IACOBI PELETARII CENOMANI, DE OCCVLTA PARTE NVMERORVM, QVAM Algebram vocant, Libri duo.

PARISIIS,

Apud Gulielmum Cauellat, ſub pingui Gallina, ex aduerſo Collegij Cameracenſis.

1560.

CVM PRIVILEGIO.

EXTRAICT DES REGISTRES de Parlement.

LA Court, ayant egard a la requeste a elle presentée par Guillaume Cauellat, Libraire iuré en l'vniuersité de Paris, a permis & permet audict Cauellat, imprimer, ou faire imprimer, & vendre vn liure intitulé Algebra Iacobi Peletarij. Et ce, pendans quatre ans, à commencer du iour que ledict liure sera acheué d'imprimer. Inhibant & defendant à tous Imprimeurs, libraires, & autres, d'imprimer ou vendre ne faire vendre ou imprimer ledict liure pendans lesdicts quatre ans, sans l'adueu & consentement dudict Cauellat. Sur peine de confiscation de ce qui sera troué imprimé au preiudice, & par dessus lesdictes defenses, & d'amende arbitraire. Faict en parlement, le quatriesme iour de Decembre, l'an mil cinq cens cinquante neuf.

Collation est faicte, Signé Camus.

OPERIS IN CAPITA DISTRIBVTIO.

LIBER PRIMVS.

LIBER SECVNDVS.

IACOBI PELETARII

CENOMANI, DE OCCVLTA

PARTE NVMERORVM, AD

Ioannem Capellanum, Regis Archiatrum, Liber Primus.

PRÆFATIO.

QVi de rerũ initiis paulò altius meditantur, Capellane, ij non vni hominũ cuipiam Disciplinarum inuentionem tribuunt: sed illarum semina non secus quàm virtutum in animis nostris insita, atque ex igniculis quos Mens illa æterna in nobis excitat, communi quodã genio surgere agnoscunt. Magnam verò in rebus controuersiam facit temporum fortuna: quæ suis vicibus tantã rerũ vbertatem profert, vt qui præsenti pulchritudine potiuntur, dum nullam tenent memoriam longiorem, ij non modò ſuo ſeculo omnia accepta referant, ſed ne vllam quidem in futurum mutationem animo concipiant. Quibuſdam rurſus ætatibus ea ſenſim incidit calamitas, vt melioris conditionis expectatio nulla ſubeat in animos hominum: atque vbi primùm artes florere cœperint, eæ non poſtliminio reuerſæ, ſed nouæ & omni memoria inauditæ prodire in lucem videātur. Sic perpetua rerum viciſsitudo efficit, vt qui lōgiùs non proſpiciunt, omnia præſenti conſtitutione metiantur quæ à maioribus veluti per manus non acceperint. Quæ quum ita ſint, non magnoperè laborandum eſſe duco, quem autorem huic Numerorum parti inſcribamus. Sũt qui Gebero tribuant, vt etiam ex viri nomine appellationem Arabicam adepta ſit. Alij Machometi Moſis Arabis filio: alij Diophanto Græco. Ego verò vel eo argumento, quòd ipſi artem exercuerint, aut de ea ſcripſerint, artem iam antè extitiſſe iudico. Vt vt eſt, omnino hæc inter monumenta ingeniorum præcipuum quendam obtinet locum dignitatis: quippe quæ omnes calculos ſubducere doceat, quibus prima illa Numerorum tractatio non ſufficit: vt ſiquid effugiat, non artis, ſed artificis culpa ſit. Singulare verò illius ſpecimen in Geometricis dimenſionibus

ſionibus explicandis, & captioſis oſtenſionibus refutandis conſiſtit. In qua illuſtranda multi recentiorum ſuam operam ſtrenuè nauarunt. Inter Latinos, hac noſtra ętate Hieronymus Cardanus, Michael Stifelius, & Ioannes Scheubelius: ſed & paulò ante noſtra tēpora, Lucas Pacciolus Florentinus, & Stephanus Villafrancus Gallus: Poſt hos Chriſtophorus Ianuerus, Stifelio non multò ſuperior, ij tres patria quiſque lingua. Quorum ego exemplo, eandem ipſam, inter alia opera variè ſcripta, ante aliquot annos Ciuibus noſtris dederam. Sed quum ad Latinos me recepiſſem, & in libros Euclidis, qui de Planis ſunt, demonſtrationes edidiſſem, iam ad decimum librum accinctus, hos libros de occulta parte Numerorum ad Euclidis argumentum imprimis neceſſarios, etiam Latinos feceram. Quos vt aliquandiu ſupprimerem, imò adeò vt Mathematicas ad tempus reponerem, (niſi quòd Aſtrologiam ſtudioſiùs mihi ſemper reſeruaui) effecerat Medicinę profeſsio, quam & ipſam illarum gratia iam olim intermiſeram. Quúmque poſt aliquod tempus in mea ſcripta oculos, vt fit, conuerterem, atque hos libros velut ad manumiſsionem proclamantes reſpicerem: veritus ne laboris confecti negligentia, noui conficiendi opportunitatem remoraretur, mihi otium ſuffuratuſſum, iactura alia aliam ſarciens. Quid quæris? temporis verſuram fecimus, quam nos alia rurſus verſura ſoluemus. Sic ſunt hominum ingenia: ſic nos exercet rerum viciſsitudo. Hac emiſsione, vberior nobis erit facultas abſoluendi ea, quæ in Medicina tractamus. Noſtræ verò illius Gallicæ editionis ſpeciē ſic retinuimus, vt multa interim expunxerimus, multa immutauerimus: nouā dixeris. Hāc tuo nomini permittimus, Capellane, quam nos tibi gratam fore non diffidimus, homini in omnibus Matheſeos partibus optimè exercitato. Quantum verò in commune contulerimus, res indicabit. Certè vt ars ſua methodo conſtaret, neque poſthac in deſperationem adduceret Mathematicarum ſtudioſos, ſedulò curauimus. Iam in rem præſentem veniamus.

DE NVMERIS CREATIS, QVOS VVLGO RADICALES VOCANT, ac de ipſorum notis.

CAP. PRIMVM.

NVMERORVM omnium vſus in Algebram cadit, ſed eorum exquiſitè qui Radicem habēt, quos ab ea quā è lateribus ducunt, origine, Creatos appellabimus: Radicales vulgò dicunt. Od id, in Radicum inuentione plurimū hæc ars cōſiſtit.

Creatorum itaque numerorum, primus eſt Quadratus: qui fit ex numero quolibet in ſe ducto. Cenſus vernacula Italorum lingua dictus eſt, opinor quòd Quadratus numerus ſit prouentus quidam numeri in ſe ducti. Quum verò in hac Numerorum parte, longè maximum vſum afferant notæ, Creatos quoſque numeros propriis notis deſignabimus. Quod qui alienum ab arte exiſtimabūt, ij notas Vnius, ſeu, vt dicitur, Vnitatis, Binarij, Ternarij, omnium denique Numerorum ab arte eximant, atque vna opera artem ipſam de medio tollant, vt nouam comminiſcantur. Quæ obſcura ſunt, ea non tantùm verbis complecti, ſed etiam *oculis subiicere, & veluti manu docere oportet. Quadrati igitur nota erit hec,* q.

Secundus Creatorũ, est Cubus: qui fit ex Radice in se, & quadrati in eandem. Vt 2 in 2 faciunt 4: & 4 in 2 faciunt 8, Cubũ. Huius nota, erit c.

Tertius, est Quadrati quadratus, quem nos Biquadratum dicemus: vulgò Censicensicum appellãt. Fit ex Radice in seipsam, tum ex quadrato rursus in se. Vt 2 in 2 faciunt 4: tum 4 in se faciunt 16, Biquadratum. Quod si gradatim multiplicationes ex Radice spectemus, sic creabitur: 2 in se faciunt 4: tum 4 in 2 faciunt 8: ac tertiò 8 in 2 faciunt 16. Hunc sic notabimus, qq.

Quartus, est Supersolidus, quod Relatum primum vulgò vocant: in quo quaternaria fit multiplicatio. Vt 2 in 2, tum in 4, tertiò in 8, atque vltimò in 16, faciũt 32, numerum Supersolidum. Huius nota, est ß.

Quintus, est Quadraticubicus, Censicubicum vulgò dicũt: éstque, ex ipsa vocabuli ratione, quadratus cubicè multiplicatus. Per Radicem verò quinque fiũt multiplicationes: quarũ vltima est 32 in 2, fiũt 64, numerus Quadraticubicus. Huius nota, est qc.

Sextus, est Supersolidus secundus, quod secundũ Relatum vocant. Fit ex senaria multiplicatione, nempe ex 64 in 2, fiunt 128, Supersolidus secundus. Cuius nota, est bß. *Ac sic multiplicata continenter Radice, creabuntur numeri: quorum appellatio aspera est, vsus nullus: nisi quòd ex iis speculamur seriem Numerorum admirabilem: vt nescias vtrum magis natura an ars infinita sit. Harum enim radicum inuẽtio arte constat, in infinitum.*

DE

DE NVMERORVM CREAtorum situ & progressu.

CAP. II.

Omnis Progreßio Geometrica, si ab Vno ducatur, species numerorum Creatorũ, seu, vt dicunt, Radicalĩu ordinatim complectitur. Secundus quippe Progreßionis numerus, radix est cæterorũ (Vnũ verò sui ipsius radix & creatio est) tertius eiusdẽ Progreßionis numerus, est Quadratus: quartus, Cubus: quintus, Biquadratus: sextus, Supersolidus: sicque infinitè. Quod nos ex dupla Progreßione manifestũ faciemus: simul Progreßio numerorum naturalis quomodo cum progreßione Geometrica conueniat docebimus, hac subscriptione.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	℞	q	c	qq	ß	qc	bß	qqq	cc	qß
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

11	12	13	14	15	16
cß	qqc	dß	qbß	cß	qqqq
2048	4096	8192	16384	32768	65536

Primus ordo, est numerorum naturali serie progredientium, quos Exponentes vocabimus, quòd medij ordinis notas exponãt. Medius ordo, est signorum seu notarum, quibus numerorum radices, aut numeri ipsi Creati figurari solent. Tertius, est numerorum geometricè procedentium.

Igitur Vnitas medij ordinis, quum simplicißima sit, numerum nudum ac simplicem repræsentat: ob id, nullo Exponẽte inscribitur, præterquã 0, seu Nihilo: & ipsa sibi subiicitur tertio ordine: vt intelligamus perpetuò vnū esse & omnia: scilicet Radicem, Quadratum, Cubum, Biquadratum, & sic deinceps. Nota verò ℞, quum sit omnium, vt sic dicam, antesignana, supra se habet Vnum: infra se Binarium, qui cæterorum est radix. Et Lineam refert. Deinceps Quadratum (q) habet Binarium Exponentem, ac sibi subiectum Quadratum numerum, 4. Et Superficiem repræsentat. Cubus, Ternarium habet Exponentem: Cubum verò 8 sibi subiectum. Et Solidum seu Corpus designat. Biquadratum (qq) habet Quaternarium Exponētem. Sed quia nihil in rerum natura supra corpus existit, nihil habet quod referat: tantùm ad progressum infinitatis, vt cæteri, deinceps ordine collocatur. Qui igitur tertio sunt positu, omnes Creati, seu, vt dicitur, Radicales sunt: eamque habent appellationem quam signa medij ordinis, quibus inscribuntur, ostendunt.

Inter numeros autem primi ordinis Additio & Subtractio respondent Multiplicationi & Diuisioni Numerorū tertij ordinis. Nam quemadmodum ex additione 4 ad 6 ex primo ordine, fiunt 10: ita ex multiplicatione 16 in 64 tertij ordinis, fiunt 1024, Numerus qui decimum locū obtinet, scilicet sub hac nota qß. Contrà, quemadmodum ex subtractione 4 à 6, supersunt 2: ita ex diuisione 64 per 14, exeunt 4, numerus sub nota q repositus. Reliquorum eadem ratio.

.16.

DE INVENIENDIS NOTIS AD Exponētes numeros pertinētibus, & è diuerso.

CAP. III.

RESolue Exponentem Numerum in suas partes incompositas (eæ sunt, quæ, quum solo Vno diuidantur, ex earundem inter se multiplicatione Numerus ipse Exponens consurgit) tum notas ad harū

partium vnamquanque pertinentes simul iunge: habebis signum compositum Exponentis propositi. Vt, si quæratur quod signum ad hunc Exponentem, 24, pertineat: resolue 24 in suas partes incompositas: scilicet in 2,2,2,3: (nam 2 in 2 efficiunt 4: deinde 4 in 2 efficiunt 8: tertiò 8 in 3 faciunt 24) harum partium notæ simul iunctæ, videlicet q,q,q,c, constituunt qqqc, signū vigesimiquarti loci. Sic 100 (cuius partes incompositæ, sunt 2,2,5,5) signum habet hoc, qqßß. Hæc ex Stifelio. Idem verò expeditius conficietur, hac ratione. Animaduerte duos pluresúe numeros, ex quorum multiplicatione Exponens numerus conflatur. Eorum notas simul iunge: habebis signum ipsius Exponentis. Vt, 24 exurgūt ex 12 ductis in 2: quorum notæ sunt, q & qqc: quæ iunctæ faciunt qqqc. Idem proueniet, si notas Exponentium 3 & 8 (ex quorum multiplicatione exurgunt 24) simul iunxeris, aut notas Exponentium 4 & 6. In numeris autem grandioribus, vt in 100, duplici opere id efficies, aut triplici. Scilicet, quia 100 emergunt ex ductu 20 in 5: prius inquires signum 20 ex 4 & 5: id erit qqß: rursus signum 5 est ß: hæc iuncta faciunt qqßß, signum centesimi loci. Quòd si Exponēs sit numerus Primus, tantùm obserua quotus sit ordine à Quinario inter numeros Primos. Nota enim Exponētis 7, qui est proximus Primorū à Quinario, est bß: sicut ex triplici ordine perspicitur. Nota 11, erit cß: 13, dß: 17, eß. sicque in reliquos.

Ordo Exponentium & Signorum Compositorum.

4	6	8	9	10	12	14	15	16
qq.	qc.	qqq.	cc.	qß.	qqc.	qbß.	cß.	qqqq.

18	20	21	22	24	
qcc.	qqß.	cbq̄.	qcß.	qqqc.	ac sic deinceps.

Ordo Exponentium & Signorum incompositorum.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
q.	ce.	ß.	bß.	cß.	dß.	eß.	fß.	gß.	hß.	iß.	kß.&c.

(Horum Supersolidorum ordinem elementis alphabeticis designamus, ne notæ Arithmeticæ cæteros numeros conturbent.)

E contrario, Signa ad proprios Exponentes sic reducūtur. Singulis notis incompositis singulos Exponentes tribue. Hos inter se multiplica, exurget Exponens quæsitus. Vt huius signi qqqce, *Exponentes simplices, sunt* 2, 2, 2, 3: *qui inter se multiplicati, sicut paulò antè docuimus, efficiunt* 24, *Exponentem huius Signi* qqqce. *Sed hæc artis demōstrationē magis quàm vsum exhibēt.*

DE NVMERIS SPECIATIM AD Algebræ calculum spectantibus.

CAP. IIII.

ALgebra, præter Absolutos numeros (Absolutos dicimus, qui per se sine signo considerantur: cuiusmodi sunt ij, quibus vtitur prima Arithmetica) triplicem numerorum speciem sibi assumit. Prima, est eorum qui numero absoluto & signo postposito constant. Vt 2 ℞, *duæ* ℞: 3 q, *tria Quadrata:* 4 ce, *quatuor Cubi. Denominatos satis aptè quidam vocauerunt: barbarè autem Cossicos, ab Italis qui Algebram, Cosam dicunt.*

Altera species, est eorum qui signum habent præpositum: qui peculiari nomine Irrationales dicūtur, vulgò Surdi. Vt √q20, *id est, Radix quadrata viginti: quæ quidem nulla est, quum nullus sit numerus, qui in se ductus producat* 20. *Eius generis sunt* √ce

32: √qq45, *omnes denique quorum absoluta particula, ea radice caret quam signum refert. Nam* √q25, *numerus est Rationalis, scilicet* 5.

Tertia species, est Denominatorum Irrationalium, in quibus numerus absolutus inter duo signa medius est. Vt √q 8ce: *hoc est, Radix quadrata* 8 *Cuborū: &* √ce 4qce, *Radix Cubica* 4 *Quadraticubicorū. Atque eæ tres species sua habent præcepta Additionis, Subtractionis, Multiplicationis & Diuisionis, cæterarūque Regularum, non secus quàm absoluti numeri: quas nos facili methodo explicabimus: hoc quippe Libro, primam: altero, duas posteriores.*

DE ADDITIONE ET SVBtractione Denominatorum.

CAP. V.

QVum signa fuerint diuersa, fit Additio per signū Pluris interpositum: Subtractio verò, per signum Minoris. Vt 4q *ad* 5ce *additi, faciunt* 4q *p.* 5ce. *Econtrario* 4q *à* 5ce *subtracti, relinquunt* 5ce *m.* 4q. *Sícque è simplicibus fiunt Compositi seu duplices: quos suo loco tractabimus.*

Quum verò signa fuerint eadem: iunge absolutos Numeros, producto adde signum commune: fiet Additio. Cōtrà in Subductione, minorem absolutorum à maiori subtrahe, relicto signo communi. Vt 3q *ad* 5q *additi, faciūt* 8q. *Sed* 3q *à* 5q *subtracti, relinquunt* 2q: *non aliter quàm* 3 *Aurei cum* 5 *Aureis, faciunt* 8 *Aureos: &* 3 *Aurei à* 5 *Aureis ablati, relinquunt* 2. *Aureos.*

DE MVLTIPLICATIONE & Diuisione Denominatorum.

CAP. VI.

AD Multiplicationem, Numeros absolutos inter se multiplica: Signa verò adde, pro Exponẽtium ratione. Ad Diuisionẽ, partire absolutũ numerum Diuidendi per absolutum Diuisoru: Signum verò alterum ab altero subtrahe.

Exemplum Multiplicationis. Sint ducẽdæ 5℞ *in* 4q: *Duco* 5 *in* 4, *fiunt* 20: *Iungo* q *cum* ℞, *fit* c: *nam Exponens* q, *est* 2: & *Exponens* ℞, *est* 1: *quæ addita, faciunt* 3, *Exponentem Cubi.*

Item 5℞ *per* 4q *multiplicatæ, faciunt* 20c. *Item* 4c *per* 6q *multiplicati, faciunt* 24β.

Exemplum Diuisionis. Volo diuidere 20 *per* 4q: *Diuido* 20 *per* 4, *exeunt* 5: & *aufero* q *à* c, *nempe* 2 *à* 3: *manet* 1, *Exponẽs Radicis. Quare* 20c *per* 4q *diuisi, producunt* 5℞. *Item* 8℞ *per* 2 *diuisæ, producunt* 4℞. *Sed* 2℞ *per* 4 *diuisæ producunt* $\frac{2}{4}$℞, *seu* $\frac{1}{2}$℞: *hoc est, dimidiam Radicem.*

Si fortè Numerus Signi minoris per numerum maioris diuidẽdus sit: statuitur Diuisor sub Diuidẽdo, interiecta lineola, sicut in absolutis fieri solet. Vt 8q *per* 2qc *diuisi, faciũt* $\frac{8q}{2qc}$. *Fitque fractio: quæ ad minimam denominationem reducitur, vt in Fractis docebimus.*

DE

DE MVLTIPLICATIONE DEnominatorum Quadrata, Cubica, & reliquis: déque eorum Radice capienda.

CAP. VII.

AD multiplicationem Quadratam, duc numerum in se, signum verò duplica. Vt 2℞ *in se quadratè, faciunt* 4q. *Item* 2q *in se quadratè, faciunt* 4qq: *Item* 2c *in se quadratè, faciunt* 4qc.

Ad multiplicationem Cubicam, duc numerum in se cubicè, signum verò triplica. Vt 2℞ *in se cubicè, faciunt* 8c: *Item* 2q *cubicè, faciunt* 8qc.

Ad Biquadratam, multiplica absolutum biquadratè: signum quadruplica. Vt 2℞ *in se biquadratè, faciunt* 16qq: & 2q *biquadratè, faciunt* 16qqq.

Hinc colligitur Radicis capiendæ ratio. Scilicet ad Quadratam extractionem, ex absoluto numero educ Radicem: ex signo verò sume dimidium. Vt Radix Quadrata 4q, *est* 2℞: *Radix quadrata* 16qq, *est* 4q. *Et Radix quadrata* 4qc, *est* 2c. *Oportet igitur numerum absolutum esse Quadratum,* & *Exponentem Signi eiusmodi esse qui per binarium diuidi possit.*

Ad extractionem Cubicam, ex absoluto sume Radicem Cubicam: ex signo verò tertiam partem. Vt Radix Cubica 8c, *est* 2℞: *Radix Cubica* 64qc, *est* 4q.

Denique in omni Extractione oportet tam numerum absolutum, quàm characterem ad Radicis ipsius naturam esse accommodatos. Etenim 16c *neque Radicem quadratam habent, neque Cubicam: Etenim quanuis* 16, *Quadratus sit Numerus: tamen signum* c, *nullum habet dimidium: Rursus quanuis* c *per tria diuidatur, tamen 16 nullam habent Radicem Cubicam. Sed eiusmodi Numeri suas habent Radices Irrationales, de quibus secundo volumine præcipiemus.*

DE NVMERIS DENOMINATIS, Compositis, & Diminutis: ac de ipsorum Additione & Subtractione.

CAP. VIII.

Denominati Compositi dicuntur, quorũ partes signo Pluris intercipiũtur. Vt 6q *p.*3℞. *Diminuti sunt, quorum partes signo Minoris connectũtur. Vt* 6q *m.*3℞. *Quæ duæ species quoniam promiscuè in supputationem cadunt, vt que sola notæ positionis aut priuationis discrepent, vna etiam opera à nobis tractabuntur.*

Additio & Subtractio Signorum similium.

In Additione, Signa eadem idem Signum ponunt: In Subtractione, Signa eadem idem Signum relinquunt: nisi quum maior particula occurrit in Subducendo Numero. Tunc enim ab hac subtrahitur minor: & pro Pluri reponitur Minus: pro Minore verò, Plus.

Exempla Additionis eorundem Signorum.

5℞ *p.*4	5q *m.*4℞
4℞ *p.*3	4q *m.*3℞
9℞ *p.*4.	9q *m.*7℞.

Exempla

Exempla Subtractionis eorundem Signorum.

8℞ *p.*6	8q *m.*6℞
3℞ *p.*2	5q *m.*2℞
5℞ *p.*4.	3q *m.*4℞.

Exempla Exceptionis.

6cℓ *p.*8℞	6cℓ *m.*8℞
2cℓ *p.*10℞	2cℓ *m.*10℞
4cℓ *m.*2℞.	4cℓ *p.*2℞.

In horum vtroque subtrahuntur 8 à 10: & in priore pro Pluri reponitur m. in posteriore verò, pro Minori retinetur Plus.

Additio & Subtractio Signorum diuersorum.

Diuersa Signa pro Additione, Subtractionem: & pro Subtractione, Additionem faciunt: Et in Additione retinetur Signum maioris Numeri: In Subtractione verò, Signum eius Numeri à quo fit Subtractio.

Exempla Additionis Signorum diuersorum.

6q *p.*8℞	6q *m.*8℞
2q *m.*2℞	12q *m.*3℞
8q *m.*2℞	3q *p.*4℞.

Exempla Subtractionis Signorum diuersorum.

8q *p.*6℞	8℞ *p.*0	8q *m.*3℞
2q *m.*10℞	12℞ *m.*24	9℞ *m.*2q
6q *p.*16℞.	24 *m.*4℞.	10q *m.*12℞.

Vides vt in media formula adduntur 24 ad o, manéntque 24, quæ notantur signo Pluris, propter p.o quod est in ea sede à qua fit Subtractio: Nam subtrahere m.24, est addere 24. Atque ob eã dem causam, in vltima formula fiunt 10q m.12℞. In illa verò altera subtrahũtur 8℞ à 12℞: manétque m.4℞. Sed hoc nil aliud est quàm subtrahere 12 ab 8. Et quoniã ab 8 aufertur plus quàm 8, necesse est manere minus quippiam quàm 8: scilicet tãto minus, quanto 12 superant 8.

Aliud Exemplum Subtractionis.

6 p. 2℞ 15 m.3℞ 5℞ m. 9	*In hac postrema formula subtraho 6 à 15: manent 9, cum signo m. atque addo 3℞ ad 2℞, fiunt 5℞ cum signo Pluris.*

DE MVLTIPLICATIONE & Diuisione Denominatorum Compositorum & Diminutorum.

CAP IX.

EAdem Signa inter se multiplicata aut diuisa, producunt Plus: diuersa, Minus.

In Multiplicatione, singulæ particulæ in singulas ducuntur. Vt, Sint multiplicandæ 6℞ m.2 per 5℞ m.3.

6℞ m.2 5℞ m.3. 30q p.6 m.28℞.	*Duco 6℞ in 5℞, fiunt 30q: tũ m.2 in m. 3. fiunt p. 6: Rursus m.2 in 5℞, prouenĩut m.10℞: demũ 6℞ in m.3, fiũt 18℞: quæ cũ10℞, faciũt 28 ℞, vt vides in formula.*

Alterum

Alterum Exemplum.

6q p.8℞ m.6
2q m.3
12qq p.16¢ m.12q
m.18q p.24℞ p.18.

Diuisionis Exempla.

Sint diuidenda 30q m.58℞ p.24 per 5℞ m.3. Erit positio, duplici opere, ad hunc modum,

40
~~30~~q m.~~5~~8℞ p.24
~~5~~℞ m.~~3~~. (6℞
~~30~~q m.~~1~~8℞

Scilicet 5 in 30 continentur sexies, & 3 in 58 toties, eóque amplius. Pono 6 ad numerum Indicantem, seu Quotientem, cum nota ℞: Nam ℞ à q ablata, relinquit ℞. Tum per 6℞ multiplico totum Diuisorem, proueniunt 30q m.18℞: quibus ablatis à 30q m.58℞, relinquitur m.40℞. Inde transfero Diuisorem. Vbi 5℞ per m.40℞ diuisæ, indicant m. 8: asscribo m.8 ad Indicãtem post 6℞: ac

~~30~~q m.~~58~~℞ p.~~24~~
~~5~~℞ m.~~3~~ (6℞.m.8.
~~40~~℞ p.~~24~~.

multiplico totum Diuisorem per m.8. proueniunt m 40℞ p.24: quæ ablata à superioribus, nihil relinquunt.

In Diuisione autem id obseruandum vt Signa continenter statuantur: scilicet vt nullum intermittatur.

Veluti, si diuidamus 1¢ p.1. per 1℞ p.1: non stabit positio eius-

modi, ut 1℞ p.1 statuatur sub 1ℭ p.1: Neque erit Indicans Numerus 1q p.1: sed 1q m.1℞ p.1: sicut appositum vides.

m.1q
1ℭ p.ϕq p.0℞ p.1.
1℞ p.1 (1q.
1ℭ p.1q

Scilicet inquiro quomodo contineatur 1℞ in 1ℭ: & fit Indicans, 1q (nam signum ℞ à ℭ ablatum, relinquit q): per 1q multiplico 1℞ p.1: fit 1ℭ p.1q. Aufero 1ℭ p.1q ab 1ℭ p.0q p.0℞ p.1: supersunt m.1q p.0℞ p.1. Iam transfero Diuisorem: Vbi 1℞ p.1. sic continentur in m.1q p.0℞, ut indicent m.1℞. Per m.1℞ multiplico Diuisorem, prouenit m.1q m 1℞: hoc aufero à m.1q p.0℞: supersunt ex toto Diuidendo p.1℞ p.1. Tandem translato Diuisore, 1℞ p.1 in 1℞ p.1 indicat 1: ac peracta Subtractione, nihil restat.

m.1q 1℞
1ℭ p.0q p.0 ℞ p.1
1℞ p. (1q m.1℞.
m.1 m.1℞

1q 1℞
1ℭ p.ϕq p.ϕ℞ p.1
1℞ p.1 (1q m 1℞ p.1.

DE MINVTIIS SEV FRAGmentis Denominatorum.

CAP. X.

IN Denominatorum Minutiis non alia est quàm in Numeris absolutis traditio: adhibitis iis quæ modò de Integris docuimus. Quare sola Exempla instructionis vice erunt.

Addi-

Additio.

Sint addendæ 4℞/3 ad 5q/4ℭ Reduco primùm ad eandem denominationem, ut hic asscriptum vides: Ex reductione fiunt 16qq/12ℭ & 15q/12ℭ: Hæc addita, faciunt 16qq p 15q/12ℭ, quæ sic enunciantur, 16 Biquadrata p.15 Quadrata diuisa per 12 Cubos.

4℞/3 5q/4ℭ
16qq/12ℭ 15q/12ℭ

Subtractio.

Sint 4℞ subtrahendæ à 16qq p 15q/12ℭ. Reduco ad eandem Denominationem, proueniunt 48qq/36ℭ & 48qq p 45q/36ℭ. Iam aufero 48qq/36ℭ à 48qq p 45q/36ℭ, supersunt 45q/36ℭ, hoc est, 5q/4ℭ: ut patet ex Absolutoris doctrina.

Multiplicatio.

Sint multiplicanda 16qq p 15q/12ℭ per 4℞/3: proueniunt 64β p 60ℭ/36ℭ. Hoc est, 16β p 15ℭ/9ℭ.

Diuisio.

Sint diuidēda 16β p 15ℭ/9ℭ per 4℞/3 exeūt 48β p 45ℭ/36qq: hoc est, 16β p 15ℭ/12qq.

DE ÆQVATIONE.

CAP. XI.

IN Æquatione & Radicū extractione artis summa consistit. Proinde utranque quàm poterimus clarissimè explicabimus: ut totam Algebram ad unum scopum dirigamus. In quo etiam Stifelius sedulam nauauit operam.

Æquatio itaque, est duorum Numerorum diuersè denominatorum ad vnam æstimationem reductio. Veluti quum dicimus 1 Aureum valere 48 Asses, fit æquatio inter 1 cum sua Aurei denominatione, & 48 quæ ab Asse denominantur. Ita quum dicimus 1q æquare 4 ℞, æquatio fit inter Vnitatem per Quadratum denominatam, & 4, quæ à Radice denominantur. Si igitur 1q valeat 16: ipsas 4 ℞ itidem valere 16 necesse est.

Atque vt rem manifestiorem faciamus, hoc proponemus Exemplum,

Quæritur Numerus à quo tertia & quarta pars ablatæ, relinquant 10. Primùm omnium, nemo est qui nesciat, Numeros qui in Quæstionibus existunt, eos esse per quos ratiocinamur, vt latentes Numeros exprimamus. Quapropter ad hanc Quæstionem explicandam, Denarium ducem esse conuenit: in quo si esset perspectum Denarius ipse quotam partem Numeri latentis quem quærimus, constituat: is ipse Numerus ilicò innotesceret. Nam si compertum habeam, verbi causa, Senarium esse duas tertias Numeri cuiuspiam mihi incogniti: sanè diuiso Senario per $\frac{2}{3}$, statim eum numerum obtinebo, nempe 9. Quæstio itaque nostra sic exercenda est, vt ratiocinando perquiramus de Denario, quota pars esse posit Numeri illius latentis. Ars igitur ea est.

Pro Numero incognito pono 1℞: scilicet fingo 1℞ æqualem esse ipsi Numero quem quæro. Tum sic rationem ineo. Tertia pars 1℞, est $\frac{1}{3}$ ℞: quarta itē eiusdē, est $\frac{1}{4}$ ℞: Hæ partes ab 1℞ ablatæ, relinquūt $\frac{5}{12}$ ℞. Ergo quemadmodum 1℞ æqualis est Numero ignoto, sic $\frac{1}{3}$ ℞ est æqualis tertiæ parti ipsius Numeri: & $\frac{1}{4}$ ℞ est æqualis quartæ eiusdem parti. Quum itaque ab 1℞ abstulero $\frac{1}{3}$ ℞ & $\frac{1}{4}$ ℞, atque item à Numero ignoto intellexero auferri trietem & quadrātem, secundùm Quæstionis sententiā erunt, ex communi animi Notione, duo vtrinque residua æqualia. Hæc autē residua, sunt $\frac{5}{12}$ ℞, & 10. Quapropter erūt $\frac{5}{12}$ ℞ & 10 inter se æqualia. Atque ea est æquatio inuenta. Nā sicut $\frac{5}{12}$ ℞ exhibent quinque duodecimas Radicis, quam posui æqualem Nume-

ro inueniendo: ita denarius residuus, quinque duodecimas numeri ipsius inueniendi constituit. Quare diuisis 10 per $\frac{5}{12}$, numerum signo ℞ antepositum, exibunt 24: atque is erit Numerus qui quærebatur. Probatio. Tertia pars 24, est 8: quarta eiusdem, est 6: quas si à 24 dempserimus, relinquentur 10, sicut in Quæstione fuit constitutum.

Vides hoc totum pendere à communi illa sententia, Si ab æqualibus æqualia auferantur, quæ relinquuntur erunt æqualia. Diuisio autem id perficit, nempe Regula illa laudatissima quatuor quantitatum, quam vulgò Regulam Trium vocant.

