DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

EXPLORACIÓN DE PATRONES NUMÉRICOS MEDIANTE CONFIGURACIONES PUNTUALES. ESTUDIO CON ESCOLARES DE PRIMER CICLO DE SECUNDARIA (12-14 AÑOS)

Encarnación Castro Martínez

INDICE

PRESENTACIÓN

Esta publicación surge de un trabajo de investigación realizado por la autora para obtener el titulo de doctora en Matemáticas por la Universidad de Granada, en el Programa de Doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática.

La investigación ha sido dirigida por el Dr. Luis Rico y ha sido financiada, en parte, por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica a través del proyecto "Evaluación de Conocimientos, Procesos y Actitudes en Matemáticas" PB90-0849.

Para llevar a cabo este trabajo, además de la investigadora y del director del mismo, han participado grupos de alumnos y otros profesores, sin cuya colaboración no hubiera sido posible su realización. Estas personas han sido: el profesor de matemáticas D. Evaristo González y el grupo de alumnos de 8º del curso 92-93 del Colegio Público Sierra Nevada, que han colaborado en el trabajo de campo; también han colaborado los alumnos de 8º del curso 92-93 del colegio Público Fuente Nueva y su profesor de matemáticas D. Miguel Serrano, los cuales han realizado las pruebas necesarias para contrastar con el trabajo de campo.

Para la realización del diseño de la investigación así como en el análisis y tratamiento de los datos hemos recibido la ayuda inestimable del Dr. Fernández Cano y del Dr. Gutierrez Pérez del área MIDE.

El trabajo es una aproximación curricular a los números figurados como sistema simbólico de representación de números, que permite profundizar en un tipo de análisis estructural de los números naturales.

Las funciones cognitivas que se asignan a los números naturales se activan y ponen en práctica en una gran variedad de contextos que vamos a denominar, con carácter general, **contextos cardinales, ordinales y figurativos.**

Los contextos cardinales y ordinales son frecuentes tanto en el medio escolar como en el medio extraescolar; los términos cardinalidad y ordinalidad son familiares y ponen esta idea de manifiesto. Sin embargo el contexto figurativo sólo se emplea, brevemente, al inicio del aprendizaje escolar del número; se abandona cuando se introduce el sistema decimal de numeración y se utiliza esporádicamente para ilustrar la presentación de algún concepto aislado.

Nuestro trabajo se resume en una propuesta de:

* integrar el sistema de representación de los números naturales denominado **configuración puntual** con el sistema decimal de numeración y con el desarrollo aritmético de los números;

* trabajar con secuencias numéricas lineales y cuadráticas, analizando el patrón que las define mediante modelos puntuales y los desarrollos operatorios;

* trabajar los procedimientos de continuar una secuencia, extrapolar términos, generalizar y utilizar el término general en la obtención de términos concretos.

Nos proponemos introducir a los escolares del primer ciclo de secundaria (12-14 años) en el sistema simbólico de representación para números naturales que denominamos **configuración puntual** y emplear estas representaciones como recurso visual para realizar un análisis estructural de números que comparten un mismo patrón de representación obteniendo su desarrollo aritmético (aditivo o multiplicativo). A partir de las conexiones establecidas entre la secuencia numérica, la secuencia de representaciones y la secuencia de desarrollos aritméticos, pretendemos estudiar la comprensión que manifiestan estos escolares en establecer relaciones entre números, reconocer y utilizar patrones y proponer una generalización a la estructura común que tienen los términos de una secuencia.

Para llevar a término la investigación hemos utilizado, fundamentalmente, una estrategia metodológica de Investigación-Acción, complementada por una evaluación cuantitativa apoyada por un diseño cuasiexperimental. Los sujetos con los que hemos realizado nuestra experiencia han sido alumnos del sistema escolar vigente durante dos segmentos de tiempo tomados cuando cursaban los niveles de 7º y 8º.

