ea $f'_\bullet : E'_\bullet \longrightarrow G'_\bullet$ el 1-cociclo asociado a $f_\bullet$;

$$\begin{tikzcd}
 & E'_\bullet : \arrow[dl] \arrow[dd] & \cdots & & E'_1 \arrow[dl, "\cdot"'] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] \arrow[dd, "f'_1"] & & & & & & & \\
E_\bullet : \arrow[dd] & & \cdots & E_n \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right, ":"'] \arrow[dd, "f_n"'] & & E_{n-1} \arrow[rr, shift left, ":"] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & & E_{n-2} \arrow[dd, "f_{n-2}"] & \cdots & E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dd, "f_1"] & E_0 \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "f_0"] & X \\
 & G'_\bullet : \arrow[dl] & \cdots & & G'_1 \arrow[dl, "\cdot"'] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & \Delta_{n-1}(E_\bullet) \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right, ":"'] & & & & & \\
G_\bullet : & & \cdots & G_n \arrow[rr, shift left, ":"] \arrow[rr, shift right] & & G_{n-1} \arrow[rr, shift left, ":"] \arrow[rr, shift right] & & G_{n-2} & \cdots & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

recordemos que $f'_0 = f_{n-1} : E_{n-1} \longrightarrow G_{n-1}$ y $f'_1(x_0,x_1) = f_n(s_{n-2}d_0(x_0), \ldots ,s_{n-2}d_{n-2}(x_0),x_0,x_1)$ para todo $x_0,x_1 \in E_{n-1}$ tales que $d_i(x_0) = d_i(x_1)$ $i = 0, \ldots ,n-1$. Entonces el objeto simplicial $E^f_\bullet$ está dado por ;

$E^f_m = E_m$, $m = 0, \ldots n-2$, $E^f_{n-1} = \text{coequ} (E'_1 \underset{G_{n-1}}{\times} G'_1 \overset{\psi}{\underset{\phi}{\rightrightarrows}} E_{n-1} \underset{G_{n-1}}{\times} G'_1)$ donde los elementos de $E'_1 \underset{G_{n-1}}{\times} G'_1$ son ternas $(x_0,x_1,g) \in E_{n-1} \times E_{n-1} \times G'_1$ tales que $d_i(x_0) = d_i(x_1)$, $i = 0 \ldots n$ y $f_{n-1}(x_1) = d_{n-1}(g)$, los elementos de $E'_0 \underset{G_{n-1}}{\times} G'_1$ son pares (x,g) tales que $f_{n-1}(x) = d_{n-1}(g)$, los morfismos ψ y ϕ estan definidos por

$\psi(x_0,x_1, g) = (x_0, f'(x_0,x_1) g)$ (donde $f'_1(x_0,x_1)$ g denota la multiplicación en G'_1)

$\phi(x_0, x_1,g) = (x_1 , g)$.

Los operadores caras $d_i : E^f_{n-1} \longrightarrow E^f_{n-2} = E_{n-2}$ están dados por $d_i(\overline{(x,g)}) = d_i(x)$ y los degeneración $s_i : E_{n-2} = E^f_{n-2} \longrightarrow E_{n-1}$ por $s_i(y) = \overline{(s_i(y) , s_{n-1}f_{n-2}(y))}$ (hemos denotado por $\overline{(\ )}$ clases en E^f_{n-1}) . En dimensiones superiores $E^f_\bullet = \text{COSK}^{n-1}(E^f_\bullet)$:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & E'_1 \underset{G_{n-1}}{\times} G' \arrow[d, shift right, "\psi"'] \arrow[d, shift left, "\phi"] & & & & & \\
 & & & & & E_{n-1} \underset{G_{n-1}}{\times} G'_1 \arrow[dd] & & & & & \\
E_n : \cdots \arrow[dd, "f_\bullet"'] \arrow[dr, dash, "a_\bullet"'] & & E_n \arrow[rr, shift left, ":"] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, "f_n"'] \arrow[dr, dashed, "a_n"] & & E_{n-1} \arrow[rr, shift left, ":"] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, "f_{n-1}"'] \arrow[dr, dashed, "a_{n-1}"] \arrow[ur, dashed] & & E_{n-2} \arrow[dd, "\alpha^f_{n-2} = f_{n-2}"] & \cdots & E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dd, "\alpha^f_1 = f_1"] & E_0 \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "\alpha^f_0 = f_0"] & X \\
 & E^f_\bullet : \cdots \arrow[dl, "\alpha^f_\bullet"] & & E^f_n = \Delta_n(E^f) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right, ":"'] \arrow[dl, dashed, "\alpha^f_n"] & & E^f_{n-1} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right, ":"'] \arrow[dl, dashed, "\alpha^f_{n-1}"'] & & & & & \\
G_\bullet : \cdots & & G_n \arrow[rr, shift left, ":"] \arrow[rr, shift right] & & G_{n-1} \arrow[rr, shift left, ":"] \arrow[rr, shift right] & & G_{n-2} & \cdots & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

El morfismo $\alpha^f_\bullet : E^f_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ está dado por $\alpha^f_m = f_m$ $m=0,1 \ldots n-2$, α^f_{n-1} está inducido por la composición $E_{n-1} \underset{G_{n-1}}{\times} G'_1 \xrightarrow{pr} G'_1 \xrightarrow{d_n} G_{n-1}$ que coiguala a (ψ, ϕ) i.e. $\alpha^f_{n-1}(\overline{(x,g)}) = d_n(g)$ y $\alpha^f_n : \Delta_n(E^f) \longrightarrow G_n$ viene definido por

$$\alpha^f_n (\overline{(x_0,g_0)}, \ldots , \overline{(x_n,g_n)}) = g$$

el único elemento de G_n verificando:

$$\left[s_{n-2}d_n(g_o),\ \dots\ ,s_{n-2}d_n(g_{n-2}),\ \left[g_o,\ \dots\ ,g_{n-1},f_n(x_o,\ \dots\ ,x_n)\right],\ g\right] = g_n$$

Por ejemplo :

-) Si $G.$ es un grupoide entonces $\alpha^f_1(\,\overline{(x_o,g_o)},\overline{(x_1,g_1)}\,) = g_o^{-1}\, f_1(x_o,x_1)\, g_1^{-1}$

-) Si $G. = K(A,n)$ para A un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$

$$\alpha^f_n(\,\overline{(x_o,g_o)},\ \dots\ ,\overline{(x_n,g_n)}\,) = f_n(x_o,\ \dots\ ,x_n) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} g_i$$

-) Si $G.$ es un n-hipergrupoide filtrado de la forma $K_{N.}(Z., n)$

$$\tilde{\alpha}^f(\,\overline{(x_o,g_o)}\,,\ \dots\ ,\overline{(x_n g_n)}\,) = \hat{f}(x_o,\ \dots\ ,x_n)\cdot A(g_n,\ \dots\ ,g_o)$$

donde $\tilde{\alpha}^f$ denota la composición $E^f_n \longrightarrow Z \underset{G_o}{\times} \Delta_n \longrightarrow Z$.

-) Por último si $G. = E \underset{G_o}{\times} G_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \;\substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow}\; G_1 \rightrightarrows G_o$ es un 2-hipergrupoide filtrado . Entonces E^f_1 será el coigualador de $E'_1 \underset{G_o}{\times} E \overset{\psi}{\underset{\phi}{\rightrightarrows}} E_1 \underset{G_o}{\times} E \dashrightarrow E^f_1$

donde los elementos de $E_1 \underset{G_o}{\times} E$ son pares $(x,e) \in E_1 x E$ tales que $d(e) = d_o f_1(x)$ y los de $E'_1 \underset{G_o}{\times} E$ son ternas $(x_o,x_1,e) \in E_1 x E_1 x E$ tales que $d_i(x_1)=d_i(x_o)$, i=0,1,2 y $d(e) = d_o f_1(x_1)$, los morfismos ψ y ϕ están definidos por:

$$\psi(x_o,x_1,e) = (x_o,\ \hat{f}(s_o d_o(x_o),x_o,x_1)\ e)$$

$$\phi(x_o,x_1,e) = (x_1,e)$$

El morfismo $\alpha^f.:E^f. \longrightarrow G.$ está dado por :

$$\alpha^f_o = f_o \quad , \quad \alpha^f_1(\,\overline{(x,e)}\,) = \rho(e)^{-1} f_1(x) \quad \text{y}$$

$$\alpha^f_2(\,\overline{(x_o,e_o)},\overline{(x_1,e_1)},\overline{(x_2,e_2)}\,) = (\,e_1^{-1}\ f(x_o,x_1,x_2)^{f_1(x_o)}(e_2)\ e_o,\ \rho(e_o)^{-1}f_1(x_o),\ \rho(e_2)^{-1}f_1(x_2)\,)$$

En general se tiene que el 1-torsor asociado a $\alpha^f.$ es $f'_*(\,\mathrm{id}_{E'.})$, esto es, el 1-torsor asociado a $\alpha^f.$ es el 1-torsor por el que se factoriza el 1-cociclo asociado a $f.(\ (\alpha^f.)'=\alpha.^{(f')}\ )$.

El morfismo $a.:E. \longrightarrow E^f.$ está definido por: $a_m = \mathrm{id}:E_m = E_m$, $0 \leq m \leq n-2$, $a_{n-1}:E_{n-1} \longrightarrow E^f_{n-1}$ por $a_{n-1}(x) = \overline{(\,x, s_{n-1}f_{n-1}(x)\,)}$ y en dimensiones superiores los inducidos utilizando que $E^f. = \mathrm{COSK}^{n-1}(E^f.)$.

Comprobemos ahora la propiedad universal: supongamos $\beta.:F. \longrightarrow G.$ un n-torsor y un morfismo $b.:E. \longrightarrow F.$ en HC(X) $G.$-invariante

$$\begin{tikzcd}
E.: \arrow[ddr, "b."] \arrow[drr, "a."] \arrow[ddd, "f."'] & & \cdots & & E_n \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, shift right, phantom, "\vdots"] \arrow[rrr, shift right=2] \arrow[drr] \arrow[ddr] \arrow[ddd, bend right] & & & E_{n-1} \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, phantom, "\vdots"] \arrow[rrr, shift right=2] \arrow[drr] \arrow[ddr] \arrow[ddd] & & & E_{n-2} \arrow[ddr] \arrow[ddd] & & \cdots & E_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[ddr] \arrow[ddd] & & E_o \arrow[rr, two heads] \arrow[ddr] \arrow[ddd] & & X \arrow[ddr, equal] & \\
& & E^f.: \arrow[dl, dashed, "\bar{b}."] \arrow[ddll, bend left, "\alpha^f."] & \cdots & & & E^f_n \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, phantom, "\vdots"] \arrow[rrr, shift right=2] \arrow[dl, dashed] \arrow[ddll, bend left] & & & E^f_{n-1} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, phantom, "\vdots"] \arrow[ur, shift right] \arrow[dl, dashed] \arrow[ddll, bend left] & & & & & & & & & \\
& F.: \arrow[dl, "\beta."] & & \cdots & & F_n \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, phantom, "\vdots"] \arrow[rrr, shift right=2] \arrow[dl] & & & F_{n-1} \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, phantom, "\vdots"] \arrow[rrr, shift right=2] \arrow[dl] & & & F_{n-2} \arrow[dl] & \cdots & & F_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] & & F_o \arrow[rr, two heads] \arrow[dl] & & X \\
G.: & & \cdots & & G_n \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, phantom, "\vdots"] \arrow[rrr, shift right=2] & & & G_{n-1} \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, phantom, "\vdots"] \arrow[rrr, shift right=2] & & & G_{n-2} & & \cdots & G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_o & & &
\end{tikzcd}$$

definimos entonces $\bar{b}_{\cdot}:E_{\cdot}^{f} \longrightarrow F_{\cdot}$ por : $\bar{b}_m = b_m$, $0 \leqslant m \leqslant n-2$, $\bar{b}_{n-1}(\,(x,g)\,) = b_{n-1}(x)^g$ el único elemento de F_{n-1} verificando:

$$\beta_1'(\, b_{n-1}(x), b_{n-1}(x)^g) = \beta_n(\, s_{n-2}d_o b_{n-1}(x), \; \ldots \; , s_{n-2}d_{n-2}b_{n-1}(x), b_{n-1}(x), b_{n-1}(x)^g\,) = g$$

(recuerdese que $b_{n-1}(x)^g$ será el elemento de F_{n-1} obtenido al hacer actuar g según la acción del 1-torsor asociado a $\beta_{\cdot}$ sobre el elemento $b_{n-1}(x)$. Claramente $(\bar{b}_{n-1}, \ldots , \bar{b}_o)$ es un morfismo simplicial truncado que se extiende de forma única a un morfismo simplicial $\bar{b}_{\cdot}: E_{\cdot} \longrightarrow F_{\cdot}$ de complejos aumentados. Además se verifica :

$$\beta_{n-1}\bar{b}_{n-1}(\,\overline{(x,g)}\,) = \beta_{n-1}(\, b_{n-1}(x)^g\,) = \beta_{n-1}pr_1(b_{n-1}(x), b_{n-1}(x)^g) =$$

$$d_n\, \beta_1'(\, b_{n-1}(x)\, , b_{n-1}(x)^g\,) = d_n(g) = \alpha^f_{n-1}(\,\overline{(x,g)}\,)$$

y para cada $x \in E_{n-1}$, $\bar{b}_{n-1}a_{n-1}(x) = \bar{b}_{n-1}(\,\overline{(x, s_{n-1}f_{n-1}(x)\,)}\,) = b_{n-1}(x)^{s_{n-1}f_{n-1}(x)} = b_{n-1}(x)$ ./

Este teorema(3.2.20) anterior nos dar una interpretación de los contuntos H^n en términos de torsores así:

Sea $G_{\cdot}$ un n-hipergrupoide cualquiera, X un objeto en $\mathbb{C}$ y "R" la relación de equivalencia en $TORS^n(X,G_{\cdot})$ generada por la relación binaria; $\alpha_{\cdot} \backsim \alpha_{\cdot}'$ sii existe un hiperrecubrimiento $T_{\cdot}$ de X y un diagrama en Simpl($\mathbb{C}$)

$$\begin{tikzcd} & T_{\cdot} \arrow[dl, "f_{\cdot}"'] \arrow[dr, "f_{\cdot}'"] & \\ E_{\cdot} \arrow[dr, "\alpha_{\cdot}"'] & & E_{\cdot}' \arrow[dl, "\alpha_{\cdot}'"] \\ & G_{\cdot} & \end{tikzcd}$$

que conmute salvo homotopía. Entonces se tiene ;

.2.21) Corolario .-

En las condiciones anteriores se tiene una biyección natural

$$H^n(X,G_{\cdot}) \cong \frac{TOSR^n(X,G_{\cdot})}{\text{"R"}}$$

Notemos que para establecer la relación de equivalencia "R" hemos de salirnos del conjunto $TORS^n(X,G_{\cdot})$. Las siguientes proposiciones están dedicadas a estudiar que ocurre con los torsoresa traves de los que factorizan cociclos homotópicos sobre algunos tipos de n-hipergrupoides (grupoides, 2-hipergrupoides filtados ,etc.) dandose al final mejores versiones del corolario (3.2.21) en estos casos particulares .

.2.22) Proposición.-

Sean $f_{\cdot}, f_{\cdot}' : E_{\cdot} \longrightarrow G_{\cdot}$ dos 1-cociclos de X sobre el grupoide $G_{\cdot}$ y $\alpha_{\cdot}^{f} : E_{\cdot}^{f} \longrightarrow G_{\cdot}$, $\alpha_{\cdot}^{f'} : E_{\cdot}^{f'} \longrightarrow G_{\cdot}$ los 1-torsores dados por el teorema(3.2.20),a traves de los cuales factorizan $f_{\cdot}$ y $f_{\cdot}'$ respectivamente. Entonces si $f_{\cdot}$ y $g_{\cdot}$ son cociclos homotópicos $\alpha_{\cdot}^{f}$ y $\alpha_{\cdot}^{f'}$

son torsores isomorfos.

Demostración.- Supongamos $h_\bullet : f_\bullet \longrightarrow f'_\bullet$ una homotopía (entonces $f'_1 = (h^0_0 d_0)^{-1} f_1 (h^0_0 d_1)$), E^f_0 y $E^{f'}_0$ serán los objetos coigualadores de:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \overset{(f)}{\underset{G_0}{\times}} G_1 \arrow[r, shift left, "\psi"] \arrow[r, shift right, "\phi"'] & E_0 \overset{(f)}{\underset{G_0}{\times}} G_1 \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, dashed, "t"] & E^f_0 \arrow[d, dashed, "t_0"] \\
E_1 \overset{(f')}{\underset{G_0}{\times}} G_1 \arrow[r, shift left, "\psi'"] \arrow[r, shift right, "\phi'"'] & E_0 \overset{(f')}{\underset{G_0}{\times}} G_1 \arrow[r, two heads, "q'"] & E^{f'}_0
\end{tikzcd}$$

donde $E_1 \overset{(f)}{\underset{G_0}{\times}} G_1$ denota el objeto pullback

$$\begin{tikzcd}
E_1 \overset{(f)}{\underset{G_0}{\times}} G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[d, "d_1"] \\
E_1 \arrow[r, "d_1 f_1"] & G_0
\end{tikzcd}$$

y analogamente para el resto de los objetos pullback que aparecen en el diagrama. Los morfismos ψ y ϕ están dados por: $\psi(x_0, x_1, g) = (x_0, f_1(x_0, x_1)\, g)$ y $\phi(x_0, x_1, g) = (x_1, g)$ y analogamente ψ' y ϕ' . Definimos entonces $t : E_0 \overset{(f)}{\underset{G_0}{\times}} G_1 \longrightarrow E_0 \overset{(f')}{\underset{G_0}{\times}} G_1$ por $t(x,g) = (x, h^0_0(x)^{-1} g)$, se verifica entonces que $q't$ coiguala a ψ y ϕ por lo que se tiene un único $t_0 : E^f_0 \longrightarrow E^{f'}_0$ tal que $t_0 q = q't$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, shift right] \arrow[dr] \arrow[ddrr, bend left] \arrow[ddd, shift right, "f_1"'] \arrow[ddd, shift left, "f'_1"] & & & E_0 \arrow[rrr, two heads, "p"] \arrow[dr] \arrow[ddrr, bend left] \arrow[ddd, shift right, "f_0"'] \arrow[ddd, shift left, "f'_0"] & & & X \\
& E^f_1 \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, shift right] \arrow[dr, dashed, "t_1"] \arrow[ddl, "\alpha^f_1"] & & & E^f_0 \arrow[urr, "\bar{p}"] \arrow[dr, "t_0"] \arrow[ddl, "\alpha^f_0"] & & \\
& & E^{f'}_1 \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, shift right] \arrow[dll, "\alpha^{f'}_1"] & & & E^{f'}_0 \arrow[uur, "\bar{p}'"'] \arrow[dll, "\alpha^{f'}_0"] & \\
G_1 \arrow[rrr, shift left] \arrow[rrr, shift right] & & & G_0 & & &
\end{tikzcd}$$

recordemos que $\bar{p}(\overline{(x,g)}) = p(x)$ y $\bar{p}'(\overline{(x,g)}) = p(x)$ por tanto

$$\begin{tikzcd}
E^f_0 \arrow[rr, "t_0"] \arrow[dr, "\bar{p}"'] & & E^{f'}_0 \arrow[dl, "\bar{p}'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

es un triangulo conmutativo. Así t_0 induce un morfismo simplicial $t_\bullet : E^f_\bullet \longrightarrow E^{f'}_\bullet$.

Por otra parte:

$$\alpha^{f'}_0 t_0 (\overline{(x,g)}) = \alpha^{f'}_0 (\overline{(x, h^0_0(x)^{-1} g)}) = d_1(h^0_0(x)^{-1} g) = d_1(g) = \alpha^f_0 (\overline{(x,g)}) \quad \text{y}$$

$$\alpha^{f'}_1 t_1 (\overline{(x_0, g_0)}, \overline{(x_1, g_1)}) = \alpha^{f'}_1 (\overline{(x_0, h^0_0(x_0)^{-1} g_0)}, (x_1, h^0_0(x_1)^{-1} g_1)) =$$

$$= g_0^{-1} h^0_0(x_0) f'_1(x_0, x_1) h^0_0(x_1)^{-1} g_1 = g_0^{-1} f_1(x_0, x_1) g_1 = \alpha^f_1 (\overline{(x_0, g_0)}, \overline{(x_1, g_1)})$$

por tanto $t_\bullet$ es un morfismo de torsores y así un isomorfismo . //

No podemos asegurar que el resultado anterior sea cierto para n-hipergrupoides cualesquiera (ni siquiera para hipergrupoides filtrados). Estudiaremos a continuación que ocurre cuando $G.$ es un 2-hipergrupoide filtrado, para esto necesitamos la siguiente definición:

.2.23) Definición (Torsores homotópicamente equivalentes) .

Dos n-torsores $\alpha.:E.\longrightarrow G.$ y $\beta.:F.\longrightarrow G.$ de X sobre $G.$ se dicen homotópicamente equivalentes sii existe un isomorfismo de complejos simpliciales aumentados $\psi.:E.\longrightarrow F.$ tal que los triangulos :

$$\begin{tikzcd} E. \arrow[rr, shift left, "\psi."] \arrow[dr, "\alpha."'] & & F. \arrow[ll, shift left, dashed, "\psi'."] \arrow[dl, "\beta."] \\ & G. & \end{tikzcd}$$

conmuten salvo homotopía i.e. existen homotopías $h.:\beta.\psi.\longrightarrow\alpha.$ y $h'.:\alpha.\psi'.\longrightarrow\beta.$, donde hemos denotado $\psi'.:F.\longrightarrow E.$ al morfismo simplicial inverso de $\psi.$.

.2.24) Proposición.-

sea $G.$ un 2-hipergrupoide filtrado, $f.,g.:E.\longrightarrow G.$ dos 2-cociclos de X y $\alpha^f.:E^f.\longrightarrow G.$, $\alpha^g.:E^g.\longrightarrow G.$ los 2-torsores a traves de los que factorizan $f.$ y $g.$ respectivamente (según el teorema (3.2.20)). Entonces si $f.$ y $g.$ son homotópicos, $\alpha^f.$ y $\alpha^g.$ son homotópicamente equivalentes .

Demostración.- Supongamos $G. = E\underset{G_o}{\times}G_1\underset{G_o}{\times}G_1 \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow\\ \longrightarrow} G_1 \rightrightarrows G_o$ (con $\rho.:E.\rightarrow G.$ su complejo de Moore) probaremos:

(i) Si existe una homotopía $h.:f.\rightarrow g.$ en la clase $\mathbb{C}_o$, entonces $\alpha^f.$ y $\alpha^g.$ son isomorfos .

(ii) Si existe una homotopía $h.:f.\rightarrow g.$ en $\mathbb{C}_1$ entonces $\alpha^f.$ y $\alpha^g.$ son homotópicamente equivalentes.

Usando entonces que la relación de homotopía en Simpl(E.,G.) es de equivalencia y los lemas (3.2.10) y (3.2.14); si $f.$ y $g.$ son homotópicos, podemos encontrar una homotopía $h.: f.\rightarrow g.$ que sea "producto de una homotopía en $\mathbb{C}_o$ por otra en $\mathbb{C}_1$ así usando (i) e (ii) tendremos probado el lema .

(i) Si $h.:f.\longrightarrow g.$ es una homotopía en $\mathbb{C}_o$ $(h^o_o = s_of_o)$ podemos suponer $h^1_o =(sf_od_o,f_1,s_of_od_1),h^1_1 =(\widehat{h} ,s_of_od_o,g_1) :\ E_1 \longrightarrow E\underset{G_o}{\times}G_1\underset{G_o}{\times}G_1$ verificandose:

(CH1) $f_1 = \rho(\widehat{h})\,g_1$

(CH2) $\widehat{h}(x_1)\,\check{f}(x_o,x_1,x_2)^{f_1(x_o)}(\widehat{h}(x_2))\ \widehat{h}(x_o) = \widehat{g}(x_o,x_1,x_2)$.

Esta homotopía induce (ver (3.2.12)) una homotopía $h'.:f'.\longrightarrow g'.$ entre los 1-cociclos asociados a $f.$ y $g.$ respectivamente. Aplicando ahora la proposición (3.2.22) tendremos un isomorfismo $t'.:E^{f'}.\longrightarrow E^{g'}.$ entre los 1-torsores por los que factorizan $f'.$ y $g'.$ respectivamente, recordemos que $t'_o : E^{f'}_o\longrightarrow E^{g'}_o$ está definido por : $t'_o(\overline{(x,e)}) = \overline{(x,\widehat{h}(x)^{-1}e)}$.

Puesto que $E_o^{f'} = E_1^f$ y $E_o^{g'} = E_1^g$ si llamamos $t_1 = t'_o{}^f$, el morfismo simplicial truncado (t_1, id_{E_o}) define un morfismo simplicial $t.: E.^f \longrightarrow E.^g$ de complejos aumentados, donde $t_2 : E_2^f \longrightarrow E_2^g$ está dado por :

$$t_2(\overline{(x_o,e_o)},\overline{(x_1,e_1)},\overline{(x_2,e_2)}) = (t_1\overline{(x_o,e_o)} ,t_1\overline{(x_1,e_1)},t_1\overline{(x_2,e_2)}) .$$

Ya que t_1 es un isomorfismo , tambien lo es $t.$, veamos que es un isomorfismo de torsores , para lo cual hemos de comprobar que el triangulo

$$\begin{tikzcd} E.^f \arrow[rr, "t."] \arrow[dr, "\alpha.^f"'] & & E.^g \arrow[dl, "\alpha.^g"] \\ & G. & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por ser $t!$ un isomorfismo de 1-torsores , bastará que veamos que $\alpha_2^g t_2 = \alpha_2^f$;

$$\alpha_2^g t_2 (\overline{(x_o,e_o)},\overline{(x_1,e_1)},\overline{(x_2,e_2)}) = \alpha_2^g ((x_o, \widehat{h}(x_o)^{-1}e_o),(x_1,\widehat{h}(x_1)^{-1}e_1),(x_2,\widehat{h}(x_2)^{-1}e_2)) =$$

$$= (e_1^{-1} \widehat{h}(x_1)\, \widehat{g}(x_o,x_1,x_2)\, {}^{g_1(x_o)}(\widehat{h}(x_2)^{-1}e_2)\, \widehat{h}(x_o)^{-1}e_o, \rho(e_o)^{-1}\rho(\widehat{h}(x_o))\, g_1(x_o), \rho(e_2)^{-1}\rho(\widehat{h}(x_2))g_1(x_2)) =$$

$= ($ condiciones de homotopía $) =$

$$= (e_1^{-1}\widetilde{f}(x_o,x_1,x_2)\, {}^{f_1(x_o)}(e_2)e_o , \rho(e_o)^{-1}f_1(x_o) , \rho(e_2)^{-1}f_1(x_2)) = \alpha_2^f(\overline{(x_o,g_o)},\overline{(x_1,g_1)},\overline{(x_2,g_2)})$$

(ii) Supongamos ahora que $h.:f.\longrightarrow g.$ es una homotopía en $\mathbb{C}_1$, entonces $\widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_o = sf_od_o$ y las condiciones de homotopía quedaran :

(CH1) $f_1\ (h_od_1) = (h_od_o)\ g_1$

(CH 2) $^{(h_od_o(x_o))^{-1}}(\widetilde{f}(x_o,x_1,x_2)) = \widetilde{g}(x_o,x_1,x_2)$.

Recordemos que E_1^f y E_1^g son los coigualadores

$$\begin{tikzcd} E'_1 \overset{(f)}{\underset{G_o}{\times}} E \arrow[r, shift left, "\psi"] \arrow[r, shift right, "\phi"'] & E_1 \overset{(f)}{\underset{G_o}{\times}} E \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, dashed, "t"] & E_1^f \arrow[d, dashed, "t_1"] \\ E'_1 \overset{(g')}{\underset{G_o}{\times}} E \arrow[r, shift left, "\psi'"] \arrow[r, shift right, "\phi'"'] & E_1 \overset{(g')}{\underset{G_o}{\times}} E \arrow[r, two heads, "q'"] & E_1^g \end{tikzcd}$$

donde la notación para los objetos pullback es análoga a la que utilizamos en (i) . Definimos $t : E_1 \overset{(f)}{\underset{G_o}{\times}} E \longrightarrow E_1 \overset{(g)}{\underset{G_o}{\times}} E$ por $t(x,e) = (x, {}^{(h_o^o d_o(x))^{-1}}(e))$, se verifica entonces que $q't$ coigualan a ψ y ϕ por lo que existe un único $t_1 : E_1^f \longrightarrow E_1^g$ tal que $q't = t_1q$. Con elementos t_1 está dado por :

$$t_1(\overline{(x,e)}) = \overline{(x , {}^{(h_o^o d_o(x)^{-1})}(e))}$$

claramente (t_1, id_{E_o}) es un morfismo simplicial truncado que induce un morfismo simplicial $t.: E.^f \longrightarrow E.^g$ que será un isomorfismo , por serlo t_1 (notemos que el morfismo inverso de t_1 asocia a cada $\overline{(x,e)} \in E_1 \overset{(g)}{\underset{G_o}{\times}} E$ el elemento $(x , {}^{(h_o^o d_o(x))}(e)) \in E_1 \overset{(f)}{\underset{G_o}{\times}} E$.

Consideremos el triangulo

$$\begin{tikzcd} E^{f}_{.} \arrow[rr, "t."] \arrow[dr, "\alpha^{f}_{.}"'] & & E^{g}_{.} \arrow[dl, "\alpha^{g}_{.}"] \\ & G. & \end{tikzcd}$$

en dimensión uno tenemos que:

$$\alpha^{g}_{1} t_{1} (\overline{(x,e)}) = \alpha^{g}_{1} (x , {}^{(h^{o}_{o} d_{o}(x)^{-1})}(e)) = \rho ({}^{(H^{o}_{o} d_{o}(x)^{-1})}(e))^{-1} g_{1}(x) =$$

$$= (h^{o}_{o} d_{o}(x))^{-1} e^{-1} (h^{o}_{o} d_{o}(x)) g_{1}(x) = (h^{o}_{o} d_{o}(x))^{-1} e^{-1} f_{1}(x) (h^{o}_{o} d_{1}(x)) = (h^{o}_{o} d_{o}(x)^{-1}) \alpha^{f}_{1}((x,e))(h^{o}_{o} d_{1}(x)$$

y en dimensión dos :

$$\widetilde{\alpha}^{g} t_{2} ((x_{o},e_{o}),(x_{1},e_{1}),(x_{2},e_{2})) = \widetilde{\alpha}^{g}((x_{o}, {}^{(h^{o}_{o} d_{o}(x_{o})^{-1})}(e_{o}),(x_{1}, {}^{(h^{o}_{o} d(x_{1})^{-1})}(e_{1})),(x_{2}, {}^{(h^{o}_{o} d(x_{2})^{-1})}(e_{2})) =$$

$$= {}^{(h^{o}_{o} d_{o}(x_{o})^{-1})}(e_{1}^{-1}) \; \widehat{g}(x_{o},x_{1},x_{2}) \; {}^{(g_{1}(x_{o}) h^{o}_{o} d_{o}(x_{2})^{-1})}(e_{2}) \; {}^{(h^{o}_{o} d_{o}(x_{o})^{-1})}(e_{o}) =$$

$$= {}^{(h^{o}_{o} d_{o}(x_{o})^{-1})}(e_{1}^{-1}) \; {}^{(h^{o}_{o} d_{o}(x_{o})^{-1})}(\widehat{f}(x_{o},x_{1},x_{2})) \; {}^{(h^{o}_{o} d_{o}(x_{o})^{-1} f_{1}(x_{o}))}(e_{2}) \; {}^{(h^{o}_{o} d_{o}(x_{o})^{-1})}(e_{o}) =$$

$$= {}^{(h^{o}_{o} d_{o}(x_{o})^{-1})}(e_{1}^{-1} \widehat{f}(x_{o},x_{1},x_{2}) \, {}^{f_{1}(x_{o})}(e_{2}) \, e_{o}) = {}^{(h^{o}_{o} d_{o}(x_{o})^{-1})}(\widetilde{\alpha}^{f}((\overline{x_{o},e_{o}}),(\overline{x_{1},e_{1}}),(\overline{x_{2},e_{2}})) .$$

Resumiendo tenemos que :

-) $d_{o} h^{o}_{o} = f_{o} = \alpha^{f}_{o}$, $d_{1} h^{o}_{o} = g_{o} = \alpha^{g}_{o} = t_{o} \alpha^{g}_{o}$

-) $\alpha^{g}_{1} t_{1} = (h_{o} d_{o})^{-1} \alpha^{f}_{1} \; (h^{o}_{o} d_{1})$

-) $\alpha^{g}_{2} t_{2} (\overline{(x_{o},e_{o})},\overline{(x_{1},e_{1})},\overline{(x_{2},e_{2})}) = {}^{(h^{o}_{o} d_{o}(\overline{x_{o},e_{o}})^{-1})}(\widehat{\alpha}^{f}(\overline{(x_{o},e_{o})},\overline{(x_{1},e_{1})},\overline{(x_{2},e_{2})}))$

por tanto $h^{o}_{o}:E_{o}=E^{f}_{o} \longrightarrow G_{1}$ induce una homotopía $h^{!}_{.} : \alpha^{f}_{.} \longrightarrow \alpha^{g}_{.} t.$ y así $\alpha^{f}_{.}$ y $\alpha^{g}_{.}$ son homotopicamente equivalentes .//

Por último estudiaremos que ocurre con los torsoresa traves de los que factorizan dos n-cociclos sobre un n-hipergrupoide del tipo $K_{G.}(A.,n)$ que sean homotópicos.

