



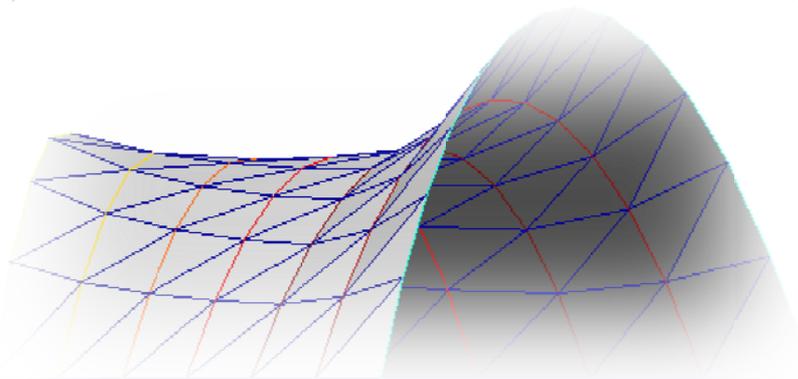
UNIVERSIDAD DE GRANADA

MÁSTER UNIVERSITARIO EN ESTRUCTURAS

CURSO 2011-2012

TRABAJO FIN DE MÁSTER

MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN DE DENSIDADES DE FUERZA PARA OBTENCIÓN DE FORMAS DE EQUILIBRIO EN ESTRUCTURAS TENSADAS Y ESTRUCTURAS DE COMPRESIÓN



PARTE INTEGRANTE DEL GRUPO DE TRABAJO FIN DE MÁSTER:

PROYECTO DE GRAN ESTRUCTURA

ALUMNO:

Manuel Cañete Güeto

DIRECTOR/TUTOR:

D. Enrique Hernández Montes

CODIRECTOR:

D. Juan Francisco Carbonell Márquez

CONTENIDO

| | |
|---|----|
| 1.- RESUMEN | 3 |
| 2.- INTRODUCCIÓN..... | 4 |
| 2.1.- Objetivos | 5 |
| 2.2.- Las Estructuras Tensadas..... | 6 |
| 2.2.1.- Características Generales..... | 6 |
| 2.2.2.- Clasificación..... | 8 |
| 2.3.- Método de Inversión de la Tracción. Estructuras de Compresión. | 19 |
| 2.3.1.- La Catenaria | 19 |
| 2.3.2.- La Curva Funicular | 23 |
| 2.3.3.- La Inversión de la Catenaria: El Arco Catenario. | 26 |
| 2.3.4.- Las estructuras de compresión. | 30 |
| 2.4. Cálculo de la forma de equilibrio en Estructuras Tensadas y de Compresión | 33 |
| 2.4.1- Método de densidad de fuerzas | 34 |
| 2.4.2.- El Mallado Topológico..... | 38 |
| 2.4.3.- La consideración del peso propio en el método de densidad de fuerza | 42 |
| 2.4.4.- Algoritmos del método de densidad de fuerzas con mallado topológico y consideración del peso propio. Programa Gaudí. | 45 |
| 3.- INFLUENCIA DE LA DENSIDAD DE FUERZA EN LAS FORMAS DE EQUILIBRIO DE LAS ESTRUCTURAS DE COMPRESIÓN. | 47 |
| 4.- MÉTODO DE ESTIMACIÓN DE LAS DENSIDADES DE FUERZA PARA LA OBTENCIÓN DE FORMAS DE EQUILIBRIO DESEADAS EN LAS ESTRUCTURAS DE COMPRESIÓN..... | 50 |
| 5.- APLICACIÓN DEL MÉTODO PROPUESTO A UN CASO PARTICULAR..... | 57 |
| 6.- CONCLUSIONES | 62 |
| BIBLIOGRAFÍA:..... | 63 |

1.- RESUMEN

La adopción de densidades de fuerzas en las estructuras tensadas o de compresión resulta un factor determinante en la forma de equilibrio obtenida. Al utilizar el Método de Densidad de Fuerzas junto con el Mallado Topológico y la consideración del Peso Propio (MDF-MT-PP) se pueden obtener infinitas formas de equilibrio dependiendo básicamente de las densidades de fuerza aplicadas en cada rama del mallado. Una pequeña modificación de estos parámetros lleva a una forma de equilibrio sustancialmente diferente a la inicial. El resto de las variables del sistema o bien resultan conocidas, como las coordenadas de los puntos de apoyo o el peso específico del material, o bien tienen una menor influencia en la forma de equilibrio obtenida, como la densidad de nodos empleada o la tipología de malla escogida. Teniendo en cuenta que generalmente el diseñador parte de una idea preconcebida, resulta muy interesante estudiar métodos de obtención de las densidades de fuerzas necesarias para aproximar la forma de equilibrio al diseño inicial de la estructura. El presente artículo proporcionará un algoritmo para obtener las densidades de fuerza en las estructuras clásicas de compresión más conocidas, bóvedas y cúpulas, a partir de parámetros del diseño original. Finalmente se aplicará este algoritmo a un caso particular que permita comprobar la utilidad práctica del método.

2.- INTRODUCCIÓN

Dentro de la arquitectura contemporánea, el campo de las Estructura Tensadas ha ido evolucionado, ampliando su concepto con la utilización de diferentes materiales y nuevas patentes constructivas. Inicialmente las estructuras tensadas se asociaban a cubiertas o carpas formadas por tejidos o cueros sometidos a tracción, pero hoy en día el término engloba sistemas estructurales sustancialmente diferentes como son las mallas de cables o las estructuras neumáticas. Por ello no basta con conocer sus características y ventajas constructivas para tener una visión adecuada de esta tipología estructural sino que es importante analizar las diferentes tipologías y clasificaciones de esta gran familia estructural.

Aunque a priori pueda parecer lo contrario, existe una gran similitud entre este tipo de estructuras y las clásicas estructuras de compresión obtenidas a partir de formas antifuniculares. La única diferencia radica en el signo de las tensiones, pero desde el punto de vista del cálculo estructural se trata de un mismo concepto y la ausencia de momentos flectores permite emplear los mismos métodos de cálculo para ambos casos. El método de la inversión de las formas funiculares utilizado ampliamente por el gran arquitecto Antoni Gaudí es un ejemplo claro de equivalencia entre unas y otras formas estructurales.

El cálculo de este tipo de estructuras no se aborda como es habitual en las obras de ingeniería y arquitectura tradicionales, en las que se parte de un estado de reposo con una geometría completamente definida. En este caso la forma de equilibrio inicial resulta una incógnita más que dependerá de las tensiones a las que se somete el sistema estructural. El Método de Densidad de Fuerzas (MDF) permite obtener la forma de equilibrio de este tipo de estructuras de una forma sencilla gracias a la potencia de cálculo informático disponible en la actualidad. Esto ha permitido mejorar el método de cálculo con la consideración del peso propio (PP) e implementarlo en un mismo algoritmo junto con técnicas de automallado como es el Mallado Topológico (MT).

Con este tipo de algoritmos que implementan las técnicas del MDF-MT-PP, se simplifica la obtención de la forma de equilibrio. El concepto de Densidad de Fuerza definida como Fuerza de tracción o compresión por unidad de longitud para cada elemento estructural adquiere un papel fundamental en la forma de equilibrio obtenida. Partiendo de unos puntos de apoyo definidos e invariables, este parámetro nos permite modificar la forma de equilibrio hasta conseguir la geometría deseada. No obstante, este proceso no resulta nada sencillo. Con la consideración del peso propio el sistema de ecuaciones que plantea el MDF pierde su linealidad con lo que no siempre existe una solución al problema. Además no es fácil relacionar el valor de la densidad de fuerzas de determinados elementos o barras con la forma geométrica que se desea obtener.

El objeto de este trabajo es facilitar al diseñador la obtención de las densidades de fuerza que definen la forma de equilibrio buscada. En primer lugar se ayudará a adquirir una mejor comprensión práctica de estos parámetros y su relación con la forma de equilibrio. Se describirán metodologías de agrupación en anillos y conexiones radiales para reducir la complejidad del problema. Por último se facilitará un algoritmo que permita relacionar estos parámetros con datos adquiridos directamente del diseño preliminar, tales como la altura o el perímetro de una sección radial.

2.1.- OBJETIVOS

Para la elaboración del presente estudio, se fijan los siguientes objetivos:

- Realizar una introducción a las estructuras tensadas describiendo sus características principales a través de una amplia clasificación de las mismas.
- Análisis de las estructuras de compresión describiendo su evolución en la historia y la aportación del gran maestro Antonio Gaudí a través del desarrollo del método de inversión de las curvas funiculares. Se estudiarán las características y fórmulas matemáticas de la curva catenaria y la curva funicular.
- Descripción detallada del Método de Densidad de Fuerza, el procedimiento del Mallado Topológico y la consideración del peso propio en este procedimiento de cálculo. Implementación del método en un programa informático: Programa Gaudí desarrollado por el Departamento de Estructuras de la Universidad de Granada.
- Análisis práctico del concepto de densidad de fuerza y su relación con la forma de equilibrio. Método de agrupación de densidades de fuerza anulares y radiales.
- Propuesta de un algoritmo que permite la obtención de densidades de fuerza de formas sencillas, cúpulas y bóvedas, a partir de datos del diseño inicial.
- Aplicación a un caso particular para validar el algoritmo propuesto. Proyecto de Gran Estructura.

2.2.- LAS ESTRUCTURAS TENSADAS

2.2.1.- CARACTERÍSTICAS GENERALES

Las estructuras tensadas también conocidas como estructuras flexibles o tenso-estructuras, son ampliamente utilizadas hoy en día dentro del campo que denominamos Arquitectura textil o, de una forma más apropiada, a través del término anglosajón equivalente tensile architecture.



Fig. 2.1: Pabellón de Alemania en la Exposición Universal de 1967. Gutbrod, Otto y Leonhard. Montreal (Canadá)

Dentro de esta gran familia se engloban multitud de estructuras, tales como: las mallas de cables, las membranas tensadas y las estructuras neumáticas y son conocidas por la simplicidad de sus elementos, así como por su fácil ensamblaje, mínimo consumo de materiales, mínimo desperdicio y eficiencia energética. Aspectos estos que les permiten sobrepasar a cualquier otro sistema estructural en términos de ligereza y capacidad para cubrir grandes luces. Con formas atractivas, vistas sin obstáculos, e interiores iluminados estas estructuras a tensión constituyen generalmente notables manifestaciones arquitectónicas de gran impacto visual y belleza.

Los orígenes de esta tipología constructiva se remontan a la historia de los pueblos trashumantes, a través de las construcciones ligeras realizadas con cueros tensados y materiales textiles. Pero fue en el siglo XIX, a partir de la revolución industrial y el mecanizado en la producción de tejidos, cuando se desarrolla con mayor profundidad esta tecnología ampliando el concepto para contemplar nuevos materiales y sistemas constructivos innovadores.



Fig. 2.2: Estadio Olímpico de Múnich, Behnisch, Otto y Leonhardt, 1.972

Las estructuras tensadas actualmente se encuentran en constante evolución, proyectándose con mayor tamaño y sofisticación. Su uso se ha extendido para construcciones temporales o ambulantes así como permanentes o de larga duración.



Fig. 2.3: Proyecto de Transformación de la Estación Central de Stuttgart (Alemania)

2.2.2.- CLASIFICACIÓN

Este tipo de estructuras se pueden clasificar en función de cada una de sus características principales. Esta clasificación no pretende ser restrictiva, sino más bien evidenciar la multitud de soluciones aplicables a cada función arquitectónica demandada.

- **Por su forma:**

Las formas de las estructuras superficiales tensadas son ilimitadas. El proceso de búsqueda de la forma de equilibrio, parte de una completa comprensión de este tipo de estructuras.

- 1. Abiertas , cerradas o abatibles:**

Las primeras son ampliamente utilizadas en forma de marquesinas, carpas en pórticos o puntos de referencia y atracción arquitectónica.



Fig. 2.4: Estructura tensada abierta. Proyecto "Assembly tent". Malasia

Las estructuras cerradas tienen numerosas aplicaciones empleándose en muchas ocasiones con múltiples hojas al objeto de mejorar el aislamiento acústico, térmico o disminuir la transmisión de la luz.



Fig. 2.5: Estructura tensada cerrada. Cúpula del Milenio, Londres (Reino Unido)

Por último las estructuras abatibles son utilizadas por su adaptabilidad, de manera que la tela tensada puede adoptar diferentes configuraciones dependiendo del uso. Estas estructuras retráctiles son más complicadas de diseñar al disponer de elementos móviles y tener que asegurar la tensión de la tela en la posición abierta.

2. Anticlásticas o Sinclásticas:

Las primeras, con doble curvatura gaussiana negativa, son las más comunes de las estructuras tensadas. Los cascarones anticlásticos o reglados tienen forma de silla de montar, por lo que se obtiene diferentes curvaturas en cada dirección. Los conoides, paraboloides hiperbólicos e hiperboloides se encuentran dentro de esta clasificación.



Fig.2.6: La estructura anticlástica más simple: Velaria de cuatro puntas, forma de silla de montar

Las formas sinclásticas, de curvatura similar en cada dirección, se consiguen mediante una diferencia de presión del fluido o gas a ambos lados de la superficie.



Fig. 2.7: Estructura neumática sinclástica: Modern Teahouse 2007. Frankfurt/Main (Alemania)

3. De formas simples o compuestas:

Básicamente existen tres tipos de superficies básicas, cuya curvatura es anticlástica en todos sus puntos: El paraboloide de revolución, el conoide de revolución y el paraboloide hiperbólico.

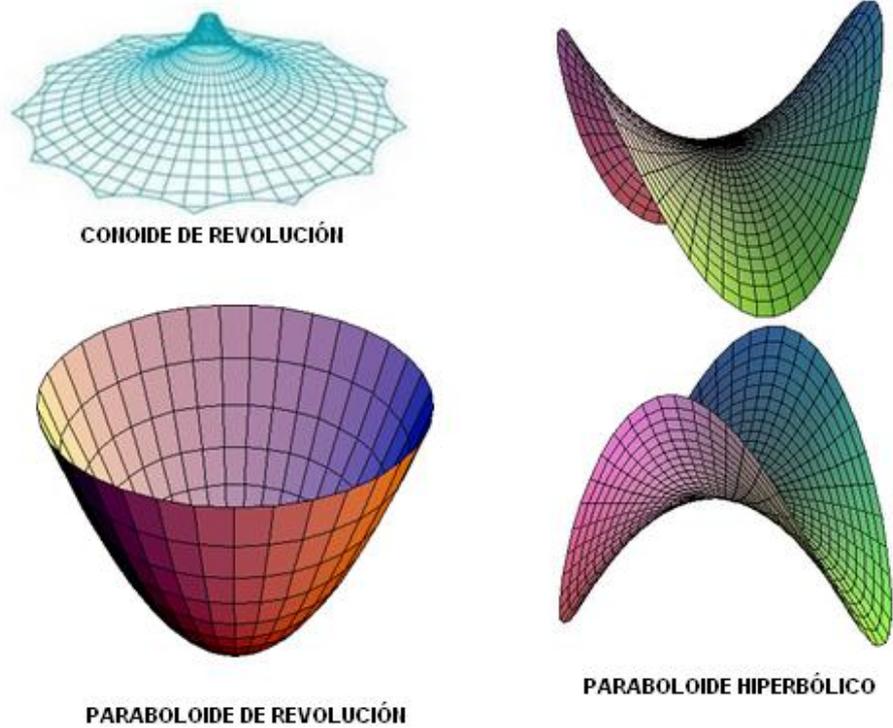


Fig.2.8: Formas simples mas comunes: Conoide de revolución y Paraboloide hiperbólico y Paraboloide de revolución.

No obstante existen infinidad de variantes de estas formas a las que se pueden llegar a través de deformaciones lineales o puntuales.



Fig. 2.9: Variantes de dos formas simples: Conoide (izqda..) y Paraboloide hiperbólico (derecha).

Las formas compuestas se forman por la combinación de las formas simples descritas o de sus variantes.



Fig. 2.10: Estructura compuesta de conoides asimétricos. AVANGARDEN. Estambul (Turquía)

○ **Por su temporalidad:**

1. Móviles o Permanentes:

Aunque inicialmente la Arquitectura textil se empleaba en instalaciones móviles o desmontables, hoy en día se utilizan a menudo en estructuras permanentes.

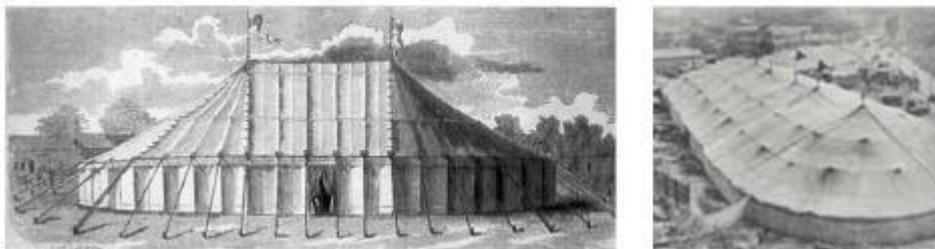


Fig. 2.11: Carpa de circo "Chapiteau" de finales del siglo XIX.



Fig. 2.12: Palacio de tuwaiq. Frei Otto y Buro Happold ,1985. Riyadh (Saudi Arabia)

○ **Por su disposición:**

1. En **fachada**, en **cubierta** o de **cerramiento completo**.

Podemos encontrar numerosos ejemplos de aplicaciones en fachada, cubierta o ambos:



Fig. 2.13: Disposición en fachada: Hotel Burj Al Arab. Dubai (United arab emirates)



Fig. 2.14: Disposición en cubierta: Auditorio Campo de Marte. Tarragona (España)

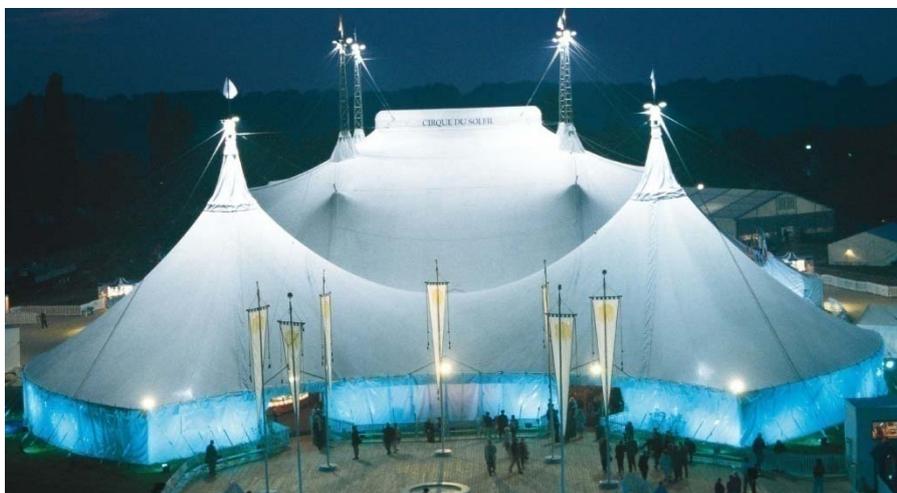


Fig. 2.15: Disposición en cerramiento y cubierta. Chateau Circo del Sol.

2. Interiores o Exteriores:

También podemos clasificar las estructuras tensadas en función de su ubicación: en el exterior o en el interior de un edificio.



Fig. 2.16: Disposición en interior. Dynamic Earth Centre. Holyrood Park, Edinburgo, Escocia (R. Unido)

o Por su tipología estructural y composición:

Podemos distinguir tres grandes grupos:

1. Las membranas y láminas tensadas

Consisten en elementos superficiales sin rigidez a la flexión. Una membrana es una hoja de material tan delgada que, para todo fin práctico, puede desarrollar solamente tracción. Buenos ejemplos de membrana constituyen un trozo de tela o de caucho. En general, las membranas deben estabilizarse, principalmente porque su forma funicular para cargas horizontales difiere de las de las cargas verticales. La estabilización se obtiene por medio de un esqueleto interno o por pre-tensión¹ producido por las fuerzas externas o por presión interna.

Las membranas utilizadas en la fabricación de estructuras tensadas están constituidas generalmente por una serie de fibras entrecruzadas en las dos direcciones principales, que aportan las características mecánicas a la tela.

Son numerosos los materiales utilizados entre los que podemos destacar:

- Algodón
- Poliamida (nylon)
- Fibra de Poliéster (Trevira, Terylene, Dacron, Violen)
- Fibra de vidrio
- Fibra de aramida

¹ Se podría distinguir entre membranas sin pretensado y membranas pretensadas aunque las primeras, cuya forma más simple es la de la bóveda catenaria, no suelen emplearse dada la poca estabilidad de las mismas. Este pretensado suele realizarse en dos direcciones dando lugar a las membranas curvas frente al pretensado en una única dirección que presentan las membranas planas

- PVC (policloruro de vinilo): El tejido de PVC se emplea habitualmente a modo de lona impermeable.
- PVDF: Polifluoruro de vinilideno
- El ETFE, (etileno-tetra-flúor-etileno) es un co-polímero modificado único en su inalterabilidad bajo efectos de rayos ultravioleta o bajo polución atmosférica, con un alto grado de transparencia. Gracias a que el ETFE es extremadamente duradero, puede ser usado como parte del revestimiento permanente de las cubiertas.
- PTFE: Poli-TetraFluoroEtileno, más conocido como Teflón. Este polímero es ideal para estas estructuras debido a su elasticidad, y a su escasa fragilidad. El uso de este material se ha ido incrementando recientemente, gracias a las bondades del mismo. Sus cualidades translúcidas permiten el ahorro de luz durante el día y el uso escaso de luminarias reflejadas en la noche y sus propiedades reflectantes mantienen una baja temperatura en el interior, y son además resistentes al fuego. Por esto, su desarrollo ha tenido un impacto monumental principalmente en el Medio Oriente, Australia y Sur América, donde el calor es más intenso y las necesidades de ahorro en aire acondicionado e iluminación se hacen más importantes.

Es habitual en la actualidad recubrir estas fibras con resinas que protegen y mejorar el acabado superficial. Así se obtienen materiales compuestos de:

- Material textil simple (habitualmente poliéster o fibra de vidrio).
- Coating o cobertura
- Top coat o acabado superficial

Entre los más utilizados se encuentran:

- **Fibra de poliéster recubierta de PVC:** Este tipo de material es el más extendido en las estructuras tensadas. Se utiliza para estructuras permanentes, siendo su vida de 15 a 20 años.

