Universidad de Granada

Tesis Doctoral

π-complementación y π-descomponibilidad en el contexto de las álgebras multiplicativamente semiprimas.

Programa Oficial de Doctorado en Matemáticas

Doctorando:

Raúl Roura Redondo

Director:

Juan Carlos Cabello Piñar

Departamento de Análisis Matemático

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Raúl Roura Redondo
D.L.: GR 994-2013
ISBN: 978-84-9028-496-4

Tesis doctoral dirigida por:

Juan Carlos Cabello Pinar

Profesor del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada.

Defendida por:

Raúl Roura Redondo

el día 3 de Diciembre de 2012, ante el Tribunal formado por:

Dr. D. Ángel Rodriguez Palacios (Presidente),
Dr. D. Amin Kaidi Lhachmi (Vocal),
Dr. D. José Antonio Cuenca Mira (Vocal),
Dr. D. Antonio Fernández López (Vocal),
Dr. D. Antonio Miguel Peralta Pereira (Secretario),

Obteniendo la calificación de APTO cum laude.

Índice general

Agradecimientos

Si el Señor no construye la casa
en vano se cansan los constructores.
Salmo 127

Al finalizar la elaboración de esta Memoria llega el momento de mirar atrás y de reflexionar sobre este tiempo y todo lo acontecido en él. Ha habido momentos difíciles en los que parecía que nunca llegaríamos a la meta, otros alentadores en los que todas esas dudas se disipaban, pero en todo momento ha sido imprescindible la ayuda de Dios poniendo en mi camino personas concretas que me han guiado y apoyado en este viaje.

Entre estas personas quiero destacar, en primer lugar a Juan Carlos Cabello por todo el tiempo que ha invertido en este proyecto quitándoselo en muchas ocasiones a su familia, por su profesionalidad investigadora y su paciencia infinita a la hora de resolver muchas de mis dudas. También agradezco a Miguel Cabrera la participación en la investigación que ha permitido la elaboración de esta Memoria, y que sólo su dedicación plena a la confección de una monografía le han impedido participar en la última fase de recopilación y organización de los resultados obtenidos.

Quiero extender mi más sincero agradecimiento al Departamento de Análisis Matemático, por permitirme formar parte de esa gran familia durante este tiempo, por cederme sus instalaciones y por poner a mi disposición todos los recursos necesarios.

Finalmente, no puedo dejar pasar la ocasión para expresar mi más sincera gratitud a mi mujer, Irene, por su apoyo incondicional y sus sacrificios para que este proyecto salga adelante. También quiero dedicarle esta memoria a mis hijos, Alba, Samuel, Raúl, Pablo, Jesús y Marcos que, a pesar de que son pequeños para comprender lo que ha significado este tiempo de trabajo, han sabido valorar la importancia del mismo y lo han tenido presente en sus oraciones.

Introducción

Historia, lenguaje y objetivos

El universo en el que nos vamos a mover está sustanciado por el concepto de álgebra, que no es otra cosa que un espacio vectorial, A, provisto de una aplicación bilineal $(a, b) \mapsto ab$ de $A \times A$ en A, a la que llamamos *producto* de A. En realidad, todo espacio vectorial puede verse como un álgebra sin mas que dotarlo del producto cero, las álgebras nacidas así reciben el nombre de *álgebras nulas*. Los ejemplos más familiares de álgebras no nulas son las álgebras de operadores, y en particular las álgebras de matrices. Todas ellas son asociativas ($(xy)z = x(yz)$). Sin embargo y pese a lo que podría pensarse en un primer momento, el interés por las álgebras no asociativas surge muy pronto. La formalización del concepto de número complejo y del uso de éstos, o más concretamente de su producto, para describir matemáticamente diversos entes físicos propios del plano, tales como la representación de las fuerzas mediante la Ley del Paralelogramo, o las rotaciones en el plano, urgen a W. R. Hamilton a buscar un equivalente de los números complejos en dimensión 3 que permita describir éstos y otros entes físicos propios del espacio. La persistente búsqueda, durante una década, finalizó en 1843 cuando, paradójicamente, en lugar de un sistema numérico de dimensión 3, W. R. Hamilton encontró uno de dimensión 4, a cuyos elementos llamó cuaterniones. Este descubrimiento permitió representar las rotaciones en el espacio, por lo que de inmediato encontraron aplicación en Electromagnetismo, así como en Dinámica de Fluidos. Fueron estos precedentes los que sirvieron de motivación para la búsqueda de nuevas generalizaciones del cuerpo de los números complejos y sus posibles geometrías asociadas. Esta búsqueda tuvo un hito importante en el descubrimiento de los **octoniones** (o números de Cayley), que pueden ser considerados como una **extensión no asociativa**, de dimensión ocho, de los cuaternios. Fueron descubiertos por J. T. Graves en 1843, e independientemente por A. Cayley, autor de la primera publicación sobre los mismos, datada en 1845. Posteriormente, la estructura de los octoniones fue clarificada por J. von Neumann en 1932. Por otra parte, el descubrimiento de las geometrías riemanianas, geometrías no homogéneas en las que las propiedades del espacio pueden diferir de un punto a otro, permitió a A. Einstein formular su Teoría de la Relatividad. Con ella se marca el inicio de la Mecánica Cuántica, disciplina que surge para justificar determinados fenómenos del mundo atómico y subatómico tales como la radiación del cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico, o el efecto Compton entre otros, que eran inexplicables con las leyes de la Física Clásica. Los Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica se establecieron en el *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* de J. von Neumann, en 1932. En esta obra, de capital importancia para la Física, se desarrolla la llamada Formulación Matemática de la Mecánica Cuántica, mediante una docena de postulados (según la formulación estándar), que ponen en plena equivalencia el modelo físico con el matemático. Así, los posibles estados físicos de un sistema cuántico se describen mediante un espacio de Hilbert, H, y los observables se representan por operadores lineales hermíticos de $L(H)$, cuyos valores propios asociados corresponden al valor del observable en dicho estado propio. Con el propósito de una mejor formalización de la noción de observable, en 1933 fueron introducidas por el físico P. Jordan las álgebras de Jordan [25], llamadas así por A. A. Albert en 1946 y que no son otra cosa que álgebras conmutativas ($x \cdot y = y \cdot x$) que satisfacen la identidad de Jordan ($(x^2 \cdot y) \cdot x = x^2 \cdot (y \cdot x)$). El propio J. von Neumann se sintió atraído por estas álgebras no asociativas (como ya le ocurriese con los octoniones), reconociendo los nuevos avances y participando en ellos, tanto es así, que a los pocos meses apareció un primer trabajo conjunto de P. Jordan, J. von Neumann y E. Wigner [26]. A partir de aquí y hasta 1979, la Teoría de estructura de las álgebras de Jordan, aunque bella y profunda, se situaba en las cercanías de lo que podríamos llamar condiciones de finitud. Es justamente en 1979 cuando E. Zel'manov inicia una serie de trabajos y se adelanta a su tiempo demostrando en [46] (véase también [31]) su famoso "Teorema primo" que clasifica ciertas álgebras de Jordan.

El hallazgo de los octoniones también permitió explicar ciertas propiedades de espacio-carga de las partículas elementales. Se gesta así la llamada Mecánica Cuántica no asociativa, donde se contemplan tanto magnitudes observables como inobservables (relacionadas con los quarks). Pronto se supo que, para dar cabida a estas últimas magnitudes en la formulación matemática de la Mecánica Cuántica, hay que agrandar el álgebra de operadores $L(H)$ hasta verla dentro de una conveniente álgebra que ha de ser no asociativa. Actualmente, diremos que se conocen una gran variedad de fenómenos en diferentes campos, principalmente en Biología y Física (véanse por ejemplo [4, 30, 34]), cuyos modelos son igualmente álgebras no asociativas. De los múltiples textos que versan sobre el interés de los modelos no asociativos en la Física, citamos como botón de muestra [34]. Allí, se detallan diversas aplicaciones Físicas concretas de múltiples álgebras no asociativas relevantes. Por otra parte, recientemente el físico británico, I. M. H. Etherington, ha advertido del interés de las álgebras no asociativas para el tratamiento de problemas genéticos.

Una vez subrayado el indudable interés de las álgebras no asociativas, es obligado reconocer que la Teoría General para éstas, está muy lejos de tener un desarrollo similar a la Teoría General para las álgebras asociativas, de hecho, sólo en ciertos contextos específicos, tales como las álgebras de Jordan o las álgebras de Lie, este desarrollo es considerable. Como ejemplo de la diferencia de nivel en el desarrollo de una y otra teoría, baste recordar que toda álgebra asociativa conmutativa sin divisores de cero B puede sumergirse en un cuerpo Q, llamado el *cuerpo de fracciones* de B. En contexto no necesariamente conmutativo, W. Martindale, construyó el álgebra simétrica de cocientes que, para el estudio de ciertas propiedades, puede jugar un papel similar al del cuerpo de fracciones. Pues bien, a lo largo de los últimos años ha habido numerosos intentos de construir álgebras de cocientes en contexto no asociativo, sobre todo en contexto Jordan o Lie, sin que se haya encontrado una generalización plena a nivel general. Pese a este fracaso, la importancia del centro del álgebra simétrica de cocientes (llamado centroide extendido), y de la subálgebra del álgebra simétrica de cocientes generada por el álgebra de partida sobre el centroide extendido (llamada clausura central), obligó a hacer renovados esfuerzos en la búsqueda de los correspondientes conceptos en contexto no asociativo. Estos esfuerzos culminaron con la introducción del centroide extendido y de la clausura central por parte de T. S. Erickson, W. S. Martindale y J. M. Osborn [21] en contexto no asociativo primo, y más tarde de W. E. Baxter y del propio W. S. Martindale [3] en el caso semiprimo. Estos conceptos desempeñarán un papel importante en la obtención de nuestros resultados.

Nuestro trabajo puede verse como una pequeña contribución, en algunos aspectos que ahora concretaremos, a la construcción de la Teoría General de las álgebras no necesariamente asociativas.

Con el fin de expresarnos con mayor precisión, permítasenos, ir intercalando en lo sucesivo distintas definiciones. Comencemos indicando que, para S_1, S_2 subespacios de un álgebra A, se suele escribir S_1S_2 para indicar el subespacio de A generado por todos los productos xy, con $x \in S_1$ e $y \in S_2$. Por comodidad, escribiremos S^2 en lugar de SS.

Una *subálgebra* de un álgebra dada A es un subespacio vectorial B de A que permanece estable bajo el producto de A, esto es $xy \in B$ para cualesquiera $x, y \in B$. Conviene recordar que toda álgebra *unital* (álgebra con unidad) o no puede verse inmersa en una cierta álgebra con unidad, a la que llamamos su unitización.

Un *ideal (bilátero)* de un álgebra A es un subespacio vectorial I de A tal que $ax \in I$ y $xa \in I$ para cualesquiera $a \in A$ y $x \in I$. Notaremos por $\mathcal{I}_A$ al conjunto de los ideales del álgebra A. Para cada ideal I, llamaremos *anulador* de I, $\mathrm{Ann}(I)$, al mayor ideal J que cumple la condición $IJ = JI = 0$. Un ideal I se dice π-cerrado cuando $I = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I))$. Notaremos por $\mathcal{I}_A^\pi$ al conjunto de los ideales π-cerrados del álgebra A.

Un álgebra A se dice que es un *álgebra simple* si es no nula y carece de ideales propios distintos del 0 y se dice que es *semiprima* si 0 es el único ideal de A cuyo cuadrado es cero.

Una primera estrategia para avanzar en contexto no asociativo podría consistir en tantear hasta qué punto, a un álgebra no necesariamente asociativa, se le puede asociar, de forma natural, un álgebra asociativa cuya estructura algebraica guarde relación con la del álgebra de partida. Independientemente del álgebra en cuestión, nuestra apuesta es por su álgebra de multiplicación.

Sea A un álgebra. Dado $a \in A$ definimos los *operadores de multiplicación* izquierda y derecha $L_a^A, R_a^A \colon A \to A$ por $L_a^A(x) = ax$ y $R_a^A(x) = xa$ para cada $x \in A$. Cuando no haya lugar a confusión usaremos L_a y R_a en lugar de L_a^A y R_a^A. Se define el *álgebra de multiplicación* de A, y se denota por $\mathcal{M}(A)$, como la subálgebra de $L(A)$ generada por el operador identidad Id_A y el conjunto de operadores de multiplicación $\{L_a, R_a \,:\, a \in A\}$.

El *ideal de multiplicación* de A, denotado por $\mathcal{M}^\sharp(A)$, se define como la subálgebra de $L(A)$ generada por el conjunto $\{L_a, R_a \,:\, a \in A\}$. Es claro que $\mathcal{M}^\sharp(A)$ es un ideal de $\mathcal{M}(A)$ y que $\mathcal{M}(A) = \mathbb{K}Id_A + \mathcal{M}^\sharp(A)$.

La relación entre los ideales de un álgebra y de su álgebra de multiplicación fue primeramente estudiada por F. L. Pritchard en [36]. El inicio del estudio, en el caso finito dimensional, de las álgebras (no asociativas) cuya álgebra de multiplicación es semiprima se remonta al trabajo de N. Jacobson [23], en el que obtuvo el siguiente teorema de descripción.

Teorema 0.0.1 (Teorema de Jacobson)**.** *Para un álgebra A, equivalen:*

(i) *A es finito dimensional y $\mathcal{M}(A)$ es semiprima.*

(ii) *$A = \oplus_{i=0}^n B_i$ es una suma directa de ideales, uno de los cuales, sea B_0, es un álgebra nula finito dimensional y los otros son álgebras simples finito dimensionales.*

En tal caso,

$$\mathcal{M}(A) \cong \oplus_{i=0}^n \mathcal{M}(B_i), \qquad \mathcal{M}^\sharp(A) \cong \oplus_{i=1}^n \mathcal{M}(B_i)$$

y, para cada $1 \le i \le n$, $\mathcal{M}(B_i)$ es isomorfa a un álgebra de matrices sobre un álgebra de división finito dimensional Δ_i.

Este resultado, que fue extendido a álgebras sobre un anillo por R. D. Finston en [22], motivó la introducción por A. A. Albert en [1] del que hoy día se conoce con el nombre de Radical de Albert (ver también [24, pp. 1090-1091] y [37]). Es claro que, como consecuencia del Teorema de Jacobson, un álgebra finito dimensional es simple si, y solo si, lo es su álgebra de multiplicación. Esta situación no se reproduce en contexto semiprimo: A. A. Albert exhibió en [1] un álgebra semiprima, cuya álgebra de multiplicación no es semiprima (véase Ejemplo 2.1.1). Esta circunstancia sugirió la siguiente definición: Un álgebra A se dice *multiplicativamente semiprima* (abreviadamente, *m.s.p.*) si A y $\mathcal{M}(A)$ son simultáneamente álgebras semiprimas.

El estudio sistemático de las álgebras m.s.p. sin restricción de finita dimensión, se inició en la Tesis Doctoral de A. A. Mohammed [33]. Uno de los resultados principales de esta Tesis fue demostrar que las álgebras asociativas semiprimas son m.s.p. Este hecho sugirió que las álgebras no asociativas (con conveniente condición de regularidad) cercanas a las asociativas debieran ser también m.s.p. Sugerencia que ha sido verificada para álgebras alternativas no-degeneradas y para álgebras de Jordan no-degeneradas en [18], así como para las álgebras de Lie (skew) asociadas a álgebras asociativas semiprimas con una involución lineal en [11]. Otros ejemplos destacados de álgebras m.s.p. que se muestran en [33] son las álgebras normadas anuladoras generalizadas (en particular, las H*-álgebras con anulador cero) y el álgebra libre no-asociativa. La teoría de estructura para las álgebras m.s.p. fue ampliamanente desarrollada en [8], [9], [10] y [13].

Siguiendo en contexto no asociativo y cambiando de tercio para dar entrada a nuevos actores, recordemos que la caracterización estándar de los módulos completamente reducibles permite afirmar que para un álgebra semiprima, coinciden los conceptos de álgebra descomponible (aquella que es suma de sus ideales minimales) y de álgebra complementada (para cada ideal existe otro ideal cuya suma directa con el primero coincide con la propia álgebra). No ocurre así si se debilitan ambos conceptos, en el sentido de que, si $\sim$ es una operación clausura, hablamos de $\sim$-complementada si la propiedad de complementación sólo se exige para cada ideal $\sim$-cerrado, y nos referimos como $\sim$-descomponible a aquella álgebra que coincide con la $\sim$-clausura de la suma de sus ideales $\sim$-cerrados minimales. En este sentido, recuérdese que un álgebra A se dice que es un *álgebra normada* si $(A, \|.\|)$ es un espacio normado satisfaciendo que, para cada $a, b \in A$, $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. Sabemos por ejemplo que el álgebra c de las sucesiones convergentes es un álgebra normada $\| \ . \ \|$-descomponible tal como se demuestra en [8, Corollary 4.8] pero no es $\| \ . \ \|$-complementada (cf. Corolarios 4.4.3 y 4.4.6 de la presente Memoria). El estudio de las álgebras $\| \ . \ \|$-complementadas ha sido ampliamente desarrollado en álgebras de Banach (álgebras normadas asociativas cuyo espacio normado $(A, \|.\|)$ es completo) específicas: álgebras de funciones, y en particular álgebras de sucesiones, (ver, por ejemplo [20, Chapter 4] y [44]); y álgebras de operadores (ver, por ejemplo [28] y [40]).

El objetivo de esta Memoria es el de relacionar la posible semiprimidad, π-complementación y π-descomponibilidad de un álgebra con las correspondientes propiedades de su unitización, de su álgebra de multiplicación, sus cocientes y sus ideales respectivamente. La clave de nuestro trabajo está en el establecimiento de una biyección entre los ideales π-cerrados y los idempotentes del centroide extendido, resultado que hemos llamado π-Teorema (Teorema 4.1.2), y a partir de éste, de las consiguientes caracterizaciones de la π-descomponibilidad (Teorema 4.3.4) y de la π-complementación (Teorema 4.4.8) en términos del propio centroide extendido.

Breve resumen de los resultados

El **primer capítulo** está dedicado a la π-clausura y a cuanta información sobre el objetivo general obtenemos sin el uso del π-Teorema. Dedicamos una primera sección al concepto de clausura algebráica y señalamos algunos ejemplos notables. A continuación estudiamos la relación entre el anulador de un ideal y la aplicación cociente (**Proposición 1.2.9**) e indicamos cómo construir ejemplos de ideales de un álgebra semiprima que no son álgebras semiprimas (**Ejemplo 1.4.2**), tal caso no ha de darse si los ideales son sumandos directos (**Proposición 1.4.3**). Seguidamente caracterizamos la semiprimimidad como una debilitación de la π-complementación (**Proposición 1.4.4**) y probamos que, en contexto semiprimo, la clausura de la imagen por la aplicación cociente de un ideal es el anulador de la imagen del anulador de dicho ideal (**Proposición 1.5.5**), resultado que nos deja expedito el camino para obtener una descripción de los ideales π-cerrados y de los ideales *esenciales* (tienen corte no cero con cualquier ideal no cero) de un cociente por un ideal π-cerrado (**Teorema 1.5.7**). Como consecuencia, se prueba que la π-*radicalidad* (carencia de ideales π-cerrados minimales) y la π-descomponibilidad pasan al cociente por un ideal π-cerrado (**Corolario 1.5.10** y **Corolario 1.5.12** respectivamente).

Con respecto a la unitización, probamos que un álgebra es semiprima si, y sólo si, lo es su unitización (**Corolario 1.6.4**), y determinamos la relación entre los ideales π-cerrados del álgebra y de su unitizada, distinguiendo el caso con unidad (**Proposición 1.6.9**) y el caso sin unidad (**Proposición 1.6.11**). Es claro que la unitización de un álgebra con unidad siempre tiene un ideal π-cerrado mínimal y por tanto nunca será π-radical. Sin embargo, en el caso sin unidad, un álgebra es π-radical cuando, y sólo cuando, lo sea su unitización (**Corolario 1.6.12**). Curiosamente para la π-descomponibilidad no hay diferencias entre ambos casos, resultando que un álgebra es π-descomponible si, y sólo si, lo es su unitización (**Corolario 1.6.14**).

Después de describir los ideales de una suma directa y de aprender a calcular sus correspondientes anuladores, damos la descripción del retículo (conjunto parcialmente ordenado en el que cualesquiera par de elementos admiten supremo e ínfimo) de los ideales π-cerrados en contexto semiprimo (**Proposición 1.7.2**). Nos damos cuenta que el π-zócalo (suma de los ideales π-cerrados minimales) de una suma directa es la suma directa de los π-zócalos de las álgebras sumandos (**Corolario 1.7.4**). Probamos que si un álgebra A con anulador cero es la π-clausura de una suma directa de una familia $\{I_\lambda\}$ de ideales de A, entonces A es el producto subdirecto esencial (producto subdirecto que contiene un ideal esencial del producto directo) de la familia de las álgebras cocientes $\{A/\mathrm{Ann}(I_\lambda)\}$ y, en el caso en que A es semiprima, describimos sus ideales π-cerrados en términos de los anuladores de los ideales I_λ (**Proposición 1.8.7**).

En el **segundo capítulo** chequeamos algunas carencias de la π-clausura. La primera es que los ideales π-densos de un álgebra semiprima no son necesariamente álgebras semiprimas (cf Ejemplo 1.4.2 y Proposición 1.3.6). Nos surge así un primer problema sobre cómo debe ser el tamaño de un ideal para que pueda heredar la semiprimidad. La segunda es que la π-clausura no deja traslucir ninguna información sobre el álgebra de multiplicación (cf. **Ejemplo 2.1.1**). En este orden de cosas, debemos subrayar que la equivalencia de (i) y (iv) del Teorema de caracterización de las álgebras m.s.p. dada en [8, Theorem 2.6] nos permite afirmar que, para un álgebra semiprima, la semiprimidad de su álgebra de multiplicación está vinculada a la coincidencia de la π-clausura con una nueva clausura: la ε-clausura. Esta última es la pieza clave en el estudio de la estructura de las álgebras m.s.p. (véase por ejemplo [8]) y puede entenderse como un sistema de transmisión entre las estructuras algebraicas de un álgebra y de su álgebra de multiplicación. Entre sus propiedades, destacamos la propiedad de continuidad ([8, Proposition 1.8]), su relación con la π-clausura (cf. [8, Proposition 1.11] y **Ejemplo 2.2.1**) y su buena relación con la aplicación cociente ([8, pg. 406 (5)]). Seguidamente, introducimos los ideales complementadamente densos -abreviadamente c.d.- (aquellos cuya suma con su anulador resulta un ideal ε-denso). Estos ideales forman una clase amplia que incluye tanto a los ideales ε-densos (simplemente densos cuando no haya lugar a confusión) como a los ideales que son sumandos directos. Una primera caracterización de estos ideales (**Proposición 2.3.4**) nos permite, junto con la equivalencia de (i) y (vi) dada en [8, Theorem 2.6], afirmar que un álgebra es m.s.p. si, y sólo si, todo ideal suyo es c.d. (**Corolario 2.3.5**). Subrayamos que los ideales c.d. se conservan al pasar a cociente por un ideal ε-cerrado (**Proposición 2.3.7**) y nos permiten sortear la primera de las carencias: si I es un ideal c.d. de un álgebra, entonces ésta es semiprima si, y sólo si, I y $\mathrm{Ann}(I)$ son también álgebras semiprimas (**Corolario 2.3.11**). Una segunda caracterización de los ideales c.d., que está en el espíritu de [8, Theorem 2.6], nos asegura que los anuladores horizontal y vertical permutan en cualquier ideal c.d., esto es, $\mathrm{Ann}(I^{\mathrm{ann}}) = \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}$ (**Teorema 2.3.16**). Como consecuencia probamos, que, en un ideal c.d., ambas clausuras algebraicas coinciden (**Corolario 2.3.17**). Finalmente probamos que un ideal c.d. es finito dimensional si, y solo si, lo es su clausura (**Proposición 2.4.1**) y que todo cociente de un álgebra semiprima por el anulador de un ideal c.d. finito dimensional es un álgebra π-descomponible (**Proposición 2.4.4**).

En el **tercer capítulo** introducimos el concepto de centroide extendido de un álgebra semiprima A, C_A y, haciendo uso del concepto de filtro de denominadores, damos un proceso para construir su clausura central, Q_A. Posteriormente, tras el análisis de las propiedades que se desprenden de dicha construcción, obtenemos una caracterización de tipo axiomático de la clausura central y del centroide extendido que será ampliamente usada (**Teorema 3.3.15**). Es fácil comprobar que el concepto de clausura central intoducido en [3] por Baxter-Martindale coincide con el que hemos establecido en nuestro trabajo (**Corolario 3.3.16**) y, con poco esfuerzo adicional, se pueden obtener otras variadas y sugerentes caracterizaciones de la clausura central (**Corolarios 3.3.19** y **3.3.20**).

En otro orden de cosas, probamos que la clausura central de las álgebras comprendidas entre la propia álgebra y su clausura central coincide con ésta última, e igual circunstancia se da para sus centroides extendidos (**Proposición 3.4.3**). El centroide extendido de cualquier álgebra semiprima coincide con su álgebra simétrica de cocientes (**Teorema 3.4.6**). También calculamos la clausura central y el centroide extendido de la unitización de un álgebra semiprima distinguiendo los casos con y sin unidad. En caso con unidad, hacemos notar que la clausura central (resp. el centroide extendido) de la unitización de un álgebra semiprima es la unitización de la clausura central (resp. del centroide extendido) (**Proposición 3.5.2**), y como consecuencia, un álgebra con unidad coincide con su clausura central cuando, y sólo cuando, lo haga su unitización (**Corolario 3.5.3**). El caso sin unidad es bastante más complejo, obteniéndose finalmente que la clausura central puede verse como una cierta álgebra cociente y que los centroides extendidos de un álgebra y de su unitización coinciden (**Teorema 3.5.10**). Si además la clausura central tiene unidad, también coinciden sus clausuras centrales (**Corolario 3.5.11**). En el caso sin unidad, ser centralmente cerrada no implica que lo sea su unitización (**Ejemplo 3.5.16**), si bien el recíproco sí es cierto (**Corolario 3.5.15**).

Finalmente demostramos que también los centroides extendidos de un álgebra m.s.p. y de su álgebra de multiplicación coinciden, y que la clausura central de ésta última coincide con una cierta superálgebra que contiene al álgebra de multiplicación de la clausura central (**Teorema 3.6.3**). También coinciden los centroides de un álgebra y de su ideal de multiplcación, mientras que como era deseable, al menos la clausura central del ideal de multiplcación sí es el ideal de multiplicación de la clausura central (**Corolario 3.6.4**).

En el **cuarto capítulo** establecemos el π-teorema, una suerte de piedra de Rosetta que nos permitirá traducir resultados sobre ideales π-cerrados en resultados sobre idempotentes del centroide extendido y viceversa. Para ello, usaremos una técnica similar a la empleada en [5, Theorem 2.3.9], que consiste en asociar a cada subconjunto S de la clausura central de un álgebra semiprima un idempotente, $e_{[S]}$, del centroide extendido. Nuestro principal valor, el **π-Teorema** (**Teorema 4.1.2**), afirma que, para un álgebra semiprima A, la aplicación $e \mapsto eA \cap A$ determina un isomorfismo entre el retículo de los idempotentes en C_A y el retículo $\mathcal{I}_A^\pi$ de los ideales π-cerrados de A, y cuya aplicación inversa viene dada mediante la ley $I \mapsto e_{[I]}$. Parece pues claro que, para conocer la relación entre los ideales π-cerrados de un álgebra y los de sus álgebras relacionadas, necesitamos conocer la relación entre sus centroides extendidos. Así pues, nos vemos obligados a redirigir nuestro esfuerzo hacia el cálculo de los centroides extendidos de aquellas álgebras relacionadas que son objeto de nuestro estudio.

Comenzamos con el cálculo del centroide extendido de un álgebra de la forma eA, con e idempotente del propio centroide extendido, resultando que $C_{eA} = eC_A$, y $Q_{eA} = eQ_A$ (**Teorema 4.2.2**). Nuestra primera consecuencia resulta ser una formulación equivalente del π-Teorema (reemplácese la unidad del cuerpo por cualquier idempotente del centroide extendido en el **Corolario 4.2.3**). El paso a cociente no podría ser más anunciado: el centroide extendido y la clausura central de un cociente es el cociente de los centroides extendidos y de las clausuras centrales respectivamente (**Corolario 4.2.6**). Como consecuencia, sin más que comparar los idempotentes asociados, podríamos volver a obtener la Proposición 1.5.5, que tal como se advirtió en su momento es el punto decisivo en la demostración del Teorema 1.5.7.

Introducimos una segunda herramienta: el conocimiento del centroide extendido de un un producto subdirecto esencial de una familia de álgebras semiprimas (**Teorema 4.3.1**). Con idénticas argumentaciones a las seguidas en la demostración de dicho teorema, probamos que el centroide extendido de un producto subdirecto esencial de álgebras semiprimas es el producto directo de los centroides extendidos de los factores, así como que la clausura central de un producto directo (resp. una suma directa) es el producto directo de las clausuras centrales de los factores (resp. sumandos) (**Corolario 4.3.2**), el cual resulta ser una generalización de [17, Lemma 8]. Como consecuencia, teniendo en cuenta la Proposición 3.4.3, obtenemos que la clausura central y el centroide extendido de $c_{00}, c_0, c, \ell^p (1 \leq p \leq \infty)$ coinciden con el álgebra s de todas las sucesiones (**Corolario 4.3.3**).

A partir del Teorema 4.3.1 y del π-Teorema, probamos que un álgebra es π-descomponible si, y sólo si, su centroide es un producto directo de cuerpos (**Teorema 4.3.4**). La potencia de este resultado estriba en hacer patente que la π-descomponibilidad es competencia exclusiva del centroide extendido. Así, la relación entre los centroides extendidos de A, Q_A y $\mathcal{M}(A)$ permite concluir que un álgebra es π-descomponible, si y sólo si lo es su clausura central (**Corolario 4.3.5**) (respectivamente, lo es su álgebra de multiplicación (**Corolario 4.3.6**)). Por otra parte, merece la pena subrayar el carácter minimal de la π-clausura para la complementariedad (**Proposición 4.4.1**), y en particular, probamos que toda álgebra (con anulador cero) normada $\| \, . \, \|$-complementada es π-complementada (**Corolario 4.4.3**). A continuación caracterizamos la π-complementación en términos de la aditividad de la π-clausura y como consecuencia, probamos que la propiedad de aditividad se hereda para ideales π-cerrados (**Proposición 4.4.4**), y para los cocientes (**Corolario 4.4.5**). Las cosas van fantásticamente bien en el caso finito dimensional: las álgebras π-complementadas finito dimensionales no son otras que las algebras semiprimas que coinciden con su π-zócalo (**Corolario 4.4.7**). Es obligado señalar que el π-Teorema también nos permite dar una nueva caracterización de las álgebras π-complementadas, basada en la pertenencia de todos los idempotentes del centroide extendido al centroide, Γ, (extensión intermedia del cuerpo base entre el centro y el propio centroide extendido) (**Teorema 4.4.8**). A partir de este resultado queda claro que la π-complementación es competencia del centroide y del centroide extendido y sólo de éstos. Esto nos permite ver, entre otras cosas, que toda álgebra semiprima centralmente cerrada es π-complementada (**Corolario 4.4.9**). En particular, lo son el propio centroide extendido y la clausura central de un álgebra semiprima (**Corolario 4.4.10**).

Con objeto de estudiar la π-complementariedad de la unitización de un álgebra, hurgamos entre los centroides de un álgebra y de su unitización. De esta forma, probamos que si un álgebra tiene unidad entonces es π-complementada si, y sólo si, lo es su unitización, y, si no tiene unidad, necesitamos añadir alguna propiedad adicional a los ideales π-cerrados de la propia álgebra (**Teorema 4.4.16**). A fin de comparar las distintas opciones, antes y después del π-Teorema, damos dos demostraciones de este resultado, una de ellas usando los resultados del capítulo segundo y en otra usando el propio π-Teorema. Por otra parte, sabemos que en la categoria de las álgebras asociativas existe una más grande álgebra asociativa con unidad que contiene al álgebra de partida como ideal esencial: El álgebra de los multiplicadores ([2, Proposition 1.1.6]). Pues bien, como consecuencia directa del π-Teorema, obtenemos que un álgebra semiprima asociativa es π-complementada si, y sólo si, lo es su álgebra de los multiplicadores (**Corolario 4.4.19**).

En el caso del álgebra de multiplicación de un álgebra m.s.p. no hay escapatoria: necesitamos conocer la relación entre los centroides. En general, si A es un álgebra semiprima sabemos que $\Gamma_{\mathcal{M}(A)} \subseteq \Gamma_A \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(A)}$ (**Proposición 4.4.20**), así podemos deducir que la π-complementariedad del álgebra de multiplicación fuerza la del propio álgebra, y, la de ésta, fuerza la de su ideal de multiplicación (**Corolario 4.4.21**, véase también [13, Proposition 3.5]). En el caso asociativo la última inclusión es, de hecho, una igualdad (**Proposición 4.4.22**) y en consecuencia, sabemos que un álgebra semiprima asociativa es π-complementada si, y sólo si, lo es su ideal de multiplicación, y que el álgebra de multiplicación lo es cuando, y sólo cuando, lo es su unitización (**Corolario 4.4.24**).

En el contexto de las C^*-álgebras probamos que una C^*-álgebra es π-complementada si, y solo si, coincide con su álgebra simétrica acotada de cocientes (**Corolario 4.4.28**). Este resultado no es baladí, ya que nos permite probar que ejemplos tan importantes como las AW^*-álgebras, y en particular las W^*-álgebras [2, Example 3.3.1.2] son π-complementadas y que, como se muestra en [39, Corollary 2.9] (véase también [2, Corollary 6.3.5]), son precisamente estas C^*-álgebras las que tienen mejor comportamiento respecto a los Jordan-homomorfismos sobreyectivos.

El objetivo de este **quinto capítulo** es continuar el estudio de los ideales c. d., usando ahora el π-Teorema, o más concretamente una consecuencia suya que llamaremos cd-Teorema. En una última sección daremos algunos resultados que resultan novedosos en la Teoría de las álgebras m.s.p.

Comenzamos dando una versión débil del cd-Teorema para los ideales densos que supone un hito importante en la prueba de dicho teorema (**Proposición 5.1.3**), y probamos que si A es un álgebra semiprima e I es un ideal denso de A, entonces A es π-descomponible si, y sólo si, lo es I (**Corolario 5.1.4**). En una segunda etapa, tras estudiar cómo se transmite la densidad en los epimorfismos de álgebras (**Corolarios 5.2.2 y 5.2.3**), probamos el esperado **cd-Teorema** (**Teorema 5.2.5**), el cual informa sobre la clausura central y el centroide extendido de un ideal c.d., concretamente probamos que $C_I = e_{[I]}C_A$, y que $Q_I = C_A I$ es un ideal c.d. en Q_A. Como consecuencia de éste obtenemos la descripción de todos los ideales π-cerrados de un ideal c.d., de la que se deduce, entre otras cosas, que un ideal c.d. es un álgebra prima (el producto de dos de sus ideales es cero únicamente cuando alguno de ellos es cero) si, y sólo si, su π-clausura es un ideal π-cerrado minimal (**Teorema 5.2.7**). Otra importante consecuencia del cd-Teorema, esta vez con la ayuda del Teorema 4.3.4 y del resultado anterior, es que todo ideal c.d. de un álgebra π-descomponible es un álgebra π-descomponible (**Corolario 5.2.8**). Completamos la información de la Proposición 1.4.3, obteniendo, entre otras cosas, que todo ideal π-cerrado de un ideal c.d. es un ideal del propio álgebra y que la existencia de ideales π-cerrados minimales en I garantiza que A también los tiene (**Corolario 5.2.9**). Como consecuencia, podemos probar que todo ideal c.d. no cero de un álgebra semiprima π-radical es un álgebra semiprima π-radical (**Corolario 5.2.10**). Finalmente exhibimos ejemplos de ideales c.d. que son π-cerrados pero cuya clausura central no es un ideal π-cerrado (**Ejemplo 5.2.11**).

Conviene también constatar que nuestros resultados tienen el mismo sabor que algunos de los obtenidos por G. F. Birkenmeier, J. K. Park, y S. T. Rizvi en [7]. Una posible justificación viene dada por el hecho de que un ideal I de un álgebra semiprima A es c.d. si, y sólo si, I^{ann} y $\mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}$ son ideales densos en un sumando directo del anillo maximal derecho de cocientes del anillo $\mathcal{M}(A)$ (véase [7, Definition 2.1.(i)]) (**Corolario 5.2.15**).

En referencia al caso finito dimensional obtenemos que todo ideal c.d. finito dimensional no nulo de un álgebra semiprima es un álgebra π-descomponible (**Proposición 5.3.1**). Si además, $\overline{I}$ es un álgebra m.s.p. entonces I es un ideal π-cerrado de A (**Corolario 5.3.2**). Como consecuencia, obtenemos una pequeña mejora de [13, Theorem 5.16], concretamente probamos que todo ideal c. d. finito dimensional de A tal que $\overline{I}$ es un álgebra m.s.p. es un ideal complementado de A (**Teorema 5.3.3**). Si además el álgebra es prima, entonces dicha álgebra es finito dimensional y simple (**Corolario 5.3.5**). Como consecuencia podemos reencontrar [13, Corollary 5.18], el cual es una una versión no asociativa de un resultado de Lee y Wong [29, Theorem 1.7] en el que se prueba que un álgebra prima asociativa que tenga un ideal derecho no cero finito dimensional es finito dimensional y simple. Concretamente probamos que toda álgebra multiplicativamente prima -abreviadamente m.p.-(simultáneamente el álgebra y su álgebra de multiplicación son álgebras primas) que admita un ideal no cero finito dimensional, es finito dimensional y simple (**Corolario 5.3.6**).

Después de mover los árboles, dedicamos, como ya hemos advertido, una última sección de este capítulo a recoger algunas nueces, traduciendo todos los resultados obtenidos para un ideal c. d. de un álgebra semiprima en resultados para un ideal arbitrario de un álgebra m.s.p. Así por ejemplo en una primera remesa, como consecuencia del Teorema 2.3.16, obtenemos que, para un álgebra m.s.p., existe un isomorfismo entre los retículos de los ideales π-cerrados de la propia álgebra y de su álgebra de multiplicación que conserva el orden (**Proposición 5.4.2**). De aquí se deduce que un álgebra m.s.p. es π-radical si, y sólo si, lo es su álgebra de multiplicación (**Corolario 5.4.3**).

En una segunda remesa, como consecuencia del cd-Teorema, podemos calcular el centroide extendido y la clausura central de un ideal arbitrario I de un álgebra m.s.p.(**Corolario 5.4.4**) y disponer de la descripción de los ideales π-cerrados de un ideal de un álgebra m.s.p., resultado que mejora sensiblemente [8, Theorem 2.11 and Corollary 2.12.(i)], por cuanto está referida a un ideal no necesariamente π-cerrado (**Teorema 5.4.5**). Como consecuencia, obtenemos que todo ideal no cero de un álgebra m.s.p. π-radical es un álgebra m.s.p. π-radical (**Corolario 5.4.6**).

El hecho de que un álgebra es ε-descomponible si, y solo si, es m.s.p y π-descomponible (**Proposición 5.4.7**) nos abre las puertas al estudio de la ε-descomponibilidad de las álgebras con anulador cero, y de esta forma podemos dar una reformulación de [8, Theorems 3.7 and 3.8] y una mejora de [8, Proposition 3.9], concretamente probamos que un álgebra es ε-descomponible si, y sólo si es m.s.p. y su centroide extendido es un producto directo de cuerpos (**Corolario 5.4.8**). También podemos afirmar que un álgebra m.s.p. es ε-descomponible si, y sólo si su clausura central (o su álgebra de multiplicación) es π-descomponible (**Corolario 5.4.9**). Como consecuencia del Corolario 1.5.12 y de la Proposición 5.4.7, probamos que la ε-descomponibilidad pasa a cocientes (**Corolario 5.4.10**) y es hereditaria para los ideales (**Corolario 5.4.11**).

El esquema para la ε-complementación es similar: Un álgebra es ε-complementada si, y solo si, es m.s.p y π-complementada (**Proposición 5.4.12**). Como consecuencia, deducimos que la ε-complementación pasa a cocientes (**Proposición 5.4.13**).

Seguidamente nos preguntamos acerca de la relación entre la multiplicativa semiprimidad de un álgebra y de su unitización. Puesto que toda álgebra es un ideal de su unitización, la condición de multiplicativa semiprimidad de la unitización siempre fuerza la del propio álgebra (véase [12, corollary 4.7]), así pues nos centramos en ver si la multiplicativa semiprimidad del álgebra es también una condición suficiente. En este sentido, sabemos que, dado que al menos la semiprimidad sí está asegurada por el Corolario 1.6.4, sólo nos queda preocuparnos de la semiprimidad de sus álgebras de multiplicación. Las cosas son muy diferentes según que el álgebra tenga o no unidad. En el primer caso la respuesta es plenamente satisfactoria (**Proposición 5.4.14**), mientras que en el caso con unidad ha de añadirse la densidad del álgebra en su unitización (**Proposición 5.4.15**). Antes de obtener las obligadas consecuencias, advertimos que la condición sobre la densidad es esencial, incluso en el caso finito dimensional (**Ejemplo 5.4.16**).

Como consecuencia de las Proposiciones 5.4.14 y 5.4.15 obtenemos la relación entre la ε-descomponibilidad y la ε-complementación de un álgebra y su unitización (**Corolarios 5.4.17** y **5.4.18** respectivamente).

Finalmente queremos advertir que como consecuencia del desarrollo de la presente Memoria también podríamos haber obtenido algunos de los resultados contenidos en [13]. Así por ejemplo, de la Proposición 4.4.4, se deduce la correspondiente caracterización de la ε-complementación en términos de la ε-clausura [13, Corollary 3.10]; Como consecuencia del Proposición 1.8.7 se obtiene que toda álgebra m.s.p. se puede escribir como un producto subdirecto esencial de dos álgebras una π-radical y otra π-descomponible, tal como se obtuvo en [13, Theorem 2.15]; Combinando el Corolario 5.4.8 y el Teorema 4.4.8 reencontramos [13, Corollary 3.13] y aplicando el Teorema 5.3.3, reencontramos [13, Theorem 5.16 and Corollary 5.17].

En el **sexto capítulo** probamos que los monstruos de Pchelintsev (álgebras de Jordan primas degeneradas), tratados por V. G. Skosyrskii, son álgebras m.p. La multiplicativa primidad de las álgebras de Jordan primas no-degeneradas fue probada en [18] haciendo un uso sustancial del Teorema de Zel'manov [46] y de la teoría de identidades polinomiales generalizadas. Una vez que S. V. Pchelintsev resolvió en [35] el problema de la existencia de álgebras de Jordan primas degeneradas, es natural preguntarse sobre la multiplicativa primidad de tales álgebras. Nosotros damos una respuesta afirmativa tanto para la derivación impar (**Teorema 6.2.6**) como para la derivación par (**Teorema 6.3.3**).

Finalmente en el **séptimo capítulo** exponemos dos cuestiones que nos han surgido de forma natural en el desarrollo de la presente Memoria y a las que, hasta el momento, sólo hemos podido dar algunas respuestas parciales.

De todos es conocida la igualdad de los radicales primo (corte de los ideales I tales que el álgebra A/I es prima) y semiprimo (corte de los ideales I tales que el álgebra A/I es semiprima) en un álgebra no necesariamente asociativa. Pues bien, nuestro primer problema consiste en ver si la igualdad de los radicales multiplicativamente primo (corte de los ideales I tales que el álgebra A/I es m.p.) y semiprimo (corte de los ideales I tales que el álgebra A/I es m.s.p.) es obligada. Sabemos que en caso asociativo las cosas van bien, esto es, se da dicha igualdad (**Proposición 7.1.2**). También van bien las cosas si imponemos la condición adicional de que el álgebra de multiplicación sea prima (**Proposición 7.1.5**) o si el álgebra es ε-descomponible (**Proposición 7.1.6**) o si el álgebra tiene un centro grande (todo ideal no nulo tiene corte no nulo con el centro) (**Corolario 7.1.9**). En cualquier caso, el problema de la igualdad puede reducirse al problema de si toda álgebra m.s.p. A es tal que $\mu(A) = 0$ (**Corolario 7.1.12**). En este sentido, probamos que el radical multiplicativamente primo de un álgebra m.s.p. o es cero o es un álgebra π-radical (**Proposición 7.1.13**). Como consecuencia, obtenemos que también el caso finito dimensional está resuelto (**Corolario 7.1.14**).

Nuestro segundo problema consiste en ver si se pueden revertir las implicaciones del Corolario 4.4.24. Después del Teorema de caracterización de la complementación, Teorema 4.4.8, y de la Proposición 4.4.20, entendemos que para este estudio es condición sine quanum el conocimiento sobre las inclusiones recíprocas de los correspondientes centroides. En este sentido sólo podemos afirmar que aunque la inclusión $\Gamma_A \subseteq \Gamma_{A^2}$ puede ser estricta (**Ejemplo 7.2.1**), el citado ejemplo no revela cual de las dos inclusiones $\Gamma_A \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(A)}$ ó $\Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(A)} \subseteq \Gamma_{A^2}$ es estricta.

Finalmente, queremos advertir que, con objeto de dar a la Memoria un desarrollo lo más autocontenido posible, incluiremos algunos resultados conocidos (hecho que siempre será advertido) y que, en su mayor parte, o tienen una demostración elemental o son demostrados con las técnicas implementadas en la propia Memoria.

CAPÍTULO 1

π-clausura

En este capítulo vamos a centrarnos en el estudio de la clausura algebraica clásica: la π-clausura. A lo largo del desarrollo de éste, entenderemos que A es un álgebra, si bien en los enunciados de los resultados será especificado de nuevo. Sea I un ideal de A. Para un determinado subconjuto no vacio $\mathcal{C}$ de $\mathcal{I}_A$, vamos a representar por $h^{\mathcal{C}}(I)$ a la *envoltura* de I relativa a $\mathcal{C}$, esto es

$$h^{\mathcal{C}}(I) = \{J \in \mathcal{C} \,:\, I \subseteq J\}.$$

A veces usaremos también el conjunto

$$\ell^{\mathcal{C}}(I) = \{J \in \mathcal{C} \,:\, J \subseteq I\}.$$

1.1. Clausuras algebraicas

Veamos primeramente qué se entiende por clausura algebraica.

Definición 1.1.1. Un conjunto parcialmente ordenado L se dice que es un *retículo* si cualesquiera dos elementos x e y tienen supremo, $x \sqcup y$, e ínfimo, $x \sqcap y$.

Un retículo se dice acotado si tiene un primer elemento, 0_L, y un último elemento, 1_L, esto es, para cada $x \in L$, se tiene que $0_L \leq x \leq 1_L$.

Un retículo L se dice *completo* si todo subconjunto $\{x_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\}$ admite supremo $\sqcup_\lambda x_\lambda$ e ínfimo $\sqcap_\lambda x_\lambda$. Es claro que todo retículo completo es también un retículo acotado.

Un ejemplo sencillo de retículo completo se puede construir a partir de un espacio vectorial V. Concretamente, el conjunto de los subespacios de V, $\mathcal{S}_V$, con la operaciones de intersección como operación de ínfimo y la suma como operación de supremo es un retículo completo. Si A es un álgebra, el conjunto $\mathcal{I}_A$ de los ideales de A es también un retículo completo con las mismas operaciones definidas en $\mathcal{S}_A$.

Definición 1.1.2. Una aplicación $x \mapsto \widetilde{x}$ de un conjunto parcialmente ordenado X en si mismo se llama *operación de clausura* si satisface:

(1) $x_1 \leq x_2 \;\Rightarrow\; \widetilde{x_1} \leq \widetilde{x_2}$, para todo $x_1, x_2 \in X$,

(2) $x \leq \widetilde{x}$, para cada $x \in X$,

(3) $\widetilde{x} = \widetilde{\widetilde{x}}$, para cada $x \in X$,

Un elemento $x \in X$ se dice $\sim$-*cerrado* cuando $\widetilde{x} = x$, equivalentemente, cuando $x = \widetilde{x'}$ para algún $x' \in X$. En adelante denotaremos por $X^{\sim}$ al conjunto de todos los elementos $\sim$-cerrados de X. Un elemento $x \in L$ se dice $\sim$-*denso* si $\widetilde{x} = 1_L$.

Ejemplo 1.1.3. Para un espacio normado X, la $\|.\|$-clausura es una operación de clausura en el conjunto $\mathcal{S}_X$. El conjunto de todos los subespacios cerrados en norma de X, $\mathcal{S}_X^{\|\cdot\|}$, es un retículo completo con 0 como primer elemento y X como último elemento, siendo sus operaciones ínfimo y supremo respectivamente:

$$\sqcap U_i = \bigcap U_i \quad \text{y} \quad \sqcup U_i = (\overline{\sum U_i})^{\|\cdot\|}.$$

Si A es un álgebra normada entonces el conjunto de todos los ideales cerrados en norma de A, $\mathcal{I}_A^{\|\cdot\|}$, es un retículo completo con las mismas operaciones que $\mathcal{S}_A^{\|\cdot\|}$.

Disponemos de un método sencillo para definir clausuras: la conexión de Galois.

Definición 1.1.4. Una *conexión de Galois* $X \underset{\diamond}{\overset{*}{\rightleftarrows}} Y$ entre dos conjuntos parcialmente ordenados $(X, \leq), (Y, \leq)$ es un par de aplicaciones $x \mapsto x^*$ de X en Y y $y \mapsto y^\diamond$ de Y en X que satisfacen:

(1) $x_1 \leq x_2 \;\Rightarrow\; x_2^* \leq x_1^*$ e $y_1 \leq y_2 \;\Rightarrow\; y_2^\diamond \leq y_1^\diamond$, para todo $x_i \in X$, $y_i \in Y$ $(1 \leq i \leq 2)$.

(2) $x \leq x^{*\diamond}$ e $y \leq y^{\diamond *}$, para todo $x \in X$, $y \in Y$.

Nótese que (1) y (2) implican:

(3) $x^* = x^{*\diamond *}$ e $y^\diamond = y^{\diamond * \diamond}$, para todo $x \in X$, $y \in Y$.

Una *conexión de Galois* $L \underset{\diamond}{\overset{*}{\rightleftarrows}} M$ *entre retículos completos* L y M es una conexión de Galois entre sus conjuntos parcialmente ordenados subyacentes que además cumple las siguientes propiedades:

(4) $(\sqcup x_\lambda)^* = \sqcap x^*_\lambda$ y $(\sqcup y_\lambda)^\diamond = \sqcap y^\diamond_\lambda$, $(\{x_\lambda;\ \lambda \in \Lambda_1\} \subseteq L,\ \{y_\lambda;\ \lambda \in \Lambda_2\} \subseteq M)$.

(5) $(0_L)^* = 1_M$ y $(0_M)^\diamond = 1_L$.

Nótese que toda conexión de Galois $L \underset{\diamond}{\overset{*}{\rightleftarrows}} M$ nos permite definir sendas clausuras en L y M, $\varepsilon : L \to L$ y $\varepsilon' : M \to M$, respectivamente por:

$$\widehat{x} = x^{*\diamond} \quad \text{e} \quad \breve{y} = y^{\diamond *}.$$

Es fácil ver que $x \in L^\varepsilon$ si, y solo si, $x = y^\diamond$ para algún $y \in M$. L^ε es un retículo completo con 0_L como primer elemento y 1_L como último elemento, estando las operaciones supremo e ínfimo definidas por:

$$\sqcap x_\lambda = \sqcap x_\lambda \ \text{ y } \ \sqcup x_\lambda = \widehat{\sqcup x_\lambda}$$

La aplicación $x \mapsto x^*$ es una biyección de L^ε sobre $M^{\varepsilon'}$ que invierte el orden y cuya inversa es la aplicación $y \mapsto y^\diamond$.

Como ejemplo trivial podemos considerar la clausura asociada a la conexión de Galois $L \underset{Id}{\overset{Id}{\rightleftarrows}} L$ a la que nos referiremos como la *clausura discreta* del retículo L. Es claro que en tal caso todo elemento es cerrado.

La naturalidad de este concepto algebraico queda de manifiesto en los siguientes ejemplos de claro contenido analítico.

Ejemplo 1.1.5. Sea H un espacio de Hilbert. La pareja de aplicaciones $\mathcal{S}_H \underset{\perp}{\overset{\perp}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}_H$ donde

$$U^\perp := \{x \in H : < x, U >= 0\}, \quad \forall\ U \in \mathcal{S}_H$$

es una conexión de Galois cuya operación clausura asociada es el cierre en norma. En particular

$$\overline{U}^{\|\cdot\|} = (U^\perp)^\perp \quad \forall\ U \in \mathcal{S}_H,$$

y la aplicación $U \mapsto U^\perp$ es una biyección de $\mathcal{S}_H^{\|\cdot\|}$ en si mismo que invierte el orden.

Ejemplo 1.1.6. Sea X un espacio normado y sea X^* su espacio topológico dual. La pareja de aplicaciones $\mathcal{S}_X \underset{(.)_0}{\overset{(.)^0}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}_{X^*}$ donde

$$U^0 := \{x^* \in X^* :\ x^*(U) = 0\} \ \text{ y } \ V_0 := \{x \in X :\ V(x) = 0\}$$

es una conexión de Galois cuyas operaciones de clausura asociadas son respectivamente el cierre con la topología débil, $\sigma(X, X^*)$, en $\mathcal{S}_X$ y el cierre con la topología débil-*, $\sigma(X^*, X)$, en $\mathcal{S}_{X^*}$. En particular, $\mathcal{S}_X^{\sigma(X,X^*)}$ y $\mathcal{S}_{X^*}^{\sigma(X^*,X)}$ son retículos completos, y la aplicación $U \mapsto U^0$ es una biyección de $\mathcal{S}_X^{\sigma(X,X^*)}$ en $\mathcal{S}_{X^*}^{\sigma(X^*,X)}$ que invierte el orden, y cuya inversa es la aplicación $V \mapsto V_0$.

Definición 1.1.7. Dada un álgebra A y una operación de clausura $\sim$ en el retículo completo $\mathcal{I}_A$ de los ideales de A, diremos que un ideal $\sim$-cerrado I de A es $\sim$-*complementado* en A si existe un ideal $\sim$-cerrado J de A, llamado $\sim$-*complemento* de I, tal que $A = I \oplus J$. Diremos que A es un álgebra $\sim$-*complementada* cuando todo los ideales $\sim$-cerrados de A son $\sim$-complementados en A.

Dada un álgebra A y una operación de clausura $\sim$ en $\mathcal{I}_A$, diremos que $\sim$ es *aditiva* si $(I+J)^\sim = \widetilde{I} + \widetilde{J}$ para todo $I, J \in \mathcal{I}_A$.

Un ideal I distinto de cero en A se dice que es un ideal $\sim$-*cerrado minimal* de A si verifica la siguiente condición: si $J \in \mathcal{I}_A^\sim$ y $J \subseteq I$, entonces $J = 0$ ó $J = I$. El conjunto de todos los ideales $\sim$-cerrados minimales de A se denota por $\mathbf{m}_A^\sim$ y el conjunto

$$\sim\text{-Soc}(A) := \sum_{m \in \mathbf{m}_A^\sim} m$$

se llama $\sim$-*zócalo* de A.

Diremos que A es un álgebra $\sim$-*descomponible* si A es la $\sim$-clausura de su $\sim$-zócalo.

Un ideal propio I se dice $\sim$-cerrado maximal de A si dado $J \in \mathcal{I}_A^\sim$ con $I \subseteq J$, entonces $J = A$ ó $J = I$. Se denota por $\mathbf{M}_A^\sim$ al conjunto de los ideales $\sim$-cerrados maximales de A y se define el $\sim$-*radical* de A como el conjunto

$$\sim -\text{Rad}(A) := \bigcap_{M \in \mathbf{M}_A^\sim} M.$$

Un álgebra A se dice $\sim$-radical si carece de ideales $\sim$-cerrados maximales, o, si se quiere, si su $\sim$-zócalo es nulo.

1.2. Anulador de un ideal

Para cada ideal I de A, llamaremos *anulador* de I en A y se denotará por $\mathrm{Ann}_{\mathrm{A}}(I)$ (o simplemente por $\mathrm{Ann}(I)$ cuando no haya lugar a confusión) al mayor ideal J de A que cumple las condiciones $IJ = JI = 0$.

Nota 1.2.1. Si I, J son dos ideales de A, es claro que:

(1) $I \subseteq J \Rightarrow \mathrm{Ann}(J) \subseteq \mathrm{Ann}(I)$

(2) $I \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I))$

(3) $\mathrm{Ann}(I) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)))$

(4) Si $\{I_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{I}_A$, entonces $\mathrm{Ann}(\sum_\lambda I_\lambda) = \cap_\lambda \mathrm{Ann}(I_\lambda)$

(5) $\mathrm{Ann}(0) = A$

Obviamente el *anulador* de A es el conjunto

$$\mathrm{Ann}(A) = \{x \in A : \ xa = ax = 0 \text{ para todo } a \in A\}.$$

Es evidente que $\mathrm{Ann}(A)$ es un ideal *trivial* (ideal cuyo cuadrado es cero) de A. De hecho, para cada ideal I de A, $I \cap \mathrm{Ann}(I)$ es también un ideal trivial. En consecuencia, en toda álgebra semiprima se verifica que $\mathrm{Ann}(A) = 0$ y, también, que $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$, para cualquier ideal I.

Veamos que, sin embargo, un álgebra con anulador cero no es necesariamente semiprima.

Ejemplo 1.2.2. Dado un conjunto infinito numerable de variables formales

$$X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\},$$

el *álgebra de Grassmann* sobre X, denotada por $G(X)$, (G si no hay lugar a confusión) es el álgebra cociente del álgebra asociativa libre unital sobre X por el ideal generado por los elementos de la forma

$$x_i x_j + x_j x_i \quad (i \neq j \in \mathbb{N}).$$

En consecuencia, podemos tomar como generadores lineales de $G(X)$ a la unidad (que se interpreta como un monomio de longitud cero) y a los monomios de la forma

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_s} \ \text{ para convenientes naturales } \ i_1 < i_2 < \cdots < i_s.$$

Es claro que $\mathrm{Ann}(G) = 0$, y sin embargo el ideal de G generado por x_1 es un ideal trivial no nulo, por lo que G no es semiprima.

Destaquemos que, en contexto semiprimo, los ideales esenciales vienen determinados por la nulidad de su anulador.

Lema 1.2.3. *Sea A un álgebra y sea I un ideal de A. Equivalen*

(i) $\mathrm{Ann}(I) = 0$.

(ii) $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$ *e* I *es esencial.*

Demostración. Supongamos que el anulador de I es 0. Si J es un ideal de A tal que $J \cap I = 0$ entonces $J \subseteq \mathrm{Ann}(I) = 0$, luego $J = 0$, por tanto, I es un ideal esencial de A. El recíproco es consecuencia directa de la definición de ideal esencial. □

Como consecuencia,

Corolario 1.2.4. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal de A, entonces I es esencial si, y sólo si, su anulador es cero.*

Analicemos un poco más despacio la bondad del contexto semiprimo. Si A es semiprima e I y J son ideales de A entonces

$$I \cap J = 0 \Leftrightarrow IJ = 0 \Leftrightarrow JI = 0.$$

Como consecuencia, si A es semiprima y D es un ideal de A, equivalen las siguientes afirmaciones

$$D \text{ esencial en } A \Leftrightarrow DI \neq 0 \text{ para cada } I \in \mathcal{I}_A \backslash \{0\} \Leftrightarrow ID \neq 0 \text{ para cada } I \in \mathcal{I}_A \backslash \{0\}$$

Evidentemente el corte de un número finito de ideales esenciales es un ideal esencial. En el siguiente resultado mostramos otra propiedad interesante de los ideales esenciales.

Proposición 1.2.5. *[10, Lemma 3.1]*
Sea A un álgebra semiprima, sea I un ideal de A y sea D un ideal esencial de A, entonces $\mathrm{Ann}(I \cap D) = \mathrm{Ann}(I)$.

Demostración. Claramente $\mathrm{Ann}(I) \subseteq \mathrm{Ann}(I \cap D)$. Como A es semiprima sabemos que $I \cap D \cap \mathrm{Ann}(I \cap D) = 0$, y, como D es un ideal esencial de A, deducimos que $I \cap \mathrm{Ann}(I \cap D) = 0$. Por tanto, $\mathrm{Ann}(I \cap D) \subseteq \mathrm{Ann}(I)$. □

En general, para los ideales arbitrarios se tiene

Proposición 1.2.6. *Sea A un álgebra semiprima, y sean I y J dos ideales de A. Entonces,* $\mathrm{Ann}(I \cap J) \cap J = \mathrm{Ann}(I) \cap J$.

Demostración. Es claro que

$$I(\mathrm{Ann}(I \cap J) \cap J) \subseteq I \cap J \cap \mathrm{Ann}(I \cap J).$$

Por tanto, en virtud de la semiprimidad de A, tenemos que $\mathrm{Ann}(I \cap J) \cap J \subseteq \mathrm{Ann}(I)$. Puesto que la inclusión $\mathrm{Ann}(I) \subseteq \mathrm{Ann}(I \cap J)$ es trivial , concluimos que $\mathrm{Ann}(I \cap J) \cap J = \mathrm{Ann}(I) \cap J$.

□

Para cada ideal I de A, el conjunto

$$(I : A) := \{a \in A \, : \, aA + Aa \subseteq I\}.$$

resulta ser un nuevo ideal de A que contiene a I. Además

Proposición 1.2.7. *Si I es un ideal de A tal que $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$, entonces*

$$\mathrm{Ann}(I) = \mathrm{Ann}(I : A)$$

.

Demostración. Sea I un ideal de A tal que $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$. Como

$$(I : A)\mathrm{Ann}(I) + \mathrm{Ann}(I)(I : A) \subseteq I \cap \mathrm{Ann}(I),$$

se sigue que

$$(I : A)\mathrm{Ann}(I) = \mathrm{Ann}(I)(I : A) = 0.$$

Por tanto $\mathrm{Ann}(I) \subseteq \mathrm{Ann}(I : A)$. La otra inclusión es obvia. □

Definición 1.2.8. El *álgebra cociente* de un álgebra A (módulo el ideal I) se define como el espacio vectorial cociente A/I dotado con el producto dado por

$$(x + I)(y + I) := xy + I.$$

Nótese que $\mathrm{Ann}(A/I) = (I : A)/I$ y que la aplicación cociente $q : A \to A/I$ induce una biyección de $h^{\mathcal{I}_A}(I)$ en $\mathcal{I}_{A/I}$.

En general, si A y B son álgebras, y p es un homomorfismo de álgebras de A en B, entonces es claro que $p(\mathrm{Ann}_A(I)) \subseteq \mathrm{Ann}_B(p(I))$ para todo ideal I de A. Este hecho puede apurarse un poco más en el caso de la aplicación cociente.

Proposición 1.2.9. *Sea A un álgebra y sea I un ideal de A tal que $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$. Entonces, para cada $J \in \ell^{\mathcal{I}_A}(\mathrm{Ann}(I))$,*

$$q(\mathrm{Ann}(J)) = \mathrm{Ann}(q(J)).$$

Demostración. Sea J un ideal de A tal que $J \subseteq \mathrm{Ann}(I)$. Como

$$q(q^{-1}(\mathrm{Ann}(q(J)))J) \subseteq q(q^{-1}(\mathrm{Ann}(q(J))))q(J) = \mathrm{Ann}(q(J))q(J) = 0,$$

se sigue que $q^{-1}(\mathrm{Ann}(q(J)))J \subseteq I$. De forma análoga se puede probar que

$$Jq^{-1}(\mathrm{Ann}(q(J))) \subseteq I.$$

Esto es

$$q^{-1}(\mathrm{Ann}(q(J)))J + Jq^{-1}(\mathrm{Ann}(q(J)))) \subseteq I \cap \mathrm{Ann}(I),$$

por tanto

$$q^{-1}(\mathrm{Ann}(q(J)))J + Jq^{-1}(\mathrm{Ann}(q(J)))) = 0,$$

y de ahí

$$q^{-1}(\mathrm{Ann}(q(J))) \subseteq \mathrm{Ann}(J),$$

y por tanto $\mathrm{Ann}(q(J)) \subseteq q(\mathrm{Ann}(J))$. La inclusión opuesta ya ha sido previamente advertida.

□

1.3. π-clausura

Las propiedades del anulador (véase Nota 1.2.1) nos aseguran que el par de aplicaciones $\mathcal{I}_A \underset{\mathrm{Ann}(.)}{\overset{\mathrm{Ann}(.)}{\rightleftarrows}} \mathcal{I}_A$ es una conexión de Galois. La π-*clausura* es la clausura asociada a dicha conexión de Galois, esto es, la π-clausura $\overline{I}$ de un ideal I de A está definida por

$$\overline{I} := \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)).$$

Un ideal I de un álgebra A, se dice π-*cerrado (*resp. π-*denso)* en A cuando $I = \overline{I}$ (resp., $\overline{I} = A$).

Como consecuencia de la definición, para cada $I \in \mathcal{I}_A$, se verifica

(1) $\overline{\mathrm{Ann}(I)} = \mathrm{Ann}(\overline{I}) = \mathrm{Ann}(I)$,

(2) $\mathcal{I}_A^\pi = \{\mathrm{Ann}(I);\ I \in \mathcal{I}_A\}$,

(3) $\mathcal{I}_A^\pi$ es un retículo completo, con $\mathrm{Ann}(A)$ como primer elemento y A como último elemento, siendo sus operaciones ínfimo y supremo respectivamente:

$$\sqcap I_i = \bigcap I_i \ \text{ y } \ \sqcup I_i = \overline{\sum I_i}.$$

(4) La aplicación $I \mapsto \mathrm{Ann}(I)$ es una biyección de $\mathcal{I}_A^\pi$ en si mismo que invierte el orden. En particular, si $\mathbf{m}_A^\pi$ representa al conjunto de los ideales π-cerrados minimales de A y $\mathbf{M}_A^\pi$ al conjunto de los ideales π-cerrados maximales de A se tiene que

$$\mathbf{m}_A^\pi = \{\mathrm{Ann}(M) \ : \ M \in \mathbf{M}_A^\pi\} \ \text{ y } \ \mathbf{M}_A^\pi = \{\mathrm{Ann}(m) \ : \ m \in \mathbf{m}_A^\pi\}.$$

Definición 1.3.1. Siguiendo la notación anunciada, por π-*zócalo* de A y por π-*radical* de A entendemos respectivamente los conjuntos

$$\pi\text{-Soc}(A) := \sum_{m \in \mathbf{m}_A^\pi} m, \qquad \pi\text{-Rad}(A) := \bigcap_{M \in \mathbf{M}_A^\pi} M.$$

Diremos que A es un álgebra π-*descomponible* si A es la π-clausura de su π-zócalo. Un álgebra A se dice π-radical si carece de ideales π-cerrados minimales, o, si se quiere, si su π-zócalo es nulo.

Concretemos estos conceptos en algunas álgebras normadas sencillas.