La organización dada a nuestro informe de investigación es de 6 capítulos. La distribución por capítulos es como sigue:

- El capítulo 1, se dedica a delimitar el problema y a establecer el marco conceptuad en el que abordar el mismo. Para precisar el marco conceptuad con el que abordamos nuestro trabajo comenzamos señalando algunas prioridades en los cambios curriculares actualmente en curso, así como algunas incoherencias; una de estas incoherencias es la carencia de un sistema adecuado de representación para el estudio de las sucesiones, y es esta la idea que sirve de punto de partida al trabajo. La segunda aproximación se hace desde la psicología cognitiva y, más concretamente, desde la teoría del procesamiento de la información. Nos hemos centrado en una revisión de los estudios realizados sobre cognición matemática relativos a modelos y sistemas de representación con los que abordar el análisis de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas y, muy en especial, los fenómenos de comprensión del conocimiento matemático y su valoración.

Debido a la naturaleza del contenido con el que vamos a trabajar, destacamos la relevancia cognitiva de algunas nociones como: patrón, modelo, iteración y recursión. Las investigaciones realizadas por autores de prestigio internacional nos proporcionan un marco conceptual para el análisis sobre el pensamiento y la habilidad matemática y sobre la visualización, componentes relevantes en nuestro estudio.

- En el capítulo 2 se presenta la metodología a utilizar en la investigación del problema planteado. Presentamos nuestro propio modelo de Investigación-Acción en línea con las teorías propuestas por especialistas en este campo. Se presentan así mismo las herramientas a utilizar en el análisis de los datos cualitativos: sistema tricategorial que permitirá analizar las relaciones **profesor-alumno** (mediante las Categorías de Interacción Didáctica), **profesor-disciplina** (a través de las Categorías de Interacción Didáctica y la Categorías de Contenido Matemático), **alumno-disciplina** (mediante las Categorías de Comprensión del Contenido).

- El capítulo 3 recoge las fases de Planificación, Acción, Observación y Reflexión así como sus resultados en 7º nivel. Consideramos el trabajo en este curso un estudio piloto que sirve de base para la continuación posterior de la investigación.

- En el capítulo 4, por su parte, se presenta el proceso correspondiente a 8º nivel en sus fases de Planificación, Acción, Observación y Reflexión. El trabajo en 8º nivel lo consideramos el núcleo de la investigación, en el se plasma la puesta en práctica de nuestra preocupación temática, que queda delimitada por el trabajo con:

dos conceptos matemáticos;

* secuencias lineales
* secuencias cuadráticas

tres sistemas simbólicos de representación;

* patrones puntuales
* secuencia usual de números
* desarrollos aritméticos

cinco actuaciones o procedimientos fundamentales;

* traducción, entre los sistemas simbólicos, de los términos de una secuencia
* continuación de una secuencia
* extrapolación de un término de una secuencia
* expresión del término general de una secuencia
* obtención de primeros términos a partir del término general.

- El capítulo 5 está dedicado a lo que hemos llamado Evaluación externa de la investigación en el que se realiza un estudio cuasiexperimental; el grupo clase con el que hemos llevado el trabajo de campo de nuestra experiencia lo consideramos grupo experimental, actuando otro grupo similar como grupo de control.

- Por último, las conclusiones a las que hemos llegado en nuestro trabajo en las que se incluye un apartado dedicado a hallazgos y otro a las líneas de investigación abiertas, constituyen el capítulo 6 de esta memoria de investigación.

CAPITULO I
DELIMITACION DEL PROBLEMA

I.1 Introducción
I.1.1 Encuadre

El campo general en que se sitúa este trabajo lo denominamos *Pensamiento Numérico*, línea de estudio e investigación en Didáctica de la Matemática que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos númericos en el Sistema Educativo y en el medio social. El Pensamiento Numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas.

Más en particular, el Pensamiento Numérico se interesa por:

* la elaboración, codificación y comunicación de sistemas simbólicos con los que expresar los conceptos y relaciones de una estructura numérica;

* la organización, sistematización y desarrollo de diferentes actividades cognitivas que surgen y encuentran un modo de actuación en el marco de una estructura numérica;

* los modos de abordar, interpretar y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos y cuestiones que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica.

La estructura numérica sobre la que trabajamos en este estudio es la determinada por el conjunto de los números naturales, con sus operaciones usuales suma y producto y la relación de orden.