Quæret fortasse quispiam quánam ratione hæc Regula Trium in hunc locum inducatur: & quam collocationem habeant Numeri. Nimirum sic stant Numeri ad Regulā, $\frac{5}{12}$ ℞ dant 10, quātum dat 1 ℞? Multiplico 1℞ per 10, fiunt 10 ℞: Diuido 10℞ per $\frac{5}{12}$ ℞, exeunt 24.

Altero Exemplo studiosos veluti manu docebimus. Alexander Magnus, quum aliquando Calisthenem Philosophum in familiare colloquium adhibuisset, atque in ætatum mentionem, vt fit, incidisset: Ego, inquit, Ephestionem duobus annis anteeo: Clytus nostram amborum ætatem quatuor annis superat: Cui Calisthenes, Cōmode, inquit, ô Rex, mihi isthæc annorum collatio memoriam refert patris mei: qui quum nonagesimum sextum attigerit annum, tres vestrûm, dum vixit, ætates compleuit. Quæritur quotum ætatis suæ annum ageret Alexander, tum Ephestion & Clytus.

Pro annis Ephestionis qui minimus natu fuit, pono 1℞: Eruntque anni Alexandri, 1℞ p.2: Clyti verò, 1℞ p. 6: Quorum summa, nempe 4℞ p.8. erit æqualis 96. Quod antè quàm absoluamus, de Transpositione, quæ AEquationi interuenit, quædā necessaria præcipiemus.

DE TRANSPOSITIONE PARticularum AEquationis, Signorúmque Pluris & Minoris.

CAP. XII.

OMnis AEquatio sic est instituenda, vt Numerus Denominatus, si vnicus fuerit (cuiusmodi in vltimo Exẽplo, 4 ℞) separatim ac per se reliquis AEquationis particulis æquetur: aut si fortè plures Denominati fuerint, qui maximæ erit denominationis solus reliquis AEquationis partibus æquiparetur. Quod quidem per Transpositionem sic fiet.

Signum Pluris transpositum transit in Minus: Contrà, Signũ Minoris transpositum, transit in Plus. Vt in nostro Exemplo, 4 ℞ p.8 æquantur 96: sic transponendæ sunt partes, vt 4 ℞ solitariè stent æquales reliquo AEquationis. Scilicet aufero p.8 ex 4 ℞ p.8: simul eadem 8 aufero ex altera AEquationis parte, vtpote ex 96, vt constet æqualitas partium. Et erunt 4 ℞ æquales 88. Et iam formata est AEquatio: qua 4 ℞ per se æquantur 88. Diuido igitur 88 per 4, Numerum Radicum, proueniunt 22: Et tantundem valet 1 ℞ posita pro annis Ephestionis. Tres enim mihi quantitates comparaui ad Regulam Trium, 4 ℞ æquantur 88, cui æquatur 1 ℞? Duco 1 ℞ in 88, fiunt 88 ℞: has diuido per 4 ℞, exeunt 22, pro annis Ephestionis. Erunt igitur anni Alexandri, 24 (nempe 2 supra Ephestionis annos) Ii iuncti, faciunt 46. Quare Clytus annos habuit 50: scilicet 4 supra amborum ætatem.

Aliter poterimus ratiocinationem inire. Pro annis Alexandri, pono 1 ℞: Et erunt Ephestionis anni, 1 ℞ m.2: Clyti verò, 1 ℞ p. 2: Hæc addo, fiunt 4 ℞, æquales 96 (nam p.2 & m.2 se mutuò perimunt) Quare erit 1 ℞, 24, numerus annorum Alexandri, vt

priùs

priùs. Atque hinc cæterorum anni colligentur, ex præscripto Quæstionis.

Hoc loco obiter monebimus quonam pacto Numeri Rebus, & è diuersò, Res Numeris accõmodentur. Verbi gratia, Prior nostrarum Quæstionum, quæ de Numero proponit, sic institui poterat,

Mercator, tertiam partem Aureorum quos habuit, frumento emendo, quartam vino insumpsit. Confecta emptione, aureos reliquos 10 habuit. Quæritur Aureorum summa. Altera autem Quæstio ad Numeros reuocabitur in hæc verba,

Quæruntur tres Numeri, quorum primus secundum binario superat: tertius verò ambos quaternario: atque ij tres simul positi efficiunt 96. Id enim Mathematicis familiare est, vt Quæstiones ad species Numerorum accommodent: quæ postea ad rerum tractationem vsúmque conuertuntur.

Alia Transpositionis Exempla.

Sint 6 ℞ æquales 12 ℞ m.24. Vtrinque aufero 6 ℞: Tum 6 ℞ m. 24 æquantur 0 seu nihilo: vt necesse sit 6 ℞ & 24 simul æquari, quum 6 ℞ & 24 se mutuò tollant. Vel, transpono 24: fient 12 ℞, æquales 6 ℞ p.24 (mutatur enim p. in m.) Vtrinque aufero 6 ℞, manebunt 6 ℞, æquales 24, vt priùs.

Item, Sint 6 ℞ p.4 æquales 12 ℞ m.20. Aufero vtrinque 6 ℞: manent 6 ℞ m.20, æqualia 4: hec m. 4 si transtuleris, fient 6 ℞ æquales 24.

Item, Sint 8 ℞ m.10 æquales 12 ℞ m. 26. Transpono m. 10, fiunt 8 ℞ æquales 12 ℞ m.16. Deinde ablatis vtrinque 8 ℞, manebunt 4 ℞ æquales 16. Vel transpono 26: fient 12 ℞ æquales 8 ℞ p.16. Tum ablatis vtrinque 8 ℞, manebunt, vt modò, 4 ℞ æquales 16.

Præterea si ex Quæstionis cuiuspiam deductione occurrerit huiusmodi Æquatio, 1q p. 6 m. 1℞ æqualia 4℞ p. 2: tunc sic fiet transpositio, 1q m. 1℞, æquale 4℞ m. 4: inde 1q æquale 54℞ m. 4.

Ad summam, Æquatio sic erit componenda, vt Radices solæ æquentur Numero: Quadrata sola, Radicibus & Numero: denique Cubi soli, si incidant, Quadratis, Radicibus & Numero, pro Quæstionis proposito & deductione.

DE REDVCTIONE AD minimam Denominationem.

CAP. XIII.

Quemadmodum in Absolutorum fragmentis, Numerator & Denominator secundum proportionem æstimantur (scilicet $\frac{12}{15}$ tantundem notant, quantum $\frac{4}{5}$): ita in Numeris Denominatis nihil tam spectamus, quàm proportionem ipsam. Proinde ad simplicissimam æstimationem reducuntur, hac ratione. Aufer ab vtraque Æquationis parte, æqualem rationem Numerorum, æqualemque Denominationem Signorum. Vt, si fuerint 3c æquales 12 q m. 9℞: ex Numerorum sola reductione, erit 1c æqualis 4℞ m. 3℞ (scilicet diuiduntur singuli Æquationis numeri, per numerum maximæ denominationis, nempe per 3): ex sola verò signorum reductione, erunt 3q æqualia 12℞ m. 9: Scilicet aufero ℞ à c, manet 3q: deinde à q aufero idem signum ℞: & demum idem aufero à seipso: manent 12℞ m. 9. Tandem si vtranque reductionem feceris, erit 1q æquale 4℞ m. 3.

DE

DE REDVCENDA AEQVATIONE Minutiarum ad Æquationem Integrorum.

CAP. XIIII.

Æquatio Minutiarum ad Integra sic reducetur. Multiplica Numeratorem vnius per Denominatorem alterius: Inter producta manebit eadem ipsa æquatio quæ fuit inter Minutias. Veluti si fuerint $\frac{4℞\,p\,18}{1℞}$ æqualia $\frac{12℞\,m\,58}{2}$, multiplica 4℞ p. 18 per 2, fiunt 8℞ p. 36. Deinde multiplica 12℞ m. 58 per 1℞, fiunt 12 q m. 58℞. Stabitque æquatio eadem inter 8℞ p. 36 & 12q m. 58℞, que erat inter $\frac{4℞\,p\,18}{1℞}$ & $\frac{12℞\,m\,58}{2}$. Minus tædiosum erit opus si Denominatores transtuleris, vt vides in subiecta formula.

Item si fuerint 2q m. 65 æqualia $\frac{4℞\,p\,60}{2℞}$, erit positio in hunc modum, translatis Denominatoribus,

$$\frac{4℞\,p\,18}{2} \quad \frac{12℞\,m\,5}{1℞} \qquad\qquad \frac{4℞\,p\,60}{1} \quad \frac{2q\,m\,65}{2℞}$$

8℞ p. 36   12q m. 58℞.   4℞ p. 60   4c m. 130℞.

Huius autem Reductionis ratio hæc est, quòd quum Minutiæ decussatim multiplicantur, scilicet quum eosdem Denominatores acquirunt: eadem exurgit proportio inter Numeratores, quæ inter Minutias ipsas. Quo fit, vt quum duæ Minutiæ æquales fuerint, tam Numeratores quàm Denominatores æquales euadant. Quùm itaque solam proportionem spectemus, ea nobis abundè satisfaciet quæ est inter Numeratores. Proinde Denominatores abiiciuntur tanquam otiosi.

Compendium.

Si fractio Absolutorum occurrat æqualis fractioni Signatorum, duc Numeratorem absolutum in Denominatorem signatum: productum diuide per Denominatorem absolutum: Numerus Indi-

cans, æqualis erit Numeratori signato. Vt, Si $1\frac{13}{36}$ ℞ æquantur $4\frac{5}{9}$, id est, Si $\frac{49}{36}$ ℞ æquantur $\frac{29}{6}$, duc 29 in 36, fiunt 1044: diuide 1044, per 6, exibunt 174, quibus æquales erunt 49 ℞.

DE RADICVM EXTRACTIOne ex Denominatis Compositis, & Diminutis.

CAP. XV.

Qvum extrahenda fuerit Radix ex Composito aut Diminuto, vide imprimis an signũ Pluris particulam absolutam afficiat, vt in hoc Diminuto, 54 m. 3 ℞: an particulam signatam, vt in hoc, 20 ℞ m. 96 (In Compositis autem vtranque afficit) Tum ad Radicis inuentionem sic commentare.

I. Dimidium Numeri Radicum vnà cũ signo Pluris aut Minoris sepositum, serua:

II. Huius dimidij quadratum adde ad Numerum absolutum, si ipse fuerit signo Pluris affectus: vel aufer minorem à maiori, si signo Minoris fuerit notatus.

III. Huius vltimi Numeri, qui ex Additione aut Subtractione prouenit, Radicem adde ad dimidium numeri Radicum sepositum, si fuerat signo Pluris affectum: sin signo Minoris, aufer minorem à maiori: Productum erit Radix quæ quærebatur.

Exemplum. Quæro Radicem huius Compositi Numeri, 6 ℞ p. 16. Primò, dimidium Numeri Radicum, scilicet 3, sepono cum suo signo Pluris. Deinde, huiusce dimidij Quadratum, scilicet 9, addo ad 16 (nam 16 signo Pluris notantur) fiunt 25. Tertiò, Radicem 25 (ea est 5) addo ad dimidium Numeri Radicum sepositum (quum & ipsum signo Pluris sit notatum) fiunt 8, Radix

dix quæsita.

Alterum Exemplum. Inuenienda est Radix huius Diminuti, 54 m. 3 ℞.

Dimidium numeri Radicum, $1\frac{1}{2}$, seorsum pono cum suo signo Minoris. Deinde huius quadratũ, $\frac{9}{4}$, addo ad 54 (nã 54 signo p. notantur) fiunt $56\frac{2}{4}$. Tertiò, extraho Radicem ab hoc ipso numero $56\frac{2}{4}$, ea est $\frac{15}{2}$, seu $7\frac{1}{2}$: ab hac Radice aufero dimidium numeri Radicum sepositum (nam huius signum est m.) supersunt 6, Radix 54 m. 3 ℞.

Exemplum rursus de Diminuto. Sit educenda Radix ab hoc Diminuto, 20 ℞ m. 96.

Hîc animaduertendum quosdam esse Numeros quorum duplex est Radix: eos nimirum qui numerum absolutum habent signo Minoris notatum, qualis est numerus propositus, 20 ℞ m. 96.

Dimidium igitur numeri Radicum, scilicet 10, pono seorsum cum suo signo Pluris. Tum duco 10 in se, fiunt 100: à quibus aufero 96: supersunt 4. Demum Radicem 4, scilicet 2, addo ad dimidium sepositum, 10: fiunt 12, Radix prior propositi Numeri, 20 ℞ m, 96. Vel aufero 2 ab iisdem 10: manent 8, altera eiusdem Radix. Prior Radix, 12, sic probatur. 20 ℞ faciunt 240 (nam 20 in 12 ducta faciunt 240.) à quibus aufero 96, manent 144: quorum Radix 12. Radix vero 8, sic. 20 ℞ valent 160: à quibus demo 96, supersunt 64: quorum Radix 8. Atque eiusmodi numeri semper duplicem habent Radicem. Hac tamen quæ sequitur, exceptione.

Sit extrahẽda Radix ab hoc numero, 12 ℞ m. 36. Dimidium numeri Rad. est 6: hæc duco in se, fiunt 36: qui numerus æqualis est alteri particularum numeri propositi. Qua in specie vnicam habet Radicem Numeri Diminuti. Nam quum hoc loco 36 à 36 sustuleris, nihil reliqui est, quod ad dimidium numeri Radicum addi, aut ab eodem subtrahi possit. Id verò fit, quum Numerus *ipse absolutus, est quadratus: Cuius Radix est ea quæ inuestigatur. Vt in hoc Exemplo, Radix 36, est ipsa Rad. Numeri propositi, 12 m.36, nempe 6.*

DE INVENIENDIS GENERAtim Radicibus Denominatorum.

CAP. XVI.

IN Radice Quadrata, si absoluta particula Compositi aut Diminuti fuerit numerus Quadratus: huius plerunque Radix, erit ipsa quam quærimus. Vt, si sit 1q æquale 12℞ m. 36: Radix 36, est ipsa totius Diminuti Radix. Vel erit dimidia pars ipsius Numeri absoluti: Vt, 1q æquale 18℞ m.32: dimidium 32, quod est 16, Radix est Diminuti 18℞ m. 32. Vel erit tertia pars Numeri ipsius absoluti: Vt 1q æquale 2℞ p. 15: tertia pars 15 vtpote 5, est Radix Compositi, 2℞ p. 15. Et vt summatim dicam, considerandum in quas partes diuidatur absolutus Numerus. Vt in hoc Exemplo, 1q æqualis 10℞ p. 24, licet 24 multiplices habeat partitiones: tamen rectè ratiocinanti sese offerent 12 pro Radice. Nam si 8 sumpseris, colliges 10℞ esse 80: quibus si addideris 24, fient 104: qui Numerus quadratus non est. Nec Quadratum offendes, si vel 3, vel 4, vel 6 sumpseris: at si 12 delegeris, erunt 10℞, 120: quibus si addideris 24, fient 144, Numerus quadratus. Ad huiusmodi autem negotium, magno erit adiumēto Tabula Numerorum Creatorum à nobis posita ad calcem libri. Atque vt rem familiarius explicemus, quoniam 10℞ p. 24 ponitur Numerus Quadratus, necesse est in Numero absoluto, scilicet in 24, latêre eum Numerū qui quæritur in Radicem: atque in ipso absoluto aliquot Radices definitè contineri, quæ cū 10℞ absoluant

soluant numerum Quadratum: atque eæ sunt duæ. Nam 12 ℞ in nostro exemplo facient 1q, nempe 144: Cuius Radix erit 12. Omnis quippe numerus Quadratus tot Radicibus completur quot Vnitates habet ipsa Radix. Vt 9, tres habet Radices: 49, septem: ac sic in reliquis.

Alias verò Radices superiores simili iudicio inuestigabimus. Vt sit 1ȼ æqualis 3q p.50. Scio in 50 latêre summam aliquam quadratorum exactè: omnis enim Cubus Quadratis constat. Quū igitur in 50 nullus numerus exactè cōtineatur Quadratus, præter 25: statim colligo 5 esse Radicem numeri propositi, 3q p.50.

Item sit 1ȼ æqualis 1440 p.2q: vel sit æqualis 2016 m. 2q: quia in 1440, atque item in 2016, reperio 144 perfectè contineri: colligo Radicem esse 12.

Etiam in Minutiis hæc inuestigationis methodus locum habebit. Sint enim 28 ȼ æquales 18q p. $\frac{8}{9}$. Denominator quidem Cubus non est: sed tamen fractio ipsa ad $\frac{24}{27}$ reducitur, quæ tres Cubos complectuntur. Cubus igitur, est $\frac{8}{27}$: cuius Radix, $\frac{2}{3}$, est Radix quæsita.

Eodem ingenio si $\frac{8}{9}$ pro 2q sumpserimus, statim eliciemus æstimationem 1q esse $\frac{4}{9}$: Cuius Radix itidem $\frac{2}{3}$. Nihil enim refert vtrum Cubi Radicem perquiramus an Quadrati, dūmodò progressio ipsa retineatur: quum eadem sit Radix Cubica 27, quæ est Quadrata 9.

Quòd si in particula absoluta nulla sit fractio, attende diligenter ad Numerum denominatum seu signatum: qui certè eiusmodi erit, vt in Cubos aliquot diuidi possit. Is autem Cubus erit Denominator: In absoluto, Numerator reperietur: veluti, 54 ȼ sint æquales 18q p.8. Diuide 54 in suas partes: habebis 27, Cubū pro Denominatore. Numerator verò erit 8. eritque $\frac{8}{27}$, Cubus ipse: cuius Radix est $\frac{2}{3}$, quæ quærebatur.

Est & alia facilitatis via, vt particulas æquationis diuidas per Numerum maioris signi. Diuisio enim Radicem deteget.

Vt ſi 54 ce æquentur 9 q p. 12: diuide 9 q per 54: itidem 12 per 54: habebis Cubi æſtimationem, $\frac{9}{54q}$ *p.* $\frac{12}{54}$ *: ſcilicet 1 ce æqualem* $\frac{3}{16q}$ *p.* $\frac{2}{9}$*. Vides Denominatorem, eſſe Quadratum. Huius ſume Radicem pro Denominatore: cui impone 2, Numeratorem: habebis* $\frac{2}{3}$*, Radicem.*

Rurſus ſi, vt modò propoſuimus, 54 ce æquentur 18 q p. 8: Diuide 18 q & 8 per 54: Erit 1 ce æqualis $\frac{18q}{5q}$ *p.* $\frac{8}{54}$ *: vel æqualis* $\frac{1q}{3}$ *p.* $\frac{4}{27}$ *. Vbi Numerator abſoluti Numeri eſt Qradratus, Denominator verò, Cubus. Erit itaque Radix* $\frac{2}{3}$*. Quemadmodum ſi 8 q æqualia fuerint 2: erit 1 q æſtimatio,* $\frac{2}{8}$*, hoc eſt* $\frac{1}{4}$ *: cuius Radix, eſt* $\frac{1}{2}$*.*

Ex inſpectione autem Numeri, Radicem eſſe Numerum fractum facilè intelligemus: quum ſcilicet numerus maioris ſigni ſuperat numerum minoris numerúmque abſolutum ſimul ſumptos. Vt in poſtremo Exemplo, 54 ce æquales 18 q p. 8. Vides 54 plus eſſe quàm 18 & 8. Atque huius rei ratio eſt, quòd Minutiæ quadratæ aut Cubicæ ſemper minùs valent quàm Radices. Scilicet $\frac{4}{9}$ *minus ſunt quàm* $\frac{2}{3}$*. Minutiæ quippe multiplicatæ, maiores quidem Denominatores producunt, ſed minorem æſtimationem. Breuiter, fractiones multiplicare, eſt minutos Numeros minutiores facere.*

Hæc de Radicibus inueniendis prolixiùs docui, vt ingenia diſcentium ad ſpeculandum excitarem. Licet enim eiuſmodi deductiones, præter id quòd Numeros abſolutos duntaxat complectuntur, iis minimè ſatisfaciant, qui in demonſtrationibus fortuitis nõ conquieſcunt: eæ tamen in arte, locum exercitationis aliquem habent, dum ſummus ille Matheſeos autor, maius aliquid generauerit in animis hominum. Ex ipſis enim venamur æſtimationem Cubi æqualis Radicibus & Numero: Cubi & Radicum æqualiũ Numero: imò Cubi æqualis Quadratis & Radicibus: Cubi æqualis Quadratis, Radicibus & Numero. Quorum artem nemo adhuc (quòd ſciam) perueſtigauit: arduum opus & diuini planè

fauoris. Nos verò pro noſtra parte in tam plauſibili ſtudio, aliiſque eiuſdem negotij partibus, noſtram, dum tempus tulerit, adhibebimus operam. Iam ad Algebræ ſummam explicandam ingrediamur.

REGVLÆ, QVAM ALGEbram vocant, ſumma.

CAP. XVII.

HActenus Algebræ materiam ſuppeditauimus: Nunc Regulæ ſententiam ſummatim exponemus in hæc verba,

Pro Numero incognito pone Radicem vnam: Cum qua exerce Quæſtionis propoſitum, donec AEquationem inueneris, eámque reduxeris. Tum per numerum Signi ſolitarij diuide partem alteram AEquationis, vel ab ea extrahe Radicem quam Signum oſtendit. Numerus Diuiſionis vel Extractionis, erit is ipſe quem inueſtigabas.

Hæc eſt Regulæ illius celeberrimæ, quam Algebram vocant, ſententia. Quæ Capita omnia ab aliis hactenus tradita vniuerſe complectitur: vt non temerè à nobis antea dictum ſit, hanc artem in Radicum inuentione totam ferè verſari. Sed Radices inuenire imprimis arduum & difficile, præſertim Cubicas, vt paulò antè meminimus. Porrò nonnulli pro 1 ℞ vnam Rem ponunt: alij Poſitionem dicunt. Quæ quanuis in idem recidant, tamen Radicis vox vna omnium aptiſſima: quemadmodum ex Progreſſione Geometrica, quæ per Arithmeticam Progreſſionem exponitur, initio operis declarauimus: tum ex collectione quæ ad ſcopum ducit. Radice enim inuenta, Res detegitur.

Iam verò exempla Quæstionum proferemus, quibus Regulæ vsus extet manifestior, pauca illa quidem, sed ex quibus lector studiosus alia sibi cuiuscunque modi explicare posit: nisi quòd Cubicas Æquationes nullas dedimus: Harū enim æstimatio (vt iam non semel meminimus) nondum in artem exposita est. Quædam autem ascribemus, quæ sine Algebræ adminiculo explicari possent. Sed nihil vetat nos vnum scopum alia atque alia via attingere: præsertim in arte docenda. Verùm antequā Quæstiones proponamus, Problemata quædam præscribemus ex Stifelio cognitu non indigna: vt quæ ad Minutias explicādas cōpendium afferāt.

DE COMPENDIIS MInutiarum.

CAP. XVIII.

Problema I.

Dati Numeri partes nominatas ad ipsum Numerum compendiosè addere.

Sit numerus datus, $\frac{3\text{℞}\,p\,6}{3}$, *cui sint addendæ* $\frac{2}{5}$ *eiusdem. Adde* $\frac{2}{5}$ *ad* 1, *fiūt* $\frac{7}{5}$: *multiplica* $\frac{3\text{℞}\,p\,6}{3}$ *per* $\frac{7}{5}$, *proueniunt* $\frac{21\text{℞}\,p\,42}{15}$, *seu* $\frac{7\text{℞}\,p\,14}{5}$, *summa quæsita. Probatio. Sumantur* 3 *in Radicem: tunc æstimatio* $\frac{3\text{℞}\,p\,6}{3}$ *erit* 5: *quibus adde* $\frac{2}{5}$, *nempe* 2: *fiunt* 7: *ac tanti erunt* $\frac{7\text{℞}\,p\,14}{5}$: *scilicet* 7 ℞ *sunt* 21, *quæ cum* 14 *faciunt* 35. *hæc diuisa per* 5, *indicant* 7.

Probl. II.

Dati Numeri partem nominatam ad alteram ipsius partem compendiosè addere.

Sit datus Numerus, $\frac{15\text{℞}\,m\,12}{8}$. *Volo partem eius dimidiā ad tertiā eiusdē addere. Addo* $\frac{1}{2}$ *ad* $\frac{1}{3}$, *fiunt* $\frac{5}{6}$: *per* $\frac{5}{6}$ *multiplico* $\frac{15\text{℞}\,m\,12}{8}$, *proueniunt* $\frac{75\text{℞}\,m\,60}{48}$, *summa quæsita. Probatio constabit, si* 4 *in Radicem*

Radicem posueris.

Probl. III.

A dato Numero partes nominatas auferre.

Sit datus numerus, $\frac{9q\,p\,10\text{℞}\,m\,21}{5\text{℞}}$, *à quo sint auferendæ* $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$. *Eas aufero ab* 1, *relinquitur* $\frac{1}{6}$: *Per* $\frac{1}{6}$ *multiplico* $\frac{9q\,p\,10\text{℞}\,m\,21}{5\text{℞}}$: *fiunt* $\frac{9q\,p\,10\text{℞}\,m\,21}{3\text{℞}}$, *summa quæsita. Ad probationem, sumātur* 3 *in Radicē. Tunc enim æstimatio* $\frac{9q\,p\,10\text{℞}\,m\,21}{5\text{℞}}$, *erit* 6: *à quibus ablatis* $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, *relinquitur* $\frac{1}{6}$, *scilicet* 1. *Et tantundem efficiunt* $\frac{9q\,p\,10\text{℞}\,m\,21}{30\text{℞}}$.

Probl. IIII.

Dati Numeri partem nominatam ab eiusdem parte altera nominata auferre.

Sit datus Numerus, $\frac{16\text{℞}\,p\,24}{6}$: *ab huius tertia parte volo auferre quartam eiusdem. Aufero* $\frac{1}{4}$ *ab* $\frac{1}{3}$, *superest* $\frac{1}{12}$: *per* $\frac{1}{12}$ *multiplico* $\frac{16\text{℞}\,p\,24}{6}$, *proueniūt* $\frac{16\text{℞}\,p\,24}{72}$, *summa quæsita. Probabitur, sumptis* 3 *in Radicem.*

Probl. V.

Dati numeri partes nominatas inuenire.

Hoc problema sub secundo continetur. Si enim $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ *huius fractionis,* $\frac{15\text{℞}\,m\,12}{8}$, *fuerint inueniēdæ: prouenient* $\frac{75\text{℞}\,m\,60}{48}$. *Quòd si particula sola fuerit, vt* $\frac{1}{3}$, *per hanc multiplica Numerum datum: Scilicet per* $\frac{1}{3}$ *multiplica:* $\frac{15\text{℞}\,m\,12}{8}$ *fient* $\frac{15\text{℞}\,m\,12}{24}$.

Probl. VI.

Numerum, à quo partes subtractæ fuerint, reponere.

Hic numerus, $\frac{75\text{℞}\,m\,60}{48}$, *constituat dimidiam & tertiampartem cuiuspiam Numeri ignoti. Volo eum Numerum inuenire. Addo* $\frac{1}{2}$ *ad* $\frac{1}{35}$, *fiunt* $\frac{5}{6}$: *per* $\frac{5}{6}$ *diuido* $\frac{75\text{℞}\,m\,60}{48}$, *exeūt,* $\frac{450\text{℞}\,m\,360}{240}$, *hoc est,* $\frac{15\text{℞}\,m\,12}{8}$, *numerus quæsitus. Probatio ex superioribus facilis est. Iam ad Quæstionum explicationes veniamus.*

DE EXEMPLIS QVÆ DIVI-sione sola absoluuntur.

Quæstio I.

CAP. XIX.

QVæritur Numerus, qui per 9 multiplicatus, & producto ad 90 addito, tantundem efficiat quantum is ipse Numerus per 14 multiplicatus.

Pro eo Numero pono 1℞. Multiplico 1℞ in 9, fiunt 9℞: his addo 90, fiunt 9℞ p. 90. Tum duco 1℞ in 14, fiunt 14℞, æquales 9℞ p. 90: id est, 5℞ æquales 90. Igitur, diuido 90 per 5, exeunt 18, Numerus quæsitus. Ad probationem, duco 18 m. 9, fiunt 162: quibus addo 90, exurgunt 252. Iam 18 ducta in 14, efficiunt eadem 252.

Hæc Quæstio ad res sic traducitur. Viator quidam 9 miliaria quotidie conficit: alter idem iter instituit, atque indidem: sed decimo pòst die profectus, 14 miliaria singulis diebus incedit. Quæro, hic posterior quoto die priorem assequetur. Quum itaque prior iam 90 miliaria peregerit, 10 scilicet diebus, Pono ambos simul futuros in 1℞ dierum. Tum per Regulam 3, si 1 dat 9, quantum dat 1℞? fiunt 9℞, in priorem: Deinde si 1 dat 14, quantum dat 1℞? fiunt 14℞, in alterum. Quum igitur confecerit prior 9℞, præter 90 miliaria iam confecta: alter verò 14℞: tum simul futuri sunt. Quamobrem 14℞ sunt æquales 9℞ p. 90: id est 5℞, æquales 90, vt modò.

Hoc loco dubitabit quispiam, Quum initio per 1℞, dies significarentur, quur interueniente Regula 3, per 9℞ significantur miliaria? Id verò sic accipiendum, in Regula 3, non tam miliaria sola per 9℞ significari, quàm miliaria per 1 diem multiplicata. Secundus enim Numerus, 9, habetur pro Numero per Vnum multiplicato, sicque diem & miliaria includit: qualis etiam prima positio Radicis fuit. Quum enim pono 1℞, non tam Radicem intelligo dierum, quàm miliarium per dies multiplicatorum. Quoniam verò Diuisio multiplicationem detegit, & contrà: fit vt numerus ex Diuisione proueniens, dies ipsos indicet, quum antea in multiplicatione miliaria cum diebus confunderentur.

Hæc eadem Quæstio sic inuerti poterit. Viator singulis diebus 9 miliaria incedit: alter decimo pòst die, iter ingreditur: quot miliaria hic incedet singulis diebus, vt priorem assequatur 18 diebus? Constat ex Regula 3, priorem 252 miliaria 18 diebus ambulasse. Alter itaque singulis diebus ambulet 1℞: ergo 18 diebus confecerit 18℞. Atque eæ erunt æquales 252. Quare diuisis 252 per 18, exibunt 14 miliaria.

Quæstio II.

Septem vlnæ panni purpurei cum tribus vlnis panni nigri, veneunt 58 Aureis: atque eadem æstimatione, duæ vlnæ panni purpurei cum tribus vlnis nigri, veneunt 23 Aureis. Quanti est vlna vtriusque? Pro vlna panni purpurei, pono 1℞: & erunt 7 vlnæ, 7℞: tres verò vlnæ panni nigri, erunt residuum 58, scilicet 58 m. 7℞. Duæ porrò vlnæ purpureæ, erunt 2℞: 3 verò nigræ, erunt 23 m. 2℞. Erúntque 23 m. 2℞ æqualia 58 m. 7℞, quum vtraque sit æstimatio 3 vlnarum panni nigri. Adde ad vtrunque 2℞: erunt 23 æqualia 58 m. 5℞: hoc est, 5℞ æquales 35. Diuide iam 35 per 5: exibunt 7, ac tot Aureis venibit vlna panni purpurei: proinde 7 vlnæ, 49 Aureis: 3 verò vlnæ panni nigri, erunt residuum ex 58, scilicet 9: erúntque 3 Aurei in vlnas singulas. Cætera sunt manifesta.

Hanc Quæstionem facilius explicauimus quàm cæteri. Hinc autem facilitas Æquationis pendet, quòd in vtroque Quæstionis capite interueniat numerus ternarij. Sed & si mutetur Numerus, omnino erit expedita æquatio, ex Regula 3. Sit enim quæstio in hæc verba, 7 vlnæ panni purpurei cum 3 vlnis nigri, veneunt 58 Aureis: atque eadem pretij ratione, 2 vlnæ purpurei cum 4 vlnis nigri, veneunt 26 Aureis. Pro vlna purpurei, pono 1 ℞, vt modò. Erúntque 7 vlnæ, 7 ℞: & 3 vlnæ nigri, 58 m. 7 ℞: 2 verò vlnæ purpurei, 2 ℞: denique 4 vlnæ nigri, 26 m. 2 ℞. Iam ex 4 vlnis nigri, inquiram quanti veneunt 3 vlnæ quò 3 aliæ parentur, quæ sint 3 prioribus æquales: scilicet, si 4 vlnæ panni nigri veneunt 26 m. 2 ℞, quanti venibunt 3? fient 19 $\frac{1}{2}$ m. 1 $\frac{1}{2}$ ℞. atque hæc erunt æqualia æstimationi 3 vlnarum priorum, quæ est 58 m. 7 ℞. Adde itaque & subtrahe ad Æquationē constituendam, inuenies 38 $\frac{1}{2}$, æqualia 5 $\frac{1}{2}$ ℞. Diuide ex Algebræ sententia: exibunt 7, æstimatio Radicis, vt priùs.

Quæstio III.

Mercator tribus emptionibus singulis parem Aureorum summam impendit: quarum vnaquaque lucrifacit $\frac{1}{12}$ summæ totius Tum nummus denuò in commercium positus, lucratur decimam partem totius summæ priore lucro auctæ. Is tandem habuit omnino 165 Aureos. Quæ fuit prima aureorum summa?