Ejemplo 1.3.2. Considérese el álgebra s de las sucesiones sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y dotada con las operaciones coordenada a coordenada. Notaremos por l^p $(1 \leq p < \infty)$ a la subálgebra de las sucesiones que son absolutamente p-sumables, por l^∞ a la de las sucesiones acotadas, por c a la de las sucesiones convergentes, por c_0 a la de las sucesiones convergentes a cero y finalmente por c_{00} a la subálgebra de las sucesiones casinulas. Si A es cualquiera de éstas álgebras es fácil probar que $\mathbf{m}_A^\pi = \{I_N : N \in \mathbb{N}\}$, donde $I_N = \{\{a_n\} : a_n = 0 \text{ para todo } n \neq N\}$. En consecuencia π-Soc$(A) = c_{00}$ y A es π-descomponible.

Veamos ahora un ejemplo de álgebra π-radical.

Ejemplo 1.3.3. El álgebra $\mathcal{C}([0,1])$ de las funciones continuas en el intervalo [0,1] y con valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y dotado de las operaciones naturales es un álgebra π-radical.

En efecto, dado $F \subseteq [0,1]$ es fácil probar que el conjunto

$$I := \{f \in \mathcal{C}([0,1]); f|F = 0\}$$

es un ideal cuyo anulador es el conjunto $\{f \in \mathcal{C}([0,1]); f|([0,1]\backslash F) = 0\}$ y por tanto I es π-cerrado. De aquí se deduce claramente que $\mathcal{C}([0,1])$ carece de π-cerrados minimales

Podemos seguir sacando consecuencias del hecho de que la π-clausura procede de una conexión de Galois.

Nota 1.3.4.

(1) $\mathrm{Ann}(\pi\mathrm{-Soc}(A)) = \pi\mathrm{-Rad}(A)$.

En efecto,

$$\mathrm{Ann}(\pi\mathrm{-Soc}(A)) = \mathrm{Ann}\left(\sum_{m \in \mathbf{m}_A^\pi} m\right) = \bigcap_{m \in \mathbf{m}_A^\pi} \mathrm{Ann}(m) = \bigcap_{M \in \mathbf{M}_A^\pi} M = \pi\mathrm{-Rad}(A).$$

De hecho, tomando anuladores.

(2) *Si A es un álgebra con anulador cero, entonces, A es π-descomponible si, y solo si, su π-radical es cero.*

Todavía, podemos obtener más propiedades si el álgebra tiene anulador cero

Nota 1.3.5. Sea A un álgebra con anulador cero y sea I un ideal π-cerrado de A. Entonces

(1) $\mathbf{m}_A^\pi = \ell^{\mathbf{m}_A^\pi}(I) \bigcup \ell^{\mathbf{m}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I))$.

De hecho, para un $J \in \mathbf{m}_A^\pi$ dado, es claro que $J \cap I$ es un ideal π-cerrado de A contenido en J. En ese caso, o bien $J \cap I = J$, y en consecuencia $J \subseteq I$, o bien $J \cap I = 0$ y por tanto obtenemos que $J \subseteq \mathrm{Ann}(I)$.

Como consecuencia de (1) tenemos que

(2) $\pi{-}\mathrm{Soc}(A) \subseteq I + \mathrm{Ann}(I)$.

Análogamente, podemos probar que

(3) $\mathbf{M}_A^\pi = h^{\mathbf{M}_A^\pi}(I) \bigcup h^{\mathbf{M}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I))$,

y como consecuencia

(4) $\pi{-}\mathrm{Rad}(A) \supseteq I \cap \mathrm{Ann}(I)$.

Ciertamente (3) se puede deducir de (1), teniendo en cuenta la nota 1.3.4 y el siguiente hecho:

(5) $h^{\mathbf{M}_A^\pi}(I) = \{\mathrm{Ann}(I) \,:\, I \in \ell^{\mathbf{m}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I))\}$
y
$\ell^{\mathbf{m}_A^\pi}(I) = \{\mathrm{Ann}(M) \,:\, M \in h^{\mathbf{M}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I))\}$.

La π-clausura permite caracterizar los ideales esenciales.

Proposición 1.3.6. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal de A. Entonces, I es esencial si, y sólo si, I es π-denso.*

Demostración. Basta tener en cuenta el Corolario 1.2.4 y tomar anuladores en ambas direcciones.

□

Como consecuencia de la Proposición 1.2.7, tomando igualmente anuladores, se obtiene

Proposición 1.3.7. *Si I es un ideal de A tal que $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$, entonces $\overline{I} = \overline{(I:A)}$. Si además $I \in \mathcal{I}_A^\pi$ se verifica que $I = (I:A)$.*

Demostración. Tomando anuladores en la Proposición 1.2.7 se obtiene $\overline{I} = \overline{(I:A)}$.

Por otra parte, como I es π-cerrado, tenemos que

$$(I:A) \subseteq \overline{(I:A)} = \overline{I} = I \subseteq (I:A),$$

y por lo tanto $I = (I:A)$.

□

Veamos qué ocurre cuando debilitamos la complementación

Lema 1.3.8. *Sea A un álgebra con anulador cero y sean I, J ideales de A. Si $A = \overline{I \oplus J}$, entonces $A = \overline{I \oplus \operatorname{Ann}(I)}$ y $\overline{J} = \operatorname{Ann}(I)$.*

Demostración. Supongamos que $A = \overline{I \oplus J}$. Como $I \cap J = 0$ se sigue que $IJ = JI = 0$, y de ahí $J \subseteq \operatorname{Ann}(I)$. Así, $A = \overline{I + \operatorname{Ann}(I)}$, y vemos que

$$\operatorname{Ann}(A) = \operatorname{Ann}(\overline{I + \operatorname{Ann}(I)}) = \operatorname{Ann}(I) \cap \overline{I}.$$

Por tanto $I \cap \operatorname{Ann}(I) \subseteq \operatorname{Ann}(A) = 0$, y así

$$A = \overline{I \oplus \operatorname{Ann}(I)}.$$

Por otro lado, de $A = \overline{I \oplus J}$ se sigue de forma inmediata que

$$\operatorname{Ann}(I) \cap \operatorname{Ann}(J) = \operatorname{Ann}(\overline{I + J}) = \operatorname{Ann}(A) = 0,$$

y así $\operatorname{Ann}(I) \subseteq \overline{J}$. Finalmente, por las inclusiones $J \subseteq \operatorname{Ann}(I) \subseteq \overline{J}$ se sigue que $\overline{J} = \operatorname{Ann}(I)$. □

Como consecuencia

Proposición 1.3.9. *Sea A un álgebra con anulador cero e I un ideal π-cerrado de A. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $I \cap \operatorname{Ann}(I) = 0$.

(ii) $A = \overline{I \oplus \operatorname{Ann}(I)}$.

(iii) Existe un ideal π-cerrado J de A, tal que $A = \overline{I \oplus J}$.

En este caso, $J = \operatorname{Ann}(I)$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). En virtud de la hipótesis y las propiedades del anulador tenemos que

$$\operatorname{Ann}(I \oplus \operatorname{Ann}(I)) = \operatorname{Ann}(I) \cap I = 0.$$

y por tanto, tomando de nuevo anuladores, $A = \overline{I \oplus \operatorname{Ann}(I)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Obvia.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Es consecuencia directa del Lema 1.3.8

Supongamos ahora que I satisface las equivalencias anteriores. Es claro que, $J = \operatorname{Ann}(I)$ por el Lema 1.3.8.

□

Podemos ir más lejos si eliminamos la π-clausura en la suma.

Proposición 1.3.10. *Sea A un álgebra con anulador cero y sean I, J ideales de A. Si $A = I \oplus J$, entonces $J = \mathrm{Ann}(I)$ e $I = \mathrm{Ann}(J)$. En consecuencia I y J son π-cerrados.*

Demostración. Supongamos que $A = I \oplus J$. Por el Lema 1.3.8 se sigue que $J \subseteq \mathrm{Ann}(I)$ e $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$. Por lo tanto, la igualdad $A = I \oplus J$ nos conduce a las igualdades $A = I \oplus \mathrm{Ann}(I)$ y $J = \mathrm{Ann}(I)$. Finalmente, intercambiando los papeles de podemos obtener que $I = \mathrm{Ann}(J)$. □

1.4. π-clausura y semiprimidad

Comenzamos viendo que la semiprimidad marcha bien en forma ascendente. Una subálgebra B de un álgebra A se dice que es una *subálgebra esencial* de A si B contiene un ideal esencial de A.

Proposición 1.4.1. *Sea A un álgebra y sea B una subálgebra esencial de A. Si B es semiprima, entonces A también lo es.*

Demostración. Supongamos que B es semiprima y D es un ideal esencial de A tal que $D \subseteq B$. Sea I un ideal de A tal que $I^2 = 0$. Entonces, $I \cap D$ es un ideal de B tal que $(I \cap D)^2 = 0$. Como B es semiprima se sigue que $I \cap D = 0$, y como D es esencial $I = 0$. Así, A es semiprima.

□

Pero no en forma descendente: existen ideales esenciales (también existen ideales π-cerrados minimales) de un álgebra semiprima que no son álgebras semiprimas.

Ejemplo 1.4.2. Sea B un álgebra no nula y sea F una aplicación lineal distinta de cero de B en B con $F^2 = 0$. Consideramos el álgebra B_F que consiste en el espacio vectorial $B \times \mathbb{K}$ dotado con el producto definido por

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \lambda F(y) + \mu F(x), \lambda\mu).$$

Es claro que la aplicación $x \mapsto (x, 0)$ nos permite ver a B como una subálgebra de B_F. Es fácil comprobar que

$$\mathcal{I}_{B_F} = \{I : I \in \mathcal{I}_B \text{ con } F(I) \subseteq I\} \bigcup \{I \times \mathbb{K} : I \in \mathcal{I}_B \text{ con } F(B) \subseteq I\}.$$

Supongamos que F también satisface la condición: $F(I) \subseteq I$, para $I \in \mathcal{I}_B$, implica $I = 0$ ó $I = B$. Entonces vemos que

$$\mathcal{I}_{B_F} = \{0, B, B_F\},$$

y en consecuencia B_F es un álgebra semiprima. Además, B es un ideal esencial de B_F y

$$\mathcal{I}^{\pi}_{B_F} = \{0, B_F\}.$$

Ahora consideramos el álgebra producto $B \times B$ y la aplicación lineal $F \times F$ de $B \times B$ en $B \times B$ dada por $(F \times F)(x, y) = (F(x), F(y))$. Nótese que $F \times F \neq 0$ y $(F \times F)^2 = 0$. Vamos a denotar por A al álgebra $(B \times B)_{F \times F}$. Así, A es el álgebra que consiste en el espacio vectorial $B \times B \times \mathbb{K}$ y el producto definido por

$$(x, y, \lambda)(z, t, \mu) = (xz + \lambda F(z) + \mu F(x), yt + \lambda F(t) + \mu F(y), \lambda\mu).$$

Nótese que $0 = 0 \times 0$, $B_1 = B \times 0$, $B_2 = 0 \times B$, y $B_1 + B_2 = B \times B$ son ideales $(F \times F)$-invariantes de $B \times B$, y por tanto ideales de A. Es fácil mostrar que A es un álgebra semiprima y

$$\mathcal{I}^{\pi}_{A} = \{0, B_1, B_2, A\}.$$

De ahí, B_1 es un ideal π-cerrado minimal de A, y $B_1 + B_2$ es un ideal esencial de A.

Ahora vamos a examinar un par concreto B, F que satisface todas las condiciones anteriores. Sea B el álgebra conmutativa tridimensional con conjunto generador $\{u, v, w\}$ dada por las siguientes relaciones

$$u^2 = u,\ uv = v,\ v^2 = w,\ uw = vw = w^2 = 0.$$

Es inmediato verificar que

$$\mathcal{I}_B = \{0, \mathbb{K}w, \mathbb{K}v + \mathbb{K}w, B\},\quad \mathcal{I}^{\pi}_B = \{0, \mathbb{K}w, B\},$$

y $\mathrm{Ann}_B(B) = \mathbb{K}w$. Además, consideramos la aplicación lineal F de B en B dada por $F(u) = 0$ y $F(v) = F(w) = u$. Es claro que $F \neq 0$, $F^2 = 0$, y 0 y B son los únicos ideales F-invariantes de B. Como $B_1 \cong B$, $B_1 + B_2 \cong B \times B$, y B es un álgebra con anulador distinto de cero, encontramos un ideal π-cerrado minimal, B_1, y un ideal esencial, $B_1 + B_2$, de un álgebra semiprima A que son álgebras con anulador distinto de cero.

Las cosas marchan mejor para los sumandos directos. Veamos previamente alguna información sobre la clausura relativa cuando el ideal es un sumando directo. Podemos considerar cada ideal I como una subálgebra. Es obvia la inclusión $\ell^{\mathcal{I}_A}(I) \subseteq \mathcal{I}_I$. Además, si $J \in \ell^{\mathcal{I}_A}(I)$ entonces

$$\mathrm{Ann(J) \cap I \subseteq Ann_I(J)}.$$

En efecto, $\mathrm{Ann(J) \cap I}$ es un ideal de I tal que $J(\mathrm{Ann(J) \cap I}) = (\mathrm{Ann(J) \cap I)J} = 0$ y así $\mathrm{Ann(J) \cap I \subseteq Ann_I(J)}$.

Sea $J \in \mathcal{I}_I$, denotaremos por $\overline{J}^I$ a la π-clausura de J relativa al álgebra I. En general J no tiene por qué ser ideal de A, y por tanto no tiene sentido hablar de su π-clausura, sin embargo,

Proposición 1.4.3. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un (ideal) sumando directo de A. Entonces*

(i) $\mathcal{I}_I = \ell^{\mathcal{I}_A}(I)$ *y* $\mathrm{Ann}_I(J) = \mathrm{Ann}(J) \cap I$ *para cada ideal J de I.*

(ii) Para cada ideal J de I, $\overline{J}^I = \overline{J} \cap I$. En consecuencia $\mathcal{I}_I^\pi = \ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$.

(iii) I es un álgebra semiprima.

Demostración. Por la Proposición 1.3.10, I es un ideal π-cerrado de A y $A = I \oplus \mathrm{Ann}(I)$.

(i) Conocida la inclusión $\ell^{\mathcal{I}_A}(I) \subseteq \mathcal{I}_I$ basta observar que si $J \in \mathcal{I}_I$ entonces $JA = J(I \oplus \mathrm{Ann}(I)) \subseteq J$ y análogamente $AJ \subseteq J$, y así $J \in \mathcal{I}_A$. Por otra parte conocida igualmente la inclusión $\mathrm{Ann(J)}\cap\mathrm{I} \subseteq \mathrm{Ann_I(J)}$, su inversa es consecuencia inmediata de que $\mathrm{Ann}_I(J)$ es un ideal de A en virtud de la igualdad ya probada.

(ii) Tomando anuladores en I en la última igualdad anterior, tenemos

$$\overline{J}^I = \mathrm{Ann}_I(\mathrm{Ann}_I(J)) = \mathrm{Ann}_I(\mathrm{Ann}(J) \cap I) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(J) \cap I) \cap I,$$

con lo que en virtud de la Proposición 1.2.6 aplicada a $\mathrm{Ann}(J)$ y a I, obtenemos que

$$\overline{J}^I = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(J) \cap I) \cap I = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(J)) \cap I = \overline{J} \cap I.$$

De aquí deducimos fácilmente que $\mathcal{I}_I^\pi = \ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$.

(iii) Sea $J \in \mathcal{I}_I$ tal que $J^2 = 0$. Por (i), J es un ideal de A, luego por la semiprimidad de ésta, $J = 0$. En resumen, resulta que I, visto como álgebra es semiprima.

□

Continuemos viendo que el concepto de álgebra semiprima puede reescribirse en términos de la π-clausura.

Proposición 1.4.4. *Sea A un álgebra. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) A es semiprima.

(ii) $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$ *para todo ideal I de A.*

(iii) $A = \overline{I \oplus \mathrm{Ann}(I)}$ *para todo ideal I de A.*

(iv) Para cada ideal π-cerrado I, existe un ideal π-cerrado J de A, tal que $A = \overline{I \oplus J}$.

Demostración. Sea I un ideal de A.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Como ya hemos advertido anteriomente, puesto que $(I \cap \mathrm{Ann}(I))^2 \subseteq I\mathrm{Ann}(I) = 0$ se deduce que $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$ por la semiprimidad de A.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea I un ideal de A. Teniendo en cuenta las propiedades del anulador y la hipótesis se tiene que $0 = \overline{I} \cap \mathrm{Ann}(\overline{I}) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)) \cap \mathrm{Ann}(I) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I) \oplus I)$ y por tanto, tomando anuladores, deducimos que $A = \overline{I \oplus \mathrm{Ann}(I)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Ha sido probada en la Proposición 1.3.9

(iv) $\Rightarrow$ (i). Veamos previamente que $\mathrm{Ann}(A) = 0$. Como el $\mathrm{Ann}(A)$ es un ideal π-cerrado de A, existe un ideal π-cerrado J de A tal que

$$A = \overline{\mathrm{Ann}(A) \oplus J}.$$

Por tanto

$$\mathrm{Ann}(A) = \mathrm{Ann}(\overline{\mathrm{Ann}(A) \oplus J}) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(A)) \cap \mathrm{Ann}(J)$$

$$= A \cap \mathrm{Ann}(J) = \mathrm{Ann}(J),$$

de ahí

$$A = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(A)) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(J)) = \overline{J} = J,$$

y así

$$\mathrm{Ann}(A) = \mathrm{Ann}(A) \cap A = \mathrm{Ann}(A) \cap J = 0.$$

Supongamos que $I^2 = 0$ y por tanto $I \subseteq I \cap \mathrm{Ann}(I)$. Aplicando el Lema 1.3.8, obtenemos que $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$ y en particular $I = 0$ y por tanto A es semiprima. $\square$

Dada un álgebra A, representamos por $\mathbf{E}_A$ al conjunto de los ideales esenciales de A. Podemos obtener algunas consecuencias elementales.

Corolario 1.4.5. *Si A es un álgebra semiprima, entonces*

(i) $\mathbf{E}_A = \{I \oplus \mathrm{Ann}(I) \,:\, I \in \mathcal{I}_A\}$.

(ii) $A = \overline{\pi{-}\mathrm{Soc}(A) \oplus \pi{-}\mathrm{Rad}(A)}$.

Demostración. (i) Por las Proposiciones 1.4.4.(iii) y 1.3.6, $I \oplus \mathrm{Ann}(I) \in \mathbf{E}_A$ para todo $I \in \mathcal{I}_A$. Reciprocamente, si $I \in \mathbf{E}_A$, entonces, por la Proposición 1.2.4 $\mathrm{Ann}(I) = 0$, y tenemos que $I = I \oplus \mathrm{Ann}(I)$.

(ii) Es consecuencia de la Proposición 1.4.4(iii), usando la Nota 1.3.4.(1) $\square$

Corolario 1.4.6. *Si A es un álgebra semiprima, entonces A es π-radical si, y sólo si, $A = \pi{-}\mathrm{Rad}(A)$.*

1.5. π-clausura y aplicación cociente

En esta sección estamos interesados en ver cómo se relacionan la aplicación cociente y la π-clausura. Comenzamos indicando que la semiprimidad pasa al cociente.

Antes, no obstante, conviene recordar que un ideal I de un álgebra A se dice *semiprimo* (resp *primo*) si el algebra cociente A/I es un álgebra semiprima (resp. prima). Es claro, en virtud del isomorfismo de $h^{\mathcal{I}_A}(I)$ con $\mathcal{I}_{A/I}$, que I es un ideal semiprimo (resp. primo) de A si, y sólo si, para cada ideal J de A tal que $J^2 \subseteq I$ se tiene que $J \subseteq I$ (resp. para cualesquiera ideales H, J de A tales que $HJ \subseteq I$, se tiene que $H \subseteq I$ ó $J \subseteq I$).

Proposición 1.5.1. *Sea A un álgebra semiprima e I un ideal de A. Entonces A/I es semiprima siempre que I sea un ideal π-cerrado.*

Demostración. Supongamos que I es un ideal π-cerrado y veamos que I es un ideal semiprimo. Sea J un ideal de A que satisface que $J^2 \subseteq I$. En particular,

$$(J \cap \mathrm{Ann}(I))^2 \subseteq I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0,$$

y por tanto $J \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$, y así $J \subseteq \overline{I} = I$.

□

La primidad del cociente fue estudiada en [12], donde se probó que en contexto semiprimo, *A/I es prima si, y sólo si I es un ideal π-cerrado maximal.* Como consecuencia de éste se deduce que la primidad también está determinada por la π-clausura, tal como se advirtió en [10, Proposition 3.3].

Proposición 1.5.2. *Para un álgebra no nula A, se tiene que A es prima si, y sólo si, carece de ideales π-cerrados propios distintos de cero.*

Demostración. Si A es prima entonces, por [12, Theorem 2.6], 0 es π-cerrado maximal, y así $\mathcal{I}_A^\pi = \{0, A\}$.

Recíprocamente, si $\mathcal{I}_A^\pi = \{0, A\}$, entonces $\mathrm{Ann}(A) = 0$, porque $A^2 \neq 0$. Veamos que, A es semiprima: Sea I ideal de A con $I^2 = 0$, esto implica que $I \subseteq \mathrm{Ann}(I)$ y por tanto $\mathrm{Ann}(I) = 0$ ó $\mathrm{Ann}(I) = A$ (y tomando anuladores $\overline{I} = \mathrm{Ann}(A)$) luego en cualquier caso I es cero, y así A semiprima. Como, por hipotesis, 0 es un ideal π-cerrado maximal, por [12, Theorem 2.6], 0 es un ideal primo, y por tanto A es un álgebra prima.

□

En todo lo que sigue, dado un ideal I de A, consideraremos la aplicación cociente $q : A \longrightarrow A/I$. Damos primeramente una curiosa propiedad, consecuencia de la Proposición 1.2.9

Corolario 1.5.3. *Sea A un álgebra y sea I un ideal π-cerrado de A tal que $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$. Entonces, $q(\mathrm{Ann}(I))$ es un ideal esencial en A/I.*

Demostración. Aplicando a $J = \mathrm{Ann}(I)$ la Proposición 1.2.9, tenemos que $\mathrm{Ann}(q(\mathrm{Ann}(I))) = q(\overline{I}) = q(I) = 0$, y así por el Lema 1.2.3, $q(\mathrm{Ann}(I))$ es esencial. □

La importancia de la Proposición 1.2.9 radica en afirmar que, bajo ciertas condiciones, la imagen por la aplicación cociente de un ideal π-cerrado es un ideal π-cerrado. La misma afirmación se puede hacer para un ideal π-denso.

Lema 1.5.4. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal π-cerrado de A. Si $D \in \mathbf{E}_A$, entonces $q(D) \in \mathbf{E}_{A/I}$.*

Demostración. Sea $D \in \mathbf{E}_A$. Teniendo en cuenta las Proposiciones 1.2.9 y 1.2.5, vemos que

$$\mathrm{Ann}(q(D \cap \mathrm{Ann}(I))) = q(\mathrm{Ann}(D \cap \mathrm{Ann}(I))) = q(\overline{I}) = q(I) = 0.$$

Como $\mathrm{Ann}(q(D)) \subseteq \mathrm{Ann}(q(D \cap \mathrm{Ann}(I)))$ se deduce que $\mathrm{Ann}(q(D)) = 0$, y por la Proposición 1.5.1 y el Corolario 1.2.4 tenemos que $q(D) \in \mathbf{E}_{A/I}$. □

Este resultado puede verse en otra forma equivalente.

Proposición 1.5.5. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal π-cerrado de A. Entonces, para cada ideal J de A,*

$$\overline{q(J)} = \mathrm{Ann}(q(\mathrm{Ann}(J))).$$

Demostración. Dado un ideal J de A, por el Corolario 1.4.5, $J \oplus \mathrm{Ann}(J) \in \mathbf{E}_A$, y en consecuencia, por el Lema 1.5.4, $q(J) + q(\mathrm{Ann}(J)) \in \mathbf{E}_{A/I}$. Por otro lado, como $q(\mathrm{Ann}(J)) \subseteq \mathrm{Ann}(q(J))$ y sabemos, por la Proposición 1.5.1, que A/I es un álgebra semiprima, tenemos que

$$q(J) \cap q(\mathrm{Ann}(J)) \subseteq q(J) \cap \mathrm{Ann}(q(J)) = 0.$$

Por lo tanto,

$$A/I = \overline{q(J) \oplus q(\mathrm{Ann}(J))}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta el Lema 1.3.8, concluimos que

$$\overline{q(J)} = \mathrm{Ann}(q(\mathrm{Ann}(J))).$$

□

Corolario 1.5.6. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal π-cerrado de A. Para cada ideal Q de A/I,*

$$\overline{q^{-1}(Q)} = q^{-1}(\overline{Q}).$$

Demostración. Sea Q un ideal del cociente A/I. Aplicando sucesivamente las Proposiciónes 1.2.9 y 1.5.5 tenemos que

$$q(\overline{q^{-1}(Q)}) = \mathrm{Ann}(q(\mathrm{Ann}(q^{-1}(Q))) = \overline{q(q^{-1}(Q))} = \overline{Q} = q(q^{-1}(\overline{Q})).$$

Como $\overline{q^{-1}(Q)}, q^{-1}(\overline{Q}) \in h^{\mathcal{I}_A}(I)$, por el isomorfismo de $h^{\mathcal{I}_A}(I)$ y $\mathcal{I}_{A/I}$, se sigue que $\overline{q^{-1}(Q)} = q^{-1}(\overline{Q})$

□

Ahora podemos probar que existe una relación muy estrecha entre distintas clases de ideales de A y las correspondientes clases de ideales del cociente y podemos describir los ideales π-cerrados del álgebra cociente.

Teorema 1.5.7. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal π-cerrado de A. Entonces*

(i) La aplicación $J \mapsto q(J)$ es una biyección de $h^{\mathbf{E}_A}(I)$ en $\mathbf{E}_{A/I}$, y de $h^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$ en $\mathcal{I}_{A/I}^\pi$.

(ii) La aplicación

$$H \mapsto \overline{q(H)}$$

es una biyección de $\ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I))$ en $\mathcal{I}_{A/I}^\pi$.

Demostración. En primer lugar adviértase que la aplicación $J \mapsto \mathrm{Ann}(J)$ induce una biyección de $\ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I))$ en $h^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$.

(i) En relación con los ideales esenciales basta aplicar el Lema 1.5.4 y el Corolario 1.5.6. Si $J \in h^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$, entonces existe un ideal H de A tal que $J = \mathrm{Ann}(H)$. Dado que $H \subseteq \mathrm{Ann}(I)$, por la Proposición 1.2.9, $q(J) \in \mathcal{I}_{A/I}^\pi$. Recíprocamente, dado $Q \in \mathcal{I}_{A/I}^\pi$, por el Corolario 1.5.6 se sigue que $\overline{q^{-1}(Q)} = q^{-1}(\overline{Q})$, y por tanto $q^{-1}(Q) \in h^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$. Resumiendo, la aplicación cociente q induce un biyección de $h^{\mathbf{E}_A}(I)$ en $\mathbf{E}_{A/I}$, y de $h^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$ en $\mathcal{I}_{A/I}^\pi$.

(ii) En virtud de la biyección $h^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$ en $\mathcal{I}_{A/I}^\pi$, se deduce que la aplicación $H \mapsto \mathrm{Ann}(q(\mathrm{Ann}(H)))$ de $\ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I))$ en $h^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$ es inyectiva sin más que tomar anuladores. Por otra parte, todo ideal π-cerrado de A/I es el anulador de un ideal (π-cerrado) de A/I, esto es, en virtud de (i), el anulador de la imagen de un ideal π-cerrado J de A que contiene a I, en particular $J = \mathrm{Ann}(H)$), con $H \in \ell^{\mathcal{I}_A^\pi}$ y así dicha aplicación es de hecho una biyección. Ahora, usando la Proposición 1.5.5 terminamos la demostración. □

Como consecuencia directa tenemos que

Corolario 1.5.8. *Si I es un ideal π-cerrado de un álgebra semiprima A, entonces*

(i) La aplicación
$$M \mapsto q(M)$$
es una biyección de $h^{\mathbf{M}_A^\pi}(I)$ en $\mathbf{M}_{A/I}^\pi$.

(ii) La aplicación
$$J \mapsto \overline{q(J)}$$
es una biyección de $\ell^{\mathbf{m}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I))$ en $\mathbf{m}_{A/I}^\pi$.

A su vez podemos deducir varias propiedades para el π-zócalo y el π-radical.

Corolario 1.5.9. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal π-cerrado de A. Entonces*

(i) $q(\pi{-}\mathrm{Soc}(A)) \subseteq \pi{-}\mathrm{Soc}(A/I) \subseteq \overline{q(\pi{-}\mathrm{Soc}(A))}$.

(ii) $\pi{-}\mathrm{Rad}(A/I) = \overline{q(\pi{-}\mathrm{Rad}(A))}$.

(iii) $q^{-1}(\pi{-}\mathrm{Rad}(A/I)) = \bigcap_{M \in h^{\mathbf{M}_A^\pi}(I)} M$.

(iv) Si $I \subseteq \pi{-}\mathrm{Rad}(A)$, entonces $\pi{-}\mathrm{Rad}(A/I) = \pi{-}\mathrm{Rad}(A)/I$.

Demostración. (i) Usando el Corolario 1.5.8.(ii) y la afirmación (1) de la nota 1.3.5 podemos ver que
$$\pi{-}\mathrm{Soc}(A/I) = \sum_{C \in \mathbf{m}_{A/I}^\pi} C = \sum_{m \in \ell^{\mathbf{m}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I))} \overline{q(m)} = \sum_{m \in \mathbf{m}_A^\pi} \overline{q(m)}.$$
Por lo tanto
$$\sum_{m \in \mathbf{m}_A^\pi} q(m) \subseteq \pi{-}\mathrm{Soc}(A/I) \subseteq \overline{\sum_{m \in \mathbf{m}_A^\pi} q(m)}.$$
Como
$$\sum_{m \in \mathbf{m}_A^\pi} q(m) = q(\sum_{m \in \mathbf{m}_A^\pi} m) = q(\pi{-}\mathrm{Soc}(A)),$$
se sigue que
$$q(\pi{-}\mathrm{Soc}(A)) \subseteq \pi{-}\mathrm{Soc}(A/I) \subseteq \overline{q(\pi{-}\mathrm{Soc}(A))}.$$

(ii) Tomando anuladores en (i) podemos ver que
$$\mathrm{Ann}(\pi{-}\mathrm{Soc}(A/I)) = \mathrm{Ann}(q(\pi{-}\mathrm{Soc}(A))).$$

Por otro lado, por la Proposición, 1.5.5 tenemos que

$$\overline{q(\pi{-}\mathrm{Soc}(A))} = \mathrm{Ann}(q(\mathrm{Ann}(\pi{-}\mathrm{Soc}(A)))),$$

y tomando anuladores concluimos que

$$\mathrm{Ann}(q(\pi{-}\mathrm{Soc}(A))) = \overline{q(\mathrm{Ann}(\pi{-}\mathrm{Soc}(A)))}.$$

Usando estas igualdades y teniendo en cuenta la nota 1.3.4, deducimos que

$$\pi{-}\mathrm{Rad}(A/I) = \overline{q(\pi{-}\mathrm{Rad}(A))}.$$

(iii) Por el Corolario 1.5.8.(i),

$$\pi{-}\mathrm{Rad}(A/I) = \bigcap_{Q \in \mathbf{M}^{\pi}_{A/I}} Q = \bigcap_{M \in h^{\mathbf{M}^{\pi}_{A}}(I)} q(M).$$

Por lo tanto,

$$q^{-1}(\pi{-}\mathrm{Rad}(A/I)) = q^{-1}\left(\bigcap_{M \in h^{\mathbf{M}^{\pi}_{A}}(I)} q(M)\right) =$$

$$\bigcap_{M \in h^{\mathbf{M}^{\pi}_{A}}(I)} q^{-1}(q(M)) = \bigcap_{M \in h^{\mathbf{M}^{\pi}_{A}}(I)} M.$$

(iv) Si $I \subseteq \pi{-}\mathrm{Rad}(A)$, entonces $h^{\mathbf{M}^{\pi}_{A}}(I) = \mathbf{M}^{\pi}_{A}$. Por lo tanto, por (iii), $q^{-1}(\pi{-}\mathrm{Rad}(A/I)) = \bigcap_{M \in \mathbf{M}^{\pi}_{A}} M = \pi{-}\mathrm{Rad}(A)$, y de hecho $\pi{-}\mathrm{Rad}(A/I) = q(\pi{-}\mathrm{Rad}(A))$, como era requerido. $\square$

En el Ejemplo 1.3.3 mostrábamos un ejemplo de álgebra π-radical, veamos ahora cómo encontrar más ejemplos de este tipo de álgebras.

Corolario 1.5.10. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal π-cerrado de A. Entonces*

$$A/I \ \ \textit{es un álgebra } \pi - \textit{radical} \Longleftrightarrow \pi{-}\mathrm{Soc}(A) \subseteq I.$$

En particular si A es un álgebra π-radical entonces A/I es un álgebra π-radical.

Demostración. Supongamos que A/I es un álgebra π-radical, esto es, $\pi{-}\mathrm{Soc}(A/I) = 0$. Por el Corolario 1.5.9.(i), tenemos que $q(\pi{-}\mathrm{Soc}(A)) = 0$, y de ahí $\pi{-}\mathrm{Soc}(A) \subseteq I$. Recípocamente, tomando anuladores, obtenemos que $\mathrm{Ann}(I) \subseteq \pi{-}\mathrm{Rad}(A)$, y por tanto $\mathbf{M}^{\pi}_{A} \subseteq h^{\mathbf{M}^{\pi}_{A}}(\mathrm{Ann}(I))$. En particular $h^{\mathbf{M}^{\pi}_{A}}(I) = \emptyset$ ya que en otro caso si $J \in h^{\mathbf{M}^{\pi}_{A}}(I)$ entonces $J \supseteq I \oplus \mathrm{Ann}(I)$ lo cual contradice el Corolario 1.4.5. Ahora, por el Corolario 1.5.8.(i), $\mathbf{M}^{\pi}_{A/I} = \emptyset$, y en consecuencia A/I es π-radical. $\square$

Nota 1.5.11. El ejemplo 1.4.2 prueba que la condición de que I sea un ideal π-cerrado en la hipótesis del corolario anterior es esencial: Recuérdese que si A es el álgebra del Ejemplo 1.4.2, entonces A es semiprima y $A/\pi-\mathrm{Soc}(A) \cong \mathbb{K}$, y por tanto no es π-radical.

Con respecto, a la descomponibilidad, probaremos

Corolario 1.5.12. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal π-cerrado propio de A. Entonces equivalen:*

(i) A/I *es un álgebra π-descomponible.*

(ii) $\pi-\mathrm{Rad}(A) \subseteq I$.

(iii) $I = \bigcap_{M \in h^{\mathbf{M}^{\pi}_{A}}(I)} M$.

En particular si A es un álgebra π-descomponible entonces A/I es un álgebra π-descomponible.

Demostración. La equivalencia $(i) \iff (ii)$ se sigue como en la demostración del Corolario 1.5.10, sin más que tener en cuenta la Nota 1.3.4.(2). Sólo falta probar que $I = \bigcap_{M \in h^{\mathbf{M}^{\pi}_{A}}(I)} M$ si $\pi-\mathrm{Rad}(A) \subseteq I$. Obsérvese que en esta circunstancia, por (i), A/I es π-descomponible y por tanto por la Nota 1.3.4, $\pi-\mathrm{Rad}(A/I) = 0$. En particular, en virtud del Corolario 1.5.9.(iii),

$$I = q^{-1}(0) = q^{-1}(\pi-\mathrm{Rad}(A/I)) = \bigcap_{M \in h^{\mathbf{M}^{\pi}_{A}}(I)} M.$$

□

1.6. Ideales π-cerrados en la unitización de un álgebra semiprima.

Con el fin de poder expresar con más precisión nuestros reultados recordemos que toda álgebra A puede verse inmersa en un álgebra unital.

Definición 1.6.1. Dada un álgebra A, con o sin unidad, podemos considerar el álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es $\mathbb{K}\mathbf{1} \oplus A$ y cuyo producto viene dado por $(\alpha\mathbf{1} + a)(\beta\mathbf{1} + b) = \alpha\beta\mathbf{1} + (\alpha b + \beta a + ab)$. Dicha álgebra recibe el nombre *unitización* de A.

Es fácil probar que $\mathbf{1} := (0, 1)$ es la unidad de A^1, y que A puede verse como una subálgebra de A^1, mediante la aplicación $x \mapsto (x, 0)$, y que en tal caso $A^1 = A \oplus \mathbb{K}\mathbf{1}$.

Un ideal I de un álgebra A se dice *modular* si existe $u \in A$ (llamada *unidad modular* de I) tal que $A(\mathbf{1}-u)+(\mathbf{1}-u)A \subseteq I$. En ese caso, nótese que $u+x$, para $x \in I$, es también una unidad modular para I. Por otro lado, si v es una unidad modular para I, entonces

$$u-v = u(\mathbf{1}-v)-(\mathbf{1}-u)v \in I.$$

Por tanto, $u+I$ es el conjunto de todas las unidades modulares de I. En consecuencia, es evidente que $I' := I \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1}-u)$ es un ideal bien definido de A^1. Denotamos por $\mathcal{M}_A$ al conjunto de todos los ideales modulares de A. Nótese que $A \in \mathcal{M}_A$. Además, $0 \in \mathcal{M}_A$ si y solo si A tiene unidad. En ese caso, $\mathcal{M}_A = \mathcal{I}_A$. Es claro que si $I \in \mathcal{M}_A$, entonces $I' \cap A = I$.

Lema 1.6.2. *Sea A un álgebra, y sea S un subespacio de A^1. Si $S \nsubseteq A$, entonces $S = (S \cap A) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1}-u)$ para conveniente $u \in A$.*

Demostración. Supongamos que $S \nsubseteq A$ y fijemos $a_0 \in A$ y $\alpha_0 \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ tal que $a_0 + \alpha_0\mathbf{1} \in S$. Si tomamos $u := -\alpha_0^{-1}a_0$, entonces

$$\mathbf{1}-u = \alpha_0^{-1}(a_0+\alpha_0\mathbf{1}) \in S.$$

Por tanto $(S \cap A) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1}-u) \subseteq S$. Recíprocamente, dado $x \in S$, escribimos $x = a + \alpha\mathbf{1}$ para $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, vemos que $x - \alpha(\mathbf{1}-u) = a + \alpha u \in S \cap A$, y de hecho

$$x = a + \alpha u + \alpha(\mathbf{1}-u) \in (S \cap A) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1}-u),$$

como era deseado. □

Ahora podemos describir los ideales de la unitización.

Proposición 1.6.3. *Si A es un álgebra, entonces*

$$\mathcal{I}_{A^1} = \mathcal{I}_A \cup \{I' : I \in \mathcal{M}_A\}.$$

De hecho, si $I \in \mathcal{I}_{A^1}\backslash\mathcal{I}_A$, entonces $I = (I \cap A)'$

Demostración. La inclusión $\mathcal{I}_A \cup \{I' : I \in \mathcal{M}_A\} \subseteq \mathcal{I}_{A^1}$ es clara. Sea I un ideal de A^1. Si $I \subseteq A$, entonces $I \in \mathcal{I}_A$. Asumamos que $I \nsubseteq A$. Entonces, por el Lema 1.6.2, existe $u \in A$ tal que $I = (I \cap A) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1}-u)$. Por tanto $A(\mathbf{1}-u)+(\mathbf{1}-u)A \subseteq I \cap A$, y de hecho $I \cap A$ es un ideal modular de A con unidad modular u, e $I = (I \cap A)'$. □

Como consecuencia

Corolario 1.6.4. *Para toda álgebra A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *A es semiprima.*

(ii) *A^1 es semiprima.*

Demostración. Si I es un ideal modular de A con unidad modular u, entonces

$$0 \neq \mathbf{1} - 2u + u^2 = (\mathbf{1} - u)^2 \in (I')^2.$$

Por tanto, por la Proposición 1.6.3, tenemos que

$$\{I \in \mathcal{I}_A \,:\, I^2 = 0\} = \{I \in \mathcal{I}_{A^1} \,:\, I^2 = 0\}.$$

$\square$

También podemos describir los ideales esenciales.

Corolario 1.6.5. *Sea A un álgebra distinta de cero. Tenemos que:*

(i) *Si A tiene unidad, entonces $\mathbf{E}_{A^1} = \{D' \,:\, D \in \mathbf{E}_A\}$.*

(ii) *Si A no tiene unidad, entonces $\mathbf{E}_{A^1} = \mathbf{E}_A \cup \{D' \,:\, D \in \mathcal{M}_A \cap \mathbf{E}_A\}$.*

Demostración. Nótese que en cualquier caso, por la Proposición 1.6.3 tenemos las siguientes afirmaciones:

a) Si $D \in \mathbf{E}_{A^1}$, entonces $D \cap A \in \mathbf{E}_A$.

b) Si $D \in \mathcal{M}_A \cap \mathbf{E}_A$, entonces $D' \in \mathbf{E}_{A^1}$.

Ahora, el corolario se sigue inmediatamente de a) y b). $\square$

Es claro que, si I es un ideal de A, entonces

$$\mathrm{Ann}_{A^1}(I) \cap A = \mathrm{Ann}_A(I).$$

Para poder comprender el siguiente enunciado, debemos advertir que por $\widetilde{I}$ representamos la π-clausura relativa a A^1 de un ideal I de A^1

Proposición 1.6.6. *Sea A un álgebra semiprima y sea U un ideal de A^1. Entonces*

$$\mathrm{Ann}_{A^1}(U) \cap A = \mathrm{Ann}(U \cap A),$$

y en consecuencia

$$\widetilde{U} \cap A = \overline{U \cap A}$$

y

$$\{U \cap A;\ \ U \in \mathcal{I}^{\pi}_{A^1}\} \subseteq \mathcal{I}^{\pi}_A.$$

Demostración. Supongamos que U es un ideal de A^1 el cual no esta contenido en A. Por la Proposición 1.6.3, $U = I'$ para algún $I \in \mathcal{M}_A$. Sea e una unidad modular para I. Como

$$\mathrm{Ann}_A(U \cap A)U = \mathrm{Ann}_A(I)(I \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1} - e)) = \mathrm{Ann}_A(I)(\mathbf{1} - e) \subseteq \mathrm{Ann}_A(I) \cap I = 0,$$

y análogamente $U\mathrm{Ann}_A(U \cap A) = 0$, se sigue que $\mathrm{Ann}_A(U \cap A) \subseteq \mathrm{Ann}_{A^1}(U)$, y de ahí $\mathrm{Ann}_A(U \cap A) \subseteq \mathrm{Ann}_{A^1}(U) \cap A$. La inclusión contraria es clara. Finalmente, podemos deducir

$$\widetilde{U} \cap A = \mathrm{Ann}_{A^1}(\mathrm{Ann}_{A^1}(U)) \cap A = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}_{A^1}(U) \cap A) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(U \cap A)) = \overline{U \cap A}.$$

□

Un ideal I se dirá *anulador modular* si $\mathrm{Ann}_A(I)$ es un ideal modular de A, esto es, siempre que exista un elemento $e \in A$ (llamado *unidad anulador modular* para I) tal que

$$(\mathbf{1} - e)A + A(\mathbf{1} - e) \subseteq \mathrm{Ann}_A(I).$$

Representaremos por $\mathcal{N}_A$ al conjunto de todos los ideales anuladores modulares de A.

Proposición 1.6.7. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal de A. Equivalen:*

(i) $I \in \mathcal{N}_A$.

(ii) $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) \neq \mathrm{Ann}_A(I)$.

En este caso,

$$\mathrm{Ann}_{A^1}(I) = \mathrm{Ann}_A(I)'.$$

Demostración. (i) ⇒ (ii). Si $I \in \mathcal{N}_A$, entonces

$$I\mathrm{Ann}_A(I)' + \mathrm{Ann}_A(I)'I \subseteq I \cap \mathrm{Ann}_A(I) = 0,$$

y de ahí $\mathrm{Ann}_A(I)' \subseteq \mathrm{Ann}_{A^1}(I)$. Por lo tanto $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) \notin \mathcal{I}_A$, y en particular $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) \neq \mathrm{Ann}_A(I)$.

(ii) ⇒ (i). Supongamos que $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) \neq \mathrm{Ann}_A(I)$. En particular, $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) \notin \mathcal{I}_A$. Dado que, por la Proposición 1.6.6, $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) \cap A = \mathrm{Ann}_A(I)$, de la Proposición 1.6.3 se sigue que $\mathrm{Ann}_A(I) \in \mathcal{M}_A$, esto es $I \in \mathcal{N}_A$, y que $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) = \mathrm{Ann}_A(I)'$. □

Corolario 1.6.8. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal π-cerrado de A.*

(i) Si $I \in \mathcal{M}_A$ entonces $I' \in \mathcal{I}^{\pi}_{A^1}$

(ii) Si $I \notin \mathcal{M}_A$ entonces $I \in \mathcal{I}^{\pi}_{A^1}$.

En consecuencia

$$(\mathcal{I}^{\pi}_A \backslash \mathcal{M}_A) \bigcup \{I' \,:\, I \in \mathcal{I}^{\pi}_A \cap \mathcal{M}_A\} \subseteq \mathcal{I}^{\pi}_{A^1}.$$

(iii) La aplicación

$$U \mapsto U \cap A$$

es un epimorfismo de $\mathcal{I}^{\pi}_{A^1}$ sobre $\mathcal{I}^{\pi}_A$ que conserva el orden.

Demostración. Por hipótesis, existe $J \in \mathcal{I}_A$ tal que $I = \mathrm{Ann}(J)$

(i) Supongamos que $I \in \mathcal{M}_A$, por la Proposición 1.6.7 deducimos que

$$I' = \mathrm{Ann}(J)' = \mathrm{Ann}_{A^1}(J) \in \mathcal{I}^{\pi}_{A^1}.$$

(ii) Supongamos que $J \notin \mathcal{N}_A$, por la Proposición 1.6.7 deducimos que

$$I = \mathrm{Ann}(J) = \mathrm{Ann}_{A^1}(J) \in \mathcal{I}^{\pi}_{A^1}.$$

(iii) Sea $U \in \mathcal{I}^{\pi}_{A^1}$. Por la Proposición 1.6.6, $U \cap A \in \mathcal{I}^{\pi}_A$. En particular, la aplicación $U \mapsto U \cap A$, esta bien definida y claramente es un homomorfismo de retículos. La sobreyectividad se deduce de (i) y (ii).

□

Demos ahora una descripción de los ideales π-cerrados de la unitización de un álgebra. Centrémonos en primer lugar en las álgebras semiprimas con unidad.

Proposición 1.6.9. *Sea A un álgebra semiprima con unidad y sea I un ideal de A. Entonces*

(i) $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) = \mathrm{Ann}_A(I)'$ *y* $\mathrm{Ann}_{A^1}(I') = \mathrm{Ann}_A(I)$.

Como una consecuencia, $\widetilde{I} = \overline{I}$ y $\widetilde{(I')} = (\overline{I})'$.

(ii) $\mathcal{I}^{\pi}_{A^1} = \mathcal{I}^{\pi}_A \bigcup \{I' \,:\, I \in \mathcal{I}^{\pi}_A\}$.

(iii)

$$\mathbf{m}^{\pi}_{A^1} = \mathbf{m}^{\pi}_A \cup \{\mathbb{K}(\mathbf{1} - 1)\}, \qquad \mathbf{M}^{\pi}_{A^1} = \{A\} \cup \{I' \,:\, I \in \mathbf{M}^{\pi}_A\}$$

y

$$\mathbf{m}^{\pi}_A \subseteq \{H \cap A;\ H \in \mathbf{m}^{\pi}_{A^1}\} \subseteq \mathbf{m}^{\pi}_A \cup \{0\}.$$

En particular,

$$\pi\mathrm{-Soc}(A^1) = \pi\mathrm{-Soc}(A) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1} - 1) \quad y \quad \pi\mathrm{-Rad}(A^1) = \pi\mathrm{-Rad}(A).$$

Demostración. (i) Por la Proposición 1.6.7 tenemos que $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) = \mathrm{Ann}_A(I)'$. Por otro lado, por la Proposición 1.6.6 tenemos que

$$\mathrm{Ann}_{A^1}(I') \cap A = \mathrm{Ann}_A(I' \cap A) = \mathrm{Ann}_A(I),$$

y de ahí, aplicando la igualdad anterior y la Proposición 1.6.3 sucesivamente, obtenemos que

$$\mathrm{Ann}_A(I) \subseteq \mathrm{Ann}_{A^1}(I') \subseteq \mathrm{Ann}_A(I)'.$$

Pero, si 1 es el elemento unidad de A, entonces

$$0 \neq \mathbf{1} - 1 = (\mathbf{1} - 1)^2 \in I'\mathrm{Ann}_A(I)',$$

y en consecuencia $\mathrm{Ann}_{A^1}(I') \neq \mathrm{Ann}_A(I)'$. Así, $\mathrm{Ann}_A(I) = \mathrm{Ann}_{A^1}(I')$.

Finalmente, aplicando ambas igualdades, una para I y la otra para $\mathrm{Ann}_A(I)$, se sigue que

$$\widetilde{I} = \mathrm{Ann}_{A^1}(\mathrm{Ann}_{A^1}(I)) = \mathrm{Ann}_{A^1}(\mathrm{Ann}_A(I)') = \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Ann}_A(I)) = \overline{I}$$

y

$$\widetilde{(I')} = \mathrm{Ann}_{A^1}(\mathrm{Ann}_{A^1}(I')) = \mathrm{Ann}_{A^1}(\mathrm{Ann}_A(I)) = \mathrm{Ann}_A(\mathrm{Ann}_A(I))' = (\overline{I})'.$$

(ii) Se sigue del Proposición 1.6.3 y la consecuencia de la afirmación (i).

(iii) Por (ii) tenemos que $\mathbf{m}^\pi_{A^1} = \mathbf{m}^\pi_A \cup \{\mathbb{K}(\mathbf{1}-1)\}$, $\mathbf{M}^\pi_{A^1} = \{A\} \cup \{I' \,:\, I \in \mathbf{M}^\pi_A\}$ y $\mathbf{m}^\pi_A \subseteq \{H \cap A;\; H \in \mathbf{m}^\pi_{A^1}\} \subseteq \mathbf{m}^\pi_A \cup \{0\}$.

Como consecuencia,

$$\pi\mathrm{-Soc}(A^1) = \pi\mathrm{-Soc}(A) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1} - 1) \text{ y } \pi\mathrm{-Rad}(A^1) = \pi\mathrm{-Rad}(A).$$

$\square$

Trabajemos ahora en el caso sin unidad. El siguiente resultado marca las diferencias entre ambos casos.

Proposición 1.6.10. *Sea A un álgebra semiprima sin unidad. Entonces*

$$\mathcal{M}_A \cap \mathcal{N}_A = \emptyset.$$

Demostración. Supongamos que existe un ideal I de A el cual es simultáneamente modular y anulador modular. Si e es una unidad modular para I y f es una unidad anulador modular para I, entonces tenemos que

$$(\mathbf{1}-e)A + A(\mathbf{1}-e) \subseteq I \ \text{ y } \ (\mathbf{1}-f)A + A(\mathbf{1}-f) \subseteq \operatorname{Ann}(I).$$

Por lo tanto,

$$[(\mathbf{1}-e)(\mathbf{1}-f)]A = [(\mathbf{1}-e) - (\mathbf{1}-e)f]A \subseteq$$
$$(\mathbf{1}-e)A + [(\mathbf{1}-e)f]A \subseteq I + IA \subseteq I.$$

Por otro lado,

$$[(\mathbf{1}-e)(\mathbf{1}-f)]A = [(\mathbf{1}-f) - e(\mathbf{1}-f)]A \subseteq (\mathbf{1}-f)A + [e(\mathbf{1}-f)]A \subseteq$$

$$\operatorname{Ann}(I) + \operatorname{Ann}(I)A \subseteq \operatorname{Ann}(I).$$

Así $[(\mathbf{1}-e)(\mathbf{1}-f)]A \subseteq I \cap \operatorname{Ann}(I)$, y por tanto $[(\mathbf{1}-e)(\mathbf{1}-f)]A = 0$, y así $e+f-ef$ es una unidad izquierda para A. Análogamente podemos ver que $A[(\mathbf{1}-e)(\mathbf{1}-f)] = 0$, y así $e+f-ef$ es una unidad derecha para A. Así hemos encontrado una unidad para A, lo cual es una contradicción. □

Proposición 1.6.11. *Sea A un álgebra semiprima sin unidad y sea I un ideal de A.*

(i) *Si $\overline{I} \in \mathcal{M}_A$, entonces*

$$\operatorname{Ann}_{A^1}(I) = \operatorname{Ann}_A(I) \quad e \quad \widetilde{I} = (\overline{I})'.$$

Si además $I \in \mathcal{M}_A$, entonces

$$\operatorname{Ann}_{A^1}(I) = \operatorname{Ann}_{A^1}(I') \quad e \quad \widetilde{I} = (I')^{\sim}$$

(ii) $\mathcal{I}^{\pi}_{A^1} = (\mathcal{I}^{\pi}_A \backslash \mathcal{M}_A) \bigcup \{I' \,:\, I \in \mathcal{I}^{\pi}_A \cap \mathcal{M}_A\}$.

(iii) *La aplicación*

$$U \mapsto U \cap A$$

es un isomorfismo de $\mathcal{I}^{\pi}_{A^1}$ sobre $\mathcal{I}^{\pi}_A$ que conserva el orden y

$$\mathbf{m}^{\pi}_{A^1} = (\mathbf{m}^{\pi}_A \backslash \mathcal{M}_A) \bigcup \{I' \,:\, I \in \mathbf{m}^{\pi}_A \cap \mathcal{M}_A\} \quad y \quad \mathbf{m}^{\pi}_A = \{H \cap A;\ H \in \mathbf{m}^{\pi}_{A^1}\}.$$

Demostración. (i) Si $\overline{I} \in \mathcal{M}_A$, entonces, por la Proposición 1.6.10, $\overline{I} \notin \mathcal{N}_A$, y de ahí $I \notin \mathcal{N}_A$. Ahora, por la Proposición 1.6.7, tenemos la igualdad $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) = \mathrm{Ann}_A(I)$. Por otro lado, ya que $\overline{I} \in \mathcal{M}_A$ entonces $\mathrm{Ann}_A(I) \in \mathcal{N}_A$, de nuevo por la Proposición 1.6.7, tenemos la igualdad $\mathrm{Ann}_{A^1}(\mathrm{Ann}_A(I)) = (\overline{I})'$. Por las dos igualdades probadas anteriormente deducimos que $\widetilde{I} = (\overline{I})'$.

Ahora, supongamos además que $I \in \mathcal{M}_A$. Por la Proposición 1.6.6 vemos que

$$\mathrm{Ann}_{A^1}(I') \cap A = \mathrm{Ann}_A(I' \cap A) = \mathrm{Ann}_A(I),$$

y de ahí $\mathrm{Ann}_A(I) \subseteq \mathrm{Ann}_{A^1}(I')$. Como claramente $\mathrm{Ann}_{A^1}(I') \subseteq \mathrm{Ann}_{A^1}(I)$, por la parte anterior de la demostración se sigue que $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) = \mathrm{Ann}_{A^1}(I')$. Finalmente, por la cadena $I \subseteq I' \subseteq (\overline{I})' = \widetilde{I}$ deducimos que $\widetilde{I} = (I')^{\sim}$.

(ii) Fijemos un ideal U π-cerrado de A^1.

En primer lugar supongamos que $U \subseteq A$. Entonces, por la Proposición 1.6.6, vemos que $U \in \mathcal{I}_A^\pi$. Si $U \in \mathcal{M}_A$ teniendo en cuenta (i), deducimos que

$$U = \widetilde{U} = (\overline{U})' = U'$$

lo cual es una contradicción, y por tanto $U \in \mathcal{I}_A^\pi \backslash \mathcal{M}_A$.

En segundo lugar supongamos que $U \not\subseteq A$. Entonces, por la Proposición 1.6.3, $U = I'$ para un ideal modular I de A. Teniendo en cuenta la Proposición 1.6.6 vemos que $I = U \cap A \in \mathcal{I}_A^\pi$ y por tanto $I \in \mathcal{I}_A^\pi \cap \mathcal{M}_A$ y $U = I'$.

La inclusión opuesta fue vista en el Corolario 1.6.8, en caso general.

(iii) Solo hay que probar la inyectividad ya por el Corolario 1.6.8 sabemos que la aplicación es un epimorfismo. La descripción de los ideales π-cerrados de A^1 dada en (ii) y la Proposición 1.6.3 aseguran la inyectividad y, como consecuencia, la relación entre los ideales π-cerrados minimales de A^1 y los ideales π-cerrados minimales de A.

$\square$

Corolario 1.6.12. *Sea A un álgebra semiprima sin unidad. Entonces A^1 es π-radical si, y sólo si, A es π-radical.*

Este resultado dista mucho de lo que ocurre en el caso con unidad. Nótese que un álgebra con unidad 1 siempre tiene un ideal π-cerrado mínimal: $\mathbb{K}(\mathbf{1} - 1)$ y por tanto no puede ser nunca π-radical.

Por el contrario, el siguiente resultado es cierto para álgebras semiprimas con o sin unidad.

Corolario 1.6.13. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces*

(i) $\pi{-}\mathrm{Soc}(A) \subseteq \pi{-}\mathrm{Soc}(A^1) \cap A \subseteq (\pi{-}\mathrm{Soc}(A) : A)$

(ii) $\overline{\pi{-}\mathrm{Soc}(A)} = \pi{-}\widetilde{\mathrm{Soc}}(A^1) \cap A$.

(iii) $\pi{-}\mathrm{Rad}(A^1) \cap A = \pi{-}\mathrm{Rad}(A)$.

Demostración. (i)

La primera afirmación es consecuencia inmediata de las Proposiciones 1.6.9.(iii) y 1.6.11.(iii)

(ii)

Esta aseveración se sigue de (i) y de las Proposiciones 1.3.7 y 1.6.6

(iii)

Tomando anuladores en (ii) y teniendo en mente las Proposiciones 1.2.7 y 1.6.6, se deduce que

$$\pi{-}\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Ann}(\pi{-}\mathrm{Soc}(A^1) \cap A) = \mathrm{Ann}_{A^1}(\pi{-}\mathrm{Soc}(A^1)) \cap A = \pi{-}\mathrm{Rad}(A^1) \cap A.$$

□

Como una consecuencia de las descripciones, en uno y otro caso, de los ideales π-cerrados terminamos dando un resultado común (con o sin unidad) a de la relación entre la desomponibilidad de un álgebra semiprima y su unitización.

Corolario 1.6.14. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces A^1 es π-descomponible si, y sólo si, A es π-descomponible.*

Demostración. Si A^1 es π-descomponible, en virtud del Corolario 1.6.13.(ii), $A = \widetilde{\pi{-}\mathrm{Soc}(A^1)} \cap A = \overline{\pi{-}\mathrm{Soc}(A)}$, luego A es π-descomponible. Recíprocamente si A es π-descomponible, en el caso con unidad, aplicamos la Proposición 1.6.9, y en el caso sin unidad, aplicamos la Proposición 1.6.11 y el Corolario 1.6.13.(ii). □

1.7. π-clausura y suma directa de álgebras

En esta sección, analizamos la relación entre la π-clausura de un ideal de una suma directa de álgebras y la π-clausura de los ideales de cada uno de los factores.

Introduzcamos un poco de lenguaje.

Definición 1.7.1. Dada una familia no vacía $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de álgebras distintas de cero, consideremos el producto cartesiano $A = \prod A_\lambda$ y definamos en A la suma y el producto coordenada a coordenada. Es fácil comprobar que $A = \prod A_\lambda$ es un álgebra que llamaremos *producto directo* de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Un *producto subdirecto* de la familia de álgebras $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es cualquier subálgebra A del producto directo $\prod A_\lambda$ tal que la proyección canónica $p_\lambda : A \to A_\lambda$ es sobreyectiva. Este hecho se expresará escribiendo $A \leq \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Se define la *suma directa* de la familia $\{A_\lambda\}$, $\bigoplus A_\lambda$ como el producto subdirecto de dicha familia formada por aquellos elementos cuyas coordenadas distintas de cero son finitas.

En un primer resultado vamos a describir los ideales, y a aprender cómo calcular sus anuladores en una suma directa de álgebras. En contexto semiprimo también describiremos los ideales π-cerrados.

Proposición 1.7.2. *Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de álgebras distintas de cero, y fijemos $A = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Entonces:*

(i) $\mathcal{I}_A$ es el conjunto de todos los subespacios I de A para el cual existe una familia $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, donde cada I_λ es un ideal de A_λ, que satisface

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq I \subseteq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda : A_\lambda).$$

(ii) Si $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia, donde cada I_λ es un ideal de A_λ, entonces

$$\mathrm{Ann}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ann}_{A_\lambda}(I_\lambda) \quad y \quad \overline{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \overline{I_\lambda}.$$

Como consecuencia,

$$\{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \ : \ I_\lambda \in \mathcal{I}^\pi_{A_\lambda} \ \text{ para todo } \ \lambda\in\Lambda\} \subseteq \mathcal{I}^\pi_A$$

y, vemos cada A_λ dentro de A,

$$\mathcal{I}^\pi_{A_\lambda} = \{I \in \mathcal{I}^\pi_A : I \subseteq A_\lambda\}.$$

(iii) Si A es semiprima, entonces

$$\mathcal{I}^\pi_A = \{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \ : \ I_\lambda \in \mathcal{I}^\pi_{A_\lambda} \ \text{ para todo } \ \lambda\in\Lambda\}.$$

Demostración. (i) Si I es un subespacio de A tal que

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq I \subseteq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda : A_\lambda),$$

donde cada I_λ es un ideal de A_λ, entonces es evidente que I es un ideal de A. Con el fin de demostrar el recíproco vamos a fijar un ideal I de A y fijemos $I_\lambda := I\cap A_\lambda$ para cada $\lambda\in\Lambda$. Claramente cada I_λ es un ideal de A_λ, y es inmediato verificar que

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq I \subseteq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda : A_\lambda).$$

(ii) Para una determinada familia $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, es claro que

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ann}_{A_\lambda}(I_\lambda) \subseteq \mathrm{Ann}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda).$$

Para cada $\lambda_0 \in \Lambda$, denotamos por p_{λ_0} la proyección de A en A_{λ_0}, y nótese que

$$p_{\lambda_0}(\mathrm{Ann}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)) \subseteq \mathrm{Ann}_{A_{\lambda_0}}(p_{\lambda_0}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)) = \mathrm{Ann}_{A_{\lambda_0}}(I_{\lambda_0}).$$

Por tanto

$$\mathrm{Ann}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) \subseteq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ann}_{A_\lambda}(I_\lambda),$$

y concluimos que

$$\mathrm{Ann}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ann}_{A_\lambda}(I_\lambda).$$

Tomando anuladores en la igualdad, deducimos que

$$\overline{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \overline{I_\lambda},$$

y por lo tanto las consecuencias de la afirmación son claras.

(iii) Finalmente supongamos que A es semiprima y que I es un ideal π-cerrado de A. Consideramos la familia $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq I \subseteq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda : A_\lambda)$. Por (ii) podemos suponer que $I_\lambda \in \mathcal{I}^\pi_{A_\lambda}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Por la Proposición 1.3.7, $(I_\lambda : A_\lambda) = I_\lambda$, y vemos que $I = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. Hemos encontrado la inclusion

$$\mathcal{I}^\pi_A \subseteq \{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \ : \ I_\lambda \in \mathcal{I}^\pi_{A_\lambda} \ \text{ para cada } \ \lambda \in \Lambda\}.$$

La inclusión contraria fue vista en (ii).

$\square$

Proposición 1.7.3. *Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia no vacía de álgebras distintas de cero, y sea $A = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Entonces: A tiene anulador cero si, y solo si, A_λ tiene anulador cero para todo λ en Λ. En ese caso, $\mathbf{m}^\pi_A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{m}^\pi_{A_\lambda}$, y los ideales esenciales de A son sólo los que contienen a uno de la forma $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$, donde D_λ es un ideal esencial de A_λ para cada $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Por la Proposición 1.7.2.(ii), $\mathrm{Ann}(A) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ann}_{A_\lambda}(A_\lambda)$, y por lo tanto la primera afirmación es clara. Ahora, supongamos que $\mathrm{Ann}(A) = 0$. Para un valor fijo de λ, de 1.7.2.(ii) es claro que $\mathbf{m}^\pi_{A_\lambda} \subseteq \mathbf{m}^\pi_A$. Recíprocamente, dados $I \in \mathbf{m}^\pi_A$ y una familia de ideales $\{I_\lambda\}$ tal que $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq I \subseteq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda : A_\lambda)$, teniendo en cuenta 1.7.2.(ii), podemos suponer que $I_\lambda \in \mathcal{I}^\pi_{A_\lambda}$ para todo $\lambda \in \Lambda$, esto es $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \in \mathcal{I}^\pi_A$. Si $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = 0$, entonces $I_\lambda = 0$, y así $(I_\lambda : A_\lambda) = \mathrm{Ann}_{A_\lambda}(A_\lambda) = 0$ para todo λ, y llegamos a la contradicción $I = 0$. Por tanto $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \neq 0$, y, por la minimalidad, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $I = I_{\lambda_0} \in \mathbf{m}^\pi_{A_{\lambda_0}}$ por 1.7.2.(ii).

Supongamos que D_λ es un ideal esencial de A_λ para cada λ, e I es un ideal de A tal que $I \cap (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda) = 0$. Si $\{I_\lambda\}$ es una familia de ideales tal que

$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subseteq I \subseteq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda : A_\lambda)$, entonces podemos ver que $(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda)\cap(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda) = 0$, por tanto $I_\lambda \cap D_\lambda = 0$, y así $I_\lambda = 0$ para todo λ. Por lo tanto $I = 0$. Así $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$ es un ideal esencial de A. Por otro lado, dado un ideal esencial D de A, teniendo en cuenta que los ideales de cada A_λ son ideales de A, es claro que cada $D_\lambda := D \cap A_\lambda$ es un ideal esencial de A_λ. Además, la inclusión $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda \subseteq D$ es obvia.

□

Corolario 1.7.4. *Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia no vacía de álgebras distintas de cero con anulador cero, y sea $A = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Entonces:*

$$\pi\mathrm{-Soc}(A) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \pi\mathrm{-Soc}(A_\lambda) \quad y \quad \pi\mathrm{-Rad}(A) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \pi\mathrm{-Rad}(A_\lambda).$$

Demostración. Por la Proposición anterior,

$$\mathbf{m}_A^\pi = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathbf{m}_{A_\lambda}^\pi,$$

y como consecuencia tenemos que $\pi\mathrm{-Soc}(A) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \pi\mathrm{-Soc}(A_\lambda)$. Tomando anuladores deducimos que $\pi\mathrm{-Rad}(A) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \pi\mathrm{-Rad}(A_\lambda)$.

□

Corolario 1.7.5. *Sea A un álgebra distinta de cero y anulador cero. Todo ideal π-cerrado minimal de A que sea un sumando directo de A es un álgebra prima.*

Demostración. Supongamos que I es un ideal π-cerrado minimal de A y $A = I \oplus J$ para conveniente ideal J de A. Teniendo en cuenta las Proposiciones 1.7.2.(ii) y 1.7.3 podemos ver que $\mathcal{I}_I^\pi = \{0, I\}$ y $\mathrm{Ann}_I(I) = 0$, y por tanto I es un álgebra no nula. Así podemos concluir por la Proposición 1.5.2 que I es un álgebra prima.