Los sistemas simbólicos para codificar y representar conceptos y relaciones numéricas han sido objeto de investigación desde el análisis histórico (Dhombres, 1987; Heath, 1981; Guitel, 1975; Ifrah, 1987), lingüístico (Hurford, 1990), antropológico (Crump, 1993; Hallpike, 1986; Menninger, 1969), filosófico (Husserl, 1972) y psicológico (Fuson, 1988; Piaget y Szeminska, 1975; Resnick, 1983).

En su análisis estructural, Guitel establece tres tipos de numeraciones: *numeraciones figuradas, habladas y escritas* (pg: 19), dando a las primeras un sentido amplio que incluye las representaciones puntuales. Esta consideración de un triple sistema de representación para los números naturales, que considera como sistemas alternativos las representaciones mediante figuras, los términos de la secuencia numérica y los sistemas de numeración, es reconocida igualmente por distintos historiadores; en particular, destacan el interés del sistema simbólico de representación de números que denominamos***números figurados.*** Así, Heath (pgs:76-84) argumenta que el origen de los números figurados se encuentra en los primeros pitagóricos y señala los distintos autores griegos que trabajan sobre estos conceptos. Dhombres (pgs: 50-54) indica que la corriente pitagórica en aritmética ha influido en la enseñanza hasta el Renacimiento, a través de *La introducción a la Aritmética* del neopitagórico Nicomano de Gerasa y de su adaptación latina *Institutio Aritmética* de Boecio. Eves (1976, pg: 50) señala que hay un acuerdo general respecto a que los números figurados tuvieron su origen en los primeros pitagóricos y afirma que *"las representaciones mediante puntos según ciertas configuraciones geométricas representan un enlace entre la geometría y la aritmética"*. Crossley (pgs: 30- 36) interpreta con detalle algunos de los primeros documentos históricos en los que aparecen los números figurados.

Las funciones cognitivas asignadas a los números naturales se organizan en términos de tres clases de actividades (Castro, Rico y Castro, 1988; pgs: 23-30), que surgen de tres cuestiones fundamentales, a cuya respuesta contribuyen los números naturales:

* primera: *contar y cardinar*, como respuesta a la pregunta ¿cuántos hay?;

* segunda: *secuenciar y ordenar,* como respuesta a la pregunta ¿qué posición ocupa?;

* tercera: *representar y analizar*, como respuesta a las preguntas ¿cúal es la cantidad?, ¿qué estructura tiene?

Los estudios sobre iniciación y desarrollo de estas funciones han ocupado una parte considerable de las investigaciones de los psicólogos que han trabajado sobre estos conceptos matemáticos; los estudios sobre conteo, cardinación, secuenciación y ordenación han tenido un lugar predominante (Bideaud, Meljac y Fischer, 1992), pero no cabe duda que también se ha trabajado sobre representaciones numéricas y que estos estudios se han incrementado recientemente. La psicología cognitiva y, en especial, la teoría del procesamiento de la información con la noción de representación, han hecho contribuciones en este campo (Hiebert y Carpenter, 1992; pgs: 65-97).

Las funciones señaladas se significan en una gran variedad de contextos, que vamos a denominar, con carácter general, *contextos cardinales, ordinales y figurativos*. El uso de los números naturales en contextos cardinales y ordinales forma parte de la actividad cotidiana de las personas, ya que se presentan en multitud de fenómenos y situaciones (Cockroft, 1985; pgs: 13-15); en nuestra sociedad actual es mucho menos frecuente la presencia de contextos figurativos.

El interés de los contextos numéricos es considerable, por ello el sistema escolar dedica gran cantidad de tiempo y esfuerzos en proporcionar a los escolares competencia sobre la estructura de los naturales.

El dominio sobre los números naturales supone un dominio de diferentes sistemas simbólicos, que activan diferentes funciones cognitivas y se combinan ante contextos y situaciones en los que intervienen diferentes niveles de complejidad. Desconocer uno de los tipos de sistemas simbólicos, cualquiera que sea, aunque se dominen los restantes, supone un conocimiento deficiente de los números naturales, ya que hay relaciones estructurales entre números y cuestiones significativas que sólo se pueden abordar desde el sistema que se desconoce.