.2.25) Proposición .-

Sea G. un grupoide, $A.= A \overset{s}{\underset{d}{\rightleftarrows}} G_{o}$ un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}/G_{o}$ sobre el que actua casi trivialmente el grupoide G. , $f.,g. : E. \longrightarrow K_{G.}(A.,n)$ dos n-cociclos de X sobre $K_{G.}(A.,n)$ y sean $\alpha^{f}_{.}: E^{f}_{.} \longrightarrow K_{G.}(A.,n)$, $\alpha^{g}_{.} : E^{g}_{.} \longrightarrow K_{G.}(A.,n)$ los n-torsores a traves de los que factorizan f. y g. segúnel teorema (3.2.20). Entonces si f. y g. son homotópicos entonces $\alpha^{f}_{.}$ y $\alpha^{g}_{.}$ son homotopicamente equivalentes .

Demostración.- Podemos suponer por el lema (1.4.38) que E. es un n-hiperrecubrimiento ($E.=COSK^{n-1}(E.)$) , demostraremos :

(i) Si $h.:f. \longrightarrow g.$ es una homotopía en $\mathbb{C}_{o}$ entonces $\alpha^{f}_{.}$ y $\alpha^{g}_{.}$ son torsores isomorfos .

(ii) Si $h.:f.\longrightarrow g.$ es una homotopía en $\mathbb{C}_1$ entonces $\alpha^{f}_{.}$ y $\alpha^{g}_{.}$ son homotopicamente equivalentes.

A partir de (i) e (ii), usando la proposición (3.2.16) y el lema (3.2.19) se tiene demostrada esta proposición .

(i) Si $h.:f.\quad g.$ es una homotopía en $\mathbb{C}_0$ entonces los 1-cociclos $f^{\prime}_{.}$ y $g^{\prime}_{.}$ asociados a f. y g. son homotópicos (ver (3.2.18)) y por tanto existe un isomorfismo de 1-torsores $t^{\prime}_{.} : \alpha^{f'}_{.} \longrightarrow \alpha^{g'}_{.}$ que induce un isomorfismo de n-torsores $t.: E^{f}_{.} \longrightarrow E^{g}_{.}$.

(ii) Sea $h.:f.\longrightarrow g.$ una homotopía en $\mathbb{C}_1$, entonces las condiciones de homotopía se reducen a :

(nCH1') $d_0 h_0 = f_0 \quad , \quad d_1 h_0 = g_0$.

(nCH2') $\widehat{f} = {}^{(h^0_0\, d^n_0)}\widehat{g}$.

Recordemos que E^{f}_{n-1} y E^{g}_{n-1} son los coigualadores:

$$\begin{tikzcd}
E'_1 \overset{(f)}{\underset{G_0}{\times}} A \arrow[r, shift left, "\psi"] \arrow[r, shift right, "\phi"'] & E_{n-1} \overset{(f)}{\underset{G_0}{\times}} A \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, dashed, "t"] & E^{f}_{n-1} \arrow[d, dashed, "t_{n-1}"] \\
E' \overset{(g)}{\underset{G_0}{\times}} A \arrow[r, shift left, "\psi'"] \arrow[r, shift right, "\phi'"'] & E_{n-1} \overset{(g)}{\underset{G_0}{\times}} A \arrow[r, two heads, "q'"] & E^{g}_{n-1}
\end{tikzcd}$$

los elementos de $E_{n-1} \overset{(f)}{\underset{G_0}{\times}} A$ serán pares $(x,a) \in E_{n-1} \times A$ tales que $d(a) = f_0 d^{n-1}_0 (x)$ y los morfismos ψ y ϕ están definidos por:

$$\psi(x_0, x_1, a) = (x_0, \widehat{f}(s_{n-1} d_0 (x_0), \ldots , s_{n-1} d_{n-1}(x_0), x_0, x_1)\, a\,)$$

$$\phi(x_0, x_1, a) = (x_1, a)$$

(analogamente ψ' y ϕ'). Definimos $t : E_{n-1} \overset{(f)}{\underset{G_0}{\times}} A \longrightarrow E_{n-1} \overset{(g)}{\underset{G_0}{\times}} A$ por $t(x,a) = (x, {}^{(h^0_0 d^{n-1}_0 (x))}(a))$, entonces el morfismo camposición q't coiguala a ψ y ϕ por tanto existe un único morfismo $t_{n-1} : E^{f}_{n-1} \longrightarrow E^{g}_{n-1}$ tal que $q' t = t_{n-1} q$. Este morfismo junto con los morfismos identidades en E_i $i = 0, 1, \ldots , n-2$ determinan un morfismo simplicial $t.: E^{f}_{.} \longrightarrow E^{g}_{.}$ que será un isomorfismo. Verificandose además que el morfismo $h^0_0 : E_0 \longrightarrow G_1$ determina una homotopía de $\alpha^{g}_{.} t.$ en $\alpha^{f}_{.}$ .//

Notemos que si el grupoide G. tiene a $G_0 = \mathbb{1}$ y $h.:f.\longrightarrow g.$ es una homotopía en $\mathbb{C}_1$, el isomorfismo $t.: E^{f}_{.} \longrightarrow E^{g}_{.}$ dado por la proposición (3.2.25) (ii) anterior es un isomorfismo de torsores, teniendose entonces los corolarios siguientes:

.2.26) Corolario.-

Si G. es un grupoide con $G_0 = \mathbb{1}$ y A un objeto grupo abeliano en $\mathbb{C}$. Entonces si $f. , g.: E. \longrightarrow K_{G.}(A., n)$ (donde G. actua trivialmente sobre A) son dos n-cociclos , $n > 2$, homotópicos, los n-torsores $\alpha^{f}_{.}$ y $\alpha^{g}_{.}$ a traves de los que factorizan f. y g. (según el teorema (3.2.20)) son isomorfos . En particular este resultado es cierto para los n-hipergrupoides de la forma K(A,n) .

Las proposiciones anteriores nos permiten dar una interpretación de los conjuntos $\tilde{H}^n(X,G.)$ en términos de"clases de homomotopía"de torsores de X sobre G., cuando G. sea; un grupoide, un2-hipergrupoide filtrado o un n-hipergrupoide de la forma $K'_{G.}(A.,n)$, en el siguiente sentido :

Sea G. un n-hipergrupoide verificando que para cualquier objeto simplicial E., la relación de homotopía en Simpl (E., G.) sea una relación de equivalencia (por ejemplo; G. un grupoide , G. un 2-hipergrupoide filtrado, G. un n-hipergrupoide de la forma $K_{G.}(A.,n)$ o en general cualquier n-hipergrupoide filtrado) . Denotaremos por $\mathrm{Htors}^n(X,G.)$ a la categoría que tiene por objetos a los n-torsores de X sobre G.y por morfismos

$$\begin{tikzcd}
E. \arrow[rr, "f."] \arrow[dr, "\alpha."'] & & E'. \arrow[dl, "\alpha'."] \\
& G. &
\end{tikzcd}$$

conmutativos salvo homotopía (i.e. $\alpha.$ y $\alpha'.f.$ son homotópicos) con f. un morfismo de complejos simpliciales aumentados sobre X . Al conjunto de componentes conexas de $\mathrm{Htors}^n(X,G.)$ lodenotaremos por $\mathrm{Htors}^n[X,G.]$. La categoría $\mathrm{TORS}^n(X,G.)$ es una subcategoría densa de $\mathrm{Htors}^n(X,G.)$.

Si G. es un n-hipergrupoide de la forma $K_{G.}(A.,n)$ con $G_o = \Pi$ utilizando el corolario (3.2.26) tenemos que dado un morfismo de torsores en $\mathrm{Htors}^n(X,G.)$:

$$\begin{tikzcd}
E. \arrow[rr, "f."] \arrow[dr, "\alpha."', ""{name=A}] & & E'. \arrow[dl, "\alpha'.", ""'{name=B}] \\
& G. &
\arrow[from=A, to=B, "h."]
\end{tikzcd}$$

considerando a $\alpha'.f.: E. \longrightarrow G.$ como un n-cociclo, existe un isomorfismo de torsores sobre G.

$$\begin{tikzcd}
E. \arrow[rr, "t."] \arrow[dr, "\alpha."'] & & E.^{\alpha' f} \arrow[dl, "\alpha.^{\alpha' f}"] \\
& G. &
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, puesto que el cociclo $\alpha'.f.$ factorizaa traves del $\alpha'.$, utilizando la propiedad universal de $\alpha.^{\alpha' f}$ existe un morfismo de torsores

$$\begin{tikzcd}
E.^{\alpha' f} \arrow[rr, "b."] \arrow[dr, "\alpha.^{\alpha' f}"'] & & E'. \arrow[dl, "\alpha'."] \\
& G. &
\end{tikzcd}$$

Deducimos así que en estas condiciones las clases de un torsor en $\mathrm{Htors}^n[X,G.]$ y en $\mathrm{TORS}^n[X,G.]$ coinciden . Este resultado será tambien cierto para G. un grupoide (bastará con utilizar la proposición (3.2.22). Tenemos así:

3.2.27) Proposición.-

Si G. es un grupoide, o un n-hipergrupoide de la forma $K_{G.}(A.,n)$ con $G_o = \Pi$ (en particular $K(A,n)$) . El funtor inclusión $TORS^n(X,G.) \hookrightarrow Htors^n(X,G.)$ induce una biyección natural en los conjuntos de componentes conexas

$$H^n(X,G.) = TORS^n\left[X,G.\right] \cong Htors^n\left[X\ ,\ G.\right] \quad . \ //$$

Como corolario inmediato de (3.2.20 ,25,26 y 27) obtenemos el siguiente teorema:

.2.28) Teorema.-

Sea G. un n-hipergrupoide en las condiciones de la proposición (3.2.27) anterior. Entonces se tienen las siguientes biyecciones naturales:

$$\check{H}^n(X,G.) = \varinjlim_{E.\in HC(X)} \left[E.,G.\right] \cong Htors^n\left[X,G.\right] \cong TORS^n\left[X,G.\right] = H^n(X,G.) \quad . \quad //$$

Para $G_\bullet$ un 2-hipergrupoide filtrado cualquiera, no podemos asegurar (en estos momentos) que se tenga una biyección entre los conjuntos $Htors^2[X,G_\bullet]$ y $TORS^2[X,G_\bullet]$, sin embargo como corolario inmediato de (3.2.24) deducimos :

.2.29) Teorema .-

Si $G_\bullet$ es un 2-hipergrupoide filtrado, entonces para cada objeto X de C, se tiene una biyección natural:

$$\check{H}^2\,(X,G_\bullet) = \varinjlim_{E_\bullet \in HC(X)} \left[E_\bullet,G_\bullet\right] = Htors^2\left[X,G_\bullet\right] \ . \qquad //$$

CAPITULO 4 .- LA SUCESION EXACTA LARGA EN COHOMOLOGIA NO ABELIANA.

En todo este capitulo supondremos que X es un objeto en $\mathbb{C}$, $G'. \xhookrightarrow{i.} G. \xrightarrow{p.} G''.$ es una sucesión exacta corta de grupoides en $\mathbb{C}$ y $(G.,N.,\rho.)$ es un grupoide cruzado generalizado y conexo tal que $(G'.,N.,\rho./G'.)$ es tambien un grupoide cruzadogeneralizado:

$$\begin{tikzcd}
G'_1 \arrow[rr, hook, "i_1"] \arrow[rrd, shift left] \arrow[rrd, shift right] & & G_1 \arrow[r, two heads, "p_1"] \arrow[ld] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G''_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
 & N_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G_0 \arrow[r, "p_0"] & G''_0 \\
 & G_0 \arrow[ru, equal] & &
\end{tikzcd}$$

Denotaremos por $G^{\#}.$ al grupoide cociente de G. por el subgrupoide normal E'. de los endomorfismos de G'. . Conservaremos además las notaciones utilizadas en la nota (3.1.20), así :

$$\begin{tikzcd}
 & N'.. \arrow[rr, hook] & & N.. \arrow[rr, two heads] & & N''.. \\
 & \cdot\cdot & & \cdot\cdot & & \cdot\cdot \\
 & E' \rtimes N_1 \arrow[rr, hook] \arrow[ld, shift left] \arrow[ld, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E \rtimes N_1 \arrow[rr, two heads] \arrow[ld, shift left] \arrow[ld, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & E/E' \rtimes \bar{N}_1 \arrow[ld, shift left] \arrow[ld, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
N_1 \arrow[rr, equal] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1 \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \bar{N}_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
 & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[ld, equal] & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[ld, equal] & & G_0 \arrow[ld, equal] \\
G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 &
\end{tikzcd}$$

será la sucesión exacta corta de 2-grupoides asociada a los datos anteriores y

$$K_{N.}(Z'.,n) \longrightarrow K_{N.}(Z.,n) \longrightarrow K_{N.}(Z./Z'.,n)$$

$n > 3$, las corespondientes sucesiones de los hipergrupoides sistemas de coeficientes (recordemos que Z. y Z'. son los grupoides , grupos en $\mathbb{C}/G_0$, núcleos de los morfismos de grupoides $\rho.:G. \longrightarrow N.$ y $\rho./G'. : G'. \longrightarrow N.$ respectivamente) .

(4.1) LA SUCESION EXACTA DE NUEVE TERMINOS.-

En esta sección asociaremos una " sucesión exacta " de nueve términos en la cohomología a la sucesión exacta corta de grupoides junto con el grupoide cruzado generalizado.

Distinguiremos en toda la sección dos casos :

CASO A ($G_0 = G''_0$) .- En este caso A supondremos que los grupoides G. y G''. tienen el mismo objeto de objetos , i.e. $G_0 = G''_0$ y que el morfismo p_0 es la identidada , $p_0 = id_{G_0}$

Si esto ocurre, entonces $d_o = d_1 : G'_1 \longrightarrow G_o$ y por tanto $G'_\bullet$ es un objeto grupo en $\mathbb{C}/G_o$ contenido en $E_\bullet = \mathrm{End}(G_\bullet)$.

La sucesión $G'_1 \overset{i}{\hookrightarrow} G_1 \overset{p_1}{\twoheadrightarrow} G''_1$ induce una sucesión en conjuntos:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'_1) \xhookrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G_1) \xrightarrow{p_{1*}} \mathrm{Hom}_C(X,G'')$$

o equivalentemente :

4.1.1) $$H^o(X,G'_\bullet) \xhookrightarrow{i_*} H^o(X,G_\bullet) \xrightarrow{p_*} H^o(X,G''_\bullet) \quad .$$

Por ser $i_\bullet$ y $p_\bullet$ morfismos simpliciales, claramente se verifica que i_* y p_* llevan elementos neutros en elementos neutros (recordar la definición (3.1.24)) , por tanto la sucesión (4.1.1) anterior es una sucesión de " conjuntos con elementos distinguidos ". Además si $f : X \longrightarrow G_1$ es un morfismo tal que $p_1 f : X \longrightarrow G''_1$ es un elemento neutro en $H^o(X,G''_\bullet)$, esto es existe $\overline{f} : X \longrightarrow G_o$ tal que $p_1 f = s_o \overline{f}$:

$$\begin{tikzcd}
G'_1 \arrow[r, hook, "i_1"] & G_1 \arrow[r, two heads, "p1"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & G''_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
 & G_o \arrow[u, bend right] \arrow[r, equal] & G_o \arrow[u, bend right, "s_o"'] \\
 & X \arrow[uu, "f"] \arrow[ur, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces $\overline{f} = d_o p_1 f$ y por tanto f iguala al par de morfismos $(p_1, s_o d_o p_1)$:

$$\begin{tikzcd}
G'_1 = \mathrm{equ}\,(p_1, s_o d_o p_1) \arrow[r, hook] & G_1 \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "s_o d_o p_1 = s_o d_o"'] & G''_1 \\
 & X \arrow[u, "f"] \arrow[ul, dashed, "f'"] &
\end{tikzcd}$$

existe por tanto $f' : X \longrightarrow G'_1$ tal que $i_*(f') = i f' = f$. Así la sucesión (4.1.1) es una sucesión exacta de " conjuntos con elementos distinguidos " .

En este caso A extenderemos esta sucesión (4.1.1) en primer lugar a una de nueve términos y después en la siguiente sección a una larga.

<u>CASO B</u> (caso general).- El caso B será el caso general, en él no impondremos ninguna condición a la sucesión exacta corta de grupoides. Sin embargo, necesitaremos "puntear" los conjuntos de cohomología en dimensión cero, escogeremos entonces un elemento neutro al que llamaremos elemento"nulo" . Para esto necesitaremos además de los datos anteriores fijar un morfismo $\varphi : X \longrightarrow G_o$, que deberá ser dado como dato, la sucesión (4.1.1) induce (por restricción) una sucesión:

4.1.2) $$H^o_\varphi(X,G'_\bullet) \xhookrightarrow{i_*} H^o_\varphi(X,G_\bullet) \xrightarrow{p_{1*}} H^o_{p_o\varphi}(X,G''_\bullet)$$

donde, recordemos que $H^o_\varphi(X,G') = \{ f : X \longrightarrow G'_1 \ / \ d_o f = \varphi \}$ y analogamente para $G_\bullet$ y $G''_\bullet$. Esta sucesión es claramente de conjuntos punteados y además es exacta en el sentido de que i_* es inyectiva y cualquier elemento de $H^o_\varphi(X,G_\bullet)$ que se aplique por p_* en el elemento nulo $(s_o p_o \varphi)$ en $H^p_{p_o\varphi}(X,G''_\bullet)$ está en la imagen de i_* .

En este caso B , extenderemos la sucesión (4.1.2) primero a una de nueve puntos y luego a una larga .

<u>Los morfismos de conexión ∂_0 y ∂_1</u> .

<u>CASO A</u> ($G_0 = G''_0$) .

Definamos ahora el primer morfismo de conexión

$$\partial_0 : H^0(X, G''_{.}) \longrightarrow H^1(X, G'_{.})$$

Consideremos el 1-torsor de G_0 sobre G., DEC(G.) ⟶ G., y levantemoslo por pullback via el morfismo $i : G'_{.} \longrightarrow G_{.}$:

.1.3)
$$\begin{tikzcd}
 & i^*(DEC(G.)) : \cdots \arrow[dl, "pr."'] \arrow[dd, "pr."] & & G_1 \times_{G_0} G'_1 \arrow[rr, shift left, "f_0"] \arrow[rr, shift right, "f_1"'] \arrow[dl] \arrow[dd] & & G_1 \arrow[r, two heads, "p_1"] \arrow[dl, "d_1"] \arrow[dd, equal] & G''_1 \arrow[dd, "d_0"] \\
G'_{.} : \cdots \arrow[dd, hook, "i."'] & & G'_1 \arrow[rr] \arrow[dd, "i"'] & & G_0 \arrow[dd, equal] & & \\
 & DEC(G.) : \cdots \arrow[dl] & & G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[rr, shift left, "m"] \arrow[rr, shift right, "pr_0"'] \arrow[dl, "pr_1"'] & & G_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[dl, "d_1"] & G_0 \\
G_{.} : \cdots & & G_1 \arrow[rr, shift left, "d_1"] \arrow[rr, shift right, "d_0"'] & & G_0 & &
\end{tikzcd}$$

Los morfismos $f_0, f_1 : G_1 \times_{G_0} G'_1 \longrightarrow G_1$ están dados por: $f_0(g,a) = g$, $f_1(g,a) = g\,a$.
Puesto que $G'_{.} \subset E.=End(G.)$ tenemos que $i^*(DEC(G.)) = COSK^0(i^*(DEC\ (G.)))$ y que el coigualador de (f_0, f_1) es el epimorfismo $p_1 : G_1 \longrightarrow G''_1$ (ver pg) por lo tanto el morfismo proyección pr. : $i^*(DEC(G.)) \longrightarrow G'_{.}$ es un 1-torsor de G''_1 sobre $G'_{.}$.

Para cada $f : X \longrightarrow G''_1$ en $H^0(X, G''_{.})$ definimos

$$\partial_0(f) = TORS^1\left[f, G'_{.}\right]\left[pr. : i^*(DEC(G.)) \longrightarrow G'_{.}\right]$$

es decir como la clse en $H^1(X, G'_{.})$ del 1-torsor de X sobre $G'_{.}$ obtenido levantando por pullback el 1-torsor pr. : $i^*(DEC(G.)) \longrightarrow G'_{.}$ via el morfismo f :

$$\begin{tikzcd}
TORS^1(f, G'_{.})(i^*(DEC(G.))) : \cdots \arrow[d, "pr."] & (G_1 \times_{G_0} G'_1) \times_f X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_1 \times_f X \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
i^*(DEC(G.)) : \cdots \arrow[d, "pr."] & G_1 \times_{G_0} G'_1 \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_1"'] \arrow[d, "pr_1"] & G_1 \arrow[r, two heads, "p_1"] \arrow[d, "d_1"] & G''_1 \\
G'_{.} : \cdots & G'_1 \arrow[r, "d_0 = d_1"] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

.1.4) <u>Nota</u>.- Si consideramos a $i^*(DEC(G.))$ como un grupoide se verifica que $Hom_{\mathbb{C}}(X, G''_1) = TORS^1\left[X, i^*(DEC(G.))\right]$, puesto que $i^*(DEC(G.)) = COSK^0(i^*(DEC(G.)))$, así el morfismo de conexión ∂_0 coincide con la composición :

$$H^0(X, G''_{.}) = Hom_{\mathbb{C}}(X, G''_1) \cong TORS^1\left[X, i^*(DEC(G.))\right] \xrightarrow{pr} TORS^1\left[X, G'_{.}\right] = H^1(X, G'_{.})$$

Notemos que si $f:X \longrightarrow G''_1$ es un morfismo que se factoriza:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & G''_1 \\ & G_0 \arrow[ur, "s_0"'] & \end{tikzcd}$$

i.e. f es un elemento neutro en $H^0(X,G''_{.})$, levantando el torsor $pr_{.}:i^*(DEC(G_{.})) \longrightarrow G'_{.}$ por pullback via f :

$$\begin{tikzcd} f^*(i^*(DEC(G_{.}))): \;.\;.\;.\;.\;. \arrow[d] & G'_1 \times_{G_0} G'_1 \times_{f'} X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G'_1 \times_{f'} X \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X \arrow[d, "f'"] \\ s^*(i^*(DEC(G_{.})))=DEC(G'_{.}):\;... \arrow[d] & G'_1 \times_{G_0} G'_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G'_1 \arrow[r, two heads, "d_0=d_1"] \arrow[d] & G_0 \arrow[d, "s_0"] \\ i^*(DEC(G_{.})):\;.\;.\;.\;. \arrow[d] & G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_1"'] \arrow[d] & G_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d] & G''_1 \\ G'_{.}:\;\;.\;\;.\;\;. & G'_1 \arrow[r, "d_0=d_1"] & G_0 & \end{tikzcd}$$

obtenemos un 1-torsor de X sobre $G'_{.}$ que factoriza por $DEC(G'_{.})$,y es un elemento neutro de $H^1(X,G'_{.})$. Así ∂_0 lleva elementos neutros de $H^0(X,G''_{.})$ en elementos neutros de $H^1(X,G'_{.})$ siendo por tanto ∂_0 un "morfismo de conjuntos con elementos distinguidos" .

Definamos ahora el segundo morfismo de conexión

$$\partial_1 : H^1(X,G''_{.}) \longrightarrow H^2(X,\overline{W}(N'_{..}))\ .$$

Puesto que $G'_{.}$ es un subgrupoide normal de $G_{.}$,considerando la acción de $G_{.}$ sobre $G'_{.}$ por conjugación, tenemos que $i_{.}:G'_{.}$ $G_{.}$ es un grupoide cruzado y

$$\begin{tikzcd} End(G'_{.}) = G'_{.} \arrow[r, hook, "i_{.}"] \arrow[d, equal] & G_{.} \arrow[d, "\rho_{.}"] \\ End(G'_{.}) = G'_{.} \arrow[r, "\rho_{.}/G'_{.}"] & N_{.} \end{tikzcd}$$

es un morfismo de grupoides cruzados que induce un morfismo de 2-grupoides:

.1.5)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] G_{..}:\;.\;.\;.\;. \arrow[dr, "\rho_{..}"] & & & G'_1 \rtimes G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, "id\times\rho"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[r, two heads, "p_1"] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & G''_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\ & N'_{..}:\;.\;.\;. & G'_1 \rtimes N_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & \\ & & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[r, equal] \arrow[dl, equal] & G_0 \\ & & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 & & \end{tikzcd}$$

Notemos que $D_0,D_1 : G'_1 \rtimes G_1 \longrightarrow G_1$ están definidas por: $D_0(a,g)=g$, $D_1(a,g)=ag$ así el coigualador de D_0,D_1 es $p_1:G_1 \twoheadrightarrow G''_1$. Además $G_{..}= COSK^0(G_{..})$ y el morfismo $\rho_{..}:G_{..} \longrightarrow N'_{..}$ es un 1-torsor en $GPD(\mathbb{C})$ de $G''_{..}$ sobre $N'_{..}$.

Si $\alpha_{.}:E_{.} \longrightarrow G''_{.}$ es un 1-torsor de X sobre $G''_{.}$, $\alpha_{.}$ puede ser considerado como un morfismo en GPD($\mathbb{C}$). Podemos entonces levantar el torsor $\rho_{\cdot\cdot}$ por pullback via $\alpha_{\cdot}$ y obtenemos un 1-torsor en GPD($\mathbb{C}$) de $E_{\cdot}=COSK^{o}(E_{\cdot})$ sobre $N'_{\cdot\cdot}$:

$$\begin{tikzcd}
\alpha^{*}_{\cdot}(G_{\cdot\cdot}):\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \arrow[d, "pr"'] & (G'_{\cdot}\rfloor G_{\cdot})\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}E_{\cdot} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}E_{\cdot} \arrow[r] \arrow[d] & E_{\cdot} \arrow[d, "\alpha_{\cdot}"] \\
G_{\cdot\cdot}:\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \arrow[d] & G'_{\cdot}\rfloor G_{\cdot} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_{\cdot} \arrow[r] \arrow[d, "\rho_{\cdot}"] & G''_{\cdot} \\
N'_{\cdot\cdot}:\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & G'_{\cdot}\rfloor N_{\cdot} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N_{\cdot} &
\end{tikzcd}$$

Aplicando ahora el funtor $\overline{W}$ al morfismo simplicial doble composición pr $\rho_{\cdot\cdot}:\alpha^{*}_{\cdot}(G_{\cdot\cdot})\longrightarrow N_{\cdot\cdot}$ obtenemos un morfismo simplicial :

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}(\alpha^{*}_{\cdot}(G_{\cdot\cdot})):\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \arrow[d] & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & G_1\underset{G''_1}{\times}E \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & E_o \arrow[r] \arrow[d] & X \\
\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}):\ \cdot\ \cdot\ \cdot & G'_1\underset{G_o}{\times}N_1\underset{G_o}{\times}N_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & N_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_o &
\end{tikzcd}$$

que será (ver la demostración del teorema(1.5.9)) un 2-torsor de X sobre $\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$. Además si $\alpha'_{\cdot}:E'_{\cdot}\longrightarrow G''_{\cdot}$ es un 1-torsor de X sobre $G''_{\cdot}$ isomorfo a $\alpha_{\cdot}:E_{\cdot}\longrightarrow G''_{\cdot}$;

$$\begin{tikzcd}
E_{\cdot} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\alpha_{\cdot}"'] & & E'_{\cdot} \arrow[dl, "\alpha'_{\cdot}"] \\
& G''_{\cdot} &
\end{tikzcd}$$

tenemos entonces un isomorfismo de 1-torsores sobre $N'_{\cdot\cdot}$:

$$\begin{tikzcd}
\alpha^{*}_{\cdot}(G_{\cdot\cdot}) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & \alpha'^{*}_{\cdot}(G_{\cdot\cdot}) \arrow[dl] \\
& N'_{\cdot\cdot} &
\end{tikzcd}$$

y por tanto un isomorfismo de 2-torsores de X sobre $\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$:

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}(\alpha^{*}_{\cdot}(G_{\cdot\cdot})) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr] & & \overline{W}(\alpha'^{*}_{\cdot}(G_{\cdot\cdot})) \arrow[dl] \\
& \overline{W}(N'_{\cdot\cdot}) &
\end{tikzcd}$$

definimos entonces:

$$\partial_1\left[\alpha_{\cdot}\right] = \left[\overline{W}(\alpha^{*}_{\cdot}(G_{\cdot\cdot}))\longrightarrow \overline{W}(N'_{\cdot\cdot})\right] \in H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})) \quad .$$

Veamos ahora que ocurre al aplicar ∂_1 a un elemento neutro en $H^1(X,G''_{\cdot})$. Recordemos que dar un elemento neutro en $H^1(X,G''_{\cdot})$ es equivalente a dar un morfismo $f:X\longrightarrow G_o$, el elemento neutro dado por f será la clase del 1-torsor de X sobre $G''_{\cdot}$ obtenido al levantar por pullback el torsor $DEC(G''_{\cdot})\longrightarrow G''_{\cdot}$ via f . Para ver que ocurre al aplicar ∂_1 a un elemento neutro, estudiaremos primero que ocurre al levantar por pullback el torsor $\rho_{\cdot\cdot}:G_{\cdot\cdot}\longrightarrow N'_{\cdot\cdot}$ de $G''_{\cdot}$ sobre $N'_{\cdot\cdot}$ via el morfismo canónico d :$DEC(G''_{\cdot})\longrightarrow G''_{\cdot}$ y luego aplicar el funtor $\overline{W}$:

$$\begin{tikzcd}
& d^{*}(G_{\cdot\cdot}):\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \arrow[dl] & & G''_1\underset{G_o}{\times}G'_1\rfloor G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G''_1\underset{G_o}{\times}G_1 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G''_1\underset{G_o}{\times}G''_1 \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dd, shift right, "pr_o"'] \arrow[dd, shift left, "m"] \\
G_{\cdot\cdot}:\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & G'_1\rfloor G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[rr] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G''_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
& & & G''_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] & & G''_1 \arrow[rr, equal] \arrow[dl] & & G''_1 \arrow[dl, "d_1"] \arrow[dd] \\
& & G_o \arrow[rr, equal] & & G_o \arrow[rr, equal] & & G_o & \\
& & & & & & & G_o
\end{tikzcd}$$

Aplicando $\overline{W}$ obtenenmos :

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}(d^{*}(G_{\cdot\cdot})) : \ldots\ G''_1 \times_{G_0} G'_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & G''_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G''_1 \arrow[r, two heads] & G_0
\end{tikzcd}$$

verificandose que $\overline{W}(d^{*}(G_{\cdot\cdot})) = \mathrm{COSK}^1(\overline{W}(d^{*}(G_{\cdot\cdot})))$ por tanto, considerando a $\overline{W}(d^{*}(G_{\cdot\cdot}))$ como un 2-hipergrupoide tenemos que $H^2(X,\overline{W}(d^{*}(G_{\cdot\cdot}))) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G_0)$ siendo el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & H^1(X,G''_{\cdot}) \arrow[d, "\partial_1"] \\
H^2(X,\overline{W}(d^{*}(G_{\cdot\cdot}))) \arrow[r] & H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))
\end{tikzcd}$$

conmutativo, donde el morfismo $H^2(X,\overline{W}(d^{*}(G_{\cdot\cdot}))) \longrightarrow H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$ es el inducido por la composición $\overline{W}(d^{*}(G_{\cdot\cdot})) \longrightarrow \overline{W}(G_{\cdot\cdot}) \longrightarrow \overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$.