Fuerit 1 ℞. Proinde prius lucrum fuit $\frac{3}{12}$ ℞: hoc est, $\frac{1}{4}$ ℞: secundum verò fuit $\frac{1}{10}$ $\frac{5}{4}$ ℞: ea est $\frac{1}{8}$ ℞: hæc tria adde, fiunt $\frac{21}{8}$ ℞, quibus æquantur 165. Diuide 165 per $\frac{11}{8}$, exibunt 120, summa Aureorum quæsita.

Quæstio IIII.

Quæruntur duo Numeri in ratione tripla, quorum minor à maiori subductus tantum relinquat quantum maior per minorem diuisus.

Prior est 1 ℞: alter 3 ℞. Aufer 1 ℞ à 3 ℞, manent 2 ℞. Diuide 3 ℞ per 1 ℞, exeunt 3. Itaque 2 ℞ æquantur 3. Diuide iam 3 per 2, exeunt $\frac{3}{2}$. Is erit prior Numerorum: alter $\frac{9}{2}$.

Quæstio V.

In Regio exercitu, peditum numerus octuplo superat equitum numerum. In eo recensendo, dantur 3 Aurei in peditem: 12 in equitem. Summa aureorum, est 18000. Quantus est vtrinque numerus? Pro numero equitum, pono 1 ℞: vt sit peditum numerus, 8 ℞. Tum sic stabit Regula 3,

1	12,	1 ℞?	12 ℞.	Erunt itaque
1	3,	8 ℞?	24 ℞.	36 ℞ æquales 18000. Hæc

diuide per 36, exeunt 500, Equitum numerus: Pedites igitur erunt 4000.

Quæstio VI.

Mercator emit quinas quasque vlnas panni Aureis: 7 vendidit septenas quasque Aureis 11. Is Aureos 100 lucrifecit omnino. Quot fuerunt vlnæ? Si attenderis 100 Aureos superesse sorti, facilè ad æquationem peruenies. Vbi enim fictè posueris quod ipse initio impendit, & à summa totius pretij abstuleris: prodibit lucrum.

Ponatur itaque 1 ℞ vlnarum. Tum si 5 vlnæ dant 7, dabit 1 ℞ $\frac{7}{5}$ ℞. Quare $\frac{7}{5}$ ℞, æstimatio est empti. Deinde si 7 dant 11, dabit 1 ℞, $\frac{11}{7}$ ℞. Hæc erit venditi æstimatio. Aufer igitur $\frac{7}{5}$ ℞ ab $\frac{11}{7}$ ℞: manent $\frac{6}{35}$ ℞, æquales 100: Diuide 100 per $\frac{6}{35}$, exibunt 583 $\frac{1}{3}$, numerus vlnarum. Probatio, Duc 583 $\frac{1}{3}$ in $\frac{7}{5}$:

prouenniunt $816\frac{2}{3}$, *numerus Aureorum quos initio impendit. Rursus eadem* $583\frac{1}{3}$ *duc in* $\frac{11}{7}$ *: fiunt* $916\frac{2}{3}$, *venditionis summa. Nam* $816\frac{2}{3}$ *cum* 100 *faciunt* $916\frac{2}{3}$.

Quæstio V·II.

Emi Ceram 102 *florenis, eo pretio, vt centenæ libræ constiterint* 17 *florenis : quot libras in singulos florenos sum daturus, vt* 102 *floreni lucrum afferant* 18 *florenorum? Hæc per solam Regulam* 3 *absoluitur. Constat quippe* 102 *florenos dare* 600 *libras. Quamobrem vt lucrifaciam* 18 *flor. oportet ex* 600 *libris mihi* 120 *florenos confici. Quum igitur diuisero* 600 *per* 120, *exibunt* 5 *: ac tot libras singulis florenis sum venditurus. Tamen vt Algebræ sit locus, pono* 1℞ *librarum. Si itaque* 1 *flor. dat* 1℞, *quantum dabunt* 120 *floreni? fient* 120℞, *æquales* 600.

Quæstio VIII.

Quatuor massæ sic mistæ sunt argento & Cupro, vt prima besses seu marcas 11 *capiat, marcæ verò singulæ tantùm semuncias* 9 *argenti puri : altera est marcarum* 15, *atque in singulas marcas habet argenti semuncias* 7 *: tertia, marcarum* 24, *quarum vnaquæque semuncias* 10 *argenti accipit : quarta est marcarum* 136, *quarum singulæ habent argenti semuncias* 14 *: Quæritur quot marcæ argenti puri adiiciendæ sunt, vt ex iis omnibus massa confletur, cuius marcæ argenti puri semunc.* 15 *accipiant. Hanc proponit Stifelius ordine primam, Cap.* VIII. *suæ Algebræ, iisdem numeris. Quum itaque bessis seu marcæ pondus statum, sit* 16 *semunciarum : erunt in prima massa, quæ est* 9 *marcarum, semunciæ argenti* 99, *sed Cupri,* 77 *: in secunda, quæ est* 15 *marc. erunt* 105 *semunciæ argenti, &* 135 *Cupri : in*

in reliquis verò duabus, vt vides ex subscripta numerorum collocatione.

Marcę mistę.	Semunc.arg.	Semunc.Cupri.
11	99	77
15	105	135
24	240	144
136	1904	272
186	2348	628.

Quum itaque marcæ singulæ semuncias 15 *argenti capere debeant, vt est Quæstionis summa, capiet earum vnaquæque Cupri semunciam. Quo fit, vt massa ipsa conficienda tot marcas sit habitura, quot & semuncias Cupri. At semunciæ Cupri omnino sunt* 628. *Marcæ verò* 186. *Quare complendus erit numerus* 628 *marcarum. Additis igitur* 442 *marcis argenti puri ad* 4 *massas, confectum erit negotium, citra Algebræ adminiculum.*

Quòd si massa conflanda sit, verbi gratia, 13 *semunciarum argenti, tum singulæ marcæ semuncias ternas Cupri sunt accepturæ. Quapropter diuisis* 628 *per* 3, *exibunt* $209\frac{1}{3}$, *numerus marcarum quibus constabit massa. Erunt itaque adiiciendæ* $23\frac{1}{3}$ *marcæ argenti puri.*

Si verò conficienda esset massa quæ 12 *semuncias arg. puri caperet : tum Cuprum esset adiiciendum, non argentum. Nam in specie primùm posita, marcæ singulæ semuncias capiunt plus* 12 *arg. puri. Proinde diuidenda essent* 2348 *per* 12, *vt in numero Indicante seu Quotiente proueniat marcarum summa, nempe* $195\frac{2}{5}$. *Quare adiiciendæ* $9\frac{2}{3}$ *marcæ Cupri. Idem in cæteris speciebus erit obseruandum, nulla ope Algebræ necessaria.*

Tamen vt ipſa locum inueniat, repetita primæ Quæſtionis ſententia, ponamus, vt Stifelius, 1℞ marcarum. Et quæ conflabitur maſſa, erit 186 p. 1℞. Sic autem ſtatuentur numeri ad Regulam Trium.

Marcę miſtę,	Marc. arg.	Sem. Cup.	Marcę miſt.	Marc. nouę.
186 p.	1℞	628,	1?	$\frac{628}{186\ \text{p}\ 1\text{℞}}$

Quum itaque marcæ ſingulæ tantùm ſemunciam Cupri accipiant, erunt $\frac{628}{186\ \text{p}\ 1\text{℞}}$ *æqualia* 1 *: factáque reductione ad integra, erunt* 186 *p.* 1℞ *æqualia* 628, *ſicut aſſcriptum vides.*

$$\frac{\frac{628}{1}\qquad\qquad \frac{1}{186}\ \text{p}\ 1\text{℞}}{628\qquad\qquad 186\,p.\,1\text{℞}.}$$

Demum ex reductione ad minimam æſtimationem, erit 1℞ *æqualis* 442, *quæ erit marcarum addendarum ſumma.*

Iam verò ſi quæratur quot marcæ Cupri ſint adiiciendæ, vt marcæ ſingulæ capiant ſemuncias 15 *Cupri, ob id, vnicam argenti: erunt ſtatuenda* 2348 *in medio Regulæ Trium : fiéntque* $\frac{2348}{186\ \text{p}\ 1\text{℞}}$, *æqualia* 1. *Et erit Radicis æſtimatio*, 2162. *Sic etiam ſtatui poterunt numeri,*

Marcæ arg.	Marcæ Cupri.	Semunc. Cup.	Marca miſta.
186 p.	1℞	628 p. 16℞,	1?

Nam quum beſsis, ſeu marca ſit 16 *ſemunc. ob idque ſemunciarum numerus ſedecuplus ad numerum marcarum : fiet vt* 16℞ *ſemunciarum reſpondeant* 1℞ *marcarum. Quapropter in idem recidet cum ſuperiore. Sicut & prima ſpecies ſic poterat conſtitui,*

Marc. miſti arg.	Mar. pu. arg.	Semunc. pu. arg.	Marca miſta.
186 p.	1℞	2348 p. 16℞,	1?

At ſi ſcire cupies, ſic conflatis 4 *maſsis, vnaquæque marca quot ſemuncias arg. capiat : diuide* 2348 *per* 186, *exibunt* 12 $\frac{58}{93}$. *Erunt igitur ſemunciæ Cupri*, 3 $\frac{35}{93}$.

Quòd ſi commiſcenda eſſet quinta maſſa, quæ 3 *duntaxat ſemuncias &* 13 *Cupri in ſingulas marcas caperet, vt fierent ſingulæ marcæ, ſemunciarum* 5 *argenti, &* 11 *Cupri, quantam eſſe oportet quintam hanc maſſam? Primus Numerus Regulæ* 3, *erit*

erit 186 *p.* 1℞, *vbi* 1℞, *marcas incognitas nouæ maſſæ deſignabit: ſecundus,* 2348 *p.* 3℞ (*& erunt* 3℞ *pro numero ternarum ſemunciarum argenti incognito) : tertius erit* 1 *(erit hic pro marca vna nouæ maſſæ). Quia igitur pro marcarum numero incognito ponitur* 1℞ *& triplus eſt numerus ſemunciarum argenti, pro hoc numero ſemunciarum incognito ponentur* 3℞, *hoc ſitu,*

Marcæ miſtæ.	Semunciæ arg.	Marca noua.	
186 p. 1℞	2348 p. 3℞	1?	$\frac{2348\ \text{p}\ 3\text{℞}}{186\ \text{p}\ 1\text{℞}}$.

Itaque $\frac{2348\ \text{p}\ 3\text{℞}}{186\ \text{p}\ 1\text{℞}}$ *erunt æqualia* 5 *ſemunciis argenti : & per reductionem ad integra, erunt* 2348 *p.* 3℞ *æqualia* 930 *p.* 5℞: *ac demum* 2℞ *æquales* 1418. *Erit ergo* 1℞, 709, *numerus marc. quibus conſtabit maſſa* 5. *Probatio, Adde* 709 *ad* 186: *fiunt* 895 *marcæ, quæ* 14320 *ſemuncias efficiunt. Duc* 895 *in* 5 *ſemuncias argenti maſſæ poſtremæ: proueniunt* 4475: *duc rurſus* 895 *in* 11 *ſemuncias Cupri nouæ maſſæ: proueniunt* 9845. *Adde iam* 4475 *ad* 9845: *proueniunt* 14320 *ſemunciæ: hoc eſt,* 895 *marcæ.*

Quòd ſi ex 4 *maſsis conflandæ ſint* 15 *ſemunciæ argenti in ſingulas marcas : & quæratur quantum Cupri ſit eximendum: erit poſitio ad hunc modum,*

Marc. miſt. arg.	Marc. Cup.	Semunc. arg.	Mar. nouæ maſſæ.
186 m.	1℞	2348,	1?

Erit itaque marca nouæ maſſæ, $\frac{2348}{186\ \text{m}\ 1\text{℞}}$ *ſe munciæ argenti. Erítque hæc minutia æqualis* 15 *ſemūcijs arg. AEſtimatio igitur Radicis, erit* 29 $\frac{7}{15}$, *ac tot marcæ eximendæ erunt, hoc eſt,* 471 $\frac{7}{1}$ *ſemunc. vt relinquatur maſſa quæ in ſingulas mar. capiat* 15 *ſem. arg. Probatio. Aufer* 29 $\frac{7}{15}$ *marcas, ſcilicet* 471 $\frac{5}{15}$, *à numero ſemū. Cupri, nempe à* 628 *: manebunt* 156 $\frac{8}{15}$ *: Sed & diuide* 2348 *per* 15, *exibunt rurſus* 156 $\frac{8}{15}$. *Tot enim marcas eſſe oportet quot ſemuncias Cupri. Vel vt Stifelius probat,* $\frac{2348}{15}$ *marcæ dant* $\frac{2348}{1}$ *ſemuncias, quantum dat* 1 *Marca? fiunt* 15 *ſemunciæ.*

Poterat etiam sic statui hæc postrema Quæstio,

Marc.mist.arg.	Marc.Cup.	Semunc.Cup.	Marca nouæ massę.
186 *m.*	1℞	628 *m.* 16℞,	1?

Vbi $\frac{628 \text{ m } 16℞}{186 \text{ m } 1℞}$ *semunciæ Cupri æquantur* 1 *semunciæ Cupri: quum singulæ marcæ semuncias* 15 *argenti capiant. Facitque* 1℞, $29\frac{7}{15}$ *vt priùs. Auferendo verò* 1℞ *à* 186 *marcis Cupri, auferendæ quoque sunt* 16 ℞ *à* 628 *semunciis Cupri: quum marca sit* 16 *semunciarum. Constat enim æquatio inter* 1 ℞ *marcarum &* 16℞ *semunciarum. Hæc sanè prolixius quàm decuit congessimus: nisi quòd Quæstiones interdum ponuntur non tam ad artis, quàm ad rerum cognitionem.*

Quæstio VIII.

Quæruntur duo Numeri in ea ratione, vt dimidia pars secundi p. 2 *addita ad priorem, sit noncupla ad reliquum secundi: tertia verò prioris p.* 3 *addita ad secundum, sit tripla ad ipsius prioris reliquum.*

Pono pro secundo numero (facilioris calculi gratia) 2℞ *: à quibus aufero* 1℞ *p.* 2 *: reliquum erit* 1℞ *m.* 2. *Quum igitur* 1℞ *p.* 2 *addita ad priorem illum numerum, sit noncupla ad* 1℞ *m.* 2: *erunt* 9℞ *m.* 18 *æqualia priori (quantuscunque sit) cum* 1℞ *p.* 2. *Ablatis igitur* 1℞ *p.* 2. *à* 9℞ *m.* 18, *manebunt* 8℞ *m.* 20: *atque is est prior numerus. A quo aufero* $\frac{1}{3}$ *p.* 3, *scilicet* $2\frac{2}{3}$ ℞ *m.* $3\frac{2}{3}$ (*& supersunt* $5\frac{1}{3}$ ℞ *m.* $16\frac{1}{3}$). *Tum addo* $2\frac{2}{3}$ ℞ *m.* $3\frac{2}{3}$ *ad secundum, fiunt* $4\frac{2}{3}$ ℞ *m.* $3\frac{2}{3}$ *: atque hoc triplum est ad* $5\frac{1}{3}$ ℞ *m.* $16\frac{1}{3}$. *Huius verò triplum quoque est* 16℞ *m.* 49 . *Sunt igitur* 16℞ *m.* 49 *æqualia* $4\frac{2}{3}$ ℞ *m.* $3\frac{2}{3}$ *: hoc est, ex proba reductione,* $11\frac{1}{3}$ ℞ *æqualia* $45\frac{1}{3}$. *Diuido itaque* $45\frac{1}{3}$ *per* $11\frac{1}{3}$: *exeunt* 4, *Radicis æstimatio. Secundus igitur Numerus, erit* 8. *A quo aufer* $\frac{1}{2}$ *p.* 2 *: supersunt* 2 *: Cuius noncuplum, est* 18 . *Aufer* 6 *ab* 18 *: supersunt* 12, *prior Numerus. Probatio in promptu est.*

Quæstio

Quæstio IX.

OEnopola duplex habet vinum, quorum alterum est 14 *Aureorum: alterum,* 18 . *Ex vtroque permiscere instituit vinum* 16 *Aureorum. Quantum ex vtroque haurietur? Sumet ex priore* 1℞ *: ex altero,* 1 *m.* 1℞. *Eritque Numerorum constitutio talis,*

Vinum.	Aurei.	Vinum.	
1	14,	1℞?	14℞.
1	18,	1 *m.* 1℞?	18 *m.* 18℞.

Duo quarti simul numeri, scilicet 14℞ *&* 18 *m.* 18℞, *æquantur* 16 *: Et per reductionem,* 4℞ *æquantur* 2 . *Quare erit* 1℞, $\frac{1}{2}$ *: atque etiam* 1 *m.* 1℞ *erit* $\frac{1}{2}$. *Vtriusque igitur excipiet dimidium. Probatio est, quòd* $\frac{1}{2}$ 14 *est* 7 *: &* $\frac{1}{2}$ 18, *est* 9 *: quæ simul addita,* 16 *efficiunt.*

Præter Algebram, animaduerte in huiusmodi Quæstionibus esse obseruandum, Numerorum differentia quam habeat rationem ad tertium Numerum. Velut in hoc Exemplo, differentia 14 *&* 18, *est* 4 *: Hæc diuiditur bipartitò, vt ex* 14 *fiant* 16: *nempe à* 14 *ad* 16, *desunt* 2 *: & à* 16 *ad* 18, *eadem* 2 . *Atque ob id, vtriusque vini hauritur dimidium. Quòd si commiscendum fuisset vinum* 15 *Aureorum: tum quoniam ex differentia, quæ est* 4, *tantùm sumitur* $\frac{1}{4}$ *ad complendum* 16 *: sed* 15 *ab* 18 *absunt* $\frac{3}{4}$ *eiusdem differentiæ: fuisset ex maiori pretio, scilicet ex* 18, *eximenda quarta pars: à minori verò, nempe à* 14, *excipiendæ fuissent* $\frac{3}{4}$.

Probatio eo constat, quòd $10\frac{1}{2}$ *cum* $4\frac{1}{2}$ *constituant* 15. *Quòd si commiscendum fuisset vinum* 17 *Aureorum: tum ex minore pretio,* 14, *sumenda fuisset* $\frac{1}{4}$ *: ex maiore verò,* 18, *sumendæ* $\frac{3}{4}$. *De cæteris idem iudicium.*

Quæstio X.

Quæritur Numerus à quo $\frac{2}{5}$ ablatæ numerum reddant tanto minorem 100, quanto ipse Numerus superat 100.

Is est 1℞. à qua $\frac{2}{5}$ ablatæ, relinquunt $\frac{3}{5}$ ℞. Quare 100 m. $\frac{3}{5}$ ℞ æquantur 1℞ m. 100. Et ex reductione, 1 $\frac{3}{5}$ ℞ æquantur 200. Quare 1℞, est 125. Aliter, Quia Numerus superat 100, pono exuperantiam esse 1℞: vt sit ipse Numerus 100 p. 1℞: hinc aufero $\frac{3}{5}$ (id verò fiet ductis 100 p. 1℞ in $\frac{3}{5}$, per tertium Problema) supersunt $\frac{300\ p\ 3\text{℞}}{5}$, æqualia 100 m. 1℞: hoc est, 300 p. 3℞, æqualia 500 m. 5℞: ac demùm 8℞ æquales 200. Erit igitur 1℞, 25: proinde Numerus ipse, 126, vt priùs.

Quæstio XI.

Tres Milites prædam Aureorum, ex conuentu, sic inter se diuidebant, vt primus, dimidiam: secundus, tertiam partem: tertius, sextam caperet. Inter hæc, lite, vt fit, oborta, ad manus ventum est: & tantum quisque abstulit quantum per vim potuit. Mox lite composita, primus in medium reposuit $\frac{1}{3}$, secundus $\frac{1}{4}$, tertius $\frac{1}{5}$ Aureorum quos rapuerat: & repositam pecuniam ex æquo diuiserunt. Atque ex ea diuisione stetit lex inter ipsos primùm constituta: vt primus, semissem: alter, trientem: tertius, sextantem sibi haberet. In iis autem partitionibus singulis nulla interuenit Numerorum fractio. Quanta fuit Aureorum summa? & quanta cuiusque portio? Huius Quæstionis soluendæ ratio, à quibusdam Reuersio seu Recursus vocatur.

Sit itaque reposita pecunia, 1℞: summa verò Aureorum, doctrinæ gratia, fingatur fuisse 12. Quum igitur ex æquo diuiserint 1℞, habuit quilibet $\frac{1}{3}$ ℞: proinde primus, quum $\frac{1}{3}$ ℞ receperit, habebit semißem totius summæ, nempe 6. Quum itaque reponeret $\frac{1}{3}$ raptæ à se pecuniæ, reliqua sibi fecit 6 m. $\frac{1}{3}$ ℞, duplum eius

eius, quam reposuit, summæ (scilicet $\frac{2}{3}$ raptæ à se pecuniæ). Quod igitur reposuit, est 3 m. $\frac{1}{6}$ ℞. Secundus verò vnà cum $\frac{1}{3}$ ℞, habebit $\frac{1}{3}$ prædæ, nempe 4: Quum itaque reponeret $\frac{1}{4}$ raptæ pecuniæ, reliqua habuit 4 m. $\frac{1}{3}$ ℞, triplum eius, quam reposuit, summæ (scilicet $\frac{3}{4}$ raptæ pecuniæ). Quod igitur reposuit, est 1 $\frac{1}{3}$ m. $\frac{1}{9}$ ℞. Tertius porrò quum receperit $\frac{1}{3}$ ℞, habebit $\frac{1}{6}$ prædæ, scilicet 2. Quum itaq; reponeret $\frac{1}{5}$ raptæ pecuniæ, reliqua habuit 2 m. $\frac{1}{3}$ ℞, quadruplum eius, quam reposuit, summæ (scilicet $\frac{4}{5}$ raptæ à se pecuniæ). Quod igitur reponit, est $\frac{1}{2}$ m. $\frac{1}{12}$ ℞. Adde iam tres summas repositas: scilicet 3 m. $\frac{1}{6}$ ℞, 1 $\frac{1}{3}$ m. $\frac{1}{9}$ ℞, & $\frac{1}{2}$ m. $\frac{1}{12}$ ℞: fiunt 4 $\frac{5}{6}$ m. $\frac{13}{36}$ ℞, æqualia 1 ℞: Et per transpositionem ac reductionem, erunt 49 ℞. æquales 174. Quare erit 1 ℞, 3 $\frac{27}{49}$. At minutiæ adsunt, præter hypothesin. Id verò ex ficta positione factum est: nempe quòd 12 nobis finxerimus. Integra igitur sic venabimur. Pro 3 $\frac{27}{49}$, sumemus vniuersam ipsarum 49 ℞ æstimationem, scilicet 174: atque ea erit summa reposita. Tum numerum ipsum Rad. ducemus in 12: proueniunt 588, prædæ summa. Probatur sic. Dimidia pars 588, est 294, portio primi. Tertia eorundem pars, est 196, portio secundi: sexta denique pars 588, est 98, portio tertij. Porrò tertia pars 174 (repositæ scilicet pecuniæ) quam quisque recepit, est 58. Quum itaque primus, receptis 58, haberet 294: is antea habuit 236, duplum scilicet repositæ à se pecuniæ: proinde reposuit ipse 118: rapuerat 354. Simili ratiocinatione secundus reposuit 46, quum rapuisset 184. Tertius demùm reposuit 10, rapuerat 50: adde tres repositas summas, fiunt 174.

Quæstio XIII.

Progreßionis Arithmeticæ, quæ 12 Numeris constat, exuperantia est 1. Numeri omnino faciunt 93. Quæritur primus Numerorum.

Is est 1 ℞: & erit vltimus Numerorum, 11 p. 1 ℞. Igitur adde primum ad vltimum, scilicet 1 ℞ ad 11 p. 1 ℞: fiunt 2 ℞ p. 11. Cuius dimidium, 1 ℞ p. 5 $\frac{1}{2}$, duc in 12, fiunt 12 ℞ p. 66, æquales 93, hoc est, 12 ℞ æquales 27. Quare 1 ℞ est 2 $\frac{1}{4}$.

Quæstio XIIII.

Progreßionis Arithmeticæ primus Numerus, est 4: vltimus, 9: omnium verò summa, est 58 $\frac{1}{2}$. Quot Numeris constat Progreßio?

Pro omnibus ponitur 1 ℞: duorum extremorum summa, est 13: quorum dimidium, $\frac{13}{2}$ duc in 1 ℞: fiunt $\frac{13℞}{2}$, æquales 58 $\frac{1}{2}$: & ex reductione, 26 ℞ æquales 234: Radix est 9: ac tot sunt Numeri Progressionis. Iam si exuperatio Progressionis quæratur, pone 1 ℞. Et erunt numeri intermedij, 4 p. 2 ℞, 4 p. 3 ℞, 4 p. 4 ℞, 4 p. 5 ℞, 4 p. 6 ℞, 4 p. 7 ℞, 4 p. 8 ℞: atque ij omnes iuncti, scilicet 28 p. 28 ℞, æquabuntur 58 $\frac{1}{2}$ m. 13 (quum sit primi & vltimi summa, 13) hoc est, 56 ℞. æquabuntur 35. Quare 1 ℞ facit $\frac{6}{5}$.

Quæstio XV.

Exercitus Regius, Gallis Heluetiis & Germanis comparatus, Gallorum quidem capit 10000: Heluetios verò habet dimidia parte pauciores, quàm Gallos vnà cum Germanis: sed Germanos tertia parte pauciores, quàm Gallos cum Heluetiis. Quantus est Heluetiorum, & quantus Germanorum numerus?

Sint Heluetij 1 ℞. Qvúmque ipsi sint $\frac{1}{2}$ Gallorum & Germanorum: erunt Galli, & Germani, 2 ℞. Omnes, 3 ℞. Rursus quum Germani sint $\frac{1}{3}$ Gallorum & Heluetiorum (hi verò sunt 1 ℞

p. 10000) erunt iidem Germani, $\frac{1}{3}$ ℞ p. 3333 $\frac{1}{3}$. Adde omnia, scilicet 10000, 1 ℞ & $\frac{1}{3}$ ℞ p. 3333 $\frac{1}{3}$: fiunt 1 $\frac{1}{3}$ p. 3333 $\frac{1}{3}$, æqualia 3 ℞. Et transpositis reductísque partibus, erunt 5 ℞ æquales 40000. Faciétque 1 ℞, 8000, numerum Heluetiorum: proinde Germanorum numerus, est 6000: totúsque exercitus, 24000.

Quæstio XVI.

Hoc loco in Quæstionem proponemus historiam peruulgatam, quam Vitruuius memoriæ prodidit lib. IX Architecturæ. Ea est de Corona aurea, quam Hieron Syracusanorum tyrannus Diis ex voto obtulit. Quæ postquam esset consecrata, deprehensum est magnam auri portionem ab aurifice surreptam, & argenti tantundem suppositum. Quod Rex indignè ferens, accersito Archimede iubet vt Corona illibata (vel quòd rem sacram attrectare nefas esset, vel quòd operis iactura magni constaret) furtum artificis detegeret. Quod negotium diu Archimedem exercuit. Quúmque dudum nihil proficeret, balneum aliquãdo ingressus, animaduertit aquam, pro rata portione, corpori intromisso cedere, atq; è labro effluere. Vnde præ gaudio è balneo exiliit, & contento cursu, nudus vt erat, vociferari cœpit, Reperi, reperi: sibi interim notam insaniæ concilians apud eos, qui rerum cognoscendarum studium non sentiunt quantam habeat delectationem. Secum itaque rationem iniit scopum attingendi ex aquæ interim fluentis, dum ipse lauaretur, portione. Vas quippe æneum affabrè factum aqua impleri iußit. In quod quum Coronam sacram coniecisset, aquam è vase excedentem diligentißimè excepit. Deinde in ipsum vas denuò impletum, massam auri puri, atque eiusdem cum Corona ponderis, immisit: & effluentem aquam pari cura exceptam seposuit. Postremò massam argenti puri, quæ & ipsa Coronam æquaret pon-

dera, in vas repletum imposuit: atque eodem studio aquam effluentem collegit. Tum examinata aquarum proportione, mandatum negotium confecit. Quod cuiusmodi fuerit docebimus, hac arte: Faciamus Coronæ votiuæ pondus, fuisse decem librarum. Tum pro argenti suppositi pondere, ponatur 1 ℞. *Fuit igitur aurum purum Coronæ* 10 *m.* 1 ℞: *Porrò ob Coronam immersam effluxisse* $\frac{1}{8}$ *aquæ: ob auri massam,* $\frac{1}{30}$: *Denique ob massam argenti,* $\frac{3}{4}$. *Numeri verò ad situm Regulæ Trium sic stabunt,*

Lib. Auri,	Aqua,	Lib. Arg.	Aqua.
10	$\frac{3}{4}$,	1 ℞?	$\frac{3 ℞}{40}$.
10	$\frac{1}{3}$,	10 *m.* 1 ℞?	$\frac{10 \text{ m } 1 ℞}{300}$.

Itaque 1 ℞, *id est, argentum suppositum, eiecit* $\frac{312}{40}$ *aquæ: aurum verò ipsius Coronæ,* $\frac{10 \text{ m } 1 ℞}{300}$. *Proinde tota Corona eiecit* $\frac{86 ℞ \text{ p } 40}{1200}$: *atque sic Numerus erit æqualis* $\frac{1}{8}$: *Et per reductionem ad integra, erunt* 688 ℞ *p.* 320, *æqualia* 1200: *ac postremò erunt* 688 ℞ *æquales* 880. *Eritque* 1 ℞, 1 $\frac{12}{43}$, *argentum suppositum. Fuerunt igitur auri puri tantùm* 8 $\frac{31}{43}$ *libræ.*

Probatio. Fuerit vas ipsum, doctrinæ gratia, capax 120 *librarum aquæ (nam* 120 *in particulas commodè deducitur). Itaque auri massa, libras* 4 *aquæ emittet: argenti massa,* 90 *libras: Corona verò,* 15. *ac per Regulam Trium: si* 10 *libr. auri dant* 4 *lib. aquæ:* 8 $\frac{25}{43}$ *auri dabunt* 3 $\frac{21}{43}$: *Rursus si* 10 *libræ argenti dant* 90 *lib. aquæ,* 1 $\frac{12}{43}$ *lib. dabunt* 11 $\frac{22}{43}$. *Iam* 3 $\frac{21}{43}$ & 11 $\frac{22}{43}$ *faciunt* 15 *libras. Qui scopus fuit.*

DE EX-

DE EXEMPLIS AD RADICIS EXTRACTIONEM PERTINENTIBUS.

CAP. XX.

Quæstio I.

QVæruntur duo Numeri in ratione dupla, qui additi tantundem efficiant, quantum inter se multiplicati.

Ii sunt 1 ℞ & 2 ℞: *addo, fiunt* 3 ℞: *multiplico* 1 ℞ *per* 2 ℞: *fiunt* 2q, *æquales* 3 ℞: & 1q *æquale* 1 $\frac{1}{2}$ ℞. *Iam extrahenda est Radix Quadrata huius Numeri,* 1 $\frac{1}{2}$ ℞. *Tantùm auferendum signum minus à maiori: scilicet* ℞ *à* q: *manet* 1 ℞, *æqualis* 1 $\frac{1}{2}$. *Is erit prior Numerorum: alter,* 3. *Nam additio* 3 *ad* 1 $\frac{1}{2}$ *facit* 4 $\frac{1}{2}$: *multiplicatio eorundem inter se itidem facit* 4 $\frac{1}{2}$. *Quod sequitur Exemplum, eiusdem modi est,*

Quæritur Numerus cuius $\frac{1}{3}$ *in seipsam ducta, & productum in* $\frac{1}{4}$ *ipsius Numeri, constituant Numerum, cuius Radix quadrata est ipse Numerus qui quæritur.*

Is Numerus est 1 ℞: *Cuius* $\frac{1}{3}$ *in seipsam ducta facit* $\frac{1q}{9}$. *Hunc duco in* $\frac{5 ℞}{4}$: *fit* $\frac{1ce}{36}$, *æqualis* 1q: *id est,* 1ce *æqualis* 36q: *ac demum* 1 ℞ *æqualis* 36. *Is est Numerus quæsitus.*

In iis itaque duabus speciebus, nihil opus est extractione, sed sola reductione: quanuis hic locus Stifelium distineat, dum probat in æquatione, 1q *cum* 1 $\frac{1}{2}$ ℞, *Radicem Quadratam* 1 $\frac{1}{2}$ ℞, *esse* 1 $\frac{1}{2}$. *In hac item,* 1ce *cum* 36q, *Radicem Cubicam* 36q, *esse* 36. *Quod certè notissimum est: quum omnis Numerus quadra-*

tas definitè æquetur toti Radicum summæ. Etenim manifestum est, si 1q sit æquale 3℞, aliam Radicem esse non posse quàm 3 (de numeris absolutis semper intelligo) quum 3 in se ducta, efficiant numerum tribus Radicibus compositum: 4, quatuor: 5, quinque: ac sic in reliquos. Si igitur 1q sit æquale $1\frac{1}{2}$ ℞, oportet Radicem esse $1\frac{1}{2}$.

Quæstio II.

Superficies æquedistantium laterum Rectangula, longitudinem quadruplo maiorem habet, quàm latitudinem. Area verò est 576. Quæruntur duo latera.