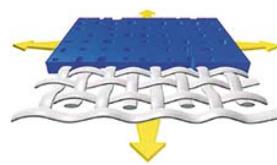


Fig. 1: Estructura del PES-PVC

- **Fibra de vidrio recubierta de PTFE (teflón):** Su uso está también extendido para estructuras permanentes, siendo su vida de unos 30 años. Se considera no combustible. Los niveles de transmisión de luz pueden llegar al 25%. Se ha de manipular con cuidado, evitando doblar. Esta fibra ha sido utilizada en proyectos de gran envergadura como el Georgia Dome, el aeropuerto de Denver o el Millenium Dome.



Fig. 1: Estructura de la fibra de vidrio recubierta de PTFE

- **Fibra de vidrio recubierta de Silicona:** Este recubrimiento es más flexible que el teflón por lo que es más sencilla su manipulación y transporte. Su transparencia varía del 25% al 40%. El uso de la silicona como recubrimiento ocasionaba problemas de uniones entre telas en los comienzos y se considera un recubrimiento que puede atraer la suciedad.
- **Fibra de PTFE recubierta de PTFE:** Es completamente resistente a UV y a la acción de ácidos. La textura recuerda a una seda fina, siendo extremadamente flexible y utilizada frecuentemente como material para estructuras retráctiles. La transparencia es del 40%, pudiendo disminuirse si fuese necesario.
- **Fibra de aramida, recubierta de PVC, PTFE o silicona:** Dada su gran resistencia, se utiliza para aplicaciones especiales. Su poca resistencia a UV hace que haya que protegerla, disminuyendo su transparencia. Se ha utilizado recubierta de PVC en la cubierta del estadio olímpico de Montreal, por las elevadas tensiones que ha de soportar debido a las cargas de nieve.
- **Fibras de PVDF :**Es un material relativamente nuevo, que puede ser recubierto con Fluoropolímeros o Poliuretano. El nivel de transparencia llega al 95%. Está disponible también en blanco con un nivel de transparencia del 40%. Se utiliza como material retardante para el fuego. Resistente a ácidos, es fácil de colorear y reciclable.
- **Láminas de ETFE:** Este material no está compuesto de fibras, sino que se utiliza en láminas de 50 a 250 micras de espesor, por lo que no es un elemento estructural. Se utiliza como material de cierre en paneles de aire y su transparencia es del 95%. Su resistencia al fuego es buena. La principal ventaja es su bajo peso comparado con el vidrio y la posibilidad de ser adaptable a formas. Por lo tanto, es un material ideal para aquellas soluciones que requieran alta transparencia y libertad en formas

2. Estructuras neumáticas:

También están constituidas por membranas compartiendo algunos de los materiales vistos en el apartado anterior, pero su estabilización se produce por la diferencia de presión en toda su superficie. Es decir, las estructuras neumáticas desafían la gravedad de una manera completamente original, pues contrariamente a las estructuras comunes cuyo peso debe ser distribuido en el suelo, imponen una carga que actúa en sentido contrario a la gravedad, la presión de un gas interior. Las formas logradas son siempre sinclásticas.



Fig. 2.17: Estadio Allianz Arena. Herzog & de Meuron. Munich (Alemania)

Cabe distinguir entre estructuras **soportadas por aire** y las estructuras formadas por **elementos hinchados superficiales**. Entre estas últimas son habituales las de doble lámina de ETFE con las que se crean cubiertas cálidas que tienen gran transparencia.



Fig. 2.18: Estructura soportada por aire Airstructure Exhibition Hall. Festo AG & Co. Esslingen (Alemania)



Fig. 2.19: Cubierta de elementos hinchados del Castillo de Dresde. Form T.L. Dresde (Alemania)

En las estructuras soportadas por aire no hacen falta elementos de soporte rígidos como columnas, muros, arcos, etc. Son las construcciones más ligeras y mínimas creadas por el hombre.

Ambos tipos poseen un peso estructural extremadamente bajo (el cual está determinado por el tipo de membrana que se utiliza).

3. Las mallas de cables:

Los cables son también elementos que sólo resisten esfuerzos de tracción. Para simplificación del lenguaje, se habla de cables puesto que casi siempre se emplean las cuerdas o cables de acero, pero este papel puede ser desempeñado por cualquier material que sea flexible y resistente a la tracción, bien sean **metálicos** (alambre, haces de alambres, cintas, redondos, perfiles de acero o incluso cintas de plancha y cadenas) y **no metálicos** (cuerdas de fibras orgánicas como el cáñamo o el algodón o bien cuerdas sintéticas o incluso madera, especialmente, tiras a base de láminas de madera).

Es muy reciente el uso de este tipo de estructuras. Fue en 1953 cuando se construyó el primer edificio con cubierta de este tipo: Arena de Raleigh, proyectado por Nowicki y situado en Carolina del Norte (Estados Unidos).

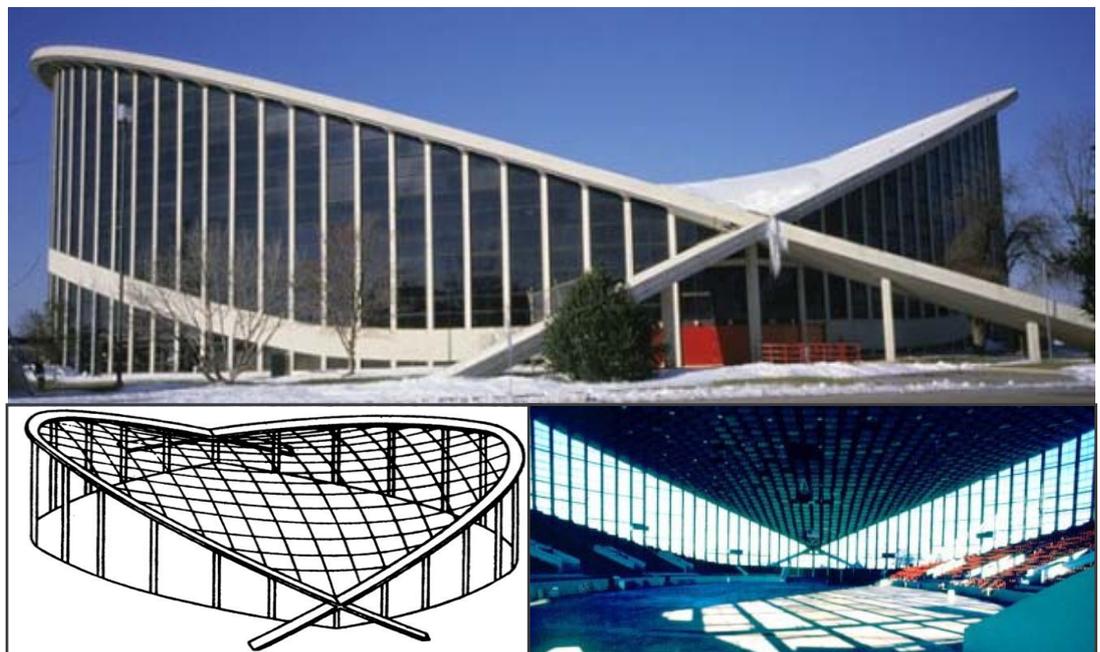


Fig. 2.20: Cubierta de membranas suspendidas por malla de cables. Nowicki y Deitrick. Carolina N. (EEUU)

Otros ejemplos de grandes estructuras de mallas de cables son los ya mencionados Estadio Olímpico de Múnich de 1972 o el Pabellón de Alemania de la Exposición Universal de 1967 ambos de Frei Otto. Se tratan de estructuras que utilizan al mismo tiempo las membranas tensadas y las mallas de cables caso frecuente en la Arquitectura Textil.

Este tipo de mallas se asemejan a las telas de Araña de forma sorprendente. Las arañas tejen figuras que parecen desordenadas pero que obedecen a ciertas razones. Primero hilan un cordón grueso (equivalente a las cuerdas de contorno de nuestras mallas abiertas) cruzando un rincón entre muros, y con un ir y venir lo refuerzan convenientemente. Aunque por distintos caminos, el hombre y la araña llegan a soluciones de un gran parecido exterior.

De forma análoga a las membranas podemos distinguir entre mallas de cables **sin pretensar**, libremente colgantes, y **pretensadas** cuya forma es prácticamente independiente de su peso propio. Estas últimas son las más habituales al permitir figuras curvadas más bellas y al mismo tiempo más estables.

El pretensado se distingue del empleado ordinariamente en el hormigón, pues en nuestro caso los cables se mantienen en tensión independientemente de las cargas exteriores, es decir, nunca dejan de estar sometidas a tracción.

Según la forma del esqueleto de apoyo se pueden distinguir entre mallas de cables **cerradas y abiertas**.

Las primeras se forman cuando el contorno lineal de apoyo es cerrado. La forma más conocida es la formada por la red que cuelga de dos arcos de parábola como es el caso del Arena de Raleigh. No obstante la forma de parábola no es la más favorable para tejer una malla de cables pretensados puesto que en la zona próxima al vértice de parábolas la red no resulta pretensada.



Fig. 2.21: Velódromo de Londres para las olimpiadas de 2012. Hopkins architects. Londres (Reino Unido) Malla de cables cerrada (elíptica) con doble curvatura que sustenta los paneles.

Las mallas abiertas se tienden entre superficies o puntos de apoyo o reacción y no sobre un anillo cerrado. En este tipo de mallas se distinguen los cables denominados relingas y los cables de tensión o soportantes. Una de las formas más empleadas dentro del grupo de mallas abiertas es la de la silla de montar de cuatro puntos de apoyo y la combinación o modificación de este tipo de figuras.

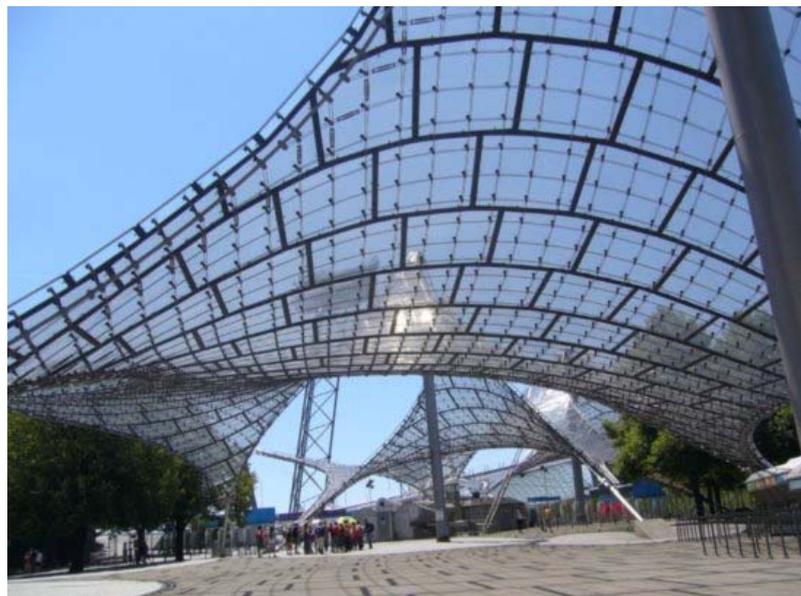


Fig. 2.22: Mallas abiertas del Parque Olímpico.. Frei Otto. Munich (Alemania)

2.3.- MÉTODO DE INVERSIÓN DE LA TRACCIÓN. ESTRUCTURAS DE COMPRESIÓN.

2.3.1.- LA CATENARIA

A lo largo de la historia, los matemáticos se mostraron fascinados por la forma que adoptaba una cuerda, cable o cadena que se combaba bajo su propio peso e intentaron descubrir cuál era la curva que la describía. El problema no era fácil y hasta el propio Galileo erró al suponer que la curva adoptaría la forma de una parábola.

En 1669 el matemático alemán Joachin Jungius fue capaz de demostrar que una cadena colgante no adoptaba una forma de parábola pero fue necesario que pasara casi medio siglo, para encontrar la solución verdadera.

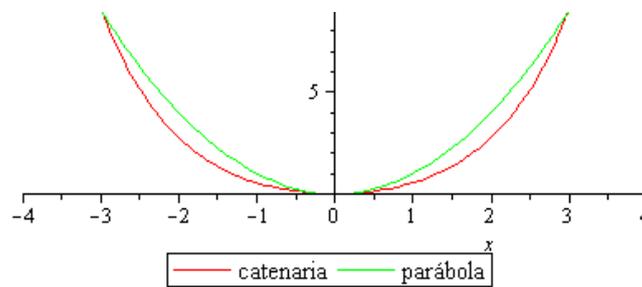


Fig. 2.23: Parecido entre la curva parabólica y la catenaria en el punto más bajo.

En 1690 el suizo Jakob Bernoulli propone un desafío en la prestigiosa Acta Eruditorum, descubrir la fórmula matemática que definiera la verdadera forma de la curva de la cadena colgante. La respuesta no tardó en llegar y en 1691 la ecuación fue obtenida, de forma independiente, por su hermano menor Johann Bernoulli, con el que tenía gran rivalidad, y por Gottfried Leibniz y Chistiaan Huygens en 1691.

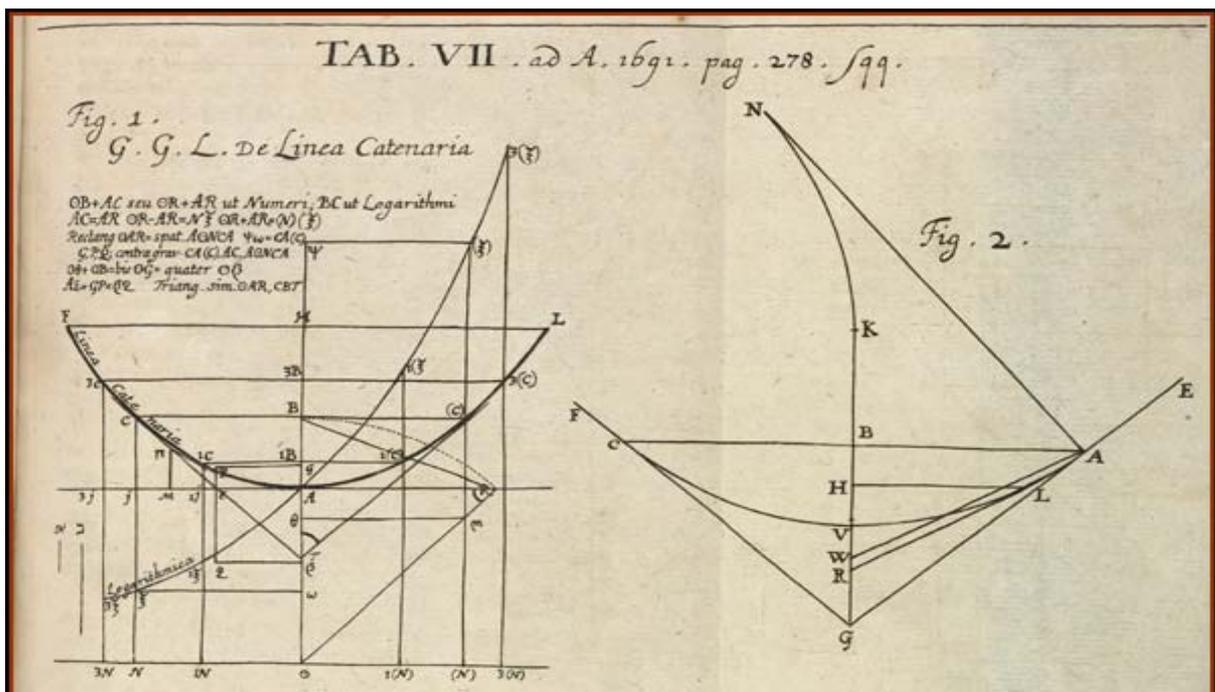
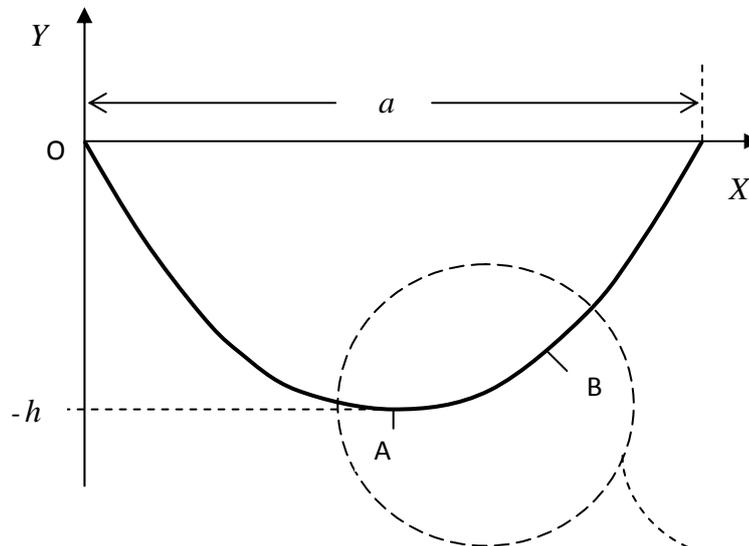


Fig. 2.24: Soluciones remitidas por Leibniz y Huygens a Bernouille para su publicación en Acta Eruditorum (1691)

Consideremos una cuerda ideal perfectamente flexible, con masa distribuida uniformemente por unidad de longitud, suspendida por sus extremos y sometida a la acción de un campo gravitatorio uniforme. Planteando el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales en una porción de esta cuerda que incluya el punto más bajo de la catenaria (punto A) y con una longitud s :



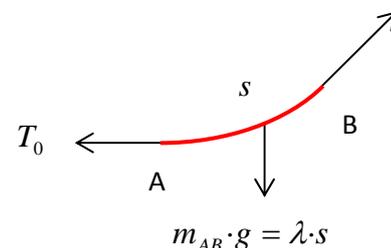
$$\sum F_H = 0 \rightarrow T \cos \alpha - T_0 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow T \sin \alpha - \lambda \cdot s = 0 \quad (2)$$

Siendo:

α el ángulo formado por la catenaria y la horizontal

λ el peso por unidad de longitud.



La primera ecuación implica que $T \cos \alpha = T_0 = cte$, es decir, **la tensión horizontal permanece constante** a lo largo de toda la catenaria.

Dividiendo la ecuación (2) entre (1) queda:

$$\tan \alpha = \frac{\lambda \cdot s}{T_0} \quad (3)$$

Y puesto que

$$\tan \alpha = dy/dx \quad \text{y} \quad ds^2 = dy^2 + dx^2 \quad (4)$$

Derivando (3) y sustituyendo (4) obtenemos que:

$$\frac{d}{dx}(\tan \alpha) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\lambda}{T_0} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (5)$$

Realizando el cambio de variable $u = dy/dx$:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\lambda}{T_0} \cdot \sqrt{1 + u^2} \quad (6)$$

Separando variables, integrando y teniendo en cuenta que para $x = a/2$, (en el punto más bajo A de la curva) $dy/dx = 0$ se puede escribir

$$\int_A^P \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\lambda}{T_0} \cdot \int_{a/2}^x dx \quad (7)$$

$$\sinh^{-1}(u) = \frac{\lambda}{T_0} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right) \rightarrow u = \sinh \left[\frac{\lambda}{T_0} \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right) \right] \quad (8)$$

Integrando nuevamente, para $x = a/2$, $y = -h$ se encuentra

$$y = -h + \frac{T_0}{\lambda} \cosh \left[\frac{\lambda}{2T_0} \cdot (2x - a) \right] + \frac{T_0}{\lambda} \quad (9)$$

Dada la simetría de la curva anterior (catenaria) para $x = a$ e $y = 0$ se obtiene

$$h = \frac{T_0}{\lambda} \cosh \left[\frac{\lambda a}{2T_0} \right] - \frac{T_0}{\lambda} \quad (10)$$

de donde se encuentra que la **ecuación de la catenaria** queda como

$$\boxed{y = \frac{T_0}{\lambda} \left\{ \cosh \left[\frac{\lambda}{2T_0} \cdot (2x - a) \right] - \cosh \left[\frac{\lambda a}{2T_0} \right] \right\}} \quad (11)$$

Por otro lado, la longitud de la catenaria está dada por

$$L = \int ds = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^a \cosh \left[\frac{\lambda}{2T_0} \cdot (2x - a) \right] dx \quad (12)$$

Con lo que queda que

$$L = \frac{2T_0}{\lambda} \operatorname{senh} \left[\frac{\lambda a}{2T_0} \right] \quad (13)$$

La ecuación (13) es una ecuación trascendente, la cual se resuelve numéricamente y permite determinar T_0 para luego representar la ecuación de la catenaria (11), se suponen conocidos, o como datos del sistema: La longitud del cable (L), la densidad lineal del cable (λ) y la distancia (a) de la catenaria

Hemos definido el término de **densidad lineal** λ como el peso por unidad de longitud. Más adelante, cuando se describa el método de cálculo para la obtención de la forma de equilibrio de las estructuras tensadas o a compresión, se definirá un nuevo parámetro denominado **densidad de fuerza** (q) que corresponde a la tensión del cable por unidad de longitud: $q=T/L$.

Si se desarrolla en series de Taylor la función coseno hiperbólico, $\cosh(x)$, se obtiene que:

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O^4(x)$$

Esto corresponde a la ecuación de una parábola más un término de cuarto orden. Es por este motivo que las gráficas son tan parecidas en el entorno de cero.

Si observamos superpuestas las gráficas de una catenaria y una parábola podemos entender porqué los antiguos matemáticos en un principio suponían que era la parábola la curva que se combaba bajo su propio peso.

El desarrollo de las fórmulas matemáticas de una catenaria y una parábola coincide en sus tres primeros términos ($y = a + bx + cx^2$) y solo a partir del cuarto ambas expresiones se diferencian (pudiendo existir en los últimos términos de la expresión de la catenaria x elevadas a potencias mayores). Esto hace que las gráficas de ambas curvas se parezcan para valores pequeños de la x , acusando más su diferenciación según aumentan los valores de ésta.

La mayor diferencia entre las curvas corresponde a sus respectivas tangentes, en la catenaria el valor de la tangente tiende a la verticalidad mientras que en la parábola este valor tiene a una constante. Esto condiciona que en la catenaria, para valores infinitos de la y , la x tiende a valores limitados, mientras que en la parábola para los valores infinitos de la y se obtienen valores infinitos de la x .

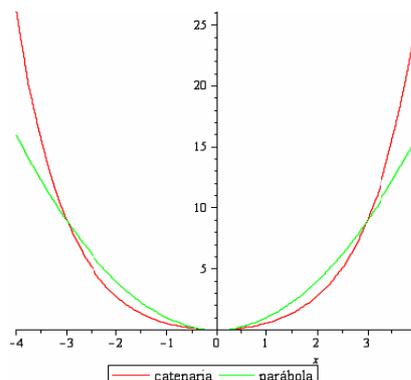


Fig. 2.25: Diferencia entre la curva parabólica y la catenaria en la base

2.3.2.- LA CURVA FUNICULAR

En el apartado anterior, se ha adoptado una densidad continua del material, que equivaldría a un cable o cuerda de peso uniforme. Pero si consideramos ahora un sistema de masas concentradas unidas por un hilo de peso despreciable, la curva de equilibrio obtenida adoptaría una forma diferente que dependería del número de cargas y del valor de cada una de estas cargas o masas concentradas.