Los contextos cardinales y ordinales son frecuentes, tanto en el medio escolar como en el medio extraescolar; los términos *cardinalidad* y *ordinalidad* son familiares y ponen esta idea de manifiesto. Sin embargo, el contexto figurativo sólo se emplea, brevemente, al inicio del aprendizaje escolar del número; cuando se introduce el sistema decimal de numeración se abandona el trabajo sistemático sobre este contexto y sólo se recupera esporádicamente para ilustrar la presentación de algún concepto aislado.

I.1.2 Racionalidad del estudio.

Nuestro trabajo es una aproximación curricular a los números figurados como sistema simbólico de representación de números, que permite profundizar, mediante actividades de representación, en un tipo de análisis estructural de los números.

En cuanto al contenido.

El interés de este análisis, en primer lugar, está en delimitar la potencialidad del sistema simbólico considerado para expresar determinados aspectos conceptuales y procedimentales de los números naturales que no se ponen de manifiesto mediante los sistemas simbólicos usuales. Derivado de lo anterior, se hace necesario precisar los modos de traducción entre las expresiones del sistema decimal de numeración y las configuraciones puntuales.

Un segundo objetivo se centra en explicitar las actividades cognitivas más relevantes que surgen de manera natural al trabajar con el sistema simbólico de las configuraciones puntuales; el análisis estructural de los números naturales, los tipos de simetrías y regularidades, las conexiones entre el número considerado y otros números son, todas ellas, aportaciones que surgen del nuevo sistema de representación. Queremos poner de manifiesto esta funcionalidad del nuevo sistema, estudiando su viabilidad en un grupo natural de escolares.

En tercer lugar, pretendemos mostrar contextos en los que este sistema simbólico trabaje de manera significativa. Hemos elegido un tópico matemático concreto en el que poner ésto de manifiesto; se trata del trabajo con sucesiones numéricas naturales y la iniciación a la noción de término general de una sucesión y a su simbolización. Este tópico tiene importancia suficiente como para merecer estudio detallado, ya que es una cuestión clave en el paso de la aritmética al álgebra; en cada caso el contexto lo proporcionan las representaciones utilizadas y los problemas planteados en el trabajo con sucesiones.

A nivel curricular.

Ya hemos dicho anteriormente que nuestro trabajo tiene carácter curricular y esta consideración es determinante para justificar cómo se ha organizado nuestra investigación.

Objetivo fundamental de este estudio es poner de manifiesto, analizar e interpretar la comprensión que muestran escolares de 13 y 14 años de edad sobre las nociones de estructura de un número, patrones y relaciones numéricas, sucesión y término general de una sucesión, cuando se las aborda desde un sistema ampliado de simbolizaciones para números naturales.

Un nivel general de reflexión considera al profesor, los alumnos, la disciplina y la institución escolar como dimensiones o componentes del sistema currículo (Rico, 1990, pgs: 45-46; Romberg, 1992, pg: 50). En nuestro trabajo las cuatro dimensiones mencionadas están incluidas, ya que se ha elegido intencionalmente un grupo natural en clases regulares de matemáticas de 8º nivel (secundaria obligatoria) del sistema educativo español. Hemos centrado nuestro análisis en las relaciones entre algunas de estas componentes para obtener información sobre la dinámica de trabajo en este nivel y emplear en nuestro estudio las categorias usuales para el estudio del sistema curricular definido mediante las cuatro dimensiones mencionadas. En concreto, como se verá más adelante, analizamos las relaciones profesor-alumno mediante unas categorias de interacción didáctica; las relaciones profesor-disciplina mediante unas categorias basadas en el conocimiento matemático con las que se estructura el plan de trabajo para el aula; las relaciones alumno-disciplina mediante categorias de comprensión del conocimiento.

En un nivel más concreto, consideramos el currículo como un plan operativo constituido por otras cuatro componentes: objetivos, contenidos, metodología y evaluación (Howson, Keitel y Kilpatrick, 1982, pg: 2); esta consideración del currículo se emplea para diseñar el plan de trabajo de los escolares sobre el que realizamos nuestro estudio. La descripción detallada de lo planificado y realizado, según las cuatro componentes mencionadas, proporciona información para establecer los límites dentro de los que se desarrolla nuestro trabajo y ofrece condiciones suficientes para su replicabilidad. Centrarnos únicamente en una o dos de las componentes anteriores hubiera supuesto, a nuestro juicio, un empobrecimiento de nuestra investigación. Muchas de las investigaciones en Didáctica de la Matemática son investigaciones curriculares que, por una causa o por otra, limitan la potencia de análisis que ofrece la consideración del currículo como un sistema con diversos niveles de reflexión a una consideración parcial de algunas de sus componentes y relaciones.