□

Proposición 1.7.6. *Sea A un álgebra semiprima. Si $\{I_j\}_{j\in J}$ es una familia no vacia de ideales π-cerrados minimales de A, entonces $\sum_{j\in J} I_j = \oplus_{j\in J} I_j$, y para cada $j_0 \in J$, se tiene que $\oplus_{j\in J\setminus\{j_0\}} I_j \subseteq \overline{\mathrm{Ann}(I_{j_0})}$. Como consecuencia, si A es π-descomponible entonces $A = \overline{\bigoplus_{m_\lambda\in\mathbf{m}_A^\pi} m_\lambda}$*

Demostración. Fijemos $j_0 \in J$ y nótese que $I_{j_0} \cap I_j = 0$, por tanto $I_{j_0} I_j = 0$, para todo $j \in J$ con $j \neq j_0$. Por lo tanto, tenemos que $I_{j_0}(\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}} I_j) = 0$. Por la semiprimidad de A se sigue que $\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}} I_j \subseteq \mathrm{Ann}(I_{j_0})$ y $I_{j_0} \cap (\sum_{j\in J\setminus\{j_0\}} I_j) = 0$. Moviendo $j_0 \in J$ concluimos que $\sum_{j\in J} I_j = \oplus_{j\in J} I_j$.

□

Permítasenos que por complitud enunciemos y probemos el siguiente conocido resultado.

Corolario 1.7.7. *[10, Propositon 5.6] Sea A un álgebra distinta de cero con anulador cero. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $A = \pi{-}\mathrm{Soc}(A)$.

(ii) A es isomorfo a una suma directa de una familia de álgebras primas distintas de cero.

(iii) $\mathcal{I}_A^\pi = \{\bigoplus_{\lambda\in J} I_\lambda \,:\, J \subseteq \Lambda\}$, *donde $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es la familia de los ideales π-cerrados minimales de A.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Esta implicación se sigue de aplicar la Proposición 1.7.6 y el Corolario 1.7.5.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia no vacía de álgebras primas distintas de cero. Por la Proposición 1.5.2, $\mathcal{I}_{A_\lambda}^\pi = \{0, A_\lambda\}$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Ahora, por la Proposción 1.7.2.(iii), vemos que $\mathcal{I}^\pi_{\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \{\bigoplus_{\lambda\in J} A_\lambda \,:\, J \subseteq \Lambda\}$, y en particular $\mathbf{m}^\pi_{\oplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \{A_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) es obvia.

□

1.8. π-clausura y producto subdirecto esencial

En esta sección vamos a hacer una pequeña incursión en el producto subdirecto esencial, con la idea de hacer algunas observaciones a los importantes resultados obtenidos en [10].

Lema 1.8.1. *Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de álgebras con anulador cero. Entonces el producto $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es un álgebra con anulador cero.*

Demostración. Puesto que A_λ es un ideal del producto $B := \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, se tiene que, para cada proyección $p_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \longrightarrow A_\lambda$,

$$p_\lambda(\mathrm{Ann}_B(B)) \subseteq \mathrm{Ann}_{A_\lambda}(p_\lambda(B)) = \mathrm{Ann}_{A_\lambda}(A_\lambda) = 0,$$

luego $\mathrm{Ann}_B(B) = 0$.

□

Proposición 1.8.2. *Sea A_λ una familia de álgebras con anulador cero. Entonces los ideales esenciales del producto directo $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ son sólo los que contienen a uno de la forma $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$, donde D_λ es un ideal esencial de A_λ para cada $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Supongamos que para cada $\lambda \in \Lambda$, D_λ es un ideal esencial de A_λ, e I es un ideal del producto directo $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ tal que $I \cap (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda) = 0$. En particular, para cada $\lambda \in \Lambda$, $I \cap D_\lambda = 0$ ó, si se quiere, $0 = I \cap A_\lambda \cap D_\lambda$ y por tanto por ser D_λ esencial, $I \cap A_\lambda = 0$. Yendo más lejos, podemos afirmar que

$$I(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = (\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)I = 0.$$

Puesto que, por el Lema 1.8.1, $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es un álgebra con anulador cero, tenemos que

$$I \subseteq \operatorname{Ann}(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = 0,$$

esto es, $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$ es un ideal esencial del producto. Por otro lado, dado un ideal esencial D del $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, es claro que cada $D_\lambda := D \cap A_\lambda$ es un ideal esencial de A_λ. En efecto, fijemos $\lambda \in \Lambda$ y consideremos J_λ un ideal de A_λ tal que $D_\lambda \cap J_\lambda = 0$. En particular $0 = D \cap A_\lambda \cap J_\lambda = D \cap J_\lambda$, y por tanto, por ser D esencial, $J_\lambda = 0$. Finalmente, la inclusión $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda \subseteq D$ es obvia.

□

Lema 1.8.3. *[10, Proposition 3.2.(i)]*
Si $A \leq \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es un producto subdirecto de álgebras semiprimas, entonces A es semiprima

Demostración. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia no vacia de álgebras semiprimas distintas de cero. Como $p_\lambda : A \to A_\lambda$ es sobreyectiva, $p_\lambda(I)$ es un ideal de A_λ para cada ideal I de A. Si $I^2 = 0$ entonces $p_\lambda(I)^2 = 0$ y de ahí $p_\lambda(I) = 0$ para todo λ, y así $I = 0$ y A es semiprima.

□

El recíproco del Lema 1.8.3 necesita una condición adicional. Diremos que un producto subdirecto $A \leq \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es *esencial*, si A contiene un ideal esencial del $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Este hecho se expresará escribiendo $A \leq^e \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Es obvio que todo producto subdirecto que contenga a la suma directa es un producto subdirecto esencial.

Lema 1.8.4. *Sea $A \leq \prod^e_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ un producto subdirecto esencial. Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un ideal D_λ esencial de A_λ tal que $D_\lambda \subseteq A$.*

Demostración. Por ser un producto subdirecto esencial existe un ideal esencial D de $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ tal que $D \subseteq A$, basta pues tomar $D_\lambda = D \cap A_\lambda$. □

Proposición 1.8.5. *[10, Proposition 3.2.(i).(iv)]*
Sea $A \leq \prod^e_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ un producto subdirecto esencial. Entonces A es semiprima si, y sólo si cada A_λ semiprima.

Demostración. Supongamos que A es semiprima y consideremos, para cada $\lambda \in \Lambda$, U_λ que es un ideal A_λ tal que $U_\lambda^2 = 0$. Por el Lema 1.8.4, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un ideal D_λ esencial de A_λ tal que $D_\lambda \subseteq A$. Entonces $U_\lambda \cap D_\lambda$ es un ideal de A tal que $(U_\lambda \cap D_\lambda)^2 = 0$. Puesto que A es semiprima y D_λ es esencial en A_λ, deducimos que $U_\lambda = 0$. Esto es, A_λ es semiprima. El recíproco se ha visto en el lema 1.8.3.

$\square$

Proposición 1.8.6. *Sea A un álgebra e $\{I_\lambda\}$ una familia de ideales de A tales que $\cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = 0$. Entonces*

(i) $A \leq \prod_{\lambda\in\Lambda}(A/I_\lambda)$ *es un producto subdirecto.*

(ii) Si además $\{I_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{I}_A^\pi$, entonces A es semiprima si, y solo si, cada I_λ es un ideal semiprimo.

Demostración. (i) Para cada $\lambda \in \Lambda$, escribiremos por comodidad $A_\lambda := A/I_\lambda$ y consideraremos q_λ la aplicación cociente de A sobre A_λ. Consideremos el homomorfismo $f : A \to \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ definido por $f(a) = (q_\lambda(a))$. Puesto que

$$\ker(f) = \cap_\lambda \ker(q_\lambda) = \cap_\lambda I_\lambda = 0,$$

sabemos que f es inyectivo. Es claro que $A \leq \prod_{\lambda\in\Lambda}(A/I_\lambda)$ es un producto subdirecto.

(ii) Supongamos que $\{I_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{I}_A^\pi$. Si A es semiprima cada I_λ es un ideal semiprimo en virtud de la Proposición 1.5.1. Recíprocamente, si cada I_λ es un ideal semiprimo, por (i) A es un producto subdirecto de álgebras semiprimas y por tanto semiprima por el Lema 1.8.3. $\square$

Si subimos la exigencia sobre la familia de ideales, obtenemos el siguiente resultado, del cual se pueden deducir fácilmente dos importantes resultados ya conocidos: toda álgebra semiprima puede verse como un producto subdirecto esencial de un álgebra π-radical y otra π-descomponible ([10, Proposition 3.6]) y que, a su vez, toda álgebra π-descomponible puede verse como un producto subdirecto esencial de álgebras primas ([10, Theorem 3.7]).

Proposición 1.8.7. *Sea A un álgebra con anulador cero e $\{I_\lambda\}$ una familia de ideales de A tales que $A = \overline{\oplus_\lambda I_\lambda}$ entonces $A \leq^e \prod_{\lambda\in\Lambda}(A/\mathrm{Ann}(I_\lambda))$ es un producto subdirecto esencial. Si además A es semiprima, entonces*

$$\mathcal{I}_A^\pi = \{\cap V_\lambda \,:\, V_\lambda \in h^{\mathcal{I}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I_\lambda))\}.$$

Demostración. Para cada $\lambda \in \Lambda$, escribiremos por comodidad $A_\lambda := A/\mathrm{Ann}(I_\lambda)$ y consideraremos q_λ la aplicación cociente de A sobre A_λ. Puesto que A tiene anulador cero, tomando anuladores, obtenemos que $\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Ann}(I_\lambda) = 0$, y en virtud de la Proposición 1.8.6, $A \leq \prod_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda)$ es un producto subdirecto.

Fijemos ahora $\lambda_0 \in \Lambda$, veamos que

(1) A_{λ_0} tiene anulador cero.

(2) $q_{\lambda_0}(\overline{I_{\lambda_0}})$ es un ideal esencial de A_{λ_0}.

(3) $q_{\lambda_0}(I_{\lambda_0}) \subseteq A$

En efecto, puesto que $A = \overline{I_{\lambda_0} \oplus \oplus_{\lambda \neq \lambda_0} I_\lambda}$, en virtud del Lema 1.3.8,

$$\overline{I_{\lambda_0}} = \mathrm{Ann}(\oplus_{\lambda\neq\lambda_0} I_\lambda) = \cap_{\lambda\neq\lambda_0}\mathrm{Ann}(I_\lambda).$$

En particular

$$\overline{I_{\lambda_0}} \cap \mathrm{Ann}(I_{\lambda_0}) = \cap_{\lambda\neq\lambda_0}\mathrm{Ann}(I_\lambda) \cap \mathrm{Ann}(I_{\lambda_0}) = 0.$$

Para ver (1), basta aplicar la Proposición 1.3.9 para obtener que $(\mathrm{Ann}(I_{\lambda_0}) : A) = \mathrm{Ann}(I_{\lambda_0})$, y por tanto $\mathrm{Ann}_{A_{\lambda_0}}(A_{\lambda_0}) = \mathrm{Ann}(I_{\lambda_0} : A)/\mathrm{Ann}(I_{\lambda_0}) = 0$. (2) es consecuencia del Lema 1.5.3. Finalmente (3), se sigue de que $\overline{I_{\lambda_0}} = \mathrm{Ann}(\oplus_{\lambda\neq\lambda_0} I_\lambda) = \cap_{\lambda\neq\lambda_0}\mathrm{Ann}(I_\lambda)$, ya que los elementos de A pueden ser vistos de la forma $(q_\lambda(x))_\lambda$, y por tanto si $x_0 \in \overline{I_{\lambda_0}}$, entonces $q_{\lambda_0}(x_0)$ puede identificarse (el resto de las coordenadas son cero) con $(q_\lambda(x_0))_\lambda \in A$

En orden a probar que A es un producto subdirecto esencial, basta usar la Proposición 1.8.2 y el hecho de que, por (3),

$$A \supseteq \oplus_\lambda q_\lambda(I_\lambda).$$

Supongamos ahora que A es semiprima. En virtud de la Proposición 1.5.1, cada A_λ es semiprima por lo que, aplicando [10, Proposition 3.2. (iv)] sabemos que

$$\mathcal{I}_A^\pi = \{\prod_\lambda U_\lambda \cap A \,:\, U_\lambda \in \mathcal{I}_{A_\lambda}^\pi\},$$

y por el Teorema 1.5.7.(i), existen $V_\lambda \in h^{\mathcal{I}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I_\lambda))$ tales que $U_\lambda = q_\lambda(V_\lambda)$.

Veamos ahora que $f(\cap_\lambda V_\lambda) = \prod_\lambda U_\lambda \cap f(A)$. En efecto, dado $x \in \cap_\lambda V_\lambda$, se tiene que $f(x) = (q_\lambda(x)) \in \prod_\lambda U_\lambda \cap f(A)$. Recíprocamente, si $z \in \prod_\lambda U_\lambda \cap f(A)$, existen $x \in A$ y $v_\lambda \in V_\lambda$ tales que $z = f(x) = (q_\lambda(v_\lambda))$, y por tanto $q_\lambda(x) = q_\lambda(v_\lambda)$, o si se quiere,
$x - v_\lambda \in \mathrm{Ann}(I_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$. En definitiva, dado que $\mathrm{Ann}(I_\lambda) \subseteq V_\lambda$, se deduce que $x \in \cap V_\lambda$. La igualdad buscada, esto es, $\mathcal{I}_A^\pi = \{\cap V_\lambda \,:\, V_\lambda \in h^{\mathcal{I}_A^\pi}(\mathrm{Ann}(I_\lambda))\}$, es consecuencia directa del hecho de que f es un isomorfismo.

$\square$

CAPÍTULO 2

ε-clausura

2.1. Carencias de la π-clausura

En este capítulo vamos a chequear algunas carencias de la π-clausura. La primera es que los ideales π-densos de un álgebra semiprima no son necesariamente álgebras semiprimas (cf. Ejemplo 1.4.2 y Proposición 1.3.6). Nos surge así un primer problema sobre cómo debe ser el tamaño de un ideal para que pueda heredar la semiprimidad. La segunda es que la π-clausura no deja traslucir ninguna información sobre el álgebra de multiplicación. Analicemos con más detalle este segundo problema. Es consecuencia inmediata del Teorema de Jacobson que si A es un álgebra finito dimensional no nula, entonces

$$A \text{ es simple} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}(A) \text{ es simple},$$

y podemos preguntarnos si esto mismo es esperable para la semiprimidad. Dado que la semiprimidad se puede expresar en términos de la π-clausura (Proposición 1.4.4), sería deseable que ésta encerrase alguna información sobre el álgebra de multiplicación, y más concretamente sobre su semiprimidad. Lo cierto es que existen álgebras semiprimas cuya álgebra de multiplicación no es semiprima.

Ejemplo 2.1.1. Consideremos el álgebra tridimensional con unidad, introducida por A. Albert en [1], generada por $\{e, u, v\}$ y definida por los productos

$$uv = v, vu = 0, v^2 = v, u^2 = e.$$

Veamos que

(i) $\mathbb{K}v$ es un ideal de A tal que $(\mathbb{K}v)^2 = \mathbb{K}v$

(ii) Los ideales propios no nulos de A son: $\mathbb{K}v, \mathbb{K}(e-u)\oplus\mathbb{K}v, \mathbb{K}(e+u)\oplus\mathbb{K}v$

(iii) $\mathbb{K}(e-u)\oplus\mathbb{K}v$ y $\mathbb{K}(e+u)\oplus\mathbb{K}v$ tienen a $\mathbb{K}v$ como único ideal propio no nulo.

(iv) A es prima

(v) $\mathcal{M}(A)$ no es semiprima

En efecto,

Demostración. (i) Es inmediato por la definición de los productos.

(ii) Sea I un ideal de A no nulo. Tomemos $a \in I\backslash\{0\}$ con $a = \alpha e + \beta u + \gamma v$. Entonces $au = \alpha u + \beta e \in I$ y $(au)u = \alpha e + \beta u \in I$ y también $a - (au) = \gamma v \in I$, $v(au) = \beta v \in I$ y $v((au)u) = \alpha v \in I$.

Como $a \neq 0$, se tiene que α, β, γ no son todos nulos, luego $v \in I$. Sea B la subálgebra de A generada por e, u, cuyos ideales propios no nulos son $\mathbb{K}(e-u)$ y $\mathbb{K}(e+u)$.

Entonces Si I es propio $I \cap B$ es un ideal de B. Luego $I \cap B = 0$ ó $\mathbb{K}(e-u)$ ó $\mathbb{K}(e+u)$ ó B. Dado que $\mathbb{K}v \subseteq I$, se tiene que $I = I \cap B \oplus \mathbb{K}v$ y de ahí se sigue inmediatamente el enunciado.

(iii) Sea I un ideal de $\mathbb{K}(e-u)\oplus\mathbb{K}v$. Como por (ii) todo ideal no nulo de A contiene a $\mathbb{K}v$ y necesariamente la $dim(I) = 1$ esto implica que $I = \mathbb{K}v$. De forma análoga se demuestra para $\mathbb{K}(e+u)\oplus\mathbb{K}v$.

(iv) Puesto que, por (i) y (iii), todo producto de dos ideales no nulos contiene a $\mathbb{K}v$, se tiene que A es prima.

(v) Ya que A no puede escribirse como suma directa de ideales (que son álgebras simples), por el Teorema de Jacobson 0.0.1, $\mathcal{M}(A)$ no es semiprima.

□

Si se quiere incluso, se puede dar una técnica para construir ejemplos, a partir de cualquier álgebra semiprima, de otra álgebra semiprima cuya álgebra de multiplicación no es semiprima.

Ejemplo 2.1.2. Sea B un álgebra semiprima, y sea C una subálgebra distinta de cero de B con anulador cero en si misma. Consideramos el álgebra A que consiste en el espacio vectorial $B \times C$ y en el producto definido en

$$(b_1, c_1)(b_2, c_2) = (b_1 b_2 + c_1 c_2, 0).$$

Entonces A es un álgebra semiprima cuya álgebra de multiplicación no es semiprima (véase [15, Example 1]) .

Podemos darnos cuenta que también puede ocurrir que $\mathcal{M}(A)$ sea semiprima y A no lo sea.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}\times c_0$ con el producto definido por

$$(r,\{a_n\})(s,\{b_n\}) = (0,\{a_n b_n\}).$$

Se demuestra que A es un álgebra asociativa conmutativa cuyo anulador es $\mathbb{R}\times 0$ y cuya álgebra de multiplicación es semiprima (véase [9, Example 4.12]).

Y por supuesto puede ocurrir que ni el álgebra ni su álgebra de multiplicación sean semiprimas.

Ejemplo 2.1.4. Considérese el álgebra tridimensional conmutativa A generada por $\{e_0,\, e_1,\, e_2\}$ dada por las relaciones

$$e_0^2 = e_0 e_i = 0 \ \ y \ \ e_i^2 = e_i \ (1 \leqslant i \leqslant 2) \ \ y \ \ e_1 e_2 = e_0$$

(véase [9, Example 3.9]).

Podemos pues concluir que la π-clausura no aporta información suficiente sobre cómo transmitir la semiprimidad de un álgebra a su álgebra de multiplicación. En este orden de cosas, queremos subrayar que la equivalencia de (i) y (iv) del Teorema de caracterización de las álgebras m.s.p. dada en [8, Theorem 2.6] nos permite afirmar que para un álgebra semiprima, la semiprimidad de su álgebra de multiplicación está vinculada a un enriquecimiento de la π-clausura, esto es, su coincidencia con una nueva clausura, la ε-clausura. Abundando en esta idea y siendo conscientes de la necesidad que tendremos de analizar otras propiedades, nos preguntamos si hay algún medio de transmisión entre las estructuras algebráicas de un álgebra y de su álgebra de multiplicación que nos permita tener un intercambio de información sobre sus respectivas propiedades; la respuesta es sí y reiterativa: la ε-clausura.

2.2. ε-clausura

Sea A un álgebra. para cada subespacio S de A y cada subespacio $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}(A)$ se define

$$S^{\mathrm{ann}} := \{F \in \mathcal{M}(A) \,:\, F(x) = 0 \ \text{ para cada } \ x \in S\}.$$

$$\mathcal{N}_{\mathrm{ann}} := \{a \in A \,:\, F(a) = 0 \ \text{ para cada } \ F \in \mathcal{N}\}.$$

En particular, si J e I son dos ideales de A, y P y Q son dos ideales de $\mathcal{M}(A)$, es claro que:

(1) $I \subseteq J \Rightarrow J^{\text{ann}} \subseteq I^{\text{ann}}$ y $P \subseteq Q \Rightarrow Q_{\text{ann}} \subseteq P_{\text{ann}}$

(2) $I \subseteq (I^{\text{ann}})_{\text{ann}}$ y $P \subseteq (P_{\text{ann}})^{\text{ann}}$

(3) $((I^{\text{ann}})_{\text{ann}})^{\text{ann}} = I^{\text{ann}}$ y $((P_{\text{ann}})^{\text{ann}})_{\text{ann}} = P_{\text{ann}}$

(4) Si $\{I_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{I}_A$, entonces $(\sum_\lambda I_\lambda)^{\text{ann}} = \cap_\lambda (I_\lambda)^{\text{ann}}$ y si $\{P_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{M}(A)}$, entonces $(\sum_\lambda P_\lambda)_{\text{ann}} = \cap_\lambda (P_\lambda)_{\text{ann}}$

(5) $0^{\text{ann}} = \mathcal{M}(A)$ y $\mathcal{M}(A)_{\text{ann}} = 0$

Por tanto, la pareja

$$\mathcal{S}_A \underset{(.)_{\text{ann}}}{\overset{(.)^{\text{ann}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{S}_{\mathcal{M}(A)},$$

es un conexión de Galois entre el retículo de los subespacios de A y el retículo de los subespacios de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, y sus operaciones de clausura asociadas son:

La ε-**clausura**, $\widehat{S}$, de S que se define por

$$\widehat{S} := (S^{\text{ann}})_{\text{ann}},$$

y la ε'-**clausura**, $\overset{\vee}{\mathcal{N}}$, de $\mathcal{N}$ que se define por

$$\overset{\vee}{\mathcal{N}} := (\mathcal{N}_{\text{ann}})^{\text{ann}}.$$

Diremos que un subespacio S de un álgebra A es ε-denso si $\widehat{S} = A$. Cuando no haya lugar a confusión, hablaremos de subespacio denso en lugar de subespacio ε-denso.

Es claro que podemos intercambiar la pareja de retículos $(S_A, S_{\mathcal{M}(A)})$ por la pareja de los retículos de los ideales $(I_A, I_{\mathcal{M}(A)})$ y por consiguiente obtendríamos la correspondiente conexión de Galois $\mathcal{I}_A \underset{(.)_{\text{ann}}}{\overset{(.)^{\text{ann}}}{\rightleftarrows}} \mathcal{I}_{\mathcal{M}(A)}$ y sus clausuras asociadas.

Un ideal I de un álgebra A, se dice *ε-cerrado* en A cuando $I = \widehat{I}$. Representaremos por $\mathcal{I}_A^{\varepsilon}$ al conjuntos de todos los ideales ε-cerrados en A.

Un ideal P de un álgebra $\mathcal{M}(A)$, se dice *ε'-cerrado (resp. ε'-denso*) en $\mathcal{M}(A)$ cuando $P = P^{\vee}$ (resp. $P^{\vee} = \mathcal{M}(A)$). Representaremos por $\mathcal{I}_{\mathcal{M}(A)}^{\varepsilon'}$ al conjuntos de todos los ideales ε'-cerrados en $\mathcal{M}(A)$.

Como consecuencia de la definición, para cada $I \in \mathcal{I}_A$ y $P \in \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(A)$, se verifica

(1) $(\widehat{I})^{\text{ann}} = I^{\text{ann}}$ y $(P^{\vee})_{\text{ann}} = P_{\text{ann}}$

(2) $\mathcal{I}_A^{\varepsilon} = \{I^{\text{ann}};\ I \in \mathcal{I}_A\}$,

(3) $\mathcal{I}_A^{\varepsilon}$ es un retículo completo, con 0 como primer elemento y A como último elemento, siendo sus operaciones ínfimo y supremo respectivamente:

$$\sqcap I_i = \bigcap I_i \ \text{ y } \ \sqcup I_i = (\sum I_i)^{\wedge}.$$

(4) $\mathcal{I}_{\mathcal{M}(A)}^{\varepsilon'}$ es un retículo completo, con 0 como primer elemento y $\mathcal{M}(A)$ como último elemento, siendo sus operaciones ínfimo y supremo respectivamente:

$$\sqcap I_i = \bigcap I_i \ \text{ y } \ \sqcup I_i = (\sum I_i)^{\vee}.$$

(5) La aplicación $I \mapsto I^{\mathrm{ann}}$ es un biyección de $\mathcal{I}_A^{\varepsilon}$ en $\mathcal{I}_{\mathcal{M}(A)}^{\varepsilon'}$ que invierte el orden y cuya inversa es $P \mapsto P_{\mathrm{ann}}$. En particular

$$\mathbf{m}_A^{\varepsilon} = \{P_{\mathrm{ann}} \ : \ P \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}(A)}^{\varepsilon'}\} \ \text{ y } \ \mathbf{m}_{\mathcal{M}(A)}^{\varepsilon'} = \{I^{\mathrm{ann}} \ : \ I \in \mathbf{M}_A^{\varepsilon}\},$$

donde $\mathbf{m}_A^{\varepsilon}$ y $\mathbf{M}_A^{\varepsilon}$ representan respectivamente al conjunto de los ideales ε-cerrados minimales y ε-cerrados maximales de A, y $\mathbf{m}_{\mathcal{M}(A)}^{\varepsilon'}$ y $\mathbf{M}_{\mathcal{M}(A)}^{\varepsilon'}$ representan respectivamente al conjunto de los ideales ε'-cerrados minimales y ε'-cerrados maximales de $\mathcal{M}(A)$

En [8, Proposition 1.8] se prueba una destacada propiedad de la ε-clausura, que usaremos en algunas ocasiones sin mención explícita: la propiedad de continuidad.
Sea A un álgebra. Si $F \in \mathcal{M}(A)$, y si S es un subespacio de A, entonces

$$F(\widehat{S}) \subseteq \widehat{F(S)}.$$

Como una consecuencia,

$$\widehat{S_1}\widehat{S_2} \subseteq \widehat{(S_1 S_2)}$$

para cualesquiera subespacios S_1, S_2 de A.

Las relaciones entre la π-clausura y ε-clausura son bien conocidas, véase por ejemplo [8, Proposition 1.11]. Concretamente si A un álgebra e I un ideal de A, entonces:

(1) $\widehat{I} \subseteq \overline{I}$;

(2) $\widehat{\mathrm{Ann}(I)} = \mathrm{Ann}(\widehat{I}) = \mathrm{Ann}(I)$;

(3) $\overline{\widehat{I}} = \widehat{\overline{I}} = \overline{I}$.

Veamos que la inclusión de (1) puede ser estricta.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos el álgebra tridimensional con unidad, introducida por A. Albert en [1] y ya vista en (Ejemplo 2.1.1), generada por $\{e, u, v\}$ y definida por los productos

$$uv = v, vu = 0, v^2 = v, u^2 = e.$$

Veamos que

(i) Los ideales propios no nulos de A son π-densos.

(ii) Los ideales propios no nulos de A son ε-cerrados.

En efecto,

Demostración. (i) Sea $a = \alpha e + \beta u + \gamma v$ tal que $av = va = 0$, entonces $(\alpha + \beta + \gamma)v = (\alpha + \gamma)v = 0$, luego $\alpha + \beta + \gamma = 0$ y $\alpha + \gamma = 0$ de aquí tenemos que $\beta = 0$ y $\gamma = -\alpha$.

Luego $\{a \in A : av = va = 0\} = \{\alpha(e - v) : \alpha \in \mathbb{K}\}$.

Como $\mathrm{Ann}(\mathbb{K}v)$ es el más grande ideal de A contenido en dicho conjunto, se sigue que $\mathrm{Ann}(\mathbb{K}v) = 0$ y así $(\mathbb{K}v)$ es π-denso.

Como $\mathbb{K}v \subseteq \mathbb{K}(e - u) \oplus \mathbb{K}v$ y $\mathbb{K}v \subseteq \mathbb{K}(e + u) \oplus \mathbb{K}v$, se sigue también que $\mathbb{K}(e - u) \oplus \mathbb{K}v$ y $\mathbb{K}(e + u) \oplus \mathbb{K}v$ son π-densos.

(ii) Vamos a llamar a los ideales $\mathbb{K}v, \mathbb{K}(e - u) \oplus \mathbb{K}v$ y $\mathbb{K}(e + u) \oplus \mathbb{K}v$, I_1, I_2 y I_3 respectivamente.

Primero veamos que I_1 es ε-cerrado. Claramente $R_u \in I_1^{ann}$, luego $\widehat{I_1} \subseteq (R_u)_{ann}$. Sea $a = \alpha e + \beta u + \gamma v \in \widehat{I_1}$, entonces $0 = R_u(a) = au = \alpha u + \beta e$ esto implica que $\alpha = \beta = 0$ y así $a = \gamma v \in I_1$. Luego $\widehat{I_1} = I_1$.

Ahora veamos que I_2 es ε-cerrado. Notemos que $F = (Id_A + L_u)R_u \in I_2^{ann}$. Podemos calcular $F(v)$ y $F(e - u)$.

$F(v) = (Id_A + L_u)R_u(v) = (Id_A + L_u)vu = 0$ y $F(e - u) = (Id_A + L_u)R_u(e - u) = (Id_A + L_u)(e - u)u = (Id_A + L_u)(u - e) = (u - e) + (e - u) = 0$. En consecuencia $\widehat{I_2} \subseteq (F)_{ann}$.

Ahora tomamos $a = \alpha e + \beta u + \gamma v \in \widehat{I_2}$ y como $0 = F(a) = (Id_A + L_u)R_u(a) = (Id_A + L_u)(\alpha e + \beta u + \gamma v)u = (Id_A + L_u)(\alpha u + \beta e) = (\alpha u + \beta e) + (\alpha e + \beta u) = (\alpha + \beta)(e + u)$, lo que implica que $\alpha + \beta = 0$ y así $\alpha = -\beta$, luego $a = \alpha e - \alpha u + \gamma v = \alpha(e - u) + \gamma v \in I_2$. Luego $\widehat{I_2} = I_2$.

De forma análoga a la anterior se prueba que I_3 es ε-cerrado, basta tomar $G = (Id_A - L_u)R_u \in I_3^{ann}$.

□

Recordamos finalmente una interesante propiedad que nos relaciona la ε-clausura y la aplicación cociente en clara analogía con la Proposición 1.5.5.

Proposición 2.2.2. *[8, Apartado (5), pag 406] Sea A un álgebra, sea I un ideal ε-cerrado y sea q la correspondiente aplicación cociente. Entonces, para cada ideal J de A, $\widehat{q(\widehat{J})} = \widehat{q(J)}$.*

2.3. Ideales complementadamente densos

En esta sección vamos a introducir una clase de ideales que sí heredan la posible semiprimidad del álgebra y para los cuales las clausuras algebraicas coinciden.

Definición 2.3.1. Un ideal I de un álgebra A se dice *ideal complementadamente denso* (abreviadamente *ideal c.d.*) en A si existe un ideal J de A tal que $A = (I \oplus J)^{\wedge}$.

Ejemplos de ideales c.d. son los sumandos directos de ideales y los ideales densos.

Comencemos mostrando algunas propiedades de los ideales c.d.

Lema 2.3.2. *Sea A un álgebra y sea I un ideal de A. Si $\widehat{I}$ es c.d. en A, entonces I es c.d. en A.*

Demostración. Si $\widehat{I}$ es c.d. en A, entonces $A = (\widehat{I} \oplus J)^{\wedge}$ para conveniente ideal J de A. Como $I \oplus J \subseteq \widehat{I} \oplus J \subseteq (I \oplus J)^{\wedge}$, se sigue que $A = (\widehat{I} \oplus J)^{\wedge} \subseteq (I \oplus J)^{\wedge}$, de ahí $A = (I \oplus J)^{\wedge}$, y por tanto I es c.d. en A. □

Lema 2.3.3. *Sea A un álgebra con anulador cero, y sea I un ideal c.d. en A. Si J es un ideal de A tal que $I \subseteq J \subseteq \overline{I}$, entonces $A = (J \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge}$.*

Demostración. Por [13, Lemma 2.1.(3)], tenemos que $A = (I \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge}$. Es claro que esta igualdad produce que el $\mathrm{Ann}(I)$ sea c.d. en A. Ahora, si sustituimos I por $\mathrm{Ann}(I)$ en la igualdad vemos que $A = (\overline{I} \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge}$. Ahora, para cada ideal J de A tal que $I \subseteq J \subseteq \overline{I}$, de la cadena

$$A = (I \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge} \subseteq (J \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge} \subseteq (\overline{I} \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge} = A$$

obtenemos que $A = (J \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge}$ □

Combinando los Lemas 2.3.2 y 2.3.3, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.4. *Sea A un álgebra con anulador cero, y sea I un ideal de A. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) I *es c.d.*

(ii) $A = (I \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge}$.

(iii) $A = (J \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge}$, *para cada ideal J de A tal que $I \subseteq J \subseteq \overline{I}$.*

(iv) $\widehat{I}$ *es un ideal c.d. de A.*

La equivalencia de (i) y (vi) del Teorema de caracterización de las álgebras m.s.p. dada en [8, Theorem 2.6] nos permite afirmar que

Corolario 2.3.5. *Si A es un álgebra, entonces A es m.s.p. si, y sólo si, todo ideal de A es c.d.*

Esta afirmación nos permitirá extender todo resultado sobre ideales c.d. en un álgebra arbitraria a un ideal arbitrario en un álgebra m.s.p.

También como consecuencia de la Proposición 2.3.4 y de la propiedad de continuidad para la ε-clausura obtenemos el siguiente

Corolario 2.3.6. *Sea A un álgebra con anulador cero, y sea I un ideal c.d. en A. Tenemos que:*

(i) Si J es un ideal de I, entonces $\widehat{J}$ es un ideal de A.

(ii) $Z_I = Z_A \cap I$.

Demostración. (i) Si J es un ideal de I, entonces $\widehat{J}$ es un subespacio de A que satisface
$$\widehat{J}A = \widehat{J}(I \oplus \mathrm{Ann}(I))^\wedge \subseteq [J(I \oplus \mathrm{Ann}(I))]^\wedge \subseteq \widehat{J},$$
y análogamente $A\widehat{J} \subseteq \widehat{J}$. Así $\widehat{J}$ es un ideal de A.

(ii) Sea z en Z_I. Entonces tenemos, por la Proposición 2.3.4 y la continuidad de la ε-clausura, que

$$[z, A] = [z, (I \oplus \mathrm{Ann}(I))^\wedge] \subseteq [z, I \oplus \mathrm{Ann}(I)]^\wedge = \widehat{0} = 0,$$

$$\begin{aligned}[z, A, A] &= [z, (I \oplus \mathrm{Ann}(I))^\wedge, (I \oplus \mathrm{Ann}(I))^\wedge] \\ &\subseteq [z, I \oplus \mathrm{Ann}(I), I \oplus \mathrm{Ann}(I)]^\wedge = \widehat{0} = 0,\end{aligned}$$

y análogamente $[A, z, A] = [A, A, z] = 0$. Por tanto $z \in Z_A$. Por la arbitrariedad de z en Z_I, podemos concluir que $Z_I \subseteq Z_A \cap I$. La inclusión contraria es clara. □

Sea A un álgebra. Para un ideal I de A, el ideal $[I : A]$ de $\mathcal{M}(A)$ se define por

$$[I : A] := \{F \in \mathcal{M}(A) \,:\, F(A) \subseteq I\}.$$

Es claro que $[I : A]$ contiene a los conjuntos

$$L_I^A = \{L_x^A : x \in I\} \text{ y } R_I^A = \{R_x^A : x \in I\}.$$

Veamos finalmente, como consecuencia de la Proposición 2.2.2, que la propiedad de ser ideal c.d. también se conserva mediante la aplicación cociente.

Proposición 2.3.7. *Sean A un álgebra, I un ideal c.d., J un ideal ε-cerrado y q la aplicación cociente correspondiente a J. Entonces $q(I)$ es un ideal c.d. en A/J.*

Demostración. En efecto, $q(I \oplus \mathrm{Ann}(I))$ es, por la Proposición 2.2.2, un ideal denso, y puesto que

$$q(I \oplus \mathrm{Ann}(I)) = q(I) + q(\mathrm{Ann}(I)) \subseteq q(I) \oplus \mathrm{Ann}(q(I)),$$

entonces $q(I) + \mathrm{Ann}(q(I))$ es un ideal denso de A/J. Teniendo finalmente en cuenta que, por la Proposición 1.5.1, A/J es semiprima se deduce que dicha suma es directa, y por tanto $q(I)$ es un ideal c.d. en A/J.

□

2.3.1. Herederos de la semiprimidad

Recordemos que en el Ejemplo 1.4.2 hemos probado que ni los ideales esenciales ni los ideales π-cerrados de un álgebra semiprima son necesariamente álgebras semiprimas. Veamos ahora que los ideales c.d. sí heredan la posible semiprimidad del álgebra. Comenzamos por las subálgebras que contienen a un ideal denso.

Sea A un álgebra, B una subálgebra densa de A, y sea $' : \mathcal{M}(B) \hookrightarrow \mathcal{M}(A)$ la inmersión canónica para las álgebras de multiplicación. Es claro que $\mathrm{Id}_B' = \mathrm{Id}_A$, $(L_b^B)' = L_b^A$, y $(R_b^B)' = R_b^A$ para cada $b \in B$. Por sencillez en la escritura, podemos poner $\mathrm{Id}(a)$, $L_b(a)$, y $R_b(a)$ para cada $a \in A$ sin ningún riesgo de confusión, evitando así el uso de subíndices y superíndices.

Nuestro primer resultado es una variante del resultado obtenido en [14, Proposition 3.1].

Proposición 2.3.8. *Sea A un álgebra y sea B una subálgebra densa de A. Entonces, para $F \in \mathcal{M}(A)$ y $a \in A$, la condición $F\mathcal{M}(B)(a) = 0$ implica $F\mathcal{M}(A)(a) = 0$.*

Demostración. Consideramos el conjunto

$$\mathcal{S} = \{T \in \mathcal{M}(A) : FGT\mathcal{M}(B)(a) = 0 \,\text{para cada}\, G \in \mathcal{M}(A) \,\text{tal que}\, FG\mathcal{M}(B)(a) = 0\}.$$

Es claro que $\mathcal{S}$ es una subálgebra de $\mathcal{M}(A)$ que contiene Id_A. Además, para $G \in \mathcal{M}(A)$ tal que $FG\mathcal{M}(B)(a) = 0$, $H \in \mathcal{M}(B)$, y $b \in B$ vemos que

$$0 = FGL_bH(a) = FG(bH(a)) = FGR_{H(a)}(b)$$

y

$$0 = FGR_bH(a) = FG(H(a)b) = FGL_{H(a)}(b),$$

y así, por la densidad de B en A, para cada $x \in A$ tenemos que

$$0 = FGR_{H(a)}(x) = FG(xH(a)) = FGL_xH(a)$$

y

$$0 = FGL_{H(a)}(x) = FG(H(a)x) = FGR_xH(a).$$

Además L_x y R_x pertenecen a $\mathcal{S}$ para cada $x \in A$, y por lo tanto $\mathcal{S} = \mathcal{M}(A)$. Como $F\mathrm{Id}_A\mathcal{M}(B)(a) = 0$, deducimos que $F\mathcal{M}(A)\mathcal{M}(B)(a) = 0$. Por tanto $F\mathcal{M}(A)\mathrm{Id}_B(a) = 0$, y como resultado $F\mathcal{M}(A)(a) = 0$. □

Corolario 2.3.9. *Sea A un álgebra y sea B una subálgebra densa de A. Entonces, para todos los elementos a_1, a_2 en A, la condición $\mathcal{M}(B)(a_1)\mathcal{M}(B)(a_2) = 0$ implica $\mathcal{M}(A)(a_1)\mathcal{M}(A)(a_2) = 0$.*

Demostración. Sean a_1, a_2 elementos en A que cumplen la condición $\mathcal{M}(B)(a_1)\mathcal{M}(B)(a_2) = 0$. Para cada $F \in \mathcal{M}(B)$ tenemos que

$$L_{F(a_1)}\mathcal{M}(B)(a_2) = F(a_1)\mathcal{M}(B)(a_2) = 0,$$

aplicando la Proposición 2.3.8, de modo que $L_{F(a_1)}\mathcal{M}(A)(a_2) = 0$. Por lo tanto

$$\mathcal{M}(B)(a_1)\mathcal{M}(A)(a_2) = 0,$$

y de ahí para cada $G \in \mathcal{M}(A)$ tenemos que

$$R_{G(a_2)}\mathcal{M}(B)(a_1) = \mathcal{M}(B)(a_1)G(a_2) = 0.$$

Volviendo a aplicar la Proposición 2.3.8 concluimos que

$$\mathcal{M}(A)(a_1)\mathcal{M}(A)(a_2) = 0,$$

como se requiere. □

Como consecuencia y por complitud, citamos los siguiente resultados que son esencialmente conocidos.

Proposición 2.3.10. *Sea A un álgebra y sea B una subálgebra densa de A. Entonces, B es semiprima (resp. prima) siempre que A sea semiprima (resp. prima).*

Demostración. Supongamos por ejemplo que A es un álgebra prima y sean J y K dos ideales de B tales que $JK = 0$. Es claro que $\mathcal{M}(A)(J)$ y $\mathcal{M}(A)(K)$ son dos ideales de A, y puesto que $\mathcal{M}(B)(J) = J$ y $\mathcal{M}(B)(K) = K$, por el Corolario 2.3.9, se tiene también que $\mathcal{M}(A)(J)\mathcal{M}(A)(K) = 0$. Así por la primidad de A, alguno de esos factores es cero, y por tanto o bien J o bien K es cero.

□

Veamos finalmente que podemos sortear el primer problema sobre el tamaño del ideal.

Corolario 2.3.11. *Sea A un álgebra y sea I un ideal c.d. en A. Entonces, A es semiprima si, y sólo si, I y $\mathrm{Ann}(I)$ son álgebras semiprimas.*

Demostración. Tomemos $B = I \oplus \mathrm{Ann}(I)$. Si A es semiprima, basta aplicar sucesivamente la Proposición 2.3.10 y la Proposición 1.8.5 para concluir que tanto el ideal como su anulador son álgebras semiprimas. Recíprocamentes, si suponemos que I y $\mathrm{Ann}(I)$ son álgebras semiprimas, de nuevo por la Proposición 1.8.5, B es un álgebra semiprima. Por otra parte, dado que por hipótesis B es una subálgebra esencial, en virtud de la Proposición 1.4.1, A es semiprima. $\square$

Veamos que la situación es similar con respecto a la multiplicativa semiprimidad de las subálgebras densas. Es fácil ver que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

Nota 2.3.12. (1) B es una subálgebra densa de A,

(2) Para cada $F \in \mathcal{M}(B)$, existe un único $F' \in \mathcal{M}(A)$ tal que $F'(a) = F(a)$ para todo $a \in A$.

Así, bajo esta condición, la aplicación $F \mapsto F'$ se convierte en una inmersión canónica de $\mathcal{M}(B) \hookrightarrow \mathcal{M}(A)$, y abusando de notación, para cada $a \in A$, escribiremos $F(a)$ en lugar de $F'(a)$.

Corolario 2.3.13. *Sea A un álgebra y sea B una subálgebra densa de A. Entonces, B es m.s.p. siempre que A sea m.s.p.*

Demostración. Supongamos que A es un álgebra m.s.p. En virtud de la Proposición 2.3.10, B es semiprima. Sea $F \in \mathcal{M}(B)$ tal que $F\mathcal{M}(B)F = 0$. Dado que B es densa en A consideremos F' su única extensión. Es claro que $F'\mathcal{M}(B)F(B) = 0$, luego por la Proposición 2.3.8, $F'\mathcal{M}(A)F(B) = 0$. En particular $F'\mathcal{M}(A)F'(B) = 0$, De nuevo por la densidad de B en A y la propiedad de continuidad de la ε-clausura, se tiene que $F'\mathcal{M}(A)F' = 0$, luego por la semiprimidad de $\mathcal{M}(A)$, se tiene que $F' = 0$, y por tanto $F = 0$. En definitiva, $\mathcal{M}(B)$ también es semiprima.

$\square$

2.3.2. Coincidencia de clausuras

En orden a probar que las clausuras coinciden en un ideal c.d., necesitamos los dos siguientes resultados técnicos, los cuales nos proporcionan herramientas para el estudio de los ideales c.d. en un contexto algo más restringido.

Lema 2.3.14. *Sea A un álgebra y sea $\mathcal{P}$ un ideal de $\mathcal{M}(A)$. Tenemos que:*

(i) $\mathrm{Ann}(\mathcal{P}) \subseteq [\mathcal{P}_{\mathrm{ann}} : A]$.

(ii) Si $\mathcal{P}^{\vee} = \mathcal{M}(A)$, entonces $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{M}(A)$.

Demostración. (i) Nótese que $\mathcal{P}\mathrm{Ann}(\mathcal{P}) = 0$ implica que $\mathrm{Ann}(\mathcal{P})(A) \subseteq \mathcal{P}_{\mathrm{ann}}$, y de ahí $\mathrm{Ann}(\mathcal{P}) \subseteq [\mathcal{P}_{\mathrm{ann}} : A]$.

(ii) Si $\mathcal{P}^{\vee} = \mathcal{M}(A)$, entonces $\mathcal{P}_{\mathrm{ann}} = 0$, y en consecuencia $[\mathcal{P}_{\mathrm{ann}} : A] = 0$. Ahora, por la afirmación (i), obtenemos que $\mathrm{Ann}(\mathcal{P}) = 0$, y así resulta que $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{M}(A)$. □

Lema 2.3.15. *Sea A un álgebra y sea I un ideal de A. Tenemos que:*

(i) $\mathrm{Ann}(I^{\mathrm{ann}}) \subseteq [\widehat{I} : A]$.

(ii) $[I : A]_{\mathrm{ann}} \subseteq \mathrm{Ann}(I)$. *Como consecuencia,* $\mathrm{Ann}([I : A]) \subseteq [\mathrm{Ann}(I) : A]$.

(iii) Si además $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$, entonces tenemos que:

(a) $[I : A]_{\mathrm{ann}} = \mathrm{Ann}(I)$ *y* $\mathrm{Ann}([I : A]) = [\mathrm{Ann}(I) : A] \subseteq I^{\mathrm{ann}}$.

(b) $I^{\mathrm{ann}} \cap [I : A] = 0$ *si, y solo si,* $I^{\mathrm{ann}} = [\mathrm{Ann}(I) : A]$.

(iv) Si además $\widehat{I} \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$, entonces $\mathrm{Ann}(I^{\mathrm{ann}}) \subseteq \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}$.

(v) Si además $\overline{I} \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$, entonces $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}) \subseteq \overline{I}^{\mathrm{ann}}$.

Demostración. (i) Tomando $\mathcal{P} = I^{\mathrm{ann}}$ en el Lema 2.3.14.(i).

(ii) La primera conclusión fue probada en [13, Lemma 2.1.(1)]. Ahora, tomando $\mathcal{P} = [I : A]$ en el Lema 2.3.14.(i), se sigue que

$$\mathrm{Ann}([I : A]) \subseteq [[I : A]_{\mathrm{ann}} : A] \subseteq [\mathrm{Ann}(I) : A].$$

(iii) Supongamos que $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$. (a) La primera conclusión se sigue de la afirmación (ii) y del hecho que

$$[I : A](\mathrm{Ann}(I)) \subseteq I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0,$$

y en consecuencia $\mathrm{Ann}(I) \subseteq [I : A]_{\mathrm{ann}}$. Análogamente, tenemos que

$$[\mathrm{Ann}(I) : A](I) \subseteq I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0,$$

se sigue que $[\mathrm{Ann}(I) : A] \subseteq I^{\mathrm{ann}}$. Ahora, nótese que

$$[\mathrm{Ann}(I) : A][I : A] + [I : A][\mathrm{Ann}(I) : A] \subseteq [I \cap \mathrm{Ann}(I) : A] = 0,$$

y de ahí $[\mathrm{Ann}(I) : A] \subseteq \mathrm{Ann}([I : A])$. El recíproco fue probado en la afirmación (ii).

(b) Si $I^{\mathrm{ann}} \cap [I : A] = 0$, entonces $I^{\mathrm{ann}} \subseteq \mathrm{Ann}([I : A])$, de ahí, por (a), tenemos la siguiente cadena

$$I^{\mathrm{ann}} \subseteq \mathrm{Ann}([I : A]) = [\mathrm{Ann}(I) : A] \subseteq I^{\mathrm{ann}},$$

y por tanto $I^{\mathrm{ann}} = [\mathrm{Ann}(I) : A]$. Recíprocamente, si $I^{\mathrm{ann}} = [\mathrm{Ann}(I) : A]$, entonces

$$I^{\mathrm{ann}} \cap [I : A] = [\mathrm{Ann}(I) : A] \cap [I : A] = [\mathrm{Ann}(I) \cap I : A] = 0.$$

(iv) Supongamos que $\widehat{I} \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$. Por la afirmación (i), $\mathrm{Ann}(I^{\mathrm{ann}}) \subseteq [\widehat{I} : A]$, y de ahí $\mathrm{Ann}(I^{\mathrm{ann}}) \subseteq [\widehat{I} : A]^{\vee}$. Por otro lado, por la primera conclusión de la afirmación (iiia) aplicada a $\widehat{I}$ obtenemos que $[\widehat{I} : A]_{\mathrm{ann}} = \mathrm{Ann}(\widehat{I}) = \mathrm{Ann}(I)$, y por tanto $[\widehat{I} : A]^{\vee} = \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}$. Además, podemos concluir que $\mathrm{Ann}(I^{\mathrm{ann}}) \subseteq \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}$.

(v) Supongamos que $\overline{I} \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$. Teniendo en cuenta que $\mathrm{Ann}(I)^{\wedge} = \mathrm{Ann}(I)$, el resultado se sigue de aplicar la afirmación (iv) a $\mathrm{Ann}(I)$. □

Ahora, podemos enunciar y probar un resultado para ideales, que está en el espíritu de [8, Theorem 2.6].

Teorema 2.3.16. *Sea A un álgebra y sea I un ideal de A tal que $\overline{I} \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) I *es c.d. en* A.

(ii) $I^{\mathrm{ann}} = [\mathrm{Ann}(I) : A]$ *y* $\mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}} = [\overline{I} : A]$.

(iii) $\mathrm{Ann}(I^{\mathrm{ann}}) = \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}$.

(iv) $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}) = I^{\mathrm{ann}}$.

(v) $\mathcal{M}(A) = (I^{\mathrm{ann}} \oplus \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}})^{\vee}$.

(vi) $\mathcal{M}(A) = \overline{I^{\mathrm{ann}} \oplus \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}}$.

Demostración. (i) ⇒ (ii) Por el Lema 2.3.15.((iii)(a)), tenemos que $I^{\mathrm{ann}} \supseteq [\mathrm{Ann}(I) : A]$. Como $\mathrm{Ann}(A) \subseteq \overline{I} \cap \mathrm{Ann}(I)$, deducimos que $\mathrm{Ann}(A) = 0$, y de ahí, por la Proposición 2.3.4, tenemos que $A = (I \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge}$. Ahora, usando la propiedad del continuo para la ε-clausura, para cada $F \in I^{\mathrm{ann}}$ podemos ver que

$$F(A) = F((I \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge}) \subseteq (F(I \oplus \mathrm{Ann}(I)))^{\wedge} \subseteq \mathrm{Ann}(I)^{\wedge} = \mathrm{Ann}(I),$$

y por tanto $I^{\mathrm{ann}} \subseteq [\mathrm{Ann}(I) : A]$. Finalmente, intercambiando los papeles de I y $\mathrm{Ann}(I)$, la última igualdad en la afirmación (ii) se cumple.

(ii) ⇒ (iii). Tomando anuladores en la primera igualdad de (ii), y teniendo en cuenta la segunda conclusión del Lema 2.3.15.((iii)(a)) para $\mathrm{Ann}(I)$, tenemos que

$$\mathrm{Ann}(I^{\mathrm{ann}}) = \mathrm{Ann}([\mathrm{Ann}(I) : A]) = [\overline{I} : A].$$

Ahora, la segunda igualdad en (ii) nos permite concluir que

$$\mathrm{Ann}(I^{\mathrm{ann}}) = \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Se sigue de la igualdad $\mathrm{Ann}(I^{\mathrm{ann}}) = \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}$ que $\overline{I^{\mathrm{ann}}} = \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}})$, y en particular $I^{\mathrm{ann}} \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}})$. Por otro lado, por el Lema 2.3.15.(v), tenemos que $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}) \subseteq \overline{I}^{\mathrm{ann}}$. Como $I \subseteq \overline{I}$, y de ahí $\overline{I}^{\mathrm{ann}} \subseteq I^{\mathrm{ann}}$, obtenemos que $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}) = I^{\mathrm{ann}}$.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Se sigue por el Lema 2.3.15.(i) aplicado a $\mathrm{Ann}(I)$ que

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}) \subseteq [\mathrm{Ann}(I) : A],$$

y así resulta que

$$I^{\mathrm{ann}} \subseteq [\mathrm{Ann}(I) : A].$$

Por otro lado, tomando anuladores en (iv), obtenemos que

$$\overline{\mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}}} = \mathrm{Ann}(I^{\mathrm{ann}}),$$

y de ahí, por el Lema 2.3.15.(i), tenemos que $\mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}} \subseteq [\widehat{I} : A]$. Por lo tanto

$$I^{\mathrm{ann}} \cap \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}} \subseteq [\mathrm{Ann}(I) : A] \cap [\widehat{I} : A] \subseteq [\mathrm{Ann}(I) \cap \widehat{I} : A] = 0.$$

Por otra parte, podemos ver que

$$(I^{\mathrm{ann}} + \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}})_{\mathrm{ann}} = \widehat{I} \cap \mathrm{Ann}(I) = 0,$$

y de ahí $\mathcal{M}(A) = (I^{\mathrm{ann}} + \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}})^{\vee}$. Así $\mathcal{M}(A) = (I^{\mathrm{ann}} \oplus \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}})^{\vee}$.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Esta implicación es consecuencia del Lema 2.3.14.(ii).

(vi) $\Rightarrow$ (i). Como $0 = I^{\mathrm{ann}} \cap \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}} = (I \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\mathrm{ann}}$, se sigue que $A = (I \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge}$, y por tanto I es c.d. en A. $\square$

En el siguiente resultado se muestra que, en un ideal c.d. coinciden ambas clausuras.

Corolario 2.3.17. *Sea A un álgebra con anulador cero, y sea I un ideal de A. Entonces I es c.d. en A si, y solo si, $\overline{I}$ es c.d. en A e $\widehat{I} = \overline{I}$.*

Demostración. Supongamos que I es c.d. en A. Por la Proposición 2.3.4.(iii), obtenemos que $\overline{I}$ es c.d. en A e $\overline{I} \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$. Ahora, por la equivalencia (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) en el Teorema 2.3.16 aplicado sobre I e $\overline{I}$, deducimos que $I^{\mathrm{ann}} = \overline{I}^{\mathrm{ann}}$, luego $\widehat{I} = \widehat{\overline{I}}(= \overline{I})$, y de ahí $\widehat{I} = \overline{I}$. El recíproco se sigue de la Proposición 2.3.4. $\square$

2.4. Ideales complementadamente densos finito dimensionales

El objetivo de esta sección es discutir la singularidad de un ideal c.d. finito dimensional. Para ello necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 2.4.1. *Sea A un álgebra semiprima e I un ideal c.d. de A. Si I es finito dimensional entonces también lo es $\overline{I}$.*

Demostración. Supongamos que $A \neq 0$ y que $I \neq 0$. Considérese la aplicación lineal $\Phi : M(\widehat{I}) \to L(I)$ definida por

$$\Phi(F)(x) = F(x), \quad \text{para todo } F \in M(\widehat{I}),\ x \in I.$$

Dado $F \in M(\widehat{I})$, por la propiedad de extensión para los operadores de multiplicación, podemos elegir $T \in \mathcal{M}(A)$ satisfaciendo $T(x) = F(x)$ para todo $x \in \widehat{I}$. Nótese que la condición $\Phi(F) = 0$ implica que $T \in I^{\text{ann}} = \widehat{I}^{\text{ann}}$, y por consiguiente $F = 0$. Esto es, Φ es inyectiva, y consecuentemente $M(\widehat{I})$ es finito dimensional. Ahora considérese la aplicación lineal $\varphi : \widehat{I} \to M(\widehat{I}) \times M(\widehat{I})$ dada por

$$\varphi(x) = (L_x^{\widehat{I}}, R_x^{\widehat{I}}), \quad \text{para todo } x \in \widehat{I}.$$

Es claro que $Ker(\varphi) = \text{Ann}_{\widehat{I}}(\widehat{I})$. Puesto que, por el Corolario 2.3.17, $\overline{I} = \widehat{I}$ es un ideal c.d., el Corolario 2.3.11 afirma que $\widehat{I}$ es semiprima y por tanto $Ker(\varphi) = 0$. Por tanto φ es también inyectiva, y consecuentemente $\widehat{I} = \overline{I}$ es finito dimensional. □

Lema 2.4.2. *Sea A un álgebra semiprima e I un ideal c.d. de A. Si I es finito dimensional entonces también lo es $A/\text{Ann}(I)$.*

Demostración. Sea $q : A \to A/\text{Ann}(I)$ la correspondiente aplicación cociente. Es claro, en virtud de la Proposición 2.2.2, que $q(I)(= q(I \oplus \text{Ann}(I)))$ es un ideal denso de $A/\text{Ann}(I)$ y por supuesto finito dimensional. En particular su π-clausura coincide con $A/\text{Ann}(I)$ y, en virtud del Lema 2.4.1, $A/\text{Ann}(I)$ es también finito dimensional.

□

Proposición 2.4.3. *No existen ideales c.d. no cero finito dimensionales en un álgebra semiprima π-radical.*

Demostración. Sea I un ideal no cero c.d. y finito dimensional de A . Por el Lema 2.4.1, $\overline{I}$ es también finito dimensional. Si A es π-radical no cero debe existir J_1 ideal π-cerrado de A tal que $J_1 \subset \overline{I}$, J_2 ideal π-cerrado de A tal que $J_2 \subset J_1 \subset \overline{I}$, y así sucesivamente lo cual es una contradicción. □

Ya podemos poner de manifiesto la singularidad del caso finito dimensional.

Proposición 2.4.4. *Si A un álgebra semiprima e I un ideal no nulo c.d. y finito dimensional, entonces $A/\text{Ann}(I)$ es un álgebra π-descomponible finito dimensional.*

Demostración. Notemos por comodidad $J = \overline{\pi\mathrm{-Soc}(A)}$. Si $J = 0$, entonces A es π-radical lo cual contradice lo probado en la Proposición 2.4.3.

Considérese la aplicación cociente q de A en A/J. En virtud de la Proposición 2.3.7 $q(I)$ es ideal c.d. de A/J. Dado que un $q(I)$ es obviamente finito dimensional y de que A/J es un álgebra π-radical en virtud del Corolario 1.5.10, podemos aplicar de nuevo la Proposición 2.4.3, obtenemos que $q(I) = 0$, y por tanto $I \subseteq \overline{\pi\mathrm{-Soc}(A)}$. Tomando ahora anuladores y aplicando el Corolario 1.5.12.(i) obtenemos finalmente que $A/\mathrm{Ann}(I)$ es un álgebra π-descomponible, la cual es finito dimensional en virtud del Lema 2.4.2.

$\square$

CAPÍTULO 3

La clausura central de un álgebra no asociativa

En este capítulo nos vamos a centrar en el concepto de clausura central en contexto semiprimo. Usando el concepto de filtro de denominadores daremos una definición alternativa a la dada por Baxter-Martindale [3]. Posteriormente, tras el análisis de las propiedades que se desprenden de la definición daremos una caracterización de tipo axiomático que será ampliamente usada para el cálculo de la clausura central de varias álgebras.

3.1. Centroide, centroide extendido y clausura central

Es sabido que toda álgebra asociativa conmutativa B sin *divisores de cero* (a es un divisor de cero si existen sendos elementos no nulos b y c en A tales que $ab = ca = 0$) puede sumergirse en un cuerpo Q, llamado el *cuerpo de fracciones* de B, que está caracterizado como la más grande álgebra que extiende a B que satisface:

$$\textit{Para cada } q \in Q \textit{ existe } s \in B\backslash\{0\} \textit{ tal que } sq \in B.$$

La construcción de Q es bien conocida y puede extenderse de manera inmediata al caso en que B tenga divisores de cero, si bien éstos han de ser excluidos como denominadores. Concretamente, si S es un subconjunto multiplicativo de B que no contiene divisores de cero de B, entonces se puede definir el *álgebra de fracciones* de B por S

$$Q = S^{-1}B := S \times B/\sim,$$

donde

$$(s,a) \sim (t,b) \qquad \Leftrightarrow \qquad at = bs.$$

En contexto no necesariamente conmutativo, W. Martindale, construyó un álgebra que, para el estudio de ciertas propiedades, puede jugar el papel de cuerpo de fracciones. El álgebra $Q_s(B)$, llamada *álgebra simétrica de cocientes (de Martindale)* del álgebra asociativa B y que no es otra que la más grande álgebra asociativa Q que extiende a B y que verifica las siguientes dos condiciones:

($\mathcal{A}1$) Para cada $q \in Q$ existe un ideal esencial D de B tal que $qD + Dq \subseteq B$.

($\mathcal{A}2$) Si $q \in Q$ verifica que $qD = 0$ ó $Dq = 0$ para algún ideal esencial D de B, entonces $q = 0$.

W. E. Baxter y W. S. Martindale en [3, Theorem 2.5] estudiaron las propiedades del centro de $Q_S(B)$. Si B es un álgebra asociativa prima, dicho centro extiende al cuerpo base y permite sumergir el álgebra inicial en una nueva álgebra prima que extiende a B y que no admite nueva extensión si se repitiera el proceso.

A lo largo de los últimos años ha habido numerosos intentos de construir álgebras de cocientes en contexto no asociativo, sin que se haya encontrado una generalización plena a nivel general, ya que las técnicas usadas en contexto asociativo no parecen poder extenderse de forma general. Pese a este fracaso de generalización, la importancia del centro del álgebra simétrica de cocientes (llamado centroide extendido), y de la subálgebra del álgebra simétrica de cocientes generada por el álgebra de partida sobre el centroide extendido (llamada clausura central), obligó a hacer renovados esfuerzos en la búsqueda de los correspondientes conceptos en contexto no asociativo, esfuerzos que culminaron con el trabajo de T. S. Erickson, W. S. Martindale y J. M. Osborn [21], en el que introdujeron el centroide extendido y la clausura central en contexto no asociativo primo, y que más tarde W. E. Baxter y el propio W. S. Martindale [3] extendieron al caso semiprimo.

Para ver cómo se introdujo el concepto de centroide extendido en el contexto de las álgebras semiprimas necesitamos un poco de lenguaje. En todo lo que sigue supondremos que A es un álgebra no necesariamente asociativa.

Definición 3.1.1. Un centralizador en A es una aplicación lineal $f : A \to A$ satisfaciendo

$$f(ab) = af(b) = f(a)b \quad \text{para cualesquiera } \ a, b \in A.$$

Se define el *centroide* de A, y se denota por Γ_A como el conjunto de todos los centralizadores de A. Es claro que Γ_A es una subálgebra unital de $L(A)$ y que la aplicación $\alpha \mapsto \alpha Id_A$ es una inmersión de $\mathbb{K}$ en Γ_A. Se dice que A es un *álgebra central* si dicha inmersión es también sobreyectiva.

Definición 3.1.2. El *centro* de un álgebra dada A se define como el conjunto Z_A de los elementos de A que asocian y conmutan con todos los elementos de A, esto es

$$Z_A := \{z \in A \,:\, [z,a] = [z,a,b] = [a,z,b] = [a,b,z] = 0 \text{ para todo } a,b \in A\},$$

donde para cualesquiera $a,b,c \in A$, entendemos que $[a,b] = ab - ba$ y $[a,b,c] = (ab)c - a(bc)$.

La aplicación $z \mapsto L_z$ es un homomorfismo de Z_A en Γ_A, inyectivo si A tiene anulador cero (y por tanto permite considerar Z_A como una subálgebra de Γ_A) y biyectivo si además A es unital.

Definición 3.1.3. Un *centralizador parcialmente definido* (abreviadamente, *c.p.d.*) en A es una aplicación lineal $f : I \to A$ definida en un ideal I no cero de A y con valores en A, satisfaciendo

$$f(ax) = af(x) \qquad \text{y} \qquad f(xa) = f(x)a$$

para cualesquiera $a \in A$ y $x \in I$.

Nótese que $f : I \to A$ es un c.p.d. si, y sólo si, f es un $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo, esto es, una aplicación lineal de I en A tal que $Ff(x) = f(F(x))$ para todo $x \in I$ y $F \in \mathcal{M}(A)$.

En efecto, si f es un $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo entonces para todo $a \in A$ tenemos

$$f(ax) = f(L_a(x)) = L_a f(x) = af(x),$$

y

$$f(xa) = f(R_a(x)) = R_a f(x) = f(x)a,$$

y por tanto f es un c.p.d. Recíprocamente supongamos que f es un c.p.d. y considérese el conjunto $\mathcal{T}$ que consiste en todos los $F \in \mathcal{M}(A)$ tal que $f(F(x)) = F(f(x))$ para todo $x \in I$. Es claro que $\mathcal{T}$ es una subalgebra de $\mathcal{M}(A)$ que contiene a Id_A, L_a^A, R_a^A $(a \in A)$. Por tanto $\mathcal{T} = \mathcal{M}(A)$, y en consecuencia f es una aplicación lineal tal que $Ff(a) = f(F(a))$ para todo $a \in A$ y $F \in \mathcal{M}(A)$.

En el caso en que adicionalmente I sea un ideal esencial de A, diremos que f es un *centralizador esencialmente definido* (abreviadamente, *c.e.d.*) en A. Un c.e.d. f en A se dice *maximal* si no existen c.e.d. en A que extiendan estrictamente a f.

Conviene darse cuenta que a cada c.p.d. se le puede asociar de forma natural un c.e.d. En efecto, si A es un álgebra semiprima y f es un c.p.d. cuyo dominio es el ideal I de A, podemos considerar la aplicación $\widetilde{f} : I \oplus \mathrm{Ann}(I) \longrightarrow A$, definida por $\widetilde{f}(x+y) := f(x)$, para todo $x \in I$ e $y \in \mathrm{Ann}(I)$. Claramente, en virtud del Corolario 1.4.5, $\widetilde{f}$ es un c.e.d.

Definición 3.1.4. Si A es un álgebra semiprima, entonces la relación $\simeq$, definida en el conjunto de los centralizadores esencialmente definidos (c.e.d.) en A por:

$$g \simeq h \quad \Leftrightarrow \quad \text{Existe } f \text{ c.e.d. en } A \text{ tal que } g \text{ y } h \text{ son extensiones de } f,$$

es una relación de equivalencia. El conjunto C_A de todas las clases de equivalencia $[f]$, dotado con las operaciones inducidas por la suma y la composición de operadores parcialmente definidos, es un anillo asociativo conmutativo regular en el sentido de von Neumann (esto es, para todo $a \in R$ existe $x \in R$ tal que $a = axa$) llamado el *centroide extendido* de A.