Por otra parte el diagrama conmutativo de morfismos de 2-grupoides :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & G'_1 \times_{G_0} G'_1 \arrow[rrrr, shift left] \arrow[rrrr, shift right] \arrow[dl] \arrow[ddll, hook, bend right] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] & & & & G'_1 \arrow[dl] \arrow[ddll, bend left] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] \\
& G''_1 \times_{G_0} G'_1 \rfloor G_1 \arrow[rrrr, shift left] \arrow[rrrr, shift right] \arrow[dl] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] & & & & G''_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[dl] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] & \\
G'_1 \rfloor G_1 \arrow[rrrr, shift left] \arrow[rrrr, shift right] \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] & & & & G_1 \arrow[ddd, shift left] \arrow[ddd, shift right] & & \\
& & G_0 \arrow[rrrr, equal] \arrow[dl, "s_0"] \arrow[ddll, equal, bend right] & & & & G_0 \arrow[dl, "s_0"'] \arrow[ddll, equal, bend left] \\
& G''_1 \arrow[rrrr, equal] \arrow[dl] & & & & G''_1 \arrow[dl] & \\
G_0 \arrow[rrrr, equal] & & & & G_0 & &
\end{tikzcd}$$

induce , al aplicar $\overline{W}$, undiarama conmutativo de morfismos de 2-hipergrupoides:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathrm{COSK}^1(G'_{\cdot}) : \arrow[dl] \arrow[ddl] & & G'_1 \times_{G_0} G'_1 \times_{G_0} G'_1 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[dl] & & G'_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] & & G_0 \arrow[dl, "s_0"'] \arrow[ddl, equal] \\
\overline{W}(d^{*}(G_{\cdot\cdot})): \arrow[d] & & G''_1 \times_{G_0} G'_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[ur, hook', no head] \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & & G''_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[ur, hook', no head] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[d, shift right, "pr"'] \arrow[d, shift left, "i"] & & G''_1 \arrow[d, "d_1"'] & \\
\overline{W}(G_{\cdot\cdot}): & & G'_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_0 &
\end{tikzcd}$$

y este un diagrama conmutativo de aplicaciones entre conjuntos:

$$\begin{tikzcd}
& H^2(X,\mathrm{COSK}^1(G'_{\cdot})) \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\xi"] \arrow[dd] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G_0) \arrow[dr, "\cong"'] & & H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})) \\
& H^2(X,\overline{W}(d^{*}(G_{\cdot\cdot}))) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

así el cuadrado :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G_0) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^1(X,G''_{\cdot}) \arrow[d, "\partial_1"] \\
H^2(X,\mathrm{COSK}^1(G'_{\cdot})) \arrow[r, "\xi"] & H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y por tanto ∂_1 lleva elementos néutros de $H^1(X,G''_{\cdot})$ en néutros de $H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$.

Hemos conseguido así (en este caso A) una sucesión de morfismos de " conjuntos con elementos distinguidos:

.1.6)
$$\begin{tikzcd}
H^0(X,G'_{\cdot}) \arrow[r, hook, "i_*"] & H^0(X,G_{\cdot}) \arrow[r, "p_*"] & H^0(X,G''_{\cdot}) \arrow[dll, "\partial_0"] \\
H^1(X,G'_{\cdot}) \arrow[r, "i_*"] & H^1(X,G_{\cdot}) \arrow[r, "p_*"] & H^1(X,G''_{\cdot}) \arrow[dll, "\partial_1"] \\
H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})) \arrow[r, "i_*"] & H^2(X,\overline{W}(N_{\cdot\cdot})) \arrow[r, "p_*"] & H^2(X,\overline{W}(N''_{\cdot\cdot}))
\end{tikzcd}$$

que extiende la sucesión (4.1.1) .

CASO B (caso general) .-

En este caso, el primer morfismo de conexión ∂_0 asociará a cada morfismo $f:X \longrightarrow G''_1$ en $H^0_{p_0\varphi}(X,G''_{\cdot})$ la clase de un 1-torsor en $H^1(X,G'_{\cdot})$ de forma que al elemento nulo $(p_0\varphi s_0)$ en $H^0_{p_0\varphi}(X,G''_{\cdot})$ le asociará la clase del 1-torsor escindido en $H^1(X,G'_{\cdot})$ construido a partir del morfismo $\varphi:X \longrightarrow G_0$. Así este primer morfismo de conexión irá desde el conjunto punteado $H^0_{p_0\varphi}(X,G''_{\cdot})$ al conjunto tambien punteado $H^1_{\varphi}(X,G'_{\cdot})$ (recordemos que $H^1_{\varphi}(X,G'_{\cdot})$ es el conjunto $H^1(X,G'_{\cdot})$ con elemento distinguido la clase del 1-torsor escindido asociado a φ) .

Definamos entonces :

$$\partial_0 \; : \; H^0_{p_0\varphi}(X,G''_{\cdot}) \longrightarrow H^1_{\varphi}(X,G'_{\cdot}) \; .$$

Si al igual que en el caso A levantamos el 1-torsor $DEC(G_{\cdot}) \longrightarrow G_{\cdot}$ por pullback dia el morfismo $i_{\cdot}:G'_{\cdot} \longrightarrow G_{\cdot}$ obtenemos:

$$\begin{tikzcd}
 & i^*(DEC(G_{\cdot})) : \cdots \arrow[dl] \arrow[dd] & & & G_1 \times_{G_0} G'_1 \arrow[rr, shift left, "f_0"] \arrow[rr, shift right, "f_1"'] \arrow[dl] \arrow[dd] & & G_1 \arrow[r, dashed, two heads, "p"] \arrow[dl] \arrow[dd, equal] & C \\
G'_{\cdot} : \cdots \arrow[dd, hook, "i_{\cdot}"'] & & & G'_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, hook, "i"'] & & G_0 \arrow[dd, equal] & & \\
 & DEC(G_{\cdot}) : \cdots \arrow[dl] & & & G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[rr, shift left, "m"] \arrow[rr, shift right, "pr_0"'] \arrow[dl] & & G_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[dl] & G_0 \\
G_{\cdot} : \cdots & & & G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_0 & &
\end{tikzcd}$$

con $f_0,f_1:G_1 \times_{G_0} G'_1 \longrightarrow G_1$ definidos por: $f_0(g,a) = g$, $f_1(g,a) = ga$. Claramente el par (f_0,f_1) es un par de equivalencia y por tanto un par núcleo, pero en este caso su coigualador no tiene porque ser $p_1:G_1 \twoheadrightarrow G''_1$. Denotemos $\text{coequ}(f_0,f_1) = p:G_1 \twoheadrightarrow C$ (dos elementos g y g' en G_1 darán el mismo elemento en C si existe un $a \in G'_1$ tal que $g' = ga$, esto es equivalente ,por ser $G'_{\cdot}$ un subgrupoide normal , a que existan un endomerfismo $e \in E'$ y una flecha $a \in G'_1$ tales que $e\,g\,a = g'$) .

Tenemos así un 1-torsor $i^*(DEC(G_{\cdot})) \longrightarrow G'_{\cdot}$ de C sobre $G'_{\cdot}$. Por otra parte , los morfismos $p_1 : G_1 \twoheadrightarrow G''_1$ y $d_0 : G_1 \longrightarrow G_0$ coigualan a f_0 y f_1 por lo que existen morfismos p y d haciendo conmutar los siguientes triangulos :

$$\begin{tikzcd}
G_0 & G_1 \arrow[l, "d_0"'] \arrow[r, two heads, "d_1"] \arrow[d, "p"] & G''_1 \\
& C \arrow[ul, dashed, "d"] \arrow[ur, dashed, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

y tambien el cuadrado :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "q"] \arrow[d, "d"'] & G''_1 \arrow[d, "d_0"] \\
G_0 \arrow[r, two heads, "p_0"] & G''_0
\end{tikzcd}$$

además si g y g' son dos elementos en G_1 con $d_0(g) = d_0(g')$ y tales que $p_1(g) = p_1(g')$ en G''_1 entonces tambien $p(g) = p(g')$ por tanto el cuadrado anterior es un pullback.

Supongamos entonces que $f : X \longrightarrow G''_1$ es un elemento en $H^0_{p_0\varphi}(X, G''_{\bullet})$ (entonces $d_0 f = p_0 \varphi$) existe por tanto un morfismo $\bar{f} : X \longrightarrow C$ tal que $d\bar{f} = \varphi$ y $q\bar{f} = f$:

.1.7)
$$\begin{tikzcd}
\bar{f}^*(i^*(DEC(G_\bullet))) : \quad \cdots \arrow[d, dashed] & G_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \underset{\bar{f}}{\times} X \arrow[r, dashed, shift left] \arrow[r, dashed, shift right] \arrow[d, dashed] & G_1 \underset{\bar{f}}{\times} X \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d, dashed] & X \arrow[d, dashed, "\bar{f}"'] \arrow[rd] \arrow[dd, bend right=40, "\varphi"'] & \\
i^*(DEC(G_\bullet)) : \quad \cdots \arrow[d] & G_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_1"'] \arrow[d, "pr"'] & G_1 \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "d_1"] & C \arrow[r, "q"] \arrow[d, "d"] & G''_1 \arrow[d, "d_0"] \\
G'_\bullet : \quad \cdots & G'_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 & G_0 \arrow[r, "p_0"] & G''_0
\end{tikzcd}$$

Definimos $\partial_0(f)$ como la clase en $H^1_{\varphi}(X, G'_\bullet)$ del 1-torsor de X sobre $G'_\bullet$ obtenido al levantar por pullback via $\bar{f}$ el 1-torsor $i^*(DEC(G_\bullet)) \longrightarrow G'_\bullet$ de C sobre $G'_\bullet$:

$$\partial_0(f) = TORS^1[\bar{f}, G'_\bullet]\,[i^*(DEC(G_\bullet)) \longrightarrow G'_\bullet] = [\,\bar{f}^*(i^*(DEC(G_\bullet))) \rightarrow G'_\bullet\,] \in H^1_{\varphi}(X, G'_\bullet) .$$

Notemos que si f es el elemento nulo en $H^0_{p_0\varphi}(X, G''_\bullet)$ esto es f es la composición $X \xrightarrow{\varphi} G_0 \xrightarrow{p_0} G''_0 \xrightarrow{s_0} G''_1$ entonces el morfismo $\bar{f}$ está dado por la composición $\bar{f} : X \xrightarrow{\varphi} G_0 \xrightarrow{s_0} G_1 \xrightarrow{p} C$, si levantamos entonces el 1-torsor $i^*(DEC(G_\bullet)) \longrightarrow G'_\bullet$ por pullback via la composición $G_0 \xrightarrow{s_0} G_1 \xrightarrow{p} C$ obtenemos el 1-torsor de G_0 sobre $G'_\bullet$:

$$\begin{tikzcd}
(s_0 p)^*(i^*(DEC(G_\bullet))) \cong DEC(G'_\bullet) : \quad \cdots \arrow[d] & G'_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G'_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[d, "s_0 p"] \\
i^*(DEC(G_\bullet)) : \quad \cdots \arrow[d] & G_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "pr"'] & G_1 \arrow[r] \arrow[d, "d_1"] & C \\
G'_\bullet : \quad \cdots & G'_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

por lo que $\partial_0(s_0 p_0 \varphi) = [\varphi^*(DEC(G'_\bullet)) \longrightarrow G'_\bullet]$ que es el elemento nulo en $H^1_{\varphi}(X, G'_\bullet)$, así ∂_0 es un morfismo de conjuntos punteados .

Definamos ahora el siguiente morfismo de conexión ∂_1 . Para definir el morfismo de conexión anterior ∂_0 vimos que era imprescindible tener como dato extra el morfismo $\varphi : X \longrightarrow G_0$, sin embargo para definir ∂_1 no utilizaremos para nada este morfismo. Definiremos

$$\partial_1 : H^1_{p_0\varphi}(X, G''_\cdot) \longrightarrow H^2(X, \overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$$

aunque no utilizaremos que $H^1_{p_0\varphi}(X, G''_\cdot)$ es un conjunto punteado, notemos no obtante que el morfismo $\varphi : X \longrightarrow G_0$ determina un elemento "nulo" en $H^2(X, \overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$ con lo que si denotamos por $H^2_\varphi(X, \overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$ el correspondiente conjunto punteado, se verificará que ∂_1 lleva el elemento nulo en $H^1_{p_0\varphi}(X, G''_\cdot)$ en el elemento nulo distinguido en $H^2_\varphi(X, \overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$ pero este hecho no tendrá importancia a la hora de determinar la exactitud de la sucesión que vamos a obtener en la cohomología . Por este motivo, no distinguiremos elementos "nulos" especiales en dimensiones superiores a uno.

Consideremos (analogamente a como hicimos en el caso A) el grupoide cruzado $E'_\cdot = End(G'_\cdot) \longrightarrow G_\cdot$ donde $G_\cdot$ actua sobre $E'_\cdot$ por conjugación . el morfismo $\rho_\cdot : G_\cdot \longrightarrow N_\cdot$ induce un morfismo de grupoides cruzados :

$$\begin{tikzcd}
E'_\cdot \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_\cdot \arrow[d, "\rho_\cdot"] \\
E'_\cdot \arrow[r, "\rho_\cdot/E'_\cdot"] & N_\cdot
\end{tikzcd}$$

y este un morfismo de 2-grupoides:

.1.8)

$$\begin{tikzcd}
 & G_{\cdot\cdot}: \arrow[dl, "\rho_{\cdot\cdot}"'] & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & & E' \rtimes G_1 \arrow[rr, shift left, "D_0"] \arrow[rr, shift right, "D_1"'] \arrow[dl, "id \times \rho"'] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1 \arrow[rr, dashed, two heads, "p_1^{\#}"] \arrow[dl, "\rho"] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & G_1^{\#} \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] \\
N_{\cdot\cdot}: & & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & E' \rtimes N_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & N_1 \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & & & \\
 & & & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \arrow[rr, equal] \arrow[dl, equal] & & G_0 \\
 & & & G_0 \arrow[rr, equal] & & G_0 & & &
\end{tikzcd}$$

En este caso, sin embargo el coigualador de $D_0, D_1 : E'_\cdot \rtimes G_\cdot \longrightarrow G_\cdot$ no es el grupoide $G''_\cdot$ sino el cociente de $G_\cdot$ sobre $E'_\cdot$ al que hemos denotado por $G^{\#}_\cdot$. Como vimos en la proposición (1.1.23) existe un morfismo de grupoides $\gamma_\cdot : G^{\#}_\cdot \longrightarrow G''_\cdot$ que es una equivalencia esencial fuerte el cual por el teorema (1.4.21) induce una equivalencia de categorías:

$$TORS^1(X, G^{\#}_\cdot) \underset{\gamma^*}{\overset{\gamma_*}{\rightleftarrows}} TORS^1(X, G''_\cdot)$$

y por tanto una biyección: $H^1(X, G^{\#}_\cdot) \cong H^1(X, G''_\cdot)$.

Por otra parte, la sucesión exacta corta de grupoides $E'_\cdot \hookrightarrow G_\cdot \twoheadrightarrow G^{\#}_\cdot$ junto con el grupoide cruzado generalizado $\rho_\cdot : G_\cdot \longrightarrow N_\cdot$ están en las condiciones del caso A por lo que tenemos definido un morfismo de conexión :

$$\partial_1^{\#} : H^1(X, G^{\#}_\cdot) \longrightarrow H^2(X, \overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$$

Entonces el morfismo de conexión ∂_1 se obtiene como la composición:

$$H^1_{p_o\varphi}(X,G''_{\cdot}) = H^1(X,G''_{\cdot}) \overset{\gamma^*_{\cdot}}{\cong} H^1(X,G^{\#}_{\cdot}) \xrightarrow{\qquad \partial_1^{\#} \qquad} H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$$

más explicitamente : Sea $\alpha_{\cdot}:E_{\cdot}\longrightarrow G''_{\cdot}$ un 1-torsor de X sobre $G''_{\cdot}$ si levantamos este torsor por pullback via $\gamma_{\cdot}$ obtenemos un torsor de X sobre $G_{\cdot}$ (ver teorema (1.4.21)) $\gamma^*(\alpha_{\cdot}) : \gamma^*_{\cdot}(E_{\cdot}) \longrightarrow G^{\#}_{\cdot}$, levantaremos ahora el 1-torsor $\rho_{\cdot\cdot}:G_{\cdot\cdot}\longrightarrow N'_{\cdot\cdot}$ en GPD($\mathbb{C}$) de $G^{\#}_{\cdot}$ sobre $N'_{\cdot\cdot}$ por pullback via $\gamma^*(\alpha_{\cdot})$:

.1.9)
$$\begin{tikzcd}
(\gamma^*(\alpha_{\cdot}))^*(G_{\cdot\cdot}) : \; . \; . \; . \arrow[d, "pr"'] & E'_{\cdot}\rfloor\, G_{\cdot}\times_{\alpha} E_{\cdot} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_{\cdot}\times_{\alpha} E_{\cdot} \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^*_{\cdot}(E_{\cdot}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^*(\alpha_{\cdot})"'] & E_{\cdot} \arrow[d, "\alpha_{\cdot}"'] \\
G_{\cdot\cdot} \; : \; . \; . \; . \; . \arrow[d, "\rho_{\cdot\cdot}"'] & E'_{\cdot}\rfloor\, G_{\cdot} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_{\cdot} \arrow[r, two heads, "p^{\#}_{\cdot}"] \arrow[d, "\rho_{\cdot}"] \arrow[rr, bend right, "p_{\cdot}"'] & G^{\#}_{\cdot} \arrow[r, "\gamma_{\cdot}"] & G''_{\cdot} \\
N'_{\cdot\cdot} \; : \; . \; . \; . \; . & E'_{\cdot}\rfloor\, N_{\cdot} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N_{\cdot} & &
\end{tikzcd}$$

y aplicamos ahora el funtor $\overline{W}$ al diagrama :

$$\begin{tikzcd}
E'_{\cdot}\rfloor\, G_{\cdot}\times_{\alpha} E_{\cdot} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_{\cdot}\times_{\alpha} E_{\cdot} \arrow[d] \\
E'_{\cdot}\rfloor\, N_{\cdot} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N_{\cdot}
\end{tikzcd}$$

y obtenemos un 2-torsor de X sobre $\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\overline{W}((\gamma^*(\alpha_{\cdot}))^*(G_{\cdot\cdot})) : \; . . . \arrow[d] & E'\times_{G_o}(G_1\times_{G''_1}E_1)\underset{(G_o\times_{G''_o}E_o)}{\times}(G_1\times_{G''_0}E_1) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & G_1\times_{G''_1}E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_o\times_{G''_o}E_o \arrow[r] \arrow[d] & X \\
\overline{W}(G_{\cdot\cdot}) : \; . \; . \; . \; . \arrow[d] & E'\times_{G_o}G_1\times_{G_o}G_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_o \arrow[d] & \\
\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}) : \; . \; . \; . \; . & E'\times_{G_o}N_1\times_{G_o}N_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & N_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_o &
\end{tikzcd}$$

Notemos que $\overline{W}((\gamma^*(\alpha_{\cdot}))^*(G_{\cdot\cdot})) = \mathrm{COSK}^1(\overline{W}((\gamma^*(\alpha_{\cdot}))^*(G_{\cdot\cdot})))$ puesto que un elemento en $\Delta_2(\overline{W}((\gamma^*(\alpha_{\cdot}))^*(G_{\cdot\cdot})))$ viene dado por una terna $((g_o,x_o),(g_1,x_1),(g_2,x_2))$ de elementos en $G_1\times_{G''_1}E_1$ ($\Longrightarrow$ $p_1(g_i)=\alpha_1(x_i)$, $i=0,1,2$) tal que $(g_o,g_1,g_2)\in\Delta_2(G_{\cdot})$ y $(x_o,x_1,x_2)\in E_2=\Delta_2(E_{\cdot})$ así aplicando la condición de cociclo de $\alpha_{\cdot}$ tenemos:

$$\alpha_1(x_o)\cdot\alpha_1(x_2)=\alpha_1(x_1) \Longrightarrow p_1(g_og_2)=p_1(g_1)$$ y puesto que $d_i(g_og_2)=d_i(g_1)$, $i=0,1$, entonces $g_og_2g_1^{-1}=e\in E'$ así el elemento de $\Delta_2(\overline{W}((\gamma^*(\alpha_{\cdot}))^*(G_{\cdot\cdot})))$ viene determinado por $(e,(g_o,x_o),(g_2,x_2))\in E'\times_{G_o}(G_1\times_{G''_1}E_1)\underset{(G_o\times_{G''_o}E_o)}{\times}(G_1\times_{G''_1}E_1)$ (notemos además que por ser $E_2=\Delta_2(E_{\cdot})=\Lambda^1_2(E_{\cdot})$, el elemento $(x_o,-,x_2)$ determina un único elemento (x_o,x_1,x_2) en E_2) .

La clase del 2-torsor $\overline{W}((\gamma^*(\alpha_{\cdot}))^*(G_{\cdot\cdot})) \longrightarrow \overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$ en $H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$ es por definición $\partial_1[\alpha_{\cdot}]$.

Si la sucesión exacta corta de grupoides estuviese en las condiciones del CASO A entonces $G_1^{\#} = G_1''$ y el morfismo ∂_1 definido aqui coincide con el definido en el caso A.

Por otra parte, si $\alpha_. : E_. \longrightarrow G_.''$ es un 1-torsor escindido de X sobre $G_.''$ entonces $\gamma_.^*(\alpha_.)$ es un 1-torsor escindido de X sobre $G_.^{\#}$ y por tanto $\partial_1^{\#}\left[\gamma^*(\alpha_.)\right]$ será un elemento nulo en $H^2(X,\overline{W}(N_{..}'))$, así ∂_1 leva elementos neutros de $H^1_{p_0\varphi}(X,G_.'')$ en elementos nulos en $H^2(X,\overline{W}(N_{..}'))$.

.1.10) Nota.- Este morfismo de conexión ∂_1 lo obtuvimos en el caso de tener una sucesión exacta corta de grupos (noabelianos) y cuando aún no conociamos el funtor $\overline{W}$ de una forma más intuitiva (aunque de dificil generalización), si transladamos los razonamientos que haciamos en ese caso al caso de grupoides obtenemos la siguiente versión "intuitiva" del morfismo de conexión ∂_1 :

Dado un 1-torsor $\alpha_. : E_. \longrightarrow G_.''$ de X sobre $G_.''$ si lo levantamos por pullback via el morfismo de grupoides $p_. : G_. \longrightarrow G_.''$ obtenemos un objeto simplicial aumentado sobre X sobre el que opera principalmente el grupoide $G_.$:

$$\begin{tikzcd}
 & p_.^*(E_.) : \cdots \arrow[dl, "p^*(\alpha_.)"'] \arrow[dd] & G_1 \underset{G_0}{\times} G_1 \underset{(G_1'' \underset{G_0''}{\times} G_1'')}{\times} E_2 \arrow[d] \arrow[ddr] \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & G_1 \underset{G_0''}{\times} E_1 \arrow[d] \arrow[dd] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \underset{G_0''}{\times} E_0 \arrow[d] \arrow[dd] \arrow[r] & X \arrow[dd, equal] \\
G_. : \cdots \arrow[dd, "p_."'] & & G_1 \underset{G_0}{\times} G_1 \arrow[dd] \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & G_1 \arrow[dd] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \arrow[dd] & \\
 & E_. : \cdots \arrow[dl, "\alpha_."] & \cdots & E_2 \arrow[dl] \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & E_1 \arrow[d] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & E_0 \arrow[d] \arrow[r] & X \\
G_.'' : \cdots & & G_1'' \underset{G_0''}{\times} G_1'' \arrow[rr, shift left=2] \arrow[rr] \arrow[rr, shift right=2] & & G_1'' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0'' &
\end{tikzcd}$$

El morfismo simplicial $p^*(\alpha_.) : p_.^*(E_.)$ $G_.$ no es un torsor de X , ni siquiera verifica que $p_.^*(E_.)$ sea un hiperrecubrimiento de X (no es asferical en dimensión dos) , pero si tomamos $\mathrm{COSK}^1(p^*(E_.))$:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \ \Delta_2(p^*(E_.)) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G_1 \underset{G_1''}{\times} E_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \underset{G_0''}{\times} E_0 \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

si obtenemos un hiperrecubrimiento de X (en particular un 2-hiperrecubrimiento), notemos que $\mathrm{COSK}^1(p^*(E_.)) = \overline{W}((\gamma_.^*(\alpha_.))^*(G_{..})))$, además se verifica que para cualquier elemento $((g_0,x_0),(g_1,x_1),(g_2,x_2))$ en $\Delta_2(p^*(E_.))$ el producto $g_0g_2g_1^{-1}$ de elementos en G_1 es un elemento en E' verificandose que el morfismo

$$\widetilde{\beta} : \Delta_2(p^*(E_.)) \longrightarrow E'$$

definido por $\widetilde{\beta}((g_0,x_0),(g_1,x_1),(g_2,x_2)) = g_0g_2g_1^{-1}$, junto con el morfismo simplicial turncado proyección :

$$\begin{tikzcd}
G_1 \underset{G_1''}{\times} E_1 \arrow[d, "pr"'] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 \underset{G_0''}{\times} E_0 \arrow[d, "pr"'] \arrow[r, two heads] & X \\
G_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

satisfacen las condiciones de cociclo (CC1) y (CC2) (ver nota (3.2.9)) . Tenemos así un

2-cociclo $\beta_\cdot : \mathrm{COSK}^1(p^*(E_\cdot)) \longrightarrow \overline{W}(G_{\cdot\cdot})$ de X sobre $\overline{W}(G_{\cdot\cdot})$ y por composición con el morfismo $\overline{W}(G_{\cdot\cdot}) \xrightarrow{\overline{W}(\rho_{\cdot\cdot})} \overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$ un 2-cociclo de X sobre $\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{COSK}^1(p^*(E_\cdot)) : \ \cdots \arrow[d, "\beta_\cdot"'] & \Delta_2(p^*(E_\cdot)) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & G_1 \times_{G''_1} E_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, "pr"'] & G_0 \times_{G''_0} E_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X \\
\overline{W}(G_{\cdot\cdot}) : \ \cdots \arrow[d, "\overline{W}(\rho_{\cdot\cdot})"'] & E' \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & G_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, "\rho_\cdot"'] & G_0 \arrow[d] & \\
\overline{W}(N_{\cdot\cdot}) : \ \cdots & E' \times_{G_0} N_1 \times_{G_0} N_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & N_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

donde $\beta_2((g_0,x_0),(g_1,x_1),(g_2,x_2)) = (g_0 g_2 g_1^{-1}, \rho(g_0), \rho(g_2))$. Este 2-cociclo resulta ser un 2-torsor de X sobre $\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$ de forma que:

$$\partial_1 [\alpha_\cdot] = [\beta_\cdot] \quad .$$

La definición de este morfismo de conexión ∂_1 así como de los 2-hipergrupoides sistemas de coeficientes, fueron obtenidos de esta foram "intuitiva" sin utilizar la gran " Herramienta" que nos proporciona el funtor $\overline{W}$.

Con los morfismos de conexión ∂_0 y ∂_1 obtenemos una sucesión de " morfismos de conjuntos conelementos distinguidos"

.1.11)
$$\begin{tikzcd}
H^0_\varphi(X,G'_\cdot) \arrow[r, hook, "i_*"] & H^0_\varphi(X,G_\cdot) \arrow[r, "p_*"] & H^0_{p_0\varphi}(X,G''_\cdot) \arrow[dll, "\partial_0"'] \\
H^1_\varphi(X,G'_\cdot) \arrow[r, "i_*"] & H^1_\varphi(X,G_\cdot) \arrow[r, "p_*"] & H^1_{p_0\varphi}(X,G''_\cdot) \arrow[dll, "\partial_1"'] \\
H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})) \arrow[r, "i_*"] & H^2(X,\overline{W}(N_{\cdot\cdot})) \arrow[r, "p_*"] & H^2(X,\overline{W}(N''_{\cdot\cdot}))
\end{tikzcd}$$

En el siguiente lema veremos como calcular ∂_1 de los elementos en la imagen de $p_* : H^1_\varphi(X,G_\cdot) \longrightarrow H^1_{p_0\varphi}(X,G''_\cdot)$ y nos será de utilidad cuando provemos la "exactitud " de la sucesión (4.1.11) anterior .

.1.12) <u>Lema</u> .-

El triangulo
$$\begin{tikzcd}
H^1_\varphi(X,G_\cdot) \arrow[rr, dash, "p_*"] \arrow[dr, "\theta_*"'] & & H^1_{p_0\varphi}(X,G''_\cdot) \arrow[dl, "\partial_1"] \\
& H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})) &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo . Donde θ_* es el morfismo inducido por la composición $\begin{tikzcd} G_\cdot \arrow[r, "\rho_\cdot"] \arrow[rr, bend left, "\theta_\cdot"] & N_\cdot \arrow[r, hook, "\sigma_\cdot"] & \overline{W}(N'_{\cdot\cdot}) \end{tikzcd}$

Demostración.- sea $\alpha_\cdot : F_\cdot \longrightarrow G_\cdot$ un 1-torsor de X sobre $G_\cdot$ y sea $\alpha'_\cdot : F'_\cdot \longrightarrow G''_\cdot$ el torsor $p_*(\alpha_\cdot)$, tenemos entonces un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F_\cdot \arrow[r, "a_\cdot"] \arrow[d, "\alpha_\cdot"'] & F'_\cdot \arrow[d, "\alpha'_\cdot"] \\
G_\cdot \arrow[r, "p_\cdot"] & G''_\cdot
\end{tikzcd}$$

(ver (1.4.37)) , consideremos entonces :

$$\begin{tikzcd}
\alpha^{!*}_{\bullet}(G_{\bullet\bullet}) : \arrow[d] & \cdots & E^{!}_{\bullet}\rceil G_{\bullet} \times_{\alpha^{!}_{\bullet}} F^{!}_{\bullet} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_{\bullet} \times_{\alpha^{!}_{\bullet}} F^{!}_{\bullet} \arrow[r] \arrow[d] & F^{!}_{\bullet} \arrow[d, "\alpha^{!}_{\bullet}"] \\
G_{\bullet\bullet} : \arrow[d, "\rho_{\bullet\bullet}"'] & \cdots & E^{!}_{\bullet}\rceil G_{\bullet} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_{\bullet} \arrow[r, "p_{\bullet}"] \arrow[d] & G^{!''}_{\bullet} \\
N^{!}_{\bullet\bullet} : & \cdots & E^{!}_{\bullet}\rceil N_{\bullet} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N_{\bullet} &
\end{tikzcd}$$

tenemos que $\partial_1 \left[\alpha^{!}_{\bullet}\right] = \left[\overline{W}(\alpha^{!*}_{\bullet}(G_{\bullet\bullet})) \longrightarrow \overline{W}(N^{!}_{\bullet\bullet})\right]$ (ver nota (4.1.10)) . Si levantamos el 1-torsor $\rho_{\bullet\bullet} : G_{\bullet\bullet} \longrightarrow N^{!}_{\bullet\bullet}$ por pullback via el morfismo composición $\alpha^{!}_{\bullet}\, a_{\bullet} = p_{\bullet}\alpha_{\bullet}$ y luego aplicamos $\overline{W}$ obtenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}((\alpha^{!}_{\bullet} a_{\bullet})^{*}(G_{\bullet\bullet})) = \overline{W}((p_{\bullet}\alpha_{\bullet})^{*}(G_{\bullet\bullet})) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \overline{W}(\alpha^{*}_{\bullet}(G_{\bullet\bullet})) \arrow[dl] \\
& \overline{W}(N^{!}_{\bullet\bullet}) &
\end{tikzcd}$$

pero $p^{*}_{\bullet}(G_{\bullet\bullet}) = DEC(G_{\bullet\bullet})$ así tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& K(F_{\bullet},0) : \arrow[dl, "s"'] \arrow[dd] & \cdots & & F_{\bullet} \arrow[dl] \arrow[dd, "\alpha_{\bullet}"] \arrow[rr, equal] & & F_{\bullet} \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[rr, equal] & & F_{\bullet} \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "\alpha_{\bullet}"] \\
\alpha^{*}_{\bullet}(DEC(G_{\bullet\bullet})) : \arrow[dd] & \cdots & & (E^{!}\rceil G_{\bullet}) \times_{G_{\bullet}} (E^{!}\rceil G_{\bullet}) \times_{\alpha^{!}} F_{\bullet} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd] & & E^{!}\rceil G_{\bullet} \times_{\alpha^{!}} F_{\bullet} \arrow[rr] \arrow[dd] & & F_{\bullet} \arrow[ll, dashed, bend right, "S_{0}"'] \arrow[dd, "\alpha_{\bullet}"] & \\
& K(G_{\bullet},0) : \arrow[dl, "s"'] & \cdots & & G_{\bullet} \arrow[dl] \arrow[rr, equal] & & G_{\bullet} \arrow[dl] \arrow[rr, equal] & & G_{\bullet} \arrow[dl, equal] \\
DEC(G_{\bullet\bullet}) : \arrow[d] & \cdots & & (E^{!}\rceil G_{\bullet}) \times_{G_{\bullet}} (E^{!}\rceil G_{\bullet}) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[d] & & E^{!}\rceil G_{\bullet} \arrow[rr] \arrow[d] & & G_{\bullet} \arrow[ll, bend right, "S_{0}"'] \arrow[d, "p_{\bullet}"] & \\
G_{\bullet\bullet} : \arrow[d] & \cdots & & E^{!}\rceil G_{\bullet} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[d] & & G_{\bullet} \arrow[rr, "p_{\bullet}"] \arrow[d] & & G^{!''}_{\bullet} & \\
N^{!}_{\bullet\bullet} : & \cdots & & E^{!}\rceil N_{\bullet} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & N_{\bullet} & & &
\end{tikzcd}$$

donde los morfismos $s : K(G_{\bullet},0) \longrightarrow DEC(G_{\bullet\bullet})$ y $s : K(E_{\bullet},0) \longrightarrow \alpha^{*}_{\bullet}DEC(G_{\bullet\bullet})$ están inducidos por la escición $S_{0} : G_{\bullet} \longrightarrow E^{!}\rceil G_{\bullet}$. Así aplicando $\overline{W}$ tenemos :

$$\begin{tikzcd}
F_{\bullet} \arrow[r, "\overline{W}(s)"] \arrow[d, "\alpha_{\bullet}"'] & \overline{W}(\alpha^{*}_{\bullet}(DEC(G_{\bullet\bullet})) \arrow[d] & \text{y por tanto} & F_{\bullet} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{\bullet}"'] & \overline{W}(\alpha^{!*}_{\bullet}(G_{\bullet\bullet})) \arrow[d] \\
G_{\bullet} \arrow[r, "\overline{W}(s)"] & \overline{W}(DEC(G_{\bullet\bullet})) & & G_{\bullet} \arrow[r, "\theta_{\bullet}"] & \overline{W}(N^{!}_{\bullet\bullet})
\end{tikzcd}$$

considerando entonces a la composición $F_{\bullet} \xrightarrow{\alpha_{\bullet}} G_{\bullet} \xrightarrow{\theta_{\bullet}} \overline{W}(N^{!}_{\bullet\bullet})$ como un 2-cociclo de X sobre $\overline{W}(N^{!}_{\bullet\bullet})$ y aplicando el teorema (3.2.20) , teniendo en cuenta que el 2-torsor a través del que se factoriza este cociclo es la imagen por el funtor θ_{*} de $\alpha_{\bullet}$, se tiene demostrado el lema .