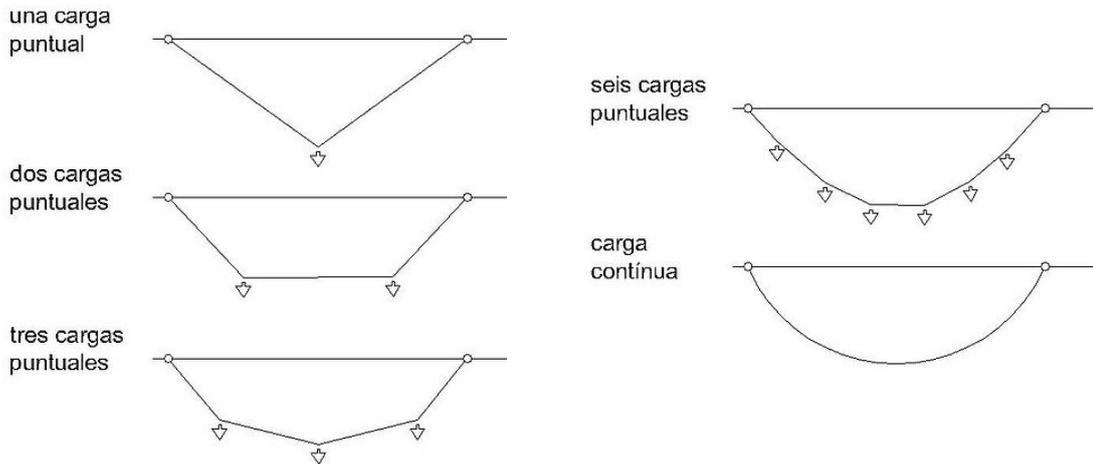
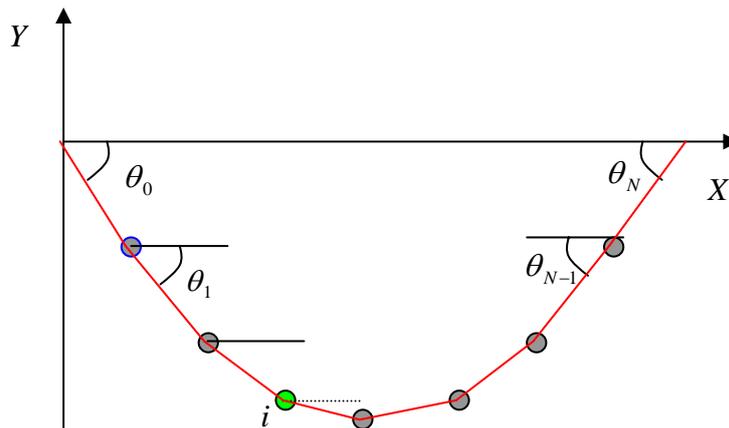


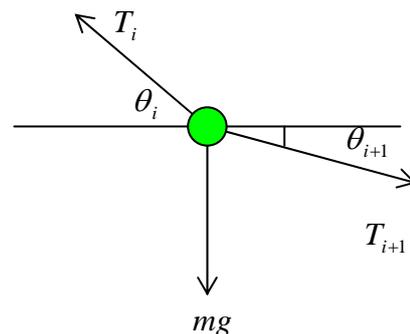
Fig. 2.26: Aproximación de las curvas funiculares a la curva catenaria

Esto es lo que se denomina caso discreto de la curva catenaria o curva funicular. Resulta más sencilla la obtención de las ecuaciones matemáticas que las definen como se verá a continuación.

Considerando N masas concentradas la curva de equilibrio obtenida podría definirse por el ángulo que forma cada masa concentrada con la horizontal.



Sobre la masa i actuarán las siguientes fuerzas:



Si consideramos todas las masas idénticas, la condición de equilibrio (estático) para la masa i -ésima $m_i = m$ queda expresada como:

$$\text{Eje } x: \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow \quad T_i \cos \theta_i = T_{i+1} \cos \theta_{i+1} \quad (14)$$

$$\text{Eje } y: \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow \quad T_i \text{ sen } \theta_i - T_{i+1} \text{ sen } \theta_{i+1} = mg \quad (15)$$

Dado que todas las componentes horizontales de la tensión del hilo T_x son iguales, se puede escribir.

$$T_x = T_0 \cos \theta_0 = T_i \cos \theta_i = T_{i+1} \cos \theta_{i+1} = T_N \cos \theta_N \quad (16)$$

Por otro lado, dividiendo la ecuación (15) por T_x se tiene

$$\frac{T_i \text{ sen } \theta_i}{T_x} - \frac{T_{i+1} \text{ sen } \theta_{i+1}}{T_x} = \frac{mg}{T_x} \quad (17)$$

De la expresión anterior, es posible encontrar la relación entre θ_i y θ_{i+1} , para lo cual reemplazamos (16) en (17) obteniéndose

$$\tan \theta_{i+1} = \tan \theta_i - \frac{mg}{T_x} \quad (18)$$

Definiendo: $\gamma = \frac{mg}{T_x}$ como el cociente entre el peso de cada elemento y la componente horizontal de

la tensión, la relación de recurrencia a partir de (18) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \tan \theta_1 &= \tan \theta_0 - \gamma \\ \tan \theta_2 &= \tan \theta_1 - \gamma \\ &\vdots \\ \tan \theta_i &= \tan \theta_{i-1} - \gamma \\ &\vdots \\ \tan \theta_N &= \tan \theta_{N-1} - \gamma \end{aligned} \quad (19)$$

Sumando miembro a miembro se obtiene el ángulo θ_N en términos de del ángulo inicial θ_0 en la forma:

$$\boxed{\tan \theta_N = \tan \theta_0 - N \gamma} \quad (20)$$

Para el caso particular en que los extremos del cable están a la misma altura, por simetría, se tiene $\tan \theta_0 = -\tan \theta_N$ lo cual permite escribir

$$\tan \theta_0 = \frac{1}{2} N \gamma \quad (21)$$

Al sumar miembro a miembro la relación de recurrencia (19) hasta el término $N = i$, luego utilizando (20) es posible determinar la relación entre los ángulos θ_i y θ_N

$$\tan \theta_i = \tan \theta_0 - i \gamma = \frac{(N - 2i) \gamma}{2} \quad (22)$$

Los ángulos θ_0 y θ_N se determinan a través de la siguiente relación

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{(N - 2i) \gamma}{2}\right) \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots N \quad (23)$$

Las coordenadas (x_i, y_i) del elemento i -ésimo se obtienen sumando las proyecciones sobre el eje X ($d \cos \theta_j$), y sobre el eje Y ($-d \sin \theta_j$, $j = 0, \dots, i-1$), donde d es la distancia entre dos elementos consecutivos, luego $d = L/(N + 1)$, de donde se obtiene

$$x_i = \frac{L}{N + 1} \sum_{j=0}^{i-1} \cos \theta_j \quad ; \quad y_i = -\frac{L}{N + 1} \sum_{j=0}^{i-1} \sin \theta_j \quad (24)$$

2.3.3.- LA INVERSIÓN DE LA CATENARIA: EL ARCO CATENARIO.

Como una cuerda o cadena no es capaz de transmitir los esfuerzos de compresión ni de flexión sólo es posible que alcance el equilibrio en estado de tracción de todos sus elementos. La catenaria tiene la característica de ser el lugar geométrico de los puntos donde las tensiones horizontales del cable se compensan y por ello carece de tensiones laterales por lo que la cadena permanece inmóvil sin desplazarse hacia los lados. Las fuerzas que actúan son una componente vertical, la de la gravedad, y una tensión tangente a la cadena en cada punto que es la que la mantiene estirada.

Si invertimos la figura obtendremos un arco catenario sometido únicamente a compresión y sin esfuerzos laterales. Esta es la forma ideal para el arco que soporta su propio peso. Cuando está construido de elementos individuales cuyas superficies son perpendiculares a la curva del arco, no existen fuerzas de cizalla significativas en las uniones y el empuje al apoyo se transmite a lo largo de la línea del arco.

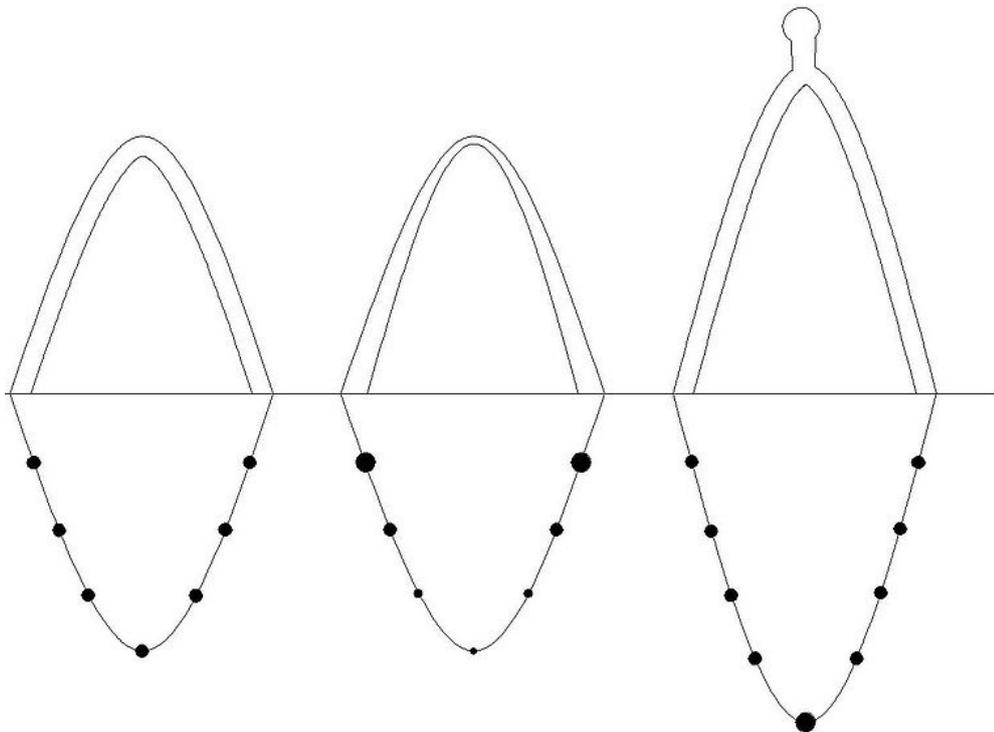


Fig. 2.27: Arcos funiculares y sus curvas funiculares equivalentes

Del arco catenario se derivan los arcos funiculares que tienen igualmente óptimas características constructivas y que se pueden obtener con facilidad reproduciendo (invertidos) los efectos de cargas puntuales sobre una curva catenaria.

En la medida que la forma de los arcos se corresponde con la antifunicular de la carga, la estructura funcionará a compresión y en la medida que se separe lo hará utilizando mecanismos auxiliares de flexión. Visto así un pórtico es un arco mal diseñado que evacúa la carga a base de flexiones. Se podría incluso afirmar que todas las estructuras funcionan como un arco y es importante descubrir el arco que albergan en su interior.

Además para arcos catenarios de igual longitud, cuanto mayor es la altura, más pequeño es el empuje horizontal en los puntos de arranque, con lo que se pueden obtener grandes alturas con mínimos empujes laterales.

Posiblemente fue Robert Hooke en 1675 el primero en intuir este método al afirmar: “Del Mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido se sostendrá el arco rígido”. La idea de Hooke de entender el comportamiento de los arcos por analogía con el comportamiento de los cables colgantes es una de las más geniales de la historia de la arquitectura. Años después, en 1697, Gregory añadió un interesante matiz. La forma ideal de un arco sería en efecto la de una catenaria invertida y si el resto de arcos se sostienen es porque hay una catenaria en su interior.

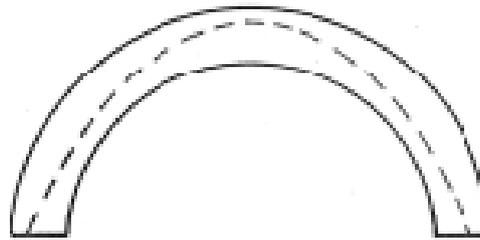


Fig. 2.28: Idea de Gregory de que un arco cualquiera se sostiene si contiene un arco catenario en su interior

Aunque Hooke fue incapaz de hallar la ecuación de la curva, es decir, no resolvió el problema matemático, algunos autores defienden que sí resolvió el problema técnico: el saber cómo funciona un arco, y un arco funciona como un cable invertido

En la cultura occidental no se emplean los arcos catenarios hasta mediados del siglo XIX. Desde la época romana, el diseño de arcos y bóvedas se realizaba a partir curvaturas menos eficientes derivadas del círculo, más fáciles de construir pero menos estables. Los arcos de medio punto del Románico tendían a abrirse por lo que eran necesarios grandes muros de contención que los sostuvieran para evitar que se agrietaran. Ni siquiera los arquitectos del Gótico consiguieron dar con la forma adecuada de transmitir los esfuerzos laterales y pese a que los arcos ojivales fueron una aproximación a la forma de la catenaria, más afortunada que razonada, aún era necesario el empleo de robustos arbotantes para que absorbieran las fuerzas horizontales y las trasladasen hacia los cimientos.

No ocurre lo mismo en otras culturas donde si aparece formas similares al arco catenario obtenidas de forma intuitiva. En la arquitectura tradicional de Noreste de África, se encontró la forma de construir amplias habitaciones circulares cubiertas con una cúpula catenaria utilizando únicamente adobe y sin necesidad de entibar, pues mientras dura la construcción los empujes horizontales son tan pequeños que los adobes se mantienen en su posición simplemente con el rozamiento de los ya instalados y una vez cerrada la cúpula, ésta adquiere una resistencia extraordinaria. El desarrollo de ésta técnica surgió como respuesta a la escasez de madera. En esa zona la madera es tan escasa y valiosa, que es inaccesible para la construcción de viviendas pobres, ni por supuesto para realizar los andamiajes.

Una situación análoga se da en las latitudes más septentrionales y existen estudios geométricos que parecen demostrar que los iglús de los esquimales canadienses no son semiesferas, tal como los solemos representar, sino que su morfología se aproxima más a catenoides de revolución con una relación altura/diámetro óptima.

Uno de los arcos más antiguos con una forma aproximada a la de la catenaria es el Gran Arco de Ctesifonte o Taq-i Kisra, que es el único resto visible de la antigua ciudad de Ctesifonte en la antigua Persia, actual Irak. Este arco, construido sin cimbras, era parte del palacio imperial de la ciudad que durante siete siglos fue la capital de seléucidas, partos y sasánidas que constituyó un bastión en esta parte del mundo contra el imperio romano. A pesar de que las inundaciones que se produjeron en la zona durante el siglo pasado derribaron una de las alas de la construcción existente, el gran arco que sigue en pie en la actualidad.

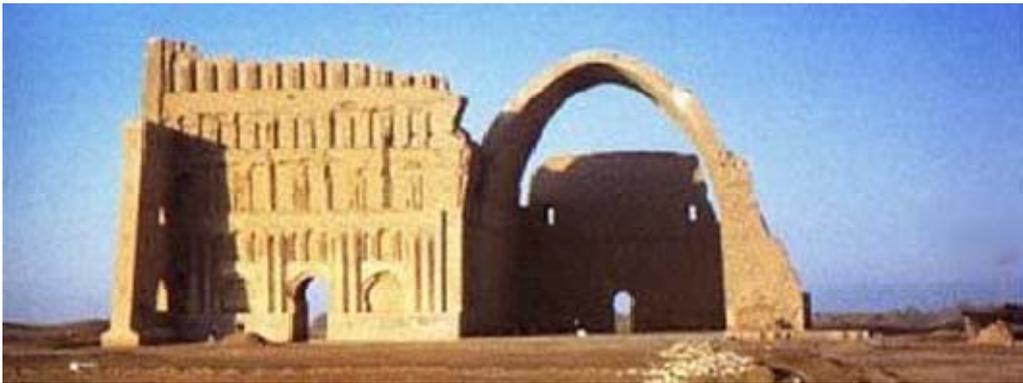


Fig. 2.29: Gran Arco de Ctesifonte o Taq-i Kisra

El método de inversión de las catenarias o curvas funiculares permite calcular arcos utilizando modelos colgantes sencillos. Fue aplicado por los ingenieros ingleses del siglo XVIII en la construcción de puentes y recogido por Thomas Young en 1845 en su *Course of lectures on natural philosophy and mechanical arts*. En Europa continental tuvo menos difusión aunque se cita en tratados de varios autores franceses y alemanes.

A partir del siglo XX han sido numerosas las obras que han empleado arcos catenarios en su constitución.

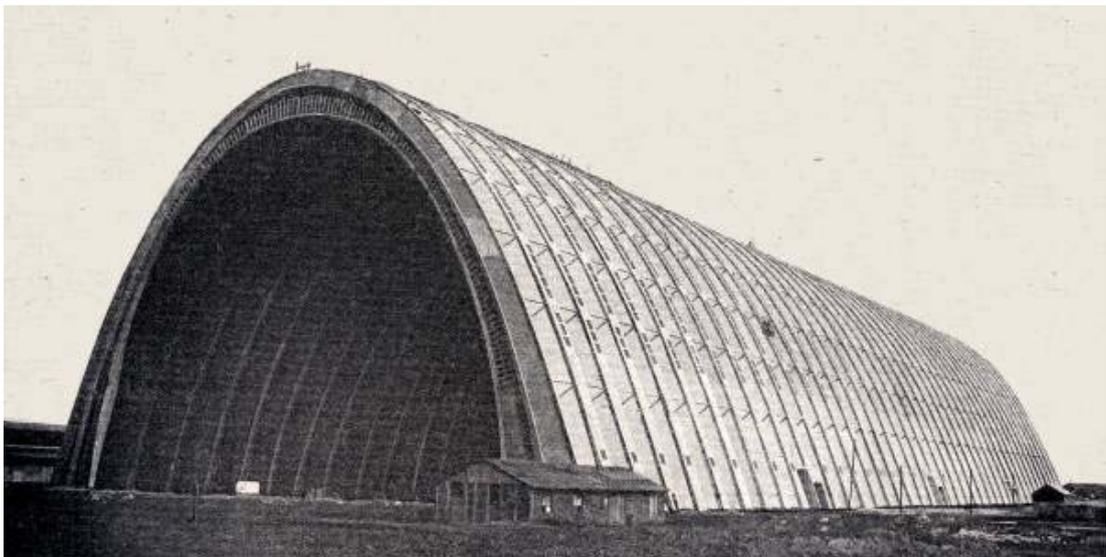


Fig. 2.30: Hangar del Aeropuerto de Orly de hormigón pretensado. Eugène Freyssinet 1916 . París (Francia)

Probablemente la obra arquitectónica con forma de arco catenario más famosa del siglo XX es el Gateway Arch de San Luis (Missouri), con 192 metros de altura, obra del arquitecto norteamericano de origen finlandés Eero Saarinen que constituye una maravilla de la construcción, sobre todo si tenemos en cuenta que fue proyectado en una época anterior a las computadoras.



Fig. 2.31: Gateway Arch. Eero Saarinen. San Luis – Missouri (EEUU)

2.3.4.- LAS ESTRUCTURAS DE COMPRESIÓN.

Sin duda uno de los hitos históricos más importantes en relación con el método de inversión de las curvas funiculares corresponde a la obra de **Antoni Gaudí i Cornet** (1852-1926) cuya gran aportación fue el desarrollo y la aplicación sistemática de estos modelos en algunas de sus obras más conocidas.



Fig. 2.32: Maqueta funicular utilizada por Gaudí

Si nos centramos en el aspecto del cálculo de estructuras, la característica más relevante de Gaudí y la que lo diferencia del resto de arquitectos de su época, es que, desde el inicio, hay una preocupación por el diseño de una estructura estable y no una mera comprobación de estabilidad a posteriori. Este interés en construir estructuras estables, apoyado en una buena formación técnica, es él que le lleva a buscar soluciones originales centradas en la raíz de los problemas y por ello, desde sus primeras obras, al empleo de arcos catenarios y parabólicos que eran muy poco habituales en la arquitectura occidental.

Además Gaudí si fue capaz de apreciar la belleza de estos arcos llegando a manifestar que “... la catenaria da elegancia y espiritualidad al arco, elegancia y espiritualidad a la construcción entera”, “evita contrafuertes, el edificio pesa menos, gana una gracia vaporosa y se aguanta sin raros accesorios ortopédicos”.

Otra aportación de este gran arquitecto fue la observación que la catenaria es una forma natural y la naturaleza es un referente continuo para Gaudí que imita sus formas y crea formas inspirándose en la misma. Para el arquitecto “... *el gran libro siempre abierto y que hay que hacer el esfuerzo de leer es él de la naturaleza, los otros libros han sido extraídos de este y además contienen las equivocaciones y las interpretaciones de los hombres*”.



Fig. 2.33: Pilares arbolados con formas catenarias.

En la obra de Gaudí hay muchos ejemplos del uso de arcos catenarios, destacando los del Colegio de las Teresianas (1889-90), la casa Batlló (1904-06), la casa Milá (1906-10) o la cripta de la colonia Güell (1908-15).



Fig. 2.34: Arcos catenarios en la casa Batlló. Gaudí. Barcelona (España)

Por otro lado, esta curva es sencilla de realizar para los trabajadores. Existen referencias de que el proceso de construcción era simple, se fijaba la luz del arco, se clavaban dos clavos en la parte alta, se suspendía una cadena hasta que el punto más bajo coincidía con la flecha deseada del arco, se dibujaba la forma resultante utilizando la cadena como guía y el carpintero construía la cercha correspondiente que luego se invertía y se situaba en su sitio.

Gaudí también experimentó con nuevas formas geométricas para las bóvedas empleando superficies regladas: paraboloides hiperbólicos e hiperboloides de revolución. De nuevo se trata de una aportación completamente original. Como ejemplo, las bóvedas del pórtico que rodea la cripta de la Colonia Güell tienen forma de paraboloides hiperbólicos. Comprendió que esta era una forma que, debido a su doble curvatura gaussiana negativa, trabaja a compresión en todos sus puntos a pesar de presentar un abombamiento que parece contradecir la esencia de toda construcción de fábrica.