En [17, Proposition 1] se demostró que todo c.e.d. f en A puede extenderse de manera única a un c.e.d. maximal. De hecho, cada clase de equivalencia en C_A contiene un único c.e.d. maximal en A y por tanto, la acción de reemplazar cada clase de equivalencia por su único c.e.d. maximal, permite evitar el paso a cociente en la presentación de C_A. Para cada $\lambda \in C_A$, escribiremos $\lambda x = \lambda(x) \in A$ cuando $x \in \mathrm{dom}(\lambda)$.

Es claro que $\Gamma_A \subseteq C_A$ y se dice que A es *centralmente cerrada* si $\Gamma_A = C_A$. Es sabido que C_A es un cuerpo si, y solo si, A es prima. De hecho, Γ_A puede verse como la subálgebra de C_A cuyos elementos son los $\lambda \in C_A$ tales que $\lambda A \subseteq A$.

Definición 3.1.5. Sea B un álgebra asociativa. Un *B-módulo (izquierdo)* es un espacio vectorial X dotado con una aplicación bilineal $(a, x) \mapsto a \,.\, x$ de $B \times X$ en X verificando

$$a \,.\, (b \,.\, x) = (ab) \,.\, x$$

para cualesquiera $a, b \in B$ y $x \in X$. Un *B-submódulo* M de X es un subespacio vectorial de X verificando que $BM \subseteq M$. Si además se verifica que $M \cap N \neq 0$ para cualquier B-submódulo N de X distinto de cero, se dice que M es *esencial*.

Recordemos sucintamente cómo Baxter y Martindale extienden el álgebra hasta llegar a la clausura central.

Definición 3.1.6. Un elemento $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes a_i \in C_A \otimes_{\mathbb{K}} A$ es llamado *elemento anulante* si existe un ideal esencial D de A contenido en $\cap_{i=1}^{n} \mathrm{dom}(\lambda_i)$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) F(a_i) = 0$ para cualesquiera $x \in D$ y $F \in \mathcal{M}(A)$.

Se prueba que el conjunto M de todos los elementos anulantes es un ideal de $C_A \otimes_{\mathbb{K}} A$, conocido con el nombre de *ideal anulante*, que de hecho es el único ideal de $C_A \otimes_{\mathbb{K}} A$ que contiene al conjunto I_0 cuyos elementos son

$$\lambda \otimes x - 1 \otimes \lambda(x) \text{ para } \lambda \text{ en } C_A \text{ y } x \text{ en el dominio de } \lambda, \tag{3.1}$$

y que es maximal con respecto a la propiedad $M \cap (1 \otimes A) = 0$. [3, Lemma 2.11]

Baxter y Martindale definen la *clausura central* del álgebra semiprima A, $Q(A)$, como el cociente del producto tensorial $C_A \otimes_{\mathbb{K}} A$ por el ideal M.

Así, la aplicación $a \mapsto 1 \otimes a + M$ es un monomorfismo de álgebras de A en $Q(A)$, llamada *inmersión natural* de A en $Q(A)$ [3, Corollary 2.9]. Abusando de la notación, para $\lambda \in C_A$ y $x \in A$, se escribirá λx para denotar el elemento $\overline{\lambda \otimes x}$ de $Q(A)$. Es claro que los multiplicadores derecho e izquierdo de elementos de A por elementos de $Q(A)$ determinan un estructura natural de $\mathcal{M}(A)$-módulo izquierdo para $Q(A)$ cuya acción viene dada por

$$F(\sum \lambda_i a_i) = \sum \lambda_i F(a_i)$$

para todo $F \in \mathcal{M}(A)$ y $\sum \lambda_i a_i \in Q(A)$.

Para una definición alternativa necesitamos, entre otras cosas, el concepto de ideal izquierdo

Definición 3.1.7. Sea A un álgebra. Un *ideal izquierdo* de A es un subespacio vectorial I de A tal que $ax \in I$ para cualesquiera $a \in A$ y $x \in I$. Dado un ideal izquierdo I de A, para cada elemento $a \in A$ denotamos por $(I : a)_A$ al subconjunto de A definido por

$$(I : a)_A := \{b \in A \, : \, ba \in I\}.$$

El resto de las herramientas que necesitamos para la definición están vinculadas al concepto de filtro de denominadores, que introducimos en la siguiente sección.

3.2. Filtro de denominadores para álgebras asociativas.

A lo largo de esta sección entenderemos que B es un álgebra asociativa. En tal caso, para cada ideal izquierdo I de B, el conjunto $(I : a)_B$ es también un ideal izquierdo de B.

Un *filtro de denominadores* en B es una familia no vacía $\mathcal{F}$ de ideales izquierdos de B que satisface las dos propiedades siguientes:

(1) Si $I \in \mathcal{F}$ y $a \in B$, entonces $(I : a)_B \in \mathcal{F}$.

(2) Si I es un ideal izquierdo de B y existe $J \in \mathcal{F}$ tal que $(I : a)_B \in \mathcal{F}$ para todo $a \in J$, entonces $I \in \mathcal{F}$.

Por un *centralizador izquierdo parcialmente definido* en B nos referimos a un operador lineal f de un ideal izquierdo de B en B que satisface

$$f(ab) = af(b) \ \text{ para todo } \ a \in B \ \text{ y } \ b \in \operatorname{dom}(f).$$

Es claro que, para cada $a \in B$, el operador derecho de multiplicación R_a es un centralizador izquierdo en B.

Las siguientes propiedades de los filtros de denominadores seran usadas de forma frecuente sin hacer una mención explícita de los mismos.

Lema 3.2.1. *Para un filtro de denominadores $\mathcal{F}$ en un álgebra asociativa B tenemos que:*

(i) Si $I \in \mathcal{F}$ y J es un ideal izquierdo de B tal que $I \subseteq J$, entonces $J \in \mathcal{F}$.

(ii) Si $I, J \in \mathcal{F}$, entonces $IJ \in \mathcal{F}$.

(iii) Si $I, J \in \mathcal{F}$ y $f : I \to B$ es un centralizador izquierdo parcialmente definido en B, entonces $f^{-1}(J) \in \mathcal{F}$.

(iv) Si $I, J \in \mathcal{F}$, entonces $I \cap J \in \mathcal{F}$.

Demostración. (i) Como $\mathcal{F}$ es no vacio y $(I : 0)_B = B$ para todo ideal I de B, se tiene que $B \in \mathcal{F}$. Supongamos que $I \in \mathcal{F}$ y J es un ideal izquierdo de B tal que $I \subseteq J$. Para cada $a \in I$ tenemos que $(J : a)_B = B \in \mathcal{F}$, por tanto $J \in \mathcal{F}$.

(ii) Supongamos que I y J pertenecen a $\mathcal{F}$. Para cada $a \in J$ tenemos que $I \subseteq (IJ : a)_B$, por tanto $(IJ : a)_B \in \mathcal{F}$ por (i). Por tanto $IJ \in \mathcal{F}$.

(iii)-(iv) Supongamos que $I, J \in \mathcal{F}$ y $f : I \to B$ es un centralizador izquierdo parcialmente definido en B. Para cada $a \in I$ tenemos que

$$(f^{-1}(J) : a)_B = \{b \in B : f(ba) \in J\} =$$

$$\{b \in B \, : \, bf(a) \in J\} = (J : f(a))_B \in \mathcal{F}.$$

Por lo tanto $f^{-1}(J) \in \mathcal{F}$. Además, como la inclusión $I \hookrightarrow B$ es un centralizador izquierdo parcialmente definido en B, se sigue por lo anterior que $I \cap J \in \mathcal{F}$. $\square$

Sea X un B-modulo izquierdo. Se llama *centralizador izquierdo parcialmente definido* en X a un operador lineal f de un ideal izquierdo de B en X que satisface

$$f(ab) = af(b) \;\; \text{para todo} \;\; a \;\; \text{en} \;\; B \;\; \text{y} \;\; b \;\; \text{en} \;\; \mathrm{dom}(f).$$

Es claro que, para cada $x \in X$, la aplicación $T_x : B \to X$ dada por $T_x(a) := ax$ es un centralizador izquierdo totalmente definido en X.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro de denominadores en B. Representaremos por $\mathcal{H}$ ya sea $\mathcal{H}_B(\mathcal{F})$ o $\mathcal{H}_X(\mathcal{F})$, donde $\mathcal{H}_B(\mathcal{F})$ (respectivamente, $\mathcal{H}_X(\mathcal{F})$) representa el conjunto de los centralizadores izquierdos parcialmente definidos en B (respectivamente en X) con dominios en $\mathcal{F}$.

Lema 3.2.2. *Sea B un algebra asociativa, sea X un B-modulo izquierdo, y sea $\mathcal{F}$ un filtro de denominadores en B. Entonces tenemos que:*

(i) La relación $\cong$ definida en $\mathcal{H}$ por $f \cong g$ si y solo si existe $I \in \mathcal{F}$ tal que $I \subseteq \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ y $f_{|I} = g_{|I}$ es una relación de equivalencia.

(ii) Si para $f, g \in \mathcal{H}$ definimos $f + g$ por $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$ para cada $a \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, entonces $f + g \in \mathcal{H}$, y $f + g \cong f' + g'$ para todo $f', g' \in \mathcal{H}$ con $f \cong f'$ y $g \cong g'$.

(iii) *Si para α escalar y $f \in \mathcal{H}$ definimos αf por $(\alpha f)(a) := \alpha f(a)$ para todo $a \in \mathrm{dom}(f)$, entonces $\alpha f \in \mathcal{H}$, y $\alpha f \cong \alpha f'$ para todo $f' \in \mathcal{H}$ con $f \cong f'$.*

(iv) *Si para $f \in \mathcal{H}_B(\mathcal{F})$ y $g \in \mathcal{H}$ definimos fg por $(fg)(a) := g(f(a))$ para todo $a \in f^{-1}(\mathrm{dom}(g))$, entonces $fg \in \mathcal{H}$, y $fg \cong f'g'$ para todo $f' \in \mathcal{H}_B(\mathcal{F})$ y $g' \in \mathcal{H}$ con $f \cong f'$ y $g \cong g'$.*

Demostración. Para probar (i) veamos que es transitiva, ya que la propiedad reflexiva y simétricas son obvias. Supongamos que $f, g, h \in \mathcal{H}$ satisfacen $f \cong g \cong h$, y que $f_{|I} = g_{|I}$ y $g_{|J} = h_{|J}$ para $I, J \in \mathcal{F}$ tal que $I \subseteq \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ y $J \subseteq \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(h)$. Entonces $I \cap J \in \mathcal{F}$, $f_{|I\cap J} = h_{|I\cap J}$ y $I \cap J \subseteq \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(h)$, y así $f \cong h$.

Para probar (ii) y (iv) supongamos que f y g están en un apropiado $\mathcal{H}$. Es fácil ver que $f + g$ y fg (definidos de la misma forma que el párrafo anterior) son centralizadores izquierdos parcialmente definidos cuyo dominio esta en $\mathcal{F}$, y por tanto $f + g$ y fg pertenecen a $\mathcal{H}$. Además, si $f', g' \in \mathcal{H}$ satisfacen $f \cong f'$ y $g \cong g'$, y si $f_{|I} = f'_{|I}$ y $g_{|J} = g'_{|J}$ para $I, J \in \mathcal{F}$ tal que $I \subseteq \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(f')$ y $J \subseteq \mathrm{dom}(g) \cap \mathrm{dom}(g')$, entonces $I \cap J$ y$I \cap f^{-1}(J)$ pertenecen a $\mathcal{F}$, $(f+g)_{|I\cap J} = (f' + g')_{|I\cap J}$, y $(fg)_{|I\cap f^{-1}(J)} = (f' + g')_{|I\cap f^{-1}(J)}$, por tanto $f + g \cong f' + g'$ y $fg \cong f'g'$, (ii) y (iv) quedan demostradas. La afirmación (iii) es inmediata. □

Sea $\mathcal{F}$ un filtro de denominadores de B. Según el lema anterior, en el conjunto $\mathcal{H}_B(\mathcal{F})$ de todos los centralizadores izquierdos parcialmente definidos en B con dominios en $\mathcal{F}$ se define una relación de equivalencia $\cong$, así como varias operaciones (suma, multiplicación por escalares, y multiplicación) que son compatibles con $\cong$. Una verificación estándar muestra que el conjunto cociente dotado con las operaciones inducidas es un álgebra asociativa, que denotaremos por $B_{\mathcal{F}}$ y llamaremos el *álgebra de cocientes de B con respecto a $\mathcal{F}$*. Además, la aplicación $a \to [R_a]$ es un homomorfismo de álgebras de B en $B_{\mathcal{F}}$ cuyo núcleo

$$t_{\mathcal{F}}(B) := \{a \in B \,:\, Ia = 0 \ \text{ para algún } \ I \in \mathcal{F}\}.$$

También en el conjunto $\mathcal{H}_X(\mathcal{F})$ de todos los centralizadores izquierdos parcialmente definidos en X con dominios en $\mathcal{F}$ se define una relación de equivalencia $\cong$, para las que las operaciones suma, multiplicaciones por escalares y por elementos de B ($a.f = f \circ R_a$) son compatibles. Así el conjunto cociente dotado con las operaciones inducidas se convierte en un B-módulo izquierdo, que denotaremos $X_{\mathcal{F}}$ y llamaremos el módulo *de cocientes X con respecto a $\mathcal{F}$*. Además, la aplicación $x \to [T_x]$ es un homomorfismo de B-módulos de X en $X_{\mathcal{F}}$ cuyo núcleo

$$t_{\mathcal{F}}(X) := \{x \in X \,:\, Ix = 0 \ \text{ para algun } \ I \in \mathcal{F}\}.$$

Además, la operación $(f, g) \to fg$ de $\mathcal{H}_B(\mathcal{F}) \times \mathcal{H}_X(\mathcal{F})$ en $\mathcal{H}_X(\mathcal{F})$ es compatible con ambas relaciones de equivalencia en $\mathcal{H}_B(\mathcal{F})$ y $\mathcal{H}_X(\mathcal{F})$, y en consecuencia $X_{\mathcal{F}}$ se convierte de hecho en un $B_{\mathcal{F}}$-módulo.

Para un subconjunto S de B, el *anulador derecho* de S en B se define como

$$\mathrm{Ann}_r(S) := \{a \in B : ba = 0 \text{ para todo } b \in S\}.$$

Un ideal izquierdo I de B se dice *denso por la izquierda* de B si $Ann_r((I:a)_B) = 0$ para cada $a \in B$, de forma equivalente, si dado un $a \in B$ y $h \in B\backslash\{0\}$ existe $c \in B$ tal que $ca \in I$ y $ch \neq 0$. Representaremos por $\mathcal{U}_B$ al conjunto de los ideales densos por la izquierda de B. Es sabido que si B es semiprima y asociativa y si I es un ideal de B, entonces I es esencial si, y sólo si I es un ideal denso por la izquierda. En particular, si B es semiprima, entonces $\mathrm{Ann}_r(B) = 0$.

Sea B un álgebra asociativa y sea X un B-módulo izquierdo. Para algún subconjunto S de B, el *anulador de S en X* se define por

$$\mathrm{Ann}_X(S) := \{x \in X : ax = 0 \text{ para todo } a \text{ en } S\}.$$

Un ideal izquierdo I de B se dice *ideal X-denso* en B si $\mathrm{Ann}_X((I:a)_B) = 0$ para todo $a \in B$, de forma equivalente si dado algún $a \in B$ y $x \in X\backslash\{0\}$ existe $c \in B$ tal que $ca \in I$ y $cx \neq 0$. Representaremos por $\mathcal{U}_X$ al conjunto de los ideales izquierdos X-densos de B.

Nótese que si B es unital con unidad 1, e $I \in \mathcal{U}_X$ es tal que $Ix = 0$, entonces $(I:1)_A = I$ y por tanto, $x = 0$.

En el mismo afán de unificar, representaremos por $\mathcal{U}$ ya sea $\mathcal{U}_B$ o $\mathcal{U}_X$ y por $\mathcal{J}$ al conjunto de los centralizadores izquierdos parcialmente definidos en B con dominio en $\mathcal{U}_B$ ó en el B-módulo izquierdo X con dominio en $\mathcal{U}_X$.

Lema 3.2.3. *Sea B un álgebra asociativa, sea X un B-módulo izquierdo y sea $f \in \mathcal{J}$. Tenemos que:*

(i) Si $\ker(f) \in \mathcal{U}$, *entonces $f = 0$.*

(ii) Si f_1 y $f_2 \in \mathcal{J}$ extienden a f, entonces existe $g \in \mathcal{J}$ que es, al mismo tiempo, una extensión de f_1 y f_2.

Demostración. Supongamos que $f \neq 0$ y $\ker(f) \in \mathcal{U}$. Entonces, tomando $a \in \mathrm{dom}(f)$ tal que $f(a) \neq 0$, encontramos $b \in B$ tal que $ba \in \ker(f)$ y $bf(a) \neq 0$. Ahora, la contradicción $0 = f(ba) = bf(a) \neq 0$ finaliza la demostración de (i). Para demostrar (ii) es suficiente mostrar que la correspondencia

$$a_1 + a_2 \to f_1(a_1) + f_2(a_2) \quad (a_1 \in \mathrm{dom}(f_1),\, a_2 \in \mathrm{dom}(f_2))$$

es una aplicación bien definida de $\mathrm{dom}(f_1)+\mathrm{dom}(f_2)$ en X ó B. Pero la aplicación $a \to f_1(a) - f_2(a)$ es un centralizador izquierdo de $\mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$ en X ó B, según corresponda, que se anula en el $\mathrm{dom}(f) \in \mathcal{U}$ y, por lo tanto, también se anula en el $\mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$ por (i). Ahora, si $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ con $a_1, b_1 \in$

$\mathrm{dom}(f_1)$ y $a_2, b_2 \in \mathrm{dom}(f_2)$, vemos que $a_1 - b_1 = b_2 - a_2 \in \mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$, y así

$$f_1(a_1) + f_2(a_2) = f_1(b_1) + f_1(a_1 - b_1) + f_2(a_2) = f_1(b_1) + f_2(a_1 - b_1) + f_2(a_2)$$

$$= f_1(b_1) + f_2(b_2 - a_2) + f_2(a_2) = f_1(b_1) + f_2(b_2),$$

lo que finaliza la demostración. □

En el mismo contexto, un $f \in \mathcal{J}$ se dice *centralizador izquierdo parcialmente definido maximal*, en B ó en X según corresponda, si no existe ningún $g \in \mathcal{J}$ distinto de f que lo extienda.

Proposición 3.2.4. *Sea B un álgebra asociativa y sea X un B-modulo izquierdo. Entonces para cada $f \in \mathcal{J}$ existe un único $g \in \mathcal{J}$ maximal que extiende a f.*

Demostración. Definamos un orden en el conjunto $\mathcal{H}$ por $g \leq h$ si y solo si h es una extensión de g. Como este orden es inductivo el Lema de Zorn nos da la existencia de un centralizador izquierdo parcialmente definido maximal el cual es extensión de f. Dos posibles extensiones de f deben coincidir por la maximalidad y el Lema 3.2.3.(ii). □

Si $\mathcal{U}_B$ fuese un filtro de denominadores, este último resultado nos permitiría evitar las clases de equivalencia en el álgebra de cocientes de B con respecto a $\mathcal{U}_B$, tomando el elemento maximal correspondiente, esto es, los elementos de $B_{\mathcal{U}_B}$ se podrían identificar con los centralizadores izquierdos parcialmente definidos maximales respectivamente en B con dominio en $\mathcal{U}_B$. Otro tanto podría afirmarse si $\mathcal{U}_B$ fuese un filtro de denominadores para el módulo de cocientes X con respecto a $\mathcal{U}_X$. Es muy importante pues saber cuándo se puede afirmar que $\mathcal{U}$ en cualquiera de sus casos es un filtro de denominadores.

Con objeto de dar una respuesta válida para ambos casos, representamos por $t_{\mathcal{U}}$ ya sea $t_{\mathcal{U}_B}(B)$ ó $t_{\mathcal{U}_X}(X)$ según corresponda.

Proposición 3.2.5. *Sea B un álgebra asociativa con $\mathrm{Ann}_r(B) = 0$ (y respectivamente sea X un B-módulo izquierdo con $\mathrm{Ann}_X(B) = 0$). Entonces $\mathcal{U}$ es un filtro de denominadores de B tal que $t_{\mathcal{U}} = 0$.*

Demostración. Sea I en $\mathcal{U}$. Sea $a \in B$ y consideremos el ideal $(I : a)_B$. Dado $b \in B$ y $h \in B\backslash\{0\}$ (respectivamente $h \in X\backslash\{0\}$), por ser $I \in \mathcal{U}$ y $ba \in B$ existe $c \in B$ tal que $c(ba) \in I$ y $ch \neq 0$. Por lo tanto $cb \in (I : a)_B$ y $ch \neq 0$, y de ahí $(I : a)_B \in \mathcal{U}$. Por otro lado, supongamos que J es un ideal izquierdo de B tal que $(J : a)_B \in \mathcal{U}$ para todo $a \in I$, y fijemos $b \in B$ y $h \in B\backslash\{0\}$ (respectivamente $h \in X\backslash\{0\}$). Entonces, por la suposición sobre I, existe $c \in B$ tal que $cb \in I$ y $ch \neq 0$. Como $\mathrm{Ann}_r(B) = 0$ (respectivamente $\mathrm{Ann}_X(A) = 0$), existe $d \in B$ tal que $d(ch) \neq 0$, y, como $(J : cb)_B \in \mathcal{U}$, existe $e \in B$ tal que $ed \in (J : cb)_B$ y $e(dch) \neq 0$. Por lo tanto $(edc)b \in J$ y $(edc)h \neq 0$, esto es, $J \in \mathcal{U}$. Así, hemos comprobado que $\mathcal{U}$ es un filtro de denominadores en B. Además, si $h \in B\backslash\{0\}$ (respectivamente $h \in X\backslash\{0\}$), y si elegimos $a \in B$ tal que $ah \neq 0$, entonces existe $b \in B$ tal que $ba \in I$ y $b(ah) \neq 0$, y por tanto $Ih \neq 0$. Esto es, $t_{\mathcal{U}} = 0$.

□

Centrémonos ahora en el caso del álgebra B y dejemos el del B-módulo para más tarde.

Definición 3.2.6. En particular, si B es un álgebra asociativa semiprima, entonces el conjunto $\mathcal{U}_B$ de los ideales densos por la izquierda de B es un filtro de denominadores tales que $t_{\mathcal{U}_B}(B) = 0$, y consecuentemente el álgebra cociente $B_{\mathcal{U}_B}$ puede verse como un álgebra asociativa con unidad que extiende a B. Esta álgebra es llamada el *álgebra maximal izquierda de cocientes* de B, y es representada por $Q_{m\ell}(B)$. En este esquema, el álgebra simétrica de cocientes de Martindale de B no es más que una subálgebra del álgebra maximal izquierda de cocientes de B. La flora puede verse enriquecida con el *álgebra izquierda de Martindale de cocientes* de B definida por

$$Q_\ell(B) := \{q \in Q_{m\ell}(B) : Dq \subseteq B \text{ para algún ideal esencial } D \text{ de } B\}.$$

Es claro que $Q_s(B) \subseteq Q_\ell(B) \subseteq Q_{m\ell}(B)$. Además, puede probarse que C_B no sólo es el centro de $Q_s(B)$ sino que también lo es de $Q_\ell(B)$,y por tanto la C_B-álgebra generada por B puede verse como una subálgebra de ambas.

En este orden de cosas, podemos probar el siguiente resultado.

Proposición 3.2.7. *Sea B un álgebra asociativa con $\mathrm{Ann}_r(B) = 0$, sea $\mathcal{F}$ un filtro de denominadores en B contenido en $\mathcal{U}_B$, y sea f un centralizador izquierdo parcialmente definido en B y $\mathrm{dom}(f) \in \mathcal{F}$. Entonces $[f] \in Z_{B_\mathcal{F}}$ si y solo si f puede extenderse a un c.p.d. en B.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.5 $\mathcal{U}_B$ es un filtro de denominadores de B tal que $t_{\mathcal{U}_B}(B) = 0$, y en particular $t_\mathcal{F}(B) = 0$. Teniendo en cuenta el comentario precedente, $B_\mathcal{F}$ es un subálgebra de $B_{\mathcal{U}_B}$ que contiene a B, la cual está formada por los centralizadores izquierdos parcialmente definidos en B con dominios en $\mathcal{F}$. Si $[f] \in Z_{B_\mathcal{F}}$, entonces $D_{[f]} := \{a \in B : a[f] \in B\}$ es un ideal de B que contiene a $\mathrm{dom}(f)$ y la aplicación $a \to a[f]$ de $D_{[f]}$ en B es un centralizador parcialmente definido en B que extiende a f. Recíprocamente, si h es un c.p.d. en B que extiende a f, entonces para cada centralizador izquierdo parcialmente definido g en B con dominio en $\mathcal{F}$ podemos ver que $\mathrm{dom}(h)\mathrm{dom}(g) \in \mathcal{F}$, $\mathrm{dom}(h)\mathrm{dom}(g) \subseteq g^{-1}(\mathrm{dom}(h)) \cap h^{-1}(\mathrm{dom}(g))$, y

$$(hg)(ab) = g(h(ab)) = g(h(a)b) = h(a)g(b) = h(ag(b)) = h(g(ab)) = (gh)(ab)$$

para todo $a \in \mathrm{dom}(h)$ y $gb \in \mathrm{dom}(g)$, por lo tanto $[h][g] = [g][h]$, y así $[f][g] = [g][f]$. Por lo tanto, $[f] \in Z_{B_\mathcal{F}}$. □

Centrémonos ya en el caso del B-módulo. Sea X un B-módulo izquierdo tal que $\mathrm{Ann}_X(B) = 0$. Teniendo en cuenta la Proposiciones 3.2.4 y 3.2.5, $X_{\mathcal{U}_X}$ es un B-módulo izquierdo que extiende a X, y cada elemento q en $X_{\mathcal{U}_X}$ se puede identificar con un centralizador izquierdo parcialmente definido maximal f en X cuyo dominio pertenece al conjunto $\mathcal{U}_X$. Observemos que, para cada $a \in \mathrm{dom}(f)$ tenemos

$$(R_a f)(b) = f(R_a(b)) = f(ba) = bf(a) = T_{f(a)}(b) \quad \text{para todo} \quad b \in B,$$

así $R_a f = T_{f(a)}$ y, por tanto,

$$aq \equiv [R_a][f] = [T_{f(a)}] \equiv f(a).$$

Para poder avanzar, añadamos una última definición y restrinjamos las condiciones. Para un subconjunto R de X, el anulador *de R en B* se define como

$$\mathrm{Ann}_B(R) := \{a \in B : ax = 0 \text{ para todo } x \in R\}.$$

Proposición 3.2.8. *Sea B un álgebra asociativa y sea X un B-módulo izquierdo. Tenemos que:*

(i) Si $\mathrm{Ann}_B(X) = 0$, entonces $\mathcal{U}_X \subseteq \mathcal{U}_B$.

(ii) Si $\mathrm{Ann}_X(B) = 0$ entonces $t_{\mathcal{U}_X}(X_{\mathcal{U}_X}) = 0$.

(iii) Si $\mathrm{Ann}_X(B) = 0$ y $\mathrm{Ann}_B(X) = 0$, entonces $t_{\mathcal{U}_X}(B) = 0$.

Demostración. (i) Supongamos que $\mathrm{Ann}_B(X) = 0$, en particular, dado $b \in B\backslash\{0\}$, podemos elegir $x \in X$ tal que $bx \neq 0$. Sea I en $\mathcal{U}_X$ y $a \in B$. Por definición de $\mathcal{U}_X$ existe $c \in B$ tal que $ca \in I$ y $cbx \neq 0$, y en consecuencia $cb \neq 0$. Así $I \in \mathcal{U}_B$.

(ii) Supongamos que $q \in X_{\mathcal{U}_X}$ satisface $Iq = 0$ para algún $I \in \mathcal{U}_X$, y que f es un centralizador izquierdo parcialmente definido maximal en Xcon dominio en $\mathcal{U}_X$ tal que $q = [f]$. Por la Proposición 3.2.5, $\mathcal{U}_X$ es un filtro de denominadores en B, y por tanto $I \cap \mathrm{dom}(f) \in \mathcal{U}_X$. Como para cada $a \in I \cap \mathrm{dom}(f)$ tenemos que $0 = aq = f(a)$, se sigue por los Lemas 3.2.1 y 3.2.3 que $f = 0$, y así $q = 0$.

(iii) Finalmente, supongamos que $\mathrm{Ann}_X(B) = 0$ y $\mathrm{Ann}_B(X) = 0$. Si $a \in t_{\mathcal{U}_X}(B)$, entonces $Ia = 0$ para $I \in \mathcal{U}_X$ y en particular, $Iax = 0$ para todo $x \in X$, esto es, $ax \in t_{\mathcal{U}_X}(X)$. En consecuencia, por la Proposición 3.2.5 tenemos que $aX = 0$, y por tanto $a \in \mathrm{Ann}_B(X) = 0$. En definitiva $t_{\mathcal{U}_X}(B) = 0$. □

Finalmente apostillamos que si $\mathrm{Ann}_X(B) = 0$ y $\mathrm{Ann}_B(X) = 0$, entonces $B_{\mathcal{U}_X}$ es un álgebra de extensión de B y, de la misma forma, cada elemento de $B_{\mathcal{U}_X}$ se identifica con un centralizador izquierdo parcialmente definido maximal en B cuyo dominio pertenece al conjunto $\mathcal{U}_X$.

3.3. Diferentes aproximaciones al concepto de clausura central

3.3.1. Método Constructivo.

Nos centramos ahora en el caso particular en que el papel de X lo juega un álgebra A no necesariamente asociativa y el papel de álgebra asociativa es desempeñado por su álgebra de multiplicación, esto es, $B = \mathcal{M}(A)$. Recuérdese que A puede ser considerada como un $\mathcal{M}(A)$-módulo izquierdo (con unidad) para la acción determinada por la evaluación.

Podemos concretar algunos hechos propiciados por esta situación particular.

Proposición 3.3.1. *Sea A un álgebra. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) El conjunto, $\mathcal{U}_A$, de los ideales izquierdos A-densos de $\mathcal{M}(A)$ y el conjunto, $\mathcal{M}(A)$, de los ideales densos por la izquierda de $\mathcal{U}_{\mathcal{M}(A)}$, son filtros de denominadores en $\mathcal{M}(A)$ tales que $t_{\mathcal{U}_A}(A) = 0$ y $t_{\mathcal{U}_{\mathcal{M}(A)}}(\mathcal{M}(A)) = 0$.

(ii) $\mathcal{U}_A \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{M}(A)}$

(iii) $t_{\mathcal{U}_A}(A_{\mathcal{U}_A}) = 0$ y $t_{\mathcal{U}_A}(\mathcal{M}(A)) = 0$, donde $A_{\mathcal{U}_A}$ es el módulo de cocientes de A con respecto a $\mathcal{U}_A$.

Demostración. (i) Como $Id_A \in \mathcal{M}(A)$, es claro que, $\mathrm{Ann}_A(\mathcal{M}(A)) = 0$ y que $\mathrm{Ann}_r(\mathcal{M}(A) = 0)$, por tanto, por la Proposición 3.2.5, los conjuntos $\mathcal{U}_A$ y $\mathcal{U}_{\mathcal{M}(A)}$ son filtros de denominadores de $\mathcal{M}(A)$ tales que $t_{\mathcal{U}_A}(A) = 0$ y $t_{\mathcal{U}_{\mathcal{M}(A)}}(\mathcal{M}(A)) = 0$.

(ii) Puesto que además $\mathrm{Ann}_{\mathcal{M}(A)}(A) = 0$ basta aplicar la Proposición 3.2.8.(i).

(iii) Esta afirmación se sigue de la Proposición 3.2.8.(ii) y (iii).

□

Como consecuencia,

Corolario 3.3.2. *Si A es un álgebra, entonces el álgebra de cocientes $\mathcal{M}(A)_{\mathcal{U}_A}$ es un álgebra de extension de $\mathcal{M}(A)$, el módulo de cocientes $A_{\mathcal{U}_A}$ es un $\mathcal{M}(A)$-módulo izquierdo extensión de A, y la acción del $\mathcal{M}(A)_{\mathcal{U}_A}$-módulo izquierdo $A_{\mathcal{U}_A}$ extiende la acción del $\mathcal{M}(A)$-módulo izquierdo A.*

Veamos ahora que podemos encontrar un cierto $\mathcal{M}(A)$-submódulo de $A_{\mathcal{U}_A}$ que contiene a A al que se puede dotar de estructura de álgebra. Fijemos alguna notación.

Para cada ideal I de A, podemos denotar por $I^{\diamondsuit}$ el ideal de $\mathcal{M}(A)$ dado por $I^{\diamondsuit} = \mathcal{M}(A)(L_I + R_I)\mathcal{M}(A)$, donde $L_I = \{L_x : x \in I\}$ y $R_I = \{R_x : x \in I\}$. Dado

f un c.p.d. en A, representaremos por $f^{\diamondsuit} : \mathrm{dom}(f)^{\diamondsuit} \to \mathcal{M}(A)$ a la aplicación $\mathcal{M}(A)$ definida por

$$f^{\diamondsuit}(\sum_{i=1}^{m} F_i L_{x_i} G_i + \sum_{j=1}^{n} S_j R_{y_j} T_j) := \sum_{i=1}^{m} F_i L_{f(x_i)} G_i + \sum_{j=1}^{n} S_j R_{f(y_j)} T_j$$

para $m, n \in \mathbb{N}$, $F_i, G_i, S_j, T_j \in \mathcal{M}(A)$, $x_i, y_j \in \mathrm{dom}(f)$. En particular, dado que para cada $a \in A$, $f^{\diamondsuit}(R_a) = R_{f(a)}$

Lema 3.3.3. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces tenemos que*

(i) Si $D \in \mathbf{E}_A$ entonces $D^{\diamondsuit} \in \mathcal{U}_A$.

(ii) Si f es un c.p.d. (resp. c.e.d.) en A, entonces $f^{\diamondsuit}$ es un c.p.d. (resp. c.e.d.) en $\mathcal{M}(A)$.

(iii) La aplicación $[f] \to [f^{\diamondsuit}]$ determina un monomorfismo del algebra $^{\diamondsuit}$ de C_A en el centro $Z_{\mathcal{M}(A)_{\mathcal{U}_A}}$.

Demostración. Sea D un ideal esencial de A. Como $D^{\diamondsuit}$ es un ideal de $\mathcal{M}(A)$, para poder probar que $D^{\diamondsuit}$ es un ideal izquierdo A-denso de $\mathcal{M}(A)$ es suficiente probar que, para algún $a \in A$, la condición $D^{\diamondsuit}(a) = 0$ implica $a = 0$. Supongamos que a en A satisface $D^{\diamondsuit}(a) = 0$. Entonces $D\mathcal{M}(A)(a) = \mathcal{M}(A)(a)D = 0$, de ahí $\mathcal{M}(A)(a) = 0$, y por tanto $a = 0$. Así hemos probado (i). Ahora, supongamos que $f : D \to A$ es un c.p.d. (resp. c.e.d.) y supongamos que $\sum_{i=1}^{m} F_i L_{x_i} G_i + \sum_{j=1}^{n} S_j R_{y_j} T_j = 0$ para $m, n \in \mathbb{N}$, $F_i, G_i, S_j, T_j \in \mathcal{M}(A)$, $x_i, y_j \in D$. Entonces, para cada $a \in A$, tenemos que

$$0 = f((\sum_{i=1}^{m} F_i L_{x_i} G_i + \sum_{j=1}^{n} S_j R_{y_j} T_j)(a)) = f(\sum_{i=1}^{m} F_i(x_i G_i(a)) + \sum_{j=1}^{n} S_j(T_j(a) y_j))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} F_i(f(x_i) G_i(a)) + \sum_{j=1}^{n} S_j(T_j(a) f(y_j)) = (\sum_{i=1}^{m} F_i L_{f(x_i)} G_i + \sum_{j=1}^{n} S_j R_{f(y_j)} T_j)(a),$$

de ahí $\sum_{i=1}^{m} F_i L_{f(x_i)} G_i + \sum_{j=1}^{n} S_j R_{f(y_j)} T_j = 0$. Así la correspondencia

$$\sum_{i=1}^{m} F_i L_{x_i} G_i + \sum_{j=1}^{n} S_j R_{y_j} T_j \to \sum_{i=1}^{m} F_i L_{f(x_i)} G_i + \sum_{j=1}^{n} S_j R_{f(y_j)} T_j$$

es un aplicación bien definida $f^{\diamondsuit} : D^{\diamondsuit} \to \mathcal{M}(A)$. Es inmediato ver que $f^{\diamondsuit}$ es un c.p.d. (resp. c.e.d.) en $\mathcal{M}(A)$. Si f es un c.e.d., por la Proposición 3.2.7, $[f^{\diamondsuit}] \in Z_{\mathcal{M}(A)_{\mathcal{U}_A}}$. Nótese que, si g es un c.e.d. equivalente en A, entonces $f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}$, se tiene que

$$f^{\diamondsuit}_{|(\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g))^{\diamondsuit}} = g^{\diamondsuit}_{|(\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g))^{\diamondsuit}},$$

y así $f^\diamondsuit$ y $g^\diamondsuit$ son equivalentes. Por lo tanto la correspondencia $[f] \to [f^\diamondsuit]$ es una aplicación bien definida de C_A en $Z_{\mathcal{M}(A)_{\mathcal{U}_A}}$. Es inmediato verificar que dicha aplicación es un aplicación lineal inyectiva. Ahora, supongamos que f y g son c.e.d. en A, y nótese que para cada $x \in f^{-1}(\mathrm{dom}(g))$ tenemos que $L_x \in L_{\mathrm{dom}(f)}$, $R_x \in R_{\mathrm{dom}(f)}$, y

$$f^\diamondsuit(L_x) = L_{f(x)} \in L_{\mathrm{dom}(g)},\ f^\diamondsuit(R_x) = R_{f(x)} \in R_{\mathrm{dom}(g)}.$$

Por lo tanto $f^{-1}(\mathrm{dom}(g))^\diamondsuit \subseteq \mathrm{dom}(f^\diamondsuit)$ y $f^\diamondsuit(f^{-1}(\mathrm{dom}(g))^\diamondsuit) \subseteq \mathrm{dom}(g^\diamondsuit)$, y de ahí $f^{-1}(\mathrm{dom}(g))^\diamondsuit \subseteq (f^\diamondsuit)^{-1}(\mathrm{dom}(g^\diamondsuit))$. Además

$$(f^\diamondsuit g^\diamondsuit)(L_x) = g^\diamondsuit(f^\diamondsuit(L_x)) = g^\diamondsuit(L_{f(x)}) = L_{g(f(x))} = L_{(gf)(x)} = (gf)^\diamondsuit(L_x),$$

y análogamente $(f^\diamondsuit g^\diamondsuit)(R_x) = (gf)^\diamondsuit(R_x)$, y deducimos que $f^\diamondsuit g^\diamondsuit \cong (gf)^\diamondsuit$. Como $gf \cong fg$, y en consecuencia $(gf)^\diamondsuit \cong (fg)^\diamondsuit$, obtenemos que $f^\diamondsuit g^\diamondsuit \cong (fg)^\diamondsuit$. Así la aplicación $[f] \to [f^\diamondsuit]$ es un homomorfismo de algebra de C_A en $Z_{\mathcal{M}(A)_{\mathcal{U}_A}}$ y hemos terminado la demostración de (iii).

$\square$

Llamaremos $C_A^\diamondsuit$ a la imagen de C_A en $Z_{\mathcal{M}(A)_{\mathcal{U}_A}}$, y, cuando no haya lugar a confusión, lo identificaremos con el propio C_A. Nótese que si f es un c.e.d. en A, entonces para cada $a \in dom(f)$ y $G \in dom(f)^\diamondsuit$, $T_a \circ f^\diamondsuit(G) = T_{f(a)}(G)$. Así, dado que, por el Lema 3.3.3, $[f^\diamondsuit] \in \mathcal{M}(A)_{\mathcal{U}_A}$, viendo el álgebra A dentro de su extensión $A_{\mathcal{U}_A}$ y $\lambda^\diamondsuit = [f^\diamondsuit]$, entenderemos que

$$\lambda^\diamondsuit a = [f^\diamondsuit].[T_a] = [T_a \circ f^\diamondsuit] = [T_{f(a)}] = f(a)$$

para todo $a \in \mathrm{dom}(f)$.

Proposición 3.3.4. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces*

El $\mathcal{M}(A)$-submódulo izquierdo de $A_{\mathcal{U}_A}$ generado por la acción de $C_A^\diamondsuit$ en A es un álgebra de extensión de A para el producto definido por

$$(\sum_{i=1}^m \lambda_i^\diamondsuit a_i)(\sum_{j=1}^n \mu_j^\diamondsuit b_j) = \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} (\lambda_i^\diamondsuit \mu_j^\diamondsuit)(a_i b_j),$$

para $m, n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in A$, $\lambda_i^\diamondsuit, \mu_j^\diamondsuit \in C_A^\diamondsuit$.

Demostración. Para $\sum_{i=1}^m \lambda_i^\diamondsuit a_i \in C_A^\diamondsuit A$ y $F \in \mathcal{M}(A)$ tenemos que

$$F(\sum_{i=1}^m \lambda_i^\diamondsuit a_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^\diamondsuit F(a_i),$$

y por tanto $C_A^\diamondsuit A$ es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de $A_{\mathcal{U}_A}$. Nótese que, si $\sum_{i=1}^m \lambda_i^\diamondsuit a_i = 0$, entonces

$$0 = (\sum_{i=1}^m \lambda_i^\diamondsuit a_i)b = \sum_{i=1}^m \lambda_i^\diamondsuit a_i b = \sum_{i=1}^m \lambda_i^\diamondsuit L_{a_i}(b) = (\sum_{i=1}^m \lambda_i^\diamondsuit L_{a_i})b,$$

y de ahí $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{\diamondsuit} L_{a_i} = 0$. Análogamente $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{\diamondsuit} R_{a_i} = 0$. Por tanto las aplicaciones ℓ y r de $C_A^{\diamondsuit} A$ en $\mathcal{M}(A)_{\mathcal{U}_A}$ dadas por

$$\ell(\textstyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{\diamondsuit} a_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{\diamondsuit} L_{a_i} \quad \text{y} \quad r(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{\diamondsuit} a_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{\diamondsuit} R_{a_i}$$

están bien definidas. Es claro que ℓ y r son aplicaciones lineales extendidas de las aplicaciones $a \to L_a$ y $a \to R_a$ de A en $\mathcal{M}(A)$, respectivamente, y satisfacen la igualdad

$$\ell(p)q = pr(q) \ \text{ para todo } \ p, q \in C_A^{\diamondsuit} A.$$

Así la aplicación

$$(p, q) \to \ell(p)q = pr(q)$$

es bilineal y extiende el producto de A. □

Sea A un álgebra semiprima. El $\mathcal{M}(A)$-submódulo izquierdo $C_A^{\diamondsuit} A$ de $A_{\mathcal{U}_A}$ dotado del producto dado en la Proposición 3.3.4 es un álgebra de extensión de A llamada la *clausura central* de A, y denotada por Q_A. Para hacer explícito este resultado, necesitamos algunos conceptos

Definición 3.3.5. Sea C un álgebra conmutativa, asociativa y con unidad. Entenderemos por *C-álgebra* a un álgebra Q dotada de una aplicación bilineal $(\lambda, q) \mapsto \lambda q$ de $C \times Q$ en Q que satisface las siguientes propiedades:

$$\lambda(pq) = (\lambda p)q = p(\lambda q), (\lambda\mu)q = \lambda(\mu q), \text{ y } 1q = q$$

para todo $\lambda, \mu \in C$ y $p, q \in Q$.

Diremos que una extensión del álgebra A, Q, está *C-generada* por A si Q es una C-álgebra y cada elemento $q \in Q$ puede escribirse de la forma $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ para convenientes $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in C$, y $a_i \in A$.

Proposición 3.3.6. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces Q_A es una $C_A^{\diamondsuit}$-álgebra generada por A tal que*

(i) Para cada $q \in Q_A$, existe un ideal esencial D de A tal que, $D\mathcal{M}(A)(q) + \mathcal{M}(A)(q)D \subseteq A$.

(ii) Para cada $q \in Q_A$ que satisface $D\mathcal{M}(A)(q) = 0$ o $\mathcal{M}(A)(q)D = 0$ para algún ideal esencial D de A, entonces $q = 0$.

(iii) $\mathrm{Ann}_{C_A^{\diamondsuit}}(Q_A) = 0$ y para cada c.p.d. f de un ideal I de A en A, existe un elemento $\lambda \in C_A^{\diamondsuit}$ tal que $f(x) = \lambda x$ para todo $x \in I$.

Demostración. En primer lugar, podemos asegurar que Q_A es una $C_A^{\diamondsuit}$-álgebra generada por A por la Proposición 3.3.4.

Sea q un elemento de Q_A y escribamos $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{\diamondsuit} a_i$, para convenientes $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i^{\diamondsuit} \in C_A^{\diamondsuit}$ y $a_i \in A$. Nótese que, para cada $F \in \mathcal{M}(A)$ y $x \in D := \cap_{i=1}^{n}(\mathrm{dom}(\lambda_i))$, tenemos que el elemento

$$xF(q) = \sum \lambda_i^{\diamondsuit} x F(a_i) = \sum \lambda_i(x) F(a_i) \text{ y } F(q)x =$$

$$\sum F(a_i)\lambda_i^{\diamondsuit} x = \sum F(a_i)\lambda_i(x) \tag{3.2}$$

está en A, y por tanto podemos deducir $D\mathcal{M}(A)(q) \subseteq A$ y que $\mathcal{M}(A)(q)D \subseteq A$. Combinando ambas afirmaciones hemos probado (i).

Ahora supongamos que existe un ideal esencial D de A tal que $D\mathcal{M}(A)(q) = 0$ (resp. $\mathcal{M}(A)(q)D = 0$). Por (i), existe un ideal esencial D' de A tal que $D'\mathcal{M}(A)(q) + \mathcal{M}(A)(q)D' \subseteq A$. Reemplazando D por $D \cap D'$,podemos asumir que D satisface además que $\mathcal{M}(A)(q)D + D\mathcal{M}(A)(q) \subseteq A$. En particular $D^{\diamondsuit}(q)$ es un ideal de A tal que $DD^{\diamondsuit}(q) = 0$ (resp. $D^{\diamondsuit}(q)D = 0$. Como A es semiprima, se sigue que $D^{\diamondsuit}(q) = 0$, y por tanto, por el Lema 3.3.3.(i), $q \in t_{\mathcal{U}_A}(A_{\mathcal{U}_A})$, de ahí, que por la Proposición 3.3.1.(iii), $q = 0$.

Sea ahora $\lambda^{\diamondsuit}$ tal que $\lambda^{\diamondsuit} q = 0$, para todo $q \in Q_A$. En particular, $\lambda(a) = \lambda^{\diamondsuit} a = 0$ para todo $a \in \mathrm{dom}(\lambda)$, esto es, $\lambda = 0$. Por tanto, podemos deducir que $\mathrm{Ann}_{C_A^{\diamondsuit}}(Q_A) = 0$. Sea f un c.p.d. de un ideal I de A en A y sea $\widetilde{f}$ el c.e.d. asociado de forma natural a f. Por tanto, $\lambda^{\diamondsuit} = [(\widetilde{f})^{\diamondsuit}] \in C_A^{\diamondsuit}$ es tal que $\lambda^{\diamondsuit} x = f(x)$ para todo $x \in I$. Así Q_A satisface la propiedad (iii). □

3.3.2. Análisis de las propiedades de la clausura central.

Con objeto de encontrar un método axiomático para definir los conceptos de centroide extendido y de clausura central, intentemos analizar sus propiedades obtenidas en la proposición anterior.

Nuestro primer resultado se usará a menudo sin mención alguna.

Proposición 3.3.7. *Si Q es una C-álgebra. Entonces $T(\lambda q) = \lambda T(q)$ para todo $T \in \mathcal{M}(Q)$, $\lambda \in C$, y $q \in Q$.*

Demostración. Consideramos el conjunto $\mathcal{S}$ consistente en todos los $T \in \mathcal{M}(Q)$ que satisfacen que $T(\lambda q) = \lambda T(q)$ para todo $\lambda \in C$, y $q \in Q$. Es claro que $\mathcal{S}$ es una subálgebra de $\mathcal{M}(Q)$ que contiene Id_Q, L_q^Q, R_q^Q $(q \in Q)$. Por tanto $\mathcal{S} = \mathcal{M}(Q)$, como era requerido. □

Proposición 3.3.8. *Sea A un álgebra y sea Q una C-álgebra generada por A. Entonces A es una subálgebra densa en Q.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{M}(Q)$ satisfaciendo que $T(A) = 0$. Tomemos $q \in Q$ y escribamos $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ para convenientes $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in C$, y $a_i \in A$.

En virtud de la Proposición 3.3.7 se tiene

$$T(q) = T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(a_i) = 0.$$

Así pues,por la arbitrariedad de q, $T = 0$. □

Así, como ya vimos en la Nota 2.3.12, bajo esta condición, la aplicación $F \mapsto F'$ se convierte en una inmersión canónica de $\mathcal{M}(A) \hookrightarrow \mathcal{M}(Q)$ y, abusando de notación, escribiremos $F(q)$ en lugar de $F'(q)$. Este hecho nos permite ver a Q como un $\mathcal{M}(A)$-módulo.

En adelante, haremos uso de la siguiente caracterización de los $\mathcal{M}(A)$-submódulos.

Proposición 3.3.9. *Sea A una subálgebra densa de un álgebra Q. Si M es un subespacio de Q, entonces M es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q si, y sólo si, $AM + MA \subseteq M$. En consecuencia todo ideal de A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q.*

Demostración. Sea M un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q. Para todo $a \in A$ y $q \in M$ tenemos que

$$aq = L_a^Q(q) = L_a^A(q) \in M \quad \text{y} \quad qa = R_a^Q(q) = R_a^A(q) \in M.$$

Por tanto, $AM + MA \subseteq M$. Para poder probar el recíproco, supongamos que M es un subespacio de Q que satisface $AM + MA \subseteq M$, y consideramos el conjunto $\mathcal{S}$ consistente en todos los $F \in \mathcal{M}(A)$ tal que $F(M) \subseteq M$. Es claro que $\mathcal{S}$ es una subálgebra de $\mathcal{M}(A)$ que contiene a Id_A, L_a^A, R_a^A $(a \in A)$. Por tanto $\mathcal{S} = \mathcal{M}(A)$,como requeríamos.

□

Con objeto de usar una guía fiable en la búsqueda de axiomas, siempre es bueno recordar las caracterizaciones dadas tanto del cuerpo de fracciones de un álgebra conmutativa asociativa como del álgebra simétrica de cocientes. Siguiendo un esquema similar, si A es semiprima y Q es una C-álgebra que la contiene densamente, diremos que la pareja de álgebras (A, Q) verifica el axioma

(**A1**) si, para cada $q \in Q$, existe un ideal esencial D de A tal que, $D\mathcal{M}(A)(q) + \mathcal{M}(A)(q)D \subseteq A$.

(**A2**) si para cada $q \in Q$ que satisface $D\mathcal{M}(A)(q) = 0$ o $\mathcal{M}(A)(q)D = 0$ para algún ideal esencial D de A, entonces $q = 0$.

Interpretemos en contexto no asociativo el primero de los axiomas.

Proposición 3.3.10. *Sea A un álgebra semiprima. Si A es una subálgebra densa de una C-álgebra Q tal que la pareja (A, Q) verifica el axioma (**A1**), entonces, para cada $\lambda \in C$, el conjunto $D_\lambda := \{x \in A : \lambda x \in A\}$ es un ideal esencial de A. El recíproco es cierto siempre que Q sea una C-álgebra generada por A*

Demostración. Sea $\lambda \in C$. Es claro que D_λ es un ideal de A. Fijemos $x \in \mathrm{Ann}(D_\lambda)$ y tomemos $q = \lambda x$. Por (**A1**) existe D ideal esencial de A tal que $\lambda D\mathcal{M}(A)(x) \subseteq D\mathcal{M}(A)(q) \subseteq A$ y por tanto $D\mathcal{M}(A)(x) \subseteq D_\lambda$. Puesto que, $D\mathcal{M}(A)(x) \subseteq \mathrm{Ann}(D_\lambda)$, se tiene, por la semiprimidad de A, que $D\mathcal{M}(A)(x) = 0$. Como D es esencial, se sigue que $\mathcal{M}(A)(x) = 0$, y por tanto $x = 0$. Por la arbitrariedad de x, podemos deducir que $\mathrm{Ann}(D_\lambda) = 0$. Así, D_λ es un ideal esencial por la semiprimidad de A.

Supongamos finalmente que Q es una C-álgebra generada por A. Por la Proposición 3.3.8, A es una subálgebra densa de Q. Por otra parte, tomemos $q \in Q$ y escribamos $q = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ para convenientes $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in C$, y $a_i \in A$. Por hipótesis, el conjunto $D := \cap_{i=1}^n D_{\lambda_i}$ es un ideal esencial de A y por la Proposición 3.3.7, para cada $x \in D$ y $F \in \mathcal{M}(A)$, tenemos

$$xF(q) = xF(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x F(a_i) \in A,$$

y análogamente $F(q)x \in A$. Por tanto $D\mathcal{M}(A)(q) + \mathcal{M}(A)(q)D \subseteq A$.

□

Vamos ahora a interpretar la concurrencia de ambos axiomas,

Proposición 3.3.11. *Sea (A, Q) una pareja de álgebras verificando los axiomas (**A1**) y (**A2**). Entonces se tiene que*

(i) Q es semiprima, y A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial de Q.

(ii) Si además, f es un $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo de un $\mathcal{M}(A)$-submódulo no nulo, M, sobre Q, entonces

(ii.1) Para cada $q \in M$ existe un ideal esencial D de A tal que

$$D\mathcal{M}(A)(q) \subseteq f^{-1}(A) \cap A.$$

(ii.2) $f^{-1}(A) \cap A$ es un ideal no nulo de A, y $f_{|f^{-1}(A)\cap A}$ es un c.p.d. en A.

(ii.3) Si $\lambda \in C_A$ es tal que $f(x) = \lambda x$ para todo $x \in f^{-1}(A) \cap A$, entonces $f(q) = \lambda q$ para todo $q \in M$.

Demostración. Es claro que A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q.

(i) Sea M un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q tal que $M \cap A = 0$. Tomemos $q \in M$, por (**A1**), existe un ideal esencial D de A tal que $D\mathcal{M}(A)(q) + \mathcal{M}(A)(q)D \subseteq A$.

Entonces, por la Proposición 3.3.9, $D\mathcal{M}(A)(q)+\mathcal{M}(A)(q)D \subseteq M \cap A$, por tanto $D\mathcal{M}(A)(q)+\mathcal{M}(A)(q)D = 0$. Así pues por (**A2**), $q = 0$. Como q es un elemento arbitrario de M, concluimos que $M = 0$. Ahora, supongamos que V es un ideal de Q que satisface $V^2 = 0$. Entonces $V \cap A$ es un ideal de A tal que $(V \cap A)^2 = 0$. Se sigue de la semiprimidad de A que $V \cap A = 0$, por tanto usando que A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial, se tiene que $V = 0$. Así Q es semiprima.

(ii.1) Dado $q \in M$, por la propiedad (**A1**),existen D_1 y D_2 ideales esenciales de A tal que $D_1\mathcal{M}(A)(q) \subseteq A$ y $D_2\mathcal{M}(A)(f(q)) \subseteq A$, y de hecho, poniendo $D = D_1 \cap D_2$, tenemos que $D\mathcal{M}(A)(q) \subseteq f^{-1}(A) \cap A$

(ii.2) Es claro que $f^{-1}(A) \cap A$ es un ideal de A. Fijemos $q \in M\backslash\{0\}$. Por la afirmación (ii.1), podemos tomar un ideal esencial D de A tal que

$$D\mathcal{M}(A)(q) \subseteq f^{-1}(A) \cap A.$$

Ahora, por la propiedad (**A2**), concluimos que $f^{-1}(A) \cap A \neq 0$. Finalmente, es fácil verificar que $f_{|f^{-1}(A)\cap A}$ es un c.p.d. en A.

(ii.3) Supongamos que $\lambda \in C_A$ satisface que $f(x) = \lambda x$ para todo $x \in f^{-1}(A) \cap A$. Dado un q en M, por la afirmación (ii.1), podemos tomar un ideal esencial D de A tal que $D\mathcal{M}(A)(q) \subseteq f^{-1}(A) \cap A$, y tenemos que

$$xF(f(q)) = f(xF(q)) = \lambda xF(q) = xF(\lambda q)$$

para todo $x \in D$, y $F \in \mathcal{M}(A)$. Por tanto, $D\mathcal{M}(A)(f(q) - \lambda q) = 0$. De hecho,por la propiedad (**A2**), $f(q) - \lambda q = 0$, y por tanto $f(q) = \lambda q$. Por la arbitrariedad de q en M, se obtiene el resultado.

□

Lema 3.3.12. *Sea A un álgebra semiprima y sea Q una C-álgebra generada por A. Entonces, para cada ideal I de A, CI es un ideal de Q y $C\mathrm{Ann}(I) \cap A = \mathrm{Ann}(CI \cap A) = \mathrm{Ann}(I)$.*

Demostración. Para cierto I de A, es claro que CI es un ideal de Q y que $CI \cap A$ y $C\mathrm{Ann}(I) \cap A$ son ideales de A que satisfacen:

$$(CI \cap A)(C\mathrm{Ann}(I) \cap A) = (C\mathrm{Ann}(I) \cap A)(CI \cap A) = 0,$$

y en consecuencia $C\mathrm{Ann}(I) \cap A \subseteq \mathrm{Ann}(CI \cap A)$. Ahora, las igualdades deseadas se siguen de las siguientes inclusiones.

$$\mathrm{Ann}(I) \subseteq C\mathrm{Ann}(I) \cap A \subseteq \mathrm{Ann}(CI \cap A) \subseteq \mathrm{Ann}(I).$$

□

Veamos ahora que en el contexto que nos ocupa, los axiomas (**A1**) y (**A2**) equivalen a que A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial en Q, para ello necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 3.3.13. *Sea A un álgebra semiprima, y sea Q una C-álgebra tal que A una subálgebra densa de Q. Si A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial en Q entonces,*

(i) Para cada $\lambda \in C$, el conjunto $D_\lambda := \{a \in A : \lambda a \in A\}$ es un ideal esencial de A.

(ii) Si D es un ideal esencial de A y M es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q tal que $DM = 0$ ó $MD = 0$, entonces $M = 0$.

Si además Q está C-generada por A, entonces

(iii) CD es un ideal esencial de Q para todo ideal esencial D de A.

(iv) Si D es ideal esencial de Q, entonces $D \cap A$ es un ideal esencial de A y D es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial de Q.

Demostración. (i) Sea $\lambda \in C$. Veamos que el conjunto $D_\lambda := \{a \in A : \lambda a \in A\}$ es esencial. Es claro que D_λ es un ideal de A y $\lambda \mathrm{Ann}(D_\lambda) \cap A = 0$. Como A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial de Q, tenemos $\lambda \mathrm{Ann}(D_\lambda) = 0$, se sigue que $\mathrm{Ann}(D_\lambda) \subseteq D_\lambda$, y de hecho $\mathrm{Ann}(D_\lambda) = 0$. Así D_λ es un ideal esencial de A.

(ii) Sea M un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q tal que $DM = 0$ ó $MD = 0$. Por la Proposición 3.3.9 sabemos que $D \cap M$ es un ideal de A y que por hipótesis $(D \cap M)^2 = 0$, por lo que por la semiprimidad de A, obtenemos que $D \cap M = 0$. Como D es un ideal esencial, $D \cap M = D \cap A \cap M$ y $M \cap A$ es un ideal de A, se sigue que $M \cap A = 0$, y por tanto $M = 0$ porque A es $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial en Q.

(iii) Sea D un ideal esencial de A. Si I es un ideal de Q tal que $I \cap CD = 0$, entonces $I \cap A \cap D = I \cap D = 0$, por tanto $I \cap A = 0$ ya que $I \cap A$ es un ideal de A y D es esencial. Por la esencialidad de A concluimos que $I = 0$. Así, CD es un ideal esencial de Q.

(iv) Sea D un ideal esencial de Q y sea I un ideal de A tal que $D \cap A \cap I = 0$. Es claro que $D \cap A \subseteq \mathrm{Ann}(I)$, por tanto $D \cap A \subseteq \mathrm{Ann}(CI \cap A)$ por el Lema 3.3.12. Así $(D \cap A) \cap (CI \cap A) = 0$. Como A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial de Q, deducimos que $D \cap CI = 0$, y por tanto $CI = 0$, y en particular $I = 0$. Así $D \cap A$ es un ideal esencial de A. Por tanto D es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial de Q, ya que sabemos que los ideales esenciales de A son precisamente los $\mathcal{M}(A)$-submódulos esenciales de Q que contienen a A.

□

Para mayor comodidad, en los enunciados que siguen introducimos el concepto de anulador de un subconjunto S en C. Para cada subconjunto no vacío S de Q, se define *el anulador de S en C* como

$$\mathrm{Ann}_C(S) := \{\lambda \in C : \lambda S = 0\}.$$

Proposición 3.3.14. *Sea A un álgebra semiprima, y sea Q una C-álgebra generada por A. A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial en Q si, y sólo si, la pareja (A, Q) verifica los axiomas (**A1**) y (**A2**).*

En tal caso, $\mathrm{Ann}_C(D) = \mathrm{Ann}_C(Q)$ para todo ideal esencial D de A.

Demostración. Nótese que, por la Proposición 3.3.8, A es densa en Q.

Supongamos inicialmente que A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial de Q. Dado que, por la Proposición 3.3.13.(i), D_λ es un ideal esencial de A para todo $\lambda \in C$, la sentencia (**A1**) se sigue del recíproco en la Proposición 3.3.10. El axioma (**A2**), se sigue de la Proposición 3.3.13.(ii) sin más que tomar, para cada $q \in Q$, $M = \mathcal{M}(A)(q)$.

El recíproco es a su vez consecuencia de la Proposición 3.3.11.(i).

Finalmente supongamos que A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial de Q y que $\lambda \in C$ satisface $\lambda D = 0$ para un cierto ideal esencial D. Puesto que Q es una C-álgebra generada por A, λQ y CD son ideales de Q que satisfacen que $\lambda QCD = 0$. Por la semiprimidad de Q (Proposición 3.3.11), $\lambda Q \cap CD = 0$, de aquí $\lambda Q = 0$ por ser CD un ideal esencial tal como probamos en la Proposición 3.3.13.(iii). $\square$

3.3.3. Método Axiomático.

En esta sección daremos una caracterización axiomática de la clausura central y del centroide extendido en varios formatos.

Si A es semiprima y Q es una C-álgebra que la contiene densamente, diremos que la terna (A, Q, C) verifica el axioma

(**A3**) si $\mathrm{Ann}_C(Q) = 0$ y para cada c.p.d. f de un ideal I de A en A, existe un elemento $\lambda \in C$ tal que $f(x) = \lambda x$ para todo $x \in I$.

Cuando Q sea una C-álgebra generada por A, diremos simplemente que la pareja (A, Q) verifica el axioma (**A3**) si la terna (A, Q, C) verifica el axioma (**A3**).

Nuestra principal caracterización reza como sigue

Teorema 3.3.15. *Sea A un álgebra semiprima. La clausura central Q_A de A es una C-álgebra generada por A tal que la pareja (A, Q_A) verifica los axiomas (**A1**), (**A2**) y (**A3**).*

*Además, el álgebra C coincide con el centroide extendido C_A de A, y las propiedades (**A1**)-(**A3**) caracterizan a las C-álgebras generadas por A isomorfas a Q_A.*

Demostración. La necesidad de las condiciones fue establecida en la Proposición 3.3.6.

Recíprocamente supongamos que Q es una C-álgebra generada por A álgebra que satisface dichas propiedades. Veamos que es isomorfa a Q_A. Primero, probaremos que existe un isomorfismo de álgebra desde C_A en C.

Dados $\lambda \in C_A$, por definición $\mathrm{dom}(\lambda)$ es un ideal esencial de A. Por (**A3**) existe un elemento $\Psi(\lambda) \in C$ tal que $\Psi(\lambda)x = \lambda x$ para todo $x \in \mathrm{dom}(\lambda)$. Dicho elemento por (**A1**) y (**A2**) es único, ya que en otro caso, la diferencia de ambos pertenecería al $\mathrm{Ann}_C(\mathrm{dom}(\lambda))$, el cual coincide, por la Proposición 3.3.14, con $\mathrm{Ann}_C(Q)$ que es cero por hipótesis. Sea $\lambda, \mu \in C_A$. Nótese que, para $q \in Q$, $F \in \mathcal{M}(A)$, y $x \in \mathrm{dom}(\lambda) \cap \mathrm{dom}(\mu)$ tenemos

$$xF[(\Psi(\lambda+\mu) - \Psi(\lambda) - \Psi(\mu))q] = (\Psi(\lambda+\mu) - \Psi(\lambda) - \Psi(\mu))xF(q) =$$

$$((\lambda+\mu)x - \lambda x - \mu x)F(q) = 0.$$

Por tanto $(\mathrm{dom}(\lambda) \cap \mathrm{dom}(\mu))\mathcal{M}(A)((\Psi(\lambda+\mu) - \Psi(\lambda) - \Psi(\mu))q) = 0$, y de hecho, por (**A2**), $(\Psi(\lambda+\mu) - \Psi(\lambda) - \Psi(\mu))q = 0$ para todo $q \in Q$. Así, $\Psi(\lambda+\mu) = \Psi(\lambda) + \Psi(\mu)$. Análogamente , se prueba que

$$(\mathrm{dom}(\lambda\mu) \cap \mathrm{dom}(\mu))\mathcal{M}(A)((\Psi(\lambda\mu) - \Psi(\lambda)\Psi(\mu))q) = 0$$

para todo $q \in Q$, y concluimos que $\Psi(\lambda\mu) = \Psi(\lambda)\Psi(\mu)$. En particular, para $\alpha \in \mathbb{K}$ y $\lambda \in C_A$ tenemos $\Psi(\alpha\lambda) = \alpha\Psi(\lambda)$. Así, la aplicación Ψ es una homomorfismo de álgebras desde C_A en C. Además, si $\lambda \in C_A$ satisface que $\Psi(\lambda) = 0$, tenemos que $0 = \Psi(\lambda)x = \lambda x$ para todo $x \in \mathrm{dom}(\lambda)$, y de ahí $\lambda = 0$. Por tanto Ψ es inyectiva. Ahora probaremos que Ψ es sobreyectiva. Para ello, fijemos $\gamma \in C$, y consideramos un ideal esencial D_γ dado en la Proposición 3.3.10. Es claro que $\gamma_{|D_\gamma}$ es un c.e.d. en A. Si $f : D \to A$ es un c.p.d. extendido $\gamma_{|D_\gamma}$, entonces, por (**A3**), existe $\gamma' \in C$ tal que $\gamma' x = f(x)$ para todo $x \in D$, y por tanto $(\gamma - \gamma')D_\gamma = 0$. Por la Proposición 3.3.13.(iii) y la propiedad (**A1**), $\gamma = \gamma'$, y por tanto $D = D_\gamma$. Entonces $\gamma_{|D_\gamma} \in C_A$ y $\Psi(\gamma_{|D_\gamma}) = \gamma$. Así Ψ es un isomorfismo de álgebra de C_A en C.