En las dos proposiciones siguientes estudiaremos la "naturalidad"de los morfismos de conexión .

.1.13) Proposición (naturalidad de los morfismos de conexión en la primera variable)..

Para cualquier morfismo $f : Y \longrightarrow X$ en $\mathbb{C}$ se tienen diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
H^{0}_{(p_0\varphi)}(X,G''_{\bullet}) \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "f^*"'] & H^{1}_{(\varphi)}(X,G'_{\bullet}) \arrow[d, "f^*"'] \\
H^{0}_{(p_0\varphi f)}(Y,G''_{\bullet}) \arrow[r, "\partial_0"] & H^{1}_{(\varphi f)}(Y,G'_{\bullet})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^{1}_{(p_0\varphi)}(X,G''_{\bullet}) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f^*"'] & H^{2}(X,\overline{W}(N'_{\bullet\bullet})) \arrow[d, "f^*"'] \\
H^{1}_{(p_0\varphi f)}(Y,G''_{\bullet}) \arrow[r, "\partial_1"] & H^{2}(Y,\overline{W}(N'_{\bullet\bullet}))
\end{tikzcd}$$

Demostración.- La conmutatividad de los cuadrados anteriores se deduce del hecho de que tanto los morfismos de conexión ∂_i , i=0,1 , y las aplicaciones f están definidos mediante colímites y colímites conmutan con colímites.

.1.14) Proposición (naturalidad de los morfismos de conexión en la segunda variable) .

Los morfismos de conexión ∂_i ,i=0,1 (y por tanto las sucesiones (4. 1.6) y (4.1.11)), son naturales en la segunda variable en el siguiente sentido :

Dada una sucesión exacta corta de grupoides $H'_{\bullet} \hookrightarrow H_{\bullet} \twoheadrightarrow H''_{\bullet}$ junto con un grupoide cruzado generalizado $\theta : H_{\bullet} \longrightarrow M_{\bullet}$ (y un morfismo $\varphi : X \longrightarrow G_0$ si la sucesión de grupoides está en el caso general B) verificando que $(H_{\bullet},M_{\bullet},\theta)$ es conexo y que $\theta/H'_{\bullet} : H'_{\bullet} \longrightarrow M_{\bullet}$ es tambien un grupoide cruzado generalizado y dados un diagrama conmutativo de morfismos de grupoides

$$\begin{tikzcd}
G'_{\bullet} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f'_{\bullet}"'] & G_{\bullet} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_{\bullet}"'] & G''_{\bullet} \arrow[d, "f''_{\bullet}"'] \\
H'_{\bullet} \arrow[r, hook] & H_{\bullet} \arrow[r, two heads] & H''_{\bullet}
\end{tikzcd}$$

y un morfismo de grupoides cruzados generalizados

$$\begin{tikzcd}
G_{\bullet} \arrow[r, "e_{\bullet}"] \arrow[d, "f_{\bullet}"'] & N_{\bullet} \arrow[d, "g_{\bullet}"] \\
H_{\bullet} \arrow[r, "\theta"] & M_{\bullet}
\end{tikzcd}$$

el cual induce el siguiente diagrama conmutativo de morfismos de 2-grupoides

$$\begin{tikzcd}
N'_{\bullet\bullet} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f'_{\bullet\bullet}"'] & N_{\bullet\bullet} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_{\bullet\bullet}"'] & N''_{\bullet\bullet} \arrow[d, "f''_{\bullet\bullet}"'] \\
M'_{\bullet\bullet} \arrow[r, hook] & M_{\bullet\bullet} \arrow[r, two heads] & M''_{\bullet\bullet}
\end{tikzcd}$$

donde $M'_{\bullet\bullet}$ y $M_{\bullet\bullet}$ son los 2-grupoides asociados a los grupoides cruzados $\theta/\mathrm{End}(H'_{\bullet}):\mathrm{End}(H'_{\bullet}) \longrightarrow M_{\bullet}$ y $\theta/\mathrm{End}(H_{\bullet}): \mathrm{End}(H_{\bullet}) \longrightarrow M_{\bullet}$ respectivamente y $M''_{\bullet\bullet}$ es el 2-grupoide cociente de $M_{\bullet\bullet}$ por $M'_{\bullet\bullet}$. Entonces los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
H^{0}_{(p_0\varphi)}(X,G''_{\bullet}) \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "f''_*"'] \arrow[dr, phantom, "(a)"] & H^{1}_{(\varphi)}(X,G'_{\bullet}) \arrow[d, "f'_*"] \\
H^{0}_{(p_0 f_0\varphi)}(X,H''_{\bullet}) \arrow[r, "\partial_0"] & H^{1}_{(f_0\varphi)}(X,H'_{\bullet})
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H^{1}_{(p_0\varphi)}(X,G''_{\bullet}) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "f''_*"'] \arrow[dr, phantom, "(b)"] & H^{2}(X,\overline{W}(N'_{\bullet\bullet})) \arrow[d, "f'_*"] \\
H^{1}_{(p_0 f_0\varphi)}(X,H''_{\bullet}) \arrow[r, "\partial_1"] & H^{2}(X,\overline{W}(M'_{\bullet\bullet}))
\end{tikzcd}$$

son conmutativos .

Demostración.- Haremos la demostración suponiendo que ambas sucesiones exactas cortas de grupoides están en el caso A. Los demás casos se demostrarían de forma analoga.

La conmutatividad del cuadrado (a) se deduce inmediatamente de la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & i^*(DEC(G_{\cdot})) \arrow[rr, "i^*(DEC(f_{\cdot}))"] \arrow[dl] \arrow[dd] & & i^*(DEC(H_{\cdot})) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
G'_{\cdot} \arrow[rr, "f'_{\cdot}"] \arrow[dd, hook, "i_{\cdot}"'] & & H'_{\cdot} \arrow[dd, hook, "i'_{\cdot}"] & \\
 & DEC(G_{\cdot}) \arrow[rr, "DEC(f_{\cdot})"] \arrow[dl] & & DEC(H_{\cdot}) \arrow[dl] \\
G_{\cdot} \arrow[rr, "f_{\cdot}"] & & H_{\cdot} &
\end{tikzcd}$$

Así mismo la conmutatividad del cuadrado (b) se deduce de la conmutatividad del diagrama :

$$\begin{tikzcd}
 & G'_{\cdot}\rtimes G_{\cdot} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, "f'_{\cdot}\times f_{\cdot}"'] \arrow[dd] & & G_{\cdot} \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, "f_{\cdot}"'] \arrow[dd, "\rho_{\cdot}"] & & G''_{\cdot} \arrow[dl, "f''_{\cdot}"] \\
H'_{\cdot}\rtimes H_{\cdot} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd] & & H_{\cdot} \arrow[rr, two heads] \arrow[dd] & & H''_{\cdot} & \\
 & G'_{\cdot}\rtimes N_{\cdot} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, "f_{\cdot}\times g_{\cdot}"'] & & N_{\cdot} \arrow[dl, "g_{\cdot}"] & & \\
H'_{\cdot}\rtimes M_{\cdot} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & M_{\cdot} & & &
\end{tikzcd}$$

y de que el funtor $\overline{W}$ está definido utilizando colímites (y colímites conmutan co colímites) .

La exactitud.

.1.15) Teorema (La exactitud CASO A $G_o = G''_o$) .

La sucesión (4.1.6)

$$\begin{tikzcd}
H^0(X,G'_{\cdot}) \arrow[r, hook, "i_*"] & H^0(X,G_{\cdot}) \arrow[r, "p_*"] & H^0(X,G''_{\cdot}) \arrow[dll, "\partial_0"'] \\
H^1(X,G'_{\cdot}) \arrow[r, "i_*"] & H^1(X,G_{\cdot}) \arrow[r, "p_*"] & H^1(X,G''_{\cdot}) \arrow[dll, "\partial_1"'] \\
H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})) \arrow[r, "i_*"] & H^2(X,\overline{W}(N_{\cdot\cdot})) \arrow[r, "p_*"] & H^2(X,\overline{W}(N''_{\cdot\cdot}))
\end{tikzcd}$$

de conjuntos con elementos distinguidos y morfismos entre ellos, es exacta en el siguiente sentido:

(i) Un elemento está en la imagen de cualquiera de los morfismos i_* sii su imagen por el morfismo p_* es un elemento neutro .

(ii) Un elemento está en la imagen de cualquiera de los morfismos p_* sii su imagen por el correspondiente morfismo de conexión (∂_o ó ∂_1) es un elemento neutro.

(iii) Un elemento está en la imagen de ∂_o sii su imagen por i_* es un elemento neutro y estará en la imagen de ∂_1 sii su imagen por i_* es un elemento nulo .

Demostración.-

$$H^0(X,G_\cdot) \xrightarrow{p_*} H^0(X,G''_\cdot) \xrightarrow{\partial_0} H^1(X,G'_\cdot)$$

$$f \in \mathrm{Img}(p_*) \iff \partial_0(f) = \text{neutro}$$

$\Rightarrow$) Supongamos un morfismo $f : X \longrightarrow G_1$ y probemos que $\partial(p_1 f)$ es un elemento neutro. consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
f^*(i^*(\mathrm{DEC}(G_\cdot)) : \dots \arrow[d] & & G_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \underset{f}{\times} X \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[d] & & G_1 \underset{f}{\times} X \arrow[rr] \arrow[d] & & X \arrow[d, "f"] & \\
\mathrm{DEC}(i^*(\mathrm{DEC}(G_\cdot)) : \dots \arrow[d] & & G_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[d] & & G_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \arrow[rr] \arrow[d] & & G_1 \arrow[d, "p_1"] & \\
i^*(\mathrm{DEC}(G_\cdot)) : \dots \arrow[dd] \arrow[dr] & & G_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \arrow[rr, shift left, "f_1"] \arrow[rr, shift right, "f_0"'] \arrow[dd] \arrow[dr] & & G_1 \arrow[rr, "p_1"] \arrow[dd] \arrow[dr] & & G''_1 \arrow[dr] & \\
& \mathrm{DEC}(G'_\cdot) : \dots \arrow[dl] & & G'_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] & & G'_1 \arrow[rr] \arrow[dl] & & G_0 \\
G'_\cdot : \dots & & G'_1 \arrow[rr, "d_0 = d_1"'] & & G_0 & & &
\end{tikzcd}$$

$\partial_0(p_1 f)$ será la clase en $H^1(X,G'_\cdot)$ del torsor :

$$\begin{tikzcd}
f^*(i^*(\mathrm{DEC}(G_\cdot))) \arrow[rr] \arrow[dr] & & G'_\cdot \\
& \mathrm{DEC}(G'_\cdot) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

que factoriza por $\mathrm{DEC}(G'_\cdot)$ y por tanto será un elemento neutro en $H^1(X,G'_\cdot)$ (ver (1.4.14).

$\Leftarrow$) Supongamos $f : X \longrightarrow G''_1$ tal que $\partial_0(f)$ es un elemento neutro entonces $f^*(i^*(\mathrm{DEC}(G_\cdot)))$ es un objeto simplicial escindido, así existe $s : X \longrightarrow G_1 \underset{f}{\times} X$ tal que $pr_1 s = id_X$.

Sea $f' = pr_0 s : X \longrightarrow G_1$, claramente $f = p_1 f' \in \mathrm{Img}(p_*)$.

$$H^0(X,G''_\cdot) \xrightarrow{\partial_0} H^1(X,G'_\cdot) \xrightarrow{i_*} H^1(X,G_\cdot)$$

$$\gamma \in \mathrm{Img}(\partial_0) \iff i_*(\gamma) = \text{neutro} .$$

$\Rightarrow$) Sea $f : X \longrightarrow G''_1$ un morfismo , veamos que $i_*(\partial_0(f))$ es un elemento neutro. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
f^*(i^*(\mathrm{DEC}(G_\cdot))) : \dots \arrow[d] & & G_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \underset{f}{\times} X \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[d] & & G_1 \underset{f}{\times} X \arrow[rr] \arrow[d] & & X \arrow[d, "f"] & \\
i^*(\mathrm{DEC}(G_\cdot)) : \dots \arrow[d] \arrow[ddr] & & G_1 \underset{G_0}{\times} G'_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[d] \arrow[ddr] & & G_1 \arrow[rr] \arrow[d, "d_1"] \arrow[ddr, equal] & & G''_1 \arrow[ddr, "d_0"] & \\
G'_\cdot : \dots \arrow[dd, hook, "i_\cdot"'] & & G'_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd, hook] & & G_0 \arrow[dd, equal] & & & \\
& \mathrm{DEC}(G_\cdot) : \dots \arrow[dl] & & G_1 \underset{G_0}{\times} G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, "pr_1"'] & & G_1 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dl, "d_1"] & & G_0 \\
G_\cdot : \dots & & G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_0 & & &
\end{tikzcd}$$

La conmutatividad del cuadrado :

$$\begin{tikzcd}
f^*(i^*(\mathrm{DEC}(G_\cdot))) \arrow[r] \arrow[d] & G'_\cdot \arrow[d, hook, "i_\cdot"] \\
\mathrm{DEC}(G_\cdot) \arrow[r] & G_\cdot
\end{tikzcd}$$

implica la conmutatividad del cuadrado :

$$\begin{tikzcd}
f^*(i^*(DEC(G.))) \arrow[r] \arrow[d] & (d_o f)^*(DEC(G.)) \arrow[d] \\
G'. \arrow[r, hook, "i."] & G.
\end{tikzcd}$$

donde el morfismo $f^*(i^*(DEC(G.))) \longrightarrow (d_o f)^*(DEC(G.))$ está inducido por el morfismo proyección $f^*(i^*(DEC(G.))) \text{——} DEC(G.)$, así por el lema (1.4.19) tenemos que $p_*\left[f^*(i^*(DEC(G.))) \longrightarrow G'.\right] = \left[(d_o f)^*(DEC(G.)) \longrightarrow G.\right]$ que es un elemento neutro en $H^1(X,G.)$.

$\Leftarrow$) Sea $\alpha.: F. \text{—} G'.$ un 1-torsor tal que $i_*\left[\alpha.\right]$ es un elemento neutro en $H^1(X,G.)$, entonces por (1.4.14) existe un morfismo G.-invariante $i_*(F.) \xrightarrow{b} DEC(G.)$. Utilizando ahora la adjunción $OPER(G'.) \underset{i^*}{\overset{i!}{\rightleftarrows}} OPER(G.)$ el morfismo b induce un morfismo G'.-invariante:

$$\begin{array}{c}
F. \overset{\beta.}{\dashrightarrow} i^*(DEC(G.)) \\
\hline
i_*(F.) \xrightarrow[b]{} DEC(G.)
\end{array}$$

Ahora, puesto que la composición $\alpha. = pr.\,\beta. : F. \xrightarrow{\beta.} i^*(DEC(G.)) \xrightarrow{pr.} G'.$ es un 1-torsor y tambien lo es $pr. : i^*(DEC(G.)) \longrightarrow G'.$, $\beta.$ es un torsor de X sobre G'. :

$$\begin{tikzcd}
F.: \arrow[d, "\beta."] \arrow[dd, bend right=60, "\alpha."'] & \cdots & F_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\beta_1"] \arrow[dd, bend right=60, "\alpha_1"'] & F_o \arrow[r] \arrow[d, "\beta_o"] \arrow[dd, bend right=60, "\alpha_o"'] & X \arrow[d, dashed, "\beta_{-1}"] \\
i^*(DEC(G.)): \arrow[d] & \cdots & G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "pr"] & G_1 \arrow[r] \arrow[d, "d_1"] & G''_1 \\
G'.: & \cdots & G'_1 \arrow[r, "d_o=d_1"'] & G_o &
\end{tikzcd}$$

Por otra parte, por ser las dos sucesiones que aparecen en el siguiente diagrama exactas en el sentido de Barr y ser el cuadrado de la izquierda un pullback ,

$$\begin{tikzcd}
F.: \arrow[d, "\beta."] & \cdots & F_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\beta_1"] & F_o \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta_o"] & X \arrow[d, "\beta_1"] \\
i^*(DEC(G.)): & \cdots & G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_1 \arrow[r, two heads] & G''_1
\end{tikzcd}$$

aplicando el lema de Grothendieck ([3]) el cuadrado de la derecha será tambien un pullback y por tanto $F. \cong \beta^*_{-1}(i^*(DEC(G.)))$ verificandose entonces que $\left[\alpha.\right] = \partial_o(\beta_{-1})$.

$$H^1(X,G'.) \xrightarrow{i_*} H^1(X,G.) \xrightarrow{p_*} H^1(X,G''.)$$

$$\xi \in Img(i_*) \Longleftrightarrow p_*(\xi) = \text{neutro}$$

$\Rightarrow$) Sea $\alpha.: F. \longrightarrow G'.$ un 1-torsor de X sobre G'. . Puesto que la composición p. i. factoriza a través del complejo simplicial constante $K(G''_o,0)$ tambien factoriza a través de $DEC(G''.)$:

$$\begin{tikzcd}
G'. \arrow[r, hook, "i."] \arrow[dr] & G. \arrow[r, two heads, "p."] & G''. \\
& K(G''_o,0) \arrow[r] & DEC(G''.) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

así el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
F_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_\bullet"'] & DEC(G''_\bullet) \arrow[d] \\
G'_\bullet \arrow[r, "p.i."] & G''_\bullet
\end{tikzcd}$$

es conmutativo donde el morfismo $F_\bullet \longrightarrow DEC(G''_\bullet)$ está dado por la composición

$$\begin{tikzcd}
F_\bullet : \arrow[d] & \cdots & F_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\alpha_{-1} d_o^2"] & F_o \arrow[r, two heads, "d_o"] \arrow[d, "\alpha_{-1} d_o"] & X \arrow[d, "\alpha_{-1}"] \\
K(G''_o, 0): \arrow[d] & \cdots & G''_o \arrow[r, equal] \arrow[d, "\langle s_o, s_o \rangle"] & G''_o \arrow[r, equal] \arrow[d, "s_o"] & G''_o \arrow[d] \\
DEC(G''_\bullet): & \cdots & G''_1 \times_{G''} G''_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G''_1 \arrow[r] & G_o
\end{tikzcd}$$

así $(p.i.)_*[\alpha_\bullet] = [\alpha_{-1}^*(DEC(G''_\bullet))]$ que es un elemento neutro en $H^1(X, G''_\bullet)$.

⇐) Supongamos ahora $\alpha_\bullet : F_\bullet \longrightarrow G_\bullet$ un 1-torsor de X sobre $G_\bullet$ tal que $p_*[\alpha_\bullet]$ es un elemento neutro. Existe entonces (1.4.14) un morfismo $G''_\bullet$-invariante

$$\begin{tikzcd}
p_*(F_\bullet) \arrow[rr, "b"] \arrow[dr] & & DEC(G''_\bullet) \arrow[dl] \\
& G''_\bullet &
\end{tikzcd}$$

, utilizando la adjunción

$$\begin{tikzcd}
OPER(G_\bullet) \arrow[r, shift left, "p!"] & OPER(G''_\bullet) \arrow[l, shift left, "p^*"]
\end{tikzcd}$$

, b induce un morfismo $G_\bullet$-invariante:

$$\frac{F_\bullet \overset{\beta_\bullet}{\dashrightarrow} p^*(DEC(G''_\bullet))}{p_*(F_\bullet) \xrightarrow[b]{} DEC(G''_\bullet)}$$

y puesto que la composición $\alpha_\bullet = pr_\bullet \beta_\bullet : F_\bullet \longrightarrow p^*(DEC(G''_\bullet)) \longrightarrow G_\bullet$ es un torsor y $pr_\bullet : p^*(DEC(G''_\bullet)) \longrightarrow G_\bullet$ es una fibración exacta entonces $\beta_\bullet : F_\bullet \longrightarrow p^*(DEC(G''_\bullet))$ es un torsor de X . Por otra parte, el morfismo $f_\bullet : G'_\bullet \longrightarrow p^*(DEC(G''_\bullet))$:

$$\begin{tikzcd}
G'_1 \arrow[rr, "d_o = d_1"] \arrow[dr, dashed, "f_1"] \arrow[dd] & & G_o \arrow[dr, dashed, "f_o = s_o"] \arrow[dd, equal] & \\
& G''_1 \times_{G_o} G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl, "pr"'] \arrow[dd] & & G''_1 \arrow[dl] \arrow[dd] \\
G_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd] & & G_o \arrow[dd, equal] & \\
& G''_1 \times_{G_o} G''_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] & & G''_1 \arrow[dl] \\
G''_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_o &
\end{tikzcd}$$

definido por $f_o = s_o : G_o \longrightarrow G''_1$ y $f_1 : G'_1 \longrightarrow G''_1 \times_{G_o} G_1$; $f_1 : a \longmapsto f_1(a) = (s_o d_o(a), a)$ es una equivalencia esencial, puesto que :

(1.1.12)(a) El cuadrado

$$\begin{tikzcd}
G'_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\langle d_o, d_1 \rangle"'] & G''_1 \times_{G_o} G_1 \arrow[d, "id \times p_1"] \\
G_o \times G_o \arrow[r, "s_o \times s_o"] & G''_1 \times G''_1
\end{tikzcd}$$

es un pullback y

(1.1.12)(b) el morfismo composición n :

$$\begin{tikzcd}
G_o \underset{G''_1}{\times} (G''_1 \underset{G_o}{\times} G_1) \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "n"] & G''_1 \underset{G_o}{\times} G_1 \arrow[r, "p_1pr_1"] \arrow[d, "pr_o"] & G''_1 \\
G_o \arrow[r, "s_o"] & G''_1 &
\end{tikzcd}$$

es un epimorfismo .

Así (por el teorema (5.9) de Duskin [27] ver (1.4.21)) , $f_{\cdot}$ induce una equivalencia de categorías $f_* : TORS^1(X,G'_{\cdot}) \longrightarrow TORS^1(X,p^*_{\cdot}(DEC(G''_{\cdot})))$. Existirá por tanto un 1-torsor $\alpha'_{\cdot} : F'_{\cdot} \longrightarrow G'_{\cdot}$ de X sobre $G'_{\cdot}$ tal que $f_*(\alpha'_{\cdot}) \cong \beta_{\cdot}$ y consecuentemente : $i_*(\alpha'_{\cdot}) = (pr_{\cdot} f_{\cdot})_*(\alpha'_{\cdot}) = pr_*(f_*(\alpha'_{\cdot})) = pr_*(\beta_{\cdot}) = pr_{\cdot}\beta_{\cdot} = \alpha_{\cdot}$, donde $pr_{\cdot} : p^*_{\cdot}(DEC(G''_{\cdot})) \longrightarrow G_{\cdot}$ es el morfismo proyección. Notemos que $pr_*(\beta_{\cdot}) = pr_{\cdot}\beta_{\cdot}$ por ser $pr_{\cdot}$ una fibración exacta. Concluimos entonces que:

$$[\alpha_{\cdot}] = i_*[\alpha'_{\cdot}] \in Img(i_*)$$

$$H^1(X,G_{\cdot}) \xrightarrow{p_*} H^1(X,G''_{\cdot}) \xrightarrow{\partial_1} H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$$

$$\zeta \in Img(p_*) \iff \partial_1(\zeta) = \text{neutro}$$

$\Rightarrow$) Por el lema (4.1.12) el cuadrado :

$$\begin{tikzcd}
H^1(X,G_{\cdot}) \arrow[r, dash, "p_*"] \arrow[d, "\rho_*"'] \arrow[dr, "\theta_*"] & H^1(X,G''_{\cdot}) \arrow[d, "\partial_1"] \\
H^1(X,N_{\cdot}) \arrow[r, "\sigma_*"] & H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y por tanto si $\zeta \in Img(p_*)$ entonces $\partial_1(\zeta)$ es un elemento neutro (recordar que los elementos neutros en $H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$ son aquellos en la imagen de σ_*).

$\Leftarrow$) Sea $\alpha_{\cdot} : F_{\cdot}$ $G''_{\cdot}$ un 1-torsor de X sobre $G''_{\cdot}$, consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\alpha^*_{\cdot}(G_{\cdot\cdot}) : \arrow[d] & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & G'_{\cdot}\rceil G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot} \arrow[r] \arrow[d, "pr_{\cdot}"] & F_{\cdot} \arrow[d, "\alpha_{\cdot}"] \\
G_{\cdot\cdot} : \arrow[d, "\rho_{\cdot\cdot}"'] & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & G'_{\cdot}\rceil G_{\cdot} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_{\cdot} \arrow[r, "p_{\cdot}"] \arrow[d] & G''_{\cdot} \\
N'_{\cdot\cdot} : & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & G'_{\cdot}\rceil N_{\cdot} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & N_{\cdot} &
\end{tikzcd}$$

puesto que $p^*_{\cdot}(F_{\cdot}) \cong G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot}$, tenemos que $G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot}$ es un grupoide y la proyección $pr_{\cdot} : G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot} \longrightarrow G_{\cdot}$ es una fibración exacta . Si demostramos que $TORS^1\left[X,G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot}\right] \neq \emptyset$ entonces para $\beta_{\cdot} : T_{\cdot} \longrightarrow G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot}$ un torsor de X sobre $G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot}$ se tiene que la composición $pr_{\cdot}\beta_{\cdot} : T_{\cdot} \longrightarrow G_{\cdot}$ es un torsor de X sbre $G_{\cdot}$ verificandose que el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
H_{\cdot} \arrow[r, "\beta_{\cdot}"] \arrow[d, "pr_{\cdot}\beta_{\cdot}"'] & G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot} \arrow[r] & F_{\cdot} \arrow[d, "\alpha_{\cdot}"] \\
G_{\cdot} \arrow[rr, "p_{\cdot}"] & & G''_{\cdot}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y así $p_*[pr_{\cdot}\beta_{\cdot}] = [\alpha_{\cdot}]$ por lo tanto $[\alpha_{\cdot}]$ será un elemento en $Img(p_*)$.

Demostremos entonces que si $\partial_1[\alpha_{\cdot}]$ es un elemento neutro, se verifica que $TORS^1\left[X,G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot}\right] \neq \emptyset$. Notemos que el grupoide $G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot}$ es el grupoide fibra del 2-torsor $\overline{W}(\alpha^*_{\cdot}(G_{\cdot\cdot})) \longrightarrow \overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$ de X sobre $\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$ y que para demstrar que

$\mathrm{TORS}^1\left[X,\ G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot}\right] \neq \emptyset$ bastará con probar que existe un 2-torsor $\alpha'_{\cdot} : F'_{\cdot} \longrightarrow \overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$ de X en la clase de $\overline{W}(\alpha^*_{\cdot}(G_{\cdot\cdot})) \longrightarrow \overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$ es decir con $\left[\alpha'_{\cdot}\right] = \partial_1\left[\alpha_{\cdot}\right]$ verificando que $\mathrm{TORS}^1\left[X, G(F'_{\cdot})\right] \neq \emptyset$.