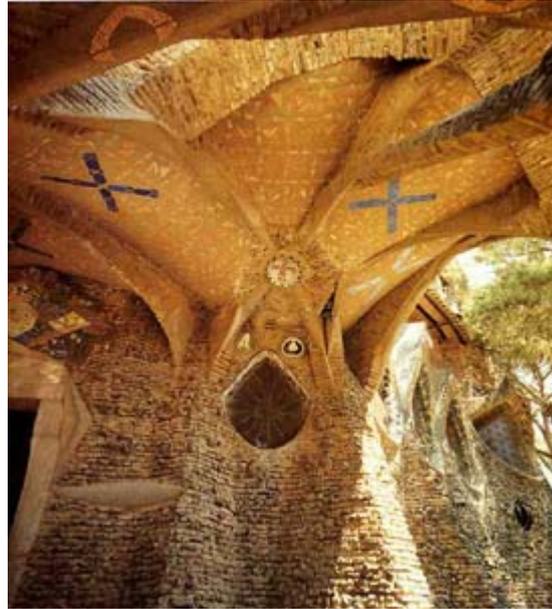


Fig. 35: Cripta de la Colonia Güell. Gaudí. Barcelona (España)

También podemos apreciar la utilización de la catenaria en algunos edificios de Santiago Calatrava, como ejemplo, la Galería BCE Place (1992) de Toronto, donde se puede ver cierta influencia de Gaudí. Si nos fijamos en la imagen de la Galería (Figura 16), uno puede apreciar cierto parecido con imágenes del Colegio de las Teresianas o del interior de la Sagrada Familia. Además, las vigas, que luego se cierran en un arco parabólico, recuerdan a los árboles (de nuevo, la presencia de Gaudí); más concretamente, la Galería nos muestra un “camino entre árboles” que la comunica con la ciudad. La Galería se cierra con una cubierta acristalada por la que entra la luz natural.

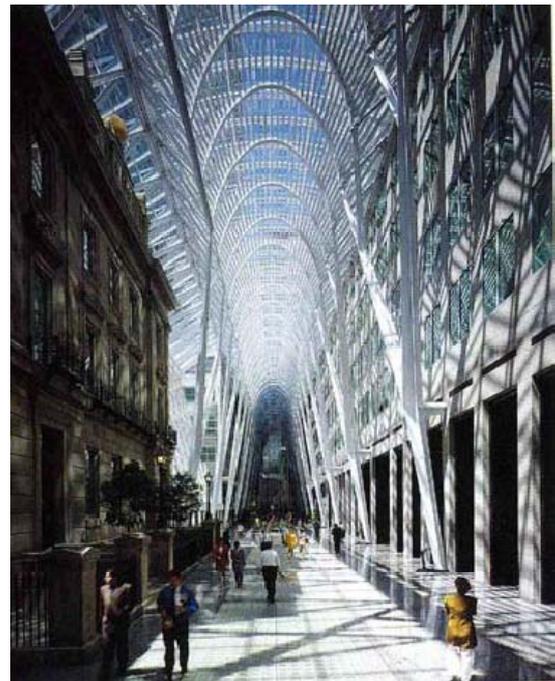


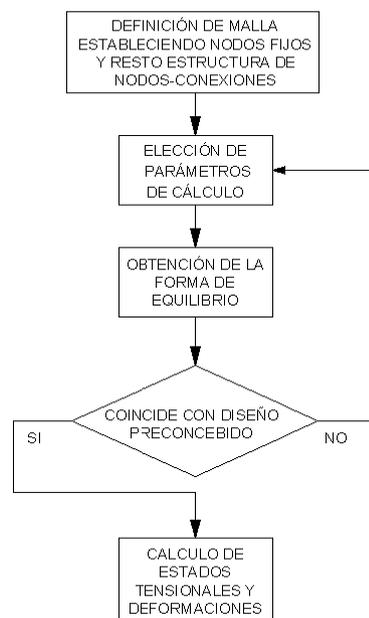
Fig.2.36: Galería BCE Place. S. Calatrava. Toronto (Canadá)

2.4. CÁLCULO DE LA FORMA DE EQUILIBRIO EN ESTRUCTURAS TENSADAS Y DE COMPRESIÓN

Mediante la aplicación de una simetría en el plano horizontal se puede transformar las estructuras tensadas en estructuras sometidas a compresión. Esto implica que los métodos de cálculo de la forma de equilibrio de las estructuras tensadas son válidos también para estas últimas.

Una característica fundamental de estas estructuras es que existen infinitas soluciones de equilibrio para cada caso. De igual forma que existen infinitas curvas funiculares que compartan los puntos de sujeción o base, en función de la longitud de la cadena o de la distribución de masas, existen infinitas soluciones de equilibrio para una misma superficie tensada o una forma antifunicular. Además cada solución al problema estará íntimamente ligada a su estado tensional y viceversa.

Esta característica de las estructuras tensadas y de compresión es la que condiciona su método de cálculo que parte necesariamente de la búsqueda de forma de equilibrio y que, a diferencia de las estructuras estáticas tradicionales, esta forma es una variable más del problema que puede adoptar infinitas soluciones en virtud de los parámetros escogidos. Se trata de un proceso iterativo en el que, partiendo de unos parámetros denominados densidades de fuerza, se van obteniendo distintas formas de equilibrio hasta escoger la forma deseada o la que se aproxime a la idea preconcebida del diseñador.



La dificultad radica en que no existe una relación clara entre estos parámetros y la forma obtenida ya que estos están relacionados con los estados tensionales y estos no se conocen hasta el último paso. El presente trabajo pretende facilitar la obtención de la forma deseada a través la comprensión del significado de estos parámetros y de la descripción de técnicas de cálculo de los mismos a partir de magnitudes tomadas de nuestro diseño original.

Una vez obtenida/escogida la forma de equilibrio, se aplicaran sobre la estructura las cargas a las que se encuentra sometida para obtener los estados tensionales y de deformación frente a las mismas.

En el presente trabajo se empleará como método para la búsqueda de la forma de equilibrio el denominado "Método de la Densidad de Fuerza", (Linkwitz et al., 1.971 y Schek, 1.974).

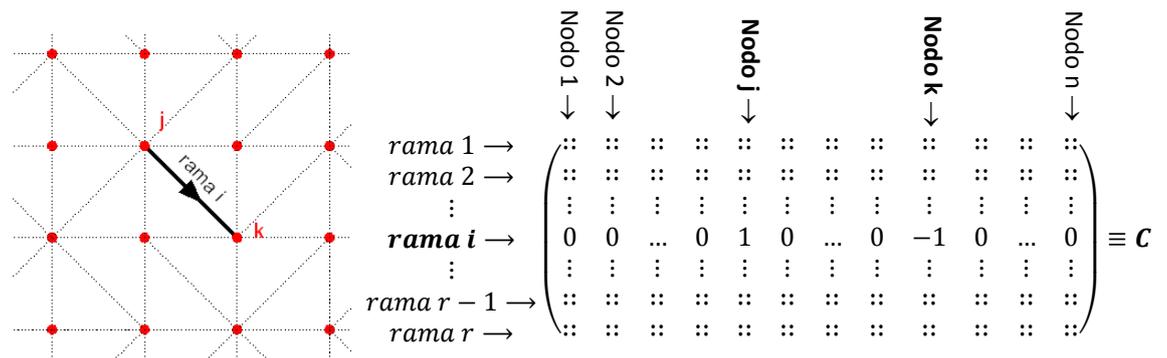
2.4.1- MÉTODO DE DENSIDAD DE FUERZAS

Este método permite calcular la forma de equilibrio de una tensoestructura o de una estructura antifunicular a partir de la resolución de un sistema de ecuaciones.

Se parte de los siguientes datos conocidos:

1. **Estructura de nodos-conexiones:** aunque desconozcamos la forma de equilibrio si podemos equiparar nuestra estructura a una malla de nodos conectados a través de unas ramas en la que unos nodos poseen unas coordenadas conocidas y otros nodos tienen por coordenadas las variables de nuestro sistema de ecuaciones. La originalidad de este método radica en definir una **MATRIZ DE CONECTIVIDAD "C"** que indica las conexiones entre nodos. Cada fila de la matriz define una rama de la malla mientras que cada columna equivale a un nodo de nuestra estructura. En cada fila "i" sólo existirán dos valores distintos de cero, con valor 1 y -1, que indican precisamente los nodos conectados por la rama i. Con el signo se define la dirección de la rama o conexión. Por lo tanto la matriz **C** tendrá tantas filas como ramas posea nuestra malla y tantas columnas como nodos existan.

Si tenemos una malla con "n" nodos unidos a través de "r" ramas o conexiones, la fila i de nuestra matriz de conectividad "C" (de dimensión rxn) indicará que la rama "i" une los nodos "j" y "k" siempre que tome los siguientes valores:



Por otra parte, podemos definir los **VECTORES DE COORDENADAS** $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, formados por las coordenadas x_i, y_i, z_i de todos los nodos (vectores de dimensión n).

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Algunos de estos valores x_i, y_i, z_i serán conocidos (puntos de apoyo o fijos) mientras que el resto son las incógnitas a resolver mediante el método aquí descrito.

2. **Densidades de fuerzas** de cada conexión. Se definen como la relación entre la fuerza de tracción o compresión "s" y la longitud "l" de cada conexión o rama.

Es decir, para cada rama i:

$$q_i = \frac{s_i}{l_i}$$

Por tanto podemos definir la **MATRIZ DE DENSIDAD DE FUERZAS Q** como la matriz diagonal, de dimensión $r \times r$, formada por todas las densidades de fuerzas de cada ramas:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_r \end{pmatrix}$$

3. **Las fuerzas aplicadas en determinados nodos.** Por último las fuerzas nodales se introducen en el sistema mediante **VECTORES DE FUERZA** $\vec{f}_x, \vec{f}_y, \vec{f}_z$, de longitud n , formados por las componentes f_{xi}, f_{yi}, f_{zi} de cada nodo i :

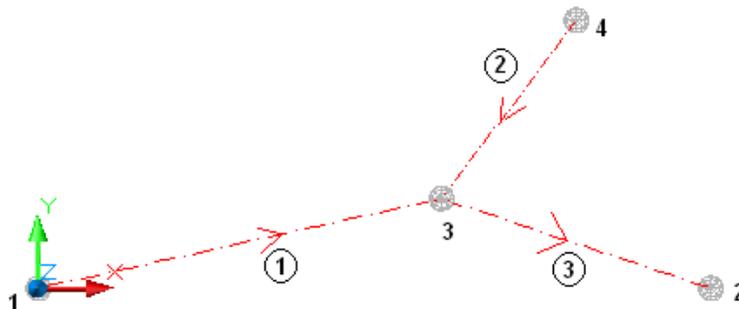
$$\vec{f}_x = \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{x2} \\ \vdots \\ f_{xn} \end{pmatrix}; \quad \vec{f}_y = \begin{pmatrix} f_{y1} \\ f_{y2} \\ \vdots \\ f_{yn} \end{pmatrix}; \quad \vec{f}_z = \begin{pmatrix} f_{z1} \\ f_{z2} \\ \vdots \\ f_{zn} \end{pmatrix}$$

Definidos estos vectores y matrices, las **ECUACIONES DEL MÉTODO DE DENSIDAD DE FUERZAS** expresan las ecuaciones de equilibrio de los nodos con forma sistema de ecuaciones matricial:

$$\begin{cases} (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot x + f_x = 0 \\ (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot y + f_y = 0 \\ (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot z + f_z = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Estas ecuaciones constituyen un sistema lineal donde los valores conocidos son las coordenadas de los puntos fijos, los vectores de fuerza aplicados en los nodos y las densidades de fuerza de cada rama.

Para comprender la equivalencia de estas ecuaciones con las ecuaciones de equilibrio consideraremos a modo de ejemplo una malla de cuatro nodos definida como muestra la siguiente figura:



La matriz de conectividad de esta estructura es:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de equilibrio para el nodo 3 se pueden expresar igualando la suma de las proyecciones de las fuerzas internas a lo largo de cada uno de los ejes cartesianos, con la proyección de la fuerza externa aplicada en dicho nodo:

$$\text{Nodo 3} \quad \begin{cases} \frac{S_1}{l_1} \cdot (x_3 - x_1) + \frac{S_2}{l_2} \cdot (x_3 - x_4) + \frac{S_3}{l_3} \cdot (x_3 - x_2) = -f_{3x} \\ \frac{S_1}{l_1} \cdot (y_3 - y_1) + \frac{S_2}{l_2} \cdot (y_3 - y_4) + \frac{S_3}{l_3} \cdot (y_3 - y_2) = -f_{3y} \\ \frac{S_1}{l_1} \cdot (z_3 - z_1) + \frac{S_2}{l_2} \cdot (z_3 - z_4) + \frac{S_3}{l_3} \cdot (z_3 - z_2) = -f_{3z} \end{cases}$$

Análogamente se pueden obtener las ecuaciones de equilibrio para el resto de los nodos:

$$\text{Nodo 1} \quad \begin{cases} \frac{S_1}{l_1} \cdot (x_1 - x_3) = -f_{1x} \\ \frac{S_1}{l_1} \cdot (y_1 - y_3) = -f_{1y} \\ \frac{S_1}{l_1} \cdot (z_1 - z_3) = -f_{1z} \end{cases}$$

$$\text{Nodo 2} \quad \begin{cases} \frac{S_3}{l_3} \cdot (x_2 - x_3) = -f_{2x} \\ \frac{S_3}{l_3} \cdot (y_2 - y_3) = -f_{2y} \\ \frac{S_3}{l_3} \cdot (z_2 - z_3) = -f_{2z} \end{cases}$$

$$\text{Nodo 4} \quad \begin{cases} \frac{S_2}{l_2} \cdot (x_3 - x_4) = -f_{4x} \\ \frac{S_2}{l_2} \cdot (y_3 - y_4) = -f_{4y} \\ \frac{S_2}{l_2} \cdot (z_3 - z_4) = -f_{4z} \end{cases}$$

La primera ecuación de cada uno de estos sistemas se puede obtener descomponiendo el primer término en el producto de la matriz de conectividad traspuesta C^T y otra matriz auxiliar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{S_1}{l_1} (x_1 - x_3) \\ \frac{S_2}{l_2} (x_3 - x_4) \\ \frac{S_3}{l_3} (x_2 - x_3) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \\ f_{4x} \end{pmatrix}$$

Esta matriz auxiliar a su vez se puede descomponer en el producto de estas tres matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{S_1}{l_1} (x_1 - x_3) \\ \frac{S_2}{l_2} (x_3 - x_4) \\ \frac{S_3}{l_3} (x_2 - x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_3}{l_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 - x_3) \\ (x_3 - x_4) \\ (x_2 - x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{S_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S_3}{l_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{QCx}$$

Por lo que podemos afirmar que las ecuaciones que representan el equilibrio de las componentes de fuerzas en el eje x para cada nodo se pueden expresar como:

$$C^T \mathbf{QCx} + \mathbf{f}_x = \mathbf{0}$$

Expresión que coincide con la primera ecuación del Método de Densidad de Fuerzas.

Análogamente se comprueba la equivalencia del resto de ecuaciones del sistema, con lo que podemos afirmar que estas expresiones representan el equilibrio de nuestra estructura de nodos-conexiones desacopladas para cada componente x, y, z.

$$ECUACIONES DE EQUILIBRIO \equiv \begin{cases} (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot x + f_x = 0 \\ (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot y + f_y = 0 \\ (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot z + f_z = 0 \end{cases}$$

Imagínese que se ha de resolver esta estructura que se ha tomado como ejemplo, donde el nodo 3 queda libre (desconocemos su posición) y los nodos 1, 2, y 4 son fijos con las siguientes coordenadas:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ x_3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

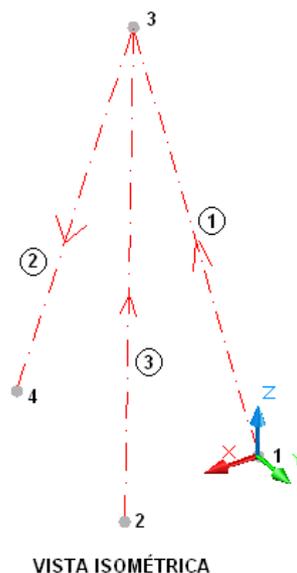
Supóngase que la densidad de fuerzas de las conexiones es:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones del MDF se obtienen lo siguientes resultados:

| | | | |
|-------------|----------------|-----------------|----------------|
| $x_3=3;$ | $f_{x1}=3;$ | $f_{x2}=-1;$ | $f_{x4}=-2$ |
| $y_3=0.67;$ | $f_{y1}=0.67;$ | $f_{y2}=-1.33;$ | $f_{y4}=0.67$ |
| $z_3=1.33;$ | $f_{z1}=1.33;$ | $f_{z2}=0.33;$ | $f_{z4}=-1.67$ |

Con estos resultados se ha obtenido las coordenadas del nodo 3, pudiendo representar ahora la forma de equilibrio de la estructura planteada así como su estado tensional para las densidades de fuerza consideradas.



2.4.2.- EL MALLADO TOPOLÓGICO

En el apartado anterior se ha analizado el MDF que permite obtener la forma de equilibrio y las reacciones en los apoyos partiendo de los siguientes datos iniciales: La estructura nodos-conexiones, las densidades de fuerzas y las fuerzas nodales.

La dificultad inicial que plantea este método en relación con la definición de la estructura nodos-conexiones, es precisamente la de generar la malla o red de conexiones y nodos partiendo de los nodos fijos o puntos de apoyo. En esto consiste la técnica del Mallado Topológico introducida por Hernández-Montes et al. [1]

La característica principal del mallado topológico es que con unas pocas reglas topológicas un mallado se puede realizar independientemente de la configuración geométrica final. Sobre la base de este nuevo concepto pueden seleccionarse y realizar muchos tipos de redes topológicas.

En primer lugar es preciso distinguir entre red cerrada y red abierta. En las primeras a partir del primer paso el nodo inicial coincide con el nodo final generándose los denominados anillos. Es el caso de las redes tipo cúpula.

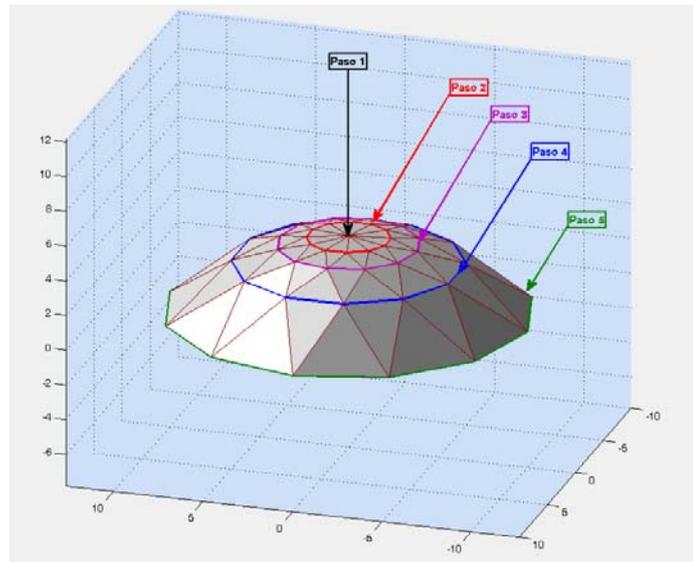


Fig. 2.37: Ejemplo de Red Cerrada.

En las redes abiertas los nodos iniciales y finales no coinciden como ocurre en los mallados de las estructuras tipo bóveda.

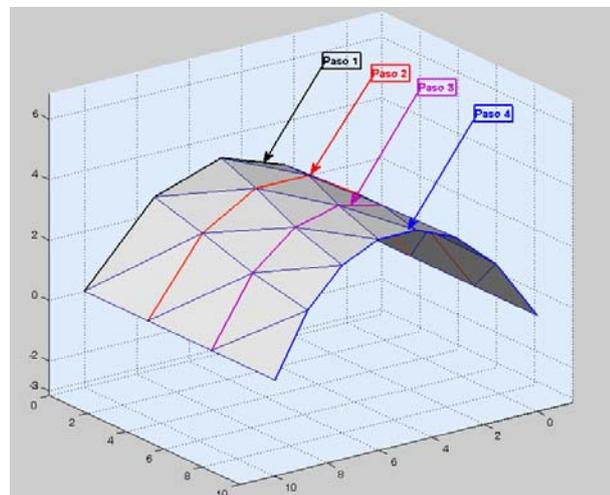


Fig. 2.38: Ejemplo de Red Abierta

El método describe tres redes básicas, tipo A, tipo B, y tipo C, figura 2.39. Dentro de cada tipo podremos distinguir entre redes cerradas y en redes abiertas.

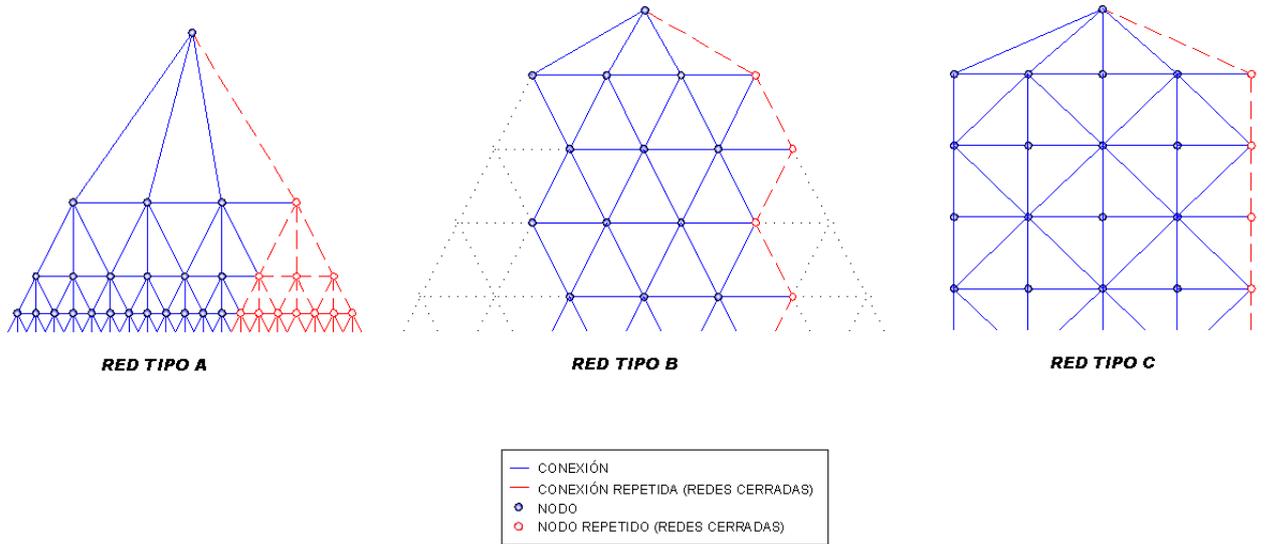


Fig. 2.39: Tipos de redes topológicas

En el caso de las redes topológicas cerrada tipo A, B o C, la conectividad entre los nodos está representada por líneas continuas azules, y las líneas discontinuas rojas indican conexiones repetidas. Asimismo los círculos azules representan nodos, y los círculos grises representan nodos repetidos.