Dados $\lambda_i \in C_A$ y $a_i \in A$ con $1 \leq i \leq n$, nótese que para todo $F \in \mathcal{M}(A)$ y $x \in \cap_{i=1}^n \mathrm{dom}(\lambda_i)$ tenemos

$$xF(\sum \Psi(\lambda_i)a_i) = \sum \Psi(\lambda_i)xF(a_i) = \sum \lambda_i xF(a_i) = xF(\sum \lambda_i a_i). \tag{3.3}$$

Se sigue por (3.3) y (**A2**) que $\sum \lambda_i a_i = 0$ implica $\sum \Psi(\lambda_i)a_i = 0$. Entonces, la correspondencia $\sum \lambda_i a_i \to \sum \Psi(\lambda_i)a_i$ es una aplicación bien definida de Q_A en Q. Es facil verificar que esta aplicación es un homomorfismo de álgebra sobreyectivo. Además, si $\sum \Psi(\lambda_i)a_i = 0$, entonces, por (3.3), vemos que $(\cap_{i=1}^n \mathrm{dom}(\lambda_i))\mathcal{M}(A)(\sum \lambda_i a_i) = 0$. Por (**A2**) para el álgebra Q_A, concluimos que $\sum \lambda_i a_i = 0$, y la demostración esta completa.

□

Dado que $\mathrm{Ann}_{C_A}(Q(A)) = 0$, siguiendo idéntica demostración, se puede probar que $(A, Q(A), C_A)$ verifica el axioma (**A3**). Veamos que, como consecuencia del Teorema 3.3.15, obtenemos que la definición de clausura central de Baxter-Martindale y la dada mediante el filtro de denominadores coinciden

Corolario 3.3.16. *Sea A un álgebra semiprima. entonces la clausura central $Q(A)$ de A de Baxter-Martindale coincide con Q_A.*

Demostración. Después del Teorema 3.3.15, puesto que $Q(A)$ es una C_A-álgebra generada por A, falta ver que la pareja $(A, Q(A))$ verifica los axiomas (**A1**)-(**A3**), véase [3, Theorem 2.15].

Sea q un elemento de $Q(A)$ y escribamos $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, para convenientes $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in C_A$ y $a_i \in A$. Nótese que, para todo $F \in \mathcal{M}(A)$ y $x \in D := \cap_{i=1}^{n} \mathrm{dom}(\lambda_i)$ tenemos

$$xF(q) = \sum \lambda_i x F(a_i) \quad \text{y} \quad F(q)x = \sum F(a_i)\lambda_i(x) \tag{3.4}$$

están en A, y por tanto podemos deducir $D\mathcal{M}(A)(q) \subseteq A$ y que $\mathcal{M}(A)(q)D \subseteq A$. Combinando ambas afirmaciones y teniendo en cuenta que D es un ideal esencial de A, hemos probado (**A1**).

Ahora supongamos que existe $q \in Q(A)$ y un ideal esencial D de A tal que ó bien $D\mathcal{M}(A)(q) = 0$ ó bien $\mathcal{M}(A)(q)D = 0$. Tomamos el ideal esencial $D' := D \cap (\cap_{i=1}^{n} \mathrm{dom}(\lambda_i))$. En el caso de que $D\mathcal{M}(A)(q) = 0$, se sigue por (3.4), que para todo $F \in \mathcal{M}(A)$ y $x \in D'$ tenemos $\sum \lambda_i x F(a_i) = 0$, en particular $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes a_i$ es un elemento anulante, esto es, $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0$. Ahora supongamos que $\mathcal{M}(A)(q)D = 0$. Argumentando de forma similar, tenemos $\sum F(a_i)\lambda_i x = 0$ para todo $F \in \mathcal{M}(A)$ y $x \in D'$. Nótese que, para todo $G \in \mathcal{M}(A)$ e $y \in D'$ tenemos

$$0 = \sum G L_y F(a_i)\lambda_i x = G\left(\sum \lambda_i y F(a_i)\right)x.$$

Como G y x los hemos elegido arbitrariamente, para cada $F \in \mathcal{M}(A)$ e $y \in D'$ deducimos que $I_y D' = 0$, donde I_y denota el ideal de A generado por $\sum \lambda_i y F(a_i)$. Se sigue por la semiprimidad de A que $I_y \cap D' = 0$, y por tanto $I_y = 0$ porque D' es esencial. Ahora, por la arbitrariedad de F e y, sacamos que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \otimes a_i$ es igualmente un elemento anulante, y de ahí $q = 0$. Así se satisface la propiedad (**A2**).

Finalmente, la demostración del axioma (**A3**) puede hacerse igual que en la demostración de la Proposición 3.3.6. $\square$

Combinando la Proposición 3.3.14 y el Teorema 3.3.15 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3.17. *Si A es un álgebra semiprima y D un ideal esencial en A entonces* $\mathrm{Ann}_C(D) = 0$.

Es fácil probar que un álgebra es centralmente cerrada si, y sólo si $Q_A = A$. Es sabido [3, Theorem 2.15.(c)] que Q_A es un álgebra centralmente cerrada, este hecho también puede deducirse del siguiente resultado.

Corolario 3.3.18. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces:*

(i) La aplicación $\lambda \mapsto f_\lambda$*, donde* $f_\lambda(q) = \lambda q$ *para todo* $q \in Q_A$*, define un isomorfismo de álgebras de* C_A *sobre* Γ_{Q_A}*.*

(ii) Q_A *es centralmente cerrada.*

Demostración. (i) La aplicación es claramente un homomorfismo de álgebras. Nótese que si $f_\lambda = 0$ entonces $\lambda \in \mathrm{Ann}_{C_A}(Q_A) = 0$. La sobreyectividad es consecuencia de las afirmaciones (ii.2)-(ii.3) de la Proposición 3.3.11.

(ii) Es sabido que $\Gamma_{Q_A} \subseteq C_{Q_A}$. Tomemos ahora $\beta \in C_{Q_A}$, consideremos el ideal esencial D_β (Aplíquese la Proposición 3.3.10 a la pareja (Q_A, Q_{Q_A})) y la aplicación $g_\beta : D_\beta \longrightarrow Q_A$, definida por $g_\beta(q) = \beta q$ para todo $q \in D_\beta$. Por la Proposición 3.3.11.(ii), aplicada a $M = D_\beta$, obtenemos que $f^{-1}(A) \cap A$ es un ideal de A distinto de cero, y $f_{|f^{-1}(A)\cap A}$ es un c.p.d. en A. Por la propiedad (A3), existe $\lambda \in C_A$ tal que $f_{|f^{-1}(x)} = \lambda x$ para todo $x \in f^{-1}(A) \cap A$. Aplicando de nuevo la Proposición 3.3.11.(ii.3) y la afirmación (i) obtenemos que $\beta q = g_\beta(q) = \lambda q$ para cada $q \in D_\beta$. Finalmente, teniendo en cuenta la afirmación (i), β y f_λ coinciden en el ideal esencial D_β de Q_A, y por tanto, aplicando la Proposición 3.3.14 a la pareja (Q_A, Q_{Q_A}), obtenemos que $\beta = f_\lambda$.

□

Como consecuencia de la Proposición 3.3.14 y del Teorema 3.3.15, obtenemos una nueva formulación del método axiomático.

Corolario 3.3.19. *Sea A un álgebra semiprima . La clausura central Q_A de A es una C-álgebra generada por A tal que A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial en Q_A y la pareja (A, Q_A) satisface el axioma (**A3**).*

Además, C coincide con el centroide extendido C_A de A, y las propiedades anteriores caracterizan a las C-álgebras generada por A isomorfas a Q_A.

En cualquier álgebra A el centroide Γ_A es la más grande álgebra conmutativa, asociativa y con unidad C tal que A puede ser vista como una C-álgebra con $\mathrm{Ann}_C(A) = 0$.

Esta idea nos sirve para probar que también la clausura central puede verse como el álgebra extensión más pequeña en un cierto sentido.

Corolario 3.3.20. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces la clausura central Q_A de A es la más pequeña subálgebra densa de Q tal que A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial en Q y la terna (A, Q, Γ_Q) satisface el axioma (**A3**).*

Demostración. En virtud de la Proposición 3.3.8 y de los Corolarios 3.3.19 y del Corolario 3.3.18, A es una subálgebra densa de Q_A que satisface las condiciones del Teorema.

Veamos ahora que es la más pequeña:

Sea Q un álgebra de extensión de A verificando las condiciones del Teorema. Dado $\lambda \in \Gamma_Q$, por la Proposición 3.3.10, $D_\lambda := \{a \in A : \lambda a \in A\}$, es un ideal esencial de A. Es claro que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} f_\lambda : & D_\lambda & \to & Q \\ & x & \mapsto & f_\lambda(x) = \lambda x \end{array}$$

es un c.p.d. Luego, por (**A3**), existe un $\alpha_\lambda \in \Gamma_Q$ tal que $f_\lambda(x) = \alpha_\lambda(x)$, esto es $\lambda x = \alpha_\lambda(x), \forall x \in D_\lambda$. Veamos que α_λ es único. En efecto, si $\beta \in \Gamma_Q$ es tal que $f_\lambda(x) = \beta(x)$, $\forall x \in D_\lambda$, entonces $\alpha_\lambda - \beta$ se anula en D_λ y por tanto, por la Proposición 3.3.13.(ii) (tómese $M = (\alpha_\lambda - \beta)Q$), se tiene que $\alpha_\lambda = \beta$

Veamos que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} C_A & \to & \Gamma_Q \\ \lambda & \mapsto & \alpha_\lambda \end{array}$$

es un homomorfismo de álgebras.

Dados $\alpha, \mu \in C_A$, tomemos $D := D_\lambda \cap D_\mu \subseteq D_{\lambda+\mu}$, y notemos que $\forall x \in D, F \in \mathcal{M}(A)$, y que $q \in Q$ se verifica que

$xF((\alpha_{\lambda+\mu} - \alpha_\lambda - \alpha_\mu)(q)) = (\alpha_{\lambda+\mu} - \alpha_\lambda - \alpha_\mu)(x)F(q) = (\alpha_{\lambda+\mu}(x) - \alpha_\lambda(x) - \alpha_\mu(x))F(q) = ((\lambda+\mu)(x) - \lambda(x) - \mu(x))F(q) = 0$. Luego $D\mathcal{M}(A)((\alpha_{\lambda+\mu} - \alpha_\lambda - \alpha_\mu)(q)) = 0$, y por la Proposición 3.3.14 $(\alpha_{\lambda+\mu} - \alpha_\lambda - \alpha_\mu)(q) = 0$, $\forall q \in Q$. Luego $\alpha_{\lambda+\mu} = \alpha_\lambda + \alpha_\mu$

Análogamente, si tomamos $D := D_{\lambda\mu} \cap D_\mu$, entonces $\forall x \in D$, $F \in \mathcal{M}(A)$, $q \in Q$ se verifica que $xF((\alpha_{\lambda\mu} - \alpha_\lambda\alpha_\mu)(q)) = (\alpha_{\lambda\mu} - \alpha_\lambda\alpha_\mu)(x)F(q) = (\alpha_{\lambda\mu}(x) - \alpha_\lambda\alpha_\mu(x))F(q) = (\lambda\mu(x) - \alpha_\lambda(\mu x))F(q) = 0$

Como $x \in D_\mu \Rightarrow \mu x \in A$ y como $x \in D_\lambda\mu \Rightarrow \lambda\mu x \in A$, de estas dos cosas se deduce que $\mu x \in D_\lambda \Rightarrow \alpha_\lambda(\mu x) = \alpha\mu x$

Luego $D\mathcal{M}(A)((\alpha_{\lambda\mu} - \alpha_\lambda\alpha_\mu)(q)) = 0$ y por la Proposición 3.3.14, $(\alpha_{\lambda\mu} - \alpha_\lambda\alpha_\mu)(q) = 0, \forall q \in Q$. Luego $\alpha_{\lambda\mu} = \alpha_\lambda\alpha_\mu$

Notemos que si $\lambda_i \in C_A, a_i \in A (1 \leq i \leq n)$, y consideramos $D := \cap_{i=1}^n D_{\lambda_i}$, entonces $\forall x \in D$ y $F \in \mathcal{M}(A)$ tenemos que

$$xF'(\textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_{\lambda_i}(a_i)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{\lambda_i}(x)F(a_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i xF(a_i) = xF(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i), \tag{3.5}$$

Supuesto que $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = 0$, se sigue por (3.5) que $D\mathcal{M}(A)(\sum_{i=1}^n \alpha_{\lambda_i}(a_i)) = 0$, y también, por la Proposición 3.3.14, $\sum_{i=1}^n \alpha_{\lambda_i}(a_i) = 0$. En consecuencia la aplicación

$$\begin{array}{ccc} Q_A & \to & Q \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i & \mapsto & \sum_{i=1}^n \alpha_{\lambda_i}(a_i) \end{array}$$

está bien definida.

Es inmediato ver que es un homomorfismo.

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i+\sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j\mapsto\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\lambda_i}(a_i)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_{\mu_j}(b_j)$$

$$(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i)(\sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j)=\sum_{i,j}\lambda_i\mu_j a_i b_j\mapsto\sum_{i,j}\alpha_{\lambda_i\mu_j}(a_i b_j)=$$

$$=\sum_{i,j}\alpha_{\lambda_i}\alpha_{\mu_j}(a_i b_j)=\sum_{i,j}\alpha_{\lambda_i}(a_i\alpha_{\mu_j}(b_j))=$$

$$=\sum_{i,j}\alpha_{\lambda_i}(a_i)\alpha_{\mu_j}(bj)=(\sum_{i}\alpha_{\lambda_i}(a_i))(\sum_{i}\alpha_{\mu_j}(b_j))$$

Además es inyectivo:

Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{\lambda_i}(a_i)=0$, se sigue de (3.5) que $D\mathcal{M}(A)(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i)=0$, y por tanto, por la Proposición 3.3.11, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i a_i=0$

□

Analicemos ahora el significado del axioma (**A3**) en el contexto apropiado.

Proposición 3.3.21. *Sea A un álgebra semiprima, y sea Q una C-álgebra generada por A. Supongamos que A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial en Q. Entonces:*

(i) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) *Para cada $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo f de un $\mathcal{M}(A)$-submódulo M de Q en Q, existe un elemento $\lambda\in C$ tal que $f(q)=\lambda q$, para todo $q\in M$.*

(b) *Para cada c.p.d. f definido en un ideal I, existe un elemento $\lambda\in C$ tal que $f(x)=\lambda x$, para todo $x\in I$.*

(ii) En el caso en que se verifiquen las condiciones anteriores equivalen:

(a) *Si M es un $\mathcal{M}(A)$-módulo esencial en Q, entonces λ es único*

(b) $\mathrm{Ann}_C(Q)=0$

Demostración. (i) $(a)\Longrightarrow(b)$ Sea f un c.p.d. en un ideal I, entonces I es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo y f es un $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo, por hipótesis existe un elemento $\lambda\in C$ tal que $f(q)=\lambda q$, para todo $q\in I$

$(b)\Longrightarrow(a)$ Sea M un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q y sea $f:M\longrightarrow Q$ un $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo. En virtud de la Proposición 3.3.11.(ii.2), $f^{-1}(A)\cap A$ es un ideal de A distinto de cero, y $f_{|f^{-1}(A)\cap A}$ es un c.p.d. en A. Por hipótesis, existe $\lambda\in C$ tal que $f(x)=\lambda x$ para todo $x\in f^{-1}(A)\cap A$ y ahora aplicando, la Proposición 3.3.11.(ii.3) $f(q)=\lambda q$ para todo $q\in M$.

(ii) $(a) \Longrightarrow (b)$ Nótese que si $\lambda \in \mathrm{Ann}_C(Q)$, la aplicación $q \longmapsto \lambda q$ define el $\mathcal{M}(A)$-endomorfismo cero definido en Q, y por tanto por la unicidad, $\lambda = 0$

$(b) \Longrightarrow (a)$ Sean $\mu, \lambda \in C$ tales que $f(q) = \lambda q$ y $f(q) = \mu q$ para todo $q \in M$. En particular $(\lambda - \mu)q = 0$ para todo $q \in M \cap A$. Por lo tanto $(\lambda - \mu) \in \mathrm{Ann}_C(M \cap A)$. Dado que $\mathrm{Ann}_C(M \cap A) = \mathrm{Ann}_C(Q)$ por la Proposición 3.3.14 y por hipótesis $\mathrm{Ann}_C(Q) = 0$ se sigue que $\lambda = \mu$.

□

Finalmente, diremos que entre las aproximaciones del concepto de clausura central y de centroide extendido de tipo axiomático merece la pena destacar la caracterización de Razmyslov dada en [38, Proposition 3.1]. De hecho, nuestro Corolario 3.3.19, después de la proposición 3.3.21 y de la Proposición 3.3.11, puede entenderse como un refinamiento de este resultado. Otra interesante caracterización puede verse en [44, §.32]).

3.4. Centroide extendido y clausura central de algunas álgebras relacionadas

En esta sección consideramos fijada un álgebra semiprima A y trataremos de calcular, supuesto conocido C_A y Q_A, el centroide extendido y la clausura central de algunas álgebras relacionadas con ella. Comenzamos con el estudio del centroide extendido y de la clausura central de las álgebras contenidas en Q_A y que contienen a la propia A.

3.4.1. Subálgebras de Q_A que contienen a A.

Nuestro primer resultado generaliza la posibilidad de construir una inmersión canónica de $\mathcal{M}(A) \hookrightarrow \mathcal{M}(Q_A)$ (véase también Nota 2.3.12).

Proposición 3.4.1. *Sea Q un álgebra y sea A una subálgebra densa en Q. Supongamos que B y B' son subálgebras de Q que contienen a A tal que $B \subseteq B'$. Entonces, para cada $F \in \mathcal{M}(B)$, existe un único $F' \in \mathcal{M}(B')$ tal que $F'(a) = F(a)$ para todo $a \in A$, y la aplicación $F \mapsto F'$ es un monomorfismo de álgebras de $\mathcal{M}(B)$ en $\mathcal{M}(B')$.*

Demostración. Consideramos el conjunto $\mathcal{S}$ consistente en todos los $F \in \mathcal{M}(B)$ para los cuales existe $T \in \mathcal{M}(B')$ tal que $T(a) = F(a)$ para todo $a \in A$. Es inmediato verificar que $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathcal{M}(B)$ y que $\mathcal{D} := \{G \in \mathcal{M}(B) : G\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}\}$ es una subálgebra de $\mathcal{M}(B)$. Además, si $F \in \mathcal{S}$ y $T \in \mathcal{M}(B')$ satisface $T(a) = F(a)$ para cada $a \in A$, entonces

$$\mathrm{Id}_B F(a) = \mathrm{Id}_{B'} T(a), \quad L_b^B F(a) = L_b^{B'} T(a), \text{ y } R_b^B F(a) = R_b^{B'} T(a)$$

para todo $a \in A$ y $b \in B$. Por tanto vemos que $\mathrm{Id}_B, L_b^B, R_b^B \in \mathcal{D}$ para cada $b \in B$, y así llegamos a que $\mathcal{D} = \mathcal{M}(B)$, y por tanto $\mathcal{S}$ es un ideal izquierdo de $\mathcal{M}(B)$. Como es claro que $\mathrm{Id}_B \in \mathcal{S}$, se sigue que $\mathcal{S} = \mathcal{M}(B)$. Así para cada $F \in \mathcal{M}(B)$, existe $T \in \mathcal{M}(B')$ tal que $T(a) = F(a)$ para todo $a \in A$.

Ahora, supongamos que para $F \in \mathcal{M}(B)$ existen $T_1, T_2 \in \mathcal{M}(B')$ tal que $T_1(a) = T_2(a) = F(a)$ para cada $a \in A$. Como hemos hecho en la parte anterior de la demostración para las inclusiones de subálgebras $A \subseteq B \subseteq B' \subseteq Q$ lo hacemos ahora con estas inclusiones $B' \subseteq B' \subseteq Q \subseteq Q$, con lo que podemos afirmar que existe $T \in \mathcal{M}(Q)$ tal que $T(b') = (T_1 - T_2)(b')$ para cada $b' \in B'$. Como $T(A) = (T_1 - T_2)(A) = 0$ y A es una subálgebra densa en Q, se sigue que $T = 0$, y en consecuencia $T_1 = T_2$. Así, para cada $F \in \mathcal{M}(B)$, existe un único $F' \in \mathcal{M}(B')$ tal que $F'(a) = F(a)$ para cada $a \in A$. Ahora es inmediato comprobar que $F \mapsto F'$ es una aplicación de $\mathcal{M}(B)$ en $\mathcal{M}(B')$. A continuación vamos a probar la siguiente afirmación:

$$F'(b) = F(b) \text{ para todo } F \in \mathcal{M}(B) \text{ y } b \in B. \tag{3.6}$$

Dado $F \in \mathcal{M}(B)$, volviendo a hacer los mismo que hicimos en la primera parte de la demostración para las inclusiones de álgebras $A \subseteq B \subseteq B' \subseteq Q$ lo hacemos para las inclusiones $B \subseteq B \subseteq Q \subseteq Q$, y podemos afirmar que existe $T_1 \in \mathcal{M}(Q)$ tal que $F(b) = T_1(b)$ para todo $b \in B$. Análogamente, si consideramos las inclusiones $B \subseteq B' \subseteq Q \subseteq Q$ podemos confirmar la existenciade $T_2 \in \mathcal{M}(Q)$ tal que $F'(b) = T_2(b)$ para todo $b \in B$. Como, para cada $a \in A$, tenemos que $T_1(a) = F(a) = F'(a) = T_2(a)$, y como A es densa en Q llegamos a que $T_1 = T_2$, y por tanto $F(b) = T_1(b) = T_2(b) = F'(b)$ para todo $b \in B$, y así queda probado (3.6).

Ahora, es claro que la igualdad $F_1' = F_2'$, para $F_1, F_2 \in \mathcal{M}(B)$, implica que $F_1 = F_2$. Además, para todo $F_1, F_2 \in \mathcal{M}(B)$, podemos asegurar que $F_1'F_2' \in \mathcal{M}(B')$ satisface $F_1'F_2'(b) = F_1F_2(b)$ para todo $b \in B$, y en particular $F_1'F_2'(a) = F_1F_2(a)$ para todo $a \in A$. Por tanto $F_1'F_2' = (F_1F_2)'$.Y como resultado obtenemos que, la aplicación $F \mapsto F'$ es un monomorfismo de álgebra de $\mathcal{M}(B)$ en $\mathcal{M}(B')$. $\square$

Corolario 3.4.2. *Si A es un álgebra semiprima y B, B' son subálgebras de Q_A tal que $A \subseteq B \subseteq B' \subseteq Q_A$, entonces la evaluación de elementos de A determina las correspondientes inclusiones para las álgebras de multiplicación:*

$$\mathcal{M}(A) \subseteq \mathcal{M}(B) \subseteq \mathcal{M}(B') \subseteq \mathcal{M}(Q_A).$$

Ahora estamos en condiciones de calcular el centroide extendido y la clausura central de una subálgebra comprendida entre la propia álgebra y su clausura.

Proposición 3.4.3. *Sea A un álgebra semiprima, y sea B una subálgebra de Q_A que contiene a A. Entonces B es semiprima, $C_B = C_A$, y $Q_B = Q_A$.*

Demostración. Si I es un ideal de B tal que $I^2 = 0$, entonces $I \cap A$ es un ideal de A tal que $(I \cap A)^2 = 0$, y de hecho $I \cap A = 0$. Como I es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q_A y A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial de Q_A, concluimos que $I = 0$. Así B es semiprima. Necesitamos probar Q_A es una C_A-álgebra generada por B y que la pareja (B,Q_A) satisface las propiedades del Corolario 3.3.19.

Puesto que Q_A es una C_A-álgebra generada por A, es obvio que Q_A está también generada por B.

Por el Corolario 3.4.2, todo $\mathcal{M}(B)$-submódulo de Q_A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo. Como A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial de Q_A, se sigue que B también es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial de Q_A y por tanto se cumple la primera condición del Corolario 3.3.19 para el álgebra B.

Veamos que se cumple el axioma (**A3**). Sea M un $\mathcal{M}(B)$-submódulo de Q_A, y sea f un $\mathcal{M}(B)$-homomorfismo desde M hasta Q_A. Teniendo en cuenta el Corolario 3.4.2, podemos asegurar que M es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q_A y f es un $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo. En particular, por la Proposición 3.3.21.(i), existe un elemento $\lambda \in C_A$ tal que $f(q) = \lambda q$ para todo $q \in M$, por lo que aplicando de nuevo la Proposición 3.3.21.(i) y teniendo en cuenta que la condición sobre el anulador es obvia, obtenemos que se verifica el axioma (**A3**) para $C = C_A$. □

3.4.2. Clausura central del centroide extendido

En este apartado, vamos a ver que el centroide extendido es un álgebra centralmente cerrada. Comenzaremos asociando a todo subconjunto de la clausura central un idempotente del centroide extendido, usando una técnica similar a la empleada en [5, Theorem 2.3.9] y también como [44, §.32.3].

Proposición 3.4.4. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces tenemos:*

(i) Para cada subconjunto no vacío S de Q_A, existe un único idempotente $e_{[S]}$ en C_A tal que

$$\mathrm{Ann}_{C_A}(S) = (1 - e_{[S]})C_A;$$

además, si I es un ideal de Q_A generado por S, entonces

$$\mathrm{Ann}_{Q_A}(I) = (1 - e_{[S]})Q_A \quad y \quad e_{[S]}q = q \ \ \textit{para todo } q \in I.$$

(ii) Para cada subconjunto no vacío S de Q_A y para algún idempotente $e \in C_A$, $e_{[eS]} = ee_{[S]}$.

(iii) Para I, J ideales de A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $IJ = 0$;

(b) $e_{[I]}J = 0$;

(c) $e_{[I]}e_{[J]} = 0$.

Demostración. (i) Como Q_A es un álgebra semiprima, entonces $D := I \oplus \mathrm{Ann}_{Q_A}(I)$ es un ideal esencial de Q_A y por la Proposición 3.3.13.(iv) D es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial de Q_A.Consideramos la aplicación $f : D \to Q_A$ definida por

$$f(p+q) := p \quad \text{para todo } \; p \in I \; \text{ y } \; q \in \mathrm{Ann}_{Q_A}(I).$$

Claramente f es un $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo. Por tanto aplicando, la Proposición 3.3.21, existe un único $e \in C_A$ que verifica $e(p+q) = p$ para todo $p \in I$ y $q \in \mathrm{Ann}_{Q_A}(I)$. Además, como $e^2 z = ez$ para cada $z \in D$, por el Corolario 3.3.17, podemos ver que $e^2 = e$. Nótese también, que por la Proposición 3.3.7, $\mathrm{Ann}_{C_A}(S) = \mathrm{Ann}_{C_A}(I)$. Afirmamos claramente que $\mathrm{Ann}_{C_A}(I) = (1-e)C_A$. Tomemos un $\lambda \in C_A$ que cumpla que $\lambda I = 0$. Entonces $\lambda e(p+q) = \lambda p = 0$ para todo $p \in I$ y $q \in \mathrm{Ann}_{Q_A}(I)$. Como D es un ideal esencial de Q_A, por el Corolario 3.3.17, vemos que $\lambda e = 0$, y por tanto $\lambda = \lambda(1-e) \in (1-e)C_A$. Por otro lado la igualdad $(1-e)I = 0$ implica que $(1-e)C_A \subseteq \mathrm{Ann}_{C_A}(I)$. Por lo tanto, $\mathrm{Ann}_{C_A}(I) = (1-e)C_A$, y en consecuencia $eq = q$ para cada $q \in I$. Siendo el elemento identidad del álgebra $(1-e)C_A$, el elemento $1-e$ (y también e) esta determinado de forma única. Claramente $(1-e)Q_A \subseteq \mathrm{Ann}_{Q_A}(I)$. Recíprocamente, como $I = eD$, vemos que $\mathrm{Ann}_{Q_A}(I)eD = 0$, y deducimos que $\mathrm{Ann}_{Q_A}(I)e = 0$ porque D es un ideal esencial de Q_A. Por tanto $\mathrm{Ann}_{Q_A}(I) \subseteq (1-e)Q_A$. Llamamos $e_{[S]}$ al idempotente e obtenido en la igualdad anterior.

(ii) Sea $\lambda \in \mathrm{Ann}_{C_A}(eS)$. Entonces $0 = \lambda eS = \lambda e e_{[S]} S$, y de ahí

$$\lambda e e_{[S]} \in \mathrm{Ann}_{C_A}(S) = (1-e_{[S]})C_A.$$

Por tanto $\lambda e e_{[S]} = \lambda e e_{[S]}(1-e_{[S]}) = 0$, y en consecuencia

$$\lambda = (1-ee_{[S]})\lambda \in (1-ee_{[S]})C_A.$$

Así

$$\mathrm{Ann}_{C_A}(eS) \subseteq (1-ee_{[S]})C_A.$$

La inclusión opuesta se sigue de que

$$(1-ee_{[S]})eS = (e-ee_{[S]})S = e(1-e_{[S]})S = 0.$$

Por tanto $\mathrm{Ann}_{C_A}(eS) = (1-ee_{[S]})C_A$ y, por (i), concluimos que $e_{[eS]} = ee_{[S]}$.

(iii) (a) $\Rightarrow$ (b). Como Q_A es semiprima y $(C_A I)(C_A J) = 0$, se sigue que $C_A J \subseteq \mathrm{Ann}_{Q_A}(C_A I) = (1-e_{[I]})Q_A$, de ahí $e_{[I]} C_A J = 0$, y en particular $e_{[I]} J = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c). $0 = e_{[e_{[I]}J]} = e_{[I]} e_{[J]}$.

(c) $\Rightarrow$ (a). $IJ = (e_{[I]}I)(e_{[J]}J) = (e_{[I]}e_{[J]})(IJ) = 0$. □

Como aplicación vamos a calcular el álgebra simétrica de cocientes y, en particular, la clausura central del centroide extendido de un álgebra semiprima. Previamente necesitamos el siguiente Lema técnico.

Lema 3.4.5. *Sea A un álgebra semiprima y sea Δ un ideal esencial de C_A. Entonces tenemos que:*

(i) *ΔA es un ideal esencial de Q_A.*

(ii) *Si $f : \Delta \to C_A$ es un $\mathcal{M}(C_A)$-homomorfismo, entonces existe $\lambda \in C_A$ tal que $f(\mu) = \lambda\mu$ para cada $\mu \in \Delta$.*

Demostración. (i) Claramente ΔA es un ideal de Q_A. Si I es un ideal de Q_A tal que $\Delta A \cap I = 0$, entonces $\Delta A \subseteq \mathrm{Ann}_{Q_A}(I)$, y de ahí $e_{[I]}\Delta A = 0$ por la Proposición 3.4.4.(i). Ahora, aplicando la Proposición 3.4.4.(iii), podemos ver que $e_{[I]}\Delta = 0$, y de ahí $C_A e_{[I]}\Delta = 0$, y en consecuencia $C_A e_{[I]} = 0$, y en particular $e_{[I]} = 0$. Teniendo en cuenta ahora la Proposición 3.4.4.(i), obtenemos que $I = e_{[I]}I = 0$. Así ΔA es un ideal esencial de Q_A.

(ii) Supongamos que $f : \Delta \to C_A$ es un $\mathcal{M}(C_A)$-homomorfismo. Tomemos $\lambda_i \in \Delta, a_i \in A$ $(1 \le i \le n)$ tal que $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$, nótese que, por la Proposición 3.3.7, para todo $T \in \mathcal{M}(Q_A)$ y $\mu \in \Delta$ tenemos que

$$\mu T(\sum_{i=1}^n f(\lambda_i)a_i) = T(\sum_{i=1}^n f(\lambda_i)\mu a_i) = T(\sum_{i=1}^n \lambda_i f(\mu)a_i)$$

$$= T(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i)f(\mu) = 0,$$

y en consecuencia $\Delta V = 0$, donde V es el ideal de Q_A generado por $\sum_{i=1}^n f(\lambda_i)a_i$. De ahí $\Delta V A = 0$, y, teniendo en cuenta que ΔA es un ideal esencial de Q_A, deducimos que $V = 0$, y en particular $\sum_{i=1}^n f(\lambda_i)a_i = 0$. Por tanto, la correspondencia

$$\widehat{f} : \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mapsto \sum_{i=1}^n f(\lambda_i)a_i$$

es un aplicación bien definida de ΔA en Q_A. Es rutinario verificar que $\widehat{f}$ es un $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo. Podemos aplicar **(A3)**, y por tanto existe $\lambda \in C_A$ tal que $\widehat{f}(q) = \lambda q$ para cada $q \in \Delta A$. En particular, $f(\mu)a = \lambda\mu a$ para todo $\mu \in \Delta$ y $a \in A$, y por consiguiente $(f(\mu) - \lambda\mu)A = 0$ para cada $\mu \in \Delta$. Ahora, por el Corolario 3.3.17, concluimos que $f(\mu) = \lambda\mu$ para cada $\mu \in \Delta$. $\square$

Teorema 3.4.6. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces: $Q_s(C_A) = C_A$, y en particular $C_{C_A} = Q_{C_A} = C_A$*

Demostración. Es claro que C_A es un álgebra de extension de C_A que cumple $(\mathcal{A}1)$. Además, si $\lambda \in C_A$ satisface $\lambda\Delta = 0$ para algún ideal esencial Δ de C_A, entonces $\lambda C_A \Delta = 0$, de ahí $\lambda C_A = 0$, y en particular $\lambda = 0$. Así C_A satisface la condición $(\mathcal{A}2)$.

Ahora, supongamos que Q es un álgebra de extension de C_A que satisface las condiciones ($\mathcal{A}1$)-($\mathcal{A}2$). Para un elemento dado $q \in Q$, por ($\mathcal{A}1$), tenemos que el ideal esencial Δ de C_A cumple que $q\Delta \subseteq C_A$. Nótese que la aplicación $f_q : \Delta \to C_A$ dada por $f_q(\mu) = q\mu$ es un $\mathcal{M}(C_A)$-homomorfismo. Por el Lema 3.4.5, existe $\lambda \in C_A$ tal que $f_q(\mu) = \lambda\mu$ para cada $\mu \in \Delta$. Por tanto $q - \lambda$ es un elemento de Q que satisface $(q - \lambda)\Delta = 0$ y por ($\mathcal{A}2$),$q = \lambda \in C_A$. Así $Q = C_A$, y concluimos que $Q_s(C_A) = C_A$. (Recuérdese ahora que Q_{C_A} es el centro de $Q_s(C_A) = C_A$).

□

3.5. Clausura central de la Unitización de un álgebra A

Sea A un álgebra y sea I un ideal de A. Para cada $F \in \mathcal{M}(A)$, tenemos que $F(I) \subseteq I$, y por tanto podemos considerar la aplicación lineal $\rho_I(F) : I \to I$ definida por $\rho_I(F)(x) := F(x)$ para todo $x \in I$. La aplicación $\rho_I : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{L}(I)$ es un homomorfismo de álgebras con nucleo

$$I^{\text{ann}} := \{F \in \mathcal{M}(A) \, : \, F(I) = 0\}.$$

Como $\rho_I(\text{Id}_A) = \text{Id}_I$, $\rho_I(L_x^A) = L_x^I$, y $\rho_I(R_x^A) = R_x^I$ para todo $x \in I$, se sigue que $\mathcal{M}(I) \subseteq \rho_I(\mathcal{M}(A))$. A partir de ahora, simplemente denotaremos por ρ la aplicación restricción de $\mathcal{M}(A^1)$ en $\mathcal{L}(A)$ determinada por el hecho de que A es un ideal de A^1.

Nótese que en el caso en que A tenga unidad 1, entonces $\mathbb{K}(\mathbf{1} - 1)$ es un ideal de A^1 y $A^1 = A \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1} - 1)$ es una suma directa de ideales. Además, para cada $T \in \mathcal{M}(A^1)$, $\rho_{\mathbb{K}(\mathbf{1}-1)}(T)$ esta determinada por un escalar ν_T dado por $T(\mathbf{1} - 1) = \nu_T(\mathbf{1} - 1)$.

En una primera etapa abordamos el caso de las álgebras unitales.

3.5.1. Caso con unidad

Lema 3.5.1. *Sea A un álgebra. Entonces $\mathcal{M}(A)$ es un cociente de $\mathcal{M}(A^1)$. Con más precisión, $\rho : \mathcal{M}(A^1) \to \mathcal{M}(A)$ es un epimorfismo de álgebra con nucleo*

$$A^{\text{ann}} := \{T \in \mathcal{M}(A^1) \, : \, T(A) = 0\},$$

y de hecho ρ induce un isomorfismo desde $\mathcal{M}(A^1)/A^{\text{ann}}$ en $\mathcal{M}(A)$. Si además A tiene unidad, entonces $\mathcal{M}(A)$ es un sumando directo de $\mathcal{M}(A^1)$. Con más precisión, la aplicación

$$\varphi : T \mapsto \rho(T) + \nu_T(\mathbf{1} - Id_A)$$

es un isomorfismo de álgebra de $\mathcal{M}(A^1)$ en $\mathcal{M}(A)^1 = \mathcal{M}(A) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1} - \text{Id}_A)$.

Demostración. Como hemos visto antes, $\rho : \mathcal{M}(A^1) \to \mathcal{L}(A)$ es un homomorfismo de álgebra y $\mathcal{M}(A) \subseteq \rho(\mathcal{M}(A^1))$. Como $\rho(\mathrm{Id}_{A^1}) = \mathrm{Id}_A$ y, para $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, $\rho(L^{A^1}_{a+\alpha\mathbf{1}}) = L^A_a + \alpha\mathrm{Id}_A$ y $\rho(R^{A^1}_{a+\alpha\mathbf{1}}) = R^A_a + \alpha\mathrm{Id}_A$ pertenece a $\mathcal{M}(A)$, se sigue que $\rho(\mathcal{M}(A^1)) = \mathcal{M}(A)$. Por tanto ρ induce un isomorfismo de álgebra desde $\mathcal{M}(A^1)/A^{\mathrm{ann}}$ en $\mathcal{M}(A)$.

Ahora, supongamos que A tiene elemento unidad 1. Es fácil verificar que φ es un homorfismo de álgebra. Si $\varphi(T) = 0$, entonces $\rho(T) = 0$ y $\nu_T = 0$, de hecho para todo $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ tenemos que $T(a + \alpha\mathbf{1}) = T(a + \alpha 1 + \alpha(\mathbf{1} - 1)) = T(a+\alpha 1)+\alpha T(\mathbf{1}-1) = \rho(T)(a+\alpha 1)+\alpha\nu_T(\mathbf{1}-1) = 0$ y así $T = 0$. Por otro lado, dados $F \in \mathcal{M}(A)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, elegimos $T \in \mathcal{M}(A^1)$ tal que $\rho(T) = F$, y notése que

$$\varphi(T + (\alpha - \nu_T)(\mathrm{Id}_{A^1} - L^{A^1}_1)) = F + \alpha(\mathbf{1} - Id_A).$$

Así φ es un isomorfismo de álgebra desde $\mathcal{M}(A^1)$ en $\mathcal{M}(A)^1$. □

Sea A un álgebra semiprima y con unidad. Es claro que A^1 puede verse de forma natural como una subálgebra de Q^1_A.

Proposición 3.5.2. *Sea A un álgebra semiprima con unidad. Entonces A^1 es semiprima, $Q_{A^1} = Q^1_A$, y $C_{A^1} = C^1_A$.*

Demostración. Por el Corolario 1.6.4, A^1 es semiprima y sabemos que Q_A es C_A-generada por A, por tanto se sigue que Q^1_A es C^1_A-generada por A^1. Sólo nos queda probar que Q^1_A satisface las propiedades (**A1**)-(**A3**).

(**A1**) Para un elemento dado $q+\alpha\mathbf{1}$ en Q^1_A, consideramos $q+\alpha 1$ en A, y fijamos un ideal esencial D de A tal que $D\mathcal{M}(A)(q+\alpha 1)+\mathcal{M}(A)(q+\alpha 1)D \subseteq A$. Por el Corolario 1.6.5, D' es un ideal esencial de A^1. Además, para todo $x+\beta(\mathbf{1}-1) \in D'$ y $T \in \mathcal{M}(A^1)$ tenemos que

$$(x + \beta(\mathbf{1} - 1))\, T(q + \alpha\mathbf{1}) = (x + \beta(\mathbf{1} - 1))\,(\rho(T)(q + \alpha 1) + \alpha\nu_T(\mathbf{1} - 1))$$

$$= x\,\rho(T)(q + \alpha 1) + \alpha\beta\nu_T\,(\mathbf{1} - 1) \in A^1,$$

y de modo similar $T(q + \alpha\mathbf{1})\,(x + \beta(\mathbf{1} - 1)) \in A^1$. Por tanto

$$D'\mathcal{M}(A^1)(q + \alpha\mathbf{1}) + \mathcal{M}(A^1)(q + \alpha\mathbf{1})D \subseteq A^1,$$

y así Q^1_A satisface (**A1**).

(**A2**) Ahora, supongamos que $p = q + \alpha\mathbf{1}$ es un elemento de Q^1_A y D es un ideal esencial de A tal que $D'\mathcal{M}(A^1)(p) = 0$. Argumentando como antes, para todo $x \in D$ y $T \in \mathcal{M}(A^1)$ tenemos $0 = x\,T(p) = x\,\rho(T)(q + \alpha 1)$. Por tanto $D\rho(\mathcal{M}(A^1))(q + \alpha 1) = 0$. Entonces, por el Lema 3.5.1, $\rho(\mathcal{M}(A^1)) = \mathcal{M}(A)$, se sigue que $q + \alpha 1 = 0$, y de hecho $p = \alpha(\mathbf{1} - 1) \in D' \cap \mathcal{M}(A^1)(p)$. Se sigue de la semiprimidad de A^1 que $D' \cap \mathcal{M}(A^1)(p) = 0$, y en consecuencia $p = 0$. Análogamente, la condición $\mathcal{M}(A^1)(p)D' = 0$ implica que $p = 0$. Así teniendo en cuenta el Corolario 1.6.5.(i), concluimos que Q^1_A satisface (**A2**).

(**A3**) Sea f un c.p.d. en A^1 definido en un ideal I de A^1. Nótese que, para cada $x \in I \cap A$ tenemos que $f(x) = f(1x) = 1f(x) \in A$, y de hecho $f_{|I\cap A}$ es un c.p.d. en A. Por tanto, existe $\lambda \in C_A$, tal que $f(x) = \lambda x$ para cada $x \in I \cap A$. Así, en el caso en que $I \subseteq A$ obtenemos que f está completamente determinada por un elemento de C_A. Asumamos que $I \nsubseteq A$. Entonces, por la Proposición 1.6.3, $I = (I \cap A)'$. Nótese que $0 = f(0) = f(1(\mathbf{1} - 1)) = 1f(\mathbf{1} - 1)$, y de hecho existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $f(\mathbf{1} - 1) = \alpha(\mathbf{1} - 1)$. Por tanto, para cada $x + \beta(\mathbf{1} - 1) \in I$ tenemos que $f(x + \beta(\mathbf{1} - 1)) = \lambda x + \alpha\beta(\mathbf{1} - 1) = (\lambda + \alpha(\mathbf{1} - 1))(x + \beta(\mathbf{1} - 1))$, y así f esta completamente determinada por un elemento de C_A^1. Así Q_A^1 satisface (**A3**). $\square$

Corolario 3.5.3. *Sea A un álgebra semiprima con unidad. Entonces A es centralmente cerrada si y solo si A^1 es centralmente cerrada.*

Obtengamos algunas consecuencias que nos permitan relacionar el centro, el centroide y el centroide extendido. Recordemos que si A un álgebra distinta de cero con anulador cero, su centro puede identificarse con su centroide. Por otra parte, por la Proposición 3.4.3, sabemos que Q_A es semiprima y $C_A = C_{Q_A}$ y, por el Corolario 3.3.18, $C_{Q_A} = \Gamma_{Q_A}$. Y por tanto,

Proposición 3.5.4. *Sea A un álgebra semiprima distinta de cero. Consideramos Z_{Q_A} como una subálgebra de Γ_{Q_A}. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Q_A tiene unidad.*

(ii) *$C_A = Z_{Q_A}$.*

Sea A un álgebra semiprima y con unidad 1. La unidad de A es también el elemento unidad de Q_A. Por tanto, por la proposición anterior, C_A puede verse como una subálgebra de Q_A.

Corolario 3.5.5. *Sea A un álgebra semiprima con unidad. Consideramos C_A y A dentro de Q_A. Entonces $Z_A = C_A \cap A$.*

Demostración. La igualdad deseada se desprende de la siguiente cadena de inclusiones

$$Z_A \subseteq \Gamma_A \cap A \subseteq C_A \cap A = Z_{Q_A} \cap A \subseteq Z_A.$$

$\square$

3.5.2. Caso sin unidad

Veamos ahora el caso en el que el álgebra A no tiene unidad.

Sea A un álgebra semiprima. Vamos a denotar por P_A al álgebra sobre $\mathbb{K}$ proveniente del espacio vectorial $Q_A \times C_A$ dotado con el producto

$$(q_1, \lambda_1)(q_2, \lambda_2) := (q_1 q_2 + \lambda_1 q_2 + \lambda_2 q_1, \lambda_1 \lambda_2).$$

Es claro que la aplicación $q \mapsto (q, 0)$ nos permite ver Q_A como un ideal de P_A, así la aplicación $\lambda \mapsto (0, \lambda)$ nos permite ver C_A como una subálgebra de P_A. Como $\mathbf{1} := (0, 1)$ es elemento unidad de P_A, podemos escribir $P_A = Q_A \oplus C_A\mathbf{1}$. Podemos entender a A^1 como una subálgebra de P_A de una forma natural. Para simplificar, pondremos $W := \mathrm{Ann}_{P_A}(Q_A)$, y denotaremos por ϕ la aplicación cociente de P_A en P_A/W.

Lema 3.5.6. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces $P_A = (C_A\mathbf{1})A^1$ es semiprima, $Z_{P_A} = Z_{Q_A} \oplus C_A\mathbf{1} = (Z_{P_A} \cap W) \oplus C_A\mathbf{1}$, y ϕ induce un isomorfismo de $C_A\mathbf{1}$ en $Z_{P_A/W}$. Si además A no tiene unidad, entonces $A^1 \cap W = 0$, A^1 puede verse como una subálgebra de P_A/W via ϕ, y P_A/W está $Z_{P_A/W}$-generada por A^1.*

Demostración. Como $Q_A = C_A A$, se sigue de la definición de P_A que $P_A = (C_A\mathbf{1})A^1$. Sea I un ideal de P_A tal que $I^2 = 0$. Entonces, para algún $q + \lambda\mathbf{1} \in I$, tenemos que $0 = (q + \lambda\mathbf{1})^2 = q^2 + 2\lambda q + \lambda^2\mathbf{1}$, de hecho $\lambda^2 = 0$, y por tanto $\lambda = 0$ porque C_A es un álgebra semiprima conmutativa y asociativa. Por tanto $I \subseteq Q_A$, y de hecho $I = 0$ ya que Q_A es semiprima. Así P_A es semiprima. La igualdad $Z_{P_A} = Z_{Q_A} \oplus C_A\mathbf{1}$ es clara. Pongamos $X := \{z - z\mathbf{1} : z \in Z_{Q_A}\}$. Si $z \in Z_{Q_A}$ y $\lambda \in C_A$ satisface que $z + \lambda\mathbf{1} \in W$, entonces tenemos $0 = (z + \lambda\mathbf{1})q = zq + \lambda q = (z + \lambda)q$ para todo q de Q_A, y de ahí que $\lambda = -z$. Por lo tanto $Z_{P_A} \cap W \subseteq X$. Como X es un ideal de P_A que satisface $XQ_A = Q_A X = 0$, se sigue que $Z_{P_A} \cap W = X$. Teniendo en cuenta que $Z_{Q_A} \subseteq \Gamma_{Q_A} = C_A$, y viendo que, para cada $z \in Z_{Q_A}$ y $\lambda \in C_A$, podemos escribir $z + \lambda\mathbf{1} = (z - z\mathbf{1}) + (z + \lambda)\mathbf{1}$, deducimos que $Z_{P_A} = (Z_{P_A} \cap W) \oplus C_A\mathbf{1}$. Por otro lado, como ϕ es un epimorfismo de álgebras, se sigue que $\phi(Z_{P_A}) \subseteq Z_{P_A/W}$. Recíprocamente, si $\phi(p) \in Z_{P_A/W}$, entonces

$$[p, P_A], [p, P_A, P_A], [P_A, p, P_A], [P_A, P_A, p] \subseteq W,$$

y escribiendo $p = q + \lambda\mathbf{1}$ para $q \in Q_A$ y $\lambda \in C_A$ obtenemos que

$$[q, Q_A] = [q, Q_A, Q_A] = [Q_A, q, Q_A] = [Q_A, Q_A, q] = 0,$$

de ahí $q \in Z_{Q_A}$, y por tanto $p \in Z_{P_A}$. Así $\phi(Z_{P_A}) = Z_{P_A/W}$. Ahora, usando la igualdad $Z_{P_A} = (Z_{P_A} \cap W) \oplus C_A\mathbf{1}$, obtenemos $\phi(C_A\mathbf{1}) = Z_{P_A/W}$.

Supongamos ahora que A no tiene unidad. Sea $a + \alpha\mathbf{1} \in A^1 \cap W$. Por definición de W, tenemos que $(a + \alpha\mathbf{1})q = q(a + \alpha\mathbf{1}) = 0$ para todo $q \in Q_A$, y en particular $(a + \alpha\mathbf{1})b = b(a + \alpha\mathbf{1}) = 0$ para todo $b \in A$. De ahí $ab = ba = -\alpha b$ para cada $b \in A$. Como A no tiene unidad, se sigue que $\alpha = 0$ y $a \in \mathrm{Ann}(A)$, y de ahí también $a = 0$. Por tanto $A^1 \cap W = 0$, y por consiguiente A^1 se puede ver como una subálgebra de P_A/W via ϕ. Finalmente, como $P_A = (C_A\mathbf{1})A^1$ y $\phi(C_A\mathbf{1}) = Z_{P_A/W}$, concluimos que P_A/W está $Z_{P_A/W}$-generada por A^1. □

Sea A un álgebra semiprima sin unidad. Como ϕ nos permite ver a A^1 como una subálgebra de P_A/W de tal modo que P_A/W es generado por A^1 como una C_A-subálgebra, se sigue que A^1 es una subálgebra densa de P_A/W. Por tanto, $\mathcal{M}(A^1)$ puede ser visto canónicamente integrado en $\mathcal{M}(P_A/W)$. Para cada $T \in \mathcal{M}(A^1)$ existe un único $T^\square \in \mathcal{M}(P_A/W)$ tal que

$$T^\square \phi(a+\alpha\mathbf{1}) = \phi T(a+\alpha\mathbf{1}) \quad \text{para cada } \ a+\alpha\mathbf{1} \in A^1.$$

Como consecuencia, P_A/W es un $\mathcal{M}(A^1)$-modulo para la acción

$$T.\phi(p) = T^\square\phi(p) \quad \text{para todo } \ T \in \mathcal{M}(A^1) \text{ y } p \in P_A.$$

Es claro que $(ST)^\square = S^\square T^\square$ para todo $S, T \in \mathcal{M}(A^1)$, y en particular

$$(ST).\phi(p) = S.(T.\phi(p)) \text{ para todo } S, T \in \mathcal{M}(A^1) \text{ y } p \in P_A.$$

Además, para cada $T \in \mathcal{M}(A^1)$ y $p = q + \lambda\mathbf{1} \in P_A$, tenemos que

$$T.\phi(p) = T^\square\phi(p) = T^\square\phi(q+\lambda\mathbf{1}) = T^\square\phi(q) + T^\square\phi(\lambda\mathbf{1}) = T.\phi(q) + T.\phi(\lambda\mathbf{1}).$$

Nótese que, para todo $x, y \in A^1$, tenemos

$$\phi(L_x^{A^1}(y)) = \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = L_{\phi(x)}^{P_A/W}\phi(y),$$

y análogamente, $\phi(R_x^{A^1}(y)) = R_{\phi(x)}^{P_A/W}\phi(y)$. Por tanto tenemos que,

$$(L_x^{A^1})^\square = L_{\phi(x)}^{P_A/W} \ \text{ y } \ (R_x^{A^1})^\square = R_{\phi(x)}^{P_A/W} \text{ para cada } \ x \in A^1. \tag{3.7}$$

Como, para cada $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos que $L_{a+\alpha\mathbf{1}}^{A^1} = L_a^{A^1} + \alpha \mathrm{Id}_{A^1}$ y $R_{a+\alpha\mathbf{1}}^{A^1} = R_a^{A^1} + \alpha\mathrm{Id}_{A^1}$, se sigue que $\mathcal{M}(A^1)$ está generada por el conjunto $\{\mathrm{Id}_{A^1}, L_a^{A^1}, R_a^{A^1} \ : \ a \in A\}$. Escribimos $\mathcal{N}(A^1)$ para denotar a la subálgebra de $\mathcal{M}(A^1)$ generada por el conjunto $\{L_a^{A^1}, R_a^{A^1} \ : \ a \in A\}$. Es claro que $\mathcal{M}(A^1) = \mathcal{N}(A^1) + \mathbb{K}\mathrm{Id}_{A^1}$, y $\mathcal{N}(A^1)$ es un ideal de $\mathcal{M}(A^1)$. Además, como $\mathcal{N}(A^1)(\mathbf{1}) \subseteq A$ y $Id_A(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, tenemos, de hecho, que $\mathcal{M}(A^1) = \mathcal{N}(A^1) \oplus \mathbb{K}\mathrm{Id}_{A^1}$.

Para cualquier álgebra semiprima A, denotamos por $\mathcal{L}_{C_A}(Q_A)$ a la C_A-álgebra consistente en todos los C_A-endomorfismos de Q_A. Es claro que $\mathcal{M}(Q_A) \subseteq \mathcal{L}_{C_A}(Q_A)$. Como Q_A es un ideal de P_A y la aplicación $\phi_{Q_A} : Q_A \to \phi(Q_A)$, determinda por la restricción de ϕ a Q_A, es biyectiva, podemos considerar el homomorfismo de álgebras $\zeta : \mathcal{M}(P_A/W) \to \mathcal{L}_{C_A}(Q_A)$, definido por $\zeta(S) = \phi_{Q_A}^{-1} S\phi$ para todo $S \in \mathcal{M}(P_A/W)$.

Siguiendo la notación del Lema 3.5.1 y de la Nota 2.3.12, podemos probar el siguiente resultado técnico.

Lema 3.5.7. *Sea A un álgebra semiprima sin unidad. Entonces*

(i) $\rho(T)' = \zeta(T^\square)$ *para todo* $T \in \mathcal{M}(A^1)$.

(ii) $\phi(\rho(T).q) = T.\phi(q)$ *para todo* $T \in \mathcal{M}(A^1)$ *y* $q \in Q_A$.

(iii) $\mathcal{N}(A^1).(P_A/W) \subseteq \phi(Q_A)$.

Demostración. (i) Tenemos que probar que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(A^1) & \hookrightarrow & \mathcal{M}(P_A/W) \\ \rho \downarrow & & \downarrow \zeta \\ \mathcal{M}(A) & \hookrightarrow & \mathcal{M}(Q_A) \subseteq \mathcal{L}_{C_A}(Q_A) \end{array}$$

Sea $T \in \mathcal{M}(A^1)$. Para cada $a \in A$, tenemos que

$$\rho(T)'(a) = \rho(T)(a) = T(a) = \phi_{Q_A}^{-1}\phi T(a) = \phi_{Q_A}^{-1} T^{\Box}\phi(a) = \zeta(T^{\Box})(a).$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\rho(T)'$ y $\zeta(T^{\Box})$ pertenecen a $\mathcal{L}_{C_A}(Q_A)$ y $Q_A = C_A A$, concluimos que $\rho(T)' = \zeta(T^{\Box})$.
(ii) Por (i), para todo $T \in \mathcal{M}(A^1)$ y $q \in Q_A$, tenemos que

$$\phi(\rho(T).q) = \phi(\rho(T)'(q)) = \phi(\zeta(T^{\Box})(q))$$
$$= \phi\phi_{Q_A}^{-1} T^{\Box}\phi(q) = T^{\Box}\phi(q) = T.\phi(q).$$

(iii) El conjunto $\mathcal{S} := \{T \in \mathcal{M}(A^1) : \ T.\phi(p) \in \phi(Q_A) \text{ para cada } p \in P_A\}$ claramente es una subálgebra de $\mathcal{M}(A^1)$. Además, para cada $a \in A$ y $p \in P_A$, por (3.7), tenemos que

$$L_a^{A^1}.\phi(p) = L_{\phi(a)}^{P_A/W}\phi(p) = \phi(a)\phi(p) = \phi(ap) \in \phi(Q_A),$$

y de ahí $L_a^{A^1} \in \mathcal{S}$. Análogamente podemos ver que $R_a^{A^1} \in \mathcal{S}$. Por tanto $\mathcal{N}(A^1) \subseteq \mathcal{S}$, y en consecuencia $\mathcal{N}(A^1).(P_A/W) \subseteq \phi(Q_A)$. $\Box$

Lema 3.5.8. *Sea A un álgebra semiprima sin unidad. Entonces*

$$W = \{p \in P_A : pA + Ap \subseteq W\}.$$

Demostración. Fijemos el conjunto $W_0 := \{p \in P_A : \ pA + Ap \subseteq W\}$. Claramente $W \subseteq W_0$. Teniendo en cuenta que $Q_A = C_A A$ y que W es un C_A-ideal de P_A, podemos ver que $W_0 Q_A + Q_A W_0 \subseteq W$. Por otro lado, como Q_A es un ideal de P_A, también tenemos que $W_0 Q_A + Q_A W_0 \subseteq Q_A$. Por lo tanto $W_0 Q_A + Q_A W_0 = 0$, y de ahí obtenemos que $W_0 P_A + P_A W_0 = W_0(C_A\mathbf{1}) + (C_A\mathbf{1})W_0 \subseteq W_0$. En resumen, W_0 es un ideal de P_A tal que $W_0 Q_A = Q_A W_0 = 0$. Y en consecuencia, $W_0 \subseteq W$, y finalizamos la demostración. $\Box$

Lema 3.5.9. *Sea A un álgebra semiprima sin unidad. Entonces*

(i) Para cada $p \in P_A$, existe un ideal esencial D de A tal que

$$[\mathcal{M}(A^1).\phi(p)]\phi(D) + \phi(D)[\mathcal{M}(A^1).\phi(p)] \subseteq \phi(A).$$

(ii) Si $p \in P_A$ satisface que $\phi(D)[\mathcal{M}(A^1).\phi(p)] = 0$ o $[\mathcal{M}(A^1).\phi(p)]\phi(D) = 0$ para algún ideal esencial D de A, entonces $\phi(p) = 0$.

Demostración. (i) Sea $p \in P_A$ y escribimos $p = q + \lambda\mathbf{1}$, con $q \in Q_A$ y $\lambda \in C_A$. Por **(A1)** existe un ideal esencial D_1 de A tal que $\mathcal{M}(A)(q)D_1 + D_1\mathcal{M}(A)(q) \subseteq A$. Tomando $T \in \mathcal{M}(A^1)$, por los Lemas 3.5.7.(ii) y 3.5.1, tenemos que

$$[T.\phi(q)]\phi(D_1) + \phi(D_1)[T.\phi(q)] = \phi[\rho(T)(q)D_1] + \phi[D_1\rho(T)(q)]$$

$$= \phi[\rho(T)(q)D_1 + D_1\rho(T)(q)] \subseteq \phi(A).$$

Por otro lado, por el Lema 3.5.6 y la Proposición 3.3.7 aplicada a $\mathcal{M}(P_A/W)$, obtenemos que $T.\phi(\lambda\mathbf{1}) = T^{\Box}\phi(\lambda\mathbf{1}) = \lambda T^{\Box}\phi(\mathbf{1}) = \lambda\phi(T(\mathbf{1})) = \phi(\lambda T(\mathbf{1}))$. En particular

$$[T.\phi(\lambda\mathbf{1})]\phi(\mathrm{dom}(\lambda)) + \phi(\mathrm{dom}(\lambda))[T.\phi(\lambda\mathbf{1})]$$

$$\subseteq \phi(\lambda T(\mathbf{1})\mathrm{dom}(\lambda)) + \phi(\mathrm{dom}(\lambda)\lambda T(\mathbf{1}))$$

$$= \phi(T(\mathbf{1})\lambda\mathrm{dom}(\lambda) + \lambda\mathrm{dom}(\lambda)T(\mathbf{1})) \subseteq \phi(A).$$

Tomamos $D := D_1 \cap \mathrm{dom}(\lambda)$. Combinando ambos argumentos y teniendo en mente que

$$T.\phi(p) = T.\phi(q) + T.\phi(\lambda\mathbf{1}),$$

obtenemos que

$$[\mathcal{M}(A^1).\phi(p)]\phi(D) + \phi(D)[\mathcal{M}(A^1).\phi(p) \subseteq \phi(A).$$

(ii) Sea $p \in P_A$ y $D \in \mathbf{E}_A$ tal que $\phi(D)[\mathcal{M}(A^1).\phi(p)] = 0$. Tomamos $T \in \mathcal{N}(A^1)$. Por el Lema 3.5.7.(iii), existe $q \in Q_A$, tal que $T.\phi(p) = \phi(q)$. Por el Lema 3.5.7.(ii), para cada $S \in \mathcal{M}(A^1)$, tenemos que

$$0 = \phi(D)[(ST).\phi(p)] = \phi(D)[S.(T.\phi(p))] = \phi(D)[S.\phi(q)]$$

$$= \phi(D)\phi(\rho(S).q) = \phi(D[\rho(S).q]).$$

Por lo tanto, $D[\rho(S).q] \subseteq W \cap Q_A = 0$ para cada $S \in \mathcal{M}(A^1)$. Como, por el Lema 3.5.1, $\rho(\mathcal{M}(A^1)) = \mathcal{M}(A)$, tenemos que $D[\mathcal{M}(A).q] = 0$, y por **(A2)**, $q = 0$. Así, $T.\phi(p) = 0$ para cada $T \in \mathcal{N}(A^1)$. Si ahora tomamos $a \in A$ y $T = L_a^{A^1}$, obtenemos que $0 = L_a^{A^1}.\phi(p) = \phi(ap)$. Por tanto, $Ap \subseteq W$. Análogamente, podemos ver que $pA \subseteq W$. Aplicando ahora el Lema 3.5.8, obtenemos que $p \in W$, y deducimos que $\phi(p) = 0$. $\Box$

Por fin podemos podemos calcular la clausura central y el centroide extendido de un álgebra sin unidad.

Teorema 3.5.10. *Sea A a un álgebra semiprima sin unidad. Entonces $Q_{A^1} = P_A/W$ y $C_{A^1} = C_A$.*

Demostración. En primer lugar nótese que, por el Corolario 1.6.4 A^1 es semiprima. En segundo lugar, puesto que $A^1 \cap W = 0$, se tiene que la aplicación cociente restringida a A^1, $\phi_{A^1} : A^1 \to \phi(A^1)$, es un isomorfismo. Viendo A^1 como subálgebra de P_A/W, el Lema 3.5.6 nos asegura que P_A/W es centralmente generada por A^1 y $Z_{P_A/W} = C_A$. Falta pues ver que la pareja $(A^1, P_A/W)$ satisface las propiedades (**A1**)-(**A3**).

(**A1**)-(**A2**) Teniendo en cuenta el Corolario 1.6.5, las propiedades (**A1**) y (**A2**) son consecuencia del Lema 3.5.9.

(**A3**) Sea I un ideal de A^1 y sea f un c.p.d. en $\phi(A^1)$ definido en $\phi(I)$. Nótese que para cada $a \in A$ y $x \in I$, se tiene que

$$f\phi(ax) = f(\phi(a)\phi(x)) = \phi(a)f(\phi(x)) \in \phi(a)\phi(A^1) \subseteq \phi(A),$$

y análogamente $f\phi(xa) \in \phi(A)$. Consideramos $J := \{x \in I : f\phi(x) \in \phi(A)\}$, y ponemos $f^\sharp(x) = \phi_{A^1}^{-1} f\phi(x)$ para cada $x \in J$. Es claro que J es un ideal de A, y que $f^\sharp : J \to A$ es un c.p.d. en A. Por tanto, existe $\lambda \in C_A$ tal que $f^\sharp(x) = \lambda x$ para cada $x \in J$. Ya que, para $a \in A$ y $x \in I$, ax y xa están en J, obtenemos que $f^\sharp(ax) = \lambda ax$ y $f^\sharp(xa) = \lambda xa$, y en consecuencia,

$$\phi(a)f(\phi(x)) = f(\phi(a)\phi(x)) = f(\phi(ax)) = \phi f^\sharp(ax) = \phi(\lambda ax) = \lambda\phi(a)\phi(x),$$

y análogamente $f(\phi(x))\phi(a) = \lambda\phi(x)\phi(a)$. Elegimos p en P_A tal que $\phi(p) = f(\phi(x)) - \lambda\phi(x)$. Entonces tenemos que $0 = \phi(ap) = \phi(pa)$, y como hemos elegido a en A de forma arbitraria podemos deducir que $Ap + pA \subseteq W$. Por tanto, por el Lema 3.5.8, $p \in W$, y de ahí $\phi(p) = 0$, y $f(\phi(x)) = \lambda\phi(x)$. Finalmente, como los x de I, los hemos escogido de forma arbitraria concluimos que P_A/W satisface (**A3**). □

En [19] se prueba la existencia de álgebras primas sin unidad cuya clausura central es un álgebra simple con unidad. Pues bien, veamos qué ocurre para estas álgebras.

Corolario 3.5.11. *Sea A un álgebra sin unidad. Entonces Q_A es la $Z_{Q_{A^1}}$-subálgebra de Q_{A^1} generada por A. Si además Q_A tiene unidad, entonces $Q_A = Q_{A^1}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.5.10 y la Proposición 3.5.4 Q_A puede verse como una subálgebra de Q_{A^1} y $Z_{Q_{A^1}} = C_{A^1} = C_A$. Del hecho de que Q_A está C_A-generada por A, obtenemos la primera conclusión. Ahora, supongamos que Q_A tiene unidad 1. Supongamos que $\mathbf{1} \neq 1$ y vamos a obtener una contradicción. Nótese que $\mathbb{K}(\mathbf{1}-1)$ es un $\mathcal{M}(A^1)$-submódulo de Q_{A^1}, por lo tanto $A^1 \cap \mathbb{K}(\mathbf{1}-1) \neq 0$, y así $\mathbb{K}(\mathbf{1}-1)$ es un ideal distinto de cero de A^1. Por el Corolario 1.6.5, A es un ideal esencial de A^1, y por consiguiente deducimos de igual forma que $\mathbf{1} - 1 \in A$. Pero, $(\mathbf{1} - 1)A = A(\mathbf{1} - 1) = 0$, y por tanto $\mathbf{1} - 1 \in \mathrm{Ann}(A) = 0$, que es un contradicción. Por lo tanto $\mathbf{1} = 1 \in Q_A$, $A^1 \subseteq Q_A$, y $Q_{A^1} = C_{A^1}A^1 = C_A A^1 \subseteq C_A Q_A = Q_A$. □

Corolario 3.5.12. *Sea A un álgebra semiprima sin unidad. Consideramos C_{A^1} y A dentro de Q_{A^1}. Entonces tenemos:*

(i) $Z_A = Z_{A^1} \cap A = \Gamma_{A^1} \cap A = C_{A^1} \cap A$.