Por ser $\partial_1\left[\alpha_{\cdot}\right]$ un elemento neutro en $H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$ existe un 1-torsor $\eta_{\cdot} : T_{\cdot} \longrightarrow N_{\cdot}$ de X tal que $\sigma_*(\eta_{\cdot}) = \partial_1\left[\alpha_{\cdot}\right]$. Sea $\sigma_*(\eta_{\cdot}) = \alpha'_{\cdot} : E'_{\cdot} \longrightarrow \overline{W}(N'_{\cdot\cdot})$, considerando a $\eta_{\cdot}$ como un 2-torsor, su fibra es $T_{\cdot}$ y por tanto existe un morfismo de grupoides $F_{\cdot} \longrightarrow G(F'_{\cdot})$ y así una aplicación $\mathrm{TORS}^1\left[X,T_{\cdot}\right] \longrightarrow \mathrm{TORS}^1\left[X,G(F'_{\cdot})\right]$. Ahora bien, $id : T_{\cdot} \longrightarrow T_{\cdot}$ es un torsor de X sobre $T_{\cdot}$ entonces $\mathrm{TORS}^1\left[X,T_{\cdot}\right] \neq \emptyset$ implica que $\mathrm{TORS}^1\left[X,G(F'_{\cdot})\right] \neq \emptyset$ y como consecuencia $\mathrm{TORS}^1\left[X,G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot}\right] \neq \emptyset$.

$$H^1(X,G'') \xrightarrow{\ \partial_1\ } H^2(X,\overline{W}(N')) \xrightarrow{\ i_*\ } H^2(X,\overline{W}(N\ ))$$

$$\zeta \in \mathrm{Img}(\partial_1) \iff i_*(\zeta) = \text{nulo}$$

$\Longrightarrow$) Sea $\alpha_{\cdot} : F_{\cdot} \longrightarrow G''_{\cdot}$ un torsor de X , veamos que $i_*\partial_1\left[\alpha_{\cdot}\right]$ es un elemento nulo.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\alpha^*_{\cdot}(G_{\cdot\cdot}) : \arrow[d] & \cdots & G'_{\cdot}\rfloor G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot} \arrow[d] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_{\cdot}\underset{\alpha_{\cdot}}{\times}F_{\cdot} \arrow[d] \arrow[rr] & & F_{\cdot} \arrow[d, "\alpha_{\cdot}"] \\
G_{\cdot\cdot} : \arrow[d, "\rho_{\cdot\cdot}"'] \arrow[rdd, "j_{\cdot\cdot}"] & \cdots & G'_{\cdot}\rfloor G_{\cdot} \arrow[d] \arrow[rdd, hook] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_{\cdot} \arrow[d] \arrow[rr] \arrow[rdd, equal] & & G''_{\cdot} \\
N'_{\cdot\cdot} : \arrow[dd, "i_{\cdot\cdot}"'] & \cdots & G'_{\cdot}\rfloor N_{\cdot} \arrow[dd] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & N_{\cdot} \arrow[dd, equal] & & \\
& H_{\cdot\cdot} : \cdots \arrow[ld, "\rho'_{\cdot\cdot}"] & & E_{\cdot}\rfloor G_{\cdot} \arrow[ld] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & G_{\cdot} \arrow[ld, "\rho_{\cdot}"] & \\
N_{\cdot\cdot} : & \cdots & E_{\cdot}\rfloor N_{\cdot} \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & N_{\cdot} & &
\end{tikzcd}$$

donde $H_{\cdot\cdot}$ es el 2-grupoide asociado al grupoide cruzado $\mathrm{End}(G_{\cdot}) = E_{\cdot} \longrightarrow G_{\cdot}$. El siguiente diagrama conmutativo de morfismos de 2-grupoides :

$$\begin{tikzcd}
G_{\cdot\cdot} \arrow[r, hook, "j_{\cdot\cdot}"] \arrow[d, "\rho_{\cdot\cdot}"'] & H_{\cdot\cdot} \arrow[d, "\rho'_{\cdot\cdot}"] \\
N'_{\cdot\cdot} \arrow[r, hook, "i_{\cdot\cdot}"] & N_{\cdot\cdot}
\end{tikzcd}$$

induce un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^2(X,\overline{W}(G_{\cdot\cdot})) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\rho_*"'] & H^2(X,\overline{W}(H_{\cdot\cdot})) \arrow[d, "\rho'_*"] \\
H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot})) \arrow[r, "i_*"] & H^2(X,\overline{W}(N_{\cdot\cdot}))
\end{tikzcd} .$$

Notemos ahora que $i_*\partial_1\left[\alpha_{\cdot}\right] = i_*\,\rho_*\left[\alpha^*_{\cdot}(G_{\cdot\cdot}) \xrightarrow{pr} G_{\cdot\cdot}\right] = \rho'_*\, j_*\left[\alpha^*_{\cdot}(G_{\cdot\cdot}) \xrightarrow{pr} G_{\cdot\cdot}\right]$, por otra parte $\overline{W}(H_{\cdot\cdot}) = \mathrm{COSK}^1(G_{\cdot})$ y así todo elemento en la imagen de ρ'_* (en particular $i_*\partial_1\left[\alpha_{\cdot}\right]$) es un elemento nulo .

$\Longleftarrow$) Sea $\zeta \in H^2(X,\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$ tal que $i_*(\zeta)$ sea un elemento nulo de $H^2(X,\overline{W}(N_{\cdot\cdot}))$, tomemos un 2-torsor $\alpha_{\cdot} : F_{\cdot} \longrightarrow \overline{W}(N_{\cdot\cdot})$ verificando que $\left[\alpha_{\cdot}\right] = \zeta$ y que $\alpha_{\cdot} = \overline{W}(\alpha_{\cdot\cdot})$ para $\alpha_{\cdot\cdot} : F_{\cdot\cdot} \longrightarrow N'_{\cdot\cdot}$ un 1-torsor en $\mathrm{GPD}(\mathbb{C})$ tal que se tenga un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
F_{\cdot\cdot} : \arrow[d, "\alpha_{\cdot\cdot}"'] \arrow[ddr, "\beta_{\cdot\cdot}"] & & \cdot\ \cdot\ \cdot & G_\cdot(F_\cdot) \times_{COSK^o(F_\cdot)} G_\cdot(F_\cdot) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[d] \arrow[ddr] & & G_\cdot(F_\cdot) \arrow[rr, two heads] \arrow[d] \arrow[ddr] & & COSK^o(F_\cdot) \\
N'_{\cdot\cdot} : \arrow[dd, "i_{\cdot\cdot}"'] & & \cdot\ \cdot\ \cdot & G'_\cdot \,]\, N_\cdot \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd] & & N_\cdot \arrow[dd, equal] & & \\
 & H_{\cdot\cdot} : \arrow[dl] & \cdot\ \cdot\ \cdot & & E_\cdot \,]\, G_\cdot \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] & & G_\cdot \arrow[dl, "\rho_\cdot"] & \\
N_{\cdot\cdot} : & & \cdot\ \cdot\ \cdot & E_\cdot \,]\, N_\cdot \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & N_\cdot & &
\end{tikzcd}$$

(podemos encontrar este 2-torsor $\alpha_\cdot$ por ser $i_*(\zeta)$ un elemento neutro y por el teorema (1.5.9)) Notemos que $\rho'_{\cdot\cdot} : H_{\cdot\cdot} \to N_{\cdot\cdot}$ es una fibración exacta y que el cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F_{\cdot\cdot} \arrow[r, "\beta_{\cdot\cdot}"] \arrow[d, "\alpha_{\cdot\cdot}"'] & H_{\cdot\cdot} \arrow[d, "\rho'_{\cdot\cdot}"] \\
N'_{\cdot\cdot} \arrow[r, "i_{\cdot\cdot}"] & N_{\cdot\cdot}
\end{tikzcd}$$

induce un morfismo $N_{\cdot\cdot}$-invariante (utilizando (1.4.19)) :

$$\begin{tikzcd}
i_*(F_{\cdot\cdot}) \arrow[rr, "\overline{\beta}_{\cdot\cdot}"] \arrow[dr, "i_*(\alpha_{\cdot\cdot})"'] & & H_{\cdot\cdot} \arrow[dl] \\
 & N_{\cdot\cdot} &
\end{tikzcd} .$$

Utilizando ahora la adjunción $OPER(N'_{\cdot\cdot}) \underset{i^*}{\overset{i!}{\rightleftarrows}} OPER(N_{\cdot\cdot})$ el morfismo $\overline{\beta}_{\cdot\cdot}$ induce un morfismo $N'_{\cdot\cdot}$-invariante $\beta'_{\cdot\cdot}$:

$$\frac{F_{\cdot\cdot} \overset{\beta'_{\cdot\cdot}}{\dashrightarrow} i^*(H_{\cdot\cdot}) \cong G_{\cdot\cdot}}{i_*(F_{\cdot\cdot}) \xrightarrow[\overline{\beta}_{\cdot\cdot}]{} H_{\cdot\cdot}}$$

haciendo por tanto conmutar el triangulo

$$\begin{tikzcd}
F_{\cdot\cdot} \arrow[rr, "\beta'_{\cdot\cdot}"] \arrow[dr, "\alpha_{\cdot\cdot}"'] & & G_{\cdot\cdot} \arrow[dl, "\rho_{\cdot\cdot}"] \\
 & N'_{\cdot\cdot} &
\end{tikzcd} .$$

Por ser $\alpha_{\cdot\cdot}$ y $\rho_{\cdot\cdot}$ fibraciones exactas, tambien lo será $\beta'_{\cdot\cdot}$ y así $\beta'_{\cdot\cdot} : F_{\cdot} \longrightarrow G_{\cdot\cdot}$ será un 1-torsor de $COSK^o(F_\cdot)$ sobre $G_{\cdot\cdot}$, pero como $G_{\cdot\cdot} = COSK^o(G_{\cdot\cdot})$ aplicando el lema de Grothendiech ([3]) al diagrama

$$\begin{tikzcd}
G(F_\cdot) \times_{COSK^o(F_\cdot)} G(F_\cdot) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\beta'_{1\cdot}"] & G_\cdot(F_\cdot) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta_{o\cdot}"] & COSK^o(F_\cdot) \arrow[d, "\beta_{-1\cdot}"] \\
E'_\cdot \,]\, G_\cdot \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_\cdot \arrow[r] & G''_\cdot
\end{tikzcd}$$

en el que ambas sucesiones son exactas y el cuadrado de la izquierda es un pullback en $Simpl(\mathbb{C})$, tenemos que el cuadrado de la derecha será tambien un pullback y así

$F_{\cdot\cdot} = \beta'^{*}_{-1\cdot}(G_{\cdot\cdot})$.

Si $\beta'_{-1\cdot} : COSK^o(F_\cdot) \longrightarrow G''_\cdot$ fuese un 1-torsor de X sobre $G''_\cdot$ la demostración habría concluido pues claramente se tendría $\partial_1 \left[\beta'_{-1\cdot}\right] = |\alpha_\cdot|$. Si $\beta'_{-1\cdot}$ no es un 1-torsor de X, puesto que siempre es un 1-cociclo, factorizamos a $\beta'_{-1\cdot}$ por el 1-torsor de X sobre $G''_\cdot$ siguiendo el teorema (3.2.20) si denotamos a este torsor por $\eta_\cdot : T_\cdot \quad G''_\cdot$ tenemos un morfismo $G_{\cdot\cdot}$-invariante entre $\eta^*_\cdot(G_{\cdot\cdot})$ y $\beta'^{*}_{-1\cdot}(G_{\cdot\cdot})$ que induce un morfismo de 2-torsores :

$$\begin{tikzcd}
\overline{W}(\eta^*_\cdot(G_{\cdot\cdot})) \arrow[rr] \arrow[dr, "\overline{W}(\eta_\cdot)"'] & & \overline{W}(F_{\cdot\cdot}) = F_\cdot \arrow[dl, "\alpha_\cdot"] \\
 & \overline{W}(N'_{\cdot\cdot}) &
\end{tikzcd}$$

verificandose entonces que $\partial_1[\eta.] = [\alpha.]$.

Por último, la exactitud en: $H^2(X,\overline{W}(N'_{..})) \xrightarrow{i_*} H^2(X,\overline{W}(N_{..})) \xrightarrow{p_*} H^2(X,\overline{W}(N''_{..}))$ se deduce de las anteriores de la siguiente forma ; Sea $\zeta \in H^2(X,\overline{W}(N_{..}))$ y $\alpha_{..}: F_{..} \longrightarrow N_{..}$ un 1-torsor en GPD($\mathbb{C}$) de $\operatorname{cosk}^0(p)$, $p \in RE(X)$, sobre $N_{..}$ tal que $\overline{W}(\alpha_{..}) = \alpha_{.} : \overline{W}(F_{..}) = F_{.} \longrightarrow \overline{W}(N_{..})$ sea un representante de ζ (ver teorema(1..5.9)).

Para el objeto $\operatorname{cosk}^0(p)$ en GPD($\mathbb{C}$), puesto que la sucesión $N'_{..} \hookrightarrow N_{..} \twoheadrightarrow N''_{..}$ es una sucesión exacta corta de grupoides en GPD($\mathbb{C}$) tenemos una sucesión

$$\mathrm{TORS}^1\left[\operatorname{cosk}^0(p),N'_{..}\right] \xrightarrow{i_*} \mathrm{TORS}^1\left[\operatorname{cosk}^0(p),N_{..}\right] \xrightarrow{p_*} \mathrm{TORS}^1\left[\operatorname{cosk}^0(p)\ N''_{..}\right]$$

que podemos probar de una forma totalmente análoga a la que utilizamos para probar la exactitud en $H^1(X,G_{.})$ (aunque la sucesión $N'_{..} \hookrightarrow N_{..} \twoheadrightarrow N''_{..}$ no esté en las condiciones del caso A) que es exacta . Así $[\alpha_{..}] \in \operatorname{Img}(i_*) \Longleftrightarrow p_*[\alpha_{..}]$ es un elemento neutro en $\mathrm{TORS}^1\left[\operatorname{cosk}^0(p),N''_{..}\right]$ y puesto que al aplicar el funtor $\overline{W}$ a un 1-torsor en $\mathrm{TORS}^1(\operatorname{cosk}^0(p),N''_{..})$ cuya clase sea un elemento neutro en $\mathrm{TORS}^1\left[\operatorname{cosk}^0(p),N''_{..}\right]$ obtenemos un 2-torsor en $\mathrm{TORS}^2(X,\overline{W}(N''_{..}))$ cuya clase es un elemento neutro en $H^2(X,\overline{W}(N''_{..}))$, la exactitud anterior implica que $\zeta = [\alpha_{.}] \in \operatorname{Img}(i_*) \Longleftrightarrow p_*(\zeta)$ es un elemento neutro en $H^2(X,\overline{W}(N''_{..}))$.

4.1.16) Teorema (La exactitud CASO B , caso general) .

La sucesión (4.1.11)

$$\begin{tikzcd}
H^0_\varphi(X,G'_{.}) \arrow[r, "i_*"] & H^0_\varphi(X,G_{.}) \arrow[r, "p_*"] & H^0_{p_0\varphi}(X,G''_{.}) \arrow[dll, "\partial_0"'] \\
H^1_\varphi(X,G'_{.}) \arrow[r, "i_*"] & H^1_\varphi(X,G_{.}) \arrow[r, "p_*"] & H^1_{p_0\varphi}(X,G''_{.}) \arrow[dll, "\partial_1"'] \\
H^2(X,\overline{W}(N'_{..})) \arrow[r, "i_*"] & H^2(X,\overline{W}(N_{..})) \arrow[r, "p_*"] & H^2(X,\overline{W}(N''_{..}))
\end{tikzcd}$$

de conjuntos con elementos distinguidos y morfismos entre ellos es exacta en el siguiente sentido :

(i) Un elemento está en la imagen de cualquiera de los morfismos i_* sii su imagen por el correspondiente morfismo p_* es un elemento neutro.

(ii) Un elemento está en la imagen de cualquiera de los morfismos p_* sii su imagen por el correspondiente morfismo de conexión (∂_0 ó ∂_1) es un elemento neutro

(iii) Un elemento está en la imagen de ∂_0 (∂_1) sii su imagen por i_* es el elemento nulo en $H^1_\varphi(X,G'_{.})$ (es un elemento nulo en $H^2(X,\overline{W}(N'_{..}))$)

Demostración .- La demostración de este teorema es totalmente análoga a la del teorema (4.1.15) anterior. Notemos que en el único punto donde el enunciado de la exactitud varia de la del teorema (4.1.15) es en :

$$H^0_{p_0\varphi}(X,G''_{.}) \xrightarrow{\partial_0} H^1_\varphi(X,G'_{.}) \xrightarrow{i_*} H^1_\varphi(X,G_{.})$$

ahora, si $f : X \longrightarrow G''_o$ es un elemento en $H^o_{p_o\varphi}(X, G''_{\cdot})$ y $\bar{f} : X \longrightarrow C$ es el morfismo inducido por f (recordemos que $C = \mathrm{coequ}\,(f_o, f_1 : G_1 \underset{G_o}{\times} G'_1 \longrightarrow G_1)$ y que el cuadrado :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "q"] \arrow[d, "d"'] & G''_1 \arrow[d, "d_o"] \\ G_o \arrow[r, "p_o"] & G_o \end{tikzcd}$$

es un pullback), el elemento neutro $i_* \partial_o(f)$ es la clase en $H^1(X, G_{\cdot})$ del torsor $(d\,\bar{f})^*(\mathrm{DEC}(G_{\cdot})) \longrightarrow G_{\cdot}$, pero como $d\,\bar{f} = \varphi$ dicho elemento neutro es $\varphi^*(\mathrm{DEC}(G_{\cdot})) \longrightarrow G_{\cdot}$ que es el elemento nulo en $H^1_{\varphi}(X, G_{\cdot})$. //

(4.2) LA SUCESION EXACTA LARGA . -

Extenderemos en este apartado las sucesiones exactas (4.1.6) y (4.1.11) al infinito. Puesto que los tres últimos puntos de ambas sucesiones coinciden, no necesitaremos distinguir aquí entre los casos A y B .

Los morfismos de conexión en dimensiones superiores .

Definiremos ahora el morfismo de conexión

4.2.1) $$\partial_2 : H^2(X, \overline{W}(N'_{\cdot\cdot})) \longrightarrow H^3(X, K_{N_{\cdot}}(Z'_{\cdot}, 3)) \quad .$$

Como hemos dicho en repetidas ocasiones, la sucesión $N'_{\cdot\cdot} \hookrightarrow N_{\cdot\cdot} \twoheadrightarrow N''_{\cdot\cdot}$ es una sucesión exacta corta de grupoides en GPD($\mathbb{C}$) y el morfismo canónico $\rho_{\cdot\cdot} : N_{\cdot\cdot} \longrightarrow \mathrm{INT}(N_{\cdot\cdot}) = \mathrm{COSK}^o(N_{\cdot\cdot})$ nos determina , al igual que su restricción a $N'_{\cdot\cdot}$, dos grupoides cruzados generalizados. Los 2-grupoides en GPD($\mathbb{C}$) asociados a los grupoides grupoides cruzados $\rho_{\cdot\cdot} : \mathrm{End}(N'_{\cdot\cdot}) \longrightarrow \mathrm{COSK}^o(N_{\cdot\cdot})$ y $\rho_{\cdot\cdot} : \mathrm{End}(N_{\cdot\cdot}) \longrightarrow \mathrm{COSK}^o(N_{\cdot\cdot})$ serán $\mathbb{Z}'$ y $\mathbb{Z}$, siendo $\overline{W}^2(\mathbb{Z}') = K_{N_{\cdot}}(Z'_{\cdot}, 3)$ y $\overline{W}^2(\mathbb{Z}) = K_{N_{\cdot}}(Z_{\cdot}, 3)$.

Aplicando ahora los resultados obtenidos en (4. 1) a la sucesión $N'_{\cdot\cdot} \hookrightarrow N_{\cdot\cdot} \twoheadrightarrow N''_{\cdot\cdot}$ junto con el grupoide cruzado generalizado $\rho_{\cdot\cdot} : N_{\cdot\cdot} \longrightarrow \mathrm{COSK}^o(N_{\cdot\cdot})$, obtenemos para cada epimorfismo regular $p : E \twoheadrightarrow X$ un morfismo de conexión

$$\partial^p_1 : \mathrm{TORS}^1\left[\mathrm{cosk}^o(p), N''_{\cdot\cdot}\right] \longrightarrow \mathrm{TORS}^2\left[\mathrm{cosk}^o(p), \overline{W}(\mathbb{Z}')\right]$$

que se construye utilizando pullback y el funtor $\overline{W}$. Utilizando el mismo metodo, podemos definir un morfismo de "conexión"

$$\bar{\partial}^p_1 : \underline{\mathrm{Tors}}^1\left[\mathrm{cosk}^o(p), N''_{\cdot\cdot}\right] \longrightarrow \underline{\mathrm{Tors}}^2\left[\mathrm{cosk}^o(p), \overline{W}(\mathbb{Z}')\right]$$

(recordar que las categorías Tors tienen por objetos los torsores y por morfismos los morfismos simpliciales dobles "invariantes" respecto del hipergrupoide sistema de coeficientes que inducen un endomorfismo, no necesariamente la identidad,de complejossimpliciales aumentados en la aumentación) .

Puesto que la definición de $\bar\partial^p_1$ está dada mediante colímites, este será natural en la primera variable, en el siguiente sentido: Para cada morfismo $f:p \longrightarrow p$ en $RE(X)$ el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Tors}}^1\left[\mathrm{cosk}^0(p'),N''_{\cdot\cdot}\right] \arrow[r, "\bar\partial^p_1"] \arrow[d, "f^*"'] & \underline{\mathrm{Tors}}^2\left[\mathrm{cosk}^0(p'),\bar W(\mathbb{Z}')\right] \arrow[d, "f^*"] \\
\underline{\mathrm{Tors}}^1\left[\mathrm{cosk}^0(p),N''_{\cdot\cdot}\right] \arrow[r, dash, "\bar\partial^p_1"] & \underline{\mathrm{Tors}}^2\left[\mathrm{cosk}^0(p),\bar W(\mathbb{Z}')\right]
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Consecuentemente, estos morfismos $\bar\partial^p_1$ inducen un único morfismo

$$\bar\partial_1 : \mathbb{H}^1(X,N''_{\cdot\cdot}) = \varinjlim_{p\in RE(X)} \mathrm{TORS}^1\left[\mathrm{cosk}^0(p),N''_{\cdot\cdot}\right] \longrightarrow \varinjlim_{p\in RE(X)} \mathrm{TORS}^2\left[\mathrm{cosk}^0(p),\bar W(\mathbb{Z}')\right] = \mathbb{H}^2(X,\bar W(\mathbb{Z}')$$

definimos entonces el morfismo ∂_2 como la composición

$$\begin{tikzcd}
H^2(X,\bar W(N''_{\cdot\cdot})\,) \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[ddrr, "\partial_2"'] & \mathbb{H}^1(X,N''_{\cdot\cdot}) \arrow[r, dash, "\bar\partial_1"] & \mathbb{H}^2(X,\bar W(\mathbb{Z}') \arrow[d, "\Omega"] \\
 & & \mathrm{TORS}^3\left[X,\bar W^2(\mathbb{Z}')\right] \arrow[d, equal] \\
 & & H^3(X,K_{N_\cdot}(Z'_\cdot,3)\,)
\end{tikzcd}$$

donde el isomorfismo $\Phi : H^2(X,\bar W(N''_{\cdot\cdot})\,) \longrightarrow \mathbb{H}^1(X,N''_{\cdot\cdot})$ está dado por el teorema(1.5.9) y el morfismo Ω lo definimos en (1.5.12) . Notemos que la naturalidad de los morfismos ∂^p_1 implican la naturalidad de ∂_2 .

Calculemos ahora explicitamente este morfismo de conexión ∂_2 : Sea $\alpha_\cdot : F_\cdot \longrightarrow \bar W(N''_{\cdot\cdot})$ un 2-torsor de X sobre $\bar W(N''_{\cdot\cdot})$ y denotemos por $\tilde\alpha$ al morfismo composición $\tilde\alpha : F_2 \xrightarrow{\alpha_2} E/E'\times_{G_0}\bar N_1\times_{G_0}\bar N_1 \xrightarrow{pr} E/E'$. Recordemos que las condiciones de cociclo para $\alpha_\cdot$ son :

(CC1) $\quad \rho(\tilde\alpha(x_0,x_1,x_2)\,)\cdot\alpha_1(x_0)\cdot\alpha_1(x_2) = \alpha_1(x_1)$

(CC2) $\quad \left(\tilde\alpha(x_0,y_1,y_2)^{-1}\cdot\tilde\alpha(x_1,y_1,z_2)\cdot\tilde\alpha(x_0,x_1,x_2)\,\right)^{\alpha_1(x_0)^{-1}} = \tilde\alpha(x_2,y_2,z_2)$

para todo elemento

$$\zeta = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & y_1 & y_2 \\ x_1 & y_1 & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \in \Delta_3(F_\cdot) = F_3$$

(ver nota (3.2.9)) . Sea $\bar F_\cdot$ el objeto pullbacken Simpl($\mathbb{C}$)

$$\begin{tikzcd}
\bar F_\cdot : \arrow[d] \arrow[dd] & \cdots & \bar F_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] \arrow[dd] & \bar F_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] \arrow[dd] & F_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\alpha_0"] \arrow[dd, equal] & X \\
\bar W(N_{\cdot\cdot}) : \arrow[dd] & \cdots & E\times_{G_0}N_1\times_{G_0}N_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[dd] & N_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dd] & G_0 \arrow[dd, equal] & \\
F_\cdot : \arrow[d] & \cdots & F_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & F_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & F_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\alpha_0"] & X \\
\bar W(N''_{\cdot\cdot}) : & \cdots & E/E'\times_{G_0}N_1\times_{G_0}N_1 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & N_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

Los elementos de $\overline{F}_2$ serán pares de ternas $((e,n_o,n_1),(x_o,x_1,x_2)) \in (E \times_{G_o} N_1 \times_{G_o} N_1) \times F_2$ tales que $\alpha_1(x_o) = \bar{n}_o$, $\alpha_1(x_2) = \bar{n}_1$ y $\bar{e} = \widehat{\alpha}(x_o,x_1,x_2)$; donde $\bar{n}_i, i=0,1$, y $\bar{e}$ serán los elementos imágenes por los morfismos $N_1 \twoheadrightarrow \overline{N}_1$ y $E \twoheadrightarrow E/E'$ de n_i y e .

Los morfismos $d_i : \overline{F}_2 \longrightarrow \overline{F}_1$ estan dados por :

$$d_o((e,n_o,n_1),(x_o,x_1,x_2)) = (n_o,x_o)$$

$$d_1((e,n_o,n_1),(x_o,x_1,x_2)) = (\rho(e)\, n_o n_1 , x_1)$$

$$d_2((e,n_o,n_1),(x_o,x_1,x_2)) = (n_1,x_2) \quad ,$$

notemos que $\overline{\rho(e)\, n_o n_1} = \overline{\rho}(\bar{e})\bar{n}_o\bar{n}_1 = \overline{\rho}(\widehat{\alpha}(x_o,x_1,x_2))\alpha_1(x_o)\alpha_1(x_2) = \alpha_1(x_1)$ por la condición de cociclo (CC1) . Un elemento genérico ζ de $\Delta_3(\overline{F}.)$ será de la forma

$$\zeta = ((e_o,n_o,n_1),(e_1,n_o,n_2),(e_2,\rho(e_o)n_on_1,n_1^{-1}\rho({}^{n_o^{-1}}(e_o^{-1}e_2^{-1}e_1))n_2),(e_3,n_1,n_1^{-1}\rho({}^{n_o^{-1}}(e_o^{-1}e_2^{-1}e_1)n_2), t)$$

$$\text{donde} \quad t = \begin{pmatrix} x_o & x_1 & x_2 \\ x_o & y_1 & y_2 \\ x_1 & y_1 & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \in \Delta_3(F.) = F_3$$

satisfaciendo : $\bar{e}_o = \widehat{\alpha}(x_o,x_1,x_2)$, $\bar{e}_1 = \widehat{\alpha}(x_o,y_1,y_2)$, $\bar{e}_2 = \widehat{\alpha}(x_1,y_1,z_2)$, $\bar{e}_3 = \widehat{\alpha}(x_2,y_2,z_2)$ y $e_3\, {}^{n_o^{-1}}(e_o^{-1}e_2^{-1}e_1) \in Z$. Ahora, puesto que

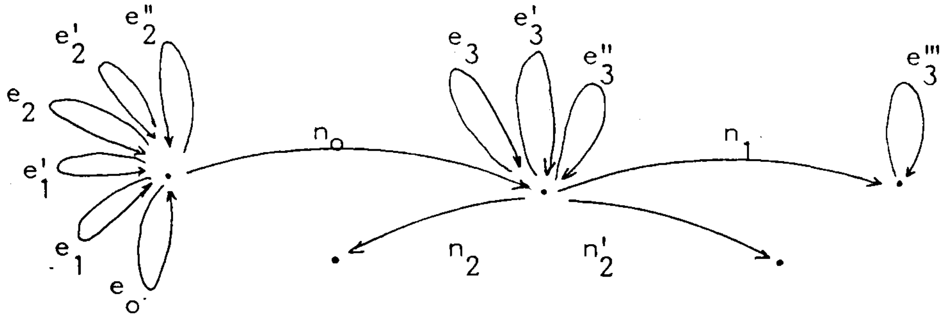
$$\overline{e_3\, {}^{n_o^{-1}}(e_o^{-1}e_2^{-1}e_1)} = \widehat{\alpha}(x_2,y_2,z_2)\, {}^{\widehat{\alpha}_1(x_o)^{-1}}(\widehat{\alpha}(x_o,x_1,x_2)^{-1}\widehat{\alpha}(x_1,y_1,z_2)^{-1}\widehat{\alpha}(x_o,y_1,y_2))$$

es un elemento trivial en E/E', tenemos que $e_3\, {}^{n_o^{-1}}(e_o^{-1}e_2^{-1}e_1)$ es un elemento en E' y por tanto en Z' .

Definimos entonces $\widehat{\beta} : \Delta_3(\overline{F}.) \longrightarrow Z'$ por $\widehat{\beta}(t) = {}^{n_o}(e_3)\, e_o^{-1}e_2^{-1}e_1$, veamos que este morfismo verifica la condición (3-CC2) de cociclo (ver (3.2.15)) : Un elemento en $\mathrm{COSK}^2(\overline{F}.)_4$ estará dado por una matriz:

$$\begin{pmatrix} t_o \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_o,n_o,n_1) & (e_1,n_o,n_2) & (e_2,*,*) & (e_3,*,*) & \zeta_o \\ (e_o,n_o,n_1) & (e'_1,n_o,n'_2) & (e'_2,*,*) & (e'_3,*,*) & \zeta_1 \\ (e_1,n_o,n_2) & (e'_1,n_o,n''_2) & (e''_2,*,*) & (e''_3,*,*) & \zeta_2 \\ (e_2,\rho(e_o)n_on_1,n_1^{-1}\rho({}^{n_o^{-1}}(e_o^{-1}e_2^{-1}e_1)n_2) & (e'_2,*,*) & (e''_2,*,*) & (e'''_3,*,*) & \zeta_3 \\ (e_3,n_1,n_1^{-1}\rho({}^{n_o^{-1}}(e_o^{-1}e_2^{-1}e_1)n_2) & (e'_3,*,*) & (e''_3,*,*) & (e'''_3,*,*) & \zeta_4 \end{pmatrix}$$

donde " * " denota a los corespondientes elementos de N_1 determinados por los dos elementos de cada fila y $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ es un elemento de $F_4 = \mathrm{COSK}^1(F.)_4$



El producto alternado $^{n_0}(\breve{\beta}(\xi_4))\cdot\breve{\beta}(\xi_3)^{-1}\cdot\breve{\beta}(\xi_2)\cdot\breve{\beta}(\xi_1)^{-1}\cdot\breve{\beta}(\xi_0) =$

$$= {}^{(n_0n_1)}(e_3''')\ {}^{n_0}(e_3^{-1}e_3''^{-1}e_3')\ (e_2'^{-1}e_2''\,e_2)\ {}^{(\rho(e_0)n_0n_1)}(e_3'''^{-1})\ {}^{n_0}(e_3'')\ (e_1^{-1}e''^{-1}e_1')\ (e_1'^{-1}e_2'e_0)\ {}^{n_0}(e_3'^{-1})$$

$${}^{n_0}(e_3)\ (e_0^{-1}e_2^{-1}e_0) \;=\; s\,d_0(n_0)$$

(para probar la última igualdad bastará con utilizar que la acción de N. sobre Z'. es casi trivial y que Z'. es un objeto grupo abeliano). Así $\breve{\beta}$ verifica la condición de cociclo (3-CC2), y podemos entonces definir $\beta.: \mathrm{COSK}^2(\overline{F}.) —— K_{N.}(Z.,3)$ por :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{COSK}^2(\overline{F}.): \arrow[d, "\beta."] & \dots & \Delta_3(\overline{F}.) \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] \arrow[d, "\beta_3"] & \overline{F}_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "\beta_2"] & \overline{F}_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, "\beta_1=pr"] & \overline{F}_0=F_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\beta_0=\alpha_0"] & X \\
K_{N.}(Z'.,3): & \dots & Z'\underset{G_0}{\times}\Delta_3 \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Delta_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & N_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

$\beta_0 = \alpha_0 : \overline{F}_0 = F_0 \longrightarrow G_0$, $\beta_1 = pr : \overline{F}_1 = F_1 \underset{N_0}{\times} N_1 \longrightarrow N_1$, $\beta_2 : \overline{F}_2 \longrightarrow \Delta_2$ por

$\beta_2((e,n_0,n_1),(x_0,x_1,x_2)) = (n_0, \rho(e)\,n_0n_1, n_1)$ y $\beta_3 = (\breve{\beta}, \beta_3') : \Delta_3(\overline{F}.) \longrightarrow Z'\underset{G_0}{\times}\Delta_3$

con $\beta_3' : \Delta_3(\overline{F}.) \longrightarrow \Delta_3$ el único morfismo inducido por β_2 .