Minus latus est 1℞: maius, 4℞: Hæc inter se ducta, faciunt 4q, æqualia 576: & 1q æquale erit 144. Radix igitur est 12, minus latus: maius verò 48.

Quæstio III.

Trianguli Orthogonij duo latera rectum angulum continentia sunt in proportione $1\frac{2}{5}$, id est, superbipartiente quintas: Subtensa verò linea, est 52. Quantum est vtrunque laterum?

Notum est ex XLVII primi Elementorum Euclidis, in Triangulis Rectangulis quadratum lineæ rectum angulum subtendentis esse æquale duobus reliquorum laterum quadratis: Quapropter cognito quadrato 52 (quod est 2704) faciamus vnum laterum (ad vitandas minutias) esse 5℞: alterum erit 12℞. Duc 5℞ in se, fiunt 25q: Tum 12℞ in se, fiunt 144q. Hæc adde, fiunt 169q, æqualia 2704. Eritque 1q æquale 16. Quapropter 1℞ est 4. Fuit igitur vnum laterum, 20: alterum, 48.

Quæstio

Quæstio IIII.

Columna quædam Quadrangula est rectangula. Huius latera quæ ad basin, inter se habent sesquitertiam rationem: altitudo verò est dupla superbipartiens tertias ad maius latus ipsius basis. Et est columna 93312. Quæruntur laterum dimensiones.

Minus latus, est 3℞: maius, est 4℞: altitudo, $10\frac{2}{3}$ ℞. Hæ dimensiones inter se multiplicatæ, faciunt 128c, æquales 93312: Fitque 1c æqualis 729. Erit ergo 1℞, 9. Quapropter minus latus, est 27: maius verò, 36: altitudo, 96.

Quæstio V.

Quæritur Numerus, qui inter duos Numeros constitutus alterum quinario superet: sed ab altero superetur ternario: ij verò extremi duo Numeri simul constituant 48.

Is numerus, est 1℞: duo extremi numeri, 1℞ p. 3, & 1℞ m. 5: qui inter se multiplicati, producunt 1q m. 2℞ m. 15, æqualia 48. Proinde erit 1q æquale 63 p. 2℞. Horum Radix, est 9, Numerus quæsitus. Duo extremi numeri, erunt 6 & 12.

Quæstio VI.

Quæritur Numerus qui duos Numeros superet, alterum quidem octonario, alterum senario: atque ij duo numeri inter se multiplicati, efficiant Numerum, qui eum quem quærimus quaternario superet.

Is Numerus est 1℞: Duo minores, 1℞ m. 8, & 1℞ m. 6. Hos duos inter se multiplico, fiunt 1q p. 48 m. 14 ℞, æqualia 1℞ p. 4, hoc est, 1q æquale 15 ℞ m. 44. Huius Numeri Radix maior (duplicem enim habet Radicem) est 11, Numerus quæsitus. Duo Numeri minores, sunt 5 & 3. Altera Radix est 4: quæ etiam ad Quæstionis propositum accommodatur: sed per Numeros quos Absurdos vocant, scilicet per Numeros infra nihil. Verbi causa, Sumatur hæc posterior Radix, 4, pro eo quem quærimus, Numero. Duo numeri minores erunt m. 4. & m. 2: qui inter se multiplicati efficiunt 8.

Vides Numeros fictos infra nihil sine vsu non esse: quum Regularum fidem faciant. Imò miraculo non caret quòd ex ipsorum multiplicatione, qui nulli sunt, producantur Numeri veri. Magna porrò huc ingenij contentio incidit, an ex nihilo aliquid faciat Natura: tum an idipsum quod est, ad nihilum redigi possit. Quin ad institutum pergamus.

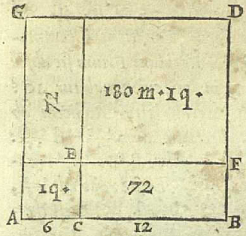
Quæstio VII.

Quæro duos Numeros, qui inter se multiplicati faciant 72: ipsorum verò quadrata simul iuncta, faciant 180.

Cognito quadrato 72, quod est 5184, ponatur pro quadrato minoris Numeri, 1q: & erit quadratum maioris, 180 m. 1q. Hæc duc inuicem: fiunt 180q m. 1qq, æqualia 5184: id est 1qq æquale 180q m. 5184. Extraho Radicem Biquadratam 180q m. 5184, (eius verò extrahendæ par est ratio quæ Quadratæ): Minus quadratum erit 36: maius verò 144. Quapropter duo Numeri, erunt 6 & 12.

Hæc Quæstio desumpta est ex Propositione IIII secundi Elementorum: cuius figurationem hîc subiecimus. Vbi linea AB diuisa est fortuitò in puncto C: & Quadratum totum AD, æquale est duobus Quadratis AE & ED cum duobus Supplementis

mentis



mentis CF & EG: reliqua verò ad Quæstionis sententiam facile redigentur.

Quæstio ipsa aliter etiam enunciari poterat. Quippe quum duo Quadrata minora, cuiusmodi hoc loco sunt AE & ED, ponantur esse 180: duoque Supplementa BE & EG, quæ cum iisdem Quadratis duobus, constituunt Quadratum totum AD, sint 144: erit ipsum Quadratum AD, 324: quorum Radix, est 18. Quæstio igitur enunciabitur in hæc verba, Quæruntur duo Numeri, qui simul positi efficiant 18: ducti verò inuicem faciant 72.

Pro vno numerorum pono 1℞: alter erit 18 m. 1℞. Hos duco inuicem: fiunt 18℞ m. 1q, æquales 72: hoc est, 1q æquale 18℞ m. 72. Huius Numeri Radix maior, est 18: minor verò, 6, vt modò.

Poterit & sic proponi, Duo Numeri simul iuncti faciunt 18: duo verò ipsorum quadrata faciunt 180.

Vel sic, Est superficies Quadrangula Rectangula, cuius ambo latera angulum continentia faciunt 18: area verò, 72. Quorum deductio ex superioribus manifesta est.

Quæstio VIII.

Quæritur Numerus, à cuius Quadrato si abstuleris $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{4}$, & insuper 8, residuum verò in se duxeris: exurgat Numerus æqualis Quadrato illius numeri qui quæritur, & præterea 13.

Pro ipsius Numeri quadrato pono 1℞: à quo aufero $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ & 8: supersunt $\frac{5}{12}$ ℞ m. 8. Hæc duco in se, proueniunt $\frac{25}{144}$q p. 64 m. $6\frac{2}{3}$ ℞, æqualia 1℞ p. 13: id est, $\frac{25}{144}$ q, æquales $7\frac{2}{3}$ ℞

G

m. 51. Idm educenda est Radix Quadrata $7\frac{2}{3}$ ℞ m. 51. Sed quoniam $\frac{25}{144}$ q Minutus est numerus, æquationem commodiùs reducemus ad integram: quod per Regulam Trium sic absoluemus, Si $\frac{25}{144}$ q æquantur $7\frac{2}{3}$ ℞ m. 51, cui æquabitur 1q? Fient $\frac{1104}{25}$℞ m. $\frac{7344}{25}$, æqualia 1q. Extraho igitur Radicem ab hoc numero, $\frac{1104}{25}$ ℞ m. $\frac{7344}{25}$. Scilicet, dimidium $\frac{1104}{25}$ est $\frac{553}{25}$: quod in se ductum, producit $\frac{304704}{625}$, à quibus aufero $\frac{7344}{25}$: manent $\frac{30276000}{15625}$. Horum Radix est $\frac{1740}{125}$: quam addo ad $\frac{552}{25}$, dimidium numeri Radicum: fiunt $\frac{900}{25}$, hoc est, 36. Is est quadratus Numerus quem quærebamus. Probatur sic. A 36 aufer $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, insuper 8: supersunt 7: quæ in se ducta faciunt 49: ac tantundem efficiunt 36 & 13.

Hanc Quæstionem proponit Cardanus ex Machomete Arabe: Cuius tamen numeros atque explicandi rationem variauimus: quum alioquin obscuriùs deducat, & in numerum quadratum irrationalem incidat.

Quæstio IX.

Duo Duces, quorum vnus milites habuit pauciores 40 quàm alter, 1200 Aureos suis vtrinque diuidebant: itáque cecidit, vt qui minore essent numero, singuli plus 5 Aureis acciperent, quàm qui plures. Quot fuerunt vtrinque milites?

In hac Quæstionis specie, animaduertendum, summam diuidendam habere eam rationem ad numerum qui ex multiplicatione vtriusque numeri militum producitur, quam habet differentia summæ ipsius ad differentiam militum. Idque in Quæstionibus proportionalibus est perpetuũ. Verbi gratia, 6 socij 24 Aureos inter se diuidunt: 8 item socij totidem Aureos inter se: constat 6 socios plus vno Aureo habituros, quàm 8 sint habituri. Sicut itaque exuperatio hominum, nempe 2, dupla est ad differentiam summæ, nempe ad 1: ita 48, qui fit ex ductu 8 in 6, duplus est ad 24, summam diuidendam. Idque ideò fit, quòd in huiusmodi Quæstionibus, quantitates sint eiusdem rationis. Nam 8 socij pro rata quisque portione tantundem accipiunt, quantum 6 socij.

His præfatis, quum exuperatio numeri militum, 40, sit octupla ad summæ differentiam, 5: pono pro minore militum numero, 1℞: alter numerus, erit 1℞ p. 40. Duco 1℞ p. 40 in 1℞, fit 1q p. 40℞. Constat igitur 1q p. 40℞, esse octuplum 1200. Atqui octuplum 1200, est 9600: Quo fit vt 1q p. 40 ℞ æquentur 9600: id est, 1q æquetur 9600 p. 40℞. Horum Radix, est 80: atque is est minor militum numerus: alter, 120. Probatio in promptu est.

Hanc etiam Quæstionem ex Machomete inter difficiles proponit Cardanus in sua Algebra, Cap. de AEquatione Quadrati cũ rebus & numero, ordine secundam. Eius verò æquationem paulò longiùs ducit. Neque enim difficilis est, adhibito animo ad id quod modò astruximus Theorema, quod & ipse itidẽ asscribit. Omnino, huius Quæstionis speculatio pulchra est. Viam enim ad Quæstiones quaslibet proportionales explicandas aperit.

Quæstio X.

Duæ Societates, quarum altera alteram 4 hominibus superat, parem Aureorum summam viritim diuidunt. In singulos minoris Societatis cedit plus 8 aureis quàm in singulos maioris. Aureorum summa, 172 Aureis superat vtrunque Sociorum numerum. Quot sunt Aurei? quot item Socij? Hæc Quæstio bifariam soluitur: eodem scilicet ductu, quo superior: tum vniuersa methodo.

Priori ratione, pono pro minore Societate, 1℞: maior erit 1℞ p. 4: Aureorum verò summa, 2℞ p. 176. Quúmque quantitatum differentia, 8, dupla sit ad differentiam Sociorum:

erit & ſumma Aureorum, 2℞ p. 176, dupla ad id quod producunt duo numeri Societatum inter ſe multiplicati. Duco itaque 1℞ p. 4 in 1℞, proueniunt 1q p. 4℞: quæ æquantur dimidio huius Numeri, 2℞ p. 176: ſcilicet 1℞ p. 88: id eſt, 1q æquatur 88 m. 3℞. Horum Radix, eſt 8, numerus minoris Societatis: maioris, eſt 12. Aureorum verò ſumma, 192. Singulis minoris Societatis cedent 24 Aurei: ſingulis maioris, 16.

Altera explicandæ Quæſtionis ratio hæc eſt. Pono, vt modò, pro minore Societate, 1℞: Erit maior Societas, 1℞ p. 4. Summa verò Aureorum, 2℞ p. 176. Diuido 2℞ p. 176 per 1℞: fit $\frac{2℞\ p\ 176}{1℞}$*: ea eſt portio ſingulorum minoris Societatis. Itidem diuido 2℞ p. 176 per 1℞ p. 4: fit* $\frac{2℞\ p\ 176}{1℞\ p\ 4}$*, portio ſingulorum maioris Societatis. Quum itaque* $\frac{2℞\ p\ 176}{1℞\ p\ 4}$ *p. 8, æquentur* $\frac{2℞\ p\ 176}{1℞}$*: ablato minore à maiore, erit reliquum æquale 8. Aufer itaque* $\frac{2℞\ p\ 176}{1℞\ p\ 4}$ *à* $\frac{2℞\ p\ 176}{1℞}$*: ſuperſunt* $\frac{8℞\ p\ 704}{1q\ p\ 4℞}$*, æqualia 8: Et per reductionem, 8q æqualia 704 m. 24℞: hoc eſt, 1q æquale 88 m. 3℞. Huius numeri Radix quadrata, eſt 6, minor: maior verò, 12, vt in priori deductione.*

Quæſtio XI.

Mercator ad nundinas ter profectus, prima negotiatione ſummam Aureorum quam habebat, duplicauit: ſecunda, lucrifecit huius dupli Radicem, ac præterea 2 Aureos: tertia, lucrifecit totius ſummæ quadratum p. 4 Aureis. Tandem 510 Aureos habuit. Quæro quæ fuerit ſors.

Hæc Quæſtio commodiùs ſoluetur per Reuerſionem ſeu Regreſſionem, hac ratione: Quoniam 510 æquantur ſummæ ex ſecundo commercio confectæ & quadrato eiuſdem, atque inſuper 4 Aureis: pono pro ea ſumma, 1℞: & pro eiuſdem quadrato, 1q: Quæ cum 4 Aureis efficiunt 1q p. 1℞ p. 4 quæ ſunt æqualia

æqualia 510: id eſt, 1q æquale 506 m. 1℞. Horum radix, eſt 22: Et tantundem ex ſecunda negotiatione habuit. Et quoniam ſecundo hoc commercio lucrifecit Radicem eius, quam detulerat, ſummæ p. 2 Aureis: auferantur 2: ſuperſunt 20. tum ponantur 1℞ & 1q (pro ea ſcilicet quam detulerat ſumma, eiúſque radice) æqualia 20, & erit 1q æquale 20 m. 1℞. Horum radix, eſt 4. Et tantum eſt lucrum ſecundæ negotiationis p. 2. Ablatis itaque 4 & 2 à 22, ſuperſunt 16: ac tanta fuit ſumma quam habuit ſecunda negotiatione. Quæ ſumma, quia duplum eſt eius, quam prima profectione detulerat, ſummæ: habuit initio 8 Aureos.

Hanc etiam Quæſtionem tractat ibidem Cardanus: & in radicem vniuerſaliſſimam incidit: quam nos ad numeros rationales reduximus, poſitis 310 pro 510, ad Quæſtionis argumentum.

DE SECVNDIS Radicibus.

CAP. XXI.

IN iis quæ hactenus exhibuimus Exẽplis, vnius Radicis poſitione vſi ſumus. Verùm eæ ſæpe incidunt ſpecies, quæ duplici poſitione opus habent: quum ſcilicet diuerſi numeri proponuntur, inter quos nulla exponitur differentia, ex additione, ſubtractione, proportione, aut notabili quapiam collatione. Veluti, Sint duo numeri, quorum Quadrata iuncta faciunt 340: duo verò numeri inter ſe multiplicati faciunt $\frac{6}{7}$ *maioris Quadrati. In hac ſpecie ſi pro vtroque Numero hincinde ponatur 1℞ eiuſdem deſignationis: certè progreſ-*

sui calculi, ratio sic conturbabitur, vt æquationem nullam quæ ex vsu sit, assequi queas. Quo fit, vt pro priore Numero, 1 ℞: pro altero, secundam Radicem, eámque distinctam statuere sit necesse.

Secundam itaque Radicem hac nota figurabimus, 1 A: tertiam, si incidet, 1 B: quartam, 1 C: quintam, 1 D: ac sic reliquas ordinatim, elementis Alphabeticis. Sed raro aut nunquam tot positionibus vti cogimur.

DE ADDITIONE ET SVBtractione Secundarum Radicum.

CAP. XXII.

IN Additione & Subtractione nihil est difficultatis. Nam si signa fuerint eadem, id est, si Radices fuerint eiusdem ordinis: tantùm adduntur numeri absoluti, aut alter ab altero subtrahitur: signum verò retinetur. Veluti, 3 A, hoc est tres secundæ Radices, additæ ad 5 A, faciunt 8 A. Sed 3 A sutractæ à 5 A, relinquunt 2 A. Quum autem diuersa fuerint signa: tum fit Additio & Subtractio per signum p. aut m. Vt 3 ℞ additæ ad 5 A, faciunt 5 A p. 3 ℞. Item 2 A ad 4 B, id est, duæ secundæ Radices ad quatuor tertias additæ, faciunt 4 B, p. 2 A. Sed 24 subtractæ à 4 B, relinquunt 4 B m. 24.

DE MVL-

DE MVLTIPLICATIONE Secundarum Radicum.

CAP. XXIII.

SI Signa fuerint eadem, non aliter fit multiplicatio quàm in primis Radicibus. Vt 1 A in se ducta, facit 1 A q: id est, vnum Quadratum secundum: Item 3 A ductæ in 2 A, faciunt 6 A q: & 3 A q in 2 A faciunt 6 A ȼ: id est 6 secundos Cubos.

Quum diuersa fuerint signa, vtrunque in producto retinetur. Vt 2 ℞ ductæ in 2 A, faciunt 4 ℞ A: quæ sic enunciantur, 4 primæ Radices ductæ in vnam secundam Radicem. Item 3 A in 9 B faciunt 27 A B: scilicet 27 secundas Radices in vnam tertiam Radicem ductas.

3 A in se Cubicè faciunt 27 A ȼ: hoc est, 27 secundos Cubos.

2 q in 4 B, faciunt 8 q B: id est, 8 q multiplicata per 1 B.

3 A in 3 A q, faciunt 9 A ȼ, hoc est 9 secundos Cubos.

5 A ȼ in 2 A ȼ, faciunt 10 A ß.

At verò sit ducendus 1 ȼ in 1 ℞ A q. Vides alterum Numerorum, scilicet 1 ȼ, eiusdem esse ordinis cum priore particula alterius, nempe cum 1 ℞. Proinde eorum Exponentes simul addendi sunt. Quia verò secunda particula, A q, diuersa est: hæc eadem retinebitur. Itaque 1 ȼ ductus in 1 ℞ A q, facit 1 qq A q: hoc est, primum Biquadratum ductum in secundum Quadratum. Itaque 1 ȼ ductus in 1 ℞ A q, idem producit atque 1 q A ductum in se. Vt, Volo multiplicare 1 A per 1 q A. Vides 1 A ȼ alterius esse ordinis ab 1 q. Proinde 1 q retinebitur. Quia verò 1 A ȼ & A, eiusdem sunt generis:

1 A c ductus in 1 A (quod secum tacitè infert hoc signum R) faciet 1 qq. Exponentes quippe sunt 3 & 1. Quapropter 1 A c ductus in 1 q A, tantundem efficit, quantum 1 R A q ducta in se: scilicet 1 q A qq.

DE DIVISIONE SECVNDARUM Radicum.

CAP. XXIIII.

Quemadmodum in Multiplicatione, Exponentes simul adduntur: ita in Diuisione aufertur alter ab altero. Vt 8 A q diuisa per 4 4 q, faciunt 2. Et 8 A c diuisi per 4 A c, faciunt 2 R. Sed 8 A q diuisa per 4 A q, faciunt 2 c.

Atque hoc loco animaduersione dignum, quòd ex permistione Radicum Secundarum cum primis, fit tandem vnica species: Scilicet, Secundæ Rad. in primas transeunt, atque è diuersò, quanuis initio dissimiles & distinctæ fuerint.

Ac ne cui mirum sit quòd 8 c A q diuisi per 4 A q nil amplius efficiant, quàm 8 c per 4 diuisi: is cogitet ex A q diuiso per A q, nil aliud produci, quàm 1. Itaque 8 c A q, diuisi per 4 A q, nil aliud producere possunt quàm 2 c 1, hoc est duos Cubos semel: Vnitas verò abiicitur tanquam otiosa: manéntque 2 c.

Amplius, diuido 8 c A q per 4 c, fiunt 2 A q. Breuiter, in Multiplicatione, Signa eiusdem ordinis se augent aut minuunt inuicem, sed diuersa retinentur. Vt in postremo Exemplo, 4 c continentur in 8 c A q bis: sed manet A q in Indicante: fit enim 2 A q. Quòd si 8 c A diuidendi essent per 4 c A q, exirent 2 semel: quod nil aliud est quàm 2. Nam in probatione Diuisionis, quæ per Multiplicationē fit, quum ducimus Indicantem in Diuisorem, certè ducimus A q in 1: & 2 in A c: ac reponuntur 8 c A q.

DE EXTRACTIONE Radicum Secundarum.

CAP. XXV.

Sit educenda Radix Quadrata ab hoc Numero, 25 A q. Ea erit 5 A. Vbi animaduertendum, in 1 A, 1 B, & similibus, semper latêre signum Radicis, hoc scilicet, R. Item, Sit educenda Radix Biquadrata, ab hoc Numero, 16 B qq: ea est 2 B: scilicet 2 tertiæ Radices. Radix verò 3 A q & similium, est irrationalis: scilicet √ c 3 A q. Quarum explicatio ad proximum librum pertinet.

DE RADICVM SECVNDARUM probatione.

CAP. XXVI.

Secundarum Radicum præcepta probantur ex Progreßionibus Geometricis. Vt si probandum sit ex 2 c multiplicatis per 4 A q qua ratione producantur 8 c A q. Facio, doctrinæ gratia, Numeros Progreßionis duplæ esse accommodatos ad primas Radices: scilicet, 1 R esse 2: 1 q esse 4: & 1 c esse 8: sicque in continuum. Numeros verò Progreßionis Triplæ ad Secundas Radices pertinere: Scilicet, 1 A esse 3: 1 A q esse 9: & 1 A c esse 27: sicque cōtinenter. Tum 2 c, erunt 16: & 4 A q, erunt 36. Iam 16 ducta in 36, efficiunt 576: Et 8 c A q, tantundem. Nam 8 c faciunt 64: & 1 A q, facit 9: Iámque 64 in 9 ducta, itidem 569 efficiunt.

DE EXEMPLIS AD SECVNdas Radices pertinentibus.

CAP. XXVII.

Quæstio I.

IAm verò vt Secundarum Radicum vsum elucidemus, Exemplum illud antè propositum repetemus, aliáque nonnulla ex selectioribus subiungemus.

Quæruntur duo Numeri, quorum Quadrata iuncta faciunt 340: duo verò ipsi Numeri inter se multiplicati, faciunt $\frac{6}{7}$ maioris Quadrati.

Maior Numerus est, 1℞: Minor, 1A. Duo Quadrata, erunt 1q & 1Aq: hoc est, 340 m. 1Aq, & 340 m. 1q. Duo Numeri inuicem ducti, faciunt 1℞A: quæ erit æqualis $\frac{6}{7}$ q. Quapropter vtraque æquationis parte in seipsam ducta, manebit eadem æquatio. Si igitur 1℞A est æqualis $\frac{6}{7}$ q: erit 1qAq, æquale $\frac{36}{49}$ q: Et per reductionem ad integra, erunt 49qAq æqualia 36 qq. Per reductionem verò ad minimam æstimationem, erunt 49 Aq, æqualia 36 q: ac tandem per Regulam 3, erunt $\frac{49}{36}$ Aq æquales 1q. Quúmque 1Aq sit æquale 340 m. 1q: erit & ipsum 1Aq æquale 340 m. $\frac{49}{36}$ Aq: Et transpositis particulis, erunt $2\frac{13}{36}$ Aq æqualia 340. Diuisis itaque 340 per $2\frac{13}{36}$ Aq, exibit æstimatio 1Aq: scilicet 144: æstimatio verò 1q, erit 196. Horum Radices sunt 12 & 14: Qui Numeri inuicem ducti, faciunt 168: quæ sunt sex septimæ huius Numeri, 169, ex Quæstionis præscripto.

Quæstio

Quæstio II.

Quatuor habent priuatim aureos aliquot: Primus, secundus, & tertius, vnà habent 149. (hîc excluditur quartus: pro cuius aureis, pono 1℞: eritque omnium summa, 149 p. 1℞.) Secundus, tertius, & quartus habent 110 (hîc pro aureis primi, pono 1A, vt sit omnium summa, 110 p. 1A.) Tertius, quartus, & primus habent 125 (atque hîc pro aureis secundi, pono 1B: Et erit omnium summa, 125 p. 1B.) Quartus, primus, & secundus habent 138 (vbi pro aureis tertij, pono 1C: eritque omnium summa, 138 p. 1C). Quæritur quot aureos quisque sibi habeat.

Primùm quoniam 149 p. 1℞ sunt æqualia 110 p. 1A: erit per Subtractionem, 1A æqualis 39 p. 1℞. atque ea est portio primi, pro qua posita fuit 1A. Deinde quum 149 p. 1℞ æquentur 125 p. 1B: erit per subtractionem, 1B æqualis 24 p. 1℞. Atque hæc erit portio secundi, pro qua posuimus 1B. Tertiò quum 149 p. 1℞ æquentur 138 p. 1C: erit 1C æqualis 11 p. 1℞. Atque ea est portio tertij, pro qua posuimus 1C. Portiones itaque singulorum erunt ad hunc situm,

I	39 p. 1℞
II	24 p. 1℞
III	11 p. 1℞
IIII	1℞.

Facit additio 74 p. 4℞: quæ erunt æqualia 149 p. 1℞: hoc est, 3℞ æquales 75. Quapropter erit 1℞, 25, portio scilicet quarti. Adde 25 ad 39, fient 64, portio primi, scilicet 39 p. 1℞. Atque eadem supputatione, erit secundi portio, 49: tertij, 36. Vides ex huius Quæstionis deductione Secundas Rad. singulatim resolui in primas per æquationem. Quod in Quæstionibus statim initio attendere oportet an fieri possit. Sic enim calculi difficultates & implicationes vitabimus.

Præter Algebram, hoc loco subiiciam generale quoddam præceptum ad huius Quæstionis & similium explicationem accommodatum. Adde summas propositas: quod exurgit diuide per numerum vno minorem, quàm sit hominum numerus. In Indicante prodibit omnium summa. Tum peractis subtractionibus, colligentur singulorum portiones. Vt in Quæstione proxima, summæ fuerunt 149, 110, 125, & 138. adde, fiunt 522: Hæc diuide per 3, numerum vno minorē quàm 4: exeunt 174, omnium summa. Iam à 174 aufer 149, supersunt 25: Ea est quarti portio, eius scilicet, qui à ratiocinio excluditur. Aufer 110 ab iisdē 174, supersunt 64, primi portio: ac similiter in reliquos.

Quæstio III.

Tres habent communiter aureorum summam: singuli verò aureos aliquot proprios. Primus & secundus Equum, cui pretium constitutum est, sua vtriusque pecunia emere possunt, si modò accesserit dimidia pars pecuniæ communis. Secundus & tertius suum Equum facere possunt, ea quam habēt, pecunia, ac præterea quinta parte pecuniæ communis. Primus & tertius eundem sibi comparabunt, ea quam habent, pecunia, atque insuper tertia parte nummorum communium. Quanta est aureorum communium? quanta cuiusque summa? & quanti est Equus?

Pono pro pecunia communi 1 ℞: pro Equi pretio, 1 A. Primus itaque cum secundo habet 1 A m. $\frac{1}{2}$ ℞, nempe Equi æstimationem m. semisse, $\frac{1}{2}$, pecuniæ communis: Secundus & tertius habent 1 A m. $\frac{1}{5}$ ℞: Primus & tertius habent 1 A m. $\frac{1}{3}$ ℞. Ex præcepto prioris Quæstionis adde singula, fiunt 3 A m. $\frac{31}{30}$ ℞. Hæc diuide per numerum vno minorem quàm sit hominum numerus, scilicet per 2: exit 1 $\frac{1}{2}$ A m. $\frac{31}{60}$ ℞. Id verò est Equi pretium. Quapropter 1 A æqualis est 1 $\frac{1}{2}$ A m. $\frac{31}{60}$ ℞. hoc est, $\frac{1}{2}$ A æqualis est $\frac{31}{60}$ ℞. Igitur 1 A æqualis est duplo, vtpote

pote $\frac{31}{30}$ ℞. Iam pro 1 A sume Numeratorem, scilicet 31: & pro 1 ℞, Denominatorem, 30: habebis Equi pretium, 31, pecuniæ verò communis summam, 30. Igitur primus cum secundo habuit 31 m. 15, nempe 16. Secundus cum tertio habuit 31 m. 6: scilicet 25. Tertius cum primo habuit 31 m. 10. Ea sunt 21. Porrò quantum quisque habuerit, ex Theoremate antecedente sic colliges. Adde has, quas bini habent, summas: fiunt 62: hæc diuide per 2, Numerum vno minorem quàm sit hominum numerus: exeunt 31, summa omnium. Tum subtrahe 25 à 31: supersunt 6, portio primi: aufer 21 à 31, supersunt 10, portio secundi: aufer denique 16 à 31: supersunt 15, portio tertij. Sed absque hac vltima supputatione satis constabat hæc partitio. Nam quum primus & secundus haberent 31 m. 15: summa verò omnium esset 31: facilè exprimebatur singulorum portio.

Quæstio IIII.