La red básica tipo A corresponde a un patrón en el que cada nodo está conectado en un paso dado a los adyacentes, así como al doble más tres nodos de la etapa siguiente. De esta manera el número de nodos de cada paso es el doble de la cantidad de la anterior para la configuración cerrada, y doble más un nodo para la configuración abierta.

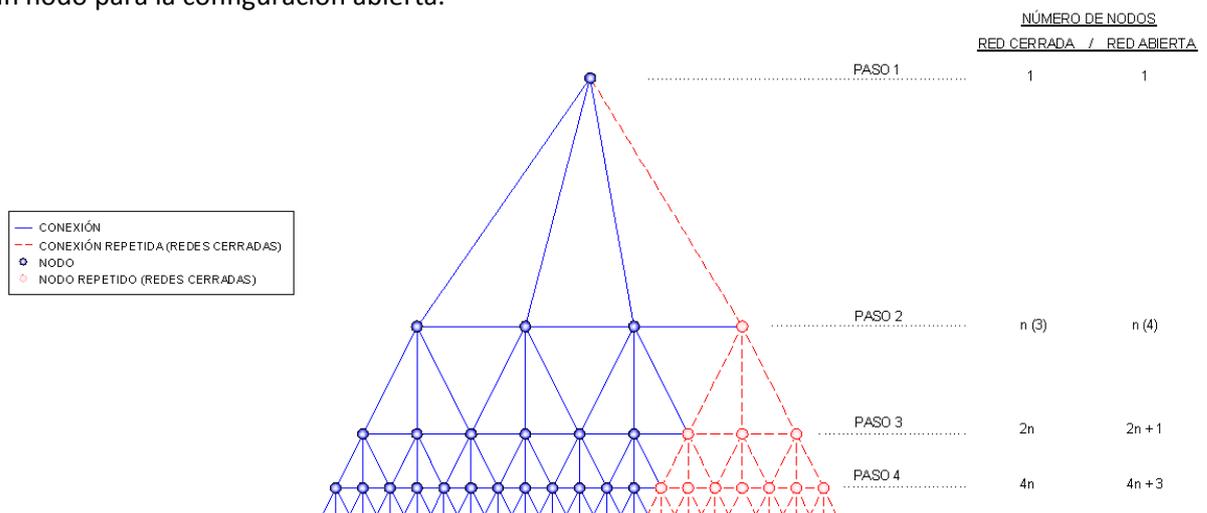


Fig. 2.40: Red topológica tipo A. Número de Nodos en cada paso

La red básica tipo B es similar a la tipo A con la diferencia de que cada nodo en un paso determinado está conectado a dos nodos de la etapa siguiente. Con la red B el número de nodos de cada paso es igual a la de la etapa anterior para la configuración cerrada y al de la etapa anterior más uno para la configuración abierta.

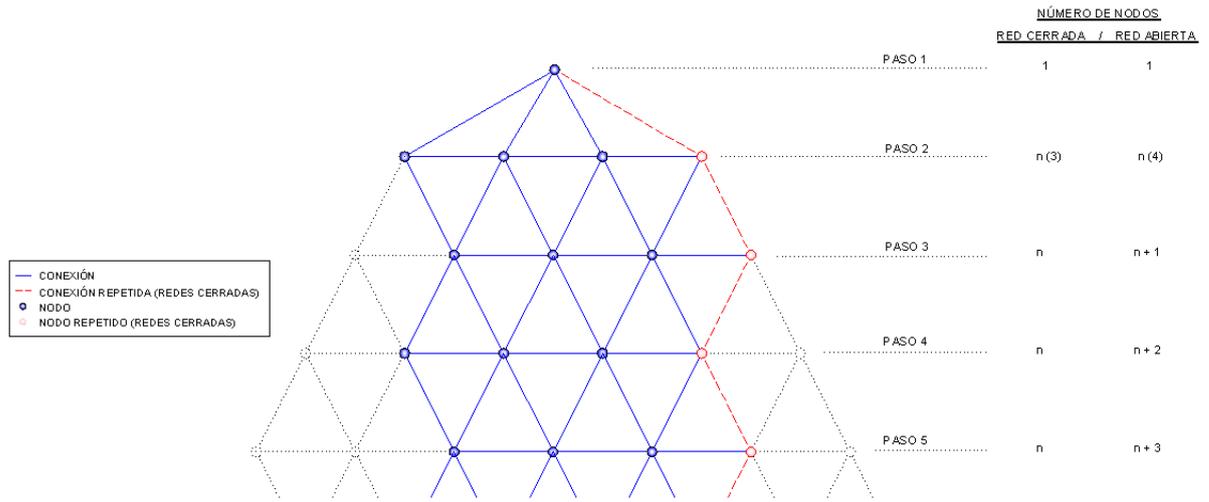


Fig. 2.41: Red topológica tipo B. Número de Nodos en cada paso

El patrón de la red básica tipo C es tal que cada nodo en un paso determinado está conectado alternativamente a uno y a tres nodos de la etapa siguiente. De esta manera el número de nodos sigue siendo el mismo en cada paso tanto en redes abiertas como en redes cerradas.

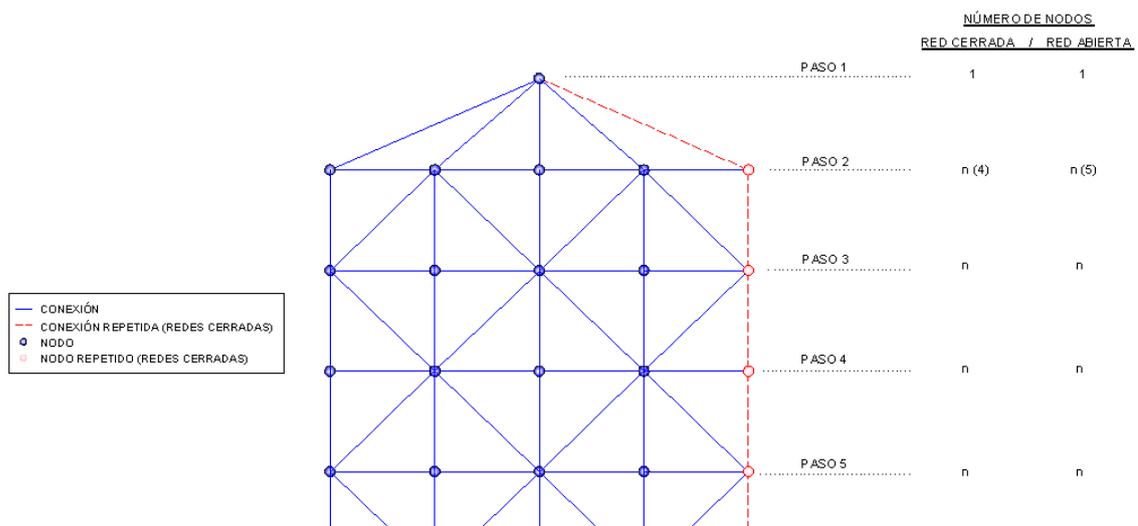


Fig. 2.42: Red topológica tipo C. Número de Nodos en cada paso

Las redes básicas descritas se originan a partir de un nodo inicial que está conectado a los nodos n de la segunda etapa.

Sin embargo, este nodo inicial puede ser suprimido en redes abiertas, así como redes cerradas cuando se desea crear un nuevo contorno interior en el interior de la red.

Con el fin de ser capaz de resolver el problema de configuraciones complejas con varios agujeros, se pueden unir redes simples abiertas y/o cerradas. Estas combinaciones conducen al concepto de redes combinadas.

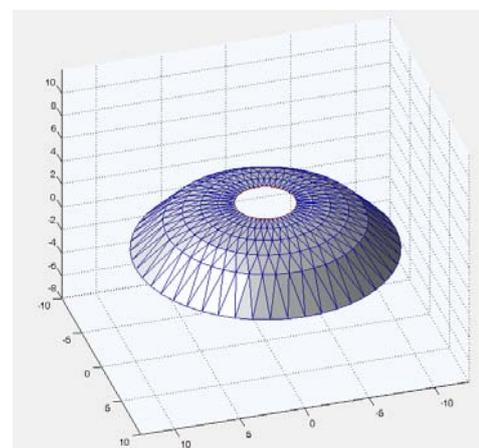


Fig. 2.43: Ejemplo de supresión de nodos en red cerrada

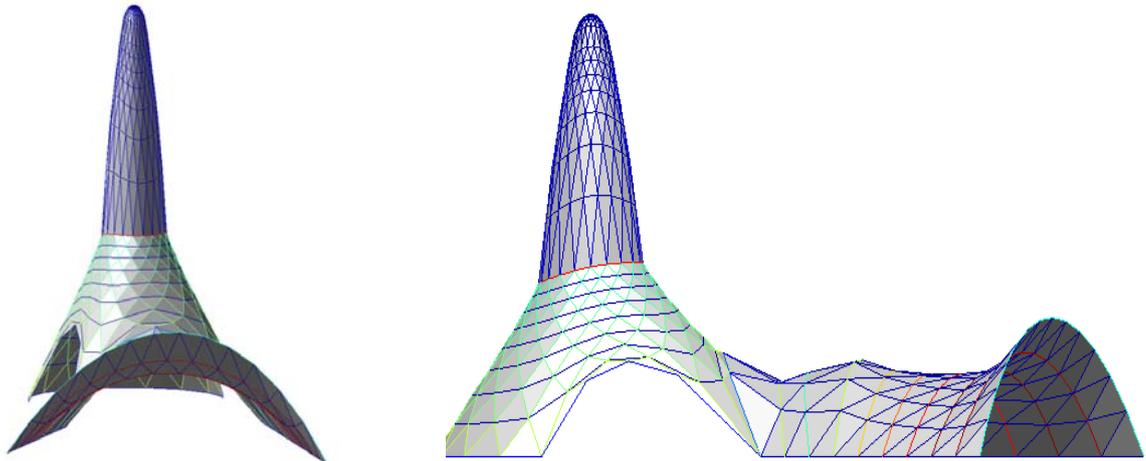


Fig. 2.44: Formación de figuras compuestas a partir de formas simples. Redes combinadas.

Los algoritmos que generan las redes cerradas requieren una entrada de datos reducida y sencilla: la ubicación de los nodos fijos, las densidades de fuerza, y la topología de la red. La topología se caracteriza por el número de nodos de la segunda etapa, el número de pasos y el patrón básico.

La distribución de los nodos del último paso a lo largo del contorno, así como los puntos fijos se realiza en un modo automático para redes cerradas. De esta manera para cualquier contorno dado, es posible generar directamente una configuración de equilibrio. Por otro lado, con una red abierta es más complicada, ya que todos los pasos comparten nodos en el contorno determinado.

Para las redes cerradas los nodos del último paso son los nodos situados en el exterior de la configuración final, así como los nodos fijos. La cantidad de nodos entre puntos fijos consecutivos es proporcional a la longitud entre ellos. En el caso de las redes abiertas los nodos fuera corresponden a la parte exterior del árbol gráfico. Si el nodo de la primera etapa se elimina, el primer paso puede producir una parte fija de la estructura, y aparecerá una red con un agujero interior (ver fig. 2.43).

Las redes básicas pueden presentar varios problemas si se aplican de forma independiente. Por ejemplo, los tipos B y C requieren un elevado número de nodos en su segundo paso para redes cerradas. Por otro lado, la red A produce un elevado número de nodos justo después de unos pocos pasos. Estas limitaciones pueden ser eliminadas mediante el uso de combinaciones de topología de las redes de base A, B y C, para formar lo que se llama redes simples. En este caso, el usuario tiene que definir la secuencia deseada de combinaciones.

| Paso nº | Tipo de Red |
|---------|-------------|
| 3 | A |
| 4 | B |
| 5 | A |
| 6 | B |
| 7 | A |
| 8 | B |
| 9 | B |
| 10 | B |

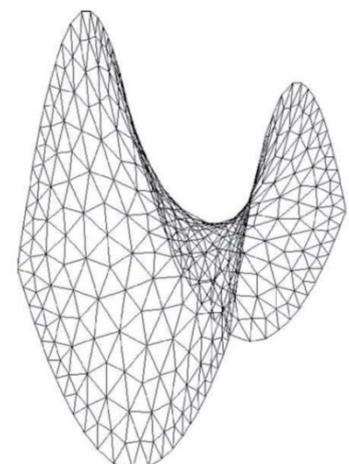
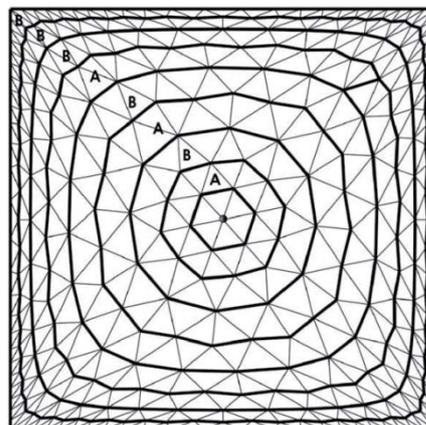


Fig. 2.45: Mallado de un paraboloide hiperbólico combinando redes tipo A y B. Esquema, vista en planta y perspectiva

2.4.3.- LA CONSIDERACIÓN DEL PESO PROPIO EN EL MÉTODO DE DENSIDAD DE FUERZA

Se ha visto hasta ahora como con la conjunción del Método de Densidad de Fuerzas y el Mallado Topológico (MDF+MT) se pueden obtener las formas de equilibrio de cualquier tensoestructura o estructura de compresión.

Se podría pensar que el peso propio no es más que una fuerza externa que podemos introducir como fuerza nodal conforme se ha explicado en el MDF. No obstante, con un análisis más profundo de la cuestión, se comprende que el peso propio depende de la forma de equilibrio obtenida por lo que no puede tratarse como un dato inicial, siendo preciso un cálculo iterativo.

Para considerar el peso propio, las ecuaciones del MDF inicialmente lineales en las tres componentes x, y, z, son alteradas **perdiendo la linealidad en la coordenada z**:

$$\begin{aligned} (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot x + f_x &= 0 \\ (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot y + f_y &= 0 \\ (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot z + f_z(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Las fuerzas nodales de componente vertical que inicialmente eran una constante, ahora son una variable de la forma de equilibrio, es decir, de las coordenadas nodales. El peso de la estructura dependerá de los tamaños de los triángulos definidos en su mallado.

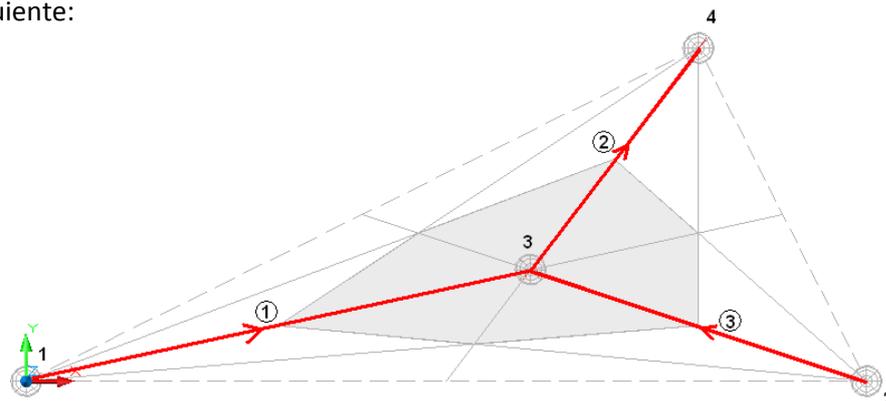
Para calcular el peso de los triángulos que contienen un nodo concreto *i*, primero habrá que obtener su área y multiplicarla posteriormente por el peso específico γ del material empleado en la construcción. El área de cada triángulo puede calcularse como la mitad de la norma del producto de dos vectores v_i y v_j que conformen dos de sus lados.

$$f_{zi} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \left[\frac{\gamma}{3} \left(\frac{1}{2} \| \overline{v_i v_j} \times \overline{v_i v_k} \| \right) \right] \text{ con } \{v_j, v_k | a_{ij} \neq 0, a_{ik} \neq 0, a_{jk} \neq 0\} \quad (27)$$

Donde cada elemento a_{ij} vale 1 si el nodo v_i , comparte una rama con el nodo v_j (son adyacentes) y 0 en el caso contrario.

La sumatoria de la ecuación anterior es multiplicada por $\frac{1}{2}$ debido a que el triángulo que parte del nodo *i* formado por los nodos *i,j,k* se puede formar igualmente partiendo del nodo *i* a través de los nodos *i,k,j*.

Volviendo al ejemplo del apartado anterior, el peso que soporta el nodo 3 equivale al área sombreada en la figura siguiente:



En cambio si el peso que colgamos no es constante sino que depende de la longitud de la rama $P=P_0+\gamma \cdot l$, el problema puede no tener solución.

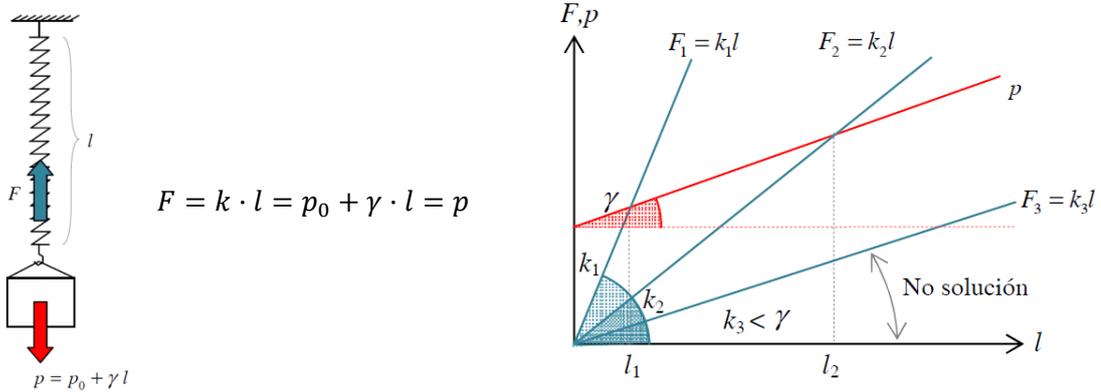


Fig. 2.48: Analogía del problema con un muelle cargado con peso que varía con la longitud del muelle. No existe solución al problema para valores de $k_3 < \gamma$

Por lo tanto, el problema de la solubilidad del Método de Densidad de Fuerzas con la consideración del peso propio, se puede entender de esta misma forma: la fuerza de las conexiones deberá crecer a un ritmo mayor con la que lo hace el peso de los triángulos cuando la longitud de estas conexiones se incrementa. La diferencia aquí es que la condición a imponer a las densidades de fuerza no es tan simple como en el caso del muelle, ya que existen no linealidades que deben ser tenidas en cuenta.

2.4.4.- ALGORITMOS DEL MÉTODO DE DENSIDAD DE FUERZAS CON MALLADO TOPOLÓGICO Y CONSIDERACIÓN DEL PESO PROPIO. PROGRAMA GAUDÍ.

El departamento de estructuras de la Universidad de Granada, a través del grupo de investigación TEP-190 "INGENIERÍA E INFRAESTRUCTURAS", ha desarrollado un algoritmo escrito en código Matlab® que permite obtener formas de equilibrio para este tipo de estructuras. El programa denominado GAUDI tiene implementado las tres técnicas descritas anteriormente: MDF-MT-PP.

Puesto que el sistema de ecuaciones obtenido con la consideración del peso propio resulta no lineal es necesario aplicar el cálculo iterativo y al no existir siempre una solución al problema es necesario establecer un número máximo de iteraciones a realizar comprobando la convergencia.

En una primera iteración se ignora el peso propio de los triángulos y se obtienen las coordenadas x e y de la estructura, que se mantienen constantes a lo largo del proceso. También se obtiene un primer valor de la coordenada vertical z_1 que utilizaremos para comprobar la convergencia. A partir de este momento se calcula el peso de los triángulos y se vuelve a introducir en el MDF como carga exterior. Al obtener una nueva cota z_2 , comprobaremos si la diferencia con respecto z_1 es relevante en cuyo caso volveremos a realizar una nueva iteración calculando nuevamente el peso de los triángulos formados con la nueva forma geométrica y obteniendo una nueva coordenada z_3 . Así se realizaran nuevas iteraciones hasta conseguir, en su caso, la convergencia a un valor z_n determinado.

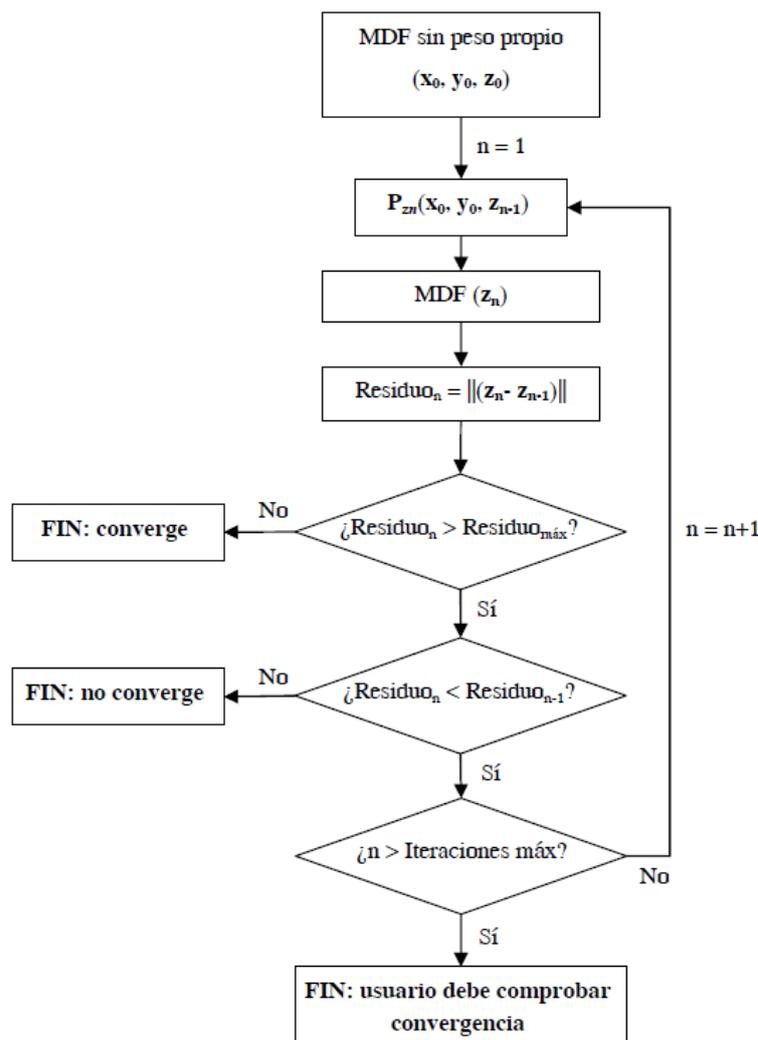


Fig. 2.49: Diagrama de flujo para el cálculo iterativo del MDF-MT-PP

El programa Gaudi realiza un mallado topológico tipo B por lo que el número de nodos permanece constante en cada paso o anillo. Los únicos datos que precisa el programa para realizar el mallado son el número de anillos o pasos, el número de nodos del primer anillo y las coordenadas de los puntos fijos. Por otra parte es preciso indicar la densidad y el espesor de la superficie para el cálculo del peso propio. Establecidos estos datos de partida se obtendrán infinitas formas de equilibrio en función de las densidades de fuerza que se adopten para cada conexión.