Por otra parte se tiene que $\mathrm{COSK}^2(\overline{F}.)$ es asferical y que un elemento $\xi \in \Delta_3(\overline{F}.)$ queda totalmente determinado por $\breve{\beta}(\xi)$ junto cualesquiera tres elementos del conjunto $\{d_0(\xi), d_1(\xi), d_2(\xi), d_3(\xi)\}$ y por tanto $\beta.$ es un 3-torsor de X sobre $K_{N.}(Z'.,3)$, siendo

$$\partial_2[\alpha.] = [\beta.] \quad .$$

Notemos que si $\alpha.: F. \longrightarrow \overline{W}(N''.)$ es un torsor que determina un elemento nulo $\chi = [\alpha.]$ en $H^2(X, \overline{W}(N''.))$, entonces el 1-torsor en GPD($\mathbb{C}$) de $\mathrm{COSK}^0(F.)$ sobre N''. asociado a $\alpha.$ (usando el teorema(1.5.9)) es escindido y por tanto se aplica mediante

$$\overline{\partial}_1^{\,d_0} : \underline{\mathrm{Tors}}^1\left[\mathrm{COSK}^0(F.), N''.\right] \longrightarrow \underline{\mathrm{Tors}}^1\left[\mathrm{COSK}^0(F.), \overline{W}(\mathbb{Z}')\right]$$

en un elemento neutro y la clase de este elemento neutro en $\mathbb{H}^2(X, \overline{W}(\mathbb{Z}'))$ se aplica mediante Ω en un elemento "neutro = nulo" en $H^3(X, K_{N.}(Z'.,3))$, así ∂_2 aplica elementos nulos en elementos nulos=neutros .

A continuación definiremos los morfismos de conexión

4.2.2) $$\partial_n : H^n(X, K_{N_\bullet}(Z_\bullet/Z'_\bullet, n)) \longrightarrow H^{n+1}(X, K_{N_\bullet}(Z'_\bullet, n+1))$$

para $n > 2$:

Si consideramos la acción casi trivial de $N_\bullet$ sobre el grupo abeliano $Z'_\bullet \times_{G_0} Z_\bullet$ en $\mathbb{C}/G_0$, inducida por las acciones de $N_\bullet$ sobre $Z'_\bullet$ y $Z_\bullet$, podemos definir tambien los n-hipergrupoides $K_{N_\bullet}(Z'_\bullet \times_{G_0} Z_\bullet, n)$. Además los morfismos de objetos grupos en $\mathbb{C}/G_0$ $u, v : Z'_\bullet \times_{G_0} Z_\bullet \quad Z_\bullet$ definidos por $u(z',z) = z$ y $v(z',z) = z'z$, inducen morfismos de n-hipergrupoides $u_\bullet, v_\bullet : K_{N_\bullet}(Z'_\bullet \times_{G_0} Z_\bullet, n) \longrightarrow K_{N_\bullet}(Z_\bullet, n)$ verificandose que la sucesión en n-HPGPD($\mathbb{C}$)

4.2.3)
$$\begin{tikzcd}
K_{N_\bullet}(Z'_\bullet \times_{G_0} Z_\bullet, n) \arrow[r, shift left, "u_\bullet"] \arrow[r, shift right, "v_\bullet"'] & K_{N_\bullet}(Z_\bullet, n) \arrow[r, two heads] & K_{N_\bullet}(Z_\bullet/Z'_\bullet, n) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
Z'_\bullet \times_{G_0} Z_\bullet \times_{G_0} \Delta_n \arrow[r, shift left, "u \times id"] \arrow[r, shift right, "v \times id"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & Z_\bullet \times_{G_0} \Delta_n \arrow[r, two heads] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & Z_\bullet/Z'_\bullet \times_{G_0} \Delta_n \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \arrow[d, phantom, "\cdots"] \\
\Delta_{n-1} \arrow[r, equal] & \Delta_{n-1} \arrow[r, equal] & \Delta_{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
N_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & N_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & N_1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
G_0 \arrow[r, equal] & G_0 \arrow[r, equal] & G_0
\end{tikzcd}$$

es exacta en el sentido de Barr y que

(4.2.4)
$$\begin{tikzcd}
K_{N_\bullet}(Z'_\bullet \times_{G_0} Z_\bullet, n) \arrow[r, shift left, "u_\bullet"] \arrow[r, shift right, "v_\bullet"'] \arrow[d, "pr"] & K_{N_\bullet}(Z_\bullet, n) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "pr"] & K_{N_\bullet}(Z_\bullet/Z'_\bullet, n) \\
K_{N_\bullet}(Z'_\bullet, n) \arrow[r, "d_0 = d_1 = pr"'] & \mathrm{COSK}^1(N_\bullet) &
\end{tikzcd}$$

es un 1-torsor de $K_{N_\bullet}(Z_\bullet/Z'_\bullet, n)$ en n-HPGPD($\mathbb{C}$) .

Notemos que $K_{N_\bullet}(Z'_\bullet, n) \xrightarrow{d_0 = d_1 = pr} \mathrm{COSK}^1(N_\bullet)$ es un (1,n)-grupoide en $\mathbb{C}$ tal que $\overline{W}(K_{N_\bullet}(Z'_\bullet, n) \longrightarrow \mathrm{COSK}^1(N_\bullet)) = K_{N_\bullet}(Z'_\bullet, n+1)$ (ver (1.3.28)) .

Sea $\alpha_\bullet : F_\bullet \longrightarrow K_{N_\bullet}(Z_\bullet/Z'_\bullet, n)$ un n-torsor de X, considerando a $F_\bullet = \mathrm{COSK}^{n-1}(F_\bullet)$ como un n-hipergrupoide, si levantamos por pullback el 1-torsor (4.2.4) via $\alpha_\bullet$ obtenemos un 1-torsor en n-HPGPD($\mathbb{C}$) de $F_\bullet$

(4.2.5)
$$\begin{tikzcd}
K_{N_\bullet}(Z'_\bullet \times_{G_0} Z_\bullet, n) \times_{\alpha_\bullet} F_\bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & K_{N_\bullet}(Z_\bullet, n) \times_{\alpha_\bullet} F_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & F_\bullet \arrow[d, "\alpha_\bullet"] \\
K_{N_\bullet}(Z'_\bullet \times_{G_0} Z_\bullet, n) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & K_{N_\bullet}(Z_\bullet, n) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & K_{N_\bullet}(Z'_\bullet/Z_\bullet, n) \\
K_{N_\bullet}(Z'_\bullet, n) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & COSK^1(N_\bullet) &
\end{tikzcd}$$

Aplicando el funtor $\overline{W}$ a este torsor obtenemos (ver proposición (1.5.16)) un (n+1)-torsor $\beta_\bullet : \overline{F}_\bullet \longrightarrow K_{N_\bullet}(Z'_\bullet, n+1)$ de X sobre $K_{N_\bullet}(Z'_\bullet, n+1)$ que tiene por (n-1) -truncación $tr^{n-1}(F_\bullet)$, definimos :

$$\partial_n [\alpha_\bullet] = [\beta_\bullet] \quad .$$

Calculemos explicitamente este morfismo de conexión ∂_n : Sea $\alpha_\bullet : F_\bullet \longrightarrow K_{N_\bullet}(Z_\bullet/Z'_\bullet, n)$ un n-torsor y denotemos por $\widehat{\alpha}$ la composición : $F_n \xrightarrow{\alpha_n} Z/Z' \times_{G_0} \Delta_n \xrightarrow{pr} Z/Z'$. Entonces $\alpha_n(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (\widehat{\alpha}(x_0, x_1, \ldots, x_n), \alpha_{n-1}(x_0), \ldots, \alpha_{n-1}(x_n))$, la condición (nCC2) de cociclo nos dice que

$$A\left(^{(\alpha_1 d_0^{n-1}(\zeta_0))}(\widehat{\alpha}(\zeta_{n+1}), \widehat{\alpha}(\zeta_n), \ldots, \widehat{\alpha}(\zeta_0)\right) = s\alpha_0 d_{n+1}(\zeta_0)$$

para cualquier elemento $(\zeta_{n+1}, \zeta_n, \ldots, \zeta_0)$ en F_{n+1} .

consideremos el 1-torsor en $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd}
\overline{F}_n \times_{F_n} \overline{F}_n \arrow[r, dashed, shift left] \arrow[r, dashed, shift right] \arrow[d, dashed] & \overline{F}_n \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & F_n \arrow[d, dashed, "\alpha_n"] \\
Z' \times_{G_0} Z \times \Delta_n \arrow[r, shift left, "u \times id"] \arrow[r, shift right, "v \times id"'] \arrow[d, "pr"'] & Z \times_{G_0} \Delta_n \arrow[r, two heads] \arrow[d, "pr"] & Z/Z' \times_{G_0} \Delta_n \\
Z' \times_{G_0} \Delta_n \arrow[r, "d_0 = d_1 = pr"] & \Delta_n &
\end{tikzcd}$$

levantandolo por bullback via el morfismo α_n obtenemos un 1-torsor de F_n que será el 1-torsor asociado al (n+1)-torsor $\beta_\bullet$, que estará dado por ;

$$\begin{tikzcd}
\overline{F}_\bullet : \arrow[dd, "\beta_\bullet"'] & \cdots & \Delta_{n+1}(\overline{F}_\bullet) \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right] \arrow[dd, "\beta_{n+1}"'] & \overline{F}_n \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, phantom, "\vdots"] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr] \arrow[dd, "\beta_n"'] & & F_{n-1} \arrow[dd, "\beta_{n-1} = \alpha_{n-1}"] & \cdots & F_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dd, "\beta_1 = \alpha_1"] & F_0 \arrow[r, two heads] \arrow[dd, "\beta_0 = \alpha_0"] & X \\
& & & & F_n \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, phantom, "\vdots"] \arrow[ur, shift right] & & & & & \\
K_{N_\bullet}(Z'_\bullet, n+1): & \cdots & Z' \times_{G_0} \Delta_{n+1} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right] & \Delta_n \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, phantom, "\vdots"] \arrow[rr, shift right] & & \Delta_{n-1} & & N_1 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & G_0 &
\end{tikzcd}$$

donde un elemento genérico en $\overline{F}_n$ está dado por un par $(z, (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in Z \times F_n$ tal que $\widehat{\alpha}(x_0, \ldots, x_n) = \overline{z} \in Z/Z'$, el morfismo β_n está dado por $\beta_n(z, (x_0, \ldots, x_n)) = (\beta_{n-1}(x_0), \ldots, \beta_{n-1}(x_n))$. Un elemento genérico en $\Delta_{n+1}(F_\bullet)$ será $((z_0, \zeta_0), (z_1, \zeta_1), \ldots, (z_{n+1}, \zeta_{n+1}))$ con (z_i, ζ_i) en $\overline{F}_n$ y $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1})$ en $F_{n+1} = \Delta_{n+1}(F_\bullet)$, la condición de cociclo para nos dice que

$$A\left(^{(\alpha_1 d_0^{n-1}(\zeta_0))}(z_{n+1}), z_n, \ldots, z_0\right) \in Z'$$ puesto que su clase en Z/Z' es trivial.

Así $\beta_{n+1} = (\breve{\beta}, \beta'_{n+1})$ con

$$\hat{\beta}((z_0,\zeta_0), \dots, (z_{n+1},\zeta_{n+1})) = \mathbf{A}(\,{}^{(\alpha_1 d_0^{n-1}(\zeta_0))}(z_{n+1}), z_n, \dots, z_0)$$

y $\beta'_{n+1}\colon \Delta_{n+1}(F.) \longrightarrow \Delta_{n+1}$ el único morfismo inducido por β_n .

Notemos que cada elemento $\zeta \in \Delta_{n+1}(\bar{F}.)$ queda totalmente determinado por el elemento $\breve{\beta}(\zeta)$ de Z' y n componentes cualesquiera de la (n+1)-upla que define a ζ , así $\beta.$ es un (n+1)-torsor .

(4.2.6) <u>Naturalidad</u> .-

Si $f\colon Y \longrightarrow X$ es un morfismo en $\mathbb{C}$, puesto que tanto en la definición de los morfismos f^* como en la definición del morfismo de conexión ∂_n solo se utilizan colímites, se tiene que los cuadrados

$$\begin{tikzcd}
H^n(X,K_{N.}(Z./Z'.,n)) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f^*"'] & H^{n+1}(X,K_{N.}(Z'.,n+1)) \arrow[d, "f^*"'] \\
H^n(Y,K_{N.}(Z./Z'.,n)) \arrow[r, "\partial_n"] & H^{n+1}(Y,K_{N.}(Z'.,n+1))
\end{tikzcd}$$

conmutan para todo $n > 2$.

Por otra parte, dado un diagrama conmutativo de sucesiones exactas corta de grupoides

$$\begin{tikzcd}
G'. \arrow[r, hook] \arrow[d, "f'"'] & G. \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f"'] & G''. \arrow[d, "f''"] \\
H'. \arrow[r, hook] & H. \arrow[r, two heads] & H''.
\end{tikzcd}$$

junto con un morfismo de grupoides cruzados generalizados

$$\begin{tikzcd}
G. \arrow[r] \arrow[d, "f."'] & N. \arrow[d, "g."] \\
H. \arrow[r, "\theta."] & M.
\end{tikzcd}$$

en las condiciones de la proposición(4.1.14), se tiene para cada $n > 2$ un diagrama conmutativo en n-HPGPD($\mathbb{C}$)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& K_{N.}(Z'.\times_{G_0} Z.,n) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] \arrow[dd] & & K_{N.}(Z.,n) \arrow[rr, two heads] \arrow[dl] \arrow[dd] & & K_{N.}(Z./Z'.,n) \arrow[dl] \\
K_{M.}(\bar{Z}'.\times_{H_0} \bar{Z}.,n) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dd] & & K_{M.}(\bar{Z}.,n) \arrow[rr] \arrow[dd] & & K_{M.}(\bar{Z}./\bar{Z}'.,n) & \\
& K_N(Z',n) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dl] & & COSK^0(N.) \arrow[dl] & & \\
K_{M.}(\bar{Z}'.,n) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & COSK^0(M.) & & &
\end{tikzcd}$$

donde $\bar{Z}'. = Ker(\theta./H'.)$, $\bar{Z}. = Ker(\theta.)$ y los planos verticales se obtienen como en (4.2.4) , que induce un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^n(X,K_{N.}(Z./Z'.,n)) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d] & H^{n+1}(X,K_{N.}(Z'.,n+1)) \arrow[d] \\
H^n(X,K_{M.}(\bar{Z}./\bar{Z}'.,n)) \arrow[r, "\partial_n"] & H^{n+1}(X,K_{M.}(\bar{Z}'.,n+1))
\end{tikzcd}$$

.

Notemos que la naturalidad de los morfismos de conexión ∂_n implica que los triangulos

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, \prod_o(N_\bullet)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
H^n(X,K_{N_\bullet}(Z_\bullet/Z'_\bullet,n)) \arrow[rr, "\partial_n"] & & H^{n+1}(X, K_{N_\bullet}(Z'_\bullet,n+1))
\end{tikzcd}$$

son conmutativos y así los morfismos ∂_n llevan elementos neutros en elementos neutros.

Estos morfismos están definidos de forma totalmente analoga a los dados por Glenn en el caso abeliano, coincidiendo con ellos si la sucesión exacta corta de grupoides es la asociada a una sucesión exacta corta de objetos grupos abelianos y el grupoide cruzado generalizado es el de los automorfismos interiores .

La exactitud .-

(4.2.7) Teorema (La sucesión exacta larga) .

Las sucesiones exactas (4.1.6) y (4.1.11) se extienden a sucesiones exactas largas

$$\begin{tikzcd}
H^o_{(\varphi)}(X,G'_\bullet) \arrow[r] & H^o_{(\varphi)}(X,G_\bullet) \arrow[r] & H^o_{(p_o\varphi)}(X,G''_\bullet) \arrow[dll, "\partial_o"'] \\
H^1_{(\varphi)}(X,G'_\bullet) \arrow[r] & H^1_{(\varphi)}(X,G_\bullet) \arrow[r] & H^1_{(p_o\varphi)}(X,G''_\bullet) \arrow[dll, "\partial_1"'] \\
H^2(X,\overline{W}(N'_{\bullet\bullet})) \arrow[r] & H^2(X,\overline{W}(N_{\bullet\bullet})) \arrow[r] & H^2(X,\overline{W}(N''_{\bullet\bullet})) \arrow[dll, "\partial_2"'] \\
H^3(X,K_{N_\bullet}(Z'_\bullet,n)) \arrow[r] & H^3(X,K_{N_\bullet}(Z_\bullet,n)) \arrow[r] & H^3(X,K_{N_\bullet}(Z_\bullet/Z'_\bullet,n)) \arrow[dll, dotted, dash] \\
H^n(X,K_{N_\bullet}(Z'_\bullet,n)) \arrow[r] & H^n(X,K_{N_\bullet}(Z_\bullet,n)) \arrow[r] & H^n(X,K_{N_\bullet}(Z_\bullet/Z'_\bullet,n)) \arrow[dll, "\partial_n"'] \\
H^{n+1}(X,K_{N_\bullet}(Z'_\bullet,n+1)) \arrow[r] & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

donde la exactitud a partir de $H^2(X,\overline{W}(N''_{\bullet\bullet}))$ está dada en términos de elementos neutros .

Demostración .- Probemos la exactitud

$$H^2(X,\overline{W}(N_{\bullet\bullet})) \xrightarrow{p_*} H^2(X,\overline{W}(N''_{\bullet\bullet})) \xrightarrow{\partial_2} H^3(X,K_{N_\bullet}(Z'_\bullet,3))$$

$$\zeta \in \mathrm{Img}(p_*) \iff \partial_2(\zeta) = \text{neutro}$$

$\Rightarrow$) Sea $\alpha_{\bullet\bullet}: F_{\bullet\bullet} \longrightarrow N_{\bullet\bullet}$ un 1-torsor en GPD($\mathbb{C}$) de $\mathrm{cosk}^o(p)$, $p \in RE(X)$, tal que $\overline{W}(\alpha_{\bullet\bullet}) = \alpha_\bullet : \overline{W}(F_{\bullet\bullet}) = F_\bullet \longrightarrow \overline{W}(N_{\bullet\bullet})$ sea un elemento representante de ζ . Puesto que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{TORS}^1\left[\mathrm{cosk}^o(p),N_{\bullet\bullet}\right] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{TORS}^1\left[\mathrm{cosk}^o(p),N''_{\bullet\bullet}\right] \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d] & \mathrm{TORS}^2\left[\mathrm{cosk}^o(p),\overline{W}(\mathbb{Z}')\right] \arrow[d, "j"] \\
\mathbb{H}^1(X,N_{\bullet\bullet}) \arrow[d, "\overline{W}^*"'] & \mathbb{H}^1(X,N''_{\bullet\bullet}) \arrow[d, "\overline{W}^*"'] & \mathbb{H}^2(X,\overline{W}(\mathbb{Z}')) \arrow[d, "\Omega"] \\
H^2(X,\overline{W}(N_{\bullet\bullet})) \arrow[r] & H^2(X,\overline{W}(N''_{\bullet\bullet})) \arrow[r] & H^3(X,K_{N_\bullet}(Z'_\bullet,3))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo y Ωj lleva elementos neutros de $\mathrm{TORS}^2\left[\mathrm{cosk}^0(p),\overline{W}(\mathbb{Z}')\right]$ en elementos neutros de $H^3(X,K_{N_\bullet}(Z'_\bullet,3))$ tenemos que $\partial_2\, p_*(\xi)$ es un elemento neutro .

$\Leftarrow$) Sea $\xi \in H^2(X,\overline{W}(N''_{\bullet\bullet}))$ tal que $\partial_2(\xi)$ es un elemento neutro . Podemos entonces elegir un 1-torsor en GPD($\mathbb{C}$) $\alpha_{\bullet\bullet}: F_{\bullet\bullet} \rightarrow N''_{\bullet\bullet}$ de $\mathrm{cosk}^0(p)$, $p \in RE(X)$, tal que ; $\overline{W}(\alpha_{\bullet\bullet})$ sea un representante de ξ, $\partial_1([\alpha_{\bullet\bullet}])$ sea un elemento neutro en $\mathrm{TORS}^2\left[\mathrm{cosk}^0(p),\overline{W}(\mathbb{Z}')\right]$ y $\Omega(\left[\!\left[\partial_1([\alpha_{\bullet\bullet}])\right]\!\right]) = \partial_2(\xi)$. Aplicando entonces el teorema (4.1.16) de la exactitud en dimensiones inferiores , existe un 1-torsor en GPD($\mathbb{C}$) $\alpha'_{\bullet\bullet}: F'_{\bullet\bullet} \longrightarrow N''_{\bullet\bullet}$ de $\mathrm{cosk}^0(p)$ tal que $p_*([\alpha'_{\bullet\bullet}]) = [\alpha_{\bullet\bullet}]$ y así $p_*\left(\left[\overline{W}(\alpha'_{\bullet\bullet})\right]\right) = \xi$.

La demostración de la exactitud en los restantes puntos es totalmente analoga a la dada en el caso abeliano por Glenn en [32].

CAPITULO 5 .- EJEMPLOS .

Como dijimos en la introducción, el problema que da lugar a la cohomología no abeliana es el de medir la exactitud del funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, -)$, para X un objeto cualquiera de $\mathbb{C}$, extendiendo (de la manera apropiada) la sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,G'')$$

asociada a una sucesión exacta corta de objetos grupo $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$ en $\mathbb{C}$.

Hemos tomado $\mathbb{C}$ una categoría exacta de Barr con objeto terminal $\mathbb{1}$ para así englobar tanto las teorías más importantes de cohomología abeliana (en los casos algebraico y topológico), como las principales "aproximaciones" dadas en el caso no abeliano.

Dedicaremos este capitulo a particularizar nuestra solución comparando así con las soluciones ya conocidas.

(5.1) EL CASO ABELIANO .-

Dada una sucesión de objetos grupo abeliano en $\mathbb{C}$ (categoría exacta de Barr con objeto terminal $\mathbb{1}$) : $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$. P. Glenn en su tesis [31] obtiene, para cada objeto X de $\mathbb{C}$, una sucesión exacta larga en cohomología abeliana:

$$1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,A'') \longrightarrow H^1(X,A') \longrightarrow H^1(X,A)$$
$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(X,A'') \longrightarrow H^n(X,A') \longrightarrow H^n(X,A) \longrightarrow H^n(X,A'') \longrightarrow \cdots$$

que es exacta de grupos abelianos. donde los grupos de cohomología $H^n(X,A)$ (analogamente para A' y A'') estan dados por clases de Yoneda de n-torsores de X los complejos de Eilenberg-MacLane $K(A,n)$, $n \quad 1$, así

$$H^n(X,A) = \mathrm{TORS}^n \left[X, K(A,n)\right] = H^n(X,K(A,n)).$$

Consideremos la sucesión exacta corta de grupoides $K(A',1) \hookrightarrow K(A,1) \twoheadrightarrow K(A'',1)$, asociada a la sucesión de objetos grupo $A' \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A''$ (que está en el caso A ver (4.1) pg193) . Puesto que el grupoide $K(A,1)$ es abeliano se tiene que $Z(K(A,1)) = = \mathrm{End}(K(A,1)) = K(A,1)$ y por tanto $\mathrm{INT}(K(A,1)) = K(\mathrm{Int}(A),1) = K(\mathbb{1},0)$, así el grupoide cruzado de los automorfismos interiores de $K(A,1)$ está dado por el morfismo "cero" $K(A,1) \longrightarrow K(\mathbb{1},0)$, con la acción "trivial" de $K(\mathbb{1},1)$ sobre $K(A,1)$. Este grupoide cruzado es claramente conexo y así podemos aplicar el teorema (4.2.7), obteniendo una sucesión exacta larga en la cohomología. Veamos quienes serán los n-hipergrupoides sistemas de coeficientes que obtenemos siguiendo nuestros métodos: El 2-grupoide asociado al grupoide cruzado $K(A,1) \longrightarrow K(\mathbb{1},0)$ es claramente $K(K(A,1),1)$ y así (ver (1.3.27)) se tiene que $\overline{W}(K(K(A,1),1) = K(A,2)$. Analogamente el 2-grupoide asociado al grupoide cruzado $K(A',1) \longrightarrow K(\Pi,0)$ será $K(K(A',1),1)$ y el 2-grupoide cociente de $K(K(A,1),1)$ por $K(K(A',1),1)$ es $K(K(A'',1),1)$, así los 2-hipergrupoides sistemas de coeficientes son $K(A',2)$,$K(A,2)$ y $K(A'',2)$. En dimensiones superiores se tiene que $K_{K(\Pi,0)}(A',n) = K(A',n)$, $K_{K(\Pi,0)}(A,n) = K(A,n)$ y $K_{K(\Pi,0)}(K(A'',n) = K(A'',n)$, por tanto estos hipergrupoides sistemás de coeficientes coinciden con los utilizados por Glenn en este caso abeliano , coincidiendo tambien los "conjuntos " de cohomología. Ademas (ver (3 . 1 . 25)), los elementos neutros en $H^1(X,K(A,1))$ se obtienen levantando por pullback el 1-torsor del objeto terminal Π, $DEC(K(A,1)) \longrightarrow K(A,1)$ via morfismos en $Hom_{\mathbb{C}}(X,\Pi)$ y luego tomando clases de isomorfismo. Por lo tanto, al existir solamente un elemento en $Hom_{\mathbb{C}}(X,\Pi)$, existirá solamente un elemento neutro , que será el elemento "cero" del grupo abeliano $H^1(X,A)$.

Por otra parte , se tiene que $H^1(X,K(\Pi,0)) = Hom_{\mathbb{C}}(X,1)$ que es un conjunto unitario, entonces tambien existirá solamente un elemento neutro que será tambien el único elemento nulo en los conjuntos $H^n(X,K(A,n))$ y que coincide con el elemento "cero" , por tanto la sucesión exacta larga que nos da el teorema (4.2.7) será de conjuntos punteados.

Es fácil de comprobar que en este caso, nuestros morfismos de conexión coinciden con los dados por Glen , siendo estos por tanto morfismos de grupos abelianos y verificandose así que la sucesión dada por el teorema (4.2.7) en estas condiciones , coincide con la dada por Glenn [32].

Glenn en [31] compara los grupos de cohomología $H^n(X,A)$ con los clásicamente establecidos en los siguientes casos:

(a) Si $\mathbb{C}$ es una categoría abeliana, entonces :

$$H^n(X,A) = Ext^n(X,A)$$

donde los grupos $Ext^n(X,A)$ estan dados por clases de Yoneda de n-extensiones de X por A.

(b) Si $\mathbb{C}$ es monádica sobre Set (la categoría de conjuntos), con cotriple $\mathbb{G}$ inducido por la adjunción $F \dashv U$, entonces los grupos de cohomología de cotriple estan interpretados por Duskin [25] en términos de clases de Yoneda de torsores U-escindidos

$$H^n_{\mathbb{G}}(X,A) = TORS^n_U[X,K(A,n)]$$

donde la definición de torsor U-escindido es análoga a la de torsor, sustituyendose la condición de ser asferical por la de ser U-escindido (ver [25]). Se verifica que $TORS^n(X,K(A,n))$ es una subcategoría densa de $TORS^n_U(X,K(A,n))$, coincidiendo ambas categorías por ejemplo si $\mathbb{C}$ admite una operación de Mal'cev (operación ternaria "p" que verifica : $p(x,y,y)=p(y,y,z)=y$) .

Así en este caso se tiene: $H^n_{\mathbb{G}}(X,A) = \text{TORS}^n\left[X,K(A,n)\right] = H^n(X,A)$.

(c) Si $\mathbb{C}$ es un topo que posee un objeto de números naturales (por ejemplo si es un topo de Grothendieck), existe entonces un funtor "grupo abeliano libre " $F:\mathbb{C} \longrightarrow Ab(\mathbb{C})$ que nos permite definir los grupos de cohomología del topo con coeficientes en un objeto grupo abelian A en términos de clases de Yoneda de extensiones en $Ab(\mathbb{C})$ de $\mathbb{Z}_{\mathbb{C}} = F(\mathbb{1})$ por A : $H^n(A) = \text{Ext}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}_{\mathbb{C}},A)$ teniendose al igual que en el caso de ser $\mathbb{C}$ una categoría abeliana un isomorfismo natural :

$$H^n(A) = \text{Ext}^n(\mathbb{Z}_{\mathbb{C}},A) = \text{TORS}^n\left[X,K(A,n)\right] = H^1(\mathbb{1},A)$$

Por tanto, nuestra cohomología cubre las cohomologías más usuales en el caso abeliano.

(5.2) COMPARACION CON LA TEORIA DE COHOMOLOGIA DE DEDECKER PARA HACES SOBRE UN ESPACIO TOPOLOGICO PARACOMPACTO.-

Sea X un espacio topológico paracompacto y $\mathbb{C}$ la categoría de haces (concretos) de X. Recordemos que los objetos de $\mathbb{C}$ serán homeomorfismos locales $E \xrightarrow{q} X$ y los morfismos diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "q"'] & E' \arrow[d, "q'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

donde f es una aplicación continua.

Los objetos grupo en $\mathbb{C}$ serán los haces de grupos i.e. los homeomorfismos locales $G \xrightarrow[q]{} X$ con $G_x = q^{-1}(x) = \{g \in G \ / \ q(g) = x\}$ un grupo para cada $x \in X$,verificando que las aplicaciones

$$X \longrightarrow G \qquad G \underset{X}{\times} G \xrightarrow{\ m\ } G \qquad G \longrightarrow G$$

$$x \longmapsto e_x = (\text{neutro de } G_x) \qquad (g,g') \longmapsto g\,g' \qquad g \longmapsto g^{-1}$$

son continuas.

Una sucesión exacta corta de haces de grupos será una sucesión de morfismos de haces de grupos:

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "q'"'] & G \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "q"] & G'' \arrow[dl, "q''"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

tal que para cada X la sucesión de grupos $G'_x \hookrightarrow G_x \twoheadrightarrow G''_x$ es exacta corta.

<u>Un sistema de coeficientes para la cohomología (no abeliana)</u> en el sentido de Dedecker consiste en una terna $\Phi = (G, N, \rho)$ donde G y N son haces de grupos sobre X ,N es además un haz de grupos de operadores sobre G i.e. para cada $x \in X$ el grupo N_x actúa (de forma continua) sobre G_x, $G \underset{X}{\times} N \longrightarrow G : (g,n) \longmapsto {}^{n}g$ y $\rho : G \longrightarrow N$ es un morfismo de haces de grupos que verifica:

(I) ${}^{\rho(g)}g' = g\,g'\,g^{-1}$

(II) $\rho({}^{n}g) = n.\rho(g).n^{-1}$

para todo $n \in N_x$, $g, g' \in G_x$, $x \in X$.

Dado un recubrimiento $\mathcal{U}=\{\mathcal{U}_i \,/ i\in I\}$ de X denotemos para cada conjunto de índices $\{i_1, \ldots\ldots, i_k\} \subset I$.

Sea $\Phi = (G , N , \rho)$ un sistema de coeficientes para la cohomología.

Una <u>o-cadena</u> de $\mathcal{U}$ con coeficientes en G es un familia de secciones locales $h=\{ h_i : \mathcal{U}_i \to G/i\epsilon$

Una <u>1-cadena alternada</u> de $\mathcal{U}$ con coeficientes en Φ es un par de familias de secciones locales (g, α) ; $g = \{ g_{ij} : \mathcal{U}_{ij} \longrightarrow G \,/\, i,j \in I \}$, $\alpha = \{\alpha_{ij} : \mathcal{U}_{ij} \to N/ \, i,j \in I\}$ tales que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^{-1}$, $\alpha_{ii} = 1$ (1: $\mathcal{U}_{ii} \longrightarrow N$; $x \longmapsto e_x$)

$$g_{ij} = {}^{\alpha_{ij}}(g_{ji}^{-1}) \quad , \qquad g_{ii} = 1 .$$

Una <u>2-cadena</u> de $\mathcal{U}$ con coeficientes en Φ es una terna $(\alpha , \gamma , \alpha')$ de familias de secciones locales $\alpha =\{\alpha'_{ij} : \mathcal{U}_{ij} \longrightarrow N/ \, i,j\in I\}$ $\qquad \alpha' =\{ \alpha_{ij} : \mathcal{U}_{ij} \longrightarrow N/ i,j \in I\}$

$\gamma =\{ \gamma_{ijk} : \mathcal{U}_{ijk} \longrightarrow G / \, i,j,k \in I\}$ $\qquad$ verificando :

$$\alpha_{ij}\, \alpha_{jk}\, \alpha_{ki} = \rho(\gamma_{ijk})\alpha'_{ij}\, \alpha'_{jk}\, \alpha'_{ki} \, .$$

Una 2-cadena $(\alpha, \gamma , \alpha')$ de $\mathcal{U}$ con coeficientes en Φ se dice <u>fundamentalalternada</u> si se verifica: (-) $\alpha'_{ij} = 1$.