Tres habent priuatim aureorum numerum. Primus cum dimidia parte reliquorum, habet 32: Secundus cum $\frac{1}{3}$ reliquorum, habet 28: Tertius cum $\frac{1}{4}$ reliquorum habet 31. Quanta est singulorū portio? Primus habet 1 ℞: secundus, 1 A: tertius, 31 m. $\frac{1 ℞\ p\ 1 A}{4}$. Quúmque primus cum $\frac{1}{2}$ aureorum secundi & tertij habeat 32: is ipse habet 32 m. $\frac{1}{2}$ A m. 15 $\frac{1}{2}$ p. $\frac{1 ℞\ p\ 1 A}{8}$. Habet igitur 16 $\frac{1}{2}$ p. $\frac{1}{8}$ ℞ m. $\frac{3}{8}$ A (nam $\frac{1}{2}$ A valet $\frac{4}{8}$ A.) Proinde erūt 16 $\frac{1}{2}$ p. $\frac{1}{8}$ ℞ m. $\frac{3}{8}$ A, æqualia 1 ℞. Et trāspositis partibus, erunt 16 $\frac{1}{2}$ æqualia $\frac{7}{8}$ ℞ p. $\frac{3}{8}$ A: Reductione verò ad integra, erunt 7 ℞ p. 3 A æquales 132. (Scilicet iunge $\frac{7}{8}$, & $\frac{3}{8}$ fiunt $\frac{10}{8}$: tum 7 & 3, fiunt 10. Denique per Regulam Trium, si $\frac{10}{8}$ dant $\frac{33}{2}$, quantum dabunt 10? fiunt 132: Signa verò omittuntur facilitatis causa.) Nunc videamus quantum habeat secundus: Qui si receperit $\frac{1}{3}$ aureorum primi & tertij, habiturus est 28: hæ tertiæ partes sunt $\frac{1}{3}$ ℞ & 10 $\frac{1}{3}$ m. $\frac{1 ℞\ p\ 1 A}{12}$:

hoc est, 10 $\frac{1}{3}$ p. $\frac{1}{4}$ ℞ m. $\frac{1A}{12}$: hæc aufer à 28: supersunt 17 $\frac{2}{3}$ p. $\frac{1A}{12}$ m. $\frac{1}{4}$ ℞, seu $\frac{3}{12}$ ℞. Tantundem habuit secundus: atque id erit æquale 1 *A*. Quibus reductis, erunt $\frac{11}{12}$ *A* p. $\frac{3}{12}$ ℞ æquales 17 $\frac{2}{3}$. Quapropter 11 *A* p. 3 ℞ æquabuntur 212 (ducendo scilicet 17 $\frac{2}{3}$ per denominatorem 12, vt modò in priori Quæstionis capite.) Tum vtrunque Signorum ad eam æstimationem reducemus, vt Radices primæ & secundæ æquentur sui similibus iam inuentis. Quare quum 3 ℞ p. 11 *A* æquentur 212: fiet reductio ad 7 ℞: Quumque 7 ad 3 rationem habeat duplam sesquitertiam, augebuntur 11 ea ratione: atque hac ipsa augebuntur 212: ducto scilicet vtroque numero in 2 $\frac{1}{3}$. Tum colligemus 7 ℞ p. 25 $\frac{2}{3}$ *A*, æquales 494 $\frac{2}{3}$. Sunt igitur 7 ℞ p. 3 *A*, æquales 132: tum 7 ℞ p. 25 $\frac{2}{3}$ *A*, æquales 494 $\frac{2}{3}$. Quapropter quum 7 ℞ in vtraque æquatione sitæ sint, oportet numerorum differentiam esse æqualem differentiæ secundarum Radicum. Proinde 22 $\frac{2}{3}$ *A* æquantur 362 $\frac{2}{3}$. Diuisis itaque 352 $\frac{2}{3}$ per 22 $\frac{2}{3}$, exibunt 16, æstimatio 1 *A*. Ea est secundi portio. Iam verò pro tertij portione, ponamus 1*B*. Quoniam igitur secundus cum $\frac{1}{4}$ aureorum primi & tertij, habiturus est 28, habétque 16: erit $\frac{1℞ p 1B}{3}$ æqualis 12. Ob id, 1 ℞ p. 8 æquantur 36. Cæterùm primus cum $\frac{1}{2}$ aureorum secundi & tertij, habiturus est 32. Atque hic semis, est 8 p. $\frac{1}{2}$ *B*. Quapropter 1 ℞ p. 8 p. $\frac{1}{2}$ æquatur 32: ac per reductionem, erit 1 ℞ p. $\frac{1}{2}$ *B* æqualis 24. Quumque 1 ℞ p. 1*B* æquales essent 36: differentia 36 à 24 (ea est 12) æquabitur $\frac{1}{2}$ *B*. Quare 1 *B* erit 24. Ac tantundem habuit tertius. Ex quo primi portionem colligemus: propterea quòd ipse cum $\frac{1}{2}$ aureorum secundi & tertij, quam scimus esse 20, habiturus est 23. Habet igitur 12: Paténtque singula Quæstionis nomina. In hac verò expositione Cardanum secuti sumus, quam tametsi aliquantò clariorem reddidimus, tamen omnino difficilis & tædiosa est. Nos verò alia methodo declarabimus paulò apertiore, quæ erit huiusmodi,

Primus

Primus habuit 1 ℞: Secundus, 1 *A*: Tertius, 1*B*: Et quia primus cum $\frac{1}{2}$ aureorum secundi & tertij, habiturus est 32: erit 1 ℞ p. $\frac{1A p 1B}{2}$ æqualis 32. Ob id, 2 ℞ p. 1 *A* p. 1 *B* æquales erunt 64. Atque ea sit prima æquatio. Deinde quia secundus cum $\frac{1}{3}$ aureorum primi & tertij, habiturus est 28, erit 1 *A* p. $\frac{1℞ p 1B}{3}$, æqualis 28: Ob id, 1 ℞ p. 1 *B* p. 3 *A* æquabuntur 84: Sitque hæc secunda *A*Equatio. Tertiò, quoniam tertius cum $\frac{1}{4}$ primi & secundi, habiturus est 31: erit 1 *B* p. $\frac{1℞ p 1A}{4}$ æqualis 31: hoc est, 1 ℞ p. 1 *A* p. 4 *B* æquales 124. Eæ sunt tres primæ æquationes. Quæ iam sic exercendæ sunt, vt ex ipsarum permistione, differentias numerorum absolutorum venari possimus, quæ cum signis Denominationum congruant. Sic igitur statuo *A*Equationes,

I. 2 ℞ p. 1 *A* p. 1*B*, æquales 64.
II. 1 ℞ p. 3 *A* p. 1*B*, æquales 84.
III. 1 ℞ p. 1 *A* p. 4*B*, æquales 124.

Adde secundam ad tertiam: exurget quarta æquatio,

IIII. 2 ℞ p. 4 *A* p. 5*B*, æquales 208.

Hanc si cum prima æquatione conferamus, quoniam 2 ℞ vtrinque existunt: erit differentia quæ est inter 64 & 208 (ea est 144) æqualis differentiæ quæ est inter 1 *A* p. 1*B*, & 4 *A* p. 5*B*. Quare si abstuleris 1 *A* p. 1*B* à 4 *A* p. 5*B*, proueniet quinta æquatio hæc,

V. 3 *A* p. 4*B*, æquales 144. Adde primam ad secundam: emerget sexta æquatio,

VI. 3 ℞ p. 4 *A* p. 2*B*, æquales 148. Adde primam & tertiam, prodibit septima æquatio,

VII. 3 ℞ p. 2 *A* p. 5*B* æquales 188. Adde has duas postremas: fiet octaua æquatio,

VIII. 6 ℞ p. 6 *A* p. 7*B* æquales 336. Tandem vt in duabus postremis æquationibus fiat numerus Radicum æqualis, ducatur aliqua superiorum æquationum, videlicet tertia, in 6 (qui numerus in VIII æquatione continetur) hæc nona conficietur æquatio,

IX. 6℞ p. 6A p. 24B, æquales 744.

Iam verò quum duo primi numeri Denominati duarum postremarum æquationum sint iidem: erit differentia 336 & 744 (ea est 408) æqualis differentiæ duorum postremorum numerorum, 7B & 24, quæ est 17B. Quapropter erunt 17B æquales 408. Ac proinde 1B æqualis est 24. Et tantundem habuit tertius. Deinde quoniam ex quinta æquatione fuerunt 3A p. 4B æquales 144: pro 4B auferamus quater 24, scilicet 96, à 144: supererunt 3A, æquales 48: sicque 1A æqualis 16. Ea est portio secundi. Ex quibus colligitur portio primi: propterea quòd ipse cum $\frac{1}{2}$ aureorum secundi & tertij (ea est 20) habiturus erat 32. Habuit igitur primus 12.

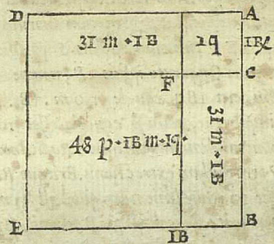
Quæstio V.

Quæruntur duo Numeri, qui subtracti à suis Quadratis, relinquunt 48: additi verò ad id quod producitur ex multiplicatione vtriusque in alterum, efficiunt 31.

Commodè hoc loco monebimus, Algebram eiusmodi esse, quæ disciplinarum cognitionem non mediocrem requirat. Neque enim qui Geometriæ imperitus fuerit, etiam si Algebræ præcepta didicerit, quæstionem appositè dissoluet quæ à Geometricis speculationibus pendeat. In hac igitur specie, animum adhibere oportet ad quartam Secundi Elementorum Propositionem: Cuius figurationem & sententiam hîc obiter exponemus.

Linea AB diuiditur fortuitò in puncto C. Totius lineæ quadratum, est ABDE, æquale quadratis duarum partium AC & CB, scilicet duobus Quadratis AF & FE cum duobus Supplementis BF & FD: quorum vtrunque fit ex ductu AC in CB. Sciendum insuper, horum Supplementorum vtrũ-

libet



libet esse medium proportionale inter duo Quadrata AE & FE: quod etiam demõstrauimus ad XXIII Propositionem sexti Elementorum. Propterea duo quilibet numeri inter se multiplicati producunt medium proportionale inter sua ipsorum Quadrata. Verbi gratia, si ducantur 5 in 4: proueniunt 20, medium proportionale inter 16 & 25. Quia igitur Quæstio proposita meminit Quadratorum vtriusque Numeri, atque insuper producti quod fit ex multiplicatione vtriusque in alterum: constat eiusmodi productum, quodcunque tandem futurum sit, medium proportionale esse inter duo ipsorum Quadrata.

His ad hunc modum expositis, pono pro priore Numero, 1℞: pro altero, 1A: pro additione amborum, 1B. (Hoc enim ad rem pertinet, quum in Quæstione fiat mentio huius additionis). Quadratum 1℞, est 1q: quadratum verò secundi Numeri, est 1Aq. Sed danda opera vt quàpaucissima signa retineamus, numeros verò introducamus. Horum enim auxilio, numeri absconditi deteguntur. Quoniam igitur 1B ponitur pro aggregato duorum quos quærimus, numerorum, quod aggregatum ab amborum quadratis subtractum, relinquit 48: commodè duo ipsa Quadrata sic designabimus, 48 p. 1B. Quapropter quum prius Quadratum sit 1q, erit secundum Quadratum 48 p. 1B m. 1q. Supplementum verò seu medium proportionale, sic notabitur, 31 m. 1B: quum aggregatum duorum numerorum, quod est 1B, additum ad id quod fit ex ductu amborum inter se Numerorum, faciat 31, ex Quæstionis proposito. Iam verò ex ipsa Secundi Elementorum quarta Propositione, constat aggregatum duorum Quadratorum, quod est 48 p. 1B, vnà cum duobus Supplementis, quæ sunt 62 m. 2B, æquari Quadrato ipsius 1B, nempe 1Bq. Proinde per reductionem, erit 1Bq æquale 110 m. 1B. Horum Radix non aliter inquiretur, quàm si æquatio esset 1q & 110 m. 1℞. Scilicet, sumetur dimidium Numeri Radicum: quod addetur & subtrahetur per regulam extractionis. Eritque Radix, 10. Quum igitur, 1B sit 10: Supplementum, quod est 31 m. 1B, erit 21. Ambo verò Quadrata, scilicet 48 p. 1B, erunt 58. Igitur secundum Quadratorum, quod est 48 p. 1B m. 1q, erit 58 m. 1q. Et quia 21 est medium proportionale inter 1q & 58 m. 1q: si duxerimus 1q in 58 m. 1q, erit productum, nempe 58q m. 1qq, æquale Quadrato 21, quod est 441: hoc est 1qq æquale 58q m. 441. A quibus primùm educenda Radix Quadrata (& ea erit duplex, propter signum m. scilicet maior, 49: minor verò, 9) deinde ab his duobus numeris sumpta Radice Quadrata, maior Numerorum quæsitorum, erit 7: minor verò, 3. Hactenus Numeros Denominatos explicauimus. Nunc ad Irrationales transeamus.

IACOBI PELETARII CENOMANI DE OCCVLTA PARTE NVMERORVM, quam Algebram vocant, Liber secundus.

De Numeris Irrationalibus in vniuersum.

CAPVT PRIMVM.

IRrationales Numeri, sunt Radices numerorum Rationalium, eorum scilicet qui veras Radi. non habent. Vt √q 2: quæ sic enunciatur, Radix Quadrata Binarij vel duorum: √c 7, Radix Cubica 7. Irrationales dicuntur, quòd nullam ad numeros absolutos rationem habeant: Vulgò Surdi, propterea quòd quum enunciantur, neque quanti, neque quales sint intelliguntur. Tales igitur erunt quibus præponentur hæc signa, q, c, qq, ß, qc, atque id genus reliqua: Quanuis ipsa nonnunquam signa Rationalibus numeris præponantur. Vt quum √q 4, aut √c 8 dicimus. Quippe Quaternarius Radicem Quadratam: & Octonarius, Cubicam habet. Id autem vsu venit, quum Rationales numeros simul cum Irrationalibus tractare conuenit. Ac quemadmodum in absolutorum opere, Integra ad Minutias reducimus quò commodiùs inter se concilientur: sic, numeros Rationales in Irrationales conuertimus, ita vsu exigente ad vtrorunque commercium. Quæ enim sunt irrationabilia, suam speciem exuere nunquam possunt: Rationabilia, possunt. Huc accedit quòd eius commutationis adminiculo, pulchrè probantur Irrationalium præcepta, sicut posteriùs docebimus.

NVMERI IRRATIONALES síntne Numeri, an non & cuiuſmodi ſint.

CAP. II.

DVbitatum eſt de numeris Irrationalibus, vtrum ſint Numeri, an non. Etenim Numerorum naturam non ſapiunt: quum nullam ex ſe proportionem aut quantitatem indicent, quod proprium eſt Diſcretorum: ſed quicquid præ ſe ferunt, id tanquam in perpetuis tenebris deliteſcit. Attamen numeros Irrationales planè pro nullis non habebimus. Conſtat enim eorum non modò eſſe aliquem, ſed etiam neceſſariũ vſum: præſertim in Continuorum dimenſionibus. Quæ enim pleraque in Geometricis traduntur, euidentiam cum Numeris participant, qui ferè vbique Irrationales occurrunt. Ii prætereà præceptiones admittunt, non alias quàm qui Rationales ſunt: Additionem ſcilicet, Subtractionem, cæteráſque Regularum ſpecies quæ in Abſolutis docentur. Habent igitur numeri Irrationales cum Abſolutis obſcuram quandam mutámque communicationem, non ſecus quàm cum hominibus, Bruta: quæ præter id quòd ſentiunt, ſuo etiam modo ratiocinantur. Inſuper cum Integris conueniunt, quòd ex ductu Irrationalis in Irrationalem, proueniat Rationalis. Nam quum duxeris √q6 in ſe, proueniet √q36: ea verò ſunt 6. Ad hæc, fractorum naturam in eo retinent, quòd quemadmodum inter duos numeros continentes, infinitæ minutiæ, ſic & infiniti numeri Irrationales interueniũt. Veluti inter 2 & 3, fractorum ordo eſt, 2, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$: $2\frac{1}{4}$, $2\frac{3}{4}$: $2\frac{1}{5}$, $2\frac{2}{5}$, $2\frac{3}{5}$, $2\frac{4}{5}$: $2\frac{1}{6}$: $2\frac{5}{6}$: $2\frac{1}{7}$, $2\frac{2}{7}$, $2\frac{3}{7}$, $2\frac{4}{7}$, $2\frac{5}{7}$, $2\frac{6}{7}$: ac ſic infinitè: vt inter 2 & 3 vltimus dari non poſsit. Ordo verò Irrationaliũ inter eadem 2 & 3, eſt, 2, √q5, √q6, √q7, √q8: √ce9, √ce10, √ce11, √q12, √ce13, √ce14, √ce15, √ce16, √ce17: ſicque per Cubos ad 27 vſque: tum √qq17, √qq18, √qq19, √qq20, √qq21, √qq22, √qq23, √qq24, √qq25, ac continenter per qq, donec ad 81 peruentum ſit.

Denique

Denique quot ſignorum ſunt ſpecies (eæ verò ſunt infinitæ) tot numeri Irrationales exiſtunt inter 2 & 3: inter 4 & 5: inter 6 & 7, denique inter duos quoſlibet numeros contiguos. Summa verò hæc ſit, vt ij Numeri inexplicabiles quum ſint, neque Diſcretorum naturam, ſed vmbram duntaxat referant, inter Numeros locum non teneant, ſed intra numerorum Irrationalium appellationem contineantur.

DE IRRATIONALIVM quinque ſpeciebus.

CAP. III.

NVmerorum Irrationalium quinque ſunt ſpecies, Simplicium, Compoſitorum, Diminutorum (qui à nonnullis Tanquamcompoſiti vocantur), Vniuerſalium compoſitorum, & Vniuerſalium diminutorum.

Simplices Irrationales vulgò Mediales dicuntur, quòd eorum officio inter duos numeros Rationales non quadratos medium proportionale reperiatur. Horum tot ſunt ſpecies, quot Radicum. Vt √q6, √ce7, √qq8, √ß9, √qce10, ac ſic deinceps.

Compoſiti Irrationales, ſunt quos ſignum Pluris intercipit: cuius officio, ex duobus ſimplicibus vnus efficitur Compoſitus. Vt √q6 p. √q18. Horum duæ ſpecies: Prior Bimedialium, qui duobus Medialibus conſtant: vt √q8 p. √q3. Atque horum quidam ſunt non quadrati, vt plerique omnes, vt Binomia tertiæ & ſextæ ſpeciei. Altera ſpecies Compoſitorum, eſt eorum qui Rationali & Irrationali conſtituuntur. Horum itidem alij non quadrati: vt 10 p. √q6, item √q12 p. 7: &

similes: alij Quadrati: vt Binomium primum, secundum, quartum, & quintum.

Binomia verò ab Euclide sex ponuntur, Primum ex maiore particula Rationali, minore verò Irrationali: vt 8 p. √q 48: Secundum, ex maiore Irrationali, & minore Rationali: vt √q 48 p. 6. Tertium, quod ex vtroque Irrationali: vt √q 50 p. √q 32. Quartum rursus ex maiore Rationali & minore Irrationali: vt 24 p. √q 552. Quintum, ex maiore Irrrationali & minore Rationali: vt √q 9 p. 8. Sextum, ex vtroque Irrationali: vt √q 48 p. √q 28. Quorum vnumquodque est Quadratum, suásque habent Radices, sicut suo loco docebimus.

Diminuti Irrationales, sunt quibus signum Minoris interponitur. Quorum, sicut & Compositorum, duæ sunt species, quæque à suis Compositis sola pluris & minoris nota distinguuntur. Prior Bimedialium non quadratorum: vt √q 8 m. 3: & item quadratorum, nempe Residuorum tertiorum & sextorum, (nam vnumquodque Binomium, suum habet Residuum seu Apotomen eiusdem proprietatis,) vt √q 50 m. √q 32, Residuum tertium: item √q 48 m. √q 28, Residuum sextum. Altera species Diminutorum, est ex iis quæ rationali particula & irrationali constant, atque horum rursus, vt Compositorum, quidam non quadrati, vt 10 m. √q 6: item √q 12 m. 7, & similes. Quidam quadrati: vt 8 m. √q 48, Residuum primum: √q 48 m. 6, Residuum secundum: 24 m. √q 552, Residuum quartũ: & √q 96 m. 8, Residuũ quintum.

Vniuersales Compositi sunt, quibus signum vniuersè præponitur. Fit, quum signum ambas numeri particulas afficit. Atque ob id à quibusdam vocantur Radices Vniuersales. Signum verò Vniuersale puncto distinguitur ab ipsis particulis, vt √q. 12 p. √q 6: quæ sic enunciatur, Radix vniuersalis, 12 p. Radicis quadratæ 6. Item, √q. √q 24 p. √q 8: id est, Radix Vniuer-

salis Radicis 24 p. Radicis 8. Item, √q. √q 12 p. √q 5, Radix vniuersalis Radicis 12 p. Radicis 5. Compositi verò Vniuersales vnà cum suis Diminutis faciunt Radices Binomiorum quarti, quinti, & sexti, vt posteriùs dicturi sumus.

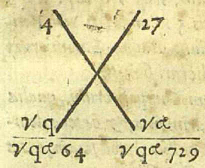
Reliquas verò species Irrationalium Compositorum, qualia sunt Trinomia, & quæ vocant Quadrinomia, & cætera deinceps, consultò omittimus: vt quorum nullus, quòd sciam, extet vsus: quamuis eorum etiam ars constitui possit.

DE REDVCTIONE IRRATIOnalium ad idem signum.

CAP. IIII.

Qvemadmodum inter Minutias Absolutorum neque Additio neque Subtractio commodè fieri potest, nisi priùs Minutiis ipsis ad eandem denominationem reductis: sic Mediales diuersi, reductione ad idem signum opus habent, vt inter ipsos Additio & Subductio fiat: Hæc autem reductio ab illa non multùm discrepat. Scilicet, Numeros absolutos alterum alteri ex aduerso scribe, & vtrique suum signũ subiice. Tum duo signa simul iunge, hoc est, ipsorum Exponentes, vt priore libro docuimus: habebis signum commune. Deinde vtrunque absolutorum multiplica decussatim, eâ quam signa transuersa indicant, multiplicatione. Vtrique producto præpone signum commune: fient duo numeri eadem inter se ratione qua priores. Exemplum.

Volo reducere √q 4 & √cu 27 ad idem signum. Statuo vtrunque ad normam quam vides,



Addo √q ad √c: fit √qc, signum commune: Tum multiplico 4 cubicè, sicut ostendit signum √c, per decussim respiciens 4: fiunt 64: hæc subiicio loco 4. Deinde multiplico 27 quadratè, sicut monstrat signum √q, fiunt 729: hæc substituo loco 27. Demum vtrique productorum præposito signo communi, fiunt √qc 64 & √qc 729: quæ eandem retinent rationem inter se, quam √q 4 & √c 27. Numeros verò rationales adhibuimus, quò clarior esset probatio: quod ferè imposterùm obseruabimus.

Sed & hoc negotium compendio absolui poterit, quum vterque absolutorum eam habebit radicem quam signum ipsum præ se fert. Tunc enim educta radice ab ipso numero, atque eiusdem loco subdita, signum deletur. Vt √qβ 1024, & √qc 216. Educo radicem Supersolidam à 1024: ea est 4: ac deleto signo β, superest √q 4. Deinde extraho radicem Cub. 214: ea est 6: Deletóque signo, c, manet √q 6. Habeo itaque √q 4 & √q 6 eodem notatas signo, atque eiusdem inter se rationis cum √qβ 1024 & √qc 216.

Potest etiam compendium fieri, accersito signo ad numerum absolutum quod ipse non habet, scilicet multiplicando alterum numerorum per signum alterius. Vt √qc 4096 & √c 8 (ea sunt 4 & 2) quia signum q, priori, non etiam posteriori numero adiacet, Multiplico 8 quadratè, fiunt 64, quibus præpono signum qc. Eruntque √qc 4096 & √qc 64 eiusdem designationis: atque inter se sic habebunt, vt √qc 4079 & √c 8.

DE

DE COGNOSCENDIS MEDIAlibus sintne commensurabiles an non, & qua inter se sint proportione.

CAP. V.

Diuide maiorem absolutum per minorem: vnde si exierit numerus, qui eam radicem habeat quam signum Medialium ostendit: erunt duo Mediales commensurabiles: Sin minus, incommensurabiles. Vt √q 18, & √q 8. Diuide 18 per 8, exeunt $2\frac{1}{4}$: quorum Radix est $\frac{3}{2}$: Sunt igitur √q 18 & √q 8 inter se commensurabiles, proportione scilicet sesquialtera. Item √q 75 & √q 48. Ex diuisione 75 per 48, fit $1\frac{9}{16}$: cuius radix, $\frac{5}{4}$. Quare √q 75 ad √q 48, proportionem habet $\frac{5}{4}$, id est, sesquiquartã. Item √q 320 & √q 135. Diuisis 320 per 135, exeunt $2\frac{10}{27}$: quorum Rad. Cub. $\frac{4}{3}$. Est itaque proportio sesquitertia. At √q 48 & √q 8 commensurabiles non sunt, quum ex diuisione 48 per 8 fiant 6, quorum nulla est Radix. Item neque √c 32 & √c 18. Ex diuisione enim indicatur $1\frac{7}{9}$: qui numerus quanuis Radicem quadratam habeat: tamen quia Cubicam non habet, fit vt √c 32 & √c 18 sint incommensurabiles. Horum cognitio facit ad Medialium Additionem & Subtractionem. Proportio enim in vtraque est necessaria, vt proximè docebimus.

K

DVOS MEDIALES IN PROportione nominata reperire.

CAP. VI.

DVos proportionis indices quadra: ambo quadrata duc in propositum quempiam numerũ, sed non quadratum: vtrique producto præpone signum Quadratorum: erunt duo numeri in ea quæ data est, proportione. Veluti, Sint inueniendi duo Mediales in proportione $\frac{5}{3}$, superbipartiente tertias: Quadro 5 & 3, fiunt 25 & 9: Horum vtrunque duco in numerum quenlibet non quadratum, verbigratia, in 7: proueniunt 175 & 63: Quorum vtrique præpono signum Quadratorum: fiunt $\surd q\ 176$, & $\surd q\ 63$, in proportione $\frac{5}{3}$ proposita. Item, Volo duos Mediales in proportione $\frac{6}{5}$: Quadro 6 & 5: proueniunt 36 & 25. Tum multiplico vtrunque per numerum non quadratum, vt per 10, fiunt 360 & 250, in proportione $\frac{6}{5}$. Quòd si duo Mediales Cubici in proportione quapiam oblata sint reperiendi, ducemus numeros proportionis in se cubicè: tũ vtrunque Cubum multiplicabimus per numerum quenlibet non Cubum: vtrique producto præponemus signum Cubicum. Vt, volo duos Mediales Cubicos in proportione $\frac{3}{2}$: Duco $\frac{3}{2}$ ad Cubum, fiunt $\frac{27}{8}$: hæc duco in vnum quempiam numerum non Cubum, vt in 4: proueniunt 104 & 32: quibus præscribo signum Cubicum: fiunt $\surd c\ 104$ & $\surd c\ 32$, proportione inter se $\frac{3}{2}$. Cuius probatio constat, diuisis 104 per 32, vnde exeunt $\frac{27}{8}$: quorum Radix Cubica, est $\frac{3}{2}$.

DE ME-

DE MEDIALIVM ADDITIONE.

CAP. VII.

SI Mediales fuerint incommensurabiles, eorum addendorum alia ars nulla est quàm per signum Pluris. Vt, $\surd q\ 12$ addita ad $\surd q\ 5$, facit $\surd q\ 12$ p. $\surd q\ 5$.

Commensurabiles verò sic addes. Proportionis numeros simul iunge: ex horum aggregato fac Numeratorem, subscripto maiore ipsorum in Denominatorem: Tũ ambos, Numeratorem scilicet & Denominatorem, duc ad quadratum (vel ad Cubum, pro signorum Medialium indicatione): per quadratum Numeratoris multiplica numerum absolutum minoris Medialis: productũ diuide per quadratum Denominatoris: numero Indicanti, quem Quotientem vocant, præpone signum Mediale: fiet numerus Additionis. Exemplum. Volo addere $\surd q\ 8$ ad $\surd q\ 18$. Horum proportio est $\frac{3}{2}$. Iungo 3 & 2, fiunt 5, Numerator: cui subscribo 2 in Denominatorem, hoc situ, $\frac{5}{2}$. Duco $\frac{5}{2}$ ad quadratum (sunt enim signa Medialia Quadratorum) fiunt $\frac{25}{4}$. Per 25 multiplico 8, numerum minoris Medialis, proueniunt 200: hæc diuido per 4, Denominatorem: exeunt 50: Quibus præpono signũ Mediale, q: fit $\surd q\ 50$, summa Additionis $\surd q\ 8$ ad $\surd q\ 18$. Item, Volo addere $\surd q\ 2$ ad $\surd q\ 8$. Proportio est $\frac{2}{1}$. Iungo 2 & 1, fiunt 3 (atque hoc loco nihil attinet Denominatorem subscribere: sicut nec in quibusuis Denominationibus proportionũ multiplicibus: Vnum quippe neque multiplicationem neque diuisionẽ variat.) Hæc 3 duco ad quadratum, fiunt 9: per 9 multiplico 2, numerum minoris Medialis: proueniunt 18: quibus præscribo signum Mediale Quadratum: fit $\surd q\ 18$, numerus Additionis $\surd q\ 2$ ad $\surd q\ 8$.

Poterit etiam maior numerus proportionis subscribi in Denominatorem: atque in idem recidet: modò tamen per quadratum maius multiplicemus numerum maioris Medialis, productum diuidamus per quadratum minus. Vt in primo Exemplo, √q 8 ad √q 18, quorum proportio est $\frac{2}{3}$, sic stabunt numeri, $\frac{5}{3}$. Duco $\frac{5}{3}$ ad quadratum, fiunt $\frac{25}{9}$: tum per 25 multiplico 18, proueniunt 450. hæc diuido per 9, exeunt 50: quibus præposito signo Quadratorum, fit √q 50, vt priùs. Hoc ideò fit, quòd maior numerus proportionis, maiorem Medialem respiciat: minor verò minorem.

Item, Volo addere √c 8 ad √ 27 (ea sunt 2 & 3) Horum proportio est $\frac{3}{2}$: Iungo 3 & 2, fiunt 5: his subscribo 2, fit $\frac{5}{2}$: Duco $\frac{5}{2}$ ad Cubum, fiunt $\frac{125}{8}$: per 125 multiplico 8, proueniunt 1000: Hæc diuido per 8, Denominatorem: redeunt 125: quibus præpono signum Cubicum: fit √c 125, numerus Additionis.

Animaduerte, non fuisse necessariã multiplicationẽ per 8, vt postea per 8 fieret diuisio. Nam, vt obiter moneã, quum idem fuerit Denominator quæ est absoluta particula quam ipse respicit, nil aliud quàm multiplicabimus quadratè aut cubicè, vt patet ex postremo Exemplo.

Hæc est addendorum Medialium ratio nostra. Cæteri, inter quos Stifelius, Multiplicationem Additioni anteponunt, præpostero docendi ordine.

DE MEDIALIVM SVBTRACTIONE.

CAP. VIII.

MEdiales incommensurabiles, solo signo Minoris subtrahũtur alter ab altero. Vt √q 5 subtracta à √q 12, relinquit √q 12 m. √q 5. Ratio enim Additionis & Subtractionis eadem.

Commensurabilium verò Subtractio sic fit. Amborum proportionem inquire, vt in Additione: Numerum proportionis minorem aufer à maiori: ex reliquo fac Numeratorem, subscripto minore proportionis numero, in Denominatorem. Vtrunque, Numeratorem scilicet & Denominatorem, quadra (vel cubica prout indicabit signum Mediale): per Quadratum (vel Cubum) multiplica numerum absolutum minoris particulæ: productum diuide per Quadratum (vel Cubum) Denominatoris: Numero Indicanti præscribe signum Mediale: fiet numerus Subtractionis. Exemplum. Volo subtrahere √q 8 à √q 50: Harum proportio, est $\frac{5}{2}$: aufero 2 à 5: manent 3, Numerator: cui subscribo 2, fit $\frac{3}{2}$. Iam quadro $\frac{3}{2}$, fiunt $\frac{9}{4}$: per Numeratorem, 9, multiplico numerum minoris Medialis, 8, proueniunt 72: hæc diuido per Denominatorem, 4, exeunt 18: quibus præpono signum Mediale: fit √q 18, numerus Subtractionis √q 8 à √q 50. Item, volo subtrahere √q 2 à √q 32. proportio est $\frac{4}{1}$: aufero 1 à 4, manent 3: quadro 3, fiunt 9 (Denominatorem hic nihil attinet quadrare): per 9 multiplico 2, numerum minoris Medialis, fiunt 18 (nec verò diuido, quum vnum nihil mutet): quibus præpono signum Mediale, fit √q 18, numerus ex Subtractione √q 2 à √q 32 reliquus.

Item, volo subtrahere √c 27 à √c 216 (id est, 3 à 6). Proportio est $\frac{2}{1}$. Atque hoc loco neque multiplicandum neque diuidendum: ablato enim Vno à binario, manet 1. Igitur ablata √c 27 à √c 216, manet eadem √c 27. Examen. Additio & Multiplicatio altera alteram probant. Vt in penultimo Exemplo, si addideris √q 2 ad √q 18, redibit √q 32: Si verò abstuleris √q 18 à √q 32, reliqua fiet √q 2. Et in vltimo, si addideris √c 27 ad seipsam, proueniet √c 216.

Duplicatio.

In Duplicatione tantùm additur numerus ad seipsum. Quare quenlibet numerum Medialem Quadratum duplicaueris, si in 2, hoc est, in √q 4, duxeris: Medialem verò Cubicum in √cc 8. Scilicet geminaueris √cc 27, si in √cc 8 duxeris. Sed hæc satis clara sunt.

DE MEDIALIVM MVLTIplicatione & Diuisione.

CAP. IX.

Multiplicatio & Diuisio Medialium nihil habent difficultatis: Tantùm multiplicantur numeri absoluti inter se, aut diuiduntur, relicto eodem signo. Vt √q 9 ducta in √q 4, facit √q 36. Item √q 3 per √q 12, facit eandem √q 36.

Exemplum Diuisionis. √q 36 diuisa per √q 4, facit √q 9. Item √q 12 per √q 3, facit √q 4. Et √cc 72 diuisa per √cc 9, facit √cc 8.

Constat igitur, ex multiplicatione Irrationalium inter se, produci numerum Rationalem, vt antea meminimus.

Si per numeros absolutos fuerint Mediales diuidendi aut multiplicandi, vel è contrariò: priùs ex absoluto faciemus Medialem. Vt si multiplicanda sint 8 per √q 2, priùs ex 8 fient √q 64: tum ex multiplicatione proueniet √q 128. Si verò eadem 8 fuerint diuidenda per √q 2: fiet ex Diuisione, √q 16. Atque hic locus ad Medialium Compositorum præceptionem, quæ huic tractationi proxima est, pertinet.

DE

DE MEDIALIVM MVLTIPLIcatione Quadrata, Cubica, & reliquis id genus.

CAP. X.

Mediales in se ducuntur quadratè aut cubicè, multiplicando numerum absolutum in se, pro signi ipsius appellatione. Sed hoc nil aliud est, quàm signum ipsum multiplicationem indicans delere. Vt √q 8 in se quadratè, facit √q 64: id est, 8. Item √cc 12 in se cubicè, facit √cc 1728, id est 12.

Sed √q 8 cubicè, facit √q 512.

√qcc 6 quadratè, facit √qcc 36, id est, √cc 6. Eadem verò cubicè, facit √qcc 216, hoc est, √q 6.

INTER DVOS NVMEROS datos medium proportionalem reperire.

CAP. XI.

Qvum iam antè meminerimus, Mediales numeros ad media proportionalia reperienda accommodari: id quánam ratione fiat, huic loco non erit alienum ostendere.

Si inter duos numeros vnus sit reperiendus medius proportionalis, primam nobis speciem Medialium accommodabimus, nempe Quadratorum. Si duo medij sint inuestigandi, *secundam speciem eorundem, scilicet Cubicam: Si tres, tertiam, nempe Biquadratam: sicque continenter.*

Sint itaque, Exempli causa, inter 8 & 24 quinque numeri medij proportionales inquirendi. Diuido 24 per 8, exeunt 3. Hæc erit radix, seu origo Progreßionis Geometricæ ab Vno ductæ, atque ad septimum vsque locum continuatæ: quæque tot loca intermedia habeat, quot sunt numeri medij reperiendi, scilicet quinque numeros, inter duos extremos. Progreßio verò erit hæc,
1, 3, 9, 27, 81, 243, 729. *Tum vnicuique huius Progreßionis numero præscribo signum quintæ speciei, scilicet Quadraticuborum: itáque stabunt numeri,* √qc 1, √qc 3, √qc 9, √qc 27, √qc 81, √qc 243, √qc 729. *Tertiò ab horum vnoquoque educo Radicem quam indicat cuiusque signum, si modò eam habet: Quare tertia erit constitutio huiusmodi,* 1, √qc 3, √c 3, √q 3, √qc 9, √qc 243, 3. *Hos tandem numeros singillatim multiplico per 8, minorem extremorum inter quos medij sunt reperiendi. Ac confectis multiplicationibus, erit Progreßio peracta, eiúsque duo extremi numeri 8 & 24: quinque vero medij, inter ipsos erunt preportionales, ad hunc modum,*
8, √qc 786432, √c 1536, √q 192, √c 4608, √qc 191102976, 24. *Probatio ex lege Proportionalium pendet. Verbi gratia, Exploraturus an* √qc 789432 *sit medium proportionale inter 8 &* √c 1536, *duc* √c 1536 *in 8, hoc est, in* √c 512: *fit* √c 786432: *hinc extrahe radicem quadratam: ea est* √qc 786432. *Alias species similiter probabis.*

DE

DE NVMERIS IRRATIONAlibus Compositis & Diminutis.