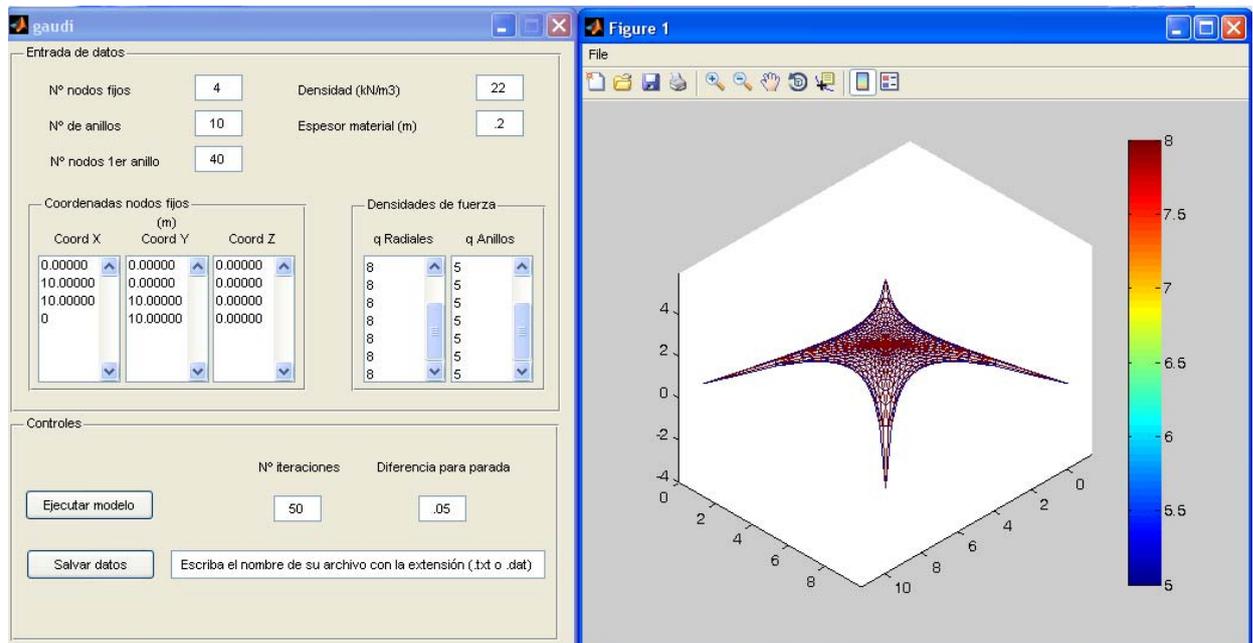


Fig. 2.50: Interfaz de introducción de datos del programa Gaudi e interfaz gráfica de salida

3.- INFLUENCIA DE LA DENSIDAD DE FUERZA EN LAS FORMAS DE EQUILIBRIO DE LAS ESTRUCTURAS DE COMPRESIÓN.

Las densidades de fuerzas introducidas en una estructura de nodos-conexiones, como se ha explicado anteriormente, influye en gran medida en la forma de equilibrio alcanzada.

Este concepto, definido como la fuerza por unidad de longitud, es de comprensión teórica sencilla pero aunque resulta muy difícil su aplicación práctica. Unas ligeras variaciones en algunas densidades de fuerza de nuestra estructura provocan importantes transformaciones en la forma de equilibrio de la misma y además estas diferencias se generan de una forma no proporcional.

Para comprender su significado práctico, resulta muy útil realizar un símil de nuestra estructura de nodos y ramas con un sistema de muelles y bolas.

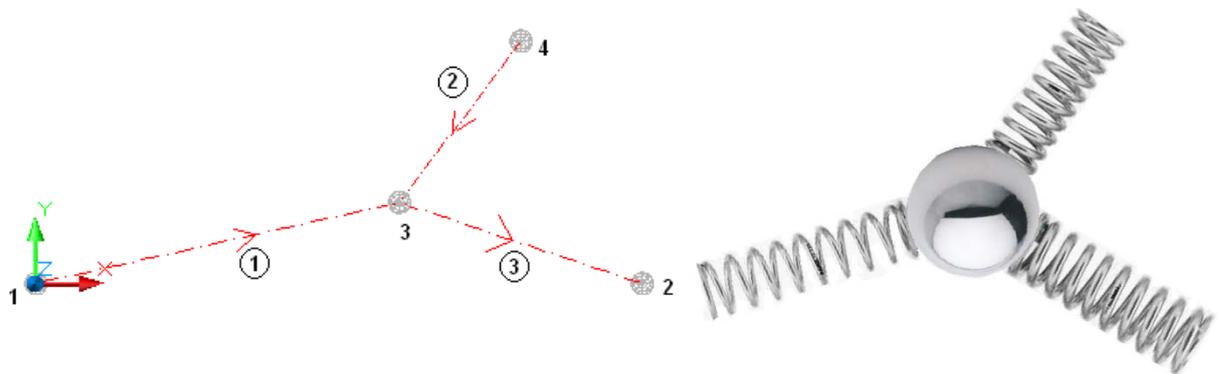


Fig. 3.01: Símil de una estructura simple de cuatro nodos con un sistema de muelles y bolas

Cuanto mayor sea la densidad de fuerza de la rama mayor será la resistencia del muelle y menor será la deformación del mismo a causa del peso que soporta. Así es posible obtener formas muy diversas con la simple modificación de este parámetro. En el caso de la forma catenaria podemos obtener mayor altura con la modificación del tipo de muelle empleado.

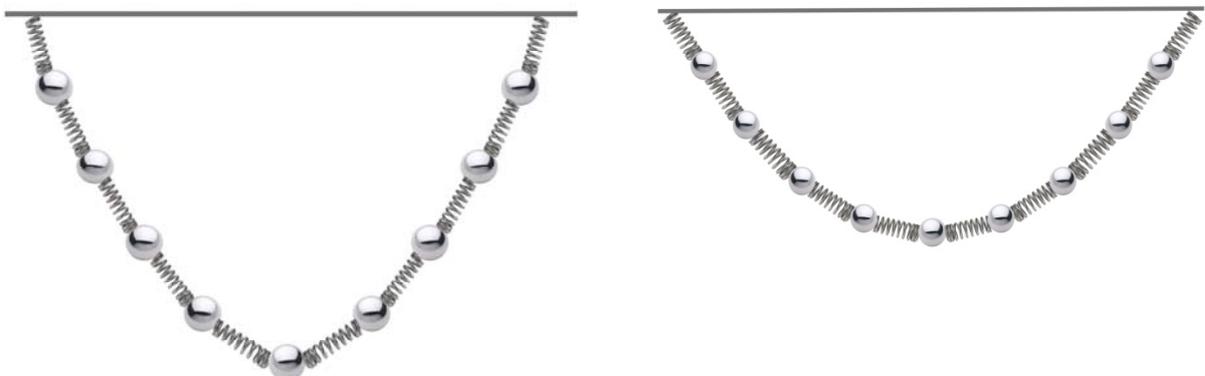


Fig. 3.02: Cambio de la forma catenaria al aumentar la constante K del muelle empleado

La forma de obtener estructuras simétricas con la forma deseada es agrupar estas densidades de fuerza según pertenezcan a un anillo o a una rama radial o de unión.

En las estructuras abiertas tipo bóveda el paralelismo de los anillos se conseguirá a través del uso de iguales densidades de fuerza para las ramas que unen los arcos entre sí con un valor muy bajo, casi nulo. Como ejemplo en la figura siguiente se muestra como se pierde el paralelismo de los arcos o anillos con la modificación de un solo valor en las densidades de fuerza radiales (densidades de fuerza de las ramas que unen dos anillos). Asimismo esta modificación afecta a los anillos contiguos.

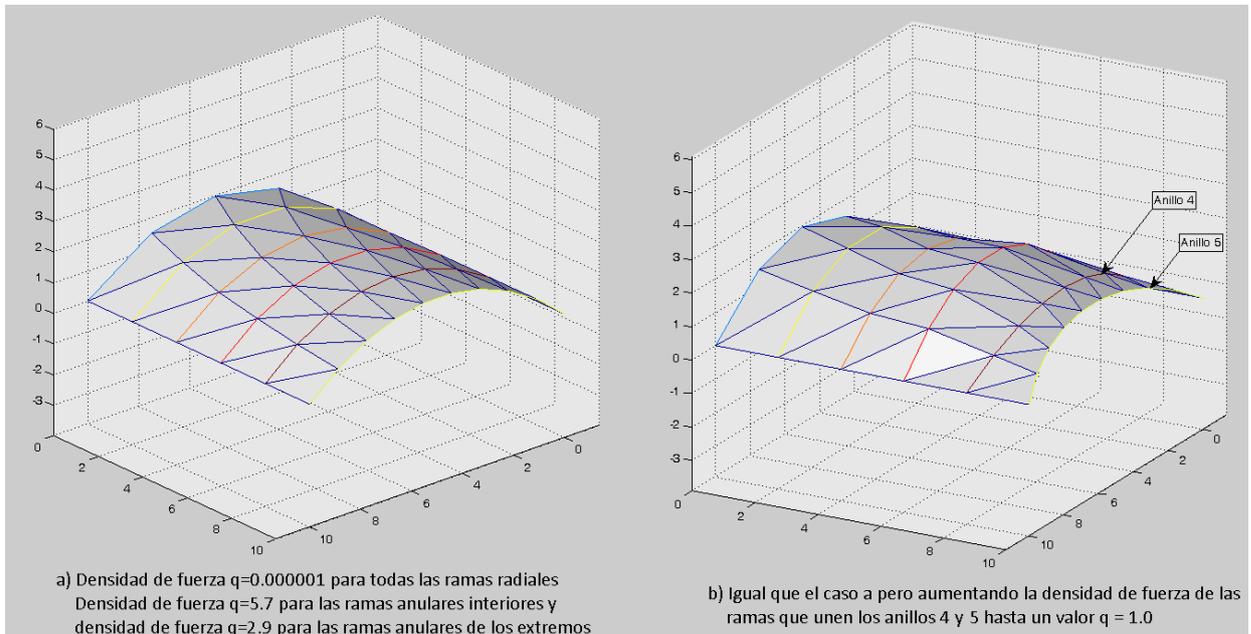


Fig. 3.03: Pérdida del paralelismo de los arcos con la modificación de las densidades de fuerza radiales

En cambio, modificando las densidades de fuerza de los anillos o arcos en las estructuras abiertas conseguiremos aumentar la altura de la bóveda. La densidad de fuerza de los arcos extremos, deberá de ser siempre la mitad de la densidad de fuerza de los anillos centrales puesto que estos últimos soportan el doble de peso.

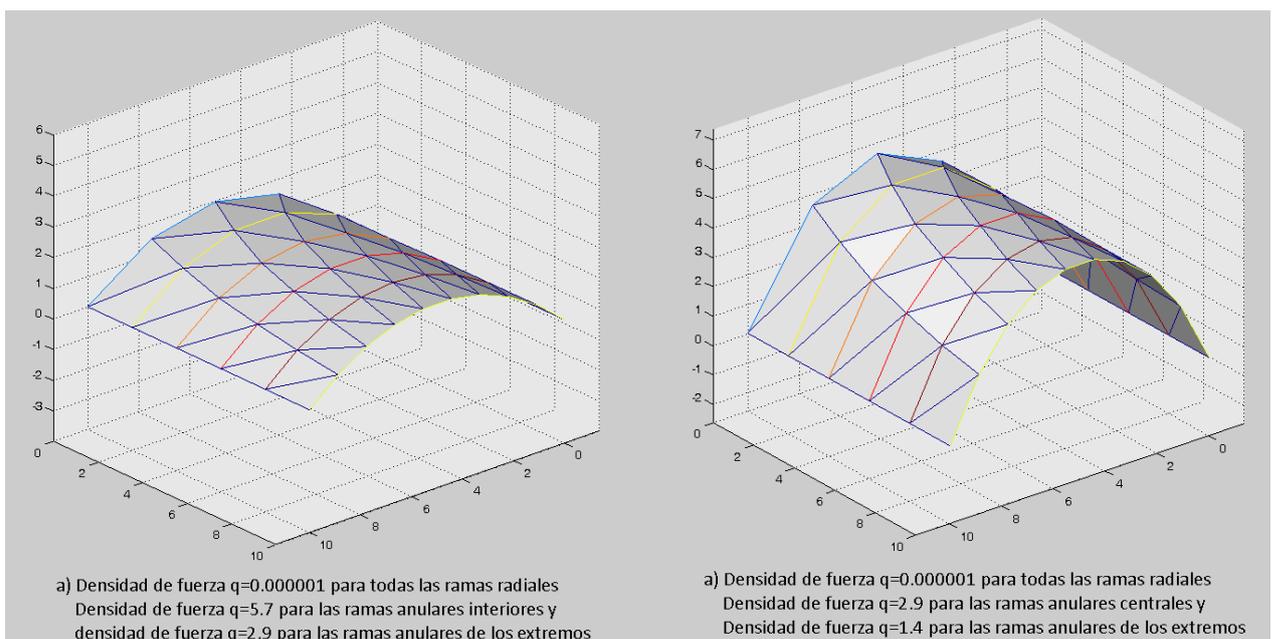
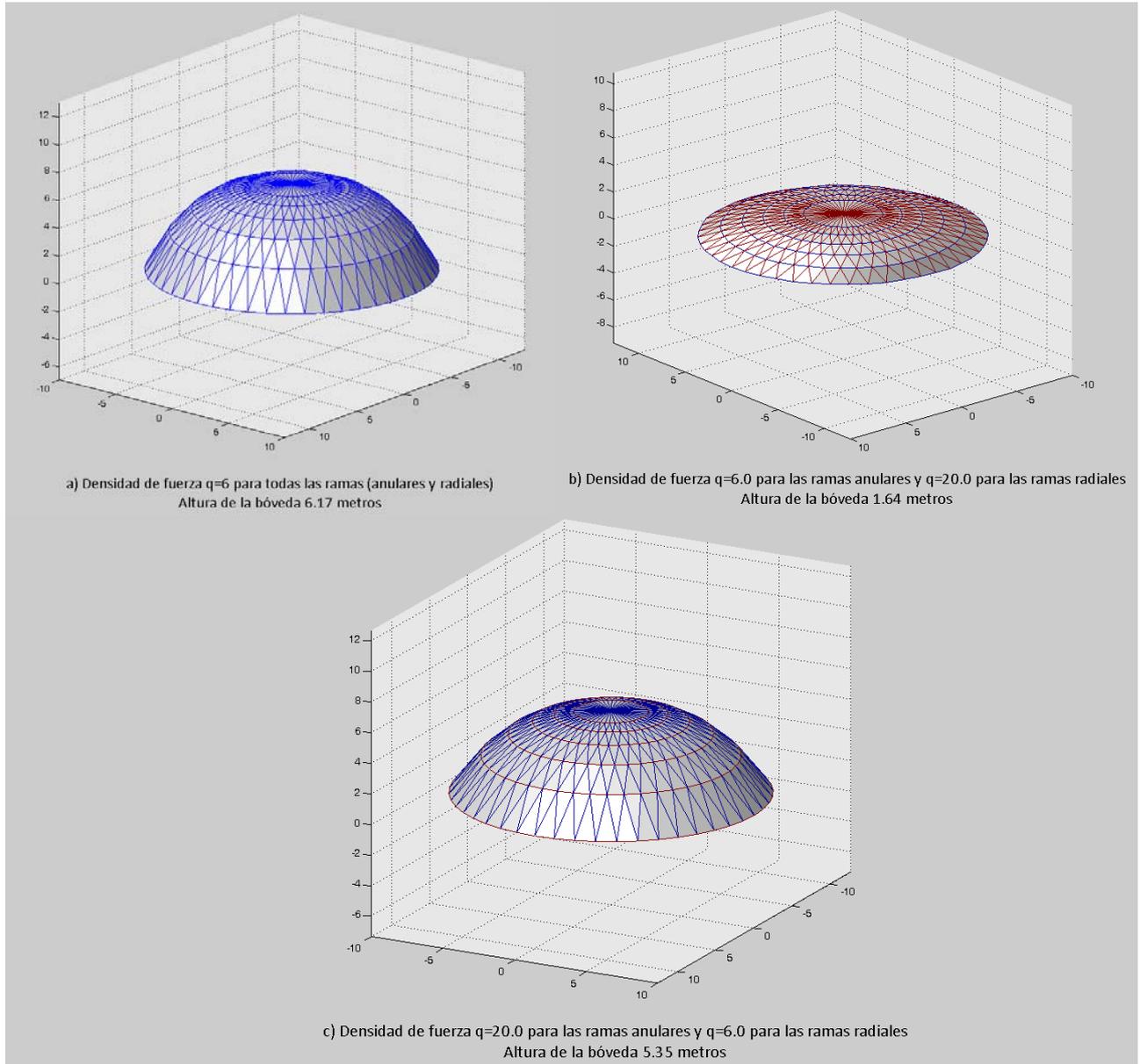


Fig. 3.04: Cambio de altura de los arcos con la modificación de las densidades de fuerza anulares.

Intuitivamente todo esto se puede deducir utilizando el símil de bolas-muelles con forma catenaria. Utilizando muelles de mayor resistencia se alcanzará menor separación entre las masas.

Análogamente para las mallas cerradas, tipo cúpula, las ramas radiales son las que modifican la altura de la bóveda mientras que las ramas anilladas controlan la forma más o menos abierta de la cúpula sin afectar en gran medida su altura.



4.- MÉTODO DE ESTIMACIÓN DE LAS DENSIDADES DE FUERZA PARA LA OBTENCIÓN DE FORMAS DE EQUILIBRIO DESEADAS EN LAS ESTRUCTURAS DE COMPRESIÓN.

El arquitecto o ingeniero proyectista, parte generalmente de un diseño preconcebido o conoce unas dimensiones o limitaciones que ha de cumplir necesariamente su obra. Aunque resulte intuitivo la utilización de las densidades de fuerza en la obtención de formas de equilibrio deseadas resulta de gran utilidad conocer un orden de magnitud de las mismas en el empleo del Método de Densidad de Fuerzas con Mallado Topológico y Peso Propio.

Si se analizan las formas más habituales de estructuras de compresión, bóvedas y cúpulas, podemos distinguir la forma catenaria como parte integrante de todas ellas. Incluso podemos generar estas formas con la simple traslación o giro de línea catenaria o funicular.

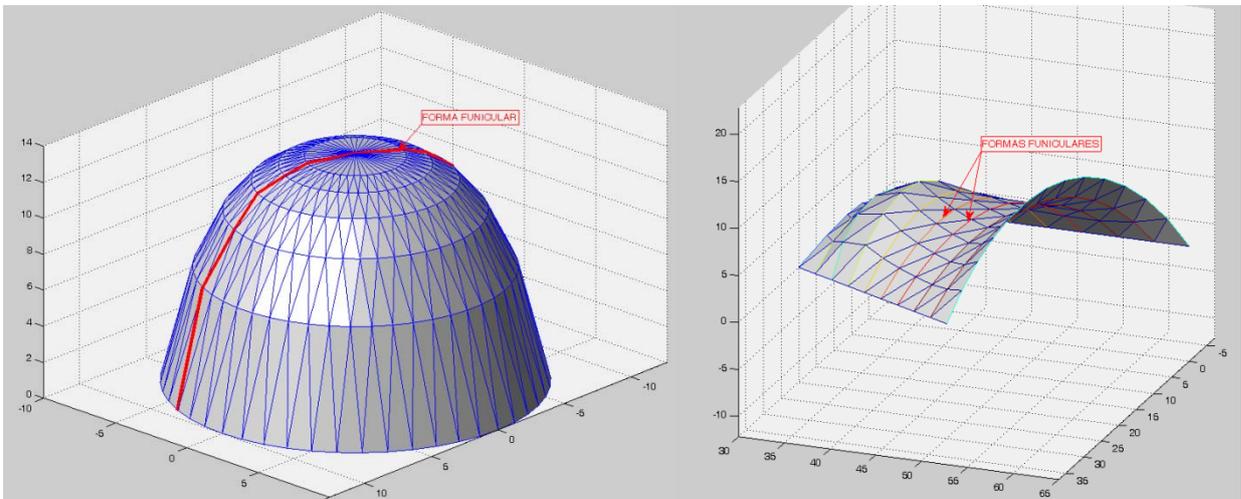


Fig. 4.1: Identificación de curvas funiculares en cúpulas y bóvedas (mallas cerradas y abiertas)

Como ya se ha visto en el apartado 2.3.1., las curvas catenarias y funiculares tienen una fórmula hoy en día conocida que nos permite dibujar la misma partiendo de tres puntos conocidos. Se podría por tanto obtener la forma de una catenaria con peso unitario λ , que parte de dos puntos fijos separados entre sí una distancia a , y que tiene una altura determinada, obteniendo previamente la componente de la tensión horizontal a la que están sometidos todos sus puntos a través de la ecuación:

$$\frac{T_0}{\lambda} \cosh \left[\frac{\lambda a}{2T_0} \right] - \frac{T_0}{\lambda} - h = 0 \tag{4.1}$$

Aunque quizás resulte menos práctico también podríamos obtener este valor de T_0 conociendo longitud L de la catenaria:

$$L = \frac{2T_0}{\lambda} \sinh \left[\frac{\lambda a}{2T_0} \right] \tag{4.2}$$

Resolviendo las ecuaciones 4.2 y 4.1 podemos conocer el valor del parámetro g definido como:

$$g = \left[\frac{\lambda}{2T_0} \right] \tag{4.3}$$

Una vez obtenido este valor de g la forma de la catenaria se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$y = \frac{1}{2g} \{ \cosh[g \cdot (2x - a)] - \cosh[g \cdot a] \} \quad (4.4)$$

Si se compara la forma de la catenaria obtenida a través de este método con la sección de nuestra cúpula o bóveda calculada mediante el MDF-MT-PP, utilizando el programa Gaudí, observamos unos resultados sorprendentes. Con los mismos puntos fijos e igual perímetro o altura, comprobaremos que existe una buena coincidencia entre ambas formas. Las diferencias pueden corregirse modificando ligeramente las densidades de fuerza empleadas para los anillos.