(-) $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}^{-1}$, $\alpha_{ii} = 1$.

(-) $\gamma_{kij} = {}^{\alpha_{ki}}(\gamma_{ijk})$, $\gamma_{ikj} = \gamma_{ijk}^{-1}$.

Representemos a esta 2 - cadena por (α, γ).

Denotaremos por $C^o(\mathcal{U}, G)$ al conjunto de o-cadenas de $\mathcal{U}$, con coeficientes en G , $C_a^1(\mathcal{U}, \Phi)$, $C^2(\mathcal{U},\Phi)$, $C_a^2(\mathcal{U},\Phi)$ a los conjuntos de 1-cadenas alternadas, 2-cadenas y 2-cadenas fundamentales alternadas de $\mathcal{U}$ con coefientes en respectivamente.

Se define una aplicación <u>co-borde</u> $\partial : C_a^1 (\mathcal{U}, \Phi) \longrightarrow C^2 (\mathcal{U},\Phi)$ por :

$\partial(g , \alpha) = (g\alpha, \delta_\alpha g , \alpha)$ donde: $(g\alpha)_{ij} = \rho(g_{ij}) \cdot \alpha_{ij}$

$(\delta_\alpha g)_{ijk} = g_{ij} \cdot \alpha_{ij}(g_{jk}) \cdot {}^{(\alpha_{ij} \cdot \alpha_{jk})}(g_{ki})$.

Dada una 1-cadena alternada (g , α) y una 2-cocadena fundamental alternada (α, γ) se define el producto $\partial(g ,\alpha) \cdot (\alpha,\gamma) = (g\alpha , (\delta_\alpha g)\gamma)$ donde:

$((\delta_\alpha g)\gamma)_{ijk} = (\delta_\alpha g)_{ijk} \cdot \gamma_{ijk}$ según la multiplicación en G .

Dada un o-cadena $h = (h_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow N) \in C^o(\mathcal{U}, N)$ y una 2-cadena alternada $(\alpha,\gamma)\in C_a^2 (\mathcal{U}, \Phi)$ se define $h * (\alpha,\gamma) = (h * \alpha , {}^h\gamma)$ donde:

$(h * \alpha)_{ij} = h_i\, \alpha_{ij}\, h_j^{-1}$

$({}^h\gamma)_{ijk} = {}^{h_i}(\gamma_{ijk})$.

Un 1-cociclo (de Dedecker) de $\mathcal{U}$ con coeficientes en Φ será una 1-cadena alternada $(\alpha,g) \in C_a^1(\mathcal{U},\Phi)$ verificando : i) $\alpha_{ij} = 1$.

ii) $g_{ij} = g_{ik}\, g_{kj}$

denotaremos a un 1-cociclo (α, g) solo por g, notamos que un 1-cociclo g verifica también que $g_{ij}^{-1} = g_{ij}$, $g_{ii} = 1$, puesto que la definición de 1-cociclo con coeficientes a Φ depende solo del haz de grupos G, diremos 1-cociclo de $\mathcal{U}$ sobre G.

Dos 1-cociclos g, g' de $\mathcal{U}$ sobre G se dicen homotópicos si existe una cero cadena $f = (f_i) \in C^{0}(\mathcal{U}, G)$ tal que $g'_{ij} = f_i \, g_{ij} \, f_j^{-1}$.

Tenemos establecida así una relación de equivalencia en el conjunto de 1-cociclos de $\mathcal{U}$ sobre G, al conjunto cociente lo denotaremos por $\mathcal{H}^{1}(\mathcal{U}, G)$.

Una 2-cadena fundamental alternada $(\alpha, \gamma) \in C_a^2(\mathcal{U}, \Phi)$ se llamará 2-cociclo (de Dedecker) de $\mathcal{U}$ con coeficientes en Φ si verifica la siguiente condicioón:

$$\gamma_{ijk} = \gamma_{ij\ell} \cdot {}^{\alpha_{i\ell}}(\gamma_{\ell jk}) \cdot \gamma_{i\ell k} \quad \text{en} \quad \mathcal{U}_{ijk\ell} .$$

Dos dos 2-cociclos (α', γ'), (α, γ) se dicen equivalentes si existen una o-cadena $h = (h_i) \in C^{0}(\mathcal{U}, N)$ y una 1-cocadena alternada $(\alpha, g) \in C_a^1(\mathcal{U}, \Phi)$ tal que $(\alpha', \gamma') = h * (\partial(\alpha, g) \cdot (\alpha, \gamma)) = (h * (\alpha, g), {}^{h}((\delta_\alpha g)))$.

Tenemos así establecida una relación de equivalencia en el conjunto de 2-cociclos de $\mathcal{U}$ con coeficientes en Φ, al correspondiente conjunto cociente lo denotaremos por $\mathcal{H}^2(\mathcal{U}, \Phi)$.

En este conjunto existen dos clases de elementos distinguidos:

los elementos nulos. Dados por las clases en $\mathcal{H}^{2}(\mathcal{U}, \Phi)$ de los elementos de la forma $h * \partial(\alpha, g)$ para $h \in C^{0}(\mathcal{U}, G)$, $(\alpha, g) \in C_a^1(\mathcal{U}, \Phi)$.

Los elementos neutros, dados por las clases en $\mathcal{H}^{2}(\mathcal{U}, \Phi)$ de los elementos de la forma (α, e) donde $e_{ijk} = 1$ para todo $i, j, k \in I$.

Se definen entonces $\mathcal{H}^{1}(X, G) = \varinjlim_{\mathcal{U} \in C(X)} \mathcal{H}^{1}(\mathcal{U}, G)$, $\mathcal{H}^{2}(X, \Phi) = \varinjlim_{\mathcal{U} \in C(X)} \mathcal{H}^{2}(\mathcal{U}, \Phi)$, donde hemos denotado por $C(X)$ la categoría de los recubrimientos abiertos de X.

A continuación trataremos los conceptos dados por Dedecker de cociclo, sistema de coeficientes y conjuntos de cohomología en términos simpliciales para comparar con los métodps desarrollados en este trabajo.

Dado un recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X consideremos el siguiente complejo simplicial aumentado sobre X en la categoría de prehaces sobre X.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_{\cdot} = \quad \cdots \cdots & \coprod\limits_{I^3} \mathcal{U}_{ijk} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \coprod\limits_{I^2} \mathcal{U}_{ij} \arrow[l, bend right=20, shift right=3] \arrow[l, bend right=20, shift right=5] \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & \coprod\limits_{I} \mathcal{U}_{i} \arrow[l, bend right=20, shift right=3, "s_0"'] \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

donde $d_j : \coprod_{I^n} \mathcal{U}_{i1 \ldots in} \longrightarrow \coprod_{I^{n-1}} \mathcal{U}_{i1 \ldots in-1}$, $0 \leq i \leq n$ está definido por $d_j(x, i_1, \ldots\ldots i_n) = (x, i_1 \ldots\ldots i_{n-j-1}, i_{n-j+1}, \ldots\ldots, i_n)$ y

$$s_j : \coprod_{I^{n-1}} \mathcal{U}_{i1, \ldots\ldots, in-1} \longrightarrow \coprod_{I^n} \mathcal{U}_{i1 \ldots\ldots in}, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

está definida por : $s_j(x, i_1, \ldots\ldots, i_{n-1}) = (x, i_1, \ldots\ldots, i_{n-j-1}, i_{n-j}, i_{n-j}, i_{n-j+1}, \ldots\ldots, i_{n-1})$.

Donde $(x, i_1, \ldots\ldots, i_k)$ denota el elemento de $\coprod_{I^k} \mathcal{U}_{i_1,\ldots\ldots,i_k}$ que está en la imagen del morfismo $\mathcal{U}_{i_1,\ldots\ldots,i_k} \hookrightarrow \coprod_{I^k} \mathcal{U}_{i_1,\ldots\ldots,i_k}$.

Es bien conocido que $\mathcal{U}_{\bullet} = \mathrm{COSK}^{0}(\mathcal{U}_{\bullet})$,además si denotamos por $\overline{\mathcal{U}}_{\bullet}$ el complejo simplicial en haces sobre X obtenido hacificando los prehaces que definen $\mathcal{U}_{\bullet}$ se tiene que $\overline{\mathcal{U}}_{\bullet} = \mathrm{COSK}^{0}(\overline{\mathcal{U}}_{\bullet})$ y que cualquier morfismo simplicial $f_{\bullet} : \mathcal{U}_{\bullet} \longrightarrow E_{\bullet}$,con $E_{\bullet}$ un complejo simplicial de haces sobre X ,factoriza de forma única a través del morfismo canónico de $\mathcal{U}_{\bullet} \longrightarrow \overline{\mathcal{U}}_{\bullet}$;

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_{\bullet} \arrow[rr, "f_{\bullet}"] \arrow[dr] & & E \\
& \overline{\mathcal{U}}_{\bullet} \arrow[ur, dashed, "f'_{\bullet}"'] &
\end{tikzcd}$$

verificándose además que si $f_{\bullet}$, $g_{\bullet} : \mathcal{U}_{\bullet} \longrightarrow E_{\bullet}$ son homotópicos entonces $f'_{\bullet}$, $g'_{\bullet}$: $\overline{\mathcal{U}}_{\bullet} \longrightarrow E$ también lo son, tenemos así bijecciones naturales:

$(\mathcal{U}_{\bullet}, E_{\bullet}) \simeq (\overline{\mathcal{U}}_{\bullet}, E_{\bullet})$ y $[\mathcal{U}_{\bullet}, E_{\bullet}] \simeq [\overline{\mathcal{U}}_{\bullet}, E_{\bullet}]$.

Dado un 1-cociclo de $\mathcal{U}$ sobre G , $g = (g_{ij})$,definimos un <u>1-cociclo simplicial</u> $g_{\bullet} : \mathcal{U}_{\bullet} \longrightarrow K(G, 1)$ por:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_{\bullet} : \cdots\cdots \arrow[d, "g_{\bullet}"'] & \coprod_{I^3} \mathcal{U}_{ijk} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, dashed, "g_2"] & \coprod_{I^2} \mathcal{U}_{ij} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, dashed, "g_1"] & \coprod_{I} \mathcal{U}_{i} \arrow[r, "p"] \arrow[d, dashed, "g_0 = p"] & X \arrow[d, equal] \\
K(G,1) : \cdots\cdots & G \times G \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & G \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X \arrow[r, equal] & X
\end{tikzcd}$$

$g_0 = p$; $g_1 : \coprod_{I^2} \mathcal{U}_{ij} \longrightarrow G$,es el único morfismo (utilizado la propiedad universal del coproducto) por los morfismos g_i , i.e. $g_1(x, i, j) = g_{ij}(x)$.

La condición de 1-cociclo (de Dedecker) implica trivialmente la condición de 1-cociclo simplicial (ver (3.2.6)) así (g_0, g_1) se extiende a un morfismo simplicial $g_{\bullet}$.

Recíprocamente dado un 1-cociclo simplicial $g_{\bullet} : \mathcal{U}_{\bullet} \longrightarrow K(G,1)$ los morfismos : $g_{ij} = i_{ij}\, g_1 : \mathcal{U}_{ij} \xrightarrow{i_{ij}} \coprod_{I^2} \mathcal{U}_{ij} \longrightarrow G$, determinan de forma única un 1-cociclo de Dedecker. Además si g , g' son do 1-cociclos de Dedecker homotópicos $g'_{ij} = h_i \cdot g_{ij} \cdot h_j^{-1}$ con $h = (h_i) \in C^0(\mathcal{U}, G)$,entonces el morfismo $h_0 : \coprod_I \mathcal{U}_i \longrightarrow G$ inducido por la familia de morfismos $\{h_i\}$,nos da una homotopía $h_{\bullet} : g_{\bullet} \longrightarrow g'_{\bullet}$ siendo también inmediato el rec'iproco. Tenemos así una biyección : $\mathcal{H}^1(\mathcal{U}; G) \simeq [\mathcal{U}_{\bullet}, K(G,1)] \simeq [\overline{\mathcal{U}}_{\bullet}, K(G,1)]$. Por otra parte si V es un recubrimiento abierto de X más fino que $\mathcal{U}$, la inclusión $V \overset{j}{\hookrightarrow} \mathcal{U}$ en $C(X)$ nos define un morfismo simplicial $V_{\bullet} \xrightarrow{j_{\bullet}} \mathcal{U}_{\bullet}$ verificándose claramente que el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^1(\mathcal{U}, G) \arrow[r, dash, "\simeq"] \arrow[d, "j^*"'] & {[\mathcal{U}_{\bullet}, K(G,1)]} \arrow[r, dash, "\simeq"] \arrow[d, "j^*"'] & {[\overline{\mathcal{U}}_{\bullet}, K(G,1)]} \arrow[d, "\bar{j}^*"'] \\
\mathcal{H}^1(V, G) \arrow[r, dash, "\simeq"] & {|V_{\bullet}, K(G,1)|} \arrow[r, dash, "\simeq"] & {[\overline{V}_{\bullet}, K(G,1)]}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Además $E_. \twoheadrightarrow X$ es un recubrimiento (simplicial) de haces sobre X ($E_\bullet = \operatorname{cosk}^0 (p : E_0 \twoheadrightarrow X))$ utilizando que $p: E_0 \twoheadrightarrow X$ es un homeomorfismo local épico, para cada $y \in E_0$ existen entornos abiertos V_y de y en E_0 y $\mathcal{U}_y$ de $p(y)$ en X con $p/V_y : V_y \longrightarrow \mathcal{U}_y$ un homeomorfismo, de esta forma (por ser p épica) tenemos un recubrimiento $\mathcal{U} = \{ \mathcal{U}_y / \ y \in E_0 \}$ abierto de X y un morfismo de prehaces sobre X : $\coprod_{E_0} \mathcal{U}_y \longrightarrow E_0$ inducido por los morfismos composición

$$\coprod_{E_0} \mathcal{U}_y \xrightarrow{(p/V_y)^{-1}} V_y \hookrightarrow E_0 .$$

Este morfismo utilizando que $E_. = \mathrm{COSK}^0(E_.)$ y $\mathcal{U}_. = \mathrm{COSK}^0 (\mathcal{U}_.)$ induce un morfismo simplicial $\mathcal{U}_\bullet \longrightarrow E_.$, como consecuencia las biyecciones : $\mathcal{H}^1 (\mathcal{U}, G) \simeq [\overline{\mathcal{U}}_., K(G,1)]$ inducen una biyección natural

$$\mathcal{H}^1(X, G) = \varinjlim_{C(X)} \mathcal{H}^1(\mathcal{U},G) \simeq \varinjlim_{1H\,C(X)} [E_., K(G,1)] = \check{H}^1(X,K(G,1)) \overset{(3.2.28)}{\simeq} \mathrm{TORS}^1(X,K(G,1) = \hat{H}^1(X,K(G,$$

Comparemos ahora los conjuntos de 2-cohomología;

Dado un sistema de coeficientes $\Phi = (G, N, \rho)$ es fácil de comprobar que la multiplicación en el haz de grupos producto $G \times N$ definida por: $(g,n)\,(g',n') = (g^n g' , n\,n')$ le dota de estructura de haz de grupos, lo denotaremos por $G \rtimes N$ además los homomorfismos $D_0, D_1 : G \rtimes N \longrightarrow N$ y $S_0 : N \longrightarrow G \rtimes N$ definido por $D_0 = pr$, $D_1(g,n) = \rho(g)n$, $S_0(n) = (s(n),n)$ ($s: X \longrightarrow G$ el morfismo "cero") junto con la multiplicación: $(g,n) \times (g' ,gn) = (g'g,n)$ nos determina un grupoide en la categoría de haces de grupos sobre X : $G_{.\Phi}$ (ó equivalentemente un 2-grupoide en haces sobre X) :

$$G_{.\Phi} = \begin{tikzcd} G \rtimes N \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] & N \arrow[l, bend right, "S_0"'] \end{tikzcd} :$$

$$\begin{tikzcd} G \rtimes N \arrow[r, shift left, "D_0"] \arrow[r, shift right, "D_1"'] \arrow[d, shift right] & N \arrow[l, bend right, "S_0"'] \arrow[d, shift left, "q"'] \\ X \arrow[u, shift right] \arrow[r, equal] & X \arrow[u, shift left] \end{tikzcd} .$$

El 2-hipergrupoide filtrado en haces sobre X , $\overline{W}(G_{.\Phi})$,está dado por :

$$\overline{W} (G_{.\Phi}) = \ldots\ldots, \begin{tikzcd} G \times N^2 \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "d_2"'] & N \arrow[l, bend right=20, "s_0"'] \arrow[l, bend right=35, "s_1"'] \arrow[r, "d_0 = d_1 = q"'] & X \arrow[l, bend right, "s_0"'] \end{tikzcd} ,$$

con: $d_0 (g,n,n') = n$

$d_1(g,n,n') = \rho(g)\, nn'$

$d_2(g,n,n') = n'$

$s_i(n) = (s\,q(n),n,s_0 q(n))$

$s_1(n) = (sq(n),s_0 q(n),n)$.

Aplicando las condiciones de cociclo(CC1)(CC2) dados en (3.2.9) tenemos que dar un 2-cociclo $\alpha_. : E_. \quad \overline{W}(G_{.\Phi})$ desde un 2-hiperrecubrimiento $E_\bullet$ de X equivale a dar un par de mofismos de haces : $\alpha_1 : E_1 \longrightarrow N$; $\widehat{\alpha} : E_2 \longrightarrow G$ con $s_0 \alpha_1 = 1$ y $s_i \widehat{\alpha} = 1$ verificando: (CC1), $\rho(\widehat{\alpha}(x_0 x_1 x_2))\, \alpha_1(x_0)\alpha_1(x_2) = \alpha_1(x_1)$; $(x_0,x_1,x_2) \in E_2 = \Delta_2(E_.)$.

$$\text{(CC2)} \qquad {}^{\alpha_1(x_0)^{-1}}\left(\widehat{\alpha}(x_0,y_1,y_2)^{-1} \; \widehat{\alpha}(x_1,y_1,z_2) \; \widehat{\alpha}(x_0,x_1,x_2) \right) = \widehat{\alpha}(x_2,y_2,z_2)$$

para todo elemento:

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_0 & y_1 & y_2 \\ x_1 & y_1 & z_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \in E_3 = \Delta_3(E.) .$$

Supongamos que (α, γ) es un 2-cociclo de $\mathcal{U}$ con coeficientes en Φ los morfismos $\gamma_{ijk} : \mathcal{U}_{ijk} \longrightarrow G$ y $\alpha_{ij} : \mathcal{U}_{ij} \longrightarrow N$ determina de forma única morfismos

$$\widehat{\alpha} : \coprod_{I^3} \mathcal{U}_{ijk} \longrightarrow G \qquad \text{y} \qquad \alpha_1 : \coprod_{I^2} \mathcal{U}_{ij} \longrightarrow N$$

$$(x, i,j,k) \longmapsto \gamma_{ijk}(x) \qquad\qquad (x, i,j) \longmapsto \alpha_{ij}(x) .$$

Poniendo juntas las condiciones de 2-cociclo de Dedecker tenemos:

(i) $\alpha_{ij} \cdot \alpha_{jk} \cdot \alpha_{ki} = \rho(\gamma_{ijk})$

(ii) $\alpha_{ij}^{-1} = \alpha_{ji}$; $\alpha_{ii} = 1$

(iii) $\gamma_{kij} = {}^{\alpha_{ki}}(\gamma_{ijk})$

(iv) $\gamma_{ijk}^{-1} = \gamma_{ikj}$

(v) $\gamma_{ijk} = \gamma_{ij\ell} \cdot {}^{\alpha_{i\ell}}(\gamma_{\ell jk}) \cdot \gamma_{i\ell k}$

entonces: (ii,iii,iv,) $\Rightarrow$ $s_0\alpha_1 = 1$, $s_i\widehat{\alpha} = 1$, $i = 0,1$; (i,iv) $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathcal{U}_{ijk}$
$\rho(\gamma_{ikj}(x)) \cdot \alpha_{ij}(x) \cdot \alpha_{jk}(x) = \alpha_{ik}(x)$ (CC1) .
(iv,v) $\Rightarrow \gamma_{i\ell j} \; \gamma_{ijk} \; \gamma_{ik\ell} = {}^{\alpha_{i\ell}}(\gamma_{\ell jk})$,intercambiando los índices j y ℓ tenemos $\gamma_{ij\ell} \; \gamma_{i\ell k} \; \gamma_{ikj} = {}^{\alpha_{ij}}(\gamma_{j\ell k})$ $\Longrightarrow$ (CC2).
Entonces los morfismos α_1 , $\widehat{\alpha}$ nos determinan un 2-cociclo simplicial $\alpha. : \mathcal{U}. \longrightarrow \overline{W}(G._{\Phi})$
Recíprocamente dado un 2-cociclo simplicial $\alpha. : \mathcal{U}. \longrightarrow \overline{W}(G._{\Phi})$, tomando α_{ij} y γ_{ijk} como las composiciones $\mathcal{U}_{ij} \hookrightarrow \coprod_{I^2} \mathcal{U}_{ij} \xrightarrow{\alpha_1} N$ y $\mathcal{U}_{ijk} = \mathcal{U}_{ikj} \hookrightarrow \coprod_{I^3} \mathcal{U}_{ijk} \xrightarrow{\widehat{\alpha}} G$ se tiene : $\left[\text{(CC1)}, \text{(CC2)} . s_0 \alpha = 1 , s_i \widehat{\alpha} = 1 \right] \Rightarrow \left[\text{(i)}, \text{(v)} , (\gamma_{iik} = \gamma_{ikk} = \gamma_{iki} = 1) \right]$ y es fácil de observar que a partir de estas condiciones se deducen las restantes condiciones de cociclo de Dedecker, así es equivalente dar un 2- cociclo de Dedecker (α, γ) de $\mathcal{U}$ con coeficientes en Φ a dar un 2-cociclo simplicial $\alpha.$ al 2-hipergrupoide $\overline{W}(G._{\Phi})$.
Supongamos (α, γ) un 2-cociclo de $\mathcal{U}$ con coeficientes en Φ y $h = (h_i : \mathcal{U}_i \longrightarrow N) \in C^0(\mathcal{U}, N)$.
Sean $\alpha., \alpha'. : \mathcal{U}. \longrightarrow \overline{W}(G._{\Phi})$ los 2-cociclos simpliciales asociados a (α, γ) y $h * (\alpha, \gamma)$ entonces el morfismo $h_0 : \coprod_{I} \mathcal{U}_i \longrightarrow N$ dado por $h_0(x, i) = h_i(x)$ nos determinan una homotopía(en la clase $\mathbb{C}^1$) de $\alpha.$ a $\alpha'.$ (ver 3.2..10) .
Por otra parte si $(\alpha, g) \in C^1_a(\mathcal{U}, \Phi)$ y denotamos por $\beta. : h. \longrightarrow \overline{W}(G._{\Phi})$ al

2-cociclo asociado a $\partial(\alpha, g) \cdot (\alpha, \gamma) = (g\alpha, (\delta_\alpha g)\gamma)$ tenemos que $\beta_{ij} = \rho(g_{ij}) \cdot \alpha_{ij}$, veamos que $\tilde{h} : \coprod_{I^2} \mathcal{U}_{ij} \longrightarrow G$ definida por $\tilde{h}(x,ij)=g_{ij}(x)^{-1}$ nos determina una homotopía $h_\cdot : \alpha_\cdot \longrightarrow \beta_\cdot$ (en la clase $\mathbb{C}^2$).

$\beta_{ij} = \rho(g_{ij}) \cdot \alpha_{ij} \Longrightarrow \alpha_{ij} = \rho(g_{ij}^{-1}) \cdot \beta_{ij} \Longrightarrow \alpha_1 = \rho(\tilde{h}) \cdot \beta_1$ que es la condición CH1 de homotopía.

$$(\delta_\alpha g)_{ijk} \cdot \gamma_{ijk} = g_{ij} \cdot {}^{\alpha_{ij}}(g_{ik}) \cdot {}^{(\alpha_{ij}\,\alpha_{jk})}(g_{ki}) \cdot \gamma_{ijk} =$$

$$g_{ij} \cdot {}^{\alpha_{ij}}(g_{jk}) \cdot {}^{(\rho(\gamma_{ijk})\alpha_{ik})}(g_{ki}) \cdot \gamma_{ijk} =$$

$$= g_{ij} \cdot {}^{\alpha_{ij}}(g_{jk}) \cdot \gamma_{ijk} \cdot {}^{\alpha_{ik}}(g_{ki}) = g_{ik} \cdot {}^{\alpha_{ij}}(g_{jk}) \cdot \gamma_{ijk} \cdot g_{ik}^{-1} =$$

$$= g_{ij} \cdot \gamma_{ijk} \cdot {}^{(\rho(\gamma_{ijk})\alpha_{ij})} g_{kj} \cdot g_{ik}^{-1} =$$

$$= g_{ij} \cdot \gamma_{ijk} \cdot {}^{(\alpha_{ik}\,\alpha_{kj})}(g_{jk}) \cdot g_{ik}^{-1} ==$$

$$= g_{ij} \cdot \gamma_{ijk} \cdot {}^{\alpha_{ik}}(g_{kj}^{-1}) \cdot g_{ik}^{-1} \Longrightarrow$$

$$\breve{\beta}(x,ikj) = \hat{h}(x,ij)^{-1} \cdot \breve{\alpha}(x,ikj) \cdot {}^{\alpha_1(x,ik)}\hat{h}(x,kj) \cdot \hat{h}(x,ik)$$

que es la condición (CH2) de homotopía. Por tanto si (α,γ) y (α',γ') son dos cociclos de Dedecker equivalentes los cociclos simplicales son homotópicos, y análogamente se probaría el recíporico. Tenemos así una biyección

$$\mathcal{H}^2(\mathcal{U}, \Phi) \cong \left[\mathcal{U}_\cdot, \overline{W}(G._\Phi)\right| \cong \left[\overline{\mathcal{U}}_\cdot, \overline{W}(G._\Phi)\right] .$$

Utilizando que X es para compacto se demuestra que cualquier 2-hiperrecubrimiento $E_\cdot$ de X puede ser refinado por un recubrimiento (mediante métodos análogos a los que prueban que para estacios paracompactos, la cohomología abeliana de Cech coincide con la cohomología abeliana usual).

Se tienen entonces biyecciones naturales:

$$\mathcal{H}^2(X, \Phi) = \varinjlim_{\mathcal{U} \in C(X)} \mathcal{H}^2(\mathcal{U}, \Phi) \cong \varinjlim_{E_\cdot \in 2HC(X)} \left[E_\cdot, \overline{W}(G._\Phi)\right] = \hat{H}^2(X, \overline{W}(G._\Phi)) \cong \tag{3.2.24}$$

$$= \mathrm{Htors}^2\left[X, \overline{W}(G._\Phi)\right] .$$

Ahora, puesto que la categoría $\mathrm{TORS}^2(X, \overline{W}(G._\Phi))$ es una subcategoría densa de $\mathrm{Htors}^2(X, \overline{W}(G._\Phi))$, tenemos entonces una aplicación épica :

$$\eta : H^2(X, \overline{W}(G._\Phi)) = \mathrm{TORS}^2\left[X, \overline{W}(G._\Phi)\right] \twoheadrightarrow \mathrm{Htors}^2\left[X, \overline{W}(G._\Phi)\right] \cong \mathcal{H}^2(X, \Phi) .$$

Es aún una cuestión abierta para nosotros, si esta aplicación η es o no una biyección.

Comparemos ahora los elementos neutros y nulos definidos por Dedecker con los definidos en (3.1).

<u>En dimensión uno</u> : $\mathcal{H}^1(X,G)$ es un conjunto punteado, donde el elemento distinguido (elemento "cero") está dado por la clase del 1-cociclo de $\mathcal{U} = \{X\}$ definido

por la sección global $S:X \longrightarrow G$ $(S: x \longmapsto e_x)$, por otra parte el 1-cociclo simplicial que define este 1-cociclo de Dedecker está dado por el morfismo simplicial constante $s_.:K(X,0) \longrightarrow K(G,1)$ determinado por S y el torsor asociado a $s_.$ es el torsor canónico $DEC(K(G,1)) \longrightarrow K(G,1)$ cuya clase determina el único elemento neutro de $H^1(X, K(G,1))$ .Así el isomorfismo $\mathcal{H}^1(X,G) \cong H^1(X,K(G,1))$ es de conjunto punteados.

En dimensión dos:Para cada recubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X ,es fácil de comprobar que los elementos neutros en $\mathcal{H}^2(\mathcal{U},\Phi)$ son aquellos en la imagen de la aplicación $\mathcal{H}^1(\mathcal{U},N)\to\mathcal{H}^2(\mathcal{U},\Phi)$ que asocia a la clase de un 1-cociclo g en $\mathcal{H}^1(\mathcal{U},N)$ la clase del 2-cociclo (g,e),con $e_{ijk}=1$ para todo $i,j,k \in I$,verificándose además que el cuadrado:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^1(\mathcal{U},N) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \mathcal{H}^2(\mathcal{U},\Phi) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
{[\mathcal{U}_.,K(N,1)]} \arrow[r] & {[\mathcal{U}_.,\bar{W}(G._\Phi)]}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.Tenemos así un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}^1(X,N) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \mathcal{H}^2(X,\Phi) \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] \\
\hat{H}^1(X,K(N,1)) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & \hat{H}^2(X,\bar{W}(G._\Phi)) \\
H^1(X,K(N,1)) \arrow[r, "\partial_1"] & H^2(X,\bar{W}(G._\Phi)) \arrow[u, "\eta"']
\end{tikzcd}$$

de donde deducimos que lleva elementos neutros en elementos neutros y además es "sobre" entre los elementos neutros.

Por otra parte,recordemos que los elementos nulos en $H^2(X,\bar{W}(G._\Phi))$ son aquellos en la imagen del morfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,X) = H^2(X,COSK^1(K(G,1))) \longrightarrow H^2(X,\bar{W}(G._\Phi))$.(ver(3.1.28)), así puesto que existe solo un morfismo de haces de X en X (notemos que X denota el haz $id:X \longrightarrow X$ que es el objeto terminal en $\mathbb{C}$) tendremos solamente un elemento nulo (según nuestra definición) en $H^2(X,\bar{W}(G._\Phi))$. La imagen por η del elemento nulo en $H^2(X,\bar{W}(G._\Phi))$ será la clase del 2-cociclo $\partial(s,e') = (s,e)$ de $\mathcal{U}=\{X\}$ en $\mathcal{H}^2(X,\Phi)$(donde por $e'_{ij}=1$, $e_{ijk}=1$) que es un elemento nulo.

Por último es fácil de comprobar dada una sucesión exacta corta de haces de grupos:

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r, hook] \arrow[dr, "q'"'] & G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "q"] & G'' \arrow[dl, "q''"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

junto con un sistema de coeficientes $\Phi=(G,N,\rho)$ tal que $\Phi'=(G',N',\rho/G')$ son también un sistema de coeficientes ,se tiene un diagrama conmutativo de sucesiones "exactas" de conjunto con elementos distinguidos:

$$\begin{tikzcd}
H^0(X,K(G',1)) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & H^0(X,K(G,1)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & H^0(X,K(G'',1)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & H^1(X,K(G',1)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & {} \\
\mathrm{Hom}(X,G') \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}(X,G)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(X,G'')) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(X,G') \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^1(X,K(G',1)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & H^1(X,K(G,1)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & H^1(X,K(G'',1)) \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & H^2(X,\bar{W}(G_{\cdot\Phi})) \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & H^2(X,\bar{W}(G_{\cdot\Phi})) \arrow[d, "\eta"] \\
{} \arrow[r] & \mathcal{H}^1(X,G') \arrow[r] & \mathcal{H}^1(X,G) \arrow[r] & \mathcal{H}^1(X,G'') \arrow[r, "\partial_1"] & \mathcal{H}^2(X,\Phi') \arrow[r] & \mathcal{H}^2(X,\Phi)
\end{tikzcd}$$

comparando así la sucesión exacta dada por Dedecker[19]y la dada por el teorema(4.1.16) para este caso.Notemos que el teorema(4.2.7) extiende la sucesión anterior donde los conjuntos de cohomología en dimensión superiores serán conjuntos punteados siendo la exactitud de esta sucesión de conjuntos punteados en todas dimensiones distintas de dos.

(5.3) COMPARACION CON LAS TEORIAS NO ABELIANAS DESARROLLADAS EN UN TOPO.