(ii) $\mathcal{B}_A \cap A$ *coincide con el conjunto de todos los idempotentes en* Z_A.

Demostración. (i) Por el Corolario 3.5.5, tenemos que $Z_{A^1} = \Gamma_{A^1} = C_{A^1} \cap A^1$. Ahora, el resultado se obtiene del hecho elemental que $Z_A = Z_{A^1} \cap A$.

(ii) Por el Teorema 3.5.10, $C_A = C_{A^1}$, de este hecho tenemos que $\mathcal{B}_A = \mathcal{B}_{A^1}$, y así $\mathcal{B}_A \cap A = \mathcal{B}_{A^1} \cap A$. Ahora, aplicando la parte (i) se obtiene lo que queríamos demostrar. □

Proposición 3.5.13. *Sea A un álgebra semiprima distinta de cero sin unidad, y sea e un idempotente en Γ_A. Consideramos C_{A^1} y A dentro de Q_{A^1}. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *eA es un ideal modular de A.*

(ii) $\mathbf{1} - e \in A$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sea u una unidad modular para eA. Entonces $(\mathbf{1} - u)A + A(\mathbf{1} - u) \subseteq eA$, y de ahí se deduce que las igualdades $(\mathbf{1} - e)(\mathbf{1} - u)A = A(\mathbf{1}-e)(\mathbf{1}-u) = 0$ se verifican en el álgebra Q_{A^1}. Se sigue de esas igualdades que $\mathcal{M}(A^1)((\mathbf{1}-e)(\mathbf{1}-u))A = 0$. Como A es un ideal esencial de A^1 (Corolario 1.6.5), por **(A2)**, $(\mathbf{1} - e)(\mathbf{1} - u) = 0$, y por tanto $\mathbf{1} - e = (\mathbf{1} - e)u \in A$ y concluimos.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Es claro que $\mathbf{1} - e \in A$ es una unidad modular para eA. □

Finalicemos esta sección relacionando la cerrabilidad central de un álgebra sin unidad y la de su unitización.

Proposición 3.5.14. *Si A es un álgebra semiprima sin unidad, entonces $\Gamma_{A^1} \subseteq \Gamma_A$.*

Demostración. Para cada $\lambda \in \Gamma_{A^1}$, tenemos que $\lambda A^1 \subseteq A^1$, de ahí $\lambda A = \lambda \mathbf{1} A \subseteq A^1 A = A$, y así $\lambda \in \Gamma_A$. □

Teniendo en cuenta el Teorema 3.5.10 y la Proposición 3.5.14 obtenemos que

Corolario 3.5.15. *Sea A un álgebra semiprima sin unidad. Si A^1 es centralmente cerrada, entonces A es centralmente cerrada.*

Vale la pena hacer notar ahora que, para un álgebra semiprima, A tal que Q_A no tiene unidad, la inclusion $\Gamma_{A^1} \subseteq \Gamma_A$ puede ser estricta y que el recíproco del Corolario 3.5.15 no es cierto, incluso en contexto conmutativo y asociativo.

Ejemplo 3.5.16. Sea s el álgebra de todas las sucesiones(reales o complejas) dotado con las operaciones coordenada a coordenada del álgebra, y sea $A = c_{00}$. Es inmediato que A^1 puede verse como una subálgebra de s consistente en todas las sucesiones casi constantes. Podemos ver que $Q_s(A) = Q_s(A^1) = s$. Por tanto $\Gamma_A = C_A = C_{A^1} = Q_{A^1} = s$, $Q_A = A$, y $\Gamma_{A^1} = A^1$. Así $\Gamma_{A^1} \neq \Gamma_A$ y . Además ya que $A^1 = Q_A^1 \neq Q_{A^1}$, A^1 no es centralmente cerrada.

3.6. Clausura central y centroide extendido del álgebra de multiplicación

Antes de calcular cuales son la clausura central y el centroide extendido del álgebra de multiplicación de un álgebra m.s.p., vamos a probar dos resultados previos que nos van a ayudar en nuestro objetivo.

Lema 3.6.1. *Sea A un álgebra semiprima. Tenemos que:*

(i) Si $T \in \mathcal{L}(Q_A)$ satisface que $L_D^A \mathcal{M}(A)T = 0$, para algún ideal esencial D de A, entonces $T = 0$.

(ii) Si D es un ideal esencial de A, entonces $\mathcal{M}(A)L_D^A\mathcal{M}(A)$ es un ideal esencial de $\mathcal{M}(A)$.

Demostración. (i) Supongamos que T es un elemento de $\mathcal{L}(Q_A)$ que satisface $L_D^A\mathcal{M}(A)T = 0$, para algún ideal esencial D de A. Entonces $D\mathcal{M}(A)(T(Q_A)) = 0$, de hecho $T(Q_A) = 0$, por **(A2)** y por tanto $T = 0$.

(ii) Sea D un ideal esencial de A. Supongamos que $\mathcal{P}$ es un ideal de $\mathcal{M}(A)$ que satisface $\mathcal{P} \cap \mathcal{M}(A)L_D^A\mathcal{M}(A) = 0$. Como $L_D^A\mathcal{M}(A)\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{M}(A)L_D^A\mathcal{M}(A)$, se sigue que $L_D^A\mathcal{M}(A)\mathcal{P} = 0$, y de hecho, por la afirmación (i), $\mathcal{P} = 0$. Así $\mathcal{M}(A)L_D^A\mathcal{M}(A)$ es un ideal esencial de $\mathcal{M}(A)$. □

Lema 3.6.2. *Sea A un álgebra m.s.p., y sea $\mathcal{D}$ un ideal esencial de $\mathcal{M}(A)$. Si $q \in Q_A$ satisface $\mathcal{D}(q) = 0$, entonces $q = 0$.*

Demostración. Consideramos el conjunto $I := \{a \in A : \mathcal{D}(a) = 0\}$. Es claro que I es un ideal de A que satisface $\mathcal{D}[I : A] = 0$. Como $\mathcal{M}(A)$ es semiprima y $\mathcal{D}$ es un ideal esencial de $\mathcal{M}(A)$, se sigue que $[I : A] = 0$. Por tanto $L_I^A = R_I^A = 0$, de hecho $I \subseteq \mathrm{Ann}(A)$, y por tanto $I = 0$. Así, hemos probado que, para todo $a \in A$, la condición $\mathcal{D}(a) = 0$ implica $a = 0$. Ahora, supongamos que $q \in Q_A$ satisface que $\mathcal{D}(q) = 0$. Escribimos $q = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ para convenientes $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in C_A$, $a_i \in A$, y consideramos $D = \cap_{i=1}^n \mathrm{dom}(\lambda_i)$. Nótese que, para $x \in D$, $F \in \mathcal{M}(A)$, y $a \in A$ tenemos

$$L_x^A F L_q^A = \sum_{i=1}^n L_{\lambda_i x}^A F L_{a_i}^A \in \mathcal{M}(A) \ \text{ y } \ L_x^A F L_q^A(a) \in A.$$

Puesto que $\mathcal{D}L_x^A F L_q^A(a) = \mathcal{D}L_x^A F R_a^A(q) \subseteq \mathcal{D}(q)$, y de hecho $\mathcal{D}L_x^A F L_q^A(a) = 0$, deducimos de la primera parte de la demostración que $L_x^A F L_q^A(a) = 0$. De hecho $L_D^A \mathcal{M}(A) L_q^A = 0$. De forma similar podemos ver que $L_D^A \mathcal{M}(A) R_q^A = 0$. Por el Lema 3.6.1.(i) deducimos que $L_q^A = R_q^A = 0$. Como A es densa en Q_A, se sigue que $L_q^{Q_A} = R_q^{Q_A} = 0$, y de hecho $q = 0$. $\square$

Para cualquier álgebra semiprima A, fijamos $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ para denotar la C_A-subálgebra de $\mathcal{L}_{C_A}(Q_A)$ generada por $\mathcal{M}(Q_A)$, esto es, la subálgebra generada por Id_{Q_A} y el conjunto $\{L_q^{Q_A}, R_q^{Q_A} \ : \ q \in Q_A\}$. Viendo $\mathcal{M}(A)$ como una subálgebra de $\mathcal{M}(Q_A)$, es inmediato verificar que $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ está generada por $\mathcal{M}(A)$ como una C_A-álgebra. Por lo tanto $\mathcal{M}(A)$ es una subálgebra densa en $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$, y de hecho, $\mathcal{M}(\mathcal{M}(A))$ puede ser vista como subálgebra de $\mathcal{M}(\mathcal{M}_{C_A}(Q_A))$ y $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ es un $\mathcal{M}(\mathcal{M}(A))$-módulo izquierdo.

Ya podemos demostrar nuestro objetivo.

Teorema 3.6.3. *Si A es un álgebra m.s.p., entonces $C_{\mathcal{M}(A)} = C_A$ y $Q_{\mathcal{M}(A)} = \mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$.*

Demostración. Teniendo en mente que Q_A es generado por A como una C_A-álgebra, se sigue que $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ es generado por $\mathcal{M}(A)$ como una C_A-álgebra. Falta probar que la pareja $(\mathcal{M}(A),\mathcal{M}_{C_A}(Q_A))$ satisface las propiedades (**A1**)-(**A3**).

(**A1**) Sea $T \in \mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$. Escribimos $T = \sum_{i=1}^n \lambda_i F_i$ para $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in C_A$, $F_i \in \mathcal{M}(A)$, y consideramos $D = \cap_{i=1}^n \mathrm{dom}(\lambda_i)$. Para todo $x \in D$ y $F, G, H \in \mathcal{M}(A)$ podemos ver que

$$FL_x^A GTH = \sum_{i=1}^n FL_{\lambda_i x}^A GF_i H \text{ y } FTGL_x^A H = \sum_{i=1}^n FF_i L_{\lambda_i x}^A H$$

está en $\mathcal{M}(A)$. Por tanto

$$\mathcal{M}(A)L_D^A\mathcal{M}(A)T\mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(A)T\mathcal{M}(A)L_D^A\mathcal{M}(A) \subseteq \mathcal{M}(A), \tag{3.8}$$

y como consecuencia

$$\mathcal{M}(A)L_D^A\mathcal{M}(A)\mathcal{M}(A)T\mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(A)T\mathcal{M}(A)\mathcal{M}(A)L_D^A\mathcal{M}(A) \subseteq \mathcal{M}(A).$$

Teniendo en cuenta el Lema 3.6.1.(ii), podemos afirma que $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ satisface (**A1**).

(**A2**) Asumamos la existencia de un ideal esencial $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}(A)$ tal que

$$\mathcal{P}\mathcal{M}(\mathcal{M}(A))(T) = 0 \ \text{ ó } \ \mathcal{M}(\mathcal{M}(A))(T)\mathcal{P} = 0.$$

En el primer caso, tenemos en particular que $\mathcal{P}T = 0$, y de hecho $T = 0$ por el Lema 3.6.2. En el segundo caso, tenemos $\mathcal{M}(A)L_D^A\mathcal{M}(A)T\mathcal{M}(A)\mathcal{P} = 0$. Como $\mathcal{M}(A)$ es semiprima, $\mathcal{P}$ es un ideal esencial de $\mathcal{M}(A)$, y, por (3.8), $\mathcal{M}(A)L_D^A\mathcal{M}(A)T\mathcal{M}(A)$ es un ideal de $\mathcal{M}(A)$, deducimos que $\mathcal{M}(A)L_D^A\mathcal{M}(A)T\mathcal{M}(A) =$

0, y en particular $L_D^A\mathcal{M}(A)T = 0$. Por el Lema 3.6.1.(i), concluimos que $T = 0$. Y por tanto se cumple (**A2**).

(**A3**) Finalmente, supongamos que $\mathcal{P}$ es un ideal de $\mathcal{M}(A)$ y $f : \mathcal{P} \to \mathcal{M}(A)$ es un c.p.d. en $\mathcal{M}(A)$. Si $\sum_{i=1}^n F_i(a_i) = 0$ para algún $F_i \in \mathcal{P}$, $a_i \in A$ $(1 \leq i \leq n)$, entonces para todo $F \in \mathcal{P}$ y $G \in \mathrm{Ann}_{\mathcal{M}(A)}(\mathcal{P})$ tenemos

$$(F+G)(\sum_{i=1}^n f(F_i)(a_i)) = \sum_{i=1}^n f((F+G)F_i)(a_i) = \sum_{i=1}^n f(FF_i)(a_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n f(F)F_i(a_i) = f(F)(\sum_{i=1}^n F_i(a_i)) = 0.$$

Por tanto $[\mathcal{P} \oplus \mathrm{Ann}_{\mathcal{M}(A)}(\mathcal{P})](\sum_{i=1}^n f(F_i)(a_i)) = 0$. Como $\mathcal{P} \oplus \mathrm{Ann}_{\mathcal{M}(A)}(\mathcal{P})$ es un ideal esencial de $\mathcal{M}(A)$, aplicando el Lema 3.6.2, tenemos que $\sum_{i=1}^n f(F_i)(a_i) = 0$. Por tanto, la correspondencia

$$\sum_{i=1}^n F_i(a_i) \mapsto \widehat{f}(\sum_{i=1}^n F_i(a_i)) := \sum_{i=1}^n f(F_i)(a_i)$$

determina una aplicación bien definida $\widehat{f} : \mathcal{P}(A) \to A$. Es inmediato verificar que $\widehat{f}$ es un c.p.d. en A. De hecho existe un $\lambda \in C_A$ tal que $\widehat{f}(x) = \lambda x$ para todo $x \in \mathcal{P}(A)$, luego $\widehat{f}(F(a)) = \lambda F(a)$ para todo $F \in \mathcal{P}$ y $a \in A$, y por tanto $f(F) = \lambda F$ para todo $F \in \mathcal{P}$. Así $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ satisface (**A3**).

□

Terminamos este capítulo con una primera consecuencia. Téngase en cuenta que si A es un álgebra semiprima, entonces $\mathcal{M}^\sharp(Q_A)$ es la C_A-subálgebra de $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ generada por $\mathcal{M}^\sharp(A)$, y $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A) = \mathcal{M}^\sharp(Q_A) + C_A\mathrm{Id}_{Q_A}$.

Corolario 3.6.4. *Si A es un álgebra m.s.p., entonces $\mathcal{M}^\sharp(A)$ es un álgebra semiprima, $C_{\mathcal{M}^\sharp(A)} = C_A$, y $Q_{\mathcal{M}^\sharp(A)} = \mathcal{M}^\sharp(Q_A)$.*

Demostración. Si $\mathcal{M}^\sharp(A) = \mathcal{M}(A)$, esto es $Id_A \in \mathcal{M}^\sharp(A)$, entonces $Id_{Q_A} = (Id_A)' \in \mathcal{M}^\sharp(Q_A)$, y se deduce que $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A) = \mathcal{M}^\sharp(Q_A)$. Por lo tanto, es ese caso, el corolario se deduce directamente del Teorema 3.6.3. En el caso en el que $\mathcal{M}^\sharp(A) \neq \mathcal{M}(A)$, tenemos que $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}^\sharp(A) \oplus \mathbb{K}Id_A$ y en consecuencia $\mathcal{M}(A)$ es la unitización del álgebra $\mathcal{M}^\sharp(A)$. Además, por el Corolario 1.6.4 y [9, Corollary 2.5], $\mathcal{M}^\sharp(A)$ es semiprima y carece de unidad. Ahora, por los Teoremas 3.5.10 y 3.6.3, y el Corolario 3.5.11, concluimos que $C_{\mathcal{M}^\sharp(A)} = C_{\mathcal{M}(A)} = C_A$ y $Q_{\mathcal{M}^\sharp(A)}$ es la C_A-subálgebra de $Q_{\mathcal{M}(A)} = \mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ generada por $\mathcal{M}^\sharp(A)$, esto es, $Q_{\mathcal{M}^\sharp(A)} = \mathcal{M}^\sharp(Q_A)$. □

Corolario 3.6.5. *Si A es un álgebra semiprima, entonces A es m.s.p. si, y sólo si, Q_A es un álgebra m.s.p.*

Demostración. Supongamos que A es m.s.p. En virtud del Teorema 3.6.3 $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ es un álgebra semiprima y por la Proposición 3.3.8 $\mathcal{M}(Q_A)$ es una subálgebra densa de $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$. Así, podemos concluir que $\mathcal{M}(Q_A)$ es semiprima simplemente usando la Proposición 2.3.10. Recíprocamente supongamos que Q_A es un álgebra m.s.p. Dado que A es densa en Q_A basta aplicar el Corolario 2.3.13. $\square$

CAPÍTULO 4

π-Teorema

En esta capítulo establecemos el π-teorema, una suerte de piedra de Rosetta que nos permitirá traducir resultados sobre ideales π-cerrados en resultados sobre idempotentes del centroide extendido y viceversa.

4.1. π-Teorema de los isomorfismo de retículos.

Definición 4.1.1. Un retículo acotado L se dice complementado si para cada $x \in L$, existe $y \in L$ tal que $x \sqcup y = 1_L$ y $x \sqcap y = 0_L$ y se dice que es distributivo si para cada $x, y, z \in L$ se verifica que $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$. Diremos que un retículo L es un álgebra *de Boole* si es un retículo simultáneamente distributivo y complementado. Diremos que A es un *álgebra de Boole atómica* si para cada elemento no nulo x existe un elemento minimal y (si $z \in L$ verifica que $0_L \leq z \leq y$, entonces $z = 0_L$ ó $z = y$) tal que $y \leq x$.

Sea A un álgebra semiprima. El conjunto $\mathcal{B}_A$ de todos los idempotentes en C_A tiene un orden parcial dado por $e \leq f$ si $e = ef$. Además, $\mathcal{B}_A$ es un álgebra de Boole para las operaciones

$$e \wedge f = ef, \quad e \vee f = e + f - ef, \quad \text{y} \quad e^* = 1 - e.$$

Teorema 4.1.2. (π-**Teorema**) *Sea A un álgebra semiprima. Entonces la aplicación $e \mapsto eA \cap A$ es un isomorfismo de retículos de $\mathcal{B}_A$ en $\mathcal{I}_A^\pi$, y cuya inversa es $I \mapsto e_{[I]}$. Como consecuencia, tenemos que:*

(i) $\overline{I} = e_{[I]}A \cap A$ para cada ideal I de A.

(ii) $\mathcal{B}_A$ es un álgebra de Boole completa.

Demostración. Es claro que, para $e, f \in \mathcal{B}_A$ tal que $e \leq f$, los conjuntos $eA \cap A$ y $fA \cap A$ son ideales de A tal que $eA \cap A \subseteq fA \cap A$. Dado $e \in \mathcal{B}_A$, consideramos $D_e = \{a \in A : ea \in A\}$, y nótese que

$$e\mathrm{Ann}(eA \cap A)D_e = \mathrm{Ann}(eA \cap A)(eD_e) \subseteq \mathrm{Ann}(eA \cap A)(eA \cap A) = 0,$$

de ahí, $(C_A e\mathrm{Ann}(eA \cap A))(C_A D_e) = 0$, y también

$$(C_A e\mathrm{Ann}(eA \cap A)) \cap (C_A D_e) = 0.$$

Como por la Proposición 3.3.13.(i)y (iii), $C_A D_e$ es un ideal esencial de Q_A, se sigue que $C_A e\mathrm{Ann}(eA \cap A) = 0$, de ahí $e\mathrm{Ann}(eA \cap A) = 0$, y por tanto $\mathrm{Ann}(eA \cap A) \subseteq (1-e)A \cap A$. Como la inclusión contraria es clara, concluimos que $\mathrm{Ann}(eA \cap A) = (1-e)A \cap A$. Se sigue, intercambiando los papeles de e y $1-e$, que $\mathrm{Ann}((1-e)A \cap A) = eA \cap A$. Así, $eA \cap A \in \mathcal{I}_A^\pi$. Nótese que $(1-e)C_A \subseteq \mathrm{Ann}_{C_A}(eA \cap A)$ y $e\mathrm{Ann}_{C_A}(eA \cap A)D_e = 0$. Teniendo en cuenta el Corolario 3.3.17, de la última igualdad deducimos que $e\mathrm{Ann}_{C_A}(eA \cap A) = 0$, y de ahí $\mathrm{Ann}_{C_A}(eA \cap A) = (1-e)C_A$. Y tenemos que $e = e_{[eA \cap A]}$. Además, para cada ideal I de A, la Proposición 3.4.4.(iii), vemos que $e_{[I]}\mathrm{Ann}(I) = 0$, y de ahí $\mathrm{Ann}(I) \subseteq (1 - e_{[I]})A \cap A$. Como la inclusion contraria es obvia como consecuencia de la Proposición 3.4.4.(i), concluimos que $\mathrm{Ann}(I) = (1 - e_{[I]})A \cap A$, y en consecuencia $I = e_{[I]}A \cap A$ cuando I es π-cerrado. Así la aplicación $e \mapsto eA \cap A$ es un isomorfismo de retículos de $\mathcal{B}_A$ en $\mathcal{I}_A^\pi$ cuya inversa es $I \mapsto e_{[I]}$.

Ahora, probemos las consecuencias.

(i) Sea I un ideal de A. Si $e \in \mathcal{B}_A$ satisface $I \subseteq eA \cap A$, entonces $I = eI$. Por tanto, por la Proposición 3.4.4.(ii), $e_{[I]} = ee_{[I]}$, esto es $e_{[I]} \leq e$, y $e_{[I]}A \cap A \subseteq eA \cap A$. De ahí $\overline{I} = e_{[I]}A \cap A$.

La afirmación (ii) se sigue del hecho de que $\mathcal{I}_A^\pi$ es un retículo completo.

$\square$

Una primera consecuencia evidente es el siguiente resultado:

Corolario 4.1.3. *Sea A un álgebra, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A es semiprima.

(ii) $\mathcal{I}_A^\pi$ *es un álgebra de Boole (completa).*

Demostración. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Es consecuencia del Teorema 4.1.2 y del hecho de que $\mathcal{I}_A^\pi$ es un retículo completo.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Sea I un ideal π-cerrado de A. Por ser un álgebra de Boole, existe $J \in \mathcal{I}_A^\pi$ tal que $A = \overline{I \oplus J}$, esto es, A es semiprima en virtud de la Proposición 1.4.4.

$\square$

Los siguientes resultados son consecuencia del π-Teorema y de la Proposición 3.4.4.

Corolario 4.1.4. *Sea A un álgebra semiprima. Tenemos que:*

(i) Si S_1 y S_2 son subconjuntos de Q_A tal que $S_1 \subseteq S_2$, entonces $e_{[S_1]} \leq e_{[S_2]}$.

(ii) Si I es un ideal de A, entonces $e_{[I]} = e_{[\overline{I}]}$ y $e_{[\mathrm{Ann}(I)]} = 1 - e_{[I]}$.

(iii) Si I, J son ideales de A, entonces $e_{[I]} = e_{[J]}$ si, y solo si $\overline{I} = \overline{J}$.

(iv) Un ideal D de A es esencial, si y solo si $e_{[D]} = 1$.

(v) Si S es un subespacio de A, entonces $e_{[S]} = e_{[\widehat{S}]}$.

Demostración. (i) Sea S_1 y S_2 subconjuntos de Q_A tal que $S_1 \subseteq S_2$. Entonces

$$(1 - e_{[S_2]})C_A = \mathrm{Ann}_{C_A}(S_2) \subseteq \mathrm{Ann}_{C_A}(S_1) = (1 - e_{[S_1]})C_A,$$

de ahí, $e_{[S_1]}(1 - e_{[S_2]}) = 0$, y también $e_{[S_1]} = e_{[S_1]}e_{[S_2]}$.

(ii) Sea I un ideal de A. Como $I \subseteq \overline{I} \subseteq e_{[I]}A$, tenemos que

$$e_{[I]} \leq e_{[\overline{I}]} \leq e_{[e_{[I]}A]} = e_{[I]}e_{[A]} = e_{[I]}1 = e_{[I]}.$$

Asi $e_{[I]} = e_{[\overline{I}]}$. Por otro lado, como $A = \overline{\overline{I} \oplus \mathrm{Ann}(I)}$, se sigue que $1 = e_{[\overline{I}]} + e_{[\mathrm{Ann}(I)]}$, y por tanto $1 = e_{[I]} + e_{[\mathrm{Ann}(I)]}$.

(iii) Se sigue del Teorema 4.1.2.(i) y de (ii).

(iv) La afirmación directa se sigue de (ii) y de la Proposición 1.3.6. Para probar el recíproco, téngase en cuenta que por (ii) $e_{[\mathrm{Ann}(D)]} = 0$, y por tanto $\mathrm{Ann}(D) = 0$, por lo que aplicando el Corolario 1.2.4, concluimos que D es esencial.

(v) Sea S un subespacio de A. Tomamos $J := e_{[S]}A \cap A$. Como J es un ideal π-cerrado en virtud del π-Teorema y claramente $S \subseteq J$, por la Proposición 3.4.4.(i), se tiene que $S \subseteq \widehat{S} \subseteq \widehat{J} \subseteq \overline{J} = J \subseteq e_{[S]}A$, y deducimos que

$$e_{[S]} \leq e_{[\widehat{S}]} \leq e_{[e_{[S]}A]} = e_{[S]}e_{[A]} = e_{[S]}1 = e_{[S]}.$$

Así $e_{[S]} = e_{[\widehat{S}]}$.

□

4.2. Subálgebras de Q_A de la forma eA.

Sea A un álgebra semiprima. Para un idempotente dado $e \in C_A$, es claro que eA es una subálgebra de Q_A, y eQ_A es la C_A-subálgebra de Q_A generada por eA. Como consecuencia eA es una subálgebra densa de eQ_A, y por tanto tenemos una inmersión canonica $\mathcal{M}(eA) \hookrightarrow \mathcal{M}(eQ_A)$. Como la aplicación $\psi : A \to eA$ definida por $\psi(a) := ea$ es un epimomorfismo, se sigue que ψ induce un retículo isomorfo $\{I \in \mathcal{I}_A : \ker(\psi) \subseteq I\}$ en $\mathcal{I}_{eA}$. Además, si D es un ideal esencial de eA, entonces $\psi^{-1}(D)$ es un ideal esencial de A.

4.2.1. Clausura central y centroide extendido de eA

Recordemos que hay un proceso estándar para pasar epimorfismos de álgebras de multiplicación: Si A y B son álgebras sobre $\mathbb{K}$, y si ψ es un epimorfismo de álgebras de A en B, entonces existe un epimorfismo de álgebras ψ' de $\mathcal{M}(A)$ en $\mathcal{M}(B)$ determinado por la condición $\psi'(F) \circ \psi = \psi \circ F$ para cada $F \in \mathcal{M}(A)$.

Proposición 4.2.1. *Sea A un álgebra semiprima y sea e un idempotentee en C_A. Consideramos un homomorfismo de álgebra exhaustivo $\psi : A \to eA$ definido por $\psi(a) := ea$, y el homomorfismo de álgebra exhaustivo $\psi' : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(eA)$ asociado a ψ. Tenemos:*

(i) $\mathcal{M}(eA) = e\mathcal{M}(A)$.

(ii) $\psi'(F)(p) = F(p)$ *para todo* $F \in \mathcal{M}(A)$ *y* $p \in eQ_A$. *Como consecuencia,* $\mathcal{M}(eA)(p) = \mathcal{M}(A)(p)$ *para cada* $p \in eQ_A$.

(iii) Si J es un ideal de eA distinto de cero y si $f : J \to eA$ es un c.p.d. en eA, entonces J es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q_A, f es un $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo, y $f_{|f^{-1}(A)\cap A}$ es un c.p.d. en A.

(iv) Si D es un ideal esencial de A, entonces eD es un ideal esencial de eA.

Demostración. (i)

Nótese que, para cada $F \in \mathcal{M}(A)$ y $a \in A$, $\psi'(F)(ea) = eF(ea)$. De hecho, ya que en virtud de la Proposición 3.3.7, $eF(a) = eF(ea)$, tenemos

$$\psi'(F)(ea) = \psi'(F)\psi(a) = \psi(F(a)) = eF(a) = eF(ea).$$

En particular, puesto que ψ es sobreyectiva, tenemos que $\mathcal{M}(eA) = e\mathcal{M}(A)$.

(ii) Puesto que, para cada $a \in A$, $eF(ea) = F(ea)$ por la Proposición 3.3.7, también se tiene que $\psi'(F)(ea) = F(ea)$. Por lo tanto, si aplicamos de nuevo la Proposición 3.3.7 a eQ_A tenemos que, para todo $\lambda_k \in C_A$ y $a_k \in A$ con $1 \leq k \leq n$,

$$\psi'(F)(e\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k) = \psi'(F)(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e a_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \psi'(F)(ea_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F(ea_k) = F(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e a_k) = F(e\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k).$$

En particular, $\psi'(F)(p) = eF(p)$ para todo $p \in eQ_A$.

(iii) Sea J un ideal de eA distinto de cero. Teniendo en cuenta la afirmación (ii) $\mathcal{M}(A)(J) = \mathcal{M}(eA)(J) \subseteq J$, y de hecho J es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q_A. Ahora, asumimos que $f : J \to eA$ es un c.p.d. en eA. Notese que, aplicando 2 veces las afirmación (ii), para cada $F \in \mathcal{M}(A)$ y $p \in J$ tenemos que

$$f(F(p)) = f(\psi'(F)(p)) = \psi'(F)(f(p)) = F(f(p)).$$

Así f es un $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo. Finalmente, por la Proposición 3.3.11.(ii.2), tenemos que $f_{|f^{-1}(A)\cap A}$ es un c.p.d. en A,

(iv) Sea D un ideal esencial de A. Asumimos que J es un ideal de eA tal que $eD \cap J = 0$. Como $D \cap J \subseteq eD \cap J$, se sigue que $D \cap J = 0$, y de hecho $D \cap (J \cap A) = 0$. Teniendo en cuenta que $J \cap A$ es un ideal de A, se sigue que $J \cap A = 0$. Ahora, aplicando que A es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo esencial, véase Corolario 3.3.19, tenemos que $J = 0$. Así eD es un ideal esencial de eA. □

Teorema 4.2.2. *Sea A un álgebra semiprima, y sea e un idempotente en C_A. Entonces eA es un álgebra semiprima, $C_{eA} = eC_A$ y $Q_{eA} = eQ_A$.*

Demostración. Sea J un ideal de eA que satisface que $J^2 = 0$. Es claro que $J \cap A$ es un ideal de A que satisface $(J \cap A)^2 = 0$, y por tanto $J \cap A = 0$. Como,por la Proposicion 4.2.1.(iii), J es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q_A, se sigue por el Corolario 3.3.19 que $J = 0$. Así eA es un álgebra semiprima. Ahora, debemos probar que eQ_A es una eC_A-álgebra y que la pareja (eA, eQ_A) verifica las propiedades (**A1**)-(**A3**).

Claramente eC_A y eQ_A son ideales de C_A y Q_A, respectivamente. Por lo tanto, eC_A es un álgebra conmutativa y asociativa. Además, e es un elemento unidad de eC_A. Del hecho de que Q_A es un C_A-álgebra generado por A nos permite deducir que eQ_A es una eC_A-álgebra generada por eA.

(**A1**) Sea $p \in eQ_A$. Por la Propiedad (**A1**) para Q_A, existe un ideal esencial D de A tal que $D\mathcal{M}(A)(p) + \mathcal{M}(A)(p)D \subseteq A$. Nótese que, por la Proposición 4.2.1.(ii), tenemos que

$$(eD)\mathcal{M}(eA)(p) + \mathcal{M}(eA)(p)(eD) \subseteq eA.$$

Ahora, por la Proposición 4.2.1.(iv), concluimos que la propiedad (**A1**) se cumple.

(**A2**) Supongamos que $p \in eQ_A$ satisface, por ejemplo, la condición $D\mathcal{M}(eA)(p) = 0$ para algún ideal esencial D de eA. Hacemos notar que

$$eF(q) = F(q) \text{ para todo } F \in \mathcal{M}(A) \text{ y } q \in eQ_A,$$

y se sigue por la Proposición 4.2.1.(ii) que $\psi^{-1}(D)\mathcal{M}(A)(p) = 0$. Como $\psi^{-1}(D)$ es un ideal esencial de A, concluimos que $p = 0$, y por tanto la propiedad (**A2**) también se cumple.

(**A3**) Dado que $\mathrm{Ann}_{eC_A}(eQ_A) \subseteq \mathrm{Ann}_{C_A}(Q_A)$, se sigue que $\mathrm{Ann}_{eC_A}(eQ_A) = 0$. Sea ahora J un ideal de eA distinto de cero, y sea $f : J \to eA$ un c.p.d. en eA. Por la Proposición 4.2.1.(iii), J es un $\mathcal{M}(A)$-submódulo de Q_A, f es un $\mathcal{M}(A)$-homomorfismo y $f_{|f^{-1}(A)\cap A}$ es un c.p.d. en A, por lo que, por la propiedad (**A2**) para Q_A , existe $\lambda \in C_A$ tal que $f(x) = \lambda x$ para cada $x \in f^{-1}(A) \cap A$. De esta circunstancia, se sigue por la Proposición 3.3.11.(ii.3) que $f(p) = \lambda p$ para cada $p \in J$, y por tanto $f(p) = e\lambda p$ para cada $p \in J$.

□

4.2.2. Aplicaciones

Nuestra primera consecuencia resultará ser una formulación equivalente del π-Teorema 4.1.2.

Corolario 4.2.3. *Sea A un álgebra semiprima, y sea e un idempotente en C_A. Para cada ideal K de eA, denotamos por $\overline{K}^e$ la π-clausura de K en el álgebra eA. Entonces tenemos que:*

(i) $\mathcal{B}_{eA} = e\mathcal{B}_A = \{f \in \mathcal{B}_A : f \leq e\}$ *y la aplicación* $f \mapsto fA \cap eA$ *es un isomorfismo de retículos de* $\mathcal{B}_{eA}$ *en* $\mathcal{I}^\pi_{eA}$.

(ii) Para cada ideal K de eA, $e_{[K]}$ coincide con el idempotente asociado a K en C_{eA}, y $\overline{K}^e := e_{[K]}A \cap eA$.

(iii) La aplicación $I \mapsto \overline{I}^e$ es un isomorfismo de retículos de $\{I \in \mathcal{I}^\pi_A : \ I \subseteq eA\}$ en $\mathcal{I}^\pi_{eA}$.

Demostración. (i) La primera conclusión es consecuencia de la igualdad $C_{eA} = eC_A$ en el Teorema 4.2.2. El resto se deduce del π-Teorema.

(ii) Sea K un ideal de eA. Denotamos por $e_{[K]}$ y $e'_{[K]}$ los idempotentes asociados a K en C_A y C_{eA}, respectivamente, y teniendo en mente la Proposición 3.4.4 para el álgebras A y eA. Como $K = e'_{[K]}K$ y $e'_{[K]} \in \mathcal{B}_{eA} \subseteq \mathcal{B}_A$, tenemos que $e_{[K]} = e'_{[K]}e_{[K]}$. De ahí $e_{[K]} \in \mathcal{B}_{eA}$, y de la igualdad $K = e_{[K]}K$ tenemos $e'_{[K]} = e_{[K]}e'_{[K]}$. Por tanto $e'_{[K]} = e_{[K]}$. Ahora, por el Teorema 4.1.2, la π-clausura de K en eA viene dada por $\overline{K}^e = e_{[K]}A \cap eA$.

(iii) Por el Teorema 4.1.2, la aplicación $\varphi_1 : f \mapsto fA \cap A$ es un isomorfismo de retículos de $\mathcal{B}_{eA}$ en $\mathcal{L} := \{I \in \mathcal{I}^\pi_A : \ I \subseteq eA\}$. Por otro lado, por la afirmación (i), la aplicación $\varphi_2 : f \mapsto fA \cap eA$ es un isomorfismo de retículos de $\mathcal{B}_{eA}$ en $\mathcal{I}^\pi_{eA}$. Por tanto, aplicación $\varphi_2\varphi_1^{-1}$ es un isomorfismo de retículos de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{I}^\pi_{eA}$. Como, para cada $f \in \mathcal{B}_{eA}$, $fA \cap A$ es tambien un ideal de eA con f como idempotente asociado, se sigue por la afirmación (ii) que $\overline{fA \cap A}^e = fA \cap eA$, y en consecuencia $\varphi_2\varphi_1^{-1}(I) = \overline{I}^e$ para cada $I \in \mathcal{L}$.

□

Cuando el sumando es directo, podemos ser más precisos.

Corolario 4.2.4. *Sea A un álgebra semiprima, y sea I un ideal de A el cual es un sumando directo de A. Entonces $I = e_{[I]}A$ es un álgebra semiprima, $C_I = e_{[I]}C_A$, $Q_I = e_{[I]}Q_A$, y*

$$\mathcal{I}^\pi_I = \ell^{\mathcal{I}^\pi_A}(I)$$

Demostración. Sea J un ideal de A tal que $A = I \oplus J$. Por la Proposición 3.4.4, vemos que

$$e_{[I]}A = e_{[I]}(I \oplus J) = e_{[I]}I = I.$$

Ahora, por el Teorema 4.2.2, obtenemos que I es un álgebra semiprima, $C_I = e_{[I]}C_A$, y $Q_I = e_{[I]}Q_A$. Además, por el Corolario 4.2.3.(ii)-(iii), vemos que $\mathcal{I}_I^\pi = \{e_{[K]}A \cap I \,:\, K \in \mathcal{I}_A^\pi,\, K \subseteq I\}$. Como por el Teorema 4.1.2, para cada $K \in \mathcal{I}_A^\pi$ con $K \subseteq I$ tenemos que $e_{[K]}A \cap I = e_{[K]}A \cap A \cap I = K \cap I = K$, y así terminamos la demostración. $\square$

En el caso del cociente resultará crucial el siguiente resultado

Proposición 4.2.5. *Sea A un álgebra semiprima, y sea I un ideal π-cerrado de A. Entonces $\varphi : a + I \mapsto (1 - e_{[I]})a$ es un isomorfismo de álgebras bien definido de A/I en la subálgebra $(1 - e_{[I]})A$ de Q_A.*

Demostración. Si $a_1, a_2 \in A$ satisfacen que $a_1 + I = a_2 + I$, entonces $a_1 - a_2 \in I$, y de ahí $e_{[I]}(a_1 - a_2) = a_1 - a_2$, y también $(1 - e_{[I]})a_1 = (1 - e_{[I]})a_2$. Por tanto la correspondencia $a + I \mapsto (1 - e_{[I]})a$ determina una aplicación bien definida φ de A/I en Q_A. Es inmediato verificar que φ es un homomorfismo de álgebra. Además, $\varphi(a + I) = 0$ implica que $a = e_{[I]}a \in e_{[I]}A \cap A$, y de ahí $a \in I$ por el π-Teorema. Por tanto φ es un isomorfismo de álgebras de A/I en $(1 - e_{[I]})A$. $\square$

Corolario 4.2.6. *Sea A un álgebra semiprima, y sea I un ideal propio π-cerrado de A. Entonces A/I es un álgebra semiprima, $C_{A/I} = C_A/e_{[I]}C_A$, y $Q_{A/I} = Q_A/e_{[I]}Q_A$ y $e_{[q(J)]} = (1 - e_{[I]})e_{[J]}$ para todo J ideal de A.*

Demostración. La primidad es conocida después de la Proposición 1.5.1 y sabemos, por la Proposición 4.2.5 que $A/I \cong (1 - e_{[I]})A$. Además, nótese que teniendo en cuenta la Proposición 3.4.4.(1) y el Teorema 3.4.6, se tiene

$$e_{[I]}C_A = \mathrm{Ann}_{C_A}((1 - e_{[I]})C_A) \;\text{ y }\; e_{[I]}Q_A = \mathrm{Ann}_{Q_A}((1 - e_{[I]})Q_A),$$

y de ahí $e_{[I]}C_A$ y $e_{[I]}Q_A$ son ideales π-cerrados de C_A y Q_A, respectivamente. Por la Proposición 4.2.5 aplicadas a las álgebras C_A y Q_A, obtenemos que

$$C_A/e_{[I]}C_A \cong (1 - e_{[I]})C_A \;\text{ y }\; Q_A/e_{[I]}Q_A \cong (1 - e_{[I]})Q_A.$$

Estos isomorfismos nos permiten considerar $C_A/e_{[I]}C_A$ y $Q_A/e_{[I]}Q_A$ como el centroide extendido y la clausura central de A/I de una forma natural.

Por otra parte, en virtud de la Proposición 4.2.5 $e_{[q(J)]} = e_{[\varphi(q(J))]} = e_{[(1-e_{[I]})J]}$ y puesto que por la Proposición 3.4.4 $e_{[(1-e_{[I]})J]} = (1 - e_{[I]})e_{[J]}$ podemos obtener que $e_{[q(J)]} = (1 - e_{[I]})e_{[J]}$. $\square$

Como consecuencia de los Corolarios 4.2.6 y 4.1.4, podemos volver a obtener la Proposición 1.5.5, pieza clave de la demostración del Teorema 1.5.7, sin más que probar, que ambos ideales tienen el mismo idempotente asociado.

Nuestra última aplicación se deduce del Teorema 4.2.2,

Corolario 4.2.7. *Si A es un álgebra m.s.p., y si $e \in \mathcal{B}_A$, entonces eA es un álgebra m.s.p.*

Demostración. Sea A un álgebra m.s.p. Por la Proposición 4.2.1.(i) $\mathcal{M}(eA) = e\mathcal{M}(A)$, luego basta aplicar el Teorema 4.2.2 a A y a eA.

$\square$

4.3. Centroide extendido de un producto subdirecto

Deseamos ahora calcular el centroide extendido y la clausura central de un un producto subdirecto de álgebras semiprimas.

Teorema 4.3.1. *Sea A un álgebra semiprima distinta de cero, y sea Λ un conjunto no vacío. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A es un producto subdirecto esencial de una familia Λ-indizada de álgebras distintas de cero.

(ii) C_A es un producto directo de una familia Λ-indizada de álgebras distintas de cero.

(iii) Existe una familia Λ-indizada de elementos mutualmente ortogonales distintos de cero de $\mathcal{B}_A$ con supremo 1.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supongamos que A es un producto subdirecto esencial de una familia de álgebras $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ distintas de cero. Por la Proposición 1.8.5, cada A_λ es un álgebra semiprima, y A contiene a un ideal esencial D_λ de A_λ para cada índice λ. Si f_λ es un c.e.d. en A_λ para cada λ, entonces

$$f_\lambda^{-1}(D_\lambda) := \{x \in \mathrm{dom}(f_\lambda) : f_\lambda(x) \in D_\lambda\}$$

es un ideal esencial de A_λ (por [3, Lemma 2.4]), $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda^{-1}(D_\lambda)$ es un ideal esencial de A (por [10, Proposition 2.2.(ii)]), y la aplicación

$$f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda^{-1}(D_\lambda) \to A$$

definida por $f(\{x_\lambda\}) = \{f_\lambda(x_\lambda)\}$ es un c.e.d. en A.

Recíprocamente, si h es un c.e.d. en A, entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, $D_\lambda \cap \mathrm{dom}(h)$ es un ideal esencial de A_λ. Además, si representamos por

$$A^\lambda := \{x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda : \ p_\lambda(x) = 0\},$$

entonces $h(D_\lambda \cap \mathrm{dom}(h)) \subseteq \mathrm{Ann}_A(A^\lambda \cap A) = A_\lambda \cap A$, y $h_\lambda : D_\lambda \cap \mathrm{dom}(h) \to A_\lambda$ definida por $h_\lambda(x) := h(x)$ es un c.e.d. en A_λ.

Ahora, nótese que las aplicaciones $\{f_\lambda\} \mapsto f$ y $h \mapsto \{h_\lambda\}$ son compatibles con las relaciones de equivalencia en sus correspondientes conjuntos de centralizadores esencialmente definidos que determinan los centroides extendidos, y de ahí se induce un homomorfismo de álgebra de $\prod_{\lambda\in\Lambda} C_{A_\lambda}$ en C_A y de C_A en $\prod_{\lambda\in\Lambda} C_{A_\lambda}$. La demostración concluye haciendo notar que estos homomorfismos de álgebras son el uno inverso del otro.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supongamos que $C_A = \prod_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$, donde cada C_λ es un álgebra distinta de cero. Claramente C_λ es un álgebra con unidad asociativa y conmutativa. Sea e_λ el elemento unidad de C_λ. Entonces, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de elementos mutualmente ortogonales distintos de cero de $\mathcal{B}_A$ con supremo 1.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supongamos que $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia Λ-indizada de elementos mutualmente ortogonales distintos de cero de $\mathcal{B}_A$ con supremo 1. Para cada índice λ, por el Teorema 4.2.2, $e_\lambda A$ es un álgebra semiprima distinta de cero. Consideramos la aplicación $\varphi : A \to \prod_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda A$ definida por $\varphi(a) = \{e_\lambda a\}_{\lambda\in\Lambda}$. Es rutinario verificar que φ es un homomorfismo de álgebra tal que la aplicación $p_\lambda \circ \varphi$ es sobreyectiva. Nótese que, para cada $a \in A$ y $\lambda \in \Lambda$, la condición $0 = e_\lambda a$ implica que $0 = e_{[e_\lambda a]} = e_\lambda e_{[a]}$ (por la Proposición 3.4.4.(ii)), y por tanto $e_\lambda \leq 1 - e_{[a]}$. Por lo tanto, para cada $a \in \ker(\varphi)$, tenemos que $1 - e_{[a]} = 1$ y como $1 = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$, de ahí $e_{[a]} = 0$, y también $a = 0$. Así φ es inyectiva. Es claro que, para cada λ, $e_\lambda A \cap A$ es un ideal de $e_\lambda A$. Además, por el Corolario 4.2.3.(ii), $e_\lambda A \cap A$ es π-denso en $e_\lambda A$, y de ahí es un ideal esencial en $e_\lambda A$. El hecho de que los e_λ sean mutualmente ortogonales no lleva a $e_\lambda A \cap A \subseteq \varphi(A)$ para todo λ. Finalmente, por [10, Proposition 2.2.(v)], concluimos que, via φ, A es un producto subdirecto esencial de la familia de álgebras $\{e_\lambda A\}_{\lambda\in\Lambda}$. □

Sin mayor esfuerzo en la demostración de la implicación (i) $\Rightarrow$ (ii) en el teorema anterior, hemos obtenido el siguiente resultado, el cual es una generalización de [17, Lemma 8].

Corolario 4.3.2. *Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de álgebras semiprimas distintas de cero. Si A un producto subdirecto esencial de esta familia, entonces $C_A = \prod_{\lambda\in\Lambda} C_{A_\lambda}$. En particular, $C_{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = C_{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \prod_{\lambda\in\Lambda} C_{A_\lambda}$, y como consecuencia, $Q_{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Q_{A_\lambda}$ y $Q_{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \prod_{\lambda\in\Lambda} Q_{A_\lambda}$.*

Como consecuencia, teniendo en cuenta la Proposición 3.4.3, obtenemos que

Corolario 4.3.3. *La clausura central y el centroide extendido de $c_{00}, c_0, c, \ell^p (1 \leq p \leq \infty)$ es el álgebra $s := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de todas las sucesiones en $\mathbb{K}$ dotada de las operaciones de álgebra coordenada a coordenada.*

4.3.1. Caracterización de las álgebras π-descomponibles.

Como una importante consecuencia del π-Teorema vamos a encontrar una caracterización de las álgebras π-descomponibles que completa la obtenida en [10, Theorem 2.7]. Recuérdese que un álgebra A es π-*atómica* si para cada ideal π-cerrado no nulo I de A existe un ideal π-cerrado minimal J de A tal que $J \subseteq I$.

Teorema 4.3.4. *Para un álgebra A distinta de cero y con anulador cero las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A es π-descomponible.

(ii) A es un producto subdirecto esencial de una familia de álgebras primas distintas de cero.

(iii) A es semiprima y C_A es un producto directo de cuerpos.

(iv) A es semiprima y $\mathcal{B}_A$ es un álgebra de Boole atómica.

(v) A es semiprima y π-atómica.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Es consecuencia de la Proposiciones 1.8.7 y 1.5.2.(ii), teniendo en cuenta que $\mathbf{M}_A^\pi = \{\mathrm{Ann}(m) \ : \ m \in \mathbf{m}_A^\pi\}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Supongamos que A es un producto subdirecto esencial de una familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de álgebras primas distintas de cero. Se sigue del Corolario 4.3.2 que $C_A = \prod_{\lambda\in\Lambda} C_{A_\lambda}$. Ahora, teniendo en cuenta que, por [21], el centroide extendido de un álgebra semiprima es un cuerpo si, y solo si, es un álgebra prima.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supongamos que C_A es un producto directo de cuerpos. Como 0 y 1 son los únicos idempotentes en un cuerpo, se sigue que $\mathcal{B}_A$ es isomorfo a un producto directo del retículo $\{0, 1\}$, y de ahí $\mathcal{B}_A$ es un álgebra de Boole atomica. (iv) $\Rightarrow$ (v) Es consecuencia del π-Teorema.

(v) $\Rightarrow$ (i) Supongamos ahora que A es semiprima y π-atómica. Supongamos que $\pi{-}\mathrm{Rad}(A) \neq 0$. Por ser π atómica, existe J un ideal π-cerrado minimal de A tal que $J \subseteq \pi{-}\mathrm{Rad}(A)$. Puesto que $\mathrm{Ann}(J)$ es un ideal π-cerrado maximal, se tiene que, $J \subseteq \pi{-}\mathrm{Rad}(A) \subseteq \mathrm{Ann}(J)$ por la Proposición 1.4.4. (ii), $J = 0$ lo cual es una contradicción. La conclusión se obtiene ahora usando la Nota 1.3.4.(2). □

La importancia de este resultado radica en que la π-descomponibilidad descansa exclusivamente sobre las propiedades del centroide extendido. Así por ejemplo, dado que Q_A es centralmente cerrada, obtenemos, como consecuencia del Teorema 4.3.4, el siguiente resultado.

Corolario 4.3.5. *Para un álgebra A semiprima distinta de cero las siguientes afirnaciones son equivalentes:*

(i) A es π-descomponible.

(ii) Q_A *es* π*-descomponible.*

Finalmente la relación entre los centroides extendidos de A, $\mathcal{M}(A)$ y $\mathcal{M}^\sharp(A)$ dada en el Teorema 3.6.3 y el Corolario 3.6.4 también permite obtener que

Corolario 4.3.6. *Para un álgebra* A *m.s.p. distinta de cero las siguientes afirnaciones son equivalentes:*

(i) A *es* π*-descomponible.*

(ii) $\mathcal{M}(A)$ *es* π*-descomponible.*

(iii) $\mathcal{M}^\sharp(A)$ *es* π*-descomponible.*

Para finalizar, y puesto que toda álgebra finito dimensional es π-atómica, veamos que podemos establecer una nueva consecuencia del Teorema 4.3.4

Corolario 4.3.7. *Sea* A *un álgebra finito dimensional con anulador cero. Entonces* A *es* π*-descomponible si, y sólo si,* A *es semiprima.*

4.4. Álgebras π-complementadas

Diremos que un ideal π-cerrado I de A es π-*complementado* en A si existe un ideal π-cerrado J de A, llamado π-*complemento* de I, tal que

$$A = I \oplus J$$

Diremos que A es un álgebra π-*complementada* cuando todos los ideales π-cerrados de A son π-complementados en A.

Los ejemplos más sencillos de álgebras complementadas son las álgebras nulas y las álgebras con anulador cero que coinciden con su zócalo (cf. [10, Proposition 5.6]).

Conviene subrayar el carácter minimal de la π-clausura para la complementariedad. Para este menester usamos el siguiente resultado.

Proposición 4.4.1. *Sea* A *un álgebra con anulador cero y sea* $\sim$ *una operación de clausura en* $\mathcal{I}_A$ *satisfaciendo que* $\mathcal{I}_A^\pi \subseteq \mathcal{I}_A^\sim$*. Si* A *es* $\sim$*-complementada, entonces* A *es* π*-complementada.*

Demostración. Sea $I \in \mathcal{I}_A^\pi$, por hipótesis $I \in \mathcal{I}_A^\sim$ y por tanto, existe $J \in \mathcal{I}_A^\sim$ tal que $A = I \oplus J$. Por la Proposición 1.3.10 se sigue que J es π-cerrado. □

En particular,

Proposición 4.4.2. *Sea* $(A, \|\ .\ \|)$ *un álgebra normada e* I *un ideal de* A*. Entonces* $I \subseteq \overline{I}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{I}$*.*

Demostración. Basta observar que $\overline{I}^{\|\cdot\|}\mathrm{Ann}(I)+\mathrm{Ann}(I)\overline{I}^{\|\cdot\|}=0$ y por tanto $\overline{I}^{\|\cdot\|}\subseteq\overline{I}$. □

y por tanto

Corolario 4.4.3. *Sea $(A,\|\ .\ \|)$ un álgebra con anulador cero. Si A es $\|\ .\ \|$-complementada, entonces A es π-complementada.*

Demostración. Basta recordar que por la Proposición 4.4.2, $\mathcal{I}_A^{\pi}\subseteq\mathcal{I}_A^{\|\cdot\|}$ y aplicar la Proposición 4.4.1

□

4.4.1. Aditividad de la π-clausura

Caractericemos ahora la π-complementación en términos de la propiedad de π-aditividad, completando la caracterización obtenida en [10, Proposition 5.3].

Proposición 4.4.4. *Sea A un álgebra. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *A es π-complementada*

(ii) *$A=\overline{I}\oplus\mathrm{Ann}(I)$ para cada ideal I de A.*

(iii) *A es semiprima, e $I+J$ es un ideal π-cerrado de A para todo I,J ideales π-cerrados de A.*

(iv) *A es semiprima, y $\mathrm{Ann}(I\cap J)=\mathrm{Ann}(I)+\mathrm{Ann}(J)$ para todo I,J ideales π-cerrados de A.*

(v) *A es semiprima, y la π-clausura en A es aditiva.*

En este caso, todo ideal π-cerrado (resp. π-cerrado minimal) I de A es un álgebra π-complementada (resp. prima), y

$$\mathcal{I}_A^{\pi}=\{J\oplus W\ :\ J\in\mathcal{I}_I^{\pi},W\in\mathcal{I}_{\mathrm{Ann}(I)}^{\pi}\}.$$

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Dado un ideal I de A, existe un ideal π-cerrado J de A tal que $A=\overline{I}\oplus J$. Por la Proposición 1.3.10 vemos que $J=\mathrm{Ann}(\overline{I})=\mathrm{Ann}(I)$, y por tanto

$$A=\overline{I}\oplus\mathrm{Ann}(I).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). La semiprimidad es consecuencia de la Proposición 1.4.4. Para probar el resto, supongamos primero que I,J son ideales π-cerrados de A tal que $I\cap J=0$. Entonces $J\subseteq\mathrm{Ann}(I)$, y en particular J es un ideal de $\mathrm{Ann}(I)$. Como, hemos supuesto que $A = I \oplus \mathrm{Ann}(I)$, por la Proposición 1.7.2.(ii) tenemos que J es un ideal π-cerrado de $\mathrm{Ann}(I)$, y $I \oplus J$ es un ideal π-cerrado de A en este caso. Ahora, tomamos de forma arbitraria I, J ideales π-cerrados de A. Teniendo en cuentas que $A = I \oplus \mathrm{Ann}(I)$, los apartados (iii) y (ii) de la Proposición 1.7.2 nos permite escribir $J = J_0 \oplus J_1$, donde J_0 y J_1 son ideales π-cerrados de A contenidos en I y $\mathrm{Ann}(I)$ respectivamente. Por tanto $I + J = I + (J_0 \oplus J_1) = I \oplus J_1$, la primera parte del argumento implica que $I + J$ es un ideal π-cerrado de A, como queríamos.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Para todo I, J ideales π-cerrados de A, usando (iii) para los ideales π-cerrados $\mathrm{Ann}(I), \mathrm{Ann}(J)$ tenemos que

$$\mathrm{Ann}(I) + \mathrm{Ann}(J) = \overline{\mathrm{Ann}(I) + \mathrm{Ann}(J)},$$

y así

$$\mathrm{Ann}(I) + \mathrm{Ann}(J) = \mathrm{Ann}(\overline{I} \cap \overline{J}) = \mathrm{Ann}(I \cap J).$$

(iv) $\Rightarrow$ (v). Para I, J ideales de A, usando (iv) a los ideales π-cerrados $\mathrm{Ann}(I), \mathrm{Ann}(J)$ tenemos que

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I) \cap \mathrm{Ann}(J)) = \overline{I} + \overline{J},$$

y así $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(I + J)) = \overline{I} + \overline{J}$, esto es $\overline{I + J} = \overline{I} + \overline{J}$.

(v) $\Rightarrow$ (i). Para cada ideal π-cerrado I de A, por la Proposición 1.4.4, vemos que

$$A = \overline{I \oplus \mathrm{Ann}(I)} = \overline{I} \oplus \overline{\mathrm{Ann}(I)} = I \oplus \mathrm{Ann}(I).$$

Así A es un álgebra π-complementada.

Ahora, supongamos que A satisface las condiciones equivalentes y supongamos que I es un ideal π-cerrado de A. Como $A = I \oplus \mathrm{Ann}(I)$, por la Proposición 1.4.3, $\mathcal{I}_I = \ell^{\mathcal{I}_A}(I)$ y $\mathcal{I}_I^\pi = \ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$. Además, por la Proposición 1.7.2, tenemos que $\mathcal{I}_A^\pi = \{J \oplus W \,:\, J \in \mathcal{I}_I^\pi, W \in \mathcal{I}_{\mathrm{Ann}(I)}^\pi\}$. En virtud de la Proposición 1.4.3, para cada ideal J de I, $\mathrm{Ann}_I(J) = \mathrm{Ann}(J) \cap I$ y $\overline{J}^I = \overline{J} \cap I$, y usando ambas igualdades y que podemos ver que $\overline{J}$ es un ideal de A

$$I = I \cap A = I \cap (\overline{J} \oplus \mathrm{Ann}(J)) = (\overline{J} \cap I) \oplus (I \cap \mathrm{Ann}(J)) = \overline{J}^I \oplus \mathrm{Ann}_I(J).$$

Así, I es un álgebra π-complementada. La primidad de cada átomo es consecuencia del Corolario 1.7.5.

□

Las cosas van bien también para el cociente

Corolario 4.4.5. *Sea A un álgebra π-complementada y sea I un ideal π-cerrado de A. Entonces:*

(i) A/I *es un álgebra* π*-complementada,* $\mathcal{I}^{\pi}_{A/I} = \{q(J) \,:\, J \in \ell^{\mathcal{I}^{\pi}_A}(\mathrm{Ann}(I))\}$,

(ii) $\pi-\mathrm{Soc}(A/I) = \pi-\mathrm{Soc}(A)/I$, *y* $\pi-\mathrm{Rad}(A/I) = \pi-\mathrm{Rad}(A)/I$.

Demostración. En virtud de la Proposición 4.4.4 tenemos $A = I \oplus \mathrm{Ann}(I)$. Esta descomposición nos da el isomorfismo $q' : \mathrm{Ann}(I) \cong A/I$, y la Proposición 4.4.4 nos asegura que A/I es un álgebra π-complementada, y

$$\mathcal{I}^{\pi}_{A/I} = \{q'(J) \,:\, J \in \mathcal{I}^{\pi}_{\mathrm{Ann}(I)}\} = \{q(J) \,:\, J \in \ell^{\mathcal{I}^{\pi}_A}(\mathrm{Ann}(I))\},$$

donde $q : A \to A/I$ es la aplicación cociente.

Además, por el Corolario 1.7.4 deducimos que

$$q(\pi-\mathrm{Soc}(A)) = q(\pi-\mathrm{Soc}(\mathrm{Ann}(I)))$$

y

$$q(\pi-\mathrm{Rad}(A)) = q(\pi-\mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}(I))).$$

Como

$$q(\pi-\mathrm{Soc}(\mathrm{Ann}(I))) = q'(\pi-\mathrm{Soc}(\mathrm{Ann}(I))) = \pi-\mathrm{Soc}(A/I),$$

y

$$q(\pi-\mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}(I))) = q'(\pi-\mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}(I))) = \pi-\mathrm{Rad}(A/I),$$

concluimos que

$$q(\pi-\mathrm{Soc}(A)) = \pi-\mathrm{Soc}(A/I) \;\text{ y }\; q(\pi-\mathrm{Rad}(A)) = \pi-\mathrm{Rad}(A/I).$$

□

Ese resultado permite clarificar cuáles de las subálgebras del álgebra s de sucesiones es π-complementada.

Corolario 4.4.6. *Sea* A *una subálgebra del álgebra de sucesiones* s *satisfaciendo que los ideales de* A

$$I = \{\{a_n\} \in A \,:\, a_{2n} = 0 \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

y

$$\mathrm{Ann}(I) = \{\{a_n\} \in A \,:\, a_{2n-1} = 0 \textit{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

son tales que $A \neq I \oplus \mathrm{Ann}(I)$. *Entonces* A *no es* π*-complementada. En particular,* c *no es* π*-complementada.*

La caracterización de la π-complementación en el caso finito dimensional no puede ser más elegante.

Corolario 4.4.7. *Sea* A *un álgebra finito dimensional.* A *es un álgebra* π*-complementada si, y sólo si* A *tiene anulador cero y* $A = \pi - \mathrm{Soc}(A)$.

Demostración. Supongamos que $A \neq 0$. Si A es un álgebra π-complementada, como toda cadena descendente de ideales π-cerrados es un cadena de subespacios de dimensión decreciente, se sigue que A tiene un ideal π-cerrado minimal. Tomemos como ideal π-cerrado minimal I_1 de A. Si $I_1 = A$, hemos terminado. En otro caso, por la Proposición 4.4.4, $A = I_1 \oplus \mathrm{Ann}(I_1)$, $\mathrm{Ann}(I_1)$ es un álgebra π-complementada distinta de cero y, por la Proposición 1.7.3, $\mathbf{m}_A^\pi = \{I_1\} \cup \mathbf{m}^\pi_{\mathrm{Ann}(I_1)}$. Iterando el proceso, la finita dimensión nos asegura la descomposición deseada. El recíproco no necesita restricción sobre la dimensión, véase el Corolario 1.7.7.

□

4.4.2. El π-Teorema y las álgebras π-complementadas.

Comenzamos extrayendo una nueva caracterización de las álgebras π-complementadas, consecuencia del π-Teorema.

Teorema 4.4.8. *Sea A un álgebra semiprima. A es π-complementada si, y solo si, $\mathcal{B}_A \subseteq \Gamma_A$.*

En caso afirmativo, para cada $e \in \mathcal{B}_A$, eA es π-complementada y

$$\mathcal{I}^\pi_{eA} = \{efA \,:\, f \in \mathcal{B}_A\}.$$

Demostración. Supongamos que A es un álgebra π-complementada. Para cada $e \in \mathcal{B}_A$ tenemos

$$A = (eA \cap A) \oplus \mathrm{Ann}(eA \cap A) = (eA \cap A) \oplus ((1-e)A \cap A),$$

de ahí $eA = eA \cap A$, y en particular $eA \subseteq A$. Así $\mathcal{B}_A \subseteq \Gamma_A$. Recíprocamente, si $\mathcal{B}_A \subseteq \Gamma_A$, entonces $\mathcal{I}^\pi_A = \{eA \,:\, e \in \mathcal{B}_A\}$ y $A = eA \oplus (1-e)A$ para cada $e \in \mathcal{B}_A$. Así A es π-complementada.

Tomemos $e \in \mathcal{B}_A$. Puesto que $\mathcal{B}_A \subseteq \Gamma_A$, para cada $f \in \mathcal{B}_{eA}$ tenemos

$$f(eA) = e(fA) \subseteq eA.$$

Por tanto $\mathcal{B}_{eA} \subseteq \Gamma_{eA}$, y concluimos que eA es π-complementada y $\mathcal{I}^\pi_{eA} = \{efA \,:\, f \in \mathcal{B}_A\}$ se cumple aplicando el Teorema 4.1.2.(i).

□

Corolario 4.4.9. *Toda álgebra semiprima A centralmente cerrada es π-complementada y $\mathcal{I}^\pi_A = \{eA \,:\, e \in \mathcal{B}_A\}$.*

Una consecuencia directa de los Teoremas 3.4.3 y 3.4.6, y teniendo en cuenta el Corolario 4.4.9, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.4.10. *Si A es un álgebra semiprima:*

(i) C_A es un álgebra π-complementada y $\mathcal{I}^\pi_{C_A} = \{eC_A \,:\, e \in \mathcal{B}_A\}$.

(ii) Q_A *es un álgebra* π*-complementada y* $\mathcal{I}^{\pi}_{Q_A} = \{eQ_A : e \in \mathcal{B}_A\}$.

Otra consecuencia del Teorema 4.4.8 es el siguiente resultado.

Corolario 4.4.11. *Sea* A *un álgebra semiprima. Entonces*

(i) Si $\{B_\alpha\}$ *es una familia de subálgebras* π*-complementadas de* Q_A *que contienen a* A*, entonces* $\cap B_\alpha$ *es un álgebra* π*-complementada.*

(ii) Para cada subálgebra B *de* Q_A *que contiene a* A*, existe una subálgebra* π*-complementada mas pequeña de* Q_A *que contiene a* B*.*

(iii) $A^\pi := \sum_{e\in\mathcal{B}_A} eA$ *es la mas pequeña subálgebra* π*-complementada de* Q_A *que contiene a* A*.*

Demostración. (i) Sea $\{B_\alpha\}$ una familia de subálgebras π-complementadas de Q_A que contienen a A. Por la Proposición 3.4.3, $C_{B_\alpha} = C_A$ para cada α, y $C_{\cap B_\alpha} = C_A$. Dado $e \in \mathcal{B}_A$, por el Teorema 4.4.8, tenemos que $eB_\alpha \subseteq B_\alpha$ para cada α, y en consecuencia $e(\cap B_\alpha) \subseteq \cap B_\alpha$. Por tanto, aplicando de nuevo el Teorema 4.4.8, $\cap B_\alpha$ es π-complementada.

(ii) Sea B una subálgebra de Q_A que contiene a A. Por el Corolario 4.4.10, la familia de todas las subálgebras π-complementadas de Q_A que contienen a B es no vacia. Ahora, por el apartado (i), la intersección de esta familia es un álgebra π-complementada. Claramente, este álgebra es la subálgebra π-complementada mas pequeña de Q_A que contiene a B.

(iii) Es claro que $A^\pi := \sum_{e\in\mathcal{B}_A} eA$ es una subálgebra de Q_A que contiene a A. Por la Proposición 3.4.3, $C_{A^\pi} = C_A$. Además, para cada $e \in \mathcal{B}_A$, podemos ver que $eA^\pi \subseteq A^\pi$, y de ahí A^π es un álgebra π-complementada por el Teorema 4.4.8. Finalmente, dada una subálgebra π-complementada B de Q_A que contiene a A, teniendo de nuevo en mente los Teoremas 3.4.6 y 4.4.8, vemos que $eA \subseteq eB \subseteq B$ para todo $e \in \mathcal{B}_A$, y en consecuencia $A^\pi \subseteq B$. Así A^π es la mas pequeña subálgebra π-complementada de Q_A que contiene a A. □

El álgebra A^π del corolario anterior asociada a cada álgebra semiprima A aparece en los libros con el nombre de *clausura idempotente* de A [44, §.32.5].