Como ejemplo, si se considera una cúpula con veinte metros de diámetro e igual densidad de fuerza para todas sus ramas, de valor $q=8$, la forma obtenida presenta una sección radial con una altura de 4,283 metros.

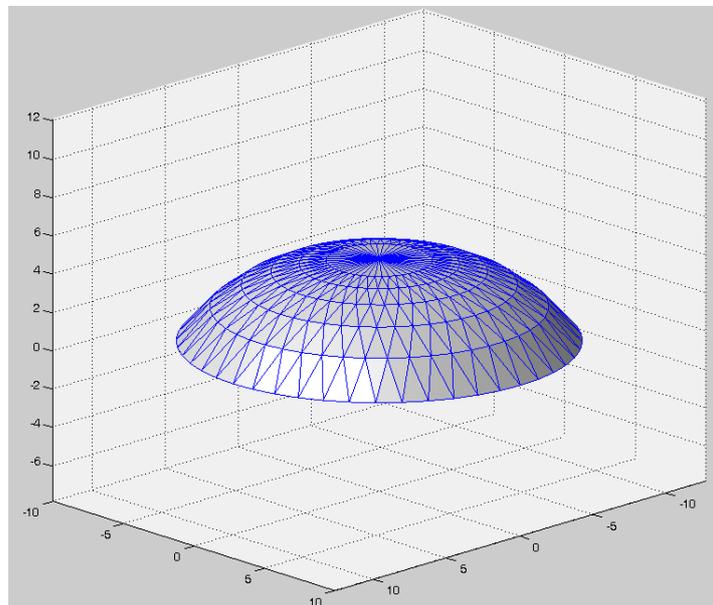


Fig. 4.2: Ejemplo propuesto: Cúpula con $q=8.0$ para todas las ramas (radiales y anulares)

La intersección con un plano radial facilita una curva funicular que si se compara con la curva catenaria que posee la misma altura podemos comprobar su aproximación.

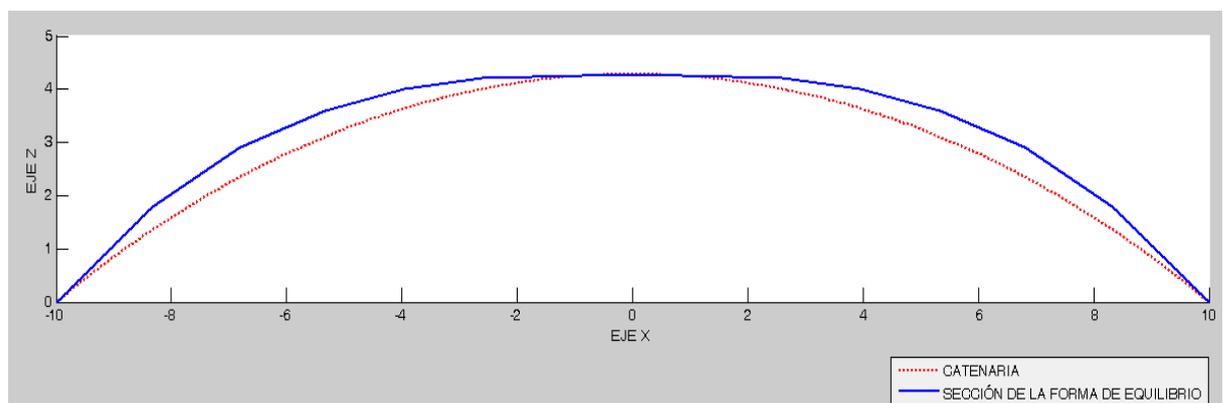


Fig. 4.3: Comparación de la sección radial de la cúpula ejemplo con la curva catenaria de igual altura

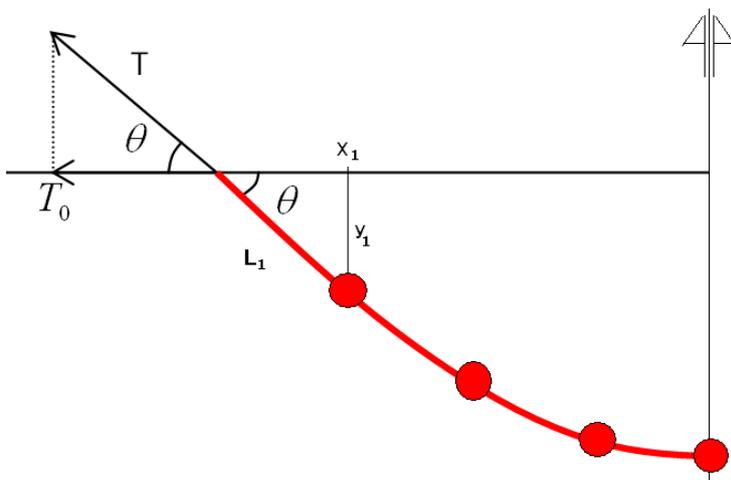
La parte esencial de este método radica en descifrar el valor de la densidad de fuerza de la forma catenaria calculada para después introducirla en el MDF-MT-PP obteniendo una forma de equilibrio con la altura o perímetro deseado, próximo al de la catenaria.

Pero esto no resulta tan sencillo como puede parecer en un primer momento debido a que una catenaria con peso específico constante, no posee la misma densidad de fuerza en todos sus puntos sino que esta varía desde un extremo hasta el otro de la misma. Esto es así debido a que la tensión en la catenaria varía en cada punto y la densidad de fuerza, definida como tensión dividida por la longitud, lógicamente varía con la primera.

No ocurre lo mismo curva funicular en la que, al poder utilizar masas de distinto tamaño o peso, podemos conseguir la misma densidad de fuerza en todos sus ramas. Sin embargo el empleo de diversas masas complicaría el método de forma que no sería apropiado para el fin que se busca: obtener el parámetro de densidad de fuerza de una forma rápida y sencilla.

Por este motivo acudimos a la curva catenaria, tomamos el valor de la densidad de fuerza en sus extremos y lo adoptamos para nuestro cálculo con MDF-MT-PP. Como se podrá comprobar a continuación resulta un método rápido y bastante aproximado.

Conociendo el valor de la componente horizontal de la tensión T_0 , que conforme lo estudiado en el apartado 2.3.1. permanece constante a lo largo de toda la curva y, puesto que conocemos la forma exacta de la catenaria, podemos saber el ángulo formado en el extremo y deducir el valor de la tensión mediante la siguiente expresión:



$$T = \frac{T_0}{\cos \theta} \quad (4.5)$$

Donde θ se puede obtener de forma aproximada a partir de valores de x_1 e y_1 que corresponden a la coordenada de la primera masa:

$$\cos \theta = \frac{x_1}{L_1}$$

El valor de x_1 se puede calcular mediante la expresión:

$$x_1 = \frac{a}{N} \quad (4.6)$$

Siendo N el número de ramas de la curva funicular.

Por otra parte, sustituyendo en la ecuación (4.3) obtendríamos el valor de y_1 :

$$y_1 = g \left\{ \cosh \left[\frac{1}{2g} \cdot (2x - a) \right] - \cosh \left[\frac{a}{2g} \right] \right\} \quad (4.7)$$

Por lo que podría obtenerse la densidad de fuerza de la catenaria en su origen como:

$$q' = \frac{T}{L_1} = \frac{T_0}{L_1 \cdot \cos \theta} = \frac{T_0 \cdot L_1}{L_1 \cdot x_1} = \frac{T_0}{x_1} \quad (4.8)$$

Por último el valor de T_0 se puede obtener conociendo λ (peso por unidad de longitud de la catenaria) teniendo en cuenta que por equilibrio de fuerzas verticales en el apoyo:

$$T_0 = \left[\frac{\lambda \cdot L}{2 \cdot \tan \theta} \right] \quad (4.9)$$

A través de las ecuaciones 4.1 (o 4.2), 4.6, 4.7 y 4.8, conociendo los valores de h , a y λ de la catenaria se pueden obtener valores de densidades de fuerza q' próximos a los valores de fuerza de la estructura q que proporcionan idénticas características, altura o longitud perimetral, a la sección de la estructura y a la catenaria.

Pero no se debe de olvidar que la catenaria no posee un parámetro q' constante sino que su valor varía a lo largo de la curva. En cambio la curva funicular a aproximar si posee un único valor de q para todas las ramas que la componen. Es por esto que el método no deja de ser una aproximación y dependiendo del punto de la catenaria donde se calcule su densidad de fuerza q' esta se aproximará mejor a la densidad de fuerza correspondiente a la curva funicular correspondiente.

A continuación se presenta un algoritmo realizado en lenguaje Matlab© que calcula la densidad de fuerza necesaria para obtener la altura deseada de una cúpula o bóveda a través de este Método de aproximación Catenaria, en adelante MAC:

```
%% MÉTODO DE APROXIMACIÓN CATENARIA (MAC)
%% PARA OBTENCIÓN DE DENSIDAD DE FUERZA
%% Manuel Cañete Güeto 29/06/12
%% Programa que estima la Densidad de fuerza de una
%% cúpula o bóveda a partir de la altura de la misma.
%%
%% El programa necesita como "inputs":
%% - Distancia entre los apoyos
%% - Altura de la cúpula o bóveda
%% - Número de ramas o discretización realizada
%% - Peso por unidad de longitud de la catenaria

%% Limpieza de memoria
clc
clear all
%% ENTRADA DE DATOS
% Distancia entre los apoyos
a=20;
%Altura de la bóveda o cúpula deseada
h=40;
%Número de Nodos de la catenaria
N=12;
%Peso por unidad de longitud (parámetro landa)
r=0.98;
%% CÁLCULOS
%Cálculo del coeficiente g=landa/(2*T0)
syms g
g=solve(1/2/g*cosh(g*a)-1/2/g-h,g);
%Cálculo y dibujo de la catenaria
x=0:0.1:20;
```

```

y = 1/2/g*(cosh(g*(2*x-a))-cosh(g*a));
plot(x,y);
%Cálculo de la longitud de la catenaria
L=1/g*sinh(g*a);
%Cálculo del la densidad de fuerza
x1 = a/N;
y1 = 1/2/g*(cosh(g*(2*x1-a))-cosh(g*a));
teta = atan(y1/x1);
T0=landa*L/2/tan(teta);
q=abs(T0/x1)

```

El parámetro λ definido como peso unitario de la catenaria se puede utilizar como herramienta para calibrar este algoritmo. Puesto que existe una única catenaria para una altura y apoyos determinados, variando el parámetro λ se puede obtener el valor de T_0 que se desee siempre que el parámetro $g = \lambda / (2T_0)$ permanezca constante. Esto implica que una misma catenaria puede tener la densidad de fuerzas que se desee simplemente modificando su peso unitario λ . Si se tiene con el programa Gaudí un primer resultado mediante el cual, con una densidad de fuerza q_1 se converge a una cúpula o bóveda de altura h_1 se puede calcular el peso por unidad de longitud de la catenaria λ a través de las ecuaciones:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \tan \theta \cdot T_0}{L} \quad (4.10)$$

$$T_0 = q_1 \cdot x_1 \quad (4.11)$$

$$L = \frac{1}{g} \sinh [g \cdot a] \quad (4.12)$$

Donde los valores de g y x_1 se pueden obtener a través del valor conocido de h_1 , a y N mediante las ecuaciones 4.1 y 4.6.

Se propone el siguiente algoritmo que calcula el valor de λ a introducir en el MAC a partir de una forma de equilibrio obtenida (Proceso de Calibración):

```

%%           CÁLCULO DEL PESO UNITARIO DE LA CATENARIA
%%           CALIBRACIÓN DE MAC
%%           Manuel Cañete Güeto 29/06/12
%% Programa que calcula el valor del peso unitario de una catenaria
%% equivalente a la sección funicular de una cúpula o bóveda de compresión
%%
%% El programa necesita como "inputs":
%% - Altura de la cúpula o bóveda
%% - Distancia entre los apoyos
%% - Número de ramas o discretización realizada
%% - Densidad de fuerzas empleada en el cálculo de la forma de % equilibrio

%% Limpieza de memoria
clc
clear all
%% ENTRADA DE DATOS
%Altura de la bóveda o cúpula obtenida
h=4.283;
% Distancia entre los apoyos
a=20;
%Número de Ramas
N=12;
%Densidad de fuerza utilizada
q=8;
%% CÁLCULOS

```

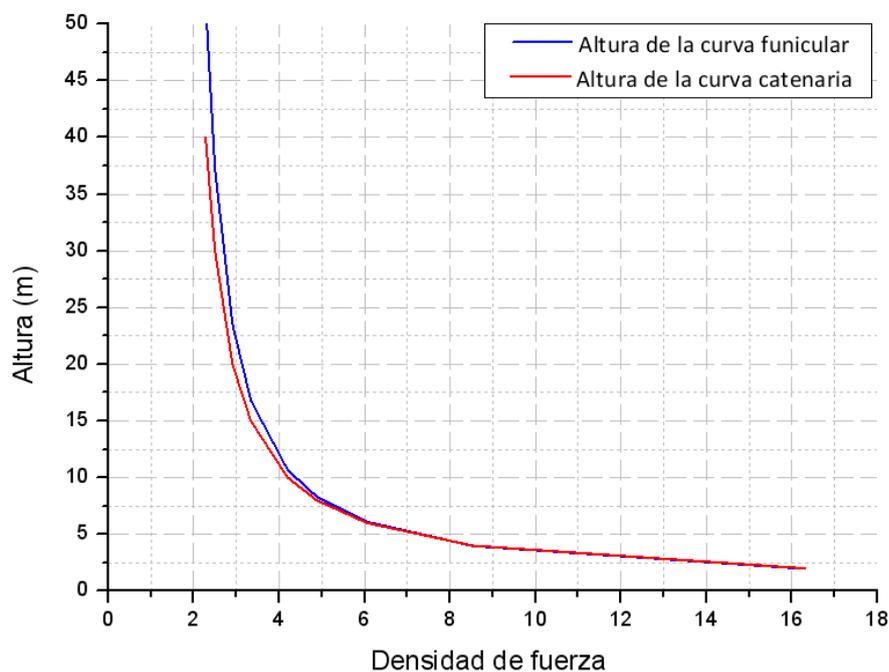
```

%Cálculo del coeficiente  $g=r/(2*T0)$ 
syms g
g=solve(1/2/g*cosh(g*a)-1/2/g-h,g);
%Cálculo de la longitud de la catenaria
L=1/g*sinh(g*a);
%Cálculo del ángulo teta
x1 = a/N;
y1 = 1/2/g*(cosh(g*(2*x1-a))-cosh(g*a));
teta = atan(y1/x1);
%Cálculo de la componente horizontal de la tensión (T0)
T0=q*x1;
%Cálculo del peso unitario de la catenaria (landa)
landa= abs(2*tan(teta)*T0/L)
    
```

Aplicando el MAC al ejemplo de la cúpula de 20 m de diámetro de base para diferentes alturas de la cúpula y calibrado previamente para los valores de $q=8$ y $h=4.283$ calculados previamente con Gaudí ($\lambda=0.98$) se obtienen los siguientes valores de densidad de fuerza aproximada q' :

| ALTURA DE LA CÚPULA DISEÑADA | DENSIDAD DE FUERZAS (q') OBTENIDA CON EL MAC PARA ESTA ALTURA | ALTURA DE LA CÚPULA OBTENIDA CON EL PROGRAMA GAUDÍ PARA $q=q'$ |
|------------------------------|---|--|
| 2 | 16.31 | 1.95 |
| 4 | 8.53 | 3.97 |
| 6 | 6.06 | 6.09 |
| 8 | 4.88 | 8.32 |
| 10 | 4.20 | 10.67 |
| 15 | 3.34 | 16.81 |
| 20 | 2.91 | 23.57 |
| 30 | 2.50 | 37.24 |
| 40 | 2.28 | 52.14 |

APROXIMACIÓN DEL MÉTODO



Como muestra el gráfico anterior, a través del MAC puede obtenerse una muy buena aproximación y sólo existen diferencias considerables para valores de densidad de fuerza muy alejados al de la calibración realizada ($q=8$). En estos casos, si se desea, se puede realizar una segunda calibración evitando así un mayor número de tanteos que habría que realizar con el programa Gaudí para lograr el objetivo: la obtención de las características geométricas del diseño.

El caso de las bóvedas es similar al de las cúpulas pero teniendo en cuenta que las densidades obtenidas han de aplicarse a las ramas anulares únicamente. Las densidades de las conexiones radiales, conforme a lo explicado en el apartado anterior, deben de introducirse con valores próximos a cero, a menos que no se desee mantener el paralelismo de los arcos. También es importante recordar que para los arcos inicial y final la densidad de fuerza será la mitad que en el resto de arcos del mallado puesto que soportan la mitad del peso propio.

5.- APLICACIÓN DEL MÉTODO PROPUESTO A UN CASO PARTICULAR

Alumnos del curso 2011-2012 del Máster de Estructuras de la Universidad de Granada han desarrollado un **Proyecto de Gran Estructura** a partir del diseño inicial que muestra la figura siguiente. El conjunto se compone de una serie de estructuras de compresión básicas abiertas (tipo bóveda) que se integran en una estructura cerrada central (tipo cúpula).

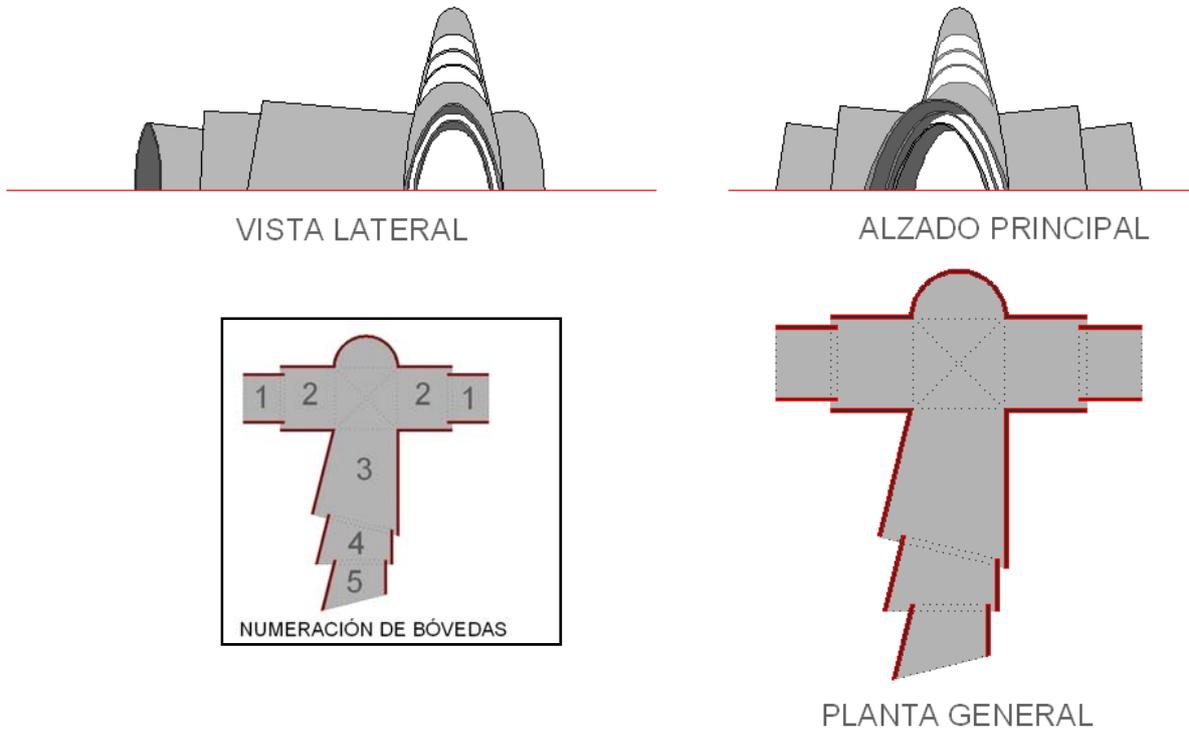


Fig. 5.1: Diseño general del Proyecto de Gran Estructura y esquema con identificación de bóvedas principales

En este apartado se obtendrán, a través del método de aproximación catenaria (MAC) descrito en el apartado anterior, las densidades de fuerza de las cinco bóvedas principales de la estructura cuyas características geométricas se definen a continuación.

| BÓVEDA | ALTURA DE ARCOS | | ANCHURA DE ARCOS | |
|--------|-----------------|-------|------------------|-------|
| | INICIAL | FINAL | INICIAL | FINAL |
| 1 | 13.65 | 14.66 | 15.00 | 15.00 |
| 2 | 17.08 | 19.00 | 20.00 | 20.00 |
| 3 | 17.08 | 19.77 | 27.06 | 27.89 |
| 4 | 17.03 | 17.33 | 20.25 | 23.75 |
| 5 | 13.43 | 14.66 | 20.37 | 15.63 |

| BÓVEDA | COORDENADAS LOCALES DE LOS VÉRTICES DE APOYO | | | | | | | |
|--------|--|------|-------|------|------|-------|-------|-------|
| | X1 | Y1 | X2 | Y2 | X3 | Y3 | X4 | Y4 |
| 1 | 0.00 | 0.00 | 13.50 | 0.00 | 0.00 | 15.00 | 13.50 | 15 |
| 2 | 0.00 | 0.00 | 18.00 | 0.00 | 0.00 | 20.00 | 18.00 | 20 |
| 3 | 0.00 | 0.00 | 35.00 | 0.00 | 6.76 | 27.06 | 35.00 | 20 |
| 4 | 0.00 | 0.00 | 11.50 | 0.00 | 0.00 | 23.75 | 16.41 | 19.65 |
| 5 | 5.00 | 0.00 | 16.50 | 0.00 | 0.00 | 19.75 | 16.50 | 15.63 |

En primer lugar se obtiene con el programa Gaudí una primera forma de equilibrio para cada bóveda. Los inputs establecidos en el programa y las alturas establecidas son:

| DATOS INTRODUCIDOS EN PROGRAMA GAUDÍ | | | | | | |
|--------------------------------------|-------------|--------------------|-------|-----------------------------|-------|---------------------------|
| BÓVEDA | Nº DE ARCOS | RAMAS POR ARCO (N) | | DENSIDAD DE FUERZA EN ARCOS | | DENSIDAD DE FUERZA RADIAL |
| | | INICIAL | FINAL | INICIAL | FINAL | |
| 1 | 2 | 75 | 76 | 400 | 411 | 1.00E-10 |
| 2 | 2 | 75 | 76 | 450 | 459 | 1.00E-10 |
| 3 | 2 | 75 | 76 | 950 | 950 | 1.00E-10 |
| 4 | 2 | 75 | 76 | 950 | 950 | 1.00E-10 |
| 5 | 2 | 75 | 76 | 600 | 600 | 1.00E-10 |

| BÓVEDA | ALTURA OBTENIDA. PROGRAMA GAUDÍ (m) | |
|--------|-------------------------------------|------------|
| | ARCO INICIAL | ARCO FINAL |
| 1 | 18.34 | 18.44 |
| 2 | 36.23 | 36.95 |
| 3 | 29.92 | 29.48 |
| 4 | 7.46 | 7.59 |
| 5 | 11.33 | 11.19 |