Additio & Subtractio Irrationalium Compositorum & Diminutorum.

CAP. XII.

NVmeri Compositi & Diminuti, vt antè docuimus, alij duabus particulis irrationalibus constant: alij rationali simul cum irrationali. Horum Additio & Subtractio mista est ex Absolutorum & Medialium præceptionibus: illorum, ex his tantùm. Vtriusque igitur Exempla subiicere satis fuerit.

Additionis formulæ.

I.	II.	III.
9 p. √q 24	√q 180 p. √q 48	√c 216 m. √qq 405
7 p. √q 6	√q 125 p. √q 27	√c 64 m. √qq 80
16 p. √q 54.	√q 605 p. √q 147.	√c 1000 m. √qq 3125.

IIII.

√qq 256 m. √c 27
√qq 81 p. √c 8
√qq 2381 m. √c

In vltima Additionis formula, vides signa diuersa Plus & Minus in posterioribus particulis: atque ob id, loco Additionis fit Subtractio: scilicet √c 8, *subtrahitur à* √c 27, *& retinetur signum maioris Numeri. Cuiusmodi etiam sunt duæ quæ sequuntur, Additiones.*

V.	VI.
√q 75 p. 2	√q 75 m. 2
√q 12 m. 3	√q 12 p. 3
√q 147 m. 1.	√q 147 p. 1.

Subtractionis formulæ.

I.	II.
16 p. √q 54	√q 605 p. √q 147
9 p. √q 6	√q 180 p. √q 48
7 p. √q 24.	√q 125 p. √q 27.
III.	IIII.
√cc 1000 p. √qq 3125	√qq 2381 m. √cc 1
√cc 216 m. √qq 405	√qq 256 m. √cc 27
√cc 64 m. √qq 80.	√qq 81 p. √cc 8.

In ultima formula vides subtrahendam esse √cc 27 à √cc 1, maiorem à minori: ob id, signum m. conuertitur in plus. Item, in hac quinta formula, quum in duabus primis particulis signa sint eadem, & numerus maior à minore sit subducendus: superior ab inferiore subtrahitur, signumque p. in m. conuertitur.

V
√q 50 p. 8
√q 72 m. 3
11 m. √q 2.

In duabus autem postremis, ubi signa sunt dissimilia, retinetur signum numeri superioris, idque ex lege signorum Pluris & Minoris, priore libro à nobis tradita.

VI.	VII.	VIII.
√q 72 p. 2	√q 72 m. 3	27 m. √q 72
6 p. √q 18	9 m. √q 50	√q 50 p. 8
√q 18 m. 4.	√q 242 m. 12.	19 m. √q 242.

MVL-

MVLTIPLICATIO IRRATIONALIUM Compositorum & Diminutorum.

CAP. XIII.

Omnes multiplicandi numeri particulas duc in singulas multiplicantis. Vt in subiecta formula, quæ numeris rationalibus constat.

9 m. √q 16
7 m. √q 9
63 p. √q 144
m. √q 784 m. √q 729.

Primùm duco 9 in 7, fiunt 63: deinde m. √q 16 in m. √q 9, prouenit p. √q 144: Tum duco decussatim p. 7, nempe √q 49, in m. √q 10, fit m. √q 784: ac rursus decussatim p. 9 (hoc est √q 81) in m. √q 9, fit m. √q 729: ut ascriptum vides.

Aliud Exemplum.

√q 24 m. √q 6
√q 18 p. √q 2
√q 432 m. √q 12
m. √q 108 p. √q 48.

Numeri signo Pluris affecti simul iuncti, efficiunt √q 768: signo autem Minoris notati, faciunt √q 192. Quare ablata √q 192 à √q 768, superest √q 192. In iis itaque multiplicationibus Compositorum, videndum erit an particulæ sint commensurabiles: & compendij causa, ad simplices Mediales reductio facienda. Vt in hoc postremo Exemplo, √q 24 m. √q 6 non amplius efficiebat quàm √q 6: Et √q 18 p. √q 2, facit √q 32. Quapropter ducenda √q 32 in √q 6, fiet √q 192.

Aliud Exemplum.

6 *m.* √q20
8 *m.* √q45

48 *p.*√q900 *m.*√q1280 *m.*√q1620 : *quæ omnino sunt* 78 *m.*√q5780. *Item,*

√qq 288 *m.* √qq648
√qq128 *m.*√qq162

√q 192 *p.*18 *m.* √q288 *m.* √q216.

DIVISIO IRRATIONALIVM Compositorum & Diminutorum.

CAP. XIIII.

DIuisio Compositorum & Diminutorum Medialium sumpta est ex octaua Propositione septimi libri Elementorum, quæ sic habet, Si duo Numeri multiplicati fuerint per tertium, duo producti eam inter se habebunt rationem, quam duo ipsi Numeri inter se: Vt si 12 & 6, inter quos dupla est proportio, multiplicentur in 3, proueniunt 36 & 18: inter quos proportio dupla est, sicut 12 ad 6. Ex hoc Theoremate diuisionem Medialium sic colligemus. Quum ob Diuisoris Diuidendique numeri compositionem, Diuisio ex arte fieri non poßit, nouum Diuisorem, nouúmque Diuidendum nobis parabimus, vnde emergat numerus Indicãs qualem quærimus. Scilicet, Si diuisor fuerit Compositus, per ipsius Diminutum multiplica numerum diuidendum & Diuisorẽ ipsum: Si verò Diuisor fuerit diminutus, per ipsius Compositum multiplica similiter tum Diuidendũ tum Diuisor: proueniet ex multiplicatione Diuisoris, numerus simplex semper. Is erit nouus Diuisor. Qui autem ex multiplicatione Diuidendi producetur, eum per nouum Diuisorem partiemur: Exurget numerus Indicans qualem ex primis Numeris quærebamus.

Exemplum

Exemplum. Sint diuidenda 18 *m.* √q36 *per* 7 *m.* √q16: *(id est* 12 *per* 3*). Multiplico* 7 *m.* √q16, *Diuisorem, per suum Compositum, scilicet per* 7 *p.* √q16 : *proueniunt* 33. *Tum per eundem Compositum multiplico Diuidendum,* 18 *m.* √q36: *proueniunt* 198 *m.* √q4356. *Iam per* 33 *diuido* 198 *m* √q4356: *scilicet* 198 *per* 33, *exeunt* 6: *tum ex* 33 *facio Medialẽ,* √q1089: *ac per hunc diuido m.* √q4356, *exit m.* √q4. *Habeo igitur Indicantem numerum,* 6 *m.* √q4 : *ea sunt* 4.

Exemplum in Irrationalibus. Volo diuidere 66 *m.* √q200: *per* 8 *m.* √q45. *Multiplico Diuidendum & Diuisorem per* 8: *p.* √q45, *Compositum : proueniunt* 228 *p.* √q7220, *nouus Diuidẽdus: &* 19, *nouus Diuisor. Per* 19 *diuido* 228 *p.* √q7220, *fit Numerus Indicans,* 12 *p.* √q20.

Probatur, ducendo 12 *p.* √q20 *in* 8 *m.* √q45: *redeunt enim* 66 *m.* √q2000.

Aliud. Volo diuidere 12 *per* √q10 *p.* √q8. *Duco* 12 *in* √q10 *m.* √q8, *prouenit* √q1440 *m.* √q1152. *Duco itidem* √q10 *p.* √q8 *in* √q10 *m.* √q8, *proueniunt* 2 : *per* 2 *(hoc est per* √q4*) diuido* √q1440 *m.* √q1152, *exeunt* √q3600 *m.* √q288, *numerus qui ex diuisione proposita quærebatur. Probatio. Duc* √q360 *m.* √q288 *in* √q10 *p.* √q8, *redibunt* √q3600 *p.* √q2304: *Ea sunt* 12.

DE IRRATIONALIBVS COMpositis & Diminutis compendiaria præceptio.

CAP. XV.

QVanuis Diminuti numeri ad suos Compositos addi poßint & ab iisdem subtrahi, tum vtrique multiplicari & diuidi ex arte à nobis iam tradita : hu-

ius tamen negotij peculiare compendium existit, hoc qui sequitur, modo.

Additio Diminutorum ad sua Composita.

Particulam Pluris in Diminuto duplica: quod hinc exurgit, est numerus ex additione Diminuti ad suum Compositum, productus. Vt, 15 m. $\sqrt{}$q 4 addita ad 15 p. $\sqrt{}$q 4, faciunt 30. Item $\sqrt{}$q 12 m. 3 addita ad $\sqrt{}$q 12 p. 3, faciunt $\sqrt{}$q 48.

Subtractio.

Particulam Minoris in Diminuto duplica, habebis numerum ex Subtractione Diminuti à suo Composito, reliquum. Vt 10 m. $\sqrt{}$q 4 subtracta à 10 p. $\sqrt{}$q 4, relinquunt $\sqrt{}$q 16. Item $\sqrt{}$q 12 m. 3 subtracta à $\sqrt{}$q 12 p. 3, relinquunt 6.

Multiplicatio.

Vtranque particulã quadratum à maiori quadrato aufer minus. Vt, volo ducere 8 p. $\sqrt{}$q 4 in 8 m. $\sqrt{}$q 4. Quadro 8, fiunt 64: & quadro $\sqrt{}$q 4, ea sunt 4: tum aufero 4 à 64, manent 60, numerus ex Multiplicatione 8 p. $\sqrt{}$q 4 per 8 m. $\sqrt{}$q 4. Item 12 p. $\sqrt{}$q 6 ducta in 12 m. $\sqrt{}$q 6, faciunt 138. Et $\sqrt{}$q 24 p. $\sqrt{}$q 6 in $\sqrt{}$q 24 m. $\sqrt{}$q 6, faciunt 18.

Diuisio.

Diuisionis autem ratio non perinde est compendiaria: sed per generalem Compositorum præceptionem, quam modò exhibuimus, absoluitur. Composita enim suis Diminutis non sunt commensurabilia. Diuisio verò Numerorum nil aliud est, quàm proportionis inuestigatio. Quare ad huiusmodi Diuisionem vtemur decimaoctaua Propositione septimi Elementorum, sicut antè docuimus.

DE VNIVERSALIBVS COMPOSITIS & Diminutis: atque obiter de Radicibus, quas Ligatas, & quas Distinctas vocant.

CAP. XVI.

VNiuersales Cõpositi & Diminuti notantur signo à particulis per punctũ seiuncto. Et à nonnuis ll vocantur Radices Vniuersales. Vt $\sqrt{}$q . 22 p. 9, signum $\sqrt{}$q, per punctum seponitur à particula 22: vt significetur ipsum signum non ad priorem duntaxat, sed ad vtranque communiter pertinere. Scilicet totius Compositi, 22 p. $\sqrt{}$q 9, sumitur Radix: quæ sic enunciatur, Radix vniuersalis 22 p $\sqrt{}$q 9. Ea est 5. Numerum quippe Rationalem, doctrinæ causa, posuimus: Alioqui huiusmodi numerorum particulæ in vnam non contrahuntur, quum sint incommensurabiles. Duæ præterea traduntur Radicum Irrationalium species. Prior, Radicum quas Ligatas vocant. Vt $\sqrt{}$q 16 p. $\sqrt{}$q 9. Cuius summa est, vt ambæ particulæ coniunctè sumantur instar vnius Numeri: Scilicet, $\sqrt{}$q 16 p. $\sqrt{}$q 9, faciunt 7. Sunt qui sic distinguãnt, R L 16 p. $\sqrt{}$q 9. Altera species, est earum quas Distinctas appellant. Vt $\sqrt{}$q 16, p. $\sqrt{}$q 9. In quibus particulæ separatim intelliguntur. Scilicet, Radix 16 per se, & Radix 9 itidem per se. Ea sunt 4 & 3: neque tamen sunt 7. Atque inter ambas hoc interest, quòd cum $\sqrt{}$q 16 p. $\sqrt{}$q 9, ducitur in seipsam vt Radix Ligata, facit 49: Sed vt Radix Distincta, facit 16 & 9:

quæ 25 duntaxat constituunt. Sunt qui sic notent, ℞. D. 16 p. √q 9.

Sed de his duabus posterioribus nihil attinet priuatim præcipere, vt quæ ex Simplicium & Compositorum irrationalium præceptionibus satis innotescant.

Radices verò Vniuersales non sine ratione peculiarem tractationem recipiunt. Sunt enim Radices Binomiorum Quarti, Quinti, & Sexti: atque ob id, ad decimi libri Elementorum Euclidis intelligentiam apprimè necessariæ.

VNIVERSALIVM COMPOSITOrum ad sua Diminuta Additio.

CAP. XVII.

HAEc Additio peragitur officio Additionis et Multiplicationis, quas suprà dedimus, Compositorum.

Exemplum. Sit addenda √q. 12 p. √q 6 ad √q. 12 m. √q 6. Ambos numeros signo Pluris connecto, idque duplici positu, ad hunc modum,

√q. 12 p. √q 6 p. √q. 12 m. √q 6
√q 12 p. √q 6 p. √q 12 m. √q 6.

Primùm addo 12 p. √q 6 ad 12 m. √q 6, instar Compositorum & Diminutorum, tanquam nulla esset Radix Vniuersalis: fiunt 24. Tum eosdem inter se multiplico eadem lege qua Compositum per suum Diminutum. Scilicet, quadro 12, fiunt 144: quadro etiam √q 6, fiunt 6: aufero 6 à 144: manent 138. His præpono signum, fit √q 138. Tandem duplico √q 138, propterea quòd vterque numerus bis ponitur, vt ex formula apparet, prouenit √q 552. Habes igitur 24 p. √q 552. Quibus præpone signum Vniuersale, fit √q. 24 p. √q 552, summa Additionis.

Hæc

Hæc autem addendi ratio, ex quarta secundi Elementorum Euclidis traducta est. Scilicet, si duo Numeri (nam omnes libri illius Propositiones ad Numeros accommodantur) simul iuncti fuerint, additúmque in se multiplicetur: totius producti Radix quad. æqualis est duobus ipsis numeris simul iunctis. Vt 6 ad 2 addita, efficiunt 8: duco 8 in se, fiunt 64: quorum radix, est 8. Sic √q. 12 p. √q 6 cum √q. 12 m. √q 6 in se ducta, faciunt 24 m. √q 552: quorum Radix √q. 24 m. 552, erit eadem cum √q. 12 p. √q 6 p. √q. 12 m. √q 6: Nam quũ 24 p. √q 552, sit Binomium quartum, erit ipsius propria Radix aliqua. Et ea est, √q. 12 p. √q. 6 p. √q. 12 m. √q 6, vt proximè explicabimus in Radicum extractione.

VNIVERSALIVM DIMINVTOrum à suis Compositis Subtractio.

CAP. XVIII.

SVbtractio ex Additionis præceptione elicitur, vtpote adhibito simili Theoremate ei quod modò induximus: hoc est, Si duorum Numerorum alter ab altero subducatur, reliquum verò in se multiplicetur: producti Radix, æqualis est ipsi reliquo. Vt, 2 à 6 ablata, relinquunt 4: hæc 4 in se ducta, efficiunt 16: quorum Radix, 4.

Igitur subtrahenda sit √q. 12 m. √q 6 à √q. 12 p. √q 6. Numeros colloco vt in Additione, ad multiplicandum, duplici hoc positu,

√q. 12 p. √q 6 m. √q. 12 m. √q 6
√q. 12 p. √q 6 m. √q. 12 m. √q 6.

√q. 24 m. √q 138, m. √q 138,
hoc est, √q. 24 m. √q 552.

Scilicet, addo duas priores amborum particulas, fiunt 24: tum multiplico √q 12 p. √q 6 per m. √q. 12 m. √q 6, proueniunt m. √q 138 bis: hoc est √q 552. Igitur √q. 24 m. √q 552, est numerus Subtractionis quæsitus. Vides Subtractionis calculum nihil differre ab Additione, nisi signo Minoris.

VNIVERSALIVM Multiplicatio.

CAP. XIX.

MVltiplicationem penè totam explicauimus in Additione. Eius verò formulam hîc asscripsimus articulatim.

√q. 12 p. √q 6 p. √q. 12 m. √q 6
√q. 12. p. √q 6 p. √q. 12 m. √q 6.
12 p. √q 6 p. 12 m. √q 6.
√q. 144 p. 6 p. √q. 144 m. 6.

Constat signa Pluris destrui à signis Minoris: scilicet, vt m. √q 6, deponit p. √q 6: & m. 6, eximit p. 6. Proinde in Additione prætermittuntur.

Iam verò ad integram Multiplicationis præceptionem subiiciemus Exemplum, quo Radix Vniuersalis per numerum simplicem multiplicetur, cúmque rationalem absolutum. Sit multiplicanda √q. 12 p. √q 16 in 6. (hîc ducuntur 4 in 6). Qui quidem calculus difficilis non erit, si meminerimus, signum Vniuersale respicere ambas communiter particulas, vt sit √q 16 tanquam √qq 16, id est tanquam duplici signo Quadratorum affecta. Ob id, reducendus est numerus multiplicans ad √q 36, vt multi-

multiplicemus particulam priorem, 12: Sed ad multiplicandam √q 16, idem senarius reducendus est ad √qq 1296: hoc est, ad Biquadratum. Erit igitur positio huiusmodi,

√q. 12 p. √q 16
36 p. 1296
√q 432 p. √q 20736. Horum summa, est 24.

Aliud Exemplum notabile. Sit multiplicanda √q 16 p. √q 9 per √q. 23 p. √q 4. Duco √q 16 p. √q 9 ad Radicem Surdam: scilicet, multiplico quadratè, & producto præpono signum Vniuersale: fiet √q. 25 p. √q 576, vt vides in subiecta formula.

√q. 25 p. √q 576
√q. 23 p. √q 4.
√q 576 p. √q 2304 p. √q 2500 p. √q. 304704. Summa est, √q 1225. Ea sunt 35. Satis ergo fuerit meminisse, Radices Ligatas & similes, ad Vniuersales esse reducendas, vt cum ipsis in supputationem venire possint.

VNIVERSALIVM DIVISIO.

CAP. XX.

DIuisionis ratio vno aut altero Exemplo elucescet, adhibita superiorum præceptione.

Volo diuidere √q. 432 p. √q 7776, per 6. Sic stabit formula,

√q. ~~432~~ p. √q ~~7776~~ (√q. 12 p. √q 6.
√q ~~36~~ √q ~~1296~~.

Alterum Exemplum. Volo diuidere √q. 588 p. √q 34848 per √q. 12 p. √q 8. Hoc loco repetere memoria oportet quæ Capite de Diuisione Compositorum Irrationalium dicta sunt. Scilicet, multiplico Diuidendum per √q 12 m. √q 8: fit √q 6524 p. √q 332928, nouus Diuidẽdus: Tum per eandẽ √q 12 m. √q 8, multiplico ipsius Compositum, qui Diuisor est: prouenit √q 136, nouus Diuisor. Iam diuido √q 332928 per √qq 18496, hoc est, per √q 136: exit in numerum Indicantem, √q 48 p. √q 18.

Probatio fit vulgato more: ducto scilicet numero Indicante in Diuisorem, nempe √q 48 p. √q 18 in √q 12 p. √q 8: redibit √q 588 p. √q 34848, numerus initio susceptus.

DE EXTRACTIONE RADICVM ex Binomiis & Residuis.

CAP. XXI.

Binomij & Residui seu Apotomes, Radicem sic elicies,

Sume differentiam Quadratorũ vtriusque particulæ: huius differentiæ radicem adde ad maiorem particulam, & ab eadem aufer. Demum à dimidiis duorum productorum eductæ Radices, & per signum proprium connexæ, Radicem quæsitam exhibebunt. Exemplum.

Quæro Rad. quadratam huius Binomij primi, 8 p. √q 48. Quadrata particularum, sunt 64 & 48: horum differentia, 16: quorum Radix, 4. Hanc Radicem addo ad maiorem Binomij particulam, 8: fiunt 12: atque eandem aufero ab 8: supersunt 4. Dimidia 12 & 4, sunt 6 & 2: quorum Radices √q 6 & √q 2 connecto signo Pluris (erat enim Binomium) fit √q 6 p. √q 2, Radix quæsita. Alterum Exemplum. Sit extrahenda Radix ab hoc Binomio secundo, √q 48 p. 6. Differentia quadratorum particularum, est 12. Huius Radicem, √q 12, addo ad ma-

iorem particulam, nempe ad √q 48: fit √q 108: atque ab eadem aufero, manet √q 12. Dimidia √q 108 & √q 12, sunt √q 27 & √q 3, quorum Radices, √qq 27 & √qq 3 simul connexæ, faciunt √qq 27 p. √qq 3, Radicem Binomij √q 48 p. 6. Tertium Exemplum. Volo Radicem huius Binomij tertij, √q 50 p. √q 32. Differentia quadratorum est 18. Horum radicem, √q 18, addo ad √q 50, fit √q 128: aufero ab eadem, manet √q 8. Dimidia √q 128 & √q 8, sunt √q 32 & √q 2, quorum Radices iunctæ faciunt √qq 32 p. √qq 2, Radicem quæsitam. Hæ tres Radicum species sunt ex Compositis numeris. Radices verò Binomiorum quarti, quinti & sexti constant Cõposito numero ipsiúsque Diminuto, cum rad. Vniuersali vtrique præfixa, vt iam non semel meminimus. Atque eodem artificio extrahuntur, quo tres species priores modò tractatæ. Exemplum.

Volo Radicem huius Binomij quarti, 24 p. √q 552. Differentia quadratorum, est 24: cuius Radicem addo ad 24, maiorem Binomij particulam, fiunt 24 p. √q 24: atque ab iisdem aufero, manent 24 m. √q 24. Horunt duo dimidia, sunt 12 p. √q 6 & 12 m. √q 6: quorum Rad. sic connecto, √q. 12 p. √q 6 p. √q. 12 m. √q 6. Atque hoc totum complexum, est Radix quæsita.

Sic Radix huius Binomij quinti, √q 96 p. 8, est hoc connexum, √q. √q 24 p. √q 6 p. √q. √q 24 m. √q 8.

Denique huius Binomij sexti, √q 48 p. √q 28 Radix, est √q. √q 12 p. √q 5 p. √q. √q 12 m. √q 5.

Atque ea est extrahendarum Radicum quadratarum è Binomiis ratio à nobis in compendium redacta, eáque facillima. Residuorum verò Radices eadem planè methodo extrahuntur, signo tantum Minoris discrepantes.

Hæc de Binomiis satis esse putamus, quantum ad præsens argumentum attinet: de eorundem inuentione & vsu plenißimè dicturi in decimo Elementorum libro, quem nouis meditationibus illustrabimus, quum integrum Euclidem, Deo approbante, daturi.

ſumus. Quod inſtitutum vt intermitteremus, non operis, ſed temporis difficultas effecit. Nos ad ea, quæ de numerorum Irrationalium præceptione ſuperſunt, progrediamur.

DE MINVTIIS IRRATIONALium Numerorum.

CAP. XXII.

Minutiarum Irrationalium computatio partim integrorum Irrationalium partim abſolutorum calculo conſtat. Differt autem ab ea quam priore libro docuimus, Denominatorum computatione. Nam præter id quòd in hac, ſignum præponitur: in illa ſequitur: in hac etiam ſignum non ſemper totam fractionem afficit, vt in illa: ſed pro collocatione, aut Numeratorem, aut Denominatorem duntaxat: Neque vtrunque reſpicit, niſi inter ipſos ſit medium. Vt in Denominatis nihil intereſt vtrum ponas $\frac{16q}{64}$, hoc eſt, ſedecim Quadrata diuiſa per 64, an verò $\frac{16}{64q}$, hoc eſt, ſedecim ſexageſimas quartas vnius Quadrati: ſicut illic oſtendimus. At in Irrationalibus ſi dixeris, $\frac{\sqrt{q}\,16}{64}$, vt ſignum priuatim 16 anteeat: ſignificatur Radix Quadrata 16 diuiſa per 64: eæ ſunt $\frac{4}{64}$, ſeu $\frac{1}{16}$. At ſi medium poſueris ſignum, hoc modo, $\sqrt{q}\,\frac{16}{64}$: ſignificabitur Radix Quadrata ſedecim ſexageſimarum quartarum: hoc eſt, $\frac{1}{4}$.

Sola verò hîc proportio ſpectatur, ſicut in cæteris Minutiarum generibus. Vt $\frac{\sqrt{q}\,64}{2}$, $\sqrt{q}\,\frac{64}{4}$ & $\frac{64}{\sqrt{q}\,256}$, idem ſignificant.

Eæ etiam ad minimam denominationem reducuntur, in modum fractionum vulgarium. Vt $\sqrt{q}\,\frac{144}{36}$, $\sqrt{q}\,\frac{36}{9}$, $\sqrt{q}\,\frac{16}{4}$, & $\sqrt{q}\,4$, idem ſunt. Item $\sqrt{qc}\,\frac{4}{8}$, & $\sqrt{qc}\,\frac{1}{2}$ & $\frac{\sqrt{q}\,2}{\sqrt{q}\,2}$ idem.

Additio.

Additio.

Numeros reduc ad eãdem denominationẽ, ſi diuerſam habeant. Vt, ſi ſint addenda $\sqrt{c}\,\frac{512}{3}\ m\ \sqrt{q}\,4$ ad $\sqrt{q}\,\frac{49}{2}\ p\ \sqrt{c}\,27$ (hîc adduntur 2 ad 5) erit reductio, $\sqrt{q}\,\frac{441}{6}\ p\ \sqrt{c}\,729$ & $\sqrt{c}\,\frac{5069}{6}\ m\ \sqrt{q}\,16$. Iam adde duos Numeratores quadratos, ſcilicet $\sqrt{q}\,441$ & $\sqrt{q}\,16$ (atque hîc fit ſubtractio, ob ſignum m.) fit $\sqrt{q}\,289$. Tum adde duos Numeratores cubicos, ſcilicet $\sqrt{c}\,729$ ad $\sqrt{c}\,4096$: fit $\sqrt{c}\,15625$. Duobus productis ſigno Pluris connexis ſubſcribe Denominatorem communem, 6: erit numerus Additionis, $\sqrt{c}\,\frac{15625}{6}\ p\ \sqrt{q}\,289$.

Subtractio.

Sit ſubtrahẽda $\sqrt{c}\,\frac{512}{3}\ p\ \sqrt{q}\,4$ à $\sqrt{q}\,\frac{49}{2}\ p\ \sqrt{c}\,27$. Facta, vt paulò antè, reductione, aufer ℞ Quadratam à Quadrata (fitque Additio, ob ſignum m. ſcilicet additur $\sqrt{q}\,16$ ad $\sqrt{q}\,441$) prouenit p. $\sqrt{q}\,625$. Aufer poſtmodum ℞ Cubicam à Cubica, hoc eſt, $\sqrt{c}\,729$ à $\sqrt{c}\,4096$: manet m. $\sqrt{c}\,343$. Vtrique producto ſubſcribe Denominatorem communem, 6: Fiet numerus Subtractionis, $\sqrt{q}\,\frac{625}{6}\ m\ \sqrt{c}\,343$.

Non eſt prætereundum, particulas commenſurabiles eſſe debere: alioqui neque Additio neque Subtractio fieret, niſi per ſigna p. & m. Proinde ſi Quadrata per ſe commenſurabilia non fuerint, vide an cum Cubis conciliari poſſint: ſcilicet per reductionem ad idem ſignum.

Multiplicatio.

Reducendæ ſimiliter Minutiæ, ad idem ſignũ eãdémque denominationem. Vt, Volo multiplicare $\sqrt{q}\,\frac{}{3}$ per $\sqrt{c}\,\frac{27}{2}$ (hoc eſt $\frac{6}{3}$ per $\frac{3}{2}$) Reductio ad eandem denominationem, eſt $\sqrt{q}\,\frac{144}{6}$ & $\sqrt{c}\,\frac{729}{8}$ quæ ad idem ſignũ reducta, faciunt $\sqrt{qc}\,\frac{2985984}{6}$ & $\sqrt{qc}\,\frac{531441}{6}$: Hæc tandem inter ſe multiplicata, faciunt $\sqrt{qc}\,\frac{1586874322944}{36}$.

144		722
q		cę
$\frac{\sqrt{qq}\,2925934}{6}$		$\frac{\sqrt{qq}\,531441}{6}$

Probatio est, quòd ℞ Quadraticubica 1586874322944, est 108: quæ per 36 diuisa, faciunt 3.

Diuisio.

Hæc etiam vtranque reductionem exigit, tum ad idem signum, tum ad eandem denominationem. Reductione autem perfecta, abiiciuntur Denominatores: perficitúrque Diuisio per Numeratores. Veluti, Sit Diuidenda $\frac{\sqrt{qq}\,512000000\ p\ \sqrt{qq}\,26873856}{10}$ *per* $\frac{\sqrt{qq}\,2359296}{10}$. *Reiectis Denominatoribus, diuido* √qcę 512000000 *p.* √qcę 26873856, *per* √qcę 2359296. *Erit numerus Indicans,* √qcę 217 $\frac{1}{72}$ *p.* 1 $\frac{1}{2}$, *vel* $\frac{5}{\sqrt{q}\,72}$ *p.* 1 $\frac{1}{2}$.

DE TRINOMIIS QVÆdam obiter.

CAP. XXIII.

TRinomiorum vsum nondum vllum animaduerto: quem fortasse aliquem esse non negauerim, quum suam habeant artem. Horum itaque Additio, Subtractio & Multiplicatio, ex superioribus præceptis colligetur. Diuisio verò ea est, quæ possit studiosum remorari. Quæ vt fiat, parandus est nouus Diuisor, nouúsque Diuidēdus, ad hunc modum. Duc Diuisorem in suum Recisum seu Residuum: quod fiet, erit Bimediale. Hoc Bimediale multiplica per suum ipsius Residuum: fiet numerus simplex, vt in superioribus docuimus. Hic erit nouus Diuisor. Duc postmodùm, numerum Diuidendum in

in Recisum illud primum Diuisoris: fiet nouus Diuidendus. Iam hunc Diuidendum partire per nouum Diuisorem. Tandem numerum Indicantem duc in Residuum Binomij: Producetur numerus Indicans initio quæsitus. Exemplum.

Volo diuidere 100 *per hoc Trinomium,* 3 *p.* √q 9 *p.* √q 16. *Quumque sit vterque Rationalis numerus, constat Indicantem numerum, Rationalem futurum: atque is erit* 10.

Primùm ex Trinomio Diuisore, facio Residuum, seu veriùs Diminutum, quum quadratum non sit: ablata scilicet vna particularum per signum m. Verbi gratia, minuo √q 16: *fit Recisum Trinomij,* 3 *p.* √q 9 *m.* √q 16. *Per hoc multiplico ipsum Trinomium: fit* √q 324 *p.* 2. *(Quoniam verò hæc multiplicatio tædiosior est, vt pote nouem particularum: ea quomodo ad compendium contrahatur, docebimus. Duc primum* 3 *p.* 9 *in se: adde scilicet duarum particularum quadrata, fiunt* 18: *tum alteram ipsarum duplica, vt* 3, *fiunt* 6: *per hoc duplum Multiplica alteram particulam, scilicet* √q 9: *prouenit* √q 324: *& est quarta Propositio secundi Elementorum: duc postmodum p.* √q 16 *in m.* √q 16: *fit m.* 16. *Itaque ex multiplicatione* 3 *p.* √q 9 *p.* √q 16 *in* 3 *p.* √q 9 *m.* √q 16, *fiunt* 18 *p.* √q 324 *m.* 16 *hoc est,* √q 324 *p.* 2, *Bimediale.*

3 *p.* √q 9 *p.* √q 16
3 *p.* √q 9 *m.* √q 16

18 *p.* √q 324 *m.* 16: *seu* √q 324 *p.* 2.) *Iam hoc Bimediale duc in suum Diminutum,* √q 324 *m.* 2: *fiunt* 320. *Is erit nouus Diuisor. Tum ad nouū Diuidendū, multiplica* 100 *per Recisum ipsius Trinomij, scilicet per* 3 *p.* √q 9 *m.* √q 16: *prouenit Trinomium* 300 *p.* √q 90000 *m.* √q 160000, *nouus Diuidendus.*

3 *p.* √q 9 *m.* √q 16
100 √q 1000 √q 10000

100 *p.* √q 90000 *m.* √q 160000. *Tertiò per* 320, *nouum Diuisorem, partire* 300 *p.* √q 90000 *p.* √q 160000:

N

fiunt $\frac{300}{320}$ *p.* √q $\frac{90000}{102400}$ *m.* √q. $\frac{160000}{102400}$. *Hunc Indicem, ſeu Quotientem, duc in Reciſum Bimediale, ſcilicet in* √q 324 *m.* 2: *proueniunt* √q $\frac{29160000}{102400}$ *p.* √q $\frac{29160000}{102400}$ *p.* √q $\frac{29160000}{102400}$ *m.* √q $\frac{51840000}{102400}$ *m.* $\frac{600}{320}$ *m.* √q $\frac{360000}{102400}$ *p.* √q $\frac{640000}{102400}$. *Atque hoc Cõnexum ſeptem numerorum, erit Index numerus quæſitus. Ea verò ſunt* 10. *Quod probabitur, ſumptis Radicibus cuiuſque ſignati numeri, factiſque ſubtractionibus iis quæ per ſigna Minoris oſtenduntur. Radices igitur (ſeruato ordine, ſigniſque) ſunt* $\frac{5400}{320}$ *p.* $\frac{5400}{320}$ *m.* $\frac{7200}{320}$ *m.* $\frac{600}{320}$ *m.* $\frac{600}{320}$ *p.* $\frac{800}{320}$. *Numeri Pluris, omnino efficiunt* $\frac{11600}{320}$, *hoc eſt,* 36 $\frac{1}{4}$: *Numeri Minoris, efficiunt* $\frac{8400}{320}$, *hoc eſt,* 26 $\frac{1}{4}$. *Hæc ſi auferantur à* 36 $\frac{1}{4}$, *manebunt* 10, *ſicut initio fuit conſtitutum.*

DE MVLTIPLICATIONE CVBIca numerorum Irrationalium Compoſitorum & Diminutorum, & item Vniuerſalium.