Corolario 4.4.12. *Un álgebra semiprima* A *es* π*-complementada si, y solo si,* $A = A^\pi$*.*

Nota 4.4.13. Existen álgebras semiprimas tales que eA es π-complementada, pero A no es π-complementada. Sea A un álgebra de todas las sucesiones casi-constantes en $\mathbb{K}$ dotadas de las operaciones del álgebra coordenada a coordenada. Es inmediato que A es un álgebra semiprima asociativa, conmutativa y con unidad. Se puede ver, teniendo en cuenta la Proposición 3.4.3 y el Corolario 4.3.3, que $C_A = Q_A$ es el álgebra de todas las sucesiones en $\mathbb{K}$ dotadas de las operaciones del álgebra coordenada a coordenada. Parca cada subconjunto no vacío J de

$\mathbb{N}$, consideramos la sucesión e_J donde $e_J(n) = 1$ si $n \in J$, y $e_J(n) = 0$ en otro caso. Es claro que, para J con cardinal finito n, e_J es un idempotente en C_A tal que $e_J A \cong \mathbb{K}^n$, y de ahí $e_J A$ es π-complementada. Sin embargo, A está en las condiciones del Corolario 4.4.6.

Como ya hemos advertido tanto las álgebras π-complementadas como las álgebras π descomponibles (con anulador cero) son álgebras semiprimas. En [10, Example 5.12] se prueba que el álgebra $\mathbb{M}$ de todas las clases de equivalencia (iguales c.p.d.) de funciones de Lebesgue medibles en $[0,1]$ con la operación punto a punto es un álgebra π-radical (por tanto no π-descomponible) y π-complementada. También existen álgebras π-descomponibles que no son π-complementadas: c π-descomponible (Ejemplo 1.3.2) y no es π-complementada (Corolario 4.4.6). Terminamos esta sección con una caracterización de las álgebras π-complementadas y π-descomponibles que se obtiene como consecuencia del teorema de caracterización de la π-complementación (Teorema 4.4.8) y de la π-descomponibilidad (Teorema 4.3.4) y que fue obtenida previamente en [10, Theorem 4.9].

Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de álgebras. Para cada subconjunto $J \subseteq \Lambda$, definimos la proyección $p_J : \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ tal que $p_\lambda p_J = p_\lambda$ cuando $\lambda \in J$ y $p_\lambda p_J = 0$ en otro caso. Un producto subdirecto se dice *hereditario* si la proyección $p_J(A) \subseteq A$, para todo J subconjunto de Λ.

Es obvio que todo producto subdirecto hereditario es de hecho esencial, luego teniendo en cuenta el Teorema 4.3.1, A es un producto subdirecto esencial de una familia de álgebras primas $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ si, y solo sí, C_A es un producto de cuerpos indizados en Λ. Por tanto los idempotentes de C_A pueden caracterizarse como aquellos elementos del producto de la forma e_Γ tal que $e_\Gamma = (c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ con $c_\lambda = 1$ si $\lambda \in \Gamma$ y 0 en otro caso. Así pues, para cada $a \in A$, $p_\Gamma(a)$ puede verse como $e_\Gamma a$. Con esta identificación es claro que $e_\Gamma \in \Gamma_A$ si, y sólo si $A \leq \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es un producto subdirecto hereditario. Así pues, combinando los Teoremas 4.3.4 y 4.4.8 obtenemos el siguiente resultado obtenido en [10] con otra demostración.

Proposición 4.4.14. *[10, Theorem 5.9] Un álgebra distinta de cero es π-complementada y π-descomponible si, y solo si, es un producto subdirecto hereditario de álgebras primas distintas de cero.*

En [10] se dan numerosos ejemplos de álgebras π-descomponibles y π-complementadas. Nosotros sólo señalamos algunos de estos ejemplos en el siguiente Corolario

Corolario 4.4.15. *[10, Corollary 5.10] c_0 y ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ son álgebras π-complementadas y π-descomponibles.*

4.4.3. Relación entre la π-complementación de un álgebra y de su unitización.

Obtendremos los resultados de esta sección usando dos técnicas: La descripción de los π-cerrados de la unitización obtenida en el capítulo II o el Teorema 4.4.8 de caracterización.

Teorema 4.4.16. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces*

(i) Si A tiene unidad entonces

$$A^1 \text{ es } \pi - \text{complementada} \Longleftrightarrow A \text{ es } \pi - \text{complementada.}$$

(ii) Si A no tiene unidad entonces

$$A^1 \text{ es } \pi - \text{complementada} \Longleftrightarrow A \text{ es } \pi - \text{complementada e } \mathcal{I}_A^\pi \subseteq \mathcal{M}_A \cup \mathcal{N}_A \ .$$

Demostración. (i) Supongamos que A tiene unidad 1.

Método 1 (con la descripción de los π-cerrados):

Supongamos que A^1 es $\pi-$complementada y sea $I \in \mathcal{I}_A^\pi$. Por hipótesis, usando la Proposición 1.6.9.(i), tenemos que $A^1 = I \oplus \mathrm{Ann}_{A^1}(I) = I \oplus (\mathrm{Ann}_A(I))' = I \oplus \mathrm{Ann}_A(I) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1}-1)$. Dado que $A^1 = A \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1}-1)$, deducimos que $A = I \oplus \mathrm{Ann}_A(I)$, como deseábamos.

Recíprocamente supongamos que A es π-complementada. Sea $I \in \mathcal{I}_{A^1}^\pi$. En virtud de la Proposición 1.6.9.(ii), caben dos posibilidades: $I \in \mathcal{I}_A^\pi$ o bien $I = J'$ con $J \in \mathcal{M}_A$. Si $I \in \mathcal{I}_A^\pi$, entonces usando que A es π-complementada, tenemos $A^1 = A \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1}-1) = I \oplus \mathrm{Ann}_A(I) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1}-1) = I \oplus (\mathrm{Ann}_A(I))'$, y por tanto por la Proposición 1.6.9.(i),$A^1 = I \oplus \mathrm{Ann}_{A^1}(I)$. Por el contrario, si $J \in \mathcal{M}_A$, entonces

$$A^1 = A \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1}-1) = J \oplus \mathrm{Ann}_A(J) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1}-1) = J' \oplus \mathrm{Ann}_A(J) = I \oplus \mathrm{Ann}_A(J).$$

De nuevo usando la Proposición 1.6.9.(i), $A^1 = I \oplus \mathrm{Ann}_{A^1}(I)$.

Método 2 (con el π-Teorema):

Se sigue de la Proposición 3.5.2 que, para cada álgebra semiprima A con unidad tenemos que

$$\mathcal{B}_{A^1} = \{e, \mathbf{1}-e \, : \, e \in \mathcal{B}_A\} \ \text{ y } \ \Gamma_{A^1} = \{\lambda + \alpha\mathbf{1} \, : \, \lambda \in \Gamma_A, \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Por tanto $\mathcal{B}_A \subseteq \Gamma_A$ si y solo si $\mathcal{B}_{A^1} \subseteq \Gamma_{A^1}$.

(ii) Veamos ahora el caso sin unidad.

Método 1 (con la descripción de los π-cerrados)

Supongamos que A^1 es π-complementada y que existe $I \in \mathcal{I}_A^\pi$ tal que $I \notin \mathcal{M}_A \cup \mathcal{N}_A$. En particular $I \notin \mathcal{N}_A$, por tanto en virtud de la Proposición 1.6.7, tenemos que $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) = \mathrm{Ann}_A(I)$, y de ahí

$$A^1 = I \oplus \mathrm{Ann}_{A^1}(I) = I \oplus \mathrm{Ann}_A(I) \subseteq A,$$

con lo que llegamos a una contradicción. Así $\mathcal{I}_A^\pi \subseteq \mathcal{M}_A \cup \mathcal{N}_A$. Si $I \in \mathcal{I}_A^\pi \cap \mathcal{M}_A$, usando la Proposición 1.6.11 tenemos que $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) = \mathrm{Ann}_A(I)'$, de ahí

$$A^1 = I' \oplus \mathrm{Ann}_{A^1}(I') = I' \oplus \mathrm{Ann}_A(I),$$

y así $A = I \oplus \mathrm{Ann}_A(I)$. Si $I \in \mathcal{I}_A^\pi \cap \mathcal{N}_A$, entonces usando la Proposición 1.6.7 vemos que $\mathrm{Ann}_{A^1}(I) = \mathrm{Ann}_A(I)'$, por lo tanto

$$A^1 = I \oplus \mathrm{Ann}_{A^1}(I) = I \oplus \mathrm{Ann}_A(I)',$$

y en consecuencia $A = I \oplus \mathrm{Ann}_A(I)$.Por lo tanto, en cualquier caso $A = I \oplus \mathrm{Ann}_A(I)$ para cada $I \in \mathcal{I}_A^\pi$, y así resulta que A es π-complementada.

Recíprocamente, supongamos que A es π-complementada y $\mathcal{I}_A^\pi \subseteq \mathcal{M}_A \cup \mathcal{N}_A$. Nótese que, por las Proposiciones 1.6.10 y 1.6.11.(ii), tenemos que

$$\mathcal{I}_{A^1}^\pi = (\mathcal{I}_A^\pi \cap \mathcal{N}_A) \bigcup \{I' \,:\, I \in \mathcal{I}_A^\pi \cap \mathcal{M}_A\}.$$

Si $U \in \mathcal{I}_A^\pi \cap \mathcal{N}_A$, entonces por la Proposición 1.6.7, tenemos que $\mathrm{Ann}_{A^1}(U) = \mathrm{Ann}_A(U)'$. Además, si v es una unidad anulador modular de U, entonces

$$A^1 = A \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1} - v) = U \oplus \mathrm{Ann}_A(U) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1} - v)$$

$$= U \oplus \mathrm{Ann}_A(U)' = U \oplus \mathrm{Ann}_{A^1}(U).$$

En segundo lugar supongamos que $U = I'$ para $I \in \mathcal{I}_A^\pi \cap \mathcal{M}_A$. Por la Proposición 1.6.11, $\mathrm{Ann}_{A^1}(U) = \mathrm{Ann}_A(I)$. Además, si u es una unidad modular de I, entonces

$$A^1 = A \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1} - u) = I \oplus \mathrm{Ann}_A(I) \oplus \mathbb{K}(\mathbf{1} - u) =$$

$$I' \oplus \mathrm{Ann}_A(I) = U \oplus \mathrm{Ann}_{A^1}(U).$$

Así tenemos que A^1 es π-complementada.

Método 2 (con el π-Teorema):

(i) $\Rightarrow$ (ii). Por el Teorema 3.5.10, $C_A = C_{A^1}$, y de ahí $\mathcal{B}_A = \mathcal{B}_{A^1}$. Como, por el π-Teorema, $\mathcal{B}_{A^1} \subseteq \Gamma_{A^1}$, tenemos que $\mathcal{B}_A \subseteq \Gamma_{A^1}$. Aplicando ahora que por la Proposición 3.5.14, $\Gamma_{A^1} \subseteq \Gamma_A$, $\mathcal{B}_A \subseteq \Gamma_A$, y de ahí , por el Teorema 4.4.8, podemos afirmar que A es π-complementada

(ii) $\Rightarrow$ (i). Teniendo en cuenta el Teorema 4.4.8 y el Teorema 3.5.10 afirmamos que $\mathcal{B}_A \subseteq \Gamma_A$ y, para cada $e \in \mathcal{B}_{A^1} = \mathcal{B}_A$, eA es un ideal π-cerrado de A y $\mathrm{Ann}_A(eA) = (\mathbf{1} - e)A$. Por hipótesis, o bien eA es modular o bien $(\mathbf{1} - e)A$ es modular. Si eA es modular, entonces, por la Proposición 3.5.13, $\mathbf{1}-e \in A$, de ahí $e = \mathbf{1}-(\mathbf{1}-e) \in A^1$, y $e \in \Gamma_{A^1}$. Análogamente, si $(\mathbf{1}-e)A$ es modular, obtenemos que $\mathbf{1} - e \in \Gamma_{A^1}$, y en consecuencia $e \in \Gamma_{A^1}$. Por lo tanto , en cualquier caso, tenemos que $e \in \Gamma_{A^1}$. Así $\mathcal{B}_{A^1} \subseteq \Gamma_{A^1}$ y, por el Teorema 4.4.8, concluimos que A^1 es π-complementada.

□

Este segundo método también permite reencontrar la descripción de los π-cerrados de la unitización en el caso con unidad. En efecto, nótese que, para cada $e \in \mathcal{B}_A$ tenemos que $eA^1 = eA$ y

$$(\mathbf{1} - e)A^1 = [(\mathbf{1} - 1) + (1 - e)]A^1 = [(1 - e)A \oplus (\mathbf{1} - 1)\mathbb{K}] = ((1 - e)A)'.$$

Ahora, teniendo en cuenta el Corolario 1.6.4, se obtiene, simplemente aplicando el π-Teorema, que

$$\mathcal{I}^{\pi}_{A^1} = \mathcal{I}^{\pi}_{A} \bigcup \{I' \,:\, I \in \mathcal{I}^{\pi}_{A}\}.$$

La condición adicional en el caso sin unidad es esencial ya que, teniendo en cuenta el π-Teorema, es claro que el álgebra A del ejemplo 3.5.16 es π-complementada, pero A^1 no lo es (véase Nota 4.4.13).

El lenguaje empleado en el segundo método nos permite expresar otra caracterización del hecho de que A^1 sea π-complementada.

Para algún álgebra semiprima A, $\mathcal{B}_A$ se convierte en un anillo Booleano bajo una nueva operación de suma $e \oplus f = e + f - 2ef$ pero con la misma operación de multiplicación. Es bien conocido que un ideal $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}_A$ es maximal si y solo si para cada $e \in \mathcal{B}_A$ o bien $e \in \mathcal{P}$ o $\mathbf{1} - e \in \mathcal{P}$ pero no ambos.

Proposición 4.4.17. *Sea A un álgebra semiprima distinta de cero sin unidad.Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A^1 es π-complementada.

(ii) El conjunto de todos los idempotentes de Z_A es un ideal maximal de $\mathcal{B}_A$.

Demostración. (i) ⇒ (ii). Por el Teorema 3.5.10, $C_A = C_{A^1}$, y de ahí $\mathcal{B}_A = \mathcal{B}_{A^1}$. Además, por el Corolario 3.5.12, el conjunto de todos los idempotentes en Z_A coincide con $\mathcal{B}_A \cap A$ (consideramos $\mathcal{B}_A$ y A dentro de Q_{A^1}). Para probar que $\mathcal{B}_A \cap A$ es un ideal de $\mathcal{B}_A$ solo necesita probarse la inclusion $\mathcal{B}_A(\mathcal{B}_A \cap A) \subseteq \mathcal{B}_A \cap A$, ya que la estabilidad de $\mathcal{B}_A \cap A$ con respecto a la operación $\oplus$ es obvia.

Sea $e \in \mathcal{B}_A$, considerando $\mathcal{B}_A$ dentro de Q_{A^1}, tenemos que, por Teorema 4.4.8, $e = e\mathbf{1} \in A^1$. Supongamos que $e \notin A$ y escribimos $e = a + \alpha\mathbf{1}$ para convenientes $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Como $e = e^2 = a^2 + 2\alpha a + \alpha^2\mathbf{1}$, deducimos que $\alpha = 1$, y de ahí $\mathbf{1} - e = -a \in A$. Así, cada $e \in \mathcal{B}_A$, o $e \in A$ o $\mathbf{1} - e \in A$. Supongamos que $e \in \mathcal{B}_A$ y $f \in \mathcal{B}_A \cap A$. Si $e \in A$, entonces claramente $ef \in \mathcal{B}_A \cap A$. De otra manera, por lo anterior tenemos que $\mathbf{1} - e \in A$, y de ahí $ef = f - (\mathbf{1} - e)f \in \mathcal{B}_A \cap A$. Así el conjunto de todos los idempotentes en Z_A, esto es, $\mathcal{B}_A \cap A$ es un ideal maximal de $\mathcal{B}_A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sea $e \in \mathcal{B}_{A^1}$. Por el Teorema 3.5.10 afirmamos que $e \in \mathcal{B}_A$. Por hipótesis, tenemos que o bien $e \in Z_A$ o bien $\mathbf{1} - e \in Z_A$ pero no ambas. Si $\mathbf{1} - e \in A$, de ahí $e = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - e) \in A^1$, y $e \in \Gamma_{A^1}$. Análogamente, si $e \in A$, obtenemos que $\mathbf{1} - e \in \Gamma_{A^1}$, y en consecuencia $e \in \Gamma_{A^1}$. Por lo tanto , en cualquier caso, tenemos que $e \in \Gamma_{A^1}$. Así $\mathcal{B}_{A^1} \subseteq \Gamma_{A^1}$ y, por el π-Teorema, concluimos que A^1 es π-complementada. $\square$

Recordemos que en la categoria de las álgebras asociativas existe una más grande álgebra asociativa con unidad que contiene al álgebra de partida B como ideal esencial : El álgebra de los multiplicadores de B (véase [2, Proposition 1.1.6]).

Definición 4.4.18. Sea B un álgebra asociativa. Un *doble centralizador* en B es una pareja (f, g) de aplicaciones lineales de B en B verificando las propiedades

$$f(ab) = f(a)b, \quad ag(b) = f(a)b, \quad g(ab) = ag(b),$$

para cualesquiera $a, b \in B$. El conjunto $Mult(B)$ de los doble centralizadores en B con las operaciones definidas por

$$(f, g) + (f', g') = (f + f', g + g')$$

$$\alpha(f, g) = (\alpha f, \alpha g)$$

$$(f, g)(f', g') = (f \circ f', g' \circ g)$$

es un álgebra asociativa con unidad (Id_B, Id_B) que llamaremos el *álgebra de los multiplicadores* de B, y cuyo centro coincide con el centroide del álgebra B.

La propia álgebra B puede verse como una subálgebra de $Mult(B)$ vía la inmersión $a \to (L_a, R_a)$. Si además B es semiprima, el álgebra $Mult(B)$ es la más grande álgebra asociativa con unidad que extiende a B y que la contiene como ideal esencial. Como B es un ideal esencial de $\mathrm{Mult}(B)$, se sigue que $\mathrm{Mult}(B)$ es semiprima y $Q_s(B) = Q_s(\mathrm{Mult}(B))$ donde $C_B = C_{\mathrm{Mult}(B)}$ [27, Theorem 14.14]. $\mathrm{Mult}(B)$ puede verse como la subalgebra de $Q_s(B)$ dada por

$$\mathrm{Mult}(B) = \{q \in Q_s(B) \,:\, qB + Bq \subseteq B\}.$$

Por lo tanto $\Gamma_B \subseteq \mathrm{Mult}(B)$, y mas precisamente $\Gamma_B \subseteq Z_{\mathrm{Mult}(B)}$. Por otro lado, $\Gamma_{\mathrm{Mult}(B)}B = \Gamma_{\mathrm{Mult}(B)}\mathbf{1}B \subseteq \mathrm{Mult}(B)B \subseteq B$, y así $\Gamma_{\mathrm{Mult}(B)} \subseteq \Gamma_B$. Como $Z_{\mathrm{Mult}(B)} = \Gamma_{\mathrm{Mult}(B)}$, se sigue que $\Gamma_B = \Gamma_{\mathrm{Mult}(B)}$. Ahora, como consecuencia directa del Teorema 4.4.8 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.4.19. *Sea B un álgebras semiprima asociativa. Entonces B es π-complementada si, y solo si,* $\mathrm{Mult}(B)$ *es π-complementada.*

4.4.4. Relación entre la π-complementación de un álgebra y su álgebra de multiplicación.

Después del Teorema de Caracterización (Teorema 4.4.8), el estudio de la π-complementación pasa por el conocimiento del centroide y del centroide extendido. Para cualquier álgebra m.s.p. A, el hecho de que $C_A = C_{\mathcal{M}^\sharp(A)} = C_{\mathcal{M}(A)}$ (véanse el Teorema 3.6.3 y el Corolario 3.6.4) nos reduce el problema a considerar la relación entre $\Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(A)}$ y $\Gamma_{\mathcal{M}(A)}$. Para ello consideramos dichos centroides dentro de C_A. Con este propósito podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 4.4.20. *Sea A un álgebra m.s.p. Entonces* $\Gamma_{\mathcal{M}(A)} \subseteq \Gamma_A \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(A)}$.

Demostración. Sea $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{M}(A)}$. Como $\lambda\mathcal{M}(A) \subseteq \mathcal{M}(A)$, se sigue que

$$\lambda a = \lambda(\mathrm{Id_A}(a)) = (\lambda \mathrm{Id_A})(a) \in \mathcal{M}(A)(A) = A$$

para cada $a \in A$. Por tanto $\lambda A \subseteq A$, y de ahí $\lambda \in \Gamma_A$.

Ahora supongamos que $\lambda \in \Gamma_A$, y consideremos el conjunto

$$\mathcal{S} := \{F \in \mathcal{M}^\sharp(A) : \lambda F \in \mathcal{M}^\sharp(A)\}.$$

Es claro que $\mathcal{S}$ es una subálgebra de $\mathcal{M}^\sharp(A)$. Para cada $a \in A$, vemos que $\lambda L_a^A = L_{\lambda a}^A$ y $\lambda R_a^A = R_{\lambda a}^A$ pertenecen a $\mathcal{M}^\sharp(A)$, y de ahí L_a^A, R_a^A pertenecen a $\mathcal{S}$. Por tanto $\mathcal{S} = \mathcal{M}^\sharp(A)$, y en consecuencia $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(A)}$. □

Para cada álgebra asociativa y conmutativa A con anulador cero, es claro que la aplicación $a \mapsto L_a^A$ se convierte en un isomorfismo de álgebra de A en $\mathcal{M}^\sharp(A)$. Además, en el caso que A carece de unidad, la aplicación $x \mapsto L_x^A$ se convierte en un isomorfismo de álgebra de A^1 en $\mathcal{M}(A)$. Estos hechos, junto al Ejemplo 3.5.16, muestran que la inclusion $\Gamma_{\mathcal{M}(A)} \subseteq \Gamma_A$ puede ser estricta.

El álgebra de Albert (véase Ejemplo 2.1.1) muestra que el álgebra de multiplicación de un álgebra prima (y por tanto π-complementada) no tiene por que ser semiprima (y por tanto no puede ser π-complementada). Sin embargo, para álgebras m.s.p., por la Proposición 4.4.20, el Teorema 4.4.8 y el Teorema [8, Theorem 2.6], podemos obtener el siguiente corolario que fue obtenido en [13, Proposition 3.5] con otras técnicas.

Corolario 4.4.21. *Sea A un álgebra con anulador cero. Consideramos las siguientes condiciones:*

(i) $\mathcal{M}(A)$ *es π-complementada;*

(ii) A *es π-complementada;*

(iii) $\mathcal{M}^\sharp(A)$ *es π-complementada.*

Entonces (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Sea A un álgebra asociativa. Para cada $a, b \in A$, es usual denotar por $M_{a,b}^A$ al *operador bilátero de multiplicación* en A definido por $M_{a,b}^A(x) = axb$ para cada $x \in A$. Si A tiene unidad 1, es claro que $\mathrm{Id}_A = M_{1,1}^A$, $L_a^A = M_{a,1}^A$ y $R_a^A = M_{1,a}^A$ para cada $a \in A$, y en consecuencia

$$\mathcal{M}(A) = \{ \sum_{i=1}^{n} M_{a_i,b_i}^A \,:\, n \in \mathbb{N},\, a_i, b_i \in A \ (1 \leq i \leq n)\}.$$

Si A es un álgebra semiprima asociativa, si $A^{(1)}$ denota la subálgebra con unidad de $Q_s(A)$ generada por A, y si, para todo $a, b \in A^{(1)}$, $M_{a,b}^A$ denota la restricción de A en $M_{a,b}^{A^{(1)}}$, entonces

$$\mathcal{M}(A) = \{ \sum_{i=1}^{n} M_{a_i,b_i}^A \,:\, n \in \mathbb{N},\, a_i, b_i \in A^{(1)} \ (1 \leq i \leq n)\},$$

y

$$\mathcal{M}^\sharp(A) = \{ \sum_{i=1}^{n} M_{a_i,b_i}^A \,:\, n \in \mathbb{N},\, a_i, b_i \in A^{(1)}, \text{ y, para cada } i, \\ \text{ó } a_i \in A \text{ ó } b_i \in A\}.$$

Los ejemplos más importantes de álgebras m.s.p. son las álgebras semiprimas associativas [16, Section 4]. La Proposición 4.4.20 puede ser mejorada para el caso de álgebras asociativas con la ayuda de la teoría de identidades polinomiales generalizada [5].

Proposición 4.4.22. *Si B es un álgebra semiprima y asociativa, entonces*

$$\Gamma_B = \Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(B)}.$$

Demostración. Por la Proposición 4.4.20, $\Gamma_B \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(B)}$. Ahora para probar el recíproco fijemos $\lambda \in \Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(B)}$ y $a \in B$. Como $\lambda\mathcal{M}^\sharp(B) \subseteq \mathcal{M}^\sharp(B)$, tenemos en particular que $\lambda L_a^B \in \mathcal{M}^\sharp(B)$, y de ahí $\lambda L_a^B = \sum_{i=1}^n M_{a_i,b_i}^B$ para adecuados $n \in \mathbb{N}, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in B^{(1)}$ tal que, para cada i, ó $a_i \in B$ ó $b_i \in B$. Por tanto $\lambda ax = \sum_{i=1}^n a_i x b_i$ para cada $x \in B$, esto es

$$\phi(\mathbf{x}) := \lambda a \mathbf{x} 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x} b_i$$

es una identidad polinomial generalizada en B. Por [5, Proposition 6.3.13], $\phi = 0$, y así $\phi(1) = 0$, y por tanto

$$\lambda a = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in B.$$

Ahora, como a la hemos tomado de forma arbitraria en B, deducimos que $\lambda B \subseteq B$, esto es $\lambda \in \Gamma_B$. $\square$

Proposición 4.4.23. *Sea B es un álgebra semiprima asociativa sin unidad. Entonces la aplicación $\rho : \mathcal{M}(B^1) \to \mathcal{M}(B)$ es un isomorfismo de álgebras.*

Demostración. Por el Lema 3.5.1, ρ es un homomorfismo de álgebra de $\mathcal{M}(B^1)$ en $\mathcal{M}(B)$ con nucleo B^{ann}. Supongamos que $T \in B^{\mathrm{ann}}$, y escribimos $T = \sum_{i=1}^{n} M_{x_i,y_i}^{B^1}$ para convenientes $n \in \mathbb{N}$ y $x_i, y_i \in B^1$ $(1 \leq i \leq n)$. Como $T(B) = 0$, podemos ver B^1 como una subálgebra de $Q_s(B)$, podemos afirmar que $\Psi(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{x}y_i$ es una identidad polinomial generalizada en B. Por [5, Proposition 6.3.13], $\Psi = 0$, de ahí $\sum_{i=1}^{n} x_i q y_i = 0$ para cada $q \in Q_s(B)$, y en consecuencia $T = 0$. Por tanto $B^{\mathrm{ann}} = 0$, y se concluye la demostración. □

Corolario 4.4.24. *Sea B un álgebra semiprima asociativa.*

(i) B es π-complementada si, y solo si, $\mathcal{M}^\sharp(B)$ es π-complementada.

(ii) B^1 es π-complementada si, y solo si, $\mathcal{M}(B)$ es π-complementada

Demostración. (i) Esta afirmación es una consecuencia directa del Teorema 4.4.8, teniendo en cuenta el Corolario 3.6.4 y la Proposición 4.4.22.

(ii) Si suponemos que B tiene unidad, basta aplicar el Teorema 4.4.22 y (i). Supongamos pues que B no tiene unidad. Como por el Corolario 1.6.4, B^1 es semiprima, aplicando (i) tenemos que B^1 es π-complementada si, y solo si $\mathcal{M}(B^1)$ es π-complementada, pero, por la Proposición 4.4.23, $\mathcal{M}(B^1)$ es π-complementada si, y solo si $\mathcal{M}(B)$ es π-complementada. □

4.4.5. C^*-álgebras.

Definición 4.4.25. Para una C^*-álgebra A, su álgebra simétrica de cocientes, $Q_s(A)$, resulta ser un álgebra con unidad con involución definida-positiva $*$. De este modo es posible considerar la $*$-subálgebra $Q_b(A)$ de $Q_s(A)$ que consiste en todos los elementos ordenado-acotados y que es llamada el *álgebra simétrica acotada de cocientes* de A, y cuyo centro, $C_b(A)$, es llamado *centroide extendido acotado* de A. $Q_b(A)$ es una pre-C^*-álgebra, cuya completación es el álgebra de los multiplicadores locales de A. La C^*-subálgebra ${}^cA$ de de los multiplicadores locales de A, generada por $C_b(A)A$ se llama la *clausura central acotada* de A (para un tratamiento completo y por las referencias a la extensa literatura sobre el tema nos referimos al libro [2] de P. Ara y M. Mathieu). Algunos resultados en [2, Chapter 3] nos permiten darnos cuenta de que la clausura idempotente de una C^*-álgebra se encuentra dentro de la clausura central acotada.

Proposición 4.4.26. *Sea A una C^*-álgebra. Entonces A^π es una $*$-subálgebra norma densa de ${}^cA$.*

Demostración. Por conveniencia en lo que sigue, vamos a abreviar $Z_{\mathrm{Mult_{loc}}(A)}$ por Z. Por [2, Remark 2.2.9.1 and Lemma 3.1.2], $\mathcal{B}_A$ es el conjunto de todas las proyecciones en Z. Dado que, por [2, Proposition 3.1.5], Z es un AW^*-álgebra, aplicando [6, Proposition 8.1],tenemos que Z es la norma cerrada envolvente lineal de $\mathcal{B}_A$. Por otro lado, por el teorema local Dauns-Hofmann [2, Theorem 3.1.1], ${}^cA$ es igual que norma clausura de ZA. Teniendo en mente que $A^\pi = \mathcal{B}_A A$ (por el Corolario 4.4.11.(iii)), se sigue que A^π se convierte en una $*$-subálgebra norma densa de ${}^cA$. □

Definición 4.4.27. Una C^*-álgebra A se dice *acotadamente centralmente cerrada* si ${}^cA = A$. Como ${}^cA$ es una C^*-álgebra que contiene a A como una C^*-subálgebra, deducimos que

Corolario 4.4.28. *Una C^*-álgebra es acotadamente centralmente cerrada si, y solo si, es π-complementada.*

Ejemplos importantes de C^*-álgebras acotadamente centralmente cerradas son las AW^*-álgebras, y en particular las W^*-álgebras [2, Example 3.3.1.2]. Como se muestra en [39, Corollary 2.9] (Véase también [2, Corollary 6.3.5]), son precisamente estas C^*-álgebras las que tienen mejor comportamiento respecto a los Jordan-homomorfismos sobreyectivos.

CAPÍTULO 5

cd-Teorema

En este capítulo nos ocupamos de una importante consecuencia del π-Teorema, el cd-Teorema, que nos permitirá completar los resultados obtenidos en el segundo capítulo sobre los ideales complementadamente denso (c.d.) Estos resultados tienen una especial relevancia en el contexto multiplicativamente semiprimo. La clave del cd-Teorema está en la obtención del centroide extendido de un ideal c.d.

5.1. Centroide extendido y clausura central de un ideal denso

En la búsqueda de la clausura central y del centroide extendido de un ideal c.d., empezamos, como es natural, por el cálculo del centroide extendido y clausura central de un ideal denso.

Para cualquier álgebra semiprima A, es claro que

$$\mathcal{M}_{C_A}(Q_A) = \mathcal{M}(Q_A) + C_A \mathrm{Id}_{Q_A}.$$

Si vemos $\mathcal{M}(A)$ como una subálgebra de $\mathcal{M}(Q_A)$, es fácil ver que $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ esta generado por $\mathcal{M}(A)$ como una C_A-álgebra.

Proposición 5.1.1. *Sea A un álgebra semiprima y sea B una subálgebra densa de A. Si $T \in \mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ satisface que $T(B) = 0$, entonces $T = 0$. Como consecuencia, B es una subálgebra densa de Q_A.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ tal que $T(B) = 0$. Escribimos $T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i$ para convenientes $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in C_A$, y $F_i \in \mathcal{M}(A)$, y ponemos $D := \cap_{i=1}^{n} \mathrm{dom}(\lambda_i)$.

Nótese que, para $x \in D$ y $G \in \mathcal{M}(A)$ tenemos que

$$L_x GT = \sum_{i=1}^{n} L_{\lambda_i x} GF_i \in \mathcal{M}(A).$$

Puesto que $L_x GT(B) = 0$ y B es denso en A, deducimos que $L_x GT(A) = 0$, y en consecuencia $L_x GT(Q_A) = 0$. Se sigue de la arbitrariedad de x y G que $D\mathcal{M}(A)T(Q_A) = 0$. Como D es un ideal esencial de A, por **(A2)**, concluimos que $T(Q_A) = 0$. $\square$

Corolario 5.1.2. *Sea A un álgebra semiprima y sea B una subálgebra densa de A. Entonces, para $T \in \mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ y $q \in Q_A$, la condición $T\mathcal{M}(B)(q) = 0$ implica $T\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)(q) = 0$.*

Demostración. Supongamos que T en $\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)$ y q en Q_A satisfacen la condición $T\mathcal{M}(B)(q) = 0$. Escribimos $T = S + \lambda \mathrm{Id}_{Q_A}$, para algunos $S \in \mathcal{M}(Q_A)$ y $\lambda \in C_A$. Nótese que, para $x \in \mathrm{dom}(\lambda)$ y $F \in \mathcal{M}(A)$ tenemos que

$$L_x FT = L_x F(S + \lambda \mathrm{Id}_{Q_A}) = L_x FS + L_{\lambda x} F \in \mathcal{M}(Q_A).$$

Como $L_x FT\mathcal{M}(B)(q) = 0$, se sigue de las Proposiciones 5.1.1 y 2.3.8 que $L_x FT\mathcal{M}(Q_A)(q) = 0$. Por la arbitrariedad de x y F podemos deducir que

$$\mathrm{dom}(\lambda)\mathcal{M}(A)T\mathcal{M}(Q_A)(q) = 0,$$

y, por **(A2)**, nos damos cuenta que $T\mathcal{M}(Q_A)(q) = 0$. Finalmente, como $T(q) = T\mathrm{Id}_B(q) = 0$, concluimos que $T\mathcal{M}_{C_A}(Q_A)(q) = 0$. $\square$

El principal resultado de esta sección puede verse como el escalón más importante del teorema principal del capítulo: cd-Teorema 5.2.5.

Proposición 5.1.3. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal denso de A. Entonces I es un álgebra semiprima, $C_I = C_A$, y $Q_I = C_A I$ es un ideal denso de Q_A.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.10, I es un álgebra semiprima. Viendo I como una subálgebra de Q_A, es claro que $C_A I$ puede verse como una C_A-álgebra generada por I. Falta probar que la pareja $(I, C_A I)$ de Q_A verifica los axiomas **(A1)**-**(A3)**.

(A1) Sea q un elemento de $C_A I$. Escribimos $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$ para convenientes $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in C_A$, y $b_i \in I$, y ponemos $D := \cap_{i=1}^{n} \mathrm{dom}(\lambda_i)$. Nótese que, para $x \in D$ y $G \in \mathcal{M}(I)$ tenemos que

$$xG(q) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x G(b_i) \in I.$$

Por lo tanto $D\mathcal{M}(I)(q) \subseteq I$, y en particular $(D\cap I)\mathcal{M}(I)(q) \subseteq I$. Argumentando de forma similar, podemos ver también que $\mathcal{M}(I)(q)(D\cap I) \subseteq I$. Veamos que $D\cap I$ es un ideal esencial de I. En efecto, sea J un ideal de I tal que $D\cap I\cap J = 0$. Usando la semiprimidad del álgebra I, $(D\cap I)J = 0$ y aplicando la Proposición 2.3.8 y la semiprimidad de A, deducimos que $D\cap \mathcal{M}(A)(J) = 0$, luego $J = 0$. $D\cap I$ es un ideal esencial de I, y concluimos que $C_A I$ satisface **(A1)**.

(A2) Ahora, supongamos que q es un elemento en $C_A I$ que satisface, por ejemplo, la condición $J\mathcal{M}(I)(q) = 0$ para algún ideal esencial J de I. Como $J = \mathcal{M}(I)(J)$, aplicando el Corolario 2.3.9, tenemos que $\mathcal{M}(A)(J)\mathcal{M}(A)(q) = 0$. Veamos que $\mathcal{M}(A)(J)$ es un ideal esencial de A. De hecho, si H un ideal de A tal que $\mathcal{M}(A)(J)\cap H = 0$, entonces $J\cap H\cap I = J\cap H \subseteq \mathcal{M}(A)(J)\cap H = 0$, y la condición de J, nos informa que $H\cap I = 0$. Dado que I es denso y en particular, I es esencial, se tiene que $H = 0$ como queríamos probar. Finalmente puesto que $\mathcal{M}(A)(J)$ es un ideal esencial de A se deduce que $q = 0$. Así $C_A I$ satisface **(A2)**.

(A3) Sea $f : J \to I$ un c.p.d. en I. Como I es un álgebra semiprima, $H := J\oplus \mathrm{Ann}_I(J)$ es un ideal esencial de I en virtud del Corolario 1.4.5. Además, la aplicación $\overline{f} : H \to I$ definida por $\overline{f}(x+y) = f(x)$ para $x \in J$ e $y \in \mathrm{Ann}_I(J)$, es un c.e.d. en I que es extensión de f. Ahora, argumentando como en el párrafo anterior, $\mathcal{M}(A)(H)$ es esencial en A. Por el axioma **(A3)** referido al álgebra A, existe $\lambda \in C_A$ tal que $f(x) = \overline{f}(x) = \lambda x$ para cada $x \in J$. Por tanto $C_A I$ satisface **(A3)**, y como resultado $Q_I = C_A I$.

Finalmente, el hecho de que Q_I es un ideal denso de Q_A se sigue directamente de la Proposición 5.1.1. □

Como consecuencia de la Proposición anterior y del Teorema 4.3.4

Corolario 5.1.4. *Si A es un álgebra semiprima e I es un ideal denso de A entonces A es π-descomponible si, y sólo si, I es π-descomponible*

También de la Proposición anterior podemos deducir

Corolario 5.1.5. *Si A es un álgebra m.s.p., entonces A^2 es un álgebra m.s.p., $C_{A^2} = C_A$, y $Q_{A^2} = C_A A^2$ es un ideal denso en Q_A.*

Demostración. Si A es un álgebra m.s.p., entonces A^2 es un ideal denso de A (por [8, Corollary 2.9]), por lo que el resultado se sigue de la Proposición 5.1.3 y del Corolario 2.3.13. □

5.2. cd-Teorema

Ahora nuestro objetivo es extender el resultado de la sección anterior mediante la determinación del centroide extendido y la clausura central de los ideales c.d. de álgebras semiprimas.

Lema 5.2.1. *Sean A y B álgebras, y sea $\psi : A \to B$ un homomorfismo sobreyectivo de álgebras tal que $\ker(\psi)$ es ε-cerrado en A. Tenemos que:*

(i) ψ lleva ideales densos de A en ideales densos de B.

(ii) Si además B es semiprima, entonces ψ lleva ideales c.d. de A en ideales c.d. de B.

Demostración. (i) Este hecho fue demostrado en [12, Proposition 5.2.(1)].

(ii) Supongamos que B es semiprima. Entonces, para cada ideal I de A, tenemos que $\psi(I) \cap \mathrm{Ann}(\psi(I)) = 0$. Sea I un ideal c.d. en A. Por la Proposición 2.3.4 y la afirmación (i), tenemos que $B = \psi(I \oplus \mathrm{Ann}(I))^\wedge$. Puesto que claramente $\psi(\mathrm{Ann}(I)) \subseteq \mathrm{Ann}(\psi(I))$, se sigue que $B = (\psi(I) \oplus \mathrm{Ann}(\psi(I)))^\wedge$, y así $\psi(I)$ es c.d. en B. $\square$

Corolario 5.2.2. *Sea A un álgebra semiprima, sea e un idempotente en C_A, y sea I un ideal de A. Entonces*

(i) eI es denso en eA, cuando I es denso en A.

(ii) eI es c.d. en eA, cuando I es c.d. en A.

Demostración. Por el Teorema 4.2.2, eA es un álgebra semiprima . Consideremos el homomorfismo sobreyectivo $\psi : A \to eA$ definido por $\psi(a) = ea$, y nótese que $\ker(\psi) = (1 - e)A \cap A$. Por el π-Teorema, $\ker(\psi)$ es un ideal π-cerrado de A, y de ahí ε-cerrado. Ahora, el resultado se sigue del Lema 5.2.1. $\square$

Corolario 5.2.3. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal c.d. de A. Entonces I es un ideal denso de $e_{[I]}A$.*

Demostración. Como $I \oplus \mathrm{Ann}(I)$ es un ideal denso de A (por la Proposición 2.3.4) y $e_{[I]}(I \oplus \mathrm{Ann}(I)) = e_{[I]}I = I$ (por la Proposición 3.4.4), el resultado se sigue del Corolario 5.2.2.(i). $\square$

Proposición 5.2.4. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal de A. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) I es un ideal c.d. en A.

(ii) Existe $e \in \mathcal{B}_A$ tal que eI es un ideal denso en eA y $(1 - e)\mathrm{Ann}(I)$ es un ideal denso en $(1 - e)A$.

En ese caso, $e = e_{[I]}$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Por el Corolario 5.2.3, $I = e_{[I]}I$ es denso en $e_{[I]}A$. Como $e_{[\mathrm{Ann}(I)]} = 1 - e_{[I]}$ (por el Corolario 4.1.4.(ii)) y $\mathrm{Ann}(I)$ también es c.d. en A, se deduce de manera similar que $(1 - e_{[I]})\mathrm{Ann}(I)$ es denso en $(1 - e_{[I]})A$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sea F en $\mathcal{M}(A)$ tal que $F(I) = F(\mathrm{Ann}(I)) = 0$. Consideramos el homomorfismo sobreyectivo de álgebras $\psi : A \to eA$ definido por $\psi(a) = ea$. Por la Proposición 4.2.1.(ii), tenemos que $\psi'(F)(eI) = 0$. Puesto que por hipótesis, eI es denso en eA, se sigue que $\psi'(F)(eA) = 0$, y de ahí, de nuevo por la Proposición 4.2.1.(ii), obtenemos que $F(eA) = 0$. Análogamente podemos probar $F((1-e)A) = 0$. Por lo tanto $F(A) \subseteq F(eA+(1-e)A) = F(eA)+F((1-e)A) = 0$, y así $F = 0$. En consecuencia $A = (I + \mathrm{Ann}(I))^\wedge$. Por la semiprimidad de A, $I \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$, luego $A = (I \oplus \mathrm{Ann}(I))^\wedge$, y por tanto concluimos que I es c.d. en A.

Finalmente, supongamos que las sentencias equivalentes anteriores se cumplen. Entonces teniendo en cuenta los Corolarios 4.2.3.(ii) y 4.1.4.(v), vemos que

$$e = e_{[eA]} = e_{[eI]} = ee_{[I]}. \tag{5.1}$$

Intercambiando los papeles de I y $\mathrm{Ann}(I)$, y teniendo en cuenta el Corolario 4.1.4.(ii), también obtenemos que

$$1 - e = (1 - e)e_{[\mathrm{Ann}(I)]} = (1 - e)(1 - e_{[I]}). \tag{5.2}$$

Juntando (5.1) y (5.2), concluimos que $e = e_{[I]}$. $\square$

Ahora, todo está dispuesto para calcular el centroide extendido y la clausura central de un ideal c.d.

Teorema 5.2.5. (**cd-Teorema**) *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal c.d. en A. Entonces I es un álgebra semiprima, $C_I = e_{[I]}C_A$, y $Q_I = C_AI$ es un ideal c.d. en Q_A.*

Demostración. Por el Corolario 5.2.3, I es un ideal denso del álgebra $e_{[I]}A$. Ahora, por el Teorema 4.2.2 y la Proposición 5.1.3, obtenemos que I es un álgebra semiprima, $C_I = C_{e_{[I]}A} = e_{[I]}C_A$, y $Q_I = C_{e_{[I]}A}I = e_{[I]}C_AI = C_AI$ es un ideal denso en el álgebra $e_{[I]}Q_A$. Además, por la Proposición 3.4.4.(i) y el Corolario 4.1.4.(ii), vemos que $e_{[Q_I]} = e_{[I]}$ y $e_{[\mathrm{Ann}_{Q_A}(Q_I)]} = 1 - e_{[I]}$. Como $\mathrm{Ann}_{Q_A}(Q_I)$ es un ideal π-cerrado de Q_A con idempotente asociado $1 - e_{[I]}$ en C_A, se sigue, por el π-Teorema y la Proposición 3.4.4 aplicados a Q_A, que $\mathrm{Ann}_{Q_A}(Q_I) = (1 - e_{[I]})Q_A$. En resumen, Q_I es un ideal del álgebra semiprima Q_A tal que Q_I y $\mathrm{Ann}_{Q_A}(Q_I)$ son ideales densos en las álgebras $e_{[I]}Q_A$ y $(1 - e_{[I]})Q_A$, respectivamente. Ahora, aplicando la Proposición 5.2.4, concluimos que Q_I es un ideal c.d. en Q_A. $\square$

Una primera consecuencia del cd-Teorema, teniendo en cuenta los Corolarios 4.1.4.(ii) y 2.3.17, se puede enunciar de la siguiente forma

Corolario 5.2.6. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal c.d. en A. Entonces los centroides extendidos de I y $\overline{I}$ coinciden.*

Como consecuencia tenemos la descripción de todos los ideales π-cerrados de un ideal c.d.

Teorema 5.2.7. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal c.d. de A. Entonces tenemos que:*

(i) $\mathcal{B}_I = e_{[I]}\mathcal{B}_A = \{f \in \mathcal{B}_A : f \leq e_{[I]}\}$*, y, para cada ideal K de I, $e_{[K]}$ coincide con el idempotente asociado a K en C_I.*

(ii) La aplicación $J \mapsto J \cap I$ de $\ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(\overline{I})$ en $\mathcal{I}_I^\pi$ es un isomorfismo de retículos con $K \longmapsto \overline{\widehat{K}}$ como aplicación inversa.

(iii) Si además I es distinto de cero, entonces I es un álgebra prima si, y solo si, $\overline{I}$ es un ideal π-cerrado minimal de A.

(iv) $\ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(I) \subseteq \mathcal{I}_I^\pi$ *y* $\ell^{\mathbf{m}_A^\pi}(I) \subseteq \mathbf{m}_I^\pi$ *y si además I es π-cerrado, entonces* $\ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(I) = \mathcal{I}_I^\pi$ *y* $\ell^{\mathbf{m}_A^\pi}(I) = \mathbf{m}_I^\pi$

Demostración. (i) La primera conclusión es una consecuencia inmediata de la igualdad $C_I = e_{[I]}C_A$ en el Teorema 5.2.5. Lo que queda se sigue usando el mismo argumento utilizado en la demostración de la afirmación (ii) en el Teorema 4.2.3.

(ii) Teniendo en mente el π-Teorema, el Corolario 4.1.4.(ii) y el apartado (i), nos damos cuenta de que la aplicación $J \mapsto e_{[J]}$ es un isomorfismo de retículos de $\ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(\overline{I})$ en $\mathcal{B}_I$. Además, por el π-Teorema aplicado al álgebra I obtenemos que la aplicación $e \mapsto eI \cap I$ es un isomorfismo de retículos de $\mathcal{B}_I$ en $\mathcal{I}_I^\pi$. Por lo tanto la aplicación $J \to e_{[J]}I \cap I$ es un isomorfismo de retículos de $\ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(\overline{I})$ en $\mathcal{I}_I^\pi$. Teniendo en cuenta que $e_{[J]}I \cap I = (e_{[J]}A \cap A) \cap I = J \cap I$, concluimos que la aplicación $J \to J \cap I$ es un isomorfismo de retículos de $\ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(\overline{I})$ en $\mathcal{I}_I^\pi$. Sea $J \in \ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(\overline{I})$, es claro que por el Corolario 2.3.6, $\overline{\widehat{J \cap I}} \in \ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(\overline{I})$ y su corte con I coincide con $J \cap I$. Así pues, en virtud del isomorfismo, $J = \overline{\widehat{J \cap I}}$.

Sea ahora $K = J \cap I \in \mathcal{I}_I^\pi$, con $J \in \ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(\overline{I})$. Nótese que

$$\overline{\widehat{K}} \cap I = \overline{\widehat{J \cap I}} \cap I = J \cap I = K.$$

De nuevo por el isomorfismo, $\overline{\widehat{K}} = J$.

(iii) Si I es distinto de cero, entonces, como consecuencia de [10, Proposition 3.3], deducimos que I es un álgebra prima si, y solo si, $\overline{I}$ es un ideal π-cerrado minimal de A.

(iv) Basta observar que si $J \in \ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$, entonces $J \in \ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(\overline{I})$ y por tanto, por (ii), $J = J \cap I \in \mathcal{I}_I^\pi$. Supongamos ahora que $J \in \ell^{\mathbf{m}_A^\pi}(I)$ y veamos que $J \in \mathbf{m}_I^\pi$. En otro caso, existe $K \in \mathcal{I}_I^\pi$ tal que $K \subsetneq J$ y por tanto $\overline{\widehat{K}} \subseteq \overline{\widehat{J}} = J$. Por la condición de minimalidad, $K = 0$ ó $J = \overline{\widehat{K}}$. En este último caso, dado que ambos coinciden en el corte con I, por (ii) ambos coinciden, esto es $K = J$, luego $J \in \mathbf{m}_I^\pi$. Supongamos ahora que I es π-cerrado y sea $J \in \mathcal{I}_I^\pi$. En virtud de (ii), $J = \overline{\widehat{J}} \cap I = \overline{\widehat{J}} \in \ell^{\mathcal{I}_A^\pi}(I)$. La última observación es obvia a partir de las afirmaciones (ii) y (iii). $\square$

Como segunda consecuencia

Corolario 5.2.8. *Si A un álgebra π-descomponible distinta de cero con anulador cero y si I es un ideal distinto de cero c.d. en A entonces I es un álgebra π-descomponible.*

Demostración. Por el Teorema 4.3.4, A es semiprima y $\mathcal{B}_A$ es un álgebra de Boole atómica. Además, por el cd-Teorema y el Teorema 5.2.7.(i), vemos que I es un álgebra semiprima y $\mathcal{B}_I = e_{[I]}\mathcal{B}_A$, y en consecuencia $\mathcal{B}_I$ es atómica. Ahora, por el Teorema 4.3.4 aplicado a I, concluimos que I es un álgebra π-descomponible. $\square$

Hemos visto en el Corolario 2.3.6.(i) que si $J \in \mathcal{I}_I$ entonces $\widehat{J} \in \ell^{\mathcal{I}_A}(I)$ y ahora podemos generalizar la Proposición 1.4.3. Recuérdese que si $J \in \mathcal{I}_I$, indicamos por $\overline{J}^I$ a la π-clausura de J relativa al álgebra I.

Corolario 5.2.9. *Sea A un álgebra semiprima y sea I un ideal c.d. de A. Entonces*

(i) $K = \widehat{K} \cap I = \overline{\widehat{K}} \cap I$ *para todo* $K \in \mathcal{I}_I^\pi$.

(ii) Para cada ideal K de I, se tiene que $\mathrm{Ann}_I(K) = \mathrm{Ann}(\widehat{K}) \cap I$ *y* $\overline{K}^I = \overline{\widehat{K}} \cap I$. *En consecuencia,* $\mathcal{I}_I^\pi \subseteq \mathcal{I}_A$

(iii) Si $K \in \mathcal{I}_I^\pi$, *entonces* $\mathrm{Ann}_I(K) = \mathrm{Ann}(K) \cap I$ *y* $K = \overline{K} \cap I$.

(iv) Si $V \in \mathbf{m}_I^\pi$, *entonces* $\overline{V} \in \mathbf{m}_A^\pi$.

Demostración. (i) Sea $K \in \mathcal{I}_I^\pi$, puesto que por el Teorema 5.2.7.(iii), $K = \overline{\widehat{K}} \cap I$ se sigue que

$$\overline{\widehat{K}} \cap I = K \subseteq \widehat{K} \cap I,$$

de donde deducimos la igualdad buscada.

(ii) Sea $K \in \mathcal{I}_I$. En virtud del Teorema 2.3.6.(i), $\widehat{\mathrm{Ann}_I(K)}$ es un ideal de A. Además, por la continuidad de la ε-clausura,

$$\widehat{\mathrm{Ann}_I(K)}\widehat{K} = \widehat{K}\widehat{\mathrm{Ann}_I(K)} \subseteq (K\mathrm{Ann}_I(K))^\wedge = 0,$$

luego $\mathrm{Ann}_I(K) \subseteq \widehat{\mathrm{Ann}_I(K)} \subseteq \mathrm{Ann}(\widehat{K})$, y por consiguiente

$$\mathrm{Ann}_I(K) \subseteq \mathrm{Ann}(\widehat{K}) \cap I,$$

mientras que la otra inclusión es trivial. La última afirmación se sigue de la primera y de la Proposición 1.2.6.

(iii) Es una consecuencia obvia de (ii).

(iv) La última observación es una consecuencia obvia del Teorema 5.2.7.(ii) y de la afirmación (iii). $\square$

Como consecuencia de ambos, obtenemos el siguiente resultado

Corolario 5.2.10. *Si A es un álgebra semiprima, entonces todo ideal c.d. no nulo contenido en $\pi-\mathrm{Rad}(A)$ es un álgebra semiprima π-radical. En particular, todo ideal c.d. no nulo de un álgebra semiprima π-radical es un álgebra semiprima π-radical.*

Demostración. Sea I un ideal c.d. de A. Supongamos que $V \in \mathbf{m}_I^\pi$. Es claro que $\overline{V} \subseteq \overline{I} \subseteq \pi-\mathrm{Rad}(A)$ y por el Corolario 5.2.9.(iv) $\mathrm{Ann}(V)$ es un ideal π-cerrado maximal de A, luego

$$\overline{V} \subseteq \pi-\mathrm{Rad}(A) \subseteq \mathrm{Ann}(V),$$

luego, por la semiprimidad de A, $V = 0$, lo cual es una contradicción. Luego I carece de ideales π-cerrados minimales, y por tanto I es álgebra π-radical, que es semiprima en virtud del Teorema 5.2.5. La última afirmación se sigue del Corolario 1.4.6.

□

Podemos finalmente preguntarnos que si I es un ideal c.d. de un álgebra, qué relación existe entre el hecho de que I sea π-cerrado en A y el hecho de que Q_I sea π-cerrado en Q_A.

Ejemplo 5.2.11. Existen ideales c.d. que son π-cerrados de un álgebra semiprima A cuya clausura central no es un ideal π-cerrado de la clausura central de A.

En efecto, sea H un espacio de Hilbert infinito dimensional sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y sea T un operador lineal acotado en H con rango infinito dimensional y que cumple $T^2 = 0$. Consideramos el álgebra $\mathfrak{F}(H)$ de todos los operadores rango finito en H. Si, como es usual, para cada $x, y \in H$, denotamos po $x \otimes y$ al operador en H definido por

$$(x \otimes y)(z) = \langle z, y \rangle x \text{ para todo } z \in H,$$

entonces

$$\mathfrak{F}(H) = \{\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k : n \in \mathbb{N}, x_k, y_k \in H\}.$$

Consideramos el álgebra A cuyo espacio vectorial es $\mathfrak{F}(H) \times \mathfrak{F}(H) \times \mathbb{K}$ dotado con el producto definido por

$$(F_1, G_1, \alpha_1)(F_2, G_2, \alpha_2) := (F_1F_2 + \alpha_2F_1T + \alpha_1TF_2, G_1G_2 + \alpha_2G_1T + \alpha_1TG_2, 0).$$

Entonces A es un álgebra asociativa y $\mathcal{I}_A = \{0, I_1, I_2, A^2, A\}$, donde

$$I_1 = \{(F, 0, 0) : F \in \mathfrak{F}(H)\}, \;\; I_2 = \{(0, G, 0) : G \in \mathfrak{F}(H)\},$$

y

$$A^2 = \{(F, G, 0) : F, G \in \mathfrak{F}(H)\}.$$

Como $I_1^2 = I_1$ y $I_2^2 = I_2$, se sigue que A es semiprima (de ahí m.s.p. (por [16, Section 4]), y claramente $\mathrm{Ann}(I_1) = I_2$. En particular, $I_1 \oplus \mathrm{Ann}(I_1) = A^2$, el cual es un ideal denso en A (ver por ejemplo [8, Corollary 2.9]), y por tanto I_1 es un ideal c.d.

Consideramos el álgebra Q cuyo espacio vectorial es $\mathfrak{F}(H) \times \mathfrak{F}(H) \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ dotado del producto definido por

$$(F_1, G_1, \alpha_1, \beta_1)(F_2, G_2, \alpha_2, \beta_2)$$

$$:= (F_1F_2 + \alpha_2 F_1 T + \alpha_1 T F_2, G_1G_2 + \beta_2 G_1 T + \beta_1 T G_2, 0, 0).$$

Entonces Q es un álgebra asociativa y es fácil verificar que

$$\mathcal{I}_Q = \{0, I_1, I_2, I_1', I_2', M : M \text{ es un subespacio de } Q \text{ que contiene a } Q^2\},$$

donde

$$I_1 = \{(F, 0, 0, 0) : F \in \mathfrak{F}(H)\}, \ \ I_2 = \{(0, G, 0, 0) : G \in \mathfrak{F}(H)\},$$

$$I_1' = \{(F, 0, \alpha, 0) : F \in \mathfrak{F}(H), \alpha \in \mathbb{K}\}, \ \ I_2' = \{(0, G, 0, \beta) : G \in \mathfrak{F}(H), \beta \in \mathbb{K}\},$$

y

$$Q^2 = \{(F, G, 0, 0) : F, G \in \mathfrak{F}(H)\}.$$

Como $\mathrm{Ann}(I_1) = \mathrm{Ann}(I_1') = I_2'$, $\mathrm{Ann}(I_2) = \mathrm{Ann}(I_2') = I_1'$, y $\mathrm{Ann}(Q^2) = 0$, se sigue que Q es semiprima, y

$$\mathcal{I}_Q^\pi = \{0, I_1', I_2', Q\}.$$

Q puede verse como la clausura central del álgebra A via la inmersión $A \hookrightarrow Q$ dada por $(F, G, \alpha) \mapsto (F, G, \alpha, \alpha)$. Finalmente, nótese que I_1 es un álgebra centralmente cerrada, y que I_1 es un ideal π-cerrado de A, pero no es un ideal π-cerrado de Q.

Ejemplo 5.2.12. Existen ideales c.d. no necesariamente π-cerrados cuya clausura central sí es un ideal π- cerrado de la clausura central del álgebra.

Como ya vimos en el Corolario 4.3.3, la clausura central de c_0 y ℓ_∞ es s el álgebra de todas las sucesiones y sin embargo es claro que c_0 es un ideal propio denso de ℓ_∞.

Finalmente nos gustaría llamar la atención sobre el hecho de que nuestros resultados tienen el mismo sabor que algunos de los resultados obtenidos por G. F. Birkenmeier, J. K. Park, y S. T. Rizvi en [7] para los ideales I del anillo R que son ideales denso en un sumando directo del anillo maximal derecho de los cocientes de R. Sea R un anillo asociativo no necesariamente con unidad. Para un subconjunto no vacío X de R, denotaremos por $\mathrm{Ann}_\ell(X)$ ($\mathrm{Ann}_l(X) := \{a \in R : aX = 0\}$.) y $\mathrm{Ann}_r(X)$ ($\mathrm{Ann}_r(X) := \{a \in R : Xa = 0\}$) al anulador izquierdo y al anulador derecho de X en R, respectivamente. Siguiendo [7, Definition 2.1.(i)], $\mathfrak{D}^{\ell}_{\mathfrak{IC}}(R)$ representa el conjunto de todos los ideales I de R que satisfacen

$$I \cap \mathrm{Ann}_{\ell}(I) = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Ann}_{\ell}(I) \cap \mathrm{Ann}_{\ell}(\mathrm{Ann}_{\ell}(I)) = 0.$$

El conjunto $\mathfrak{D}^{r}_{\mathfrak{IC}}(R)$ se puede introducir de forma similar sin más que reemplazar los anuladores derechos por los anuladores izquierdos.

Proposición 5.2.13. *Sea A un álgebra asociativa con $\mathrm{Ann}_{\ell}(A) = 0$, y sea I un ideal de A. Si I es c.d. en A, entonces $I \in \mathfrak{D}^{\ell}_{\mathfrak{IC}}(A)$*

Demostración. Supongamos que I es c.d. en A. Entonces, por la Proposición 2.3.4, tenemos que $A = (I \oplus \mathrm{Ann}(I))^{\wedge}$. Ahora, por la propiedad de continuidad de la ε-clausura, vemos que

$$(I \cap \mathrm{Ann}_{\ell}(I))A \subseteq [(I \cap \mathrm{Ann}_{\ell}(I))(I \oplus \mathrm{Ann}(I))]^{\wedge} = 0^{\wedge} = 0.$$

Por tanto $I \cap \mathrm{Ann}_{\ell}(I) \subseteq \mathrm{Ann}_{\ell}(A)$, y de ahí $I \cap \mathrm{Ann}_{\ell}(I) = 0$. Análogamente podemos darnos cuenta de que $(\mathrm{Ann}_{\ell}(I) \cap \mathrm{Ann}_{\ell}(\mathrm{Ann}_{\ell}(I)))A = 0$, y concluimos que $\mathrm{Ann}_{\ell}(I) \cap \mathrm{Ann}_{\ell}(\mathrm{Ann}_{\ell}(I)) = 0$. Así $I \in \mathfrak{D}^{\ell}_{\mathfrak{IC}}(A)$. □

Pero podemos afinar más, para ello necesitamos el siguiente resultado

Proposición 5.2.14. *Sea A un álgebra, y sea I un ideal de A tal que $\widehat{I} \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$. Entonces $I^{\mathrm{ann}} \in \mathfrak{D}^{r}_{\mathfrak{IC}}(\mathcal{M}(A))$ si, y solo si, $I^{\mathrm{ann}} = [\mathrm{Ann}(I) : A]$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $\mathrm{Ann}_r(\mathcal{S}) = [\mathcal{S}_{\mathrm{ann}} : A]$ para todo subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}(A)$ (cf. [9, Proposition 3.1.(2)]), se sigue que $I^{\mathrm{ann}} \in \mathfrak{D}^{r}_{\mathfrak{IC}}(\mathcal{M}(A))$ si, y solo si, I^{ann} satisface la condición

$$I^{\mathrm{ann}} \cap [\widehat{I} : A] = 0 \text{ y } \; [\widehat{I} : A] \cap [[\widehat{I} : A]_{\mathrm{ann}} : A] = 0.$$

Nótese que, por el Lema 2.3.15.((iii)(a)) aplicado a $\widehat{I}$, tenemos que $[\widehat{I} : A]_{\mathrm{ann}} = \mathrm{Ann}(I)$, y por tanto

$$[\widehat{I} : A] \cap [[\widehat{I} : A]_{\mathrm{ann}} : A] = [\widehat{I} : A] \cap [\mathrm{Ann}(I) : A] = [\widehat{I} \cap \mathrm{Ann}(I) : A] = 0,$$

y así la segunda condición anterior es automática. Ahora, el resultado se sigue del Lema 2.3.15.((iii)(b)) aplicado a $\widehat{I}$. □

Corolario 5.2.15. *Sea A un álgebra y sea I un ideal de A tal que $\overline{I} \cap \mathrm{Ann}(I) = 0$. Entonces, las siguiente afirmaciones son equivalentes:*

(i) *I es c.d. en A.*

(ii) $I^{\mathrm{ann}}, \mathrm{Ann}(I)^{\mathrm{ann}} \in \mathfrak{D}^{r}_{\mathfrak{IC}}(\mathcal{M}(A))$.

Demostración. Teniendo en cuenta la equivalencia (i) $\Leftrightarrow$ (ii) en el Teorema 2.3.16, el resultado se sigue de la Proposición 5.2.14 aplicada a I y a $\mathrm{Ann}(I)$. □

5.3. Ideales complementadamente densos finito dimensionales

El objetivo de esta sección es discutir las singularidades de los ideales c.d. finito dimensionales. Comenzamos con el siguiente resultado

Proposición 5.3.1. *Si A es un álgebra semiprima e I es un ideal no nulo c.d. y finito dimensional, entonces I es un álgebra π-descomponible.*

Demostración. Dado que I es un álgebra semiprima en virtud del Corolario 2.3.11, basta aplicar el Corolario 4.3.7.

□

Corolario 5.3.2. *Si A es un álgebra semiprima e I es un ideal no nulo c.d., finito dimensional de A tal que $\overline{I}$ es un álgebra m.s.p., entonces I es un ideal π-cerrado de A.*

Demostración. En virtud de [12, Corllary 4.7], el álgebra I también es un álgebra m.s.p. Dado que ambas son finito dimensionales por el Teorema de Jacobson (cf. [8, Proposition 3.1]), ambas son isomorfas a una suma directa finita de álgebras simples. Dado que el centroide extendido de una suma directa es la suma directa de los centroides extendidos de cada sumando, se tiene que el centroide extendido de ambas álgebras es una suma finita de cuerpos. Por otra parte, puesto que sus idempotentes asociados coinciden por el Corolario 4.1.4, se tiene en virtud del cd-Teorema que ambos centroides coinciden, luego tienen el mismo número de sumandos. La simplicidad de los sumandos permite probar que $I = \overline{I}$.

□

Pero, también tenemos una pequeña mejora de [13, Theorem 5.6], concretamente probamos que

Teorema 5.3.3. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces todo ideal c.d. finito dimensional de A tal que $\overline{I}$ es un álgebra m.s.p. es un ideal complementado de A.*

Demostración. Supongamos que $A \neq 0$ e I es un ideal c.d. finito dimensional no cero de A tal que $\overline{I}$ es un álgebra m.s.p. Por tanto I es π-cerrado en virtud del Corolario 5.3.2. Sea $q : A \to A/\mathrm{Ann}(I)$ la correspondiente aplicación cociente. Es claro, en virtud de la Proposición 2.2.2, que $I \equiv q(I)$ es un ideal denso de $A/\mathrm{Ann}(I)$ (finito dimensional por la Proposición 2.4.1). En consecuencia, se tiene que $q(I) = A/\mathrm{Ann}(I)$, en particular $A = I \oplus \mathrm{Ann}(I)$.

□

Igualmente, intercambiando los papeles de I por $\mathrm{Ann}(I)$ puede probar que

Proposición 5.3.4. *Sea A un álgebra semiprima. Si I es un ideal c.d. de codimensión finita de A, entonces $A = \overline{I} \oplus \mathrm{Ann}(I)$.*

Corolario 5.3.5. *Sea A un álgebra prima no cero. Si A tiene un ideal I c.d. finito dimensional tal que $\overline{I}$ es un álgebra m.s.p., entonces A es finito dimensional y simple.*

Demostración. Supongamos que I es un ideal c.d. finito dimensional no cero de A. Puesto que por el Corolario 5.3.2 I es π-cerrado, entonces $I = A$ en virtud de la Proposición 1.5.2. Así, como consecuencia del Teorema de Jacobson, A es una suma directa de álgebras simples de dimensión finita. Tomemos B_i una de estas subálgebras, que resultará ser un ideal c.d. (de hecho complementado) finito dimensional de un álgebra prima. Repitiendo el argumento, $A = B_i$.