Con estas densidades de fuerza y alturas obtenidas se procede a calibrar nuestro algoritmo calculando el peso unitario de cada arco catenario. Se utiliza para ello el algoritmo propuesto en el apartado anterior que arroja los siguientes resultados:

| BÓVEDA | PESO UNITARIO DE LA CATENARIA (N/m) | |
|--------|-------------------------------------|------------|
| | ARCO INICIAL | ARCO FINAL |
| 1 | 28.03 | 28.5 |
| 2 | 37.18 | 37.45 |
| 3 | 63.5 | 61.34 |
| 4 | 31.93 | 28.14 |
| 5 | 27.15 | 31.4 |

Introduciendo estos pesos unitarios junto con el resto de inputs necesarios en el algoritmo MAC se obtienen directamente las densidades de fuerza que es preciso aplicar a cada rama para lograr la bóveda diseñada.

| BÓVEDA | DENSIDADES DE FUERZA MAC | |
|--------|--------------------------|---------|
| | INICIAL | FINAL |
| 1 | 462.48 | 459.01 |
| 2 | 634.67 | 611.99 |
| 3 | 1293.27 | 1179.03 |
| 4 | 549.63 | 531.73 |
| 5 | 538.21 | 516.54 |

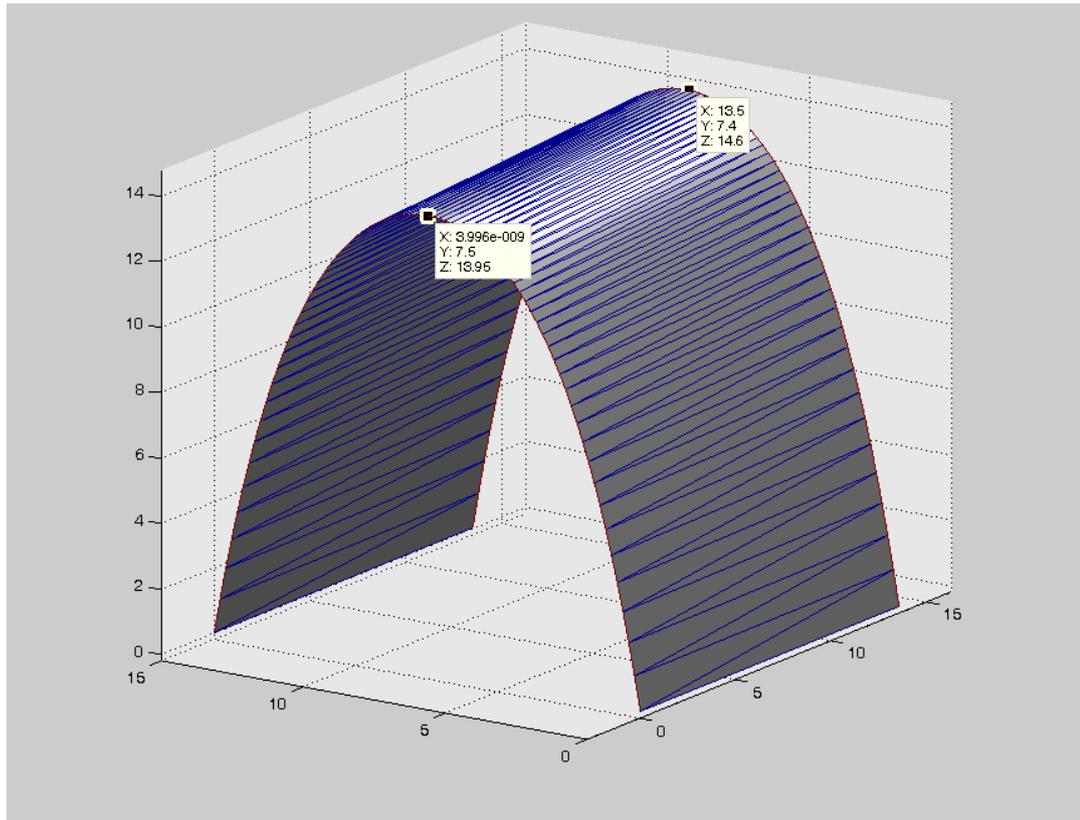


Fig. 5.2: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 1

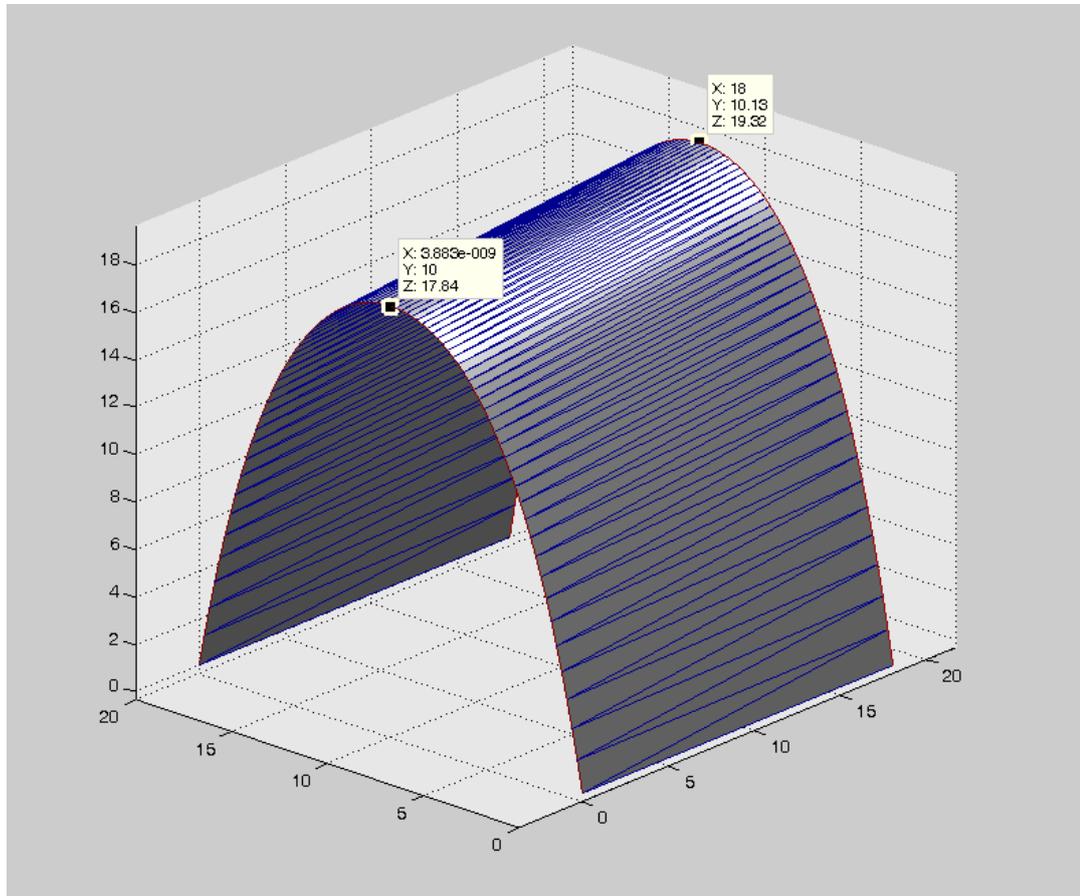


Fig. 5.3: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 2

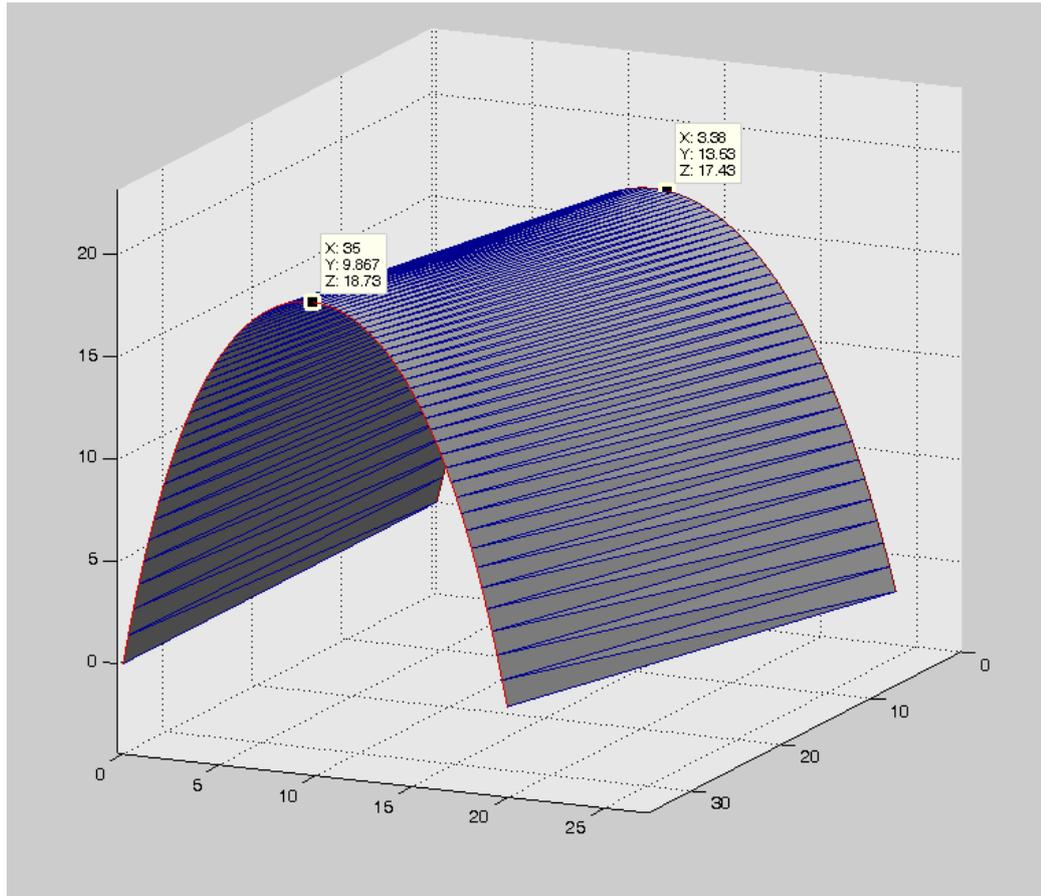


Fig. 5.4: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 3

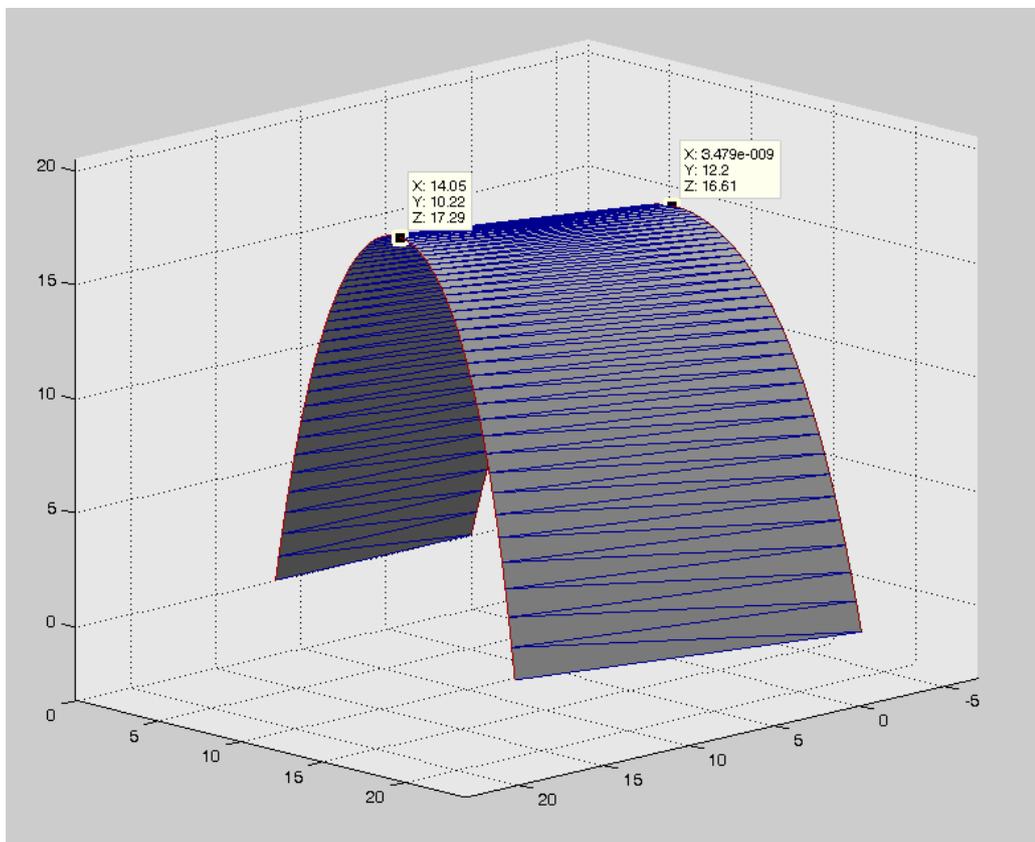


Fig. 5.5: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 4

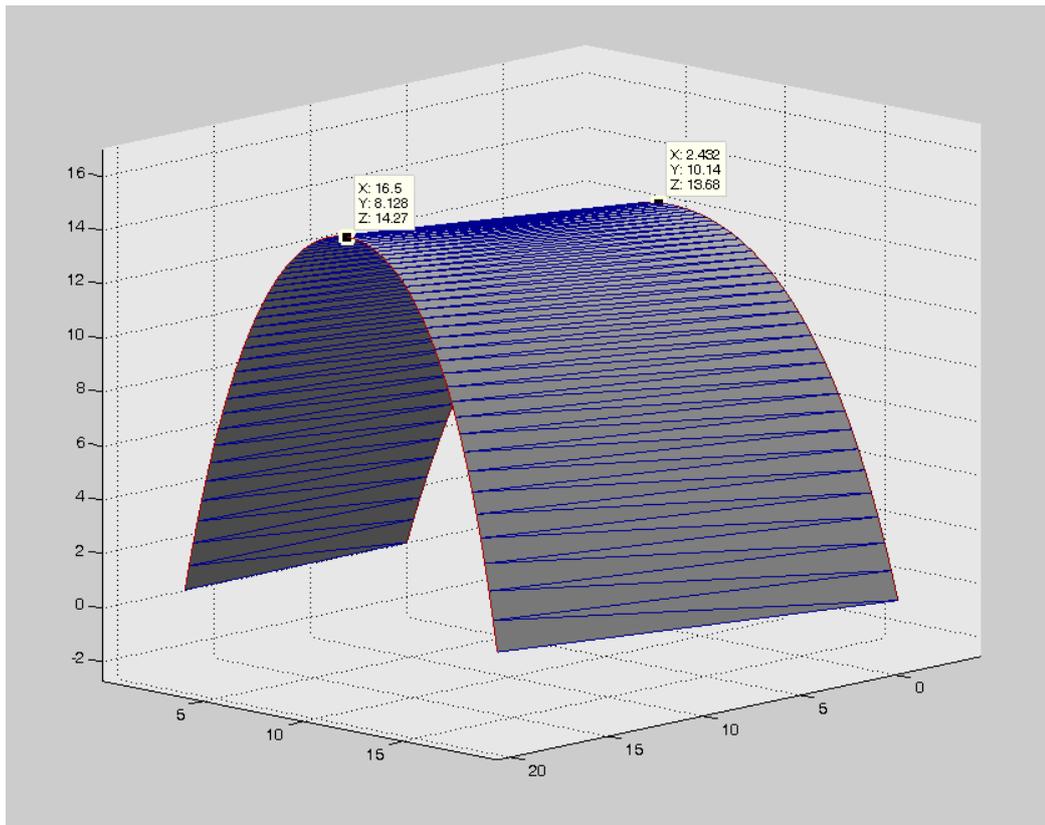


Fig. 5.6: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 5

Comparando las alturas obtenidas con las originales del proyecto se pueden comprobar las desviaciones o errores cometidos con este método.

| BÓVEDA | ALTURA DE ARCOS DE DISEÑO | | ALTURA DE ARCOS CALCULADA | | ERROR COMETIDO | |
|--------|---------------------------|-------|---------------------------|-------|----------------|--------|
| | INICIAL | FINAL | INICIAL | FINAL | INICIAL | FINAL |
| 1 | 13.95 | 14.66 | 13.95 | 14.60 | 0.00% | -0.41% |
| 2 | 17.08 | 19.00 | 17.84 | 19.32 | 4.45% | 1.68% |
| 3 | 17.08 | 19.77 | 17.43 | 18.73 | 2.05% | -5.26% |
| 4 | 17.03 | 17.33 | 16.61 | 17.29 | -2.47% | -0.23% |
| 5 | 13.43 | 14.66 | 13.68 | 14.27 | 1.86% | -2.66% |

Las desviaciones no superan el 5.3 % por lo que no se considera necesario realizar una segunda iteración.

6.- CONCLUSIONES

El campo de las estructuras tensadas ha evolucionado de manera espectacular en los últimos años. Con la utilización de diferentes materiales y nuevas patentes constructivas, ha logrado alcanzar una importante cuota de mercado dentro de la arquitectura contemporánea. Hoy en día el término engloba sistemas estructurales sustancialmente diferentes, incorporando a las ya conocidas membranas tensadas, las mallas de cables y las estructuras neumáticas.

Existe un importante nexo de unión entre este tipo de elementos y las clásicas estructuras de compresión obtenidas a partir de formas antifuniculares. Desde el punto de vista del cálculo estructural se trata de un mismo concepto y la ausencia de momentos flectores permite emplear los mismos métodos de cálculo para ambos casos.

El cálculo de este tipo de estructuras se aborda resolviendo en primer lugar la forma de equilibrio que adopta el conjunto sometido a su propio peso y con las condiciones de contorno establecidas. El Método de Densidad de Fuerzas (MDF) permite obtener la forma de equilibrio de este tipo de estructuras de una forma sencilla gracias a la potencia de cálculo informático disponible hoy en día. Esto ha permitido mejorar el método con la consideración del peso propio (PP) e implementarlo en un mismo algoritmo junto con técnicas de automallado como el Mallado Topológico (MT). Con este tipo de algoritmos MDF-MT-PP, se simplifica la obtención de la primera forma de equilibrio a la elección de un parámetro denominado Densidad de Fuerza.

El concepto de Densidad de Fuerzas adquiere un papel fundamental en la forma de equilibrio obtenida. Partiendo de unas condiciones de contorno definidas, este parámetro nos permite modificar la forma de equilibrio hasta conseguir la geometría deseada. No obstante, el proceso no resulta nada sencillo. Con la consideración del peso propio el sistema de ecuaciones que plantea el MDF pierde su linealidad con lo que no siempre existe una solución al problema. Además no es fácil relacionar el valor de la densidad de fuerzas de determinados elementos con la forma geométrica que se busca.

Mediante una serie de ejemplos sencillos, se han descrito diversos métodos de optimización de las densidades de fuerza para obtener formas de equilibrio similares a las preconcebidas por el diseñador o proyectista. Partiendo de las ecuaciones de la curva catenaria, se ha propuesto un algoritmo que permite dimensionar estas formas calculando las densidades de fuerza necesarias.

Finalmente el algoritmo propuesto ha sido testado convenientemente, obteniendo resultados muy satisfactorios que simplifican el trabajo de aproximación a la forma de equilibrio buscada.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Mecánica de las estructuras antiguas o cuando las estructuras no se calculaban. Antonio- José Mas-Guindal Lafarga. Ed. Minilla-lería. Enero 2011.
2. Arquitectura Textil. Guía Europea de Diseño de las Estructuras Superficiales Tensadas. Brian Forster y Marijke Mollaert. Ed. Minilla-lería. Abril 2009.
3. Cubiertas Colgantes. Frei Otto. Ed. Labor. 1962
4. Barnes, M. R. (1.999). "Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation". *International Journal of Space Structures*, 14(2), 89-104.
5. Carreira Valiño, L. (2.005). Sistemas para la medición del estado de tensiones en membranas textiles. (Tesis de Máster – Universitat Politèctica de Catalunya), [En línea]. Disponible en: <http://hdl.handle.net/2099.1/3380>
6. Glaeser, L. (1.976). *The Work of Frei Otto and His Teams 1.955-1.976*. Stuttgart: Institut fÿr Leichte Flachentragwerke.
7. Gosling, P.D. y Chivapraphanant, J. (2.002) "A versatile cutting pattern methodology for woven fabrics". *Proc. Int. Symposium on Lightweight Structures in Civil Engineering*, Varsovia, Polonia, IASS.
8. Gründig, L., Ekert, L., and Moncrieff, E. (2.006) "Geodesic and Semi-Geodesic Line Algorithms for Cutting Pattern Generation of Architectural Textile Structures". *Proc. Asia-Pacific Conference on Shell and Spatial Structures*, Beijing, China, IASS.
9. Hernández-Montes, E., Jurado-Piña, R., and Bayo, E. (2.006) "Topological mapping for tension structures". *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 132(6), 970-977.
10. Ishii, K. (1.999). *Membrane Designs and Structures in the World*. Tokio: Shinkenchiku-sha.
11. Jurado-Piña, R., Hernández-Montes, E., and Gil-Martín, L. M. (2.009) "Topological mesh for shell structures". *Applied Mathematical Modelling*, 3(2), 948-958.
12. Kim, JY., Lee, JB. (2.002). "A new technique for optimum cutting pattern generation of membrane structures". *Engineering Structures*, 24(6), 745-756.
13. Leonard, J. W. (1.988). *Tension Structures*. New York: McGraw-Hill.
14. Levy, R., and Spillers, W. R. (2.004). *Analysis of geometrically nonlinear structures*, 2nd Ed., Londres: Chapman & Hall.
15. Linkwitz, K., and Schek, H. J. (1.971). "Einige Bemerkung von vorsgepannten Seilnetzkonstruktionen". *Ingenieur-archiv* 40, 145-158.
16. Linkwitz, K. (1.999). "About formfinding of double-curved structures", *Engineering Structures*, 21(8), August 1999, Pages 709-718,
17. Maurin, B., y Motro, R. (1.998). "The surface stress density method as a formfinding tool for tensile membranes". *Engineering Structures*, 20(8), 712-719.