CAP. XXIIII.

QVum diuiſeris Numerum in duas partes, & vtranque duxeris ad Cubum, tum vtriuſque quadratum triplicaueris, ac demum duo hæc tripla in partes ipſas mutuò duxeris: erit omnium horum ſumma, Cubo ipſius Numeri æqualis. Veluti, diuido 10 *in* 6 *p.* 4. *Duco* 6 *ad cubum, fiunt* 216: *itidem* 4 *ad Cubum, fiunt* 64: *habeo* 216 *p.* 64: *id eſt,* 280. *Tum triplico* 36, *fiunt* 108: *Hæc duco in* 4, *fiunt* 432: *Triplico* 16, *fiunt* 48: *hæc duco in* 6, *fiunt* 288. *Producta hæc,* 21[6]9, & 64 & 432 & 288, *cõſtituũt* 1000. *Exemplum in Irrationalibus. Et erit Diminutum. Compoſitorum enim multiplicatio facilior eſt. In Diminutorum verò multiplicatione, diligenter attendere oportet permutationem & officium ſignorũ Pluris & Minoris. Sit igitur hoc Diminutum* 4 *m.* √q2 *cubicè multiplicandum. Duco* 4 *ad Cubum, fit p.* 64: *duco itidem m.* √q.

m. √q 2 *ad Cubum, fit m.* √q8. *Atque ex eo calculo habeo* 64 *m.* √q8. *Tum triplico* 16 *(id eſt quadratum* 4*) fiunt* 48: *Deinde duco* 48 *(id eſt,* √q2304*) in m.* √q2: *prouenit* √q-4608. *Itidem triplico* 2 *(id eſt quadratum* √q2*) fiunt m.* 6: *hæc duco in* 4: *prouenit m.* 24: *quod eſt à Minore iam reperto minuendum: ſcilicet* 24 *auferenda à m.* √q4608. *Quare multiplicatio Cubica huius Diminuti* 4 *m.* √q2, *erit* 64 *m.* √q8, *m.* √q4608 *m.* 24. *Vt totum aggregatũ conſtet duobus numeris Diminutis: vno,* 64 *m.* √q8: *altero,* √q 4608 *m.* 24. *Quæ duo diminuta quum intercipiantur ſigno Minoris, ſignificatur poſterius à priore eſſe auferendum: ſcilicet* √q4608 *m.* 24 *à* 64 *m.* √q8. *Quod perinde eſt quaſi adderentur* 24 *ad* 64 *(ea ſunt* 88*) &* √q4608 *ad* √q8, *fierétque* √q5000: *inter vtranque additionem poſito ſigno Minoris. Erit igitur multiplicatio Cubica ad Binomium Cubicum redacta,* 88 *m.* √q5000.

Vbi animaduertendum in huiuſmodi multiplicationibus quæ decuſſatim fiunt, particulas quoque decuſſatim eſſe commenſurabiles. Vt in poſteriore hoc Exemplo, 64 & 24 *commenſurabiles ſunt, vtpote vtraque Rationalis: ſimiliter* √q8 & √q4608, *cõmenſurabiles: proportio enim eſt* 24, *id eſt vigeſima quadrupla.*

Alterum Exemplum, de Numero duabus particulis Irrationalibus conſtante. Volo multiplicare √q3 *p.* √q2 *cubicè. Duco vtranque particulam ad Cubum: fiunt* √q27 *p.* √q8: *Tum triplico* 3 *(quadratum prioris) fiunt* 9: *Duco* 9 *in* √q2: *prouenit* √q 162, *commenſurabilis ipſi* √q8: *ſunt enim in proportione* $\frac{9}{2}$, *id eſt, quadrupla ſeſquialtera. Quare addita* √q162 *ad* √q8, *fit* √q 242. *Similiter triplico* 2 *(quadratum* √q2*) fiunt* 6: *duco* 6 *in* √q3: *prouenit* √q108, *commenſurabilis ipſi* √q27: *Eſt enim proportio Dupla. Itaque addita* √q 108 *ad* √q27, *fiet* √q 343. *Cubus igitur totus, erit* √q 243 *p.* √q 242. *Atque hoc diligenter notandum ad multiplicationem Cubicam Radic. Vniuerſalium, quam mox ſubiiciemus: ſi priùs rationem compendiariam* *huiusmodi multiplicationum Cubicarum dederimus. Quadra alteram particulam numeri ad Cubum ducendi: quadratum triplica: ad hoc triplum adde quadratum prioris particulæ. Id totum duc in ipsam priorem particulam: exurget prior Cubi particula. Similiter quadra priorem particulam: quadratum triplica: ad triplum adde quadratum alterius particulæ: productum duc in ipsam secundam particulam: fiet secunda Cubi particula. Vt in postremo Exemplo, √q 3 p. √q 2, Quadro √q 2, quadratum triplico, fiunt 6: hæc addo ad quadratum √q 3, fiunt 9: duco 9 in √q 3: prouenit √q 243, prior Cubi particula. Eodem modo quadro √q 3, quadratum triplico, fiunt 9: hæc addo ad 2, fiunt 11: Duco 11 in √q 2: prouenit √q 242, altera Cubi particula. Iam verò sit cubicè multiplicandum hoc Connexum, √c. √q 26 p. 5 m. √c. √q 26 m. 5: quod constat Composito & Diminuto: sicque enunciatur. Radix Vniuersalis Cubica, radicis quadratæ 26 p. 5. m. Radice Vniuersali Cubica ℞ quad. 26 m. 5. Quúnque totius Connexi partes ambæ sint incommensurabiles, erit Multiplicatio Cubica particulatim perficienda. Scilicet duc particulas ad Cubum: easdem quadra: quadratum vtrunque triplica: ambo tripla duc mutuò in ipsas particulas. Habes formulam hîc adscriptam.*

Cubi particularum,

√q 26 p. 5 m. √q 26 m. 5: (*atque ea sunt* 10) *sicut in Compositorum Additione docuimus.*

Quadrata particularum.

√c. 51 p. √q 2600 m. √c. 51 m. √q 2600.

huiusmodi

Tripla Quadratorum.

√c. 1377 p. √q 1895400 m. √c. 1377 m. √q 1895400.

Iam hæc tripla Quadratorum, ducenda sunt decussatim in partes ipsas. Positio autem sic erit,

√c. 1377 p. √q 1895400
m. √c. √q 26 m. 5.
m. √c. 1377 m. √q 1895400
p. √c. √q 26 p. 5.

Hoc loco accuratè animaduertere oportet, in Numeris qui signis Pluris & Minoris afficiuntur, signum antecedens, sequentibus signis dominari. Vt quum dicimus m. √c. √q 26 m. 5: prius signum Minoris, toti Connexo præfixum, habet ius in secundum, ipsumque tacitè destruit: Vt m. 5 hoc loco valeat m. m. 5, hoc est, p. 5. Quum igitur duco √c. 1377 in m. √c. √q 26, fit quidem Minus, nempe m. √c. √q 49299354: quum verò in eandem m. √c. √q 26, duco p. √q 1895400: fit Plus, nempe p. √q 49280400. Nam quum dico m. √c. √q 49299354 p. √q 49280400, quia signum Minoris regit signum Pluris, & Minus in Plus, producit Minus: manifestum est signum Pluris posterius, perinde esse ac si esset Minus. Iam ad complendam multiplicationem à nobis susceptam, ducendæ sunt eædem ipsæ particulæ in m. 5. quod, quia est Minoris Diminutio, producet quidem Minus, sed quod perinde erit ac Plus: Duco scilicet 1377 in m. 5, fit m. 6885: duco similiter p. √q 1895400 in m. 5 (hoc est in m. √q 25) prouenit m. √q 47385000. Hæc verò Multiplicatio efficit hoc aggregatum quatuor numerorum, m. √c. √q 49299354 p. √q 49280400 m. 6885 m. √q 47385000.

Superest iam vt ducamus m. √c. 1277 m. √q 1895400 in p. √c √q 26 p. 5. Cuius multiplicationis producta, eadem erunt quæ in priore calculo: sed tamen diuersis signis affecta.

Vbi si diligenter animaduerterimus vim signorum præeuntium & sequentium: facilè singula singulis accommodabimus. Erit *igitur aggregatum huiusmodi, m. √c. √q 49299354 m. √q 49280400 p. 6885 m. √q 47385000. Vtraque harum Multiplicationum ad Binomium reducitur: quum sint particulæ decussatim commensurabiles, vt diximus. Scilicet, si auferamus √q 47385000 à √q 49299354: supererit √q 18954. Similiter si auferamus 6885 à √q 49280400 (is est numerus rationalis, nempe 7020) supererunt 135. Quare duæ multiplicationes sic erunt, scilicet prior,*

m. √c. √q 18954 p. 135: altera verò m. √c. √q 18954 m. 135. ac tandem Cubus totus, erit 10 m. √c. √q 18954 p. 135 m. √c. √q 18954 m. 135. Vide formulas singularum quas dedimus multiplicationum, huc in ordinem collatas.

I.

√c. √q 1896129 p. √q 1895400
m. √c. √q 26 m. √c. √q 26.

m. √c. √q 49299354 p. √q 49280400.

II.

√c. 1377 p. √q 1895400
m. 5. m. √q 25.

m. 6885 m. √q 4738500.

III.

m. √c. √q 1896129 p. √q 1895400
p. √c. √q 26 p. √c. √q 26.

m. √c. √q 49299354 m. √q 49280400.

IIII.

m. √c. 1377 m. √q 1895400
p. 5. p. √q 25.

p. 6885 m. √q 47385000.

Hanc mul-

Hanc multiplicationem Cubicam exquisitè nobis sumpsimus explicandam, quòd eadem ipsa à Cardano sit proposita Cap. 11 suæ Algebræ: vt intelligant Numerorum studiosi, diuersa methodo & effectione, scopum vnum attingi posse. Collocatio enim signorum nostra, alia est quàm quæ ab ipso asscribitur. Colligit enim Cubum esse, 10 p. √c. √q 18954 m. 135 m. √c. √q 18954 p. 135. Quæ computatio vera quidem est, nec alia esse potest, si æstimationem spectemus: sed collocatione, diuersa est. Nam ex particularum signorúmque constitutione quam ipse adiicit, huiusmodi multiplicationum artem aut normam colligere potes. Repetito igitur Cubo à nobis collecto, scilicet 10 m. √c. √q 18954 p 135 m. √c. √q 18954 m. 135, nostram sententiam ex ipsius argumento confirmabimus. Ponit ipse √c p. 3 ℞ æquari 10: atque ex deductione, colligitur æstimatio 1 ℞, esse √c. √q 26 p. 5 m. √c. √q 26 m. 5. Quò fit, vt 3 ℞ æstimatio sit √c. √q 18954 p. 135. m. √c. √q 18954 m. 135. Hoc autem Connexum nostrum, √c. √q 18954 p. 135 m. √c. √q 18954 m. 135 sic aduersatur huic, m. √c. √q 18954 p. 135 m. √c. √q 18954 m. 135, vt singulæ particulæ singulas destruant. Quare 1c p. 3 ℞ manent æquales 10 exactè, ex ipsa Positionis sententia.

DE NVMERIS IRRATIONALIBUS Denominatis.

CAP. XXV.

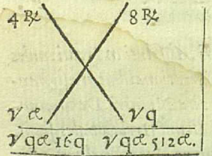
QVemadmodum *Numeri Absoluti in Irrationales transeunt, dum notis Irrationalibus præsignantur: vt ex 6 fit √q 6: ita Numeri Denominati (quos Cossicos vulgò dicunt) Irrationales fiunt, quum ipsis signum aliquod Irrationalium præ-*

ficitur. Vt ex 4 ℞, fit √q 4 ℞, Numerus Denominatus Irrationalis: qui sic enunciatur, Radix Quadrata quatuor Radicum. Quamuis autem huiusmodi Numeros, Irrationales vocemus: tamen Numeros Denominatos, Rationales esse non statuemus, nisi quatenus signo Irrationali præoccupantur. Nã quum √q 2 cꝭ æquè Rationalem & Irrationalem Numerum possit includere (vt si æstimatio Cubi sit 8, tum √q 2 cꝭ erit 4: si verò æstimatio sit 27, erit √q 2 cꝭ, 54) fit vt Numeri Denominati inter naturam Rationalium & Irrationaluim ambigant, donec ipsorum conditio detegatur.

DE REDVCTIONE IRRATIOnalium Denominatorum.

CAP. XXVI.

REductio Denominatorum Irrationalium dupliciter fit, quum ipsi duplex signum habeant. Prior, est signorum præpositorum: quæ Reductio ad idem signum dicitur: Altera, postpositorum, quæ Reductio ad simplicissimam æstimationem vocatur: seu vt vulgò dicunt, ad minimos terminos. Harum vtranque quum libro priore docuerimus, Exempla hoc loco dedisse satis fuerit. Volo reducere √cꝭ 4 ℞ & √q 8 ℞: fiet √qcꝭ 16 q & √qcꝭ 512 cꝭ, ad idem signum Reductio.



Quod probatur, sumpto Binario in Radicem. Erit enim √cꝭ 4 ℞, 2: & √q 8 ℞, erit 4. Iam √qcꝭ 16 q, valent √cꝭ 4 ℞:, scilicet 2: Nam 16 q valent 64, quorum Radix Quadraticubica est

ca est

ca, est 2. Similiter √qcꝭ 512 cꝭ, æqualis est √q 8 ℞. Nam 512 cꝭ faciunt 4096: quorum Radix Quadraticubica, est 4. Reductio verò ad simplicissimam denominationem, erit √qcꝭ 16, & √qcꝭ 512 ℞.

Item, volo reducere √q 8 ℞ & √cꝭ 16 q: erit prior Reductio, √qcꝭ 512 cꝭ, & √qcꝭ 256 qq: altera verò, √qcꝭ 512, & √qcꝭ 256 ℞.

Probatio. Sumantur 2 in Radicẽ, erunt √q 8 ℞ & √cꝭ 16 q æquales inter se. Nam 8 ℞ faciunt 16: quorum √q, est 4: & 16 q faciunt 64: quorum √cꝭ, itidem est 4. Iam √qcꝭ 512 cꝭ valet √q 8 ℞: quum ex superiori exemplo constiterit √qcꝭ 512 cꝭ, esse 4. Tum √qcꝭ 256 qq valet 16 q. Nam 256 qq faciunt 4096: quorum √qcꝭ, est 4. Secunda verò Reductio manifesta est. Nam 256 ℞ faciunt 512: id est, 1 ℞, facit 2: quæ fuit hypothesis.

Hoc autem obseruandum, vt Reductio ad idem signum prior fiat. Nam si √q 8 ℞ & √cꝭ 16 q priùs reducerentur ad minimã æstimationem, falsa esset Reductio. Constat enim √q 8 non esse æqualem √cꝭ 16 ℞, sumpta qualibet Radice ad quæstionem exercendam. Quumque in mentionẽ Æquationis è re nata reciderimus, id obiter monendum esse duximus, hanc æquationem √q 24 ℞ & 12, cum similibus, facilem esse ac perspicuam. Oportet enim 24 ℞ æquari quadrato 12, quod est 144. Et quum √q 3 cꝭ fuerit æqualis 9, oportet tres Cubos æquales esse 81, quorum √q est 9. Hoc monui, quòd huiusmodi æquationes à quibusdam proponantur tanquam difficiles.

DE ADDITIONE, SVBTRActione, Multiplicatione, & Diuiſione Irrationalium Denominatorum.

CAP. XXVII.

ADditio & Subtractio Denominatorum Irrationalium fit per ſigna Pluris & Minoris. Veluti √q 24 ℞ *addita ad* √q 12 q, *facit* √q 24 p. √q 12 q. *Et* √q 12 q *ſubtracta à* √q 24 ℞, *relinquit* √q 24 ℞ m. √q 12 q.

Quòd ſi ſigna denominantia fuerint eadem, & numeri Irrationales, ſemotis ſignis denominantibus, fuerint commenſurabiles: fiet Additio & Subtractio ſicut Medialium. Scilicet, quemadmodum √q 6 *cum* √q 24, *facit* √q 54: *ita* √q 6 ℞ *cum* √q 24 ℞, *facit* √q 54 ℞. *Rurſus, quemadmodum* √q 6 *ſubtracta à* √q 24, *relinquit* √q 6: *ita* √q 6 ℞ *ſubtracta à* √q 24 ℞, *relinquit* √q 6 ℞. *Cuius rei probatio conſtat, ſumpto vno quopiam Numero in Radicem. Vt in poſteriori Exemplo, ſit Radix* 6. *Tunc* 6 ℞ *faciunt* 36: & 24 ℞ *faciunt* 144. *Quare* √q 6 ℞, *erit* 6: & √q 24 ℞, *erit* 12: *quæ addita faciunt* 18. *Iam vtique* √q 54 ℞ *facit* 18. *Scilicet,* 54 ℞ *faciunt* 324: *quorum Radix eſt* 18. *Eadem ratione probatur Subtractio.*

Multiplicatio verò & Diuiſio (adhibita ſemper Reductione) nullo alio præcepto indigent, quàm per Exempla.

Vt √qc 512 *ducta in* √qc 256 qq, *facit* √qc 131072 *bß. Probatio eſt, quòd* 1 *bß facit* 128: *ob id,* 131072 *bß faciunt* 16777216: *quorum Radix* qc, *eſt* 16. *Nam* √q 16777216 *facit* 4096: *quorum Radix Cubica, eſt* 16. *Et tantundem efficiunt ambo numeri inuicem ducti. Vterque enim valet* 4.

Exemplum

Exemplum Diuiſionis. √qc 131072 *bß diuiſa per* √qc 512 c, *facit* √qc 256 qq. *Scilicet,* 131072 *diuiſa per* 512, *faciunt* 256. *Quare in Multiplicatione & Diuiſione, ſigna præpoſita manent eadem, quemadmodum in Medialibus fieri ſolet. Signa verò denominantia mutantur pro Exponentium indicatione, ſicut in Denominatis docuimus. Fractiones verò priuatim tradere nihil attinet, vt quæ integrorum ſuorum præcepta ſequantur.*

DE EXEMPLIS PERTINENTIbus ad Numeros Irrationales.

CAP. XXVIII.

QVæ nos ſubiiciemus Exempla, partim ad numeros Irrationales Simplices & Compoſitos, partim ad Denominatos Irrationales accommodabuntur. Pauca verò dabimus in præſens, dum nos tertium librum meditamur: in quo Quæſtiones Geometricas exquiſitè tractabimus, vt Algebram ſimul cum Geometria ad vſum vtriuſque coniungamus.

Quæſtio I.

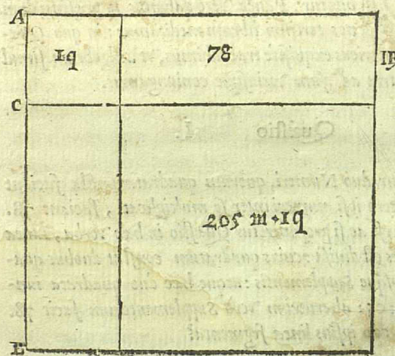
Quæruntur duo Numeri, quorum quadrata iuncta faciant 205: *duo verò ipſi numeri inter ſe multiplicati, faciant* 78. *Hoc perinde eſt ac ſi proponeretur Quæſtio in hæc verba, Linea in duas partes eſt diuiſa: cuius quadratum conſtat duobus quadratis duobuſque Supplementis: atque hæc duo quadrata iuncta faciunt* 205: *alterutrum verò Supplementorum facit* 78. *Quanta ſunt duo ipſius lineæ ſegmenta?*

Imprimis attendere oportet, totum Quadratum lineæ propositæ (ea sunt quadrata duorum numerorum cum duplici inter se multiplicatione) esse 361. *Duæ enim multiplicationes faciunt* 156: *quæ additæ ad* 205, *constituunt* 361.

Sit itaque linea AB inæqualiter diuisa in puncto C. Ponatúrque pro segmento AC, 1℞. *Huius quadratum, erit* 1q: *sicque quadratum segmenti CB, erit* 205 *m.* 1q. *Cuius Radix, est* √q. 205 *m.* 1q. *Iunge ambas Rad. fiet* 1℞ *p.* √q. 205 *m.* 1q: *tota scilicet linea AB. Hoc totum duc in se, fiunt* 205 *p.* √q 820 q *m.* 4qq: *vt est in subiecta formula: in qua pro* 1℞ *ponitur* √q 1q. *Hanc enim reductionem, Multiplicationis lex requirit, sicut antè docuimus.*

√q 1q *p.* √q. 205 *m.* 1q.
√q 1q *p.* √q. 205 *m.* 1q.

1q *p.* 205. *m.* 1q.
p. √q. 205q *m.* 1qq *p.* √q 205q *m.* 1qq.
Summa 205 *p.* √q. 820q *m.* 4qq.



Hæc summa æqualis est 361. *Aufero iã vtrinque* 205: *manet* √q. 820 q *m.* 4qq, *æqualis* 156: *hoc est,* √q. 820 q *m.* 4qq, *æquales* 24336. *Vtraque enim æquationis pars ad*

ad quadratum ducenda. Ac transpositis partibus, erunt 4qq *æqualia* 820 q *m.* 24336: *Ac demum* 1qq *æquale* 205q *m.* 6084. *Huius Radice educta, prodibunt* 36, *æstimatio* 1q: *scilicet, Quadratum segmenti AC: cuius Radix,* 6. *Hæc* 36 *ablata à* 205, *relinquũt* 166, *Quadratum segmenti CB: Cuius Radix,* 13. *Duo igitur numeri* 6 & 13, *sunt quos quæsiuimus.*

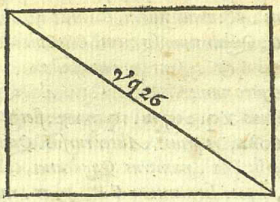
Aliter. Sumpta pro alterutro numerorum, 1℞: *pro altero verò* √q. 205 *m.* 1q: *ducemus* √q. 205 *m.* 1q *in* 1℞: *fiet* √q. 205q *m.* 1qq, *æqualis* 6084, *vt priùs. Aliter rursus. Quum totius lineæ AB potentia sit* 361, *numerus Quadratus, cuius Radix,* 19: *erit secundus, vtpote segmentum CB,* 19 *m.* 1℞: *quorum quadratum* 361 *p.* 1q *m.* 38 ℞, *erit æquale* 205 *m.* 1q: *Et per transpositionem & subductionem, erit* 1q *æquale* 19 ℞ *m.* 78. *Sed rarißimè fit vt Quadrata Geometrica incidant numeris Rationalibus æqualia, nisi de industria effingantur.*

Quæstio II.

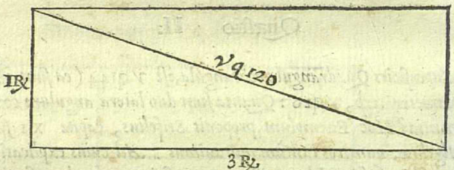
Superficies Quadrangula rectangula, est √q144 (*ea sunt* 12) *Diameter verò,* √q26: *Quanta sunt duo latera angulum continentia? Hoc Exemplum proponit Stifelius, capite* XI *suæ Algebræ: numeros tantùm mutauimus. Ad cuius explicationem sibi asciscit celebrem illam Propositionem quadragesimam septimam libri primi Elementorum. Quod & nos faciemus, sed Exemplum ipsum clariùs expositurí.*

Ex ipsa itaque Propositione notum est, Quadratum Diametri esse æquale Quadratis duorum laterum: Proinde quum Diameter sit √q26, *ipsa ambo Quadrata iuncta, faciunt* 26. *Quare quid aliud quàm diuidemus* 26 *in duos numeros, qui inter se multiplicati faciant* 144? *Horum enim Radices exhibebunt duo latera quæsita. Neque quicquam refert quòd* √q144 *sit numerus rationalis. Nam in hac nostra specie res in idem perpetuò recidit.*

Igitur pro altero Quadratorum ponatur 1℞: erit alterum, 1℞ m. 26. Hæc multiplico inter se: proueniunt 26 ℞ m. 1q, æquales 144: hoc est, 1q æquale 26 ℞ m. 144. Cuius complexi maior Radix, est 18: minor verò 8. Erit igitur maius latus, √q18: alterum, √q8. Quæ inter se multiplicatæ, faciunt √q 144, ex Quæstionis præscripto.



Alterum Stifelij Exemplum. Superficiei quadrangulæ Rectangulæ maius latus triplum est minoris lateris: Diameter verò, est √q120. Quanta est ipsa area?



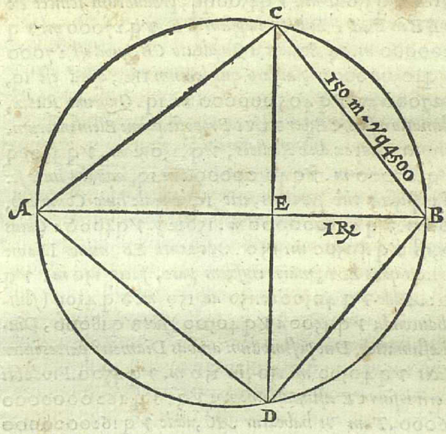
Minus latus est 1℞: maius verò, 3℞: Duo quadrata faciunt 10q, æqualia 120. Quapropter 1q facit 12, Quorum Radix, √q12, est minus latus, & maius erit √q108. Eritque area, √q1296: hoc est, 36.

Quæstio III.

Diameter Circuli diuiditur secundum mediam & extremam rationem, seu, vt vulgò dicitur, secundum proportionem habentem medium & duo extrema. Et per punctum diuisionis, linea

recta

recta ad angulos rectos vtrinque educitur ad peripheriam. Subtensa verò quæ Triangulum rectangulum perficit, est 150 m. √q 4500. Quæro quanta sit diameter, & quanta cæterarum linearum vnaquæque.



Huius Exempli deductio vniuersam ferè Denominatorum & Irrationalium Compositorum præceptionem complectitur. Quapropter à nobis prolixiùs explicabitur. Sit itaque Diameter AB, Circuli ABDA, diuisa vt proponitur, idque ad angulos rectos, per lineam CED, in puncto E: & ducantur subtensæ AC, CB: BD, & DA. Tum pro EB, minore Diametri portione, ponatur 1℞. Et quia est BE ad EA vt EA ad BA, ex positione: in Triangulo autem ACB ab angulo C (qui rectus est, per Propositionem tertij Elementorum trigesimam ex commentatione nostra) deducitur perpendicularis CE: erit ex Consectario octauæ proposit. libri sexti eorundem, vt BE ad EA, ita CB ad BA: ob id per nonam Quinti, æqualis est CB ipsi CA. Erit igitur & AE, 150 m. √q 4500. Quapropter CE, medium proportionale inter BE & EA, erit √q 350℞ m. √q 4500qq, productum scilicet ex ductu BE in EA. Erit & idipsum CE, √q.27000 m. √q 405000000 m. 1q. Scilicet, à Quadrato CB, quod est, 27000 m. √q 405000000, aufero quadratum 1℞, quod est 1q, fiunt 27000 m. √q 405000000 m. 1q. Quorum Radix, est æstimatio ipsius CE, per XLVI Proposit. primi Elementorum. Quapropter erunt eæ duæ Radices, √q. 150℞ m. √q 4500q & √q. 27000 m. √q 405000000 m. 1q, æquales inter se: & transpositis ritè partibus, erit 1q æquale huic Complexo, 27000 m. √q 405000000 m. 150℞ p. √q 4500q: Cuius Radix, est √q 40500 m. 150. Ac tanta EB, minor Diametri pars. Et quia EA, maior eiusdem pars, facit 150 m. √q 4500: Adde √q 40500 m. 150 ad 150 m. √q 4500 (scilicet subducenda √q 4500 à √q 40500) fiet √q 18000, Diametri æstimatio. Duc postmodùm ambas Diametri partes inter se, scilicet √q 40500 m. 150, in 150 m. √q 4500. Producti Rad. erit ipsius CE æstimatio: nempe √q. √q 1620000000 m. 36000. Tum vt habeatur AC, adde √q 1620000000 m. 36000, quod est quadratum CE, ad 27000 m. √q 405000000 (hoc verò nil aliud est, quàm subducere 27000 à 36000, & √q 405000000 à √q 1620000000) Producti Radix, erit ipsius AC æstimatio: scilicet, √q. √q 405000000 m. 9000. Patent itaque omnium linearum quantitates.

Et quia paulò antè reperimus 1q æquale huic aggregato, 27000 m. √q 405000000 m. 150℞ p. √q 4500q: leuabimus lectorem ad Radicem exprimendam. Imprimis intelligatur ipsum aggregatum, instar Diminuti numeri Denominati: hoc est, sic sumatur

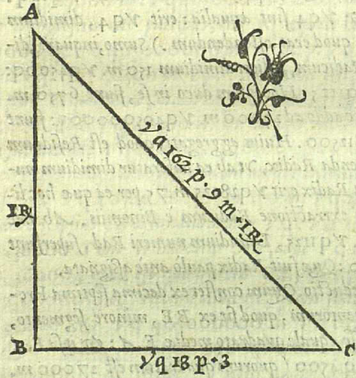
sumatur tanquam duabus particulis constet: quarũ prior, 27000 m. √q 405000000, pro numero absoluto habeatur: altera, m. 150℞ p. √q 40500q, pro numero simplici Denominato: scilicet 150 p. √q 40500 habeatur pro numero Radicum. (Numerum enim Radicum esse sic ostendo, Sumo hunc numerum, 1q 16q. Aio √q 16 esse numerum Radicum, qualem requirit extractionum Regula: & dimidium ipsius, scilicet √q 4, esse dimidium numeri Radicum. Facio Radicem esse 3: tum 16q erunt 144: quapropter erunt æquales √q 16q & √q 144. Quùmque √q 144 sit 12: & 12 efficiant 4℞: erit √q 16q æqualis 4℞, ob idque eorum dimidia æqualia. Atqui 2, dimidium est numeri 4℞: & √q 4, dimidium numeri √q 16q. Quum igitur 2 & √q 4 sint æqualia: erit √q 4, dimidium numeri Radicum: quod erat ostendendum.) Sumo, inquam, dimidium numeri Radicum, scilicet dimidium 150 m. √q 4500q: quod est, 75 m. √q 1125: Hoc ipsum duco in se, fiunt 6750 m. √q 25312500: hæc addo ad 27000 m. √q 405000000: fiunt 33750 m. √q 632812500. Huius aggregati, quod est Residuum primum, inuestigenda Radix, vt ab ea auferatur dimidium numeri Radicum. Ea Radix erit √q 28125 m. 75, per ea quæ hoc libro præcepimus in extractione Radicum è Binomiis. Ab hac Rad. aufero 75 m. √q 1125, Dimidium numeri Rad. supersunt √q 40500 m. 150: Quæ fuit Radix paulò antè assignata.

Alia Exempli deductio. Quum constet ex decima septima Proposit. Sexti Elementorum, quod fit ex BE, minore segmento, in totam BA, esse æquale quadrato mediæ EA: & ipsa EA faciat 150 m. √q 4500 (quorum quadratum est 27000 m. √q 405000000) pono, vt priùs, pro minore segmento, 1℞. Tum tota Diameter AB, erit 150 m. √q 405000000 p. 1℞: Quod complexum si ducatur in 1℞, producet 150℞ m. √q 4500qp. 1q. Quare ex reductione erit, vt modò, 1q æquale huic aggregato, 27000 m. √q 405000000 m. 150℞ p. √q 4500q.

Aliter rursus. Pro tota Diametro AB, ponatur 1℞. Eritque minor portio, EB, 1℞ m. 150 p. √q 4500. Quum itaque duxerimus 1℞ m. 150 p. √q 4500 in 1℞: fiet productum æquale ipsi EA: eritque æquationis scopus idem cum superiore.

Quæstio IIII.

Est Triangulum Rectangulum, cuius vnum latus facit hoc Compositum, √q 18 p. 3. Subtensa verò vnà cum altero latere, facit √q 162 p. 9. Quæro vtriusque æstimationem.