El problema clásico de la cohomología no abeliana en un topo $\mathbb{C}$ consiste en medir la exactitud del funtor de secciones globales $\Gamma = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{1}, -)$ para lo cual se tratará de extender (de forma apropiada) la sucesión exacta: $1 \longrightarrow \Gamma(G') \longrightarrow \Gamma(G) \rightarrow \Gamma(G'')$ asociada a una sucesión exacta corta de objetos grupo $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$ en el topo. Grothendieck define los conjuntos de cohomología del topo $H^1(\mathbb{1}, G) = H^1(G)$ como el conjunto de clases de isomorfismos de "espacios simplicicales y homogéneos" del topo $\mathbb{C}$ sobre los que actua el grupo G .Es bien conocido,que la definición de tales espacios es equivalente a la de 1-torsor de $\mathbb{1}$ sobre el grupoide K(G,1) así:

$H^1(G) \cong \mathrm{TORS}^1[\mathbb{1},K(G,1)] = H^1(\mathbb{1},K(G,1))$.

Lográndose extender la sucesión exacta anterior tres puntos más:

$\mathbb{1} \longrightarrow \Gamma(G') \longrightarrow \Gamma(G) \longrightarrow \Gamma(G'') \longrightarrow H^1(G') \longrightarrow H^1(G) \longrightarrow H^1(G'')$.

Puesto que $\mathrm{DEC}(K(G,1)) \longrightarrow K(G,1)$ es un 1-torsor de $\mathbb{1}$ y solo existe un elemento en $\Gamma(\mathbb{1})$ tenemos que sólo existirá un elemento "neutro=nulo" en $H^1(G)$ (análogamente para G' y G'') . Así la sucesión exacta de 6 puntos de conjuntos punteados anterior coincide con los seis primeros puntos de la sucesión exacta larga dada por el teorema (4.2.7) asociada a la sucesión exacta corta de grupoides $K(G',1) \rightarrow K(G,1) \rightarrow K(G',1)$ (y tomando como grupoide cruzado generalizado el de los automorfismos interiores de K(G,1) i.e. $K(G,1) \longrightarrow K(\mathrm{Int}(G),1)$).

Dos son las aproximaciones principales que tratan de extender la sucesión anterior otros tres puntos más ; La dada por Giraud [30] y la dada por Duskin (en cartas dirigidas a P.Johnstone,1976).

En la segunda de estas aproximaciones se utilizan métodos muy similares a los desarrollos en este trabajo,pasemos a comentarla.

Aplicando el "clásico" funtor $\overline{W}$ a los grupoides en grupos internos en $\mathbb{C}$:

$G' \rtimes \mathrm{Int}(G) \rightrightarrows \mathrm{Int}(G)$, $G \rtimes \mathrm{Int}(G) \rightrightarrows \mathrm{Int}(G)$ y $G'' \rtimes \mathrm{Int}(G'') \rightrightarrows \mathrm{Int}(G'')$.

Duskin obtiene los 2-hipergrupoides $\underline{\underline{\mathrm{Int}}}^2_{G'}(G)$, $\underline{\underline{\mathrm{Int}}}^2(G)$ e $\underline{\underline{\mathrm{Int}}}^2(G'')$ que utiliza para definir los conjuntos de cohomología del topo $H^2_G(G')$, $H^2(G)$ y $H^2(G'')$ mediante clases de Yoneda de 2-torsores.

Obtenidendo una sucesión exacta de nueve términos:

$$\mathbb{1} \to \Gamma(G') \hookrightarrow \Gamma(G) \longrightarrow \Gamma(G'') \longrightarrow H^1(G') \longrightarrow H^1(G\,) \longrightarrow H^1(G'') \longrightarrow H^2_G(G') \to$$
$$\to H^2(G\,) \longrightarrow H^2(G'') ,$$

donde la exactitud en los tres últimos puntos está dada en términos de torsores "casi escindidos",utilizando para establecer la exactitud en $H^2_G(G')$ la clase del torsor "casi escindido" distinguido en $H^2(G)$ (llamado "trivial") dado por:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{COSK}^1(K(G,1)) \arrow[d] & :\;.\;.\;.\;.\;.\;\; G^3 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "Id\times\rho\times\rho"] & G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\rho"] & \mathbb{1} \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \mathbb{1} \\
\mathrm{Int}^2(G) & :\;.\;.\;.\;.\;.\;\; G\times\mathrm{Int}(G)^2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \mathrm{Int}(G) \arrow[r] & \mathbb{1} &
\end{tikzcd}$$

Se tiene entonces que;tomando como sucesión exacta corta de grupoides a $K(G',1) \hookrightarrow K(G,1) \twoheadrightarrow K(G'',1$ y como grupoide cruzado generalizado el de los automorfismos interiores de $K(G,1)$; $\rho : K(G,1) \longrightarrow K(\mathrm{Int}\,(G)\,,1)$, entonces $\overline{W}(\mathrm{INT}(K(G,1))_{\cdot\cdot}) = \underline{\underline{\mathrm{Int}}}^{\,2}(G)$ y sí denotamos por $N'_{\cdot\cdot}$ al 2-grupoide asociado al grupoide cruzado generalizado $K(G',1) \longrightarrow K(\mathrm{Int}(G),1)$ entonces $\overline{W}(N'_{\cdot\cdot}) = \underline{\underline{\mathrm{Int}}}^2_G\ (G')$,teniéndose: $H^2_G(G') = H^2(\mathbb{1}, \overline{W}(N'_{\cdot\cdot}))$ y $H^2\,(G) = H^2(\,\mathbb{1}\ , \overline{W}(\mathrm{INT}(K(G,1))_{\cdot\cdot}))$.

Además por (3.1.29) todo elemento neutro en $H^2(\mathbb{1}, \overline{W}(N''_{\cdot\cdot})\,)$ y $H^2(\mathbb{1}, \overline{W}(\mathrm{INT}(K(G,1))_{\cdot\cdot}))$es la clase de un torsor casi escindido.Por otra parte en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{1}\ , \mathbb{1})$ existe solo un elemento y por tanto existe solo un elemento nulo en $H^2(\mathbb{1}, \overline{W}(\mathrm{INT}(K(G,1))_{\cdot\cdot}))$que será el elemento "trivial".

Verificándose que la sucesión exacta de nueve términos dada por Duskin coincide con la dada por el teorema (4.1.15) salvo en el último punto (tanto en los morfismos como en los términos de la exactitud).

El noveno punto en nuestra sucesión será $H^2(\mathbb{1}, \overline{W}(N''_{\cdot\cdot}))$ con $N''_{\cdot\cdot}$ el 2-grupoide cociente de $\mathrm{INT}(K(G,1))_{\cdot\cdot}$ por $N'_{\cdot\cdot}$, claramente existe un morfismo de 2-grupoides.

$\mathcal{E} : N''_{\cdot\cdot} \longrightarrow \mathrm{INT}(K(G'',1))_{\cdot\cdot}$

$$\begin{tikzcd}
 & & G''\rtimes\mathrm{Int}(G'') \arrow[dd, shift left] \arrow[dd, shift right] & \\
G'\rtimes\mathrm{Int}\,(G) \arrow[r, hook] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & G\rtimes\mathrm{Int}(G) \arrow[ur] \arrow[rr, two heads] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & & G''\rtimes\overline{N} \arrow[ul, dashed, "\mathcal{E}_1"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
 & \mathrm{Int}(G) \arrow[r] \arrow[rr, two heads, bend right=0] & \mathrm{Int}(G') & \overline{N} \arrow[l, dashed, "\mathcal{E}_0"']
\end{tikzcd}$$

Y por tanto una aplicación $H^2(\mathbb{1}, \bar{W}(N!!)) \longrightarrow H^2(G'')$.

Aplicando los métodos desarrollados en este trabajo,podemos seguir extendiéndo la sucesión;los n-hipergrupoides sistemas de coeficientes para los conjutos de cohomología del topo en dimensiones $n > 2$ estarán dados por :

$$K_{K(Int(G,1))}(Z',n) : \dots Z' \times Int(G)^n \underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\vdots}} Int(G)^{n-1} . \quad . \quad . \quad Int(G)^2 \substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow} Int(G) \longrightarrow \mathbb{1}$$

$K_{K(Int(G),1)}(Z(G),n)$ y $K_{K(Int(g),1)}(Z(G)/ Z' ,1)$, donde $Z(G)$ es el objeto grupo centro de G y Z' es el subgrupo de G' de los "elementos que conmutan con todos los de G'' i.e. el núcleo del morfismo $G' \longrightarrow Int(G)$. Notemos que solo existe un elemento "nulo= neutro" en los conjuntos de cohomología del topo en dimenensión $n > 2$ teniéndose una biyección (ver prop.(3.1.22)): $H^n(\mathbb{1}, K_{K(Int(G),1)}(Z',1)) \cong H^n(\mathbb{1}, K(Z',n)) = H^n(Z')$, (análogamente para $Z(G)$ y $Z(G) / Z'$) por lo que la sucesión exacta larga en la cohomología no abeliana del topo $\mathbb{C}$, asociada a la sucesión exacta corta de objetos grupo: $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$, será:

$$1 \rightarrow \Gamma(G') \longrightarrow \Gamma(G) \longrightarrow \Gamma(G'') \longrightarrow H^1(G') \longrightarrow H^1(G) \longrightarrow H^1(G'') \rightarrow$$

$$\rightarrow H^2_G(G') \longrightarrow H^2(G) \longrightarrow H^2(\mathbb{1}, \bar{W}(N!!)) \longrightarrow H^3(Z') \longrightarrow H^3(Z(G)) \longrightarrow H^3(Z(G)/Z') \rightarrow$$

$$\dots\dots\dots H^{n-1}(Z(G)/Z') \longrightarrow H^n(Z') \longrightarrow H^n(Z(G)) \dots\dots\dots$$

Siendo exacta de grupos abelianos en dimensiones $n \geqslant 3$.

La aproximación de Giraud es más "grosera" que la dada por Duskin; en el sentido de que sus conjuntos de cohomología en dimensión dos parecen "demasiado grandes".

Dado un objeto grupo G denotaremos por $L(G)$ su (lien " asociado, siguiendo la terminología de Giraud) entonces para cada 2-torsor $\alpha: E_\bullet \rightarrow Int^2(G_\bullet)$,el lien asociado al grupoide "fibra" $G(E_\bullet)$ (que es un "bouquet" en el sentido de Duskin [27]) sigue siendo $L(G)$, así el "gerbe" cuya fibra en cada objeto Y en $\mathbb{C}$ es $TORS^1(Y, G(E_\bullet))$ nos determinan un elemento de $H^2_{Gir.}(L)$ verificándose además que si $f_\bullet : E_\bullet \longrightarrow E'_\bullet$ es un morfismo de torsores se tiene una equivalencia entre las categorías $TORS^1(Y, G(E_\bullet))$ y $TORS^1(Y, G(E'_\bullet))$. Tenemos así una aplicación : $H^2(\mathbb{1}, \underline{\underline{Int}}^2(G)) = H^2(G) \longrightarrow H^2_{Gir.}(L(G))$, que nos relaciona los conjuntos de cohomología en dimensión dos de Giraud y de Duskin (estos últimos coinciden con los definidos en este trabajo). Es aún desconocido para nosotros si esta aplicación es una biyección.

(5.4) EL CASO ALGEBRÀICO .-

Como ya dijimos en la introducción, el problema de la cohomología no abeliana en categorías algebráicas, en las que existe el concepto de sucesión exacta corta, como son: grupos, anillos, algebras asociativas, algebras de Lie, Ω-grupos, categorías de interés, etc..., tiene un enunciado algo diferente.

Por ejemplo, si $\mathbb{C}$ =Gp es la categoría de grupos y X , G son dos grupos con G además un X-grupo(i.e. se tiene una acción de grupos de X sobre G ó equivalentemente un morfismo de grupos $\psi : X \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$) , se define el conjunto de las derivaciones , Der(X,G), como el conjunto de las aplicaciones $f:X \longrightarrow G$ verificando $f(x\,y) = f(x) \cdot {}^{x}f(y)$, donde ${}^{x}f(y)$ denota el elemento $x \in X$ actuando sobre $f(y) \in G$ según la acción de X sobre G.

Se tiene entonces, asociada a cada sucesión exacta corta de X-grupos $G' \overset{i}{\hookrightarrow} G \overset{p}{\twoheadrightarrow} G''$ una sucesión exacta de conjuntos punteados.

(5.4.1) $1 \longrightarrow \mathrm{Der}(X,G') \longrightarrow \mathrm{Der}(X,G) \longrightarrow \mathrm{Der}(X,G'')$.

La cohomología no abeliana de grupos tiene como principal objetivo el extender esta sucesión. Notemos que si la acción de X sobre los grupos G', G y G'' es la trivial, entonces la sucesión (5.4.1) anterior será $\mathbb{1} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Gp}(X,G') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Gp}(X,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Gp}(X,G'')$.

Para extender la sucesión exacta (5.4.1) tres puntos más, siguiendo los razonamientos de Dedecker (aunque los métodos que utilizaremos están más en la línea de Aznar [1]) se procede como sigue:

La categoría C_1 de coeficientes será la de " módulos cruzados " ; un módulo cruzado es por definición una terna $\Phi = (G,N,\rho)$ donde N y G son grupos , N actúa sobre G y $\rho : G \rightarrow N$ es un morfismo de grupos verificando :

(I) ${}^{\rho(g)}g' = g\,g'\,g^{-1}$

(II) $\rho({}^{n}g) = n\,\rho(g)\,n^{-1}$

Un morfismo de módulos cruzados es un diagrama conmutativo de morfismos de grupos :

$$\begin{tikzcd}
\Phi : \arrow[d] & G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\theta"'] & N \arrow[d, "\gamma"] \\
\Phi' : & G' \arrow[r, "\rho'"] & N'
\end{tikzcd}$$

verificando que θ es un morfismo de N-grupos donde la acción de N sobre G' está definida vía γ.

Una sucesión exacta corta de módulos cruzados es una sucesión de morfismos cruzados

(5.4.2)
$$\begin{tikzcd}
\Phi' \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\cdot\cdot"] & \Phi \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, "\cdot\cdot"] & \Phi'' \arrow[d, phantom, "\cdot\cdot"] \\
G' \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\rho' = \rho/G'"'] & G \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\rho"] & G'' \arrow[d, "\rho''"] \\
& N \arrow[r, two heads, "q"] & \bar{N}
\end{tikzcd}$$

con $G' \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G''$ una sucesión exacta corta de grupos y $\bar{N}$ el grupo cociente de N por $\mathrm{Img}(\rho')$ (que es un subgrupo normal).

Dado un morfismo $\varphi : X \longrightarrow N$ se definen los conjuntos de cohomología en dimensión cero y uno de X sobre Φ (relativos a φ)como sigue:

$$H^0_\varphi(X, \Phi) = \{ f: X \longrightarrow G \rtimes N / \varphi = pr_1 f \}$$

donde $G \rtimes N$ es el grupo producto semidirecto de G y N,y $pr_1 : G \rtimes N \longrightarrow N$ es la proyección canónica. Notemos que si consideramos a G como X-grupo con la acción definida vía φ, utilizando la propiedad universal del producto semidirecto ,es equivalente a dar una derivación (φ -derivación) $d: X \longrightarrow G$ a un morfismo $f: X \longrightarrow G\ \ N$ tal que $\varphi = pr_1 f$ y $d j = f$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "d"'] \arrow[d, dashed, "f"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
G \arrow[r, "j"'] & G \rtimes N \arrow[r, "pr_1"'] & N
\end{tikzcd}$$

teniéndose entonces $H^0_\varphi(X, \Phi) = \mathrm{Der}_\varphi(X, G)$.

El conjunto de cohomología $H^1_\varphi(X, \Phi)$ se define en términos de extensiones sobre el módulo cruzado Φ ; Una extensión de X sobre Φ es una sucesión exacta corta de grupos $G \hookrightarrow E \twoheadrightarrow X$ junto con un morfismo $\sigma : E \longrightarrow N$ verificando que el diagrama :

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\sigma"] & X \arrow[d, "\theta"] \\
Z \arrow[r, hook] & G \arrow[r, "\rho"] & N \arrow[r, two heads] & R
\end{tikzcd}$$

es conmutatuvo,donde R es el grupo cociente de N por $\mathrm{Img}(\rho)$,y la acción de E sobre G definida vía σ ha de coincidir con la acción por cojugación i.e. ${}^{e}g = {}^{\sigma(e)}g = e g e^{-1}$.

Un morfismo de extensiones de X sobre Φ es un diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[rr, hook] & & E' \arrow[rr, two heads] \arrow[dl, "f"'] \arrow[ddl, "\sigma'"] & & X \\
G \arrow[ur, equal] \arrow[rr, hook] & & E \arrow[rr, two heads] \arrow[d, "\sigma"'] & & X \arrow[ur, equal] & \\
 & & N & & &
\end{tikzcd}$$

Claramente todo morfismo de extensiones de X sobre Φ es un isomorfismo.Una extensión de X sobre Φ :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads, "h"] \arrow[d] & X \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

se dice inesencial si el morfismo $E \overset{h}{\twoheadrightarrow} X$ escinde i.e. existe un morfismo $s: X \longrightarrow E$ tal que $h s = id$.

El conjunto de clases de isomorfismo de extensiones de X sobre Φ es por definición $H^1(X, \Phi)$.

A partir del morfismo $\varphi : X \longrightarrow N$ se construye la extensión inesencial de X sobre Φ :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, hook] & G \rtimes X \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\sigma"] & X \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

donde la acción de X sobre G está dada via φ (${}^{x}g = {}^{\varphi(x)}g$) y el morfismo σ está definido por $\sigma(g,x) = \varphi(x)$. Esta extención inesencial determina un elemento distinguido en $H^1(X, \bar{\Phi})$, el correspondiente conjunto punteado es por definición $H^1_{\varphi}(X, \bar{\Phi})$.

Asociada entonces a una sucesión exacta corta de módulos cruzados $\bar{\Phi}' \hookrightarrow \bar{\Phi} \twoheadrightarrow \bar{\Phi}''$ (5.4.2) y un morfismo $\varphi : X \to N$ se tiene una sucesión de seis términos

(5.4.3) $1 \to H^0_{\varphi}(X, \bar{\Phi}') \longrightarrow H^0_{\varphi}(X, \bar{\Phi}) \longrightarrow H^0_{q\varphi}(X, \bar{\Phi}'') \longrightarrow H^1_{\varphi}(X, \bar{\Phi}') \longrightarrow H^1_{\varphi}(X, \bar{\Phi}) \longrightarrow H^1_{q\varphi}(X, \bar{\Phi}'')$

que es exacta de conjuntos punteados y de conjuntos con elementos distinguidos (las clases de las extensiones inesenciales). Los conjuntos de cohomología H^0 y H^1 son dotados por Dedecker de estructuras de "pulpo" y "araña" respectivamente [20] enriqueciéndose los términos de la exactitud de (5.4.3).

El morfismo de conexión se define (siguiendo los métodos dados por Aznar en su tesis [1]) levantando por cuadrados " casicartesianos" la extensión de G'' sobre $\bar{\Phi}'$

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, equal] & G \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\rho"] & G'' \arrow[d, "\rho''"] \\
G' \arrow[r, "\rho'"] & N \arrow[r, two heads, "q"] & \bar{N}
\end{tikzcd}$$

via las $q\varphi$-derivaciones f: $X \longrightarrow G''$ i.e. dada una $q\varphi$-derivación $f : X \longrightarrow G''$ considerese el grupo pullback:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & X \arrow[d, "h"] \\
G \rtimes X \arrow[r, "p \times id"] & G'' \rtimes X
\end{tikzcd}$$

donde h es el morfismo inducido por la derivación f y por la id_X :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, equal, "id"] & \\
G'' \arrow[r] & G'' \rtimes X \arrow[r, two heads] & X
\end{tikzcd}$$

Claramente el núcleo de p' es G' teniendose que;

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r, hook] & F \arrow[r, two heads, "p'"] \arrow[d, "\sigma"'] & X \\
 & N &
\end{tikzcd}$$

donde σ es el morfismo composición $F \xrightarrow{pr} G \rtimes X \xrightarrow{id \times \rho} G \rtimes N \xrightarrow{pr} N$, es una extensión de X sobre $\bar{\Phi}'$, definiendose $\partial_0(f)$ como la clase de esta extensión.

Comparemos ahora con la teoría desarrollada en este trabajo.

Asociado a un módulo cruzado $\bar{\Phi} = (G, N, \rho)$ tenemos un grupoide en Gp ; $G_{\bar{\Phi}} : G \rtimes N \longrightarrow N$, con $d_0 = pr$, $d_1(g,n) = \rho(g)\,n$. Si $\varphi : X \longrightarrow N$ es un morfismo de grupos se verifica claramente que $H^0_{\varphi}(X, \bar{\Phi}) = H^0(X, G_{\bar{\Phi}})$. Por otra parte, dada una extensión de X sobre Φ :

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\sigma"] & X \arrow[d] \\
G \arrow[r, "\rho"] & N \arrow[r, two heads] & R
\end{tikzcd}$$

se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G\times E \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] \arrow[d, "id\times\sigma"'] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\sigma"] & X \\
G \rtimes N \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[r, shift right, "d_1"'] & N &
\end{tikzcd}$$

que representa un 1-torsor de X sobre G , verificandose tambien el recíproco. De esta forma, tenemos una biyección $H^2_\varphi(X, \Phi) \cong H^2(X, G_{\Phi.})$ que claramente conserva los elementos distinguidos definidos a partir de φ y lleva las clases de las extensiones inesenciales en las clases de los torsores escindidos.

Además dada una sucesión exacta corta de módulos cruzados $\Phi' \hookrightarrow \Phi \twoheadrightarrow \Phi''$ la sucesión de grupoides inducida $G_{\Phi'.} \hookrightarrow G_{\Phi.} \twoheadrightarrow G_{\Phi''.}$ es tambien exacta corta, teniendose entonces para cada morfismo $\varphi:X \longrightarrow N$ un diagrama conmutativo de sucesiones exactas de conjuntos con elementos distinguidos:

$$\begin{tikzcd}
H^0_\varphi(X, \Phi') \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & H^0_\varphi(X, \Phi) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0_{q\varphi}(X, \Phi'') \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, equal] & H^1_\varphi(X, \Phi') \arrow[r] \arrow[d, "\wr" , equal] & H^1_\varphi(X, \Phi) \arrow[r] \arrow[d, "\wr", equal] & H^1_{q\varphi}(X, \Phi'') \arrow[d, "\wr", equal] \\
H^0_\varphi(X, G_{\Phi'.}) \arrow[r, hook] & H^0_\varphi(X, G_{\Phi.}) \arrow[r] & H^0_q(X, G_{\Phi''.}) \arrow[r, "\partial_0"] & H^1_\varphi(X, G_{\Phi'.}) \arrow[r] & H^1_\varphi(X, G_{\Phi.}) \arrow[r] & H^1_{q\varphi}(X, G_{\Phi''.})
\end{tikzcd}$$

donde la sucesión exacta de la linea inferior está dada por el teorema (4.1.16) .

Utilizando los métodos desarrollados en este trabajo, podemos podemos extender la sucesión exacta anterior como sigue :

Puesto todo grupoide en Gp es abeliano, el grupoide de automorfismos interiores de $G_{\Phi.}$ es el grupoide trivial $INT(G_{\Phi.})=cosk^0(N \to 1)$: $\ldots N^4 \Rrightarrow N^3 \Rrightarrow N \longrightarrow 1$, el 2-grupoide $INT(G_{\Phi.})_{..}$ será :

$$\begin{tikzcd}
Z \rtimes N \arrow[rr, "D_0=D_1=\langle id, id\rangle"'] \arrow[d, shift right, "d_0=d_1=pr"'] & & N\times N \arrow[d, shift right, "pr_0"'] \arrow[d, shift left, "pr_1"] \\
N \arrow[u, bend right, shift right] \arrow[rr, equal] & & N \arrow[u, bend right, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

con $Z=Ker(\rho)$ que es un subgrupo central en G, y $\overline{W}(INT(G_{\Phi.})_{..}) = \ldots Z\times N^2 \Rrightarrow N \longrightarrow 1$ que es homotopicamente equivalente a $K(Z,2)$.

Así la sucesión exacta larga asociada a la sucesión exacta corta de grupoides $G_{\Phi'.} \longrightarrow G_{\Phi.} \longrightarrow G_{\Phi''.}$ y el grupoide cruzado generalizado $(G_{\Phi.}, INT(G_{\Phi.}), \rho_.)$, para $\varphi:X \to N$ es

$$H^0_\varphi(X, G_{\Phi'.}) \longrightarrow H^0_\varphi(X, G_{\Phi.}) \longrightarrow H^0_{q\varphi}(X, G_{\Phi''.}) \longrightarrow H^1_\varphi(X, G_{\Phi'.}) \longrightarrow H^1_\varphi(X, G_{\Phi.}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1_{q\varphi}(X, G_{\Phi''.}) \longrightarrow H^2(X, K(Z',2)) \longrightarrow H^2(X, K(Z,2)) \longrightarrow H^2(X, K(Z/Z',2)) \to \ldots$$

$$\ldots \to H^{n-1}(X, K(Z/Z', n-1)) \longrightarrow H^n(X, K(Z',n)) \longrightarrow H^n(X, K(Z,n)) \to \ldots$$

donde $Z' = \mathrm{Ker}(\rho/G')$ y la exactitud es de grupos abelianos en dimensiones mayores que uno (notemos que heomos utilizado los isomorfismos dados por (3.1.22)

$$H^n(X, K_{\mathrm{cosk}^o(N\ \Pi)}(Z,n)) \cong H^n(X, K(Z,n)) \quad , n \geqslant 2$$

y analogamente para Z' y Z/Z').

Notemos por último que los conceptos de derivaciones, módulos cruzados y sucesiones exactas cortas de módulos cruzados se generalizan a las categorías llamadas de interés (ver [1]). En estas categorías Aznar asocia, siguiendo los métodos de Dedecker, una sucesión exacta de seis términos a cada sucesión exacta corta de módulos cruzados, particularizando su solución a categorías de grupos, anillos, algebras de Lie, algebras asociativas, algebras alternativas,etc. Es por otra parte fácil de generalizar a categorias de interés los razonamientos hehos anteriormente para el caso de grupos , viendose que nuestra solución y la de Aznar [1] coinciden en dimensiones cero y uno .

REFERENCIAS. -

1. Aznar E.R. .- Cohomología no abeliana en categorías de interés (tesis),Alxebra 33, 1981 .

2. Aznar E.R. Bullejos M. .- n-Hipergrupoides en variedades de Mal'cev . Comunicación en el VII congreso del grupo de matemáticos de expresión latina , 1985 .

3. Barr M. .- Exact categories. L.N. in Math. 236 ,Springer-Verlang ,1971 .

4. Barr M. .- What is the center ? . Reports of the Midwest category seminarIII,L.N. in Math.106,Springer-Verlang ,1969 .

5. Barr M. Wells C. .- Toposes Triples and Theories . Springer-Verlang (278),1985.

6. Brown R. .- Fibrations of groupoids. Journal of Algebra ,Vol 15,NI, May 1970.

7. Brown R. .- Groupoids as coefficients. Proc. London Math. Soc. (3) 25 , 1972.

8. Brown R. .- An introduction to simplicial T-complexes. U.C.N.W. Pure Maths No.82.7.

9. Brown R. Higgins P.J. .- The equivalence of ω-groupoids and cubical T-complexes. Caihiers de topologie et geometrie differentielle , vol XII-4,1981.

10. Brown R. Higgins P.J. .- The equivalence of ω-grupoids and crosses complexes, Caihers de topologie et geometrie differentielle,vol XII-4,1981.

11. Cartan H. .- Quelques questions de topologie . E.N.S. seminaire 9º année 1956/57 exp. 1,3,4.

12. Cegarra A.M. Bullejos M. .- n-Cocycles non abéliens. C.R. Acad.Sc.Paris ,t.298 serie I ,nº 17,1984.

13. Cegarra A.M. Bullejos M. .- Sur la théorie de l'obstruction de dimension n . C.R. Acad.Sc.Paris,t.299,serie I,nº10,1984.

14. Cegarra A.M. Bullejos M. Garzón A.R. .- High dimensional obstruccion in algebraic categories. Preprint 1984.

15. Conduché D. .- Modules croisés géneralisés de longueur 2. J.P.A.A. 34,1984 .

16. Curtis E. .- Seminarios. Århus,1967.

18. Dedecker P. .- Cohomologie à coefficients non abéliens. C.R.Acad.Sc.Paris, t.287, 1160-1162,1958.

19. Dedecker P. .- Sur la cohomologie non abélienne I,II. Canadian Journ. Math.12,13, 1960.

2o. Dedecker P. .- Le fonteur Hom non abélienne. Notion de poulpe. C.R.Acad.Sc.Paris t.258,2384-2387,1964.

21. Dedecker P. .- Les fonteurs Ext , H^2 et $\mathbb{H}^2$ non abeliens . C.R.Acad.Sc. Paris t.258,4891-4894, 1964.

22. Dedecker P. .- Premier derivé du fonteur Hom non abélien . C.R.Acad.Sc.Paris t.259,2054-2057,1964.

23. Dedecker P. .- Sur la cohomologie non abélienne. C.R. Acad.Sc. Paris,t 260, 4137-4139.

24. Dedecker P. .- Three dimensional non abelian cohomology for groups . L.N. in Math. 92, 1969.

25. Duskin J. .- Simplicial methods and the interpretation of triple cohomology. Memoir A.M.S. vol 3,issue 2,nº 163,nov1975.

26. Duskin J. .- Simplicial methods and the cohomology of topoi: The abelian theory, in applicatiôn of sheaves. Proceedings Durham 1977, edited by M.Fouman et.el. L.N. in Math. 753, Springer-Verlang 1979.

27. Duskin J. .- Non abelian cohomology in a topos. I, II, III, preprint sumitted to Memoir A.M.S. ,1983.

28. Eilenberg S. MacLane S. .- Cohomology theory in abstract groups, I, II, III, Ann. of Math. 48,1953-54.

29. Frenkel J. .- Cohomologie non abélienne et spaces fibrés. Bull. Soc.Math. Fr. 85, 1957.

30. Giraud J. .- Cohomologie non abelienne. (179) Springer -Verlang, 1971 .

31. Glenn P. .- Realization of cohomology classes by torsor hunder hipergroupoids.(thesis), SUNY/Buffalo 1977.

32. Glenn P. .- Realization of cohomology classes in arbitrary exac categories. J.P.A.A. vol 25,1982 .

33. Higgins P.J. .- Categories and groupoids. Van Nostrand Reinhold. Math. studies 32 1971 .

34. Hilton P.J. Stammbach. . A course in homological algebra. Springer-Verlang (GTM 4) 1970 .

35. Johnstone P.T. .- Topos theory. Academic Press, 1977.

36. KanD.M. .- On homotopy theory C.S.S. in groups. Ann. of Math. 68.38-53,1958.

37. Lavendhomme R. .- Cohomologie a coefficients dans une 2-categorie. Sém. Math. pure nº58, Louvain,1975.

38. Lavndhomme R. .- Une interpretation de la 2-cohomologie d'une categorie a coefficients dans une 2categorie. Sém.Math. pure,nº59,Louvain,1975.

39. Lavendhomme R. .- Particularisations de la cohomologie de categories. Sém. Math. pure nº60,Louvain 1975.

40. Lavendhomme R. Roisin J.R. .- Cohomologie non abélien de Structures algebriques, Journal of Algebra ,67,nº2,1980.

41. Lawvere F.W. .- Ordinal sums and equational doctrines . L.N. in Math. ,80, Springer-Verlang,1969.

42. MacLane S. .- Homology. Springer-Verlang,1967.

43. MacLane S. .- Categories for the working Mathematician. Springer-Verlang (GTM5) 1971.

44. May J.P. .- Simplicial objects in algebraic Topology. Van Nostrand,1967.

45. Moore J.C. .- Seminar on algebraic homotopy . Princenton 1956.

46. Smith J.D.H. .- Mal'cev Varieties. L.N. in Math. 554, Springer-Verlang,1976.

47. Strooker J.R. .- Introduction to categories, homological algebra and sheaf cohomology. Cambridge Unv. Press, 1978.

49. Verdier J.L. .- Apendix to SGA 4, vol 2 L.N. in Math. 270, Springer-Verlang,1972.