□

De esta forma, como consecuencia del Corolario 5.3.5, podemos reencontrar [13, Corollary 5.17],

Corolario 5.3.6. *Sea A un álgebra m.p. no cero. Si A tiene un ideal I finito dimensional, entonces A es finito dimensional y simple.*

Este último resultado es una versión no asociativa de un resultado de Lee y Wong [29, Theorem 1.7] en el que se prueba que si un álgebra prima asociativa que tenga un ideal derecho no cero finito dimensional es finito dimensional y simple. El precedente para un álgebra primitiva fue establecido por Yood [45, Theorem 3.8].

5.4. Aplicaciones a las álgebras m.s.p.

Después de mover los árboles, en esta sección vamos a recoger algunas nueces, traduciendo todos los resultados obtenidos para un ideal c.d. de un álgebra semiprima en resultados para un ideal arbitrario de un álgebra m.s.p. tal como nos permite la Proposición 2.3.5.

Para traducir algunas propiedades relativas a la ε-clausura usaremos que, como consecuencia de la Proposición 2.3.5 y del Corolario 2.3.17, la semiprimidad del álgebra de multiplicación está supeditada a la igualdad entre las clausuras, tal como se advirtió en [8, Theorem 26].

Proposición 5.4.1. *Sea A un álgebra semiprima. Entonces A es m.s.p. si, y sólo si la ε-clausura coincide con la π-clausura.*

Demostración. Supongamos que A es m.s.p., entonces por la Proposición 2.3.5, se tiene que todo ideal es c.d., y por tanto por el Corolario 2.3.17, las clausuras coinciden. Recíprocamente, puesto que por la Proposición 1.4.4 $A = \overline{I \oplus \mathrm{Ann}(I)}$ para todo ideal I de A, la igualdad de las clausuras nos afirma que todo ideal de A es c.d. La conclusión se deduce de la Proposición 2.3.5

□

Dado que las clausuras coinciden en un álgebra m.s.p. A, usaremos el término de *ideal cerrado* de A sin riesgo a confusión. Después del Teorema 2.3.16, tampoco el concepto de ideal cerrado de $\mathcal{M}(A)$ da lugar a confusión. A partir de aquí escribiremos $\mathcal{L}_A$ para referirnos al conjunto de los ideales cerrados de A, y $\mathcal{L}_{\mathcal{M}(A)}$ para referirnos al conjunto de los ideales cerrados de $\mathcal{M}(A)$

En una primera remesa, como consecuencia del Teorema 2.3.16, obtenemos el siguiente resultado que está implícito en [8, Corollary 2.8].

Proposición 5.4.2. *Sea A un álgebra m.s.p. Entonces la aplicación*

$$I \mapsto [I : A]$$

es un isomorfismo de $\mathcal{L}_A$ sobre $\mathcal{L}_{\mathcal{M}(A)}$ que conserva el orden y cuya aplicación inversa viene dada por $\mathcal{P} \longmapsto (\mathrm{Ann}_{\mathcal{M}(A)}(\mathcal{P}))_{\mathrm{ann}}$.

En particular,

Corolario 5.4.3. *Sea A un álgebra m.s.p. Entonces A es π-radical si, y sólo si, $\mathcal{M}(A)$ es π-radical.*

Como consecuencia del cd-Teorema y de [12, Corollary 4.7], todo está dispuesto para calcular el centroide extendido y la clausura central de un ideal arbitrario de un álgebra m.s.p., concretamente nuestra segunda recogida lleva en su saco el siguiente

Corolario 5.4.4. *Sea A un álgebra m.s.p. y sea I un ideal de A. Entonces I es un álgebra m.s.p., $C_I = e_{[I]}C_A$, y $Q_I = C_A I$.*

Como consecuencia del Teorema 5.2.7 tenemos una descripción de los ideales π-cerrados de un ideal arbitrario de un álgebra m.s.p. que mejora sensiblemente los resultados obtenidos en [8, Theorem 2.11 and Corollary 2.12.(1)].

Teorema 5.4.5. *Sea A un álgebra m.s.p. e I un ideal de A. Entonces tenemos que:*

(i) Para cada ideal K de I, $\widehat{K}$ es un ideal de A.

(ii) La aplicación $J \mapsto J \cap I$ de $\ell^{\mathcal{L}_A}(\overline{I})$ en $\mathcal{L}_I$ es un isomorfismo de retículos con $K \longmapsto \widehat{K}$ como aplicación inversa.

(iii) Si además I es distinto de cero, entonces I es un álgebra m.p. si, y solo si, $\overline{I}$ es un ideal minimal cerrado de A.

(iv) Para cada ideal K de I, se tiene que $\mathrm{Ann}_I(K) = \mathrm{Ann}(\widehat{K}) \cap I$ y $K = \widehat{K} \cap I$. En consecuencia, $\mathcal{L}_I \subseteq \mathcal{I}_A$

(v) Si $K \in \mathcal{L}_I$, entonces $\mathrm{Ann}_I(K) = \mathrm{Ann}(K) \cap I$ y $\overline{K}^I = \overline{K} \cap I$

(vi) *Si* $V \in \mathbf{m}_I^\pi$*, entonces* $\overline{V} \in \mathbf{m}_A^\pi$.

(vii) $\ell^{\mathcal{L}_A}(I) \subseteq \mathcal{L}_I$ *y* $\ell^{\mathbf{m}_A^\pi}(I) \subseteq \mathbf{m}_I^\pi$ *y si además* I *es* π*-cerrado, entonces* $\ell^{\mathcal{L}_A}(I) = \mathcal{L}_I$ *y* $\ell^{\mathbf{m}_A^\pi}(I) = \mathbf{m}_I^\pi$

Como consecuencia, del Corolario 5.2.10 y teniendo en cuenta [12, Corollary 4.7], obtenemos

Corolario 5.4.6. *Si* A *es un álgebra m.s.p, entonces todo ideal no nulo contenido en* $\pi-\mathrm{Rad}(A)$ *es un álgebra m.s.p.* π*-radical. En particular, todo ideal de un álgebra m.s.p.* π*-radical es un álgebra m.s.p.* π*-radical.*

Diremos que un álgebra es ε*-descomponible* si es la ε-clausura de la suma de sus ideales ε-cerrados minimales.

Como consecuencia de la Proposición 5.4.1, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.4.7. *Sea* A *un álgebra con anulador cero. Entonces* A *es un álgebra* ε*-descomponible si, y solo si,* A *es m.s.p y* π*-descomponible.*

Demostración. Dado que, teniendo en cuenta [8, theorem 3.7], A es m.s.p., basta aplicar la Proposición 5.4.1.

□

Como consecuencia, teniendo en cuenta el Teorema 4.3.4, podemos dar ahora una reformulación de [8, Theorems 3.7 and 3.8] y una mejora de [8, Proposition 3.9].

Corolario 5.4.8. *Para un álgebra* A *con anulador cero las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A *es* ε*-descomponible.*

(ii) A *es m.s.p. y* $\mathcal{B}_A$ *es un álgebra de Boole atómica.*

(iii) A *es un producto subdirecto esencial de una familia de álgebras m.p. distintas de cero.*

(iv) A *es m.s.p. y* C_A *es un producto directo de cuerpos.*

También podemos relacionar la descomponibilidad de A con la de Q_A y de $\mathcal{M}(A)$.

Corolario 5.4.9. *Para un álgebra* A *semiprima distinta de cero las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A *es* ε*-descomponible.*

(ii) A *es m.s.p. y* Q_A *es* π*-descomponible.*

(iii) Q_A *es* ε*-descomponible.*

(iv) $\mathcal{M}(A)$ *es* π*-descomponible.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Basta combinar los Corolarios 5.4.8 y 4.3.5 y la Proposición 5.4.1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Por el Corolario 3.6.5, el álgebra Q_A es m.s.p. de ahí, por la Proposición 5.4.7 Q_A es ε-descomponible.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Como, por el Corolario 3.3.18, Q_A es centralmente cerrada, se sigue por la implicación (i) $\Rightarrow$ (iv) en el Corolario 5.4.8 que Q_A es m.s.p. y C_A es un producto directo de cuerpos. Ahora, por el Corolario 3.6.5, A es m.s.p. y por el Teorema 3.6.3 $C_{\mathcal{M}(A)} = C_A$. Basta ahora aplicar la implicación (iv) $\Rightarrow$ (i) del Teorema 4.3.4.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Podemos ver por la implicación (i) $\Rightarrow$ (iv) del Teorema 4.3.4, que $\mathcal{M}(A)$ es semiprima y $C_{\mathcal{M}(A)}$ es un producto directo de cuerpos. Como, por el Teorema 3.6.3, $C_{\mathcal{M}(A)} = C_A$, se sigue por la implicación (iv) $\Rightarrow$ (i) en el Corolario 5.4.8 que A es ε-descomponible. □

Como consecuencia del Corolario 1.5.12, del Teorema [8, Theorem 2.11] y de la Proposición 5.4.7, probamos que

Corolario 5.4.10. *Sea* A *un álgebra m.s.p. y sea* I *un ideal cerrado de* A*. Si* A *es un álgebra* ε*-descomponible, entonces* A/I *es un álgebra* ε*-descomponible.*

Finalizamos el estudio de la descomponibilidad probando que ésta es hereditaria.

Corolario 5.4.11. *Si* A *es un álgebra* ε*-descomponible distinta de cero y con anulador cero, entonces todo ideal* I *de* A *distinto de cero es un álgebra* ε*-descomponible.*

Demostración. Sea I un ideal de A distinto de cero. Por el Corolario 5.4.7 A es m.s.p ,y por tanto, por la Proposición 2.3.5, I es c.d. en A. Aplicando ahora el Corolario 5.2.8 I es π-descomponible y, por [12, Corollary 4.7], I es un álgebra m.s.p. La conclusión es consecuencia del Corolario 5.4.7.

□

El siguiente resultado relaciona la complementación del álgebra en ambas clausuras.

Proposición 5.4.12. *Sea* A *un álgebra con anulador cero. Entonces* A *es un álgebra* ε*-complementada si, y solo si,* A *es m.s.p y* π*-complementada.*

Demostración. El carácter minimal de la π-clausura (Proposición 4.4.1) nos permite asegurar que si A es ε-complementada entonces A es π-complementada y por tanto la π-clausura de cualquier ideal es un sumando directo, y por tanto c.d. Por otra parte, dado que todo ideal ε-cerrado está complementado, por la Proposición 1.3.10, es de hecho π-cerrado. Por tanto para cada ideal las clausuras coinciden en I. Combinando ambas afirmaciones obtenemos, por la Proposición 2.3.17, que todo ideal es c.d. De nuevo la Proposición 2.3.5 nos asegura que A es m.s.p. El recíproco es trivial después de la Proposición 2.3.5. $\square$

Como consecuencia del Corolario 4.4.5, obtenemos que que

Proposición 5.4.13. *Sea A un álgebra con anulador cero. Si A es ε-complementada e I es un ideal cerrado, entonces A/I es un álgebra ε-complementada.*

Demostración. Supongamos que A es ε-complementada. En virtud de la Proposición 5.4.12, A es m.s.p. y π-complementada. Por la Proosición 5.4.1 y el Corolario 4.4.5, el álgebra A/I es π-complementada. Para concluir, teniendo en cuenta [8, Theorem 2.11], basta aplicar de nuevo la Proposición 5.4.12 al propio cociente. $\square$

Es sabido que la ε-complementación se hereda para ideales cerrados (véase [13, Theorem 3.9]). Este resultado es una sencilla consecuencia de las Proposiciones 5.4.12, 4.4.4 y de [12, Corollary 4.7].

Nos preguntamos ahora acerca de la relación entre la multiplicativa semiprimidad de un álgebra y de su unitización. Puesto que A es un ideal de su unitización, la posible condición de multiplicativa semiprimidad de la unitización siempre fuerza la del propio álgebra (véase [12, corollary 4.7]), así pues nos centramos en ver si es también una condición suficiente. En este sentido, dado que la semiprimidad sí se transmite de un álgebra a su unitización y viceversa (Corolario 1.6.4), sólo nos queda preocuparnos de sus álgebras de multiplicación. Las cosas son muy diferentes según que el álgebra tenga o no unidad. En el primer caso, como consecuencia del Lema 3.5.1 y del Corolario 1.6.4, podemos probar que

Proposición 5.4.14. *Si A es un álgebra con unidad, entonces A es m.s.p. si, y sólo si, lo es su unitización.*

En el caso sin unidad, para probar el recíproco se necesita una condición adicional.

Proposición 5.4.15. *Si A es un álgebra sin unidad, entonces A^1 es m.s.p. si, y sólo si, A es un álgebra m.s.p. que es ideal denso de A^1.*

Demostración. Supongamos que A^1 es m.s.p. Como ya hemos visto, por [12, corollary 4.7], A es m.s.p., y, por la Proposición 1.6.11.(i), A es un ideal π-denso en A^1. Por consiguiente, en virtud de la Proposición 5.4.1, A también es un ideal denso.

Supongamos que A es un álgebra m.s.p. y que es un ideal denso en A^1. La multiplicativa semiprimidad de la unitización se sigue del Lema 3.5.1 $\square$

Como consecuencia de la Proposición 1.6.11.(i) se deduce que toda álgebra sin unidad es π-densa en su unitización. A la pregunta de si toda álgebra sin unidad será también densa en su unitización, contestamos que no, incluso en el caso finito dimensional.

Ejemplo 5.4.16. Sea A la subálgebra de las matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cuya traza es cero, dotada con el producto Lie []. Es fácil probar que $(A, [.,.])$ es una álgebra simple (por tanto m.s.p.) sin unidad de dimensión 3 tal que $\mathcal{M}^\sharp(A) = \mathcal{L}(A)$, y por tanto Id_A puede escribirse de la forma $\sum L_{a_1}, ..., L_{a_n}$ con $a_1, ..., a_n \in A$. Considérese $F = \sum L_{a_1}^{A^1}, ..., LA^1{}_{a_n} \in \mathcal{M}(A^1)$. Nótese que $Id_{A^1}(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \neq F(\mathbf{1}) \in A$, y sin embargo, $Id_{A^1} - F \in A^{\text{ann}}$. Por tanto $A^{\text{ann}} \neq 0$, esto es, A no es un ideal denso en A^1.

Teniendo en cuenta la Proposición 5.4.7, basta combinar el Corolario 1.6.14 y la Proposición 5.4.14 para el caso con unidad y la Proposición 5.4.15 para el caso sin unidad.

Corolario 5.4.17. *Sea A un álgebra con anulador cero. Entonces*

(i) Si A tiene unidad entonces

$$A^1 \ es \ \ \varepsilon - descomponible \Longleftrightarrow A \ es \ \varepsilon - descomponible.$$

(ii) Si A no tiene unidad entonces

entonces equivalen

(a) A^1 es $\varepsilon -$ descomponible

(b) A es $\varepsilon -$ descomponible y A es un ideal denso de A^1 .

Teniendo en cuenta la Proposición 5.4.12, basta combinar el Teorema 4.4.16 y y la Proposición 5.4.14 para el caso con unidad y la Proposición 5.4.15 para el caso sin unidad.

Corolario 5.4.18. *Sea A un álgebra con anulador cero. Entonces*

(i) Si A tiene unidad entonces

$$A^1 \ es \ \ \varepsilon - complementada \Longleftrightarrow A \ es \ \ \varepsilon - complementada.$$

(ii) Si A no tiene unidad entonces equivalen

(a) A^1 es $\varepsilon -$ complementada

(b) A es $\varepsilon-$complementada, $\mathcal{I}_A^\pi \subseteq \mathcal{M}_A \cup \mathcal{N}_A$ y A es un ideal denso de A^1 .

Como consecuencia del desarrollo de la presente Memoria también podrían obtenerse algunos de los resultados contenidos en [13]. Así por ejemplo, de la Proposición 4.4.4, se deduce la correspondiente caracterización de la ε-complementación en términos de la ε-clausura [13, Corollary 3.10]; Como consecuencia de los Corolario 1.4.5, 1.5.10 y 1.5.12 y la Proposición 1.8.7, se obtiene que toda álgebra m.s.p. se puede escribir como un producto subdirecto esencial de dos álgebras una π-radical y otra π-descomponible, tal como se obtuvo en [13, Theorem 2.15]; Combinando el Corolario 5.4.8 y el Teorema 4.4.8 reencontramos [13, Corollary 3.13] y aplicando el Teorema 5.3.3, reencontramos [13, Theorem 5.16 and Corollary 5.17].

CAPÍTULO 6

Multiplicativa primidad de Álgebras de Jordan degeneradas

6.1. Álgebras de Jordan

Como ya hemos comentado, las álgebras de Jordan, llamadas así por Albert en 1946, fueron introducidas por el físico Pascual Jordan con el propósito de formular un contexto algebraico infinito dimensional para la Mecánica Cuántica. A partir del trabajo de P. Jordan, J. von Neumann y E. Wigner [26], la teoría de las álgebras de Jordan pronto se convirtió en una sólida rama del Álgebra. La Teoría de estructura de las álgebras de Jordan conseguida hasta 1979, aunque bella y profunda, se situaba en las cercanías de lo que podríamos llamar condiciones de finitud. Es justamente en 1979 cuando E. Zel'manov inicia una serie de trabajos y se adelanta a su tiempo demostrando en [46] (véase también [31]) su famoso "Teorema primo" que clasifica las álgebras de Jordan primas no-degeneradas sin ninguna hipótesis adicional, problema que ni siquiera nadie se había atrevido previamente a plantear.

Definición 6.1.1. Sea J un álgebra de Jordan. Como es usual, para $x, y \in J$, el operador $U_{x,y}$ en J está definido por

$$U_{x,y}(z) := x.(y.z) + y.(x.z) - (x.y).z$$

para todo z en J y, por comodidad, escribiremos U_x en vez de $U_{x,x}$.

Un álgebra de Jordan J es *no-degenerada* si

$$U_x = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0.$$

La multiplicativa primidad de las álgebras de Jordan primas no-degeneradas fue probada en [18] haciendo un uso sustancial del Teorema de Zel'manov y la teoría de identidades polinomiales generalizadas. Una vez que S. V. Pchelintsev resolvió en [35] el problema de la existencia de álgebras de Jordan primas degeneradas, es natural preguntarse sobre la multiplicativa primidad de tales álgebras. Hoy día, además del ejemplo de Pchelintsev, se conocen otros ejemplos debidos a Yu. A. Medvedev y E. I. Zelmanov [32], I. P. Shestakov [41, 42], y V. G. Skosyrskii [43]. Todos estos ejemplos surgen a través de superálgebras de Jordan.

La construcción dada por Shestakov, que incluye como casos particulares los ejemplos de Pchelintsev y Medvedev-Zelmanov, descansa en la técnica de pasar al álgebra libre en una concreta variedad de álgebras de Jordan.

Sin embargo la construcción dada por Skosyrskii viene dada a través de la componente cero de la superálgebra de Jordan obtenida vía el proceso de doblaje de Kantor de una conveniente estructura punto-corchete en el álgebra de Grassmann (véase el Ejemplo 1.2.2) que por comodidad, en lo que sigue denotaremos simplemente por G.

Una **superálgebra** es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $A = A_0 \oplus A_1$ verificando la condición

$$A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta} \quad \text{para} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2.$$

El álgebra de Grassmann es una superálgebra para la $\mathbb{Z}_2$-graduación natural, que consiste en tomar como G_0 la envolvente lineal de la unidad y el conjunto de monomios de longitud par y como G_1 la envolvente lineal del conjunto de monomios de longitud impar

6.2. El álgebra de Jordan $J(G, \partial)$

Una **derivación impar** en una superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$ es una aplicación lineal $\delta : A \to A$ verificando

$$\delta(A_\alpha) \subseteq A_{\alpha+1}$$

y

$$\delta(a_\alpha b_\beta) = \delta(a_\alpha)b_\beta + (-1)^\alpha a_\alpha \delta(b_\beta) \qquad (a_\alpha \in A_\alpha, b_\beta \in A_\beta).$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, consideremos la derivación impar en el álgebra de Grassmann

$$\partial_i : G \to G$$

determinada por

$$\partial_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{(delta de Kronecker)}.$$

Por tanto, para cada monomio

$$g = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n} \qquad (n\in\mathbb{N},\ i_1<i_2<\cdots<i_n)$$

se tiene que

$$\partial_i(g)=0 \quad \text{si} \quad i\neq i_k \ \text{ con } \ 1\le k\le n$$

y

$$\partial_i(g)=(-1)^{k-1}x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_n} \quad \text{si} \quad i=i_k \ \text{ para algún } \ 1\le k\le n,$$

o si se prefiere (con algún abuso de notación)

$$\partial_i(g)=(-1)^{\text{posicion}(x_i)+1}\frac{g}{x_i} \quad \text{si} \quad i=i_k \ \text{ para algún } \ 1\le k\le n.$$

El álgebra de Jordan $J(G,\partial)$ es el álgebra obtenida a partir del álgebra de Grassmann G reemplazando su producto asociativo (denotado por yuxtaposición) por el producto $\bullet$ determinado por

$$a_0\bullet b_\alpha = b_\alpha\bullet a_0 = a_0b_\alpha,$$

$$a_1\bullet b_1=\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}\partial_i(a_1)\partial_i(b_1).$$

Lema 6.2.1. *Sea U un ideal no nulo de $J(G,\partial)$. Si U contiene a un monomio de longitud impar $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, entonces U también contiene a todos los monomios obtenidos suprimiendo en el anterior una de las variables, esto es*

$$\partial_k(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})\in U, \qquad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Demostración. Supongamos que el monomio impar $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ pertenece a U, y fijemos $k\in\mathbb{N}$. Entonces $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\bullet x_k\in U$. Como quiera que

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\bullet x_k=\sum_{i=1}^{\infty}\partial_i(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})\partial_i(x_k)=\partial_k(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}),$$

se sigue que $\partial_k(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})\in U$.

□

Lema 6.2.2. *Sea U un ideal no nulo de $J(G,\partial)$. Si U contiene a un monomio de longitud impar n, entonces U también contiene a todos los monomios de longitud n.*

Demostración. Bastará probar que si $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}\in U$ con n impar, entonces el resultado de cambiar una cualquiera de las variables envueltas por cualquier otra variable prefijada sigue estando en U. Fijemos k con $1\leq k\leq n$ y fijemos $j\in\mathbb{N}$. Se tiene entonces que $((x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})\bullet x_{i_k})\bullet x_j\in U$. Como quiera que

$$((x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})\bullet x_{i_k})\bullet x_j=(-1)^{k-1}x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}x_{i_{k+1}}\cdots x_{i_n}\bullet x_j$$

$$=x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}x_jx_{i_{k+1}}\cdots x_{i_n},$$

se sigue que $x_{i_1}\cdots x_{i_{k-1}}x_jx_{i_{k+1}}\cdots x_{i_n}\in U$.

□

Como consecuencia de los Lemas 6.2.1 y 6.2.2 tenemos:

Corolario 6.2.3. *Sean U un ideal no nulo de $J(G,\partial)$ y n un número impar. Si U contiene monomios de longitud n, entonces U contiene todos los monomios de longitud $n-1$.*

Para cada $n\in\mathbb{N}$, denotaremos por I_{2n} al subespacio de G generado por todos los monomios de longitud mayor o igual a $2n$. A partir de la definición del producto, es claro que I_{2n} es un ideal de $J(G,\partial)$.

Proposición 6.2.4. *Para todo ideal no nulo U de $J(G,\partial)$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $I_{2n}\subseteq U$.*

Demostración. Sea U un ideal propio no nulo de $J(G,\partial)$. Por [43, Lemma 1], U contiene monomios. Sea m la longitud mínima de los monomios en U. Ya que U es un ideal propio, se tiene que $m\neq 0$. Por el Lema 6.2.1, m debe ser par. Nótese que si $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\in U$ con $i_1<i_2<\cdots<i_m$, entonces

$$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}x_{i_m+1}=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\bullet x_{i_m+1}\in U,$$

y en consecuencia, teniendo en cuenta el Corolario 6.2.3, podemos afirmar que U contiene a todos los monomios de longitud m. Ya que todo monomio de longitud $p>m$ puede escribirse como el producto de un monomio de longitud m por un monomio de longitud $p-m$, concluimos que $I_m\subseteq U$. □

Siguiendo la notación empleada en [43], denotaremos por T_g al operador de multiplicación determinado por g.

Lema 6.2.5. *Sean $g_1,\cdots,g_k,h$ monomios y sean $x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_{2n}}$ variables distintas de todas las variables envueltas en las escrituras de $g_1,\cdots,g_k,h$. Entonces*

$$T_{g_1}\cdots T_{g_k}(h\bullet x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{2n}})=T_{g_1}\cdots T_{g_k}(h)\bullet x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{2n}}.$$

Demostración. Escribamos $f = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{2n}}$. La demostración es por inducción sobre k. Supongamos que $k=1$. Si o bien g_1 o bien h es un monomio de longitud par, entonces los productos Jordan que resultan son productos asociativos de G y por tanto se da la igualdad deseada

$$T_{g_1}(h \bullet f) = g_1 \bullet (h \bullet f) = g_1(hf) = (g_1h)f = (g_1 \bullet h) \bullet f = T_{g_1}(h) \bullet f.$$

En el caso en que g_1 y h son monomios de longitud impar tenemos que

$$T_{g_1}(h \bullet f) = g_1 \bullet (h \bullet f) = \sum_i \partial_i(g_1)\partial_i(hf) = \sum_i \left(\partial_i(g_1)\partial_i(h)f - \partial_i(g_1)h\partial_i(f)\right).$$

Teniendo en cuenta que $f = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{2n}}$ y que $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{2n}}$ no están envueltas en la escritura de g_1 se tiene que, para todo i, o bien $\partial_i(g_1) = 0$ o bien $\partial_i(f) = 0$. Por tanto

$$T_{g_1}(h \bullet f) = \sum_i \partial_i(g_1)\partial_i(h)f = \left(\sum_i \partial_i(g_1)\partial_i(h)\right) f = (g_1 \bullet h) \bullet f = T_{g_1}(h) \bullet f.$$

Finalmente, supuesto $k > 1$ y supuesto el enunciado válido para $k-1$, y teniendo en cuenta que las variables envueltas en $T_{g_k}(h)$ son variables envueltas en g_k o en h, tenemos que

$$\begin{gathered} T_{g_1}\cdots T_{g_k}(h \bullet f) = T_{g_1}\cdots T_{g_{k-1}}\left(T_{g_k}(h \bullet f)\right) = \\ T_{g_1}\cdots T_{g_{k-1}}\left(T_{g_k}(h) \bullet f\right) = \\ T_{g_1}\cdots T_{g_{k-1}}(T_{g_k}(h)) \bullet f = \\ T_{g_1}\cdots T_{g_k}(h) \bullet f. \end{gathered}$$

□

Teorema 6.2.6. *El álgebra de Jordan $J(G, \partial)$ es m.p. degenerada.*

Demostración. Por [43, Proposition 2], $J(G, \partial)$ es un álgebra de Jordan prima degenerada. Veamos que es m.p. Hemos de probar que si $F \in M(J(G, \partial))\backslash\{0\}$, entonces $F(U) \neq 0$ para todo ideal no nulo U de $J(G, \partial)$. Por la Proposición anterior nos bastará con verificar que hay monomios de longitud arbitrariamente grande sobre los que F no se anula. Puesto que los monomios generan linealmente el álgebra $J(G, \partial)$, se sigue que el álgebra de multiplicación está generada linealmente por los productos de operadores de multiplicación de monomios. Escribamos F en la forma

$$F = \lambda_0 Id_{J(G,\partial)} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k S_k$$

donde $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{K}$, y, para cada k, S_k es un producto finito de operadores de multiplicación T_g correspondientes a convenientes monomios g, esto es

$$S_k = T_{g_{k,1}} \cdots T_{g_{k,n_k}}$$

para convenientes $n_k \in \mathbb{N}$ y $g_{k,i}$ monomios. Puesto que $F \neq 0$, ha de existir un monomio h tal que $F(h) \neq 0$. Consideremos variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{2n}}$ no envueltas en el monomio h y no envueltas en los monomios cuyo operador de multiplicación aparece en la escritura de F. Llamemos $f = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{2n}}$. Por el lema anterior, para todo k, se tiene que

$$S_k(h \bullet f) = S_k(h) \bullet f,$$

y por tanto

$$F(h \bullet f) = F(h) \bullet f = F(h) x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{2n}}.$$

Ya que $F(h) \neq 0$ y $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{2n}}$ no intervienen en la escritura de $F(h)$ se sigue que $F(h \bullet f) \neq 0$. Así, $F(I_{2n}) \neq 0$. Ahora por la Proposición 6.2.4 podemos afirmar que $F(U) \neq 0$ para todo ideal U no nulo de $J(G, \partial)$. Finalmente por [15, Proposition 1], concluimos que $J(G, \partial)$ es m.p.

□

6.3. El álgebra de Jordan $J(G, D)$

Una **derivación par** en una superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$ es una aplicación lineal $\delta : A \to A$ verificando

$$\delta(A_\alpha) \subseteq A_\alpha$$

y
$$\delta(a_\alpha b_\beta) = \delta(a_\alpha)b_\beta + a_\alpha \delta(b_\beta) \qquad (a_\alpha \in A_\alpha, b_\beta \in A_\beta).$$

Consideremos la derivación par en el álgebra de Grassmann
$$D : G \to G$$
determinada por
$$D(x_n) = x_{n+1}$$
Por consiguiente D actúa en un monomio
$$g = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_s} \qquad (s \in \mathbb{N},\ i_1 < i_2 < \cdots < i_s)$$
como sigue:
$$D(g) = x_{i_1+1}x_{i_2}\cdots x_{i_s} + \cdots + x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{s-1}}x_{i_s+1}.$$

El álgebra de Jordan $J(G, D)$ es el álgebra obtenida a partir del álgebra de Grassmann G reemplazando su producto asociativo (denotado por yuxtaposición) por el producto $\bullet$ determinado por
$$a_0 \bullet b_\alpha = b_\alpha \bullet a_0 = a_0 b_\alpha$$
$$a_1 \bullet b_1 = a_1 D(b_1) - D(a_1)b_1$$

El siguiente lema, que será crucial para el Teorema 6.3.3, esta implícito en la demostración de [43, Proposition 3].

Lema 6.3.1. *Si U es un ideal no nulo de $J(G, D)$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m - (n-1)$ es un natural par y*
$$x_n \cdots x_m \in U.$$

Para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, denotaremos por J_m al subespacio de G generado por todos los monomios que envuelven alguna variable x_k con $k > m$. De la definición del producto, es claro que J_m es un ideal de $J(G, D)$.

Lema 6.3.2. *Sean $g_1, \cdots, g_k, h$ monomios y sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m-(n-1)$ es un natural par. Entonces*
$$T_{g_1}\cdots T_{g_k}(h \bullet x_n \cdots x_m) - T_{g_1}\cdots T_{g_k}(h) \bullet x_n \cdots x_m \in J_m.$$

Demostración. Escribamos $f = x_n \cdots x_m$. La demostración es por inducción sobre k.
Supongamos que $k = 1$. Si o bien g_1 o bien h es un monomio de longitud par, entonces los productos Jordan que resultan son productos asociativos de G y por tanto se da la igualdad

$$T_{g_1}(h \bullet f) = g_1 \bullet (h \bullet f) = g_1(hf) = (g_1 h)f = (g_1 \bullet h) \bullet f = T_{g_1}(h) \bullet f.$$

Luego

$$T_{g_1}(h \bullet f) - T_{g_1}(h) \bullet f = 0 \in J_m.$$

En el caso en que g_1 y h son monomios de longitud impar tenemos que

$$T_{g_1}(h \bullet f) = g_1 \bullet (h \bullet f) = g_1 D(hf) - D(g_1)(hf) = g_1(D(h)f + hD(f)) - (D(g_1)h)f =$$

$$(g_1 D(h) - D(g_1)h)\, f + g_1 h \left(\sum_{k=n}^{m} x_n \cdots x_{k-1} D(x_k) x_{k+1} \cdots x_m \right) =$$

$$(g_1 \bullet h) \bullet f + g_1 h x_n \cdots x_{m-1} x_{m+1} = T_{g_1}(h) \bullet f + g_1 h x_n \cdots x_{m-1} x_{m+1}.$$

En consecuencia

$$T_{g_1}(h \bullet f) - T_{g_1}(h) \bullet f = g_1 h x_n \cdots x_{m-1} x_{m+1} \in J_m.$$

Así, hemos probado que en cualquier caso se verifica que

$$T_{g_1}(h \bullet f) - T_{g_1}(h) \bullet f \in J_m, \tag{6.1}$$

lo que concluye la demostración para $k = 1$.

Supongamos ahora que $k > 1$ y que el enunciado es válido para $k - 1$. Escribamos

$$\begin{gathered} T_{g_1} T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h \bullet f) - T_{g_1} T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h) \bullet f = \\ T_{g_1} \left[T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h \bullet f) - T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h) \bullet f \right] + \\ T_{g_1} \left(T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h) \bullet f \right) - T_{g_1} T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h) \bullet f. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Por la hipótesis de inducción

$$T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h \bullet f) - T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h) \bullet f \in J_m,$$

y por tanto

$$T_{g_1} \left[T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h \bullet f) - T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h) \bullet f \right] \in J_m. \tag{6.3}$$

Por otra parte, puesto que $T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h)$ será una combinación lineal de ciertos monomios

$$T_{g_2} \cdots T_{g_k}(h) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i h_i, \quad \text{con} \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, h_i \quad \text{monomios},$$

se sigue que

$$T_{g_1}\left(T_{g_2}\cdots T_{g_k}(h)\bullet f\right)-T_{g_1}\cdots T_{g_k}(h)\bullet f=\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\left(T_{g_1}(h_i\bullet f)-T_{g_1}(h_i)\bullet f\right)$$

y puesto que el enunciado es válido para $k=1$, se tiene que

$$T_{g_1}\left(T_{g_2}\cdots T_{g_k}(h)\bullet f\right)-T_{g_1}\cdots T_{g_k}(h)\bullet f\in J_m. \tag{6.4}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (6.2) , (6.3) y (6.4) se sigue que

$$T_{g_1}\cdots T_{g_k}(h\bullet f)-T_{g_1}\cdots T_{g_k}(h)\bullet f\in J_m+J_m\subseteq J_m.$$

□

Teorema 6.3.3. *El álgebra de Jordan $J(G, D)$ es m.p. degenerada.*

Demostración. Por [43, Proposition 3], $J(G,\partial)$ es un álgebra de Jordan prima degenerada. Veamos que es m.p. Hemos de probar que si $F\in M(J(G,D))\backslash\{0\}$, entonces $F(U)\neq 0$ para todo ideal no nulo U de $J(G,D)$. Fijemos $F\in M(J(G,D))\backslash\{0\}$ y U ideal no nulo de $J(G,D)$. Escribamos F en la forma

$$F=\lambda_0 Id_{J(G,D)}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k S_k$$

donde $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{K}$, y, para cada k, S_k es un producto finito de operadores de multiplicación T_g correspondientes a convenientes monomios g, esto es

$$S_k=T_{g_{k,1}}\cdots T_{g_{k,n_k}}$$

para convenientes $n_k\in\mathbb{N}$ y $g_{k,i}$ monomios.

Puesto que $F\neq 0$, ha de existir un monomio h tal que $F(h)\neq 0$. Sea p el máximo de los índices de las variables envueltas en $F(h)$, y tomemos $n:=p+1$. Por el Lema 6.3.1, existe un natural m tal que $m-(n-1)$ es un natural par y $x_n\cdots x_m\in U$. Por el Lema 6.3.2 se tiene que

$$S_k(h\bullet x_n\cdots x_m)-S_k(h)\bullet x_n\cdots x_m\in J_m,$$

y por tanto, para todo k con $1\leq k\leq m$,

$$F(h\bullet x_n\cdots x_m)-F(h)\bullet x_n\cdots x_m\in J_m.$$

Puesto que $F(h)\neq 0$ y envuelve variables de índice $< n$ se sigue que

$$F(h)\bullet x_n\cdots x_m=F(h)x_n\cdots x_m\notin J_m.$$

Por tanto $F(h\bullet x_n\cdots x_m)\notin J_m$ y en particular es no nulo. Como quiera que $x_n\cdots x_m\in U$, y en consecuencia $h\bullet x_n\cdots x_m\in U$, se sigue que $F(U)\neq 0$. Finalmente, por [15, Proposition 1], podemos concluir que $J(G,D)$ es m.p. □

CAPÍTULO 7

Problemas Abiertos

En este capítulo planteamos algunas de las cuestiones que nos han aparecido en el desarrollo del contenido de esta Memoria y a las que, hasta el momento, sólo hemos podido dar algunas respuestas parciales.

7.1. Igualdad de radicales

De todos es conocida la igualdad de los radicales primo y semiprimo en un álgebra A no necesariamente asociativa, radical que llamaremos Radical de Baer, $Baer(A)$. Esto es,

$$Baer(A) = \bigcap \{ \text{Ideales primos de } A\} = \bigcap \{ \text{Ideales semiprimos de } A\}.$$

Nuestro primer problema es ver si también se da la posible igualdad de los Radicales multiplicativamente primo y semiprimo.

Definición 7.1.1. Un ideal I de un álgebra A se dice *multiplicativamente primo* (abreviadamente *ideal m.p.*) si A/I es un álgebra m.p. Análogamente, se dice que un ideal I es *multiplicativamente semiprimo* (abreviadamente *ideal m.s.p.*) si A/I es un álgebra m.s.p. Se llama *Radical multiplicativamente primo* de A al ideal

$$\mu(A) = \bigcap \{ \text{Ideales m.p. de } A\}),$$

mientras que, siguiendo [11], llamamos *Radical multiplicativamente semiprimo* al ideal

$$\alpha(A) = \bigcap \{ \text{Ideales m.s.p. de } A\}.)$$

Es evidente que $\alpha(A) \subseteq \mu(A)$. Parece natural preguntarse si

Problema 1 *¿Se verifica que $\mu(A) = \alpha(A)$ para cualquier álgebra A?*
Hasta el momento sólo hemos encontrado algunas respuestas parciales afirmativas.

El Radical multiplicativamente semiprimo puede considerarse como la extensión a dimensión infinita del Radical de Albert [1]. Nótese que, si $\{U_i\}$ es una familia de ideales m.s.p. del álgebra A, entonces $\cap U_i$ es un ideal m.s.p. de A, ya que $\cap U_i$ es un ideal semiprimo de A y también $[\cap U_i : A] = \cap[U_i : A]$ es un ideal semiprimo de $\mathcal{M}(A)$. En consecuencia,

(1) $\alpha(A)$ es el más pequeño ideal m.s.p. de A.

(2) $\alpha(A) = 0$ si, y sólo si, A es un álgebra m.s.p.

El Radical multiplicativamente primo, $\mu(A)$, no tiene por qué ser un ideal m.p. y, por tanto, tan sólo podemos asegurar que si A es m.p. entonces $\mu(A) = 0$.
En cualquier álgebra se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Ideales Primos}\} & \subseteq & \{\text{Ideales Semiprimos}\} \\ \cup| & & \cup| \\ \{\text{Ideales m.p.}\} & \subseteq & \{\text{Ideales m.s.p.}\} \end{array}$$

y de ellas se obtiene que

$$\mathrm{Baer}(A) \subseteq \alpha(A) \subseteq \mu(A).$$

En caso asociativo, la situación se simplifica

Proposición 7.1.2. *Si A es un álgebra asociativa, entonces*

$$Baer(A) = \alpha(A) = \mu(A).$$

Demostración. Sea I un ideal de A. Nótese que, en virtud de que toda álgebra asociativa semiprima es m.s.p., se tiene que I es un ideal semiprimo (resp. primo) si, y sólo si, I es un ideal m.s.p. (resp. m.p.) En consecuencia $\alpha(A) = Baer(A) = \mu(A)$. □

La realidad es más tozuda en el caso no asociativo.

Ejemplo 7.1.3. Considérese el álgebra de Albert (Ejemplo 2.1.1), Puesto que $\mathcal{M}(A)$ no es semiprima, $\alpha(A) \neq 0$, de hecho $\alpha(A) = \mathbb{K}v$, y sin embargo la primidad de A, fuerza que $\mathrm{Baer}(A) = 0$.

No obstante, el problema que nos preocupa es la otra inclusión. En tal caso, veamos distintas circunstancias, en contexto semiprimo, que nos permiten asegurar la igualdad de los radicales. Comenzamos con el caso en que $\mathcal{M}(A)$ es prima, para ello necesitamos el siguiente

Lema 7.1.4. *Sea $A \neq 0$ un álgebra y sea I un ideal propio de A. Si $[I : A]$ es un ideal primo de $\mathcal{M}(A)$ entonces $(I : A)$ es un ideal m.p. de A.*

En consecuencia, si $I = (I : A)$, entonces el recíproco es cierto.

Demostración. Por [9, Corollary 3.14] sabemos que $(I : A)$ es un ideal m.s.p. de A. Notemos que

$$F \in [(I : A) : A] \quad \Leftrightarrow \quad M^{\sharp}(A)F \subseteq [I : A] \tag{7.1}$$

En efecto,

$$F \in [(I : A) : A] \quad \Leftrightarrow \quad F(A) \subseteq (I : A) \quad \Leftrightarrow \quad F(A)A + AF(A) \subseteq I \quad \Leftrightarrow$$

$$M^{\sharp}(A)(F(A)) \subseteq I \quad \Leftrightarrow \quad M^{\sharp}(A)F \subseteq [I : A].$$

Veamos que $[(I : A) : A]$ es un ideal primo de $M(A)$. Sean $F, G \in \mathcal{M}(A)$ tales que $F\mathcal{M}(A)G \subseteq [(I : A) : A]$. Por (7.1),

$$M^{\sharp}(A)F\mathcal{M}(A)G \subseteq [I : A].$$

Como $[I : A]$ se está suponiendo primo, se sigue que $M^{\sharp}(A)F \subseteq [I : A]$ o $G \in [I : A]$. Si $M^{\sharp}(A)F \subseteq [I : A]$, entonces, de nuevo por (7.1),

$$F \in [(I : A) : A].$$

Si $G \in [I : A]$, entonces es claro que $G \in [(I : A) : A]$.

Resumiendo, $(I : A)$ es un ideal semiprimo de A y $[(I : A) : A]$ es un ideal primo de $\mathcal{M}(A)$. Luego $A/(I : A)$ es un álgebra semiprima y $M(A/(I : A))$ es un álgebra prima. Por [15, Proposition 1], $A/(I : A)$ es un álgebra m.p., esto es $(I : A)$ es un ideal m.p. de A.

□

Corolario 7.1.5. *Si A es un álgebra con $\mathcal{M}(A)$ prima, entonces*

$$\mathrm{Ann}(A) = \alpha(A) = \mu(A).$$

Demostración. Sea A un álgebra tal que $\mathcal{M}(A)$ es prima, esto es, $0 = [0 : A]$ es un ideal primo de $\mathcal{M}(A)$. Aplicando el Lema 7.1.4, se tiene que $(0 : A) = \mathrm{Ann}(A)$ es un ideal m.p. de A, y por tanto $\mu(A) \subseteq \mathrm{Ann}(A)$. Finalmente basta recordar que en nuestro contexto $\mathrm{Ann}(A) = \alpha(A)$ véase por ejemplo [9, Theorem 3.8].

□

Otras dos respuestas al problema de la igualdad nos las proporciona la teoría de estructura.

Proposición 7.1.6. *Si A es un álgebra ε-descomponible, entonces*

$$\mathrm{Ann}(A) = \mathrm{Baer}(A) = \alpha(A) = \mu(A).$$

Demostración. Supuesto que A es un álgebra ε-descomponible, tenemos

$$\mathrm{Ann}(A) = \mathrm{Ann}\left(\left(\sum_{B\in\mathbf{m}_A^\pi} B\right)^\wedge\right) = \mathrm{Ann}\left(\sum_{B\in\mathbf{m}_A^\pi} B\right) = \bigcap_{B\in\mathbf{m}_A^\pi} \mathrm{Ann}(B).$$

En el caso en que $\mathrm{Ann}(A) \neq 0$, sabemos por [9, Proposition 2.2] que $\mathrm{Ann}(A) \in \mathbf{m}_A^\pi$. Siguiendo la notación de [9] escribiremos

$$\mathbf{m}_A^* = \begin{cases} \mathbf{m}_A^\pi & si \quad \mathrm{Ann}(A) = 0 \\ \mathbf{m}_A^\pi \backslash \{\mathrm{Ann}(A)\} & si \quad \mathrm{Ann}(A) \neq 0. \end{cases}$$

y

$$\mathbf{M}_A^* = \begin{cases} \mathbf{M}_A^\pi & si \quad \widehat{A^2} = A \\ \mathbf{M}_A^\pi \backslash \{A^2\} & si \quad \widehat{A^2} \neq A. \end{cases}$$

Puesto que $\mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(A)) = A$, se sigue de lo anterior que

$$\mathrm{Ann}(A) = \bigcap_{B\in\mathbf{m}_A^*} \mathrm{Ann}(B).$$

Por otra parte, por el Teorema de Yood [9, Theorem 4.6], tenemos que $\mathcal{M}(A)$ es semiprima y $\mathbf{M}_A^* = \{\mathrm{Ann}(B) \,:\, B \in \mathbf{m}_A^*\}$. Además, por [12, Theorem 2.6], $\mathbf{M}_A^*$ coincide con el conjunto de los ideales ε-cerrados m.p. de A. En consecuencia,

$$\mu(A) \subseteq \bigcap_{U\in\mathbf{M}_A^*} U = \bigcap_{B\in\mathbf{m}_A^*} \mathrm{Ann}(B) = \mathrm{Ann}(A).$$

La demostración concluye teniendo en cuenta las inclusiones

$$\mathrm{Ann}(A) \subseteq \mathrm{Baer}(A) \subseteq \alpha(A) \subseteq \mu(A).$$

$\square$

Otra respuesta afirmativa al problema de la igualdad lo proporcionan las álgebras semiprimas con centro grande. Recordemos que un álgebra A se dice tener *centro grande* si verifica que todo ideal no nulo de A tiene corte no nulo con el centro Z_A de A. Sabemos que si A es un álgebra semiprima con centro grande, entonces A es m.s.p. [33, Proposition I.4.7]. Hagamos la preparación de este resultado en dos etapas.

Proposición 7.1.7. (Subida de ideales semiprimos/primos) *Sean A un álgebra, B una subálgebra de A, e I un ideal semiprimo (resp. primo) de B. Si V es un ideal de A, maximal con respecto a la propiedad $V \cap B \subseteq I$, entonces V es un ideal semiprimo (resp. primo) de A.*

Demostración. Supongamos que I es un ideal primo de B y V es un ideal de A, maximal con respecto a la propiedad $V \cap B \subseteq I$. Si J y K son ideales de A tales que $JK \subseteq V$, entonces $(J+V) \cap B$ y $(K+V) \cap B$ son ideales de B tales que

$$((J+V) \cap B)(K+V) \cap B) \subseteq V \cap B \subseteq I.$$

Ya que I es un ideal primo de B, se tiene que o bien $(J+V) \cap B \subseteq I$ o $(K+V) \cap B \subseteq I$, y por tanto, o bien $J \subseteq V$ o $K \subseteq V$. En consecuencia, V es un ideal primo de A. Análogamente para el caso semiprimo.

$\square$

Proposición 7.1.8. *Para toda álgebra A se verifica que*

$$\mathrm{Baer}(Z_A) = \mathrm{Baer}(A) \bigcap Z_A = \alpha(A) \bigcap Z_A = \mu(A) \bigcap Z_A.$$

Demostración. Sea U un ideal semiprimo de A. Si I es un ideal de Z_A tal que $I^2 \subseteq U \cap Z_A$, entonces IA es un ideal de A tal que $(IA)^2 \subseteq I^2 A \subseteq U$, luego $IA \subseteq U$, y por tanto $I \subseteq (U : A) = U$. En consecuencia, $I \subseteq U \cap Z_A$. Por tanto, $U \cap Z_A$ es un ideal semiprimo de Z_A.

De lo anterior se sigue que

$$\mathrm{Baer}(Z_A) \subseteq \bigcap_{\substack{U \trianglelefteq A \\ semiprimo}} (U \cap Z_A) = \left(\bigcap_{\substack{U \trianglelefteq A \\ semiprimo}} U \right) \cap Z_A = \mathrm{Baer}(A) \cap Z_A.$$

Por otra parte, de las inclusiones $\mathrm{Baer}(A) \subseteq \alpha(A) \subseteq \mu(A)$, se sigue que

$$\mathrm{Baer}(A) \cap Z_A \subseteq \alpha(A) \cap Z_A \subseteq \mu(A) \cap Z_A.$$

Dado un ideal primo P de Z_A, por la Proposición 7.1.7, si V es un ideal de A maximal con respecto a la condición $V \cap Z_A \subseteq P$, entonces V es un ideal primo de A. Veamos que V es un ideal m.p. de A. Para ello, teniendo en cuenta [15, Proposition 1], nos bastará probar que $[V : A]$ es un ideal semiprimo de $\mathcal{M}(A)$, esto es, si $F \in \mathcal{M}(A)$ es tal que $F\mathcal{M}(A)F \subseteq [V : A]$, entonces $F \in [V : A]$. En efecto, si $F \in \mathcal{M}(A)$ es tal que $F\mathcal{M}(A)F \subseteq [V : A]$, entonces $F(\langle F(A) \rangle) \subseteq V$, y por tanto también $F(\langle F(A) \rangle + V) \subseteq V$, y en particular

$$F((\langle F(A) \rangle + V)A) \subseteq V,$$

y más en particular

$$F([(\langle F(A) \rangle + V) \cap Z_A]A) \subseteq V,$$

y por tanto para todo $G \in \mathcal{M}(A)$ se tiene que $GF([(\langle F(A)\rangle + V) \cap Z_A]A) \subseteq V$, y en consecuencia

$$[(\langle F(A)\rangle + V) \cap Z_A]GF(A) \subseteq V.$$

Variando G en $\mathcal{M}(A)$ obtenemos que $[(\langle F(A)\rangle + V) \cap Z_A]\langle F(A)\rangle \subseteq V$, y en consecuencia $[(\langle F(A)\rangle + V) \cap Z_A](\langle F(A)\rangle + V) \subseteq V$, y en particular

$$[(\langle F(A)\rangle + V) \cap Z_A]^2 \subseteq V,$$

de donde se sigue que $[(\langle F(A)\rangle + V) \cap Z_A]^2 \subseteq V \cap Z_A \subseteq P$. Como P es un ideal semiprimo de Z_A se sigue que $(\langle F(A)\rangle + V) \cap Z_A \subseteq P$, y por tanto de la definición de V se sigue que $\langle F(A)\rangle + V = V$, luego $\langle F(A)\rangle \subseteq V$, y en consecuencia $F \in [V : A]$.

Puesto que a cada ideal primo P de Z_A le podemos asignar un ideal m.p. V_P de A tal que $V_P \cap Z_A \subseteq P$, se sigue que

$$\mu(A) \cap Z_A \subseteq \left(\bigcap_{\substack{P \trianglelefteq Z_A \\ primo}} V_P \right) \cap Z_A = \bigcap_{\substack{P \trianglelefteq Z_A \\ primo}} (V_P \cap Z_A) \subseteq \bigcap_{\substack{P \trianglelefteq Z_A \\ primo}} P = \mathrm{Baer}(Z_A).$$

Encadenando las anteriores inclusiones se obtiene

$$\mathrm{Baer}(Z_A) \subseteq \mathrm{Baer}(A) \cap Z_A \subseteq \alpha(A) \cap Z_A \subseteq \mu(A) \cap Z_A \subseteq \mathrm{Baer}(Z_A),$$

de donde se sigue el enunciado.

□

Corolario 7.1.9. *Para un álgebra A con centro grande equivalen:*

(i) Z_A *es semiprima.*

(ii) $Baer(A) = 0$.

(iii) $\alpha(A) = 0$

(iv) $\mu(A) = 0$

Demostración. Las implicaciones (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) son ciertas en general: Las dos primeras son bien conocidas y la última es consecuencia de la Proposición anterior. Finalmente, veamos que (i) $\Rightarrow$ (iv). Si Z_A es semiprima, entonces $\mathrm{Baer}(Z_A) = 0$, y por la Proposición anterior $\mu(A) \cap Z_A = 0$. Como A se supone con centro grande se concluye que $\mu(A) = 0$. □

Proposición 7.1.10. *Sea A un álgebra. Sea I un ideal de A y consideremos la aplicación cociente $q : A \to A/I$. Entonces*

$$\mu(A/U) = q\left(\bigcap\{I \ : \ U \subseteq I \trianglelefteq A \text{ con } I \text{ ideal m.p.}\}\right).$$

En consecuencia,

(i) Si $\mu(A/I) = 0$, entonces $\mu(A) \subseteq I$.

(ii) Si $I \subseteq \mu(A)$, entonces $\mu(A/I) = \mu(A)/I$.

Demostración. Puesto que $q : A \to A/I$ induce un isomorfismo de $h^{\mathcal{I}_A}(I)$ en $\mathcal{I}_{A/I}$, por el Teorema de isomorfía del doble cociente, se tiene que

$$q(A)/q(J) \cong A/J,$$

se sigue que

$$q(J) \text{ es un ideal m.p. de } A/I \quad \Leftrightarrow \quad J \text{ es un ideal m.p. de } A.$$

En consecuencia,

$$\mu(A/I) = \bigcap\{K \ : \ K \trianglelefteq A/I \text{ con } K \text{ ideal m.p.}\} =$$

$$\bigcap\{q(J) \ : \ I \subseteq J \trianglelefteq A \text{ con } J \text{ ideal m.p.}\} =$$

$$qq^{-1}\left(\bigcap\{q(J) \ : \ I \subseteq J \trianglelefteq A \text{ con } J \text{ ideal m.p.}\}\right) =$$

$$q\left(\bigcap\{q^{-1}(q(J)) \ : \ I \subseteq J \trianglelefteq A \text{ con } I \text{ ideal m.p.}\}\right) =$$

$$q\left(\bigcap\{J \ : \ I \subseteq J \trianglelefteq A \text{ con } I \text{ ideal m.p.}\}\right).$$

□

Corolario 7.1.11. *Para toda álgebra A se verifica que*

$$\mu(A/\mu(A)) = 0, \quad \mu(A/\alpha(A)) = \mu(A)/\alpha(A), \quad y \quad \mu(A/\mathrm{Baer}(A)) = \mu(A)/\mathrm{Baer}(A).$$

El problema de la igualdad puede reducirse al problema de si toda álgebra m.s.p. A es tal que $\mu(A) = 0$.

Corolario 7.1.12. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de álgebras estable por paso a cocientes. Equivalen:*

(i) Para toda álgebra $A \in \mathcal{C}$ se verifica que $\alpha(A) = \mu(A)$.

(ii) Para toda álgebra $A \in \mathcal{C}$ tal que A es m.s.p. se verifica que $\mu(A) = 0$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Es obvia.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Dada un álgebra $A \in \mathcal{C}$, como quiera que $A/\alpha(A) \in \mathcal{C}$ y $\alpha(A/\alpha(A)) = 0$, se sigue de (ii) que también $\mu(A/\alpha(A)) = 0$. Luego, por el corolario anterior, $\mu(A)/\alpha(A) = 0$, y por tanto $\mu(A) \subseteq \alpha(A)$. En conclusión $\alpha(A) = \mu(A)$. □

En este sentido conviene señalar igualmente que en virtud de [8, Proposition 3.3.], $\mu(A)$ es un ideal de A contenido en $\pi-\mathrm{Rad}(A)$, y por tanto, aplicando el Corolario 5.4.6 obtenemos que

Proposición 7.1.13. *Si A es un álgebra m.s.p. entonces $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A)$ es un álgebra m.s.p. π-radical.*

Como consecuencia, podemos probar que

Corolario 7.1.14. *Si A es un álgebra m.s.p de dimensión finita, entonces*

$$\mu(A) = 0$$

7.2. Relación entre los centroides

Después del Teorema de caracterización de la complementación, Teorema 4.1.2, es esencial el conocimiento del centroide para determinar si un álgebra semiprima A es o no π-complementada. Según hemos visto en la Proposición 4.4.20, si A es un álgebra m.s.p. Entonces

$$\Gamma_{\mathcal{M}(A)} \subseteq \Gamma_A \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(A)}.$$

Nuestro segundo problema es

Problema 2 *¿ Las inclusiones $\Gamma_{\mathcal{M}(A)} \subseteq \Gamma_A \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(A)}$ son estrictas?*

En este sentido podemos arrojar cierta luz en el sentido siguiente:

Puesto que $\mathcal{M}^\sharp(A)(A) = A^2$, es fácil concluir que

$$\Gamma_{\mathcal{M}(A)} \subseteq \Gamma_A \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}^\sharp(A)} \subseteq \Gamma_{A^2}.$$

Pues bien, la inclusión

$$\Gamma_A \subseteq \Gamma_{A^2}. \tag{7.2}$$

puede ser estricta.

Ejemplo 7.2.1. Sea H un espacio de Hilbert infinito dimensional sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Usando la notación del Ejemplo 5.2.11, es bien conocido y fácil de ver que $\mathfrak{F}(H)$ es un álgebra central simple sobre $\mathbb{K}$, así como que es un ideal de $\mathfrak{B}(H)$ (álgebra de Banach de todos los operadores lineales acotados en H). Consideremos el álgebra A definida en el Ejemplo 5.2.11 esto es, el espacio vectorial $\mathfrak{F}(H) \times \mathfrak{F}(H) \times \mathbb{K}$ dotado con el producto definido por

$$(F_1, G_1, \alpha_1)(F_2, G_2, \alpha_2) := (F_1F_2 + \alpha_2F_1T + \alpha_1TF_2, G_1G_2 + \alpha_2G_1T + \alpha_1TG_2, 0),$$

donde T es un operador lineal acotado T en H con rango infinito dimensional que satisface $T^2 = 0$. Es claro que A^2 es isomorfa a la álgebra suma directa $\mathfrak{F}(H) \oplus \mathfrak{F}(H)$, tenemos un isomorfismo de álgebras desde Γ_{A^2} en $\mathbb{K}^2$. Con más precisión, $\Gamma_{A^2} = \{f_{\lambda,\mu} : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$ donde, para $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $f_{\lambda,\mu} : A^2 \to A^2$ se define por $f_{\lambda,\mu}(F, G, 0) = (\lambda F, \mu G, 0)$. Supongamos que $f : A \to A$ es un centralizador en A. Como $f_{|A^2} \in \Gamma_{A^2}$, existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tal que $f(F, G, 0) = (\lambda F, \mu G, 0)$ para todo $F, G \in \mathfrak{F}(H)$. Escribimos $f(0, 0, 1) = (R, S, \nu)$, y nótese que para todo $x \in H$ tenemos que

$$f(0, 0, 1)(x \otimes x, x \otimes x, 0) = (R, S, \nu)(x \otimes x, x \otimes x, 0)$$

$$= (R(x) \otimes x + \nu T(x) \otimes x, S(x) \otimes x + \nu T(x) \otimes x, 0),$$

y por otro lado

$$f(0, 0, 1)(x \otimes x, x \otimes x, 0) = f((0, 0, 1)(x \otimes x, x \otimes x, 0)) = f(T(x) \otimes x, T(x) \otimes x, 0)$$

$$= (\lambda T(x) \otimes x, \mu T(x) \otimes x, 0).$$

Por lo tanto

$$R(x) \otimes x + \nu T(x) \otimes x = \lambda T(x) \otimes x \text{ y } S(x) \otimes x + \nu T(x) \otimes x = \mu T(x) \otimes x,$$

y de ahí

$$R(x) = (\lambda - \nu)T(x) \text{ y } S(x) = (\mu - \nu)T(x).$$

Se sigue del hecho que T tiene rango infinito dimensional que $\lambda = \mu = \nu$ y $R = S = 0$, y como resultado $f(F, G, \alpha) = \nu(F, G, \alpha)$ para todo $(F, G, \alpha) \in A$. Así Γ_A es isomorfo a $\mathbb{K}$, y la inclusión (7.2) es estricta.

Como consecuencia, dado que $\mathrm{Ann}_A(I_1) = I_2$, $\mathrm{Ann}_A(I_2) = I_1$, y $I_1 \oplus I_2 = A^2 \neq A$, se tiene que

"A no es π-complementada, mientras que A^2 si es π-complementada".

Obsérvese que este ejemplo podría dar lugar a una técnica que nos pudiese ver que la primera inclusión es estricta. Por otro lado, el ejemplo no nos revela cual de las dos últimas inclusiones es estricta.

Bibliografía

[1] A. A. Albert, The radical of a non-associative álgebra. *Bull. Amer. Math. Soc.* **48** (1942), 891-897.

[2] P. Ara and M. Mathieu, *Local multipliers of C^*-algebras.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, London, 2003.

[3] W. E. Baxter and W. S. Martindale 3rd, Central closure of semiprime nonassociative rings. *Comm. Algebra* **7** (1979), 1103-1132.

[4] R. E. Beck, B Kolman (Eds), *Computers in Nonassociative Rings and Algebras.* New York, Acad. Press (1977)

[5] K. I. Beidar, W. S. Martindale 3rd, and A. V. Mikhalev, *Rings with Generalized Identities.* Marcel Dekker, 1996.

[6] S. K. Berberian, *Baer $*$-rings.* Grudlehren Math. Wiss., Band **195**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[7] G. F. Birkenmeier, J. K. Park, and S. T. Rizvi, The structure of rings of quotients. *J. Algebra* **321** (2009), 2545-2566.

[8] J. C. Cabello and M. Cabrera, Structure theory for multiplicatively semiprime algebras. *J. Algebra* **282** (2004), 386-421.

[9] J. C. Cabello and M. Cabrera, Algebras whose multiplication álgebra is semiprime. A decomposition theorem. *J. Algebra* **319** (2008), 911-937.

[10] J. C. Cabello, M. Cabrera, and A. Fernández, π-Complemented algebras through pseudocomplemented lattices. *Order* **29** (2012), 463-479

[11] J. C. Cabello, M. Cabrera, G. López, and W. S. Martindale 3rd, Multiplicative semiprimeness of skew Lie Algebras, *Comm. Algebra* **32** (2004), 3487-3501.

[12] J. C. Cabello, M. Cabrera, and E. Nieto, Closed prime ideals in algebras with semiprime multiplication algebra. *Comm. Algebra* **35** (2007), 4245-4276.

[13] J. C. Cabello, M. Cabrera, and E. Nieto, ε-complemented algebras. *J. Algebra.* **349** (2012), 234-267.

[14] M. Cabrera, Ideals which memorize the extended centroid. *J. Algebra Appl.* **1** (2002), 281-288.

[15] M. Cabrera and A. A. Mohammed, Extended centroid and central closure of the multiplication algebra. *Comm. Algebra* **27** (1999), 5723-5736.

[16] M. Cabrera and A. A. Mohammed, A representation theorem for algebras with commuting involutions. *Linear Algebra Appl.* **306** (2000), 25-31.

[17] M. Cabrera and A. Rodríguez, Extended centroid and central closure of semiprime normed algebras. A first approach. *Comm. Algebra* **18** (1990), 2293-2326.

[18] M. Cabrera and A. R. Villena, Multiplicative-semiprimeness of nondegenerate Jordan algebras. *Comm. Algebra* **32** (2004), 3995-4003.

[19] M. Chebotar, On a problem by Beidar concerning the central closure. *Linear Algebra Appl.* **429** (2008), 835-840.

[20] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity.* London Math. Soc. Monographs New Series 24. Clarendon Press. Oxford, 2000.

[21] T. S. Erickson, W. S. Martindale III, and J. M. Osborn, Prime nonassociative algebras. *Pacific J. Math.* **60** (1975), 49-63.

[22] D. R. Finston, On multiplication algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **293** (1986), 807-818.

[23] N. Jacobson, A note on nonassociative algebras. *Duke Math.J.* **3** (1937), 544-548.

[24] N. Jacobson, Abraham Adrian Albert 1905-1972. *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974), 1075-1100.

[25] P. Jordan, Ueber Verallgemeinerungsmöglichkeiten des Formalismus der Quantenmechanik. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys,* **41** (1933), 537-539

[26] P. Jordan, J. von Neumann, and E. Wigner, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. *Ann. of Math.* **35** (1934), 29-64.

[27] J. Lambek, *Lectures on rings and modules.* Chelsea Publ. Com., 1986.

[28] N. J. Laustsen, R. J. Loy, and Ch. J. Read, The lattice of closed ideals in the Banach algebra of operators on certain Banach spaces. *J. Funct. Anal.* **214** (2004), 106-121. Erratum **220** (2005), 240-241.

[29] T.-K. Lee and T.-L. Wong, Semiprime algebras with finiteness conditions. *Comm. Algebra* **31** (2003), 1823-1835.

[30] J. Lohmus, E. Paal and L. Sorgsepp, About nonassociativity in mathematics and physics. *Acta Applic. Math*, **50** (1998), 3-31

[31] K. McCrimmon and E. Zelmanov, The structure of strongly prime quadratic Jordan algebras. *Adv. Math.* **69** (1988), 133-222.

[32] Yu. A. Medvedev and E. I. Zelmanov, Some counter-examples in the theory of Jordan algebras. *Nonassociative algebraic models* (Zaragoza, 1989), 1-16, Nova Sci. Publ., Commack, NY, 1992.

[33] A. A. Mohammed, *Álgebras multiplicativamente primas: visión algebraica y analítica.* Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada, 2000.

[34] S. Okubo, *Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics.* Cambridge University Press (1995).

[35] S. V. Pchelintsev, Prime algebras and absolute zero divisors. *Math. USSR Izvestiya* **28** (1987), 79-98.

[36] F. L. Pritchard, Ideals in the multiplicacion algebra of a nonassocitive K-algebra. *Comm. Algebra* **21** (1993), 4541-4559.

[37] F. L. Pritchard, The radical and the multiplication algebra of a non-associative algebra. *Algebras Groups Geom.* **11** (1994), 329-345.

[38] Yu. P. Razmyslov, Identities of algebras and their representations. *Translations of Math. Monographs*, Vol 138. AMS, 1994.

[39] A. Rodríguez, Isometries and Jordan isomorphisms onto C^*-algebras. *J. Operator Theory* **40** (1998), 71-85.

[40] B. Sari, Th. Schlumprecht, N. Tomczak-Jaegermann, and V. G. Troitdky, On norm closed ideals in $L(\ell_p, \ell_q)$. *Studia Math.* **179** (2007), 239-262.

[41] I. P. Shestakov, Superalgebras and counterexamples. *Siberian Math. J.* **32** (1992), 1052-1060.

[42] I. P. Shestakov, Superalgebras as a building material for constructing counterexamples. *Hadronic mechanics and nonpotential interactions*, Part 1 (Cedar Falls, IA, 1990), 53-64, Nova Sci. Publ., Commack, NY, 1992.

[43] V. G. Skosyrskii, Prime Jordan algebras and the Kantor construction. *Algebra and Logic* **33** (1994), 169-179.

[44] R. Wisbauer. *Modules and algebras: bimodule structure and group actions on algebras.* Addison Wesley Limited, 1996

[45] B. Yood, Closed prime ideals in topological rings. *Proc. London Math. Soc.* **24** (1972), 307-323. Addison Wesley Limited, 1996.

[46] E. I. Zel'manov, On prime Jordan algebras II. *Siberian Math. J.* **24** (1983), 89-104.

Índice alfabético