Quum ex Proposit illa XLVII. Primi Elementorum sæpe inducta, Quadrata duarũ linearũ AB & BC sint æqualia quadrato lineæ AC: ponatur pro latere AB, 1℞. Erit subtẽsa AC, √q 162 p. 9 m. 1℞. Tum quadratũ ipsius AB, quod est 1q, & quadratum BC, quod est 27 p. √q 648, erunt æqualia quadrato AC, quod est 1q p. 243 p. √q 52488 m. 18℞ m. √q 648q. Et per reductionem, 1q 648q æquale est 216 p. √q 52488 m. 18℞ m. √q 648 q. Quum igitur abstulerimus √q 648 à √q 52488 (sunt enim proportione inter se noncupla) manebit √q

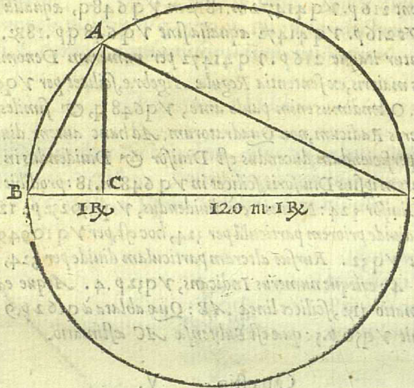
41472

41472. Quapropter ex ea subtractione, quæ reductio quædã est, manent 216 p. √q 41472 m. 18℞ m. √q 648 q, æqualia nihilo. Vt 216 p. √q 41472 æqualia sint √q 648 q p. 18℞. Diuidantur itaque 216 p. √q 41472 per numerum Denominationis maioris, ex sententia Regulæ Algebræ, scilicet per √q 648 p. 18. Ostendimus enim paulò antè, √q 648 q, & similes, esse numeros Radicum, non Quadratorum. Ad hanc autem diuisionem perficiendam, ducendus est Diuisor & Diuidendus in Diminutum ipsius Diuisoris, scilicet in √q 648 m. 18: prodibit nouus Diuisor 324: Nouus verò diuidendus, √q 3359232 p. 1296. Iam diuide priorem particulã per 324, hoc est, per √q 104976: exibit √q 32. Rursus alteram particulam diuide per 324, exibunt 4: eritque numerus Indicans, √q 32 p. 4. Atque ea est æstimatio 1℞, scilicet lineæ AB: Quæ ablata à q 162 p. 9, relinquit √q 50 p. 5: quæ est Subtensæ AC æstimatio.

Quæstio V.

Circuli Diameter ponitur 120: A puncto verò quopiam ipsius erigitur linea perpendicularis ad peripheriam, quæ facit hunc numerum, √q. 2925 m. √q 405000. Quæritur quantum sit vtrunque Diametri segmentum.

Sit itaque AC linea à puncto C, diametri BD, ad rectos angulos erecta ad peripheriæ punctum A: ponatúrque pro BC segmento, 1℞. Et erit CD, 120 m. 1℞. Quúmque CA sit medium proportionale inter BC & CD, per trigesimam Tertij & octauæ Sexti consectarium: erit, per decimam septimam eiusdem, quod fit ex 120 m. 1℞ in 1℞, æquale Quadrato AC. Quare 120℞ m. 1q æquabuntur 2925 m. √q 405000: Et transpositis partibus, erit 1q æquale 120 ℞ p. 1q 405000 m. 2925. Facit igitur 1℞ 45 m. √q 450, quæ erit ipsius BC æsti-



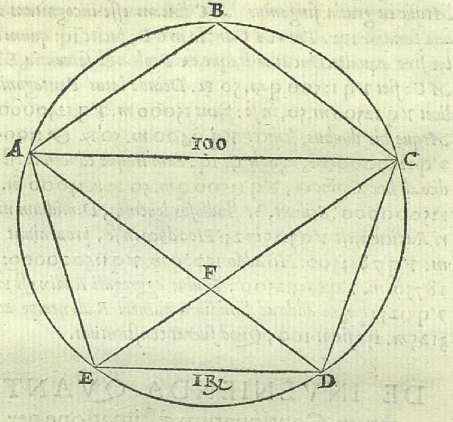
matio. Ex quo erit CD, 75 p. Vq 450. Tum si duxeris AB & AD: erit, ex XLVII primi Elementorum, ipsa AB, Vq 5400 m. Vq 6480000: & AD, Vq. 9000 p. Vq 6480000.

Quæstio VI.

Proponitur Pentagonum æquilaterum ita designatum, ut linea binis quibusque lateribus subtensa, faciat 100. Quantum est latus Pentagoni?

Sit ipsum Pentagonum, ABCDE: in quo ducantur tres subtensæ, AC, AD, & CE: ut AD & CE se scindant in puncto F. Quod itaque fit ex linea AD in CE, æquale est ei quod fit ex AC in ED cum eo quod fit ex AE in CD: sicut demonstrat Ptolemæus Cap. IX lib. primi magnæ Constructionis, (Quæ

(Quæ demonstratio in universum spectat ad omnes figuras Quadrilateras Circulo inscriptas). Itaque pro latere Pentagoni,



pono 1℞. Tum AE ducta in CD, facit 1q: Et BD in AC, facit 100 ℞. Sed AD in CE, facit 10000: Tres enim lineæ AC, AD, & BE inter se sunt æquales, nempe æqualibus angulis & lateribus subtensæ: Et per transpositionē, erit 1q æquale 10000 m. 100 ℞. Quorum Radix, est Vq 12500 m. 50. Scilicet dimidium numeri Radicum, est 50: hæc duco in se, fiunt 2500: addo 2500 ad 10000, proueniunt 12500. Quorum Radix, Vq 12500: à qua aufero dimidium numeri Rad. manet Vq 12500 m. 50. Ea est æstimatio lateris Pentagonici quæsita.

Quod sic probatur. Linea Pentagoni subtensa faciente 100, si latus Pentagoni faciat Vq 12500 m. 50, è contrario, oportet latere Pentagoni faciente √q 12500 m. 50, lineam subtensam facere 100. Videamus itaque an quemadmodum ex 100 prouenit √q 12500 m. 50, sic ex √q 12500 m. 50, redeant 100. Atque ea gratia fingamus AC lineam esse incognitam: pro qua ponatur 1℞. Tum AC ducta in CE, faciet 1q: quum ambæ sint æquales. Ducatur itaque, ex Ptolemæi sententia, ED in AC: fiet √q 12500 q m. 50 ℞. Deinde latus Pentagoni, scilicet √q 12500 m. 50, in se: fiunt 15000 m. √q 125000000. Atque his duobus, scilicet √q 12500 m. 50 ℞ & 15000 m. √q 125000000, æquale est 1q. Iam itaque educenda est Radix ab hoc Connexo, √q 12500 q m. 50 ℞ p. 15000 m. √q 125000000. Scilicet, vt studiosos leuemus, Dimidium numeri Radicum, est √q 3125 in 25: Hoc duco in se, proueniunt 3750 m. √q 7812500: His addo 15000 m. √q 125000000: fiunt 18750 m. √q 195312500: Huius aggregati Radix, est 125 m. √q 3125: quam addo ad dimidium numeri Rad. nempe ad √q 3125 m. 25: fiunt 100, Quod fuerat constitutum.

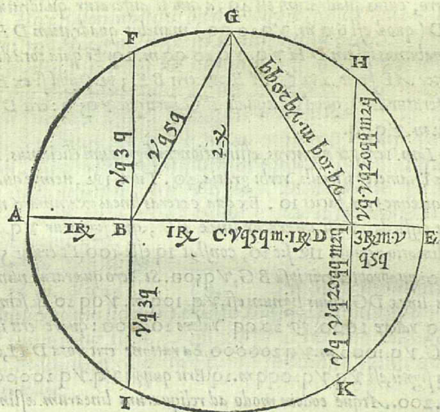
DE INVENIENDA QVANTITATUM Continuarum æstimatione per Numeros huius artis.

CAP. XXIX.

QVoniam initio prioris voluminis præfati sumus, Algebræ vsum singularem in inuentione quantitatum Continuarum consistere: nos hoc loco ex Stifelio figurabimus lineas in Circulo varias, earúmque æstimationem ad calculum reuocabimus. Cuius descriptionis exemplo, Qui Geometriæ non expertes erunt, alias sibi omnis generis fingere poterunt.

Suma-

Sumatur itaque diameter Circuli, quæ in partes quatuor diducatur. Et earum vnaquæque ponatur esse 1℞: quomodo duas quartas AB & BC signatas vides. Eritque CG, 2℞, vtpote semidiameter. Tum quia BG ducta, fit Radix duorum simul quadratorũ BC & CG, per XLVII primi Elementorũ, duo verò ipsa quadrata, sunt 5q: commodè ipsa BG signabitur, √q5q.



Haud dissimiliter nota erit BF perpendicularis ad peripheriam educta, ipsiúsque æqualis BI. Intelligatur enim Semidiameter CF, cuius quadratum, est 4q: à quo si auferatur quadratum BC, nempe 1q, manebunt 3q pro ipso BF quodrato. Quapropter erit linea BF, √q 3q. Addemus postmodum CD ad BC, vt sit BD æqualis BG: Eritque ex demonstratione Ptolemæi cap. IX lib.

Primi magnæ Constructionis, vt linea B C ablata à linea B G, relinquat latus Decagoni Circulo inscribendi: Atque idipsum erit C D: ob idque, ipsum C D signabimus, √q 5 q *m.* 1℞. *Et quia quadratum D G æquale est duobus quadratis C D & C G, quadratum verò C G, est* 4 q, *& quadratum C D est* 6 q *m.* √q 20 qq *(atque hoc loco reducitur* 1℞ *ad* √q q *) rectè ipsa D G signabitur,* √q 10 q *m.* √q 20 qq. *Tum intellecta C H semidiametro, cuius quadratum est* 4 q, *à quo si auferatur quadratum C D (quod est* 6 q *m.* √q 20 qq *) manebit quadratum D H: signabimus ipsam D H* √q. √q 20 qq *m.* 2 q. *Et quia tota diameter A E facit* 4℞ *& A B,* 1℞*: erit B E,* 3℞. *Quòd si ex B E auferatur B D, quod est æquale B G, facítque* √q 5 q*: erit D E,* 3℞ *m.* √q 5 q.

Iam verò per numeros, æstimationem signorum eliciamus. Sit ipsa Diameter Circuli, verbi gratia, 40. *Tum* 1℞, *nempe quarta quæque pars, faciet* 10. *Ex qua cæteras lineas examinare non erit difficile. Vt si quæratur lineæ B C, quæ signatur* √q 5 q, *æstimatio: quum* 1℞ *sit* 10, *constat* 1 q *esse* 100. *Et erunt* 5 q, 500*: quapropter erit ipsa B G,* √q 500. *Si verò quæratur numerus lineæ D G, cuius signum est,* √q. 10 q *m.* √q q 20 q*: scimus* 10 q *valere* 1000, *&* 20 qq *valere* 200000*: quare erit ipsa D G,* √q. 1000 *m.* √q 200000. *Ea ratione erit nota D H, cuius signũ est* √q. √q 20 qq *m.* 2 q. *Erit quippe* √q. √q 200000 *m.* 200. *Atque eodem modo ad reliquarum linearum æstimationem ratiocinabimur.* *Quinetiam vt figuræ vsus illustrior sit, proponuntur tres Circuli, quorum primi Diameter sit* 120*: alterius,* 48*: tertij verò,* 36. *Horum cuique inscribendum est Pentagonum æquilaterum. Quod ex hac nostra descriptione sic conficiemus. Quoniã primi Circuli Diameter est* 120, *ob idque* 1℞, 30*: erit* 1℞ 900 *&* 1 qq, 810000. *Et quia in descriptione iam exposita, latus Pentagoni signatur* √q. 10 q *m.* √q 20 qq*: pro* 10 q *sumemus* 9000*: & pro* 20 qq, *sumemus*

16200000:

16200000*: Quare in Circulo cuius Diameter posita est* 120, *erit latus Pentagoni,* √q. 9000 *m.* √q 16200000.

Ex iis satis notum erit latus Pentagoni in altero Circulo, cuius Diameter est, 48. *Hic enim* 10 q *sunt* 1440*: &* 20 qq, 414720. *Quare erit ipsum latus,* √q. 1440 *m.* √q 414720. *Diametro autem faciente* 36, *latus Pentagoni erit* √q. 810 *m.* √q 131220.

Hinc statim innotescit latus Decagoni, scilicet linea C D. Latus verò Hexagoni semper est Semidiameter Circuli.

Ampliùs, Proponitur hic numerus, √q. 90 *m.* √q 1620 *in latus Pentagoni: atque ex hac dimensione æritu rquanta sit Diameter Circuli Pentagono circunscribendi. Ex superioribus statim colligo* √q. 10 *m.* √q 20 qq *æquari* √q. 90 *m.* 1620*: ob id, eorum quadrata æqualia. Igitur* 10 q *m.* √q 20 qq *æquantur* 90 *m.* √q 1620. *Diuido itaque* 90 *m.* √q 1620 *per* 10 *m.* √q 20, *exeunt* 9*: sicut in subiecta formula asscriptum vides.*

90 *m.* √q 1620

10 *m.* √q 20 (9. *Vbi animaduertendum, multiplicationem secundæ particulæ Diuisoris, fieri debere per* √q 81. *Quum igitur* 1 q *sit* 9*: &* 1℞ *sit* 3*: erit tota Diameter,* 12. *Eodem modo cæteræ inscriptiones perficientur, pro linearum æstimatione.*

Q

DE QVADRATIS ET CVBIS Numeris quædam præcepta, cum ipsorum Tabula.

CAP. XXX.

QVum in Algebræ calculis vbique occurrant Numeri quos Creatos vocauimus, vulgò Radicales dicunt, plurimùm verò Quadrati & Cubi: eorum Tabulam ab 1 ad 140 computatam hoc loco exhibere placuit: quæ præter vsum quem habet frequentißimum, etiam concinnitate delectabilis est. Quippe iucundum est Quadratos Numeros intueri, augmento Binario progredientes. Scilicet inter 1 & 4 intersunt 2 bis, nempe 4: inter 9 & 16 intersunt ter 2, hoc est, 6: sed vbique Vnius seu Vnitatis interuentu. Addito enim Vno ad quenlibet Numerorum Progreßionis binariæ: prodibit Quadratus proximus. Exempli causa, Quum inter 16 & 25 intersint quater 2, id est 8, numerus verò augmenti binarij proximus ab 8, fit 20: addo 1 ad 10, fiunt 11: Tum addo 11 ad 25, fiunt 36, numerus Quadratus proximus à 25. Rursus addo 1 ad 12, fiunt 13: addo 13 ad 36: fiunt 49, numerus proximè Quadratus à 36: sicque continuè.

Ex hoc oritur Regula. Radicem cuiuscunque Numeri Quadrati duplica: ad duplum adde 1: productum adde ad ipsum Quadratum: prodibit numerus proximè Quadratus. Vt 81, Horum Radicem duplico, scilicet 9, fiunt 18: quibus addo 1, fiunt 19: addo 19 ad 81: proueniunt 100, numerus proximè Quadratus ab 18. Item Radix 100, est 10: Hanc duplico, fiunt 20: quibus addo 1: fiunt 121, numerus Quadratus proximus à 100, illiusque Radix, 11. & ita de reliquis.

Ac quem-

Ac quemadmodum Binarius index est Progreßionis Quadratorum: ita Senarius, Cuborum: idque interueniente semper Vnitate, vt in Quadratis. Scilicet, secundus Cuborum, 8, à primo Cubo, nempe ab 1, distat Senario vno. Tertius verò, 27, à secundo, 8, distat duobus plus Senariis quàm secundus à primo, nempe tribus. Quartus, 64, à tertio, 27, abest plus tribus Senariis quàm tertius à secundo, nempe sex. Quintus, 125, à quarto, 64, plus 4 Senariis quàm quartus à tertio, nempe 10 Senariis. Atque huic Senariorum augmento semper accedit Vnitas, vt diximus.

Hinc exurgit Regula, Duc Radicem cuiuscunque Cubi in numerum vno maiorem: productum triplica: ad triplum adde 1: totum adde ad Cubum: exibit Cubus proximus. Vt, Quæro numerum proximè Cubicum à 1000, quorum Radix Cubica, 10. Duco 10 in 11, fiunt 110: Hæc triplico, fiunt 330: quibus addo 1, fiunt 331: hæc addo ad 1000: fiunt 1331, Cubus proximus à 1000. Multa alia cognitu iucunda occurrent iis qui se in Numerorum speculatione exercebunt. Quorum vnum est, Primo Cuborum adde secundum: fit numerus Quadratus, 9: huic adde tertium Cubum, 27: fiunt 36, numerus quadratus: his adde quartum Cubum, 64, fiunt 100, numerus quadratus: sicque continuè. Radices autem progrediuntur augmento naturali, ducto initio à ternario: scilicet 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36. Sed eiusmodi speculationes infinitæ sunt. Horum igitur ordinationem subscriptam dedimus studiosis ad speculandum.

Rt.	q.	c.
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000
11	121	1331
12	144	1728
13	169	2197
14	196	2744
15	225	3375
16	256	4096
17	289	4913
18	324	5832
19	361	6859
20	400	8000
21	441	9261
22	484	10648
23	529	12167
24	576	13824
25	625	15625
26	676	17576
27	729	19683
28	784	21952
29	841	24389
30	900	27000

Rt.	q.	c.
31	961	29791
32	1024	32768
33	1089	35937
34	1156	39304
35	1225	42875
36	1296	46656
37	1369	50653
38	1444	54872
39	1521	59319
40	1600	64000
41	1681	68921
42	1764	74088
43	1849	79507
44	1936	85184
45	2025	91125
46	2116	97336
47	2209	103823
48	2304	110592
49	2401	117649
50	2500	125000
51	2601	132651
52	2704	140608
53	2809	148877
54	2916	157464
55	3025	166375
56	3136	175616
57	3249	185193
58	3364	195112
59	3481	205379
60	3600	216000

℞.	q.	c.
61	3721	226981
62	3844	238328
63	3969	250047
64	4096	262144
65	4225	274625
66	4356	287496
67	4489	300763
68	4624	314432
69	4761	328509
70	4900	343000
71	5041	357911
72	5184	373248
73	5329	389017
74	5476	405224
75	5625	421875
76	5776	438976
77	5929	456533
78	6084	474552
79	6241	493039
80	6400	512000
81	6561	531441
82	6724	551368
83	6889	571787
84	7056	592704
85	7225	614125
86	7396	636056
87	7569	658503
88	7744	681472
89	7921	704969
90	8100	729000

℞.	q.	c.
91	8281	753571
92	8464	778688
93	8649	804357
94	8836	830584
95	9025	857375
96	9216	884736
97	9409	912673
98	9604	941192
99	9801	970299
100	10000	1000000
101	10201	1030301
102	10404	1061208
103	10609	1092727
104	10816	1124864
105	11025	1157625
106	11236	1191016
107	11449	1225043
108	11664	1259712
109	11881	1295029
110	12100	1331000
111	12321	1367631
112	12544	1404928
113	12769	1442897
114	12996	1481544
115	13225	1520875
116	13456	1560896
117	13689	1601613
118	13924	1643032
119	14161	1685159
120	14400	1728000

Ra.	q.	c.
121	14641	1771562
122	14884	1815848
123	15129	1860867
124	15376	1906624
125	15625	1953125
126	15876	2000376
127	16129	2048383
128	16384	2097152
129	16641	2146689
130	16900	2197000
131	17161	2248091
132	17424	2299968
133	17689	2352637
134	17956	2406104
135	18225	2460375
136	18496	2515456
137	18769	2571353
138	19044	2628072
139	19321	2685619
140	19600	2744000.

IACOBVS PELETARIVS
Seraphino Razallio Iuriſconſulto S.

ETſi non ita pridē inter nos contracta eſt familiaritas, Razalli, tamen ex ea tātam delectationem capio, vt mihi nihil charius, nihil antiquius eſſe poßit. Morū enim illa ſuauitas, quam in te ſumma cum doctrina coniunctam perſpicio, veteris amicitiæ iura abundè ſupplet. Magna verò ad meum in te amorem acceßio facta eſt, ex quo tempore ad iuriſprudentiæ veſtræ ſtudium, artes Mathematicas adiungere cœpiſti, de quibus quotieſcunque inter nos incidit diſputatio (incidit autem ſæpe, ac de Geometria potiſsimè) hortaris, imò vrges vt Buteonis cuiuſdam calumnias à me depellam. Quod profecto & meæ naturæ, quæ ad modeſtiam me effinxit, & meæ exiſtimationi, quæ apud bonos viros vt in pretio eſſet perpetuò ſtudui, alienum eſſe duco. Quid enim operam meam abutar, dum maleuoli iſtius maledictis reſpondeam? quem ne appellatione quidem dignum exiſtimare debeo: vſqueadeo me hominis pudet, quòd inter Mathematicos nomen profitetur ſuum: qui nulla vnquam à me laceßitus iniuria, tam petulāter in me, imò verò in totam Geometrarum nationem inuehitur. Atque is ipſe poſtquam, vt putat, nos vltus eſt probè, bonis ſcilicet verbis inuitat me ad reſpondendum. Si, inquit, viderit Peletarius præter verum iſta notari: ſuam, vt par eſt, ſententiam reſponſo tutabitur. Eſt enim literaria concertatio, cùm ad excitandum ingenij vigorem ſtimulus acer, tum ad intelligentiam rerum non inutilis. Iſta quum dicit Buteo, quid aliud quàm ſe ſuæ calumniæ conſcientia prodit? In demonſtrationum ſcientia, quid opus eſt concertatione? in qua veritas ipſa ſui teſtimonium apertè præbet. Ad hæc, quonam ſtimulo vigorem ingenij excitabo homini, qui neque indicio ſcribit, neque ingenio reprehendit, sed animi morbo? dum in Mathematicarum argumento nos coram Grammaticis causam dicere vult. Calepinos, Alexandros, Despauterios, & si qui sunt inferioris ordinis, facit nobis Geometriæ magistros: quum interim literator iste nesciat tria verba bene Latina continuare. Quid dico bene Latina? immò verò qui in Grammaticæ rudimenis subinde peccet.

Logisticæ pag. 122, lin. 4.

Quos ludos mihi præbet dum apud ipsum lego, nouem quadrata æqualia toto: & dimensionem vnam additam dimensioni alteræ.

Logist. pa. 126. lin. 4.

Quid quòd in Orthographiam ipsam committit? facere mensionem vbique per s literam scribit: & exagerare, lipitudo, simplici consonante. In Syntaxi verò quàm sit peritus, videamus.

Logistic. libr. 3, probl. 4.

Numerum, inquit, inuenire qui ductus in 2, & à producto sublatis 6, residuum fiat 10.

Log. lib. 4. Quæst. 1.

Et alibi, Quingenti milites stipendio semestri aureos nouem milia capiunt. Cuiusmodi locutionibus, Logisticæ ipsius Quæstiones scatent: quas vndique ex Arithmeticorum vulgaribus qui circunferuntur, Libris corrasit, vt suas paginas infarciret, & nauseam lectoribus moueret. Algebræ vocem reiicit, vt Quadraturam supponat. Illa verò quamuis peregrina sit, tamen quia proprij nominis instar est, in quauis lingua locum habet. Quadraturam autem quis vnquam Latinorum vsurpauit? præter id, quòd non est ad hanc rem satis integra quadrandi significatio. Algebra enim non Quadratos tantum numeros, sed & Cubos, & Biquadratos respicit. Cuius rei Buteo se in præclara sua Quadratura prorsus ignarum ostendit. At Græcè doctus est. Certè: qui exagonum sine spiritus nota, qui Pros orthos vbique elementis Latinis scribit: qui vocem Quidecagoni (Quindecagonum puto dicere voluisse) duarum linguarum charactère adulteratam nobis inuehit: ne scilicet à Peletario quicquam mutuatus esse videretur. Ego enim in quarto Elementorum Quindecangulum dixi, doctorum, vt puto, auribus non absurdum. In Logisticæ voce quàm sibi placet egregius iste verborum conquisitor & artifex, qui eam à se primùm

ad nos adductam gloriatur. Quod vt verè diceret, quid esset tamen quod ex re tam exigua sibi laudem assumeret? Sed eam ipsam Erasmus Reinoldus iam antè vsurpauerat: vt tu scis, qui viri scripta nunc habes in manibus: qua ipse valde appositè vtitur, dum calculum Astronomicū inscribit Logisticam scrupulorum Astronomicorū. Vox enim Logistices, omnem vniuersè Ratiocinationem significat: neque solitariè poni debet, quemadmodum ineptè posuit Buteo. At in arte peracutus. Scilicet, dum statim initio suæ Logisticæ, statuit millionem millionum decimo loco Numerationis: dum in refellendo Hipocratis Chij Tetragonismo, Quadratum Circulo admouet, vt amborum inæqualitatem probet: adeo obstinatè operam dat, non vt veritatem exprimat: sed vt mihi aduersetur, qui eiusmodi applicationes ad quartam primi Elementorum improbauerim. Iam verò quo iudicio & quàm sapienter ratiocinetur Buteo, vna argumentatione colligamus. Demonstrationes, ait, quæ ad Propositiones Euclidis apponuntur, Theonis non sunt, sed Euclidis ipsius: quod sic ostendit

Initio Erorū interpretum.

ex Proclo. Neque enim Euclides, inquit Proclus, quæ proponuntur inuenit: sed Elementa colligens, multa quidem ab Eudoxo disponens, multa ex Theæteto perficiens: insuper autem & quæ à prioribus fuerant ostensa pinguius, ad demonstrationes ἀνελέγτους ipse redegit. Et paulò antè, Quis enim apud antiquitatem omnem Theoremata vidit vnquam sine Demonstratione proferri? Hactenus Buteo. Ego verò ex Buteone ratiocinor ad hunc modum, Quæ antiquorum sunt Problemata & Theoremata, ab iisdem omnia demonstrata sunt. Quæ ab Euclide proponuntur Problemata & Theoremata, Euclidis non sunt, sed antiquorum Eudoxi & Theæteti. Adsit Buteo vt colligat quod colligi debet: nam vtranque propositionem agnoscere cogetur suam. Sed quid aliud efficiet, quàm quæ proponuntur ab Euclide Problemata & Theoremata, ab antiquis esse demonstrata? Ex Buteone igitur, Eudoxi & Theæti, Demonstrationes *sunt, nō Euclidis? quanuis Eudoxo & Theæteto alij antiquiores extiterint quibus Demonstrationū autoritas debetur. Geometriæ enim constructio, temporum memoriæ subiecta non est, sicut in hac nostra Algebra præfati sumus. Vides, mi Razalli, quò se Buteo præcipitem ferat, maledicendi studio. Ego in Epistola ad Fernelium, Demonstrationes plerasque omnes Theonis non esse dico: sed neque Propositionum autorem esse Euclidem, nisi siquæ ab ipso demonstratæ sint: quæ verò sint eæ, ignoramus: Ea re, ordinē duntaxat & collocationē Euclidi ascribimus: quanuis & ante ipsum multi Elementa redegissent. Quid igitur Theoni attribuemus? nimirum Demonstrationum concinnitatem, & testimonia ampliora, ad confirmandas Propositiones accommodata. At Buteo dum in meam sententiam obnititur, in laqueos se coniicit, quibus meæ opinioni assentiri & suam abiurare insciens cogitur. Hæc ego in Buteonem festinanter animaduerti, & fortuitò versis paginis excerpsi. Nam in ea quæ attentione indigebant, non fuit otium inquirendi. Totus sum in Medicina. Ex hac enim spero vnicum meis laboribus præmium esse constitutum. Neque adeo si otium fuisset, in tam parua laude posuissem. Ab iis enim contentionibus quæ publicè suscipiuntur ad contumeliam, planè abhorreo: priuatas admonitiones amo: & publicè gratiam habendam esse duco. Tu ex iis paucis quæ obseruauimus, de nostro calumniatore tecum rationem inibis, quam lecto eius opere conficies. Cæteris hominibus relinquo statuendam, an qui tali ingenio sit præditus, vel quæ recta sunt cernere, vel quæ praua sunt, redarguere possit. Nam quòd mihi literarum Græcarum peritiam detrahit, nullam causam habet nisi quam sibi per malitiam fingit. Vtrum Euclidem intellexerim an non, Demonstrationes meæ testantur: Vtrum Galenum necne, nos etiam propediem, Deo iuuante, declarabimus. Nihil hactenus studiis meis defuit ab ignorantia linguarum. Tandiu ego multis hominibus parū Latinus habitus sum, quandiu Gallicè scripsi. Mea sic*

fuit

fuit semper ratio, vt de mei ingenij eruditione, mihi prius satisfaciendū esse duxerim quàm hominū cuiquam. Licet enim linguarum cognitionem præ rerum perceptione parui fecerim semper: tamen pudore mihi esset pereundum, si tam inscienter quicquam ostentassem, quàm ostentat Græculus iste: qui dum ex alieni nominis inuidia laudem sibi affectat, nil aliud quàm doctis, atque iisdem probis viris stomachum mouet. Quæ res efficit, vt verear ne meæ existimationi & candori notam asperserim, quòd mihi imperare non potuerim, quin maledicum hominem referirem. Sed in hac causa dabunt, vt spero, mihi veniam qui æquiores erunt: & culpam in istum meritò transferent, qui initium introduxit. Nemo enim tam ad modestiam bene compositus, qui talium hominum importunitate lacessitus non incandescat. Ego verò vt iam meo more, id est ingenuè, loquar: non inficior me ex Buteonis insimulatione meliorem esse factum. Nam quemadmodum ex Galeno didici Platoni subscribente, nullum librum esse tam bonum qui calumniæ vim effugere queat: ita ex Plinio, nullum tam malum, ex quo fructum aliquem non reportes, modò adsit iudicium. Sed nihil homine Philosopho, ne dicam Mathematico, indignius esse potest, quàm sint maledicta, contumeliæ concertationésque pertinaces, non veritatis peruestigandæ, sed contradicendi studio quæsitæ. Si honestè mecum egisset Buteo, si me per literas, vt debebat, monuisset: si denique boni viri officio functus esset, quàm grato animo, siquid ipse rectè animaduertisset, accepissem! vt hominem fouissem! vt in sinu gestassem! quàm benignè etiam quæ nimis attentè notasset, interpretatus essem! Ego enim me reprehensoribus exposui volens: quod in meis Epistolis profiteor: sed de calumniatoribus nihil omnino suspicabar. De Elementis verò Geometricis tibi ego, Razalli, obiter & iudicium & consilium meum exposui. Quædam enim à me consultò emissa sunt, quæ postrema manu non tractaui: quædam emendanda mihi reseruaui, quæ Buteo ne per somnium quidem vn-

quam cogitauit. Demonstrationum mearum nullam ipse attigit, quod equidem maximè optabam, præter quartam illam Primi: & quintam Libri Quinti: illam quàm indoctè, res indicat: hanc verò, quàm stupidè, ipse, si sese collegerit, recognoscet, qui nō viderit propositionem quæ libro sexto ex Theone esset nona, à me duodecimo loco esse positam. Sed iam finem facio, ne Apologiam, nō Epistolam scripsisse videar. Vale. Lutetiæ, pridie Non. Nouemb. 1559.

ERRATA.

In Præfationis Pagina tertia, lin. vt Mathematicas, sic legendum, vt Mathematicas ad tempus reponerem (nisi quòd Astrologiam studiosiùs mihi semper reseruaui) effecerat Medicinæ professio, quam & ipsam illarum gratia iam olim intermiseram. Hæc tamen transpositio in reliquis aliquot Exemplaribus sub prelo restituta est.

Charta 1, Pag. 1, lin. Od id lege Ob id
Char. 1, Pag. 2, lin. Secundus lege Creatorum
Char. 4, Pag. 1, lin. Minoris lege addita
lin. Econtrario lege subtracta
lin. communi lege addita & subtracta
Pag. 2, lin. absolutis lege diuisa
Char. 8, Pag 1, lin. quadrata lege p. 15 Quadratis
Char. 10, Pag. 1. lin. 6℞ lege æquales
Pag. 2, lin. lia lege manet q.
Char. 11, Pag 1, lin. Item si fuerint &c. hæc Formula

$$\frac{4℞\ \frac{p}{2}\ 18 \qquad \frac{12℞\ m\ 5}{1℞}}{8℞\ p.36 \qquad 12q\ m.\ 58℞.}$$

statim subiici debet iis verbis vt vides in subiecta Formula.

Char. 12, Pag. 2, lin. rus lege æquale
Char. 17, Pag. 1, lin. Mercator lege Aureis 7:
Char. 19, Pag. 1, lin. $\frac{7}{1}$ lege $\frac{7}{15}$
Char. 22, lin. cit lege hic Numerus
lin. Iam lege libras, Qui
Char. 23, lin. 1℞ per lege æqualia
Char. 37, Pag. 1, lin. nim indicatur pro $1\frac{7}{5}$ lege $1\frac{7}{9}$.
Char. 38, Pag 1, lin. Mediale lege fiet numerus Additionis. Exemplum.
Char. 39, Pag. 2, lin. lem. Vt lege fiet.
Char. 49, Pag. 1. lin. 100 p. lege 300 p.
Char. 52, Pag. 1, lin. colligere lege colligere vix potes.
Pag. 2, lin. æquè lege æquè Rationalem
Pag. 2, lin. √qcē lege valet
Char. 56, Pag. 1, lin. in latus lege quæritur
Char. 57, Pag. 1, lin. primum lege inuestiganda.