A nivel metodológico.

Finalmente, entendemos que la comprensión de los alumnos no puede estudiarse desde la simplificación de un procedimiento meramente cuantitativo, sostenido por un diseño experimental o cuasi-experimental basado en observaciones que se obtienen por una prueba general de conocimientos (por muy bien construida que pueda estar). Cuando se inicia la exploración de un nuevo campo de trabajo sobre el que alumnos y profesores carecen de experiencia previa, interesa una aproximación más integradora, sostenida por un diseño abierto de tareas suficientemente elaboradas. Por ello nos hemos propuesto trabajar con un grupo natural y hemos empleado los conceptos y niveles de reflexión de la teoría curricular.

Queremos destacar que el método general seguido para realizar nuestro estudio está enmarcado en la investigación/acción, con una adaptación propia de las cuatro fases que sistematizan su secuencia, utilizando parcialmente su carácter recursivo y destacando su potencial heurístico. El estudio del trabajo realizado lo completamos con una evaluación hecha mediante comparación con un grupo externo (Stenhouse, 1987; pgs: 71-78), en donde se utiliza un diseño cuasi-experimental en situación de campo (Cook y Campbell, 1979; pgs: 109-112).

Resumiendo:

* el tratamiento deficiente en el Currículo de Matemáticas del sistema figurativo para los números es una motivación inicial de esta investigación;

* nos proponemos trabajar con representaciones geométricas de números naturales mediante colecciones discretas de puntos u otras figuras simples;

* pretendemos estudiar cómo estas representaciones expresan relaciones y propiedades numéricas y cómo los estudiantes las descubren y utilizan;

* constituye un objetivo de esta investigación dilucidar qué variaciones se producen en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos numéricos al integrar los contextos figurativos y cómo se manifiesta la comprensión de los alumnos ante la nueva información.

Como información necesaria para alcanzar el objetivo anterior nos planteamos las siguientes actuaciones:

a) realizar un estudio de números figurados en sus vertientes geométrica y analítico-aritmética con escolares de 13-14 años;

b) utilizar los números figurados como fuente de patrones y modelos para el estudio de números naturales;

c) visualizar conceptos y relaciones numéricas mediante el uso de representaciones geométricas o figurativas;

d) emplear los modelos mencionados como instrumentos para establecer conjeturas, probar o refutar leyes y propiedades numéricas, así como para generalizar relaciones;

e) utilizar los modelos geométricos como instrumentos para representar y resolver problemas;

f) enumerar los procedimientos particulares que utilizan los sujetos en el desarrollo de su actividad matemática en el trabajo escolar; clasificar estos procedimientos en analíticos, algebraicos o visuales;

g) estudiar las relaciones existentes entre el uso preferente de procedimientos algebraicos, analíticos o visuales y el dominio conseguido en el trabajo con números figurados.

I.2. Cambios Curriculares.

En las sociedades avanzadas el sistema curricular es un sistema dinámico: "*Para servir bien a la sociedad se deben reorganizar las escuelas y las matemáticas escolares para que reflejen un orden social distinto*" (Romberg, 1991; pg: 367). Los cambios sociales experimentados en los países desarrollados se resumen como el paso de una etapa caracterizada por la industrialización a otra cuya característica fundamental es la información. Igualmente, nos encontramos inmersos en un proceso de cambio sobre lo que debe de ser la enseñanza en general y, por tanto, la enseñanza de la Matemática en particular.

La escuela surge como necesidad de la sociedad, con el propósito de que en ella se formen las generaciones jóvenes; ha de cubrir aquellos objetivos que la sociedad le demanda; sin embargo "*La escuela tal como hoy está organizada es producto de la era industrial lo cual no satisface las necesidades actuales*" (NCTM, 1991; pg: 3).

Urge, por tanto, una reforma en el sistema educativo que proporcione a los individuos que se van a formar en él una preparación adecuada, acorde con las necesidades y problemas a los que va a tener que enfrentarse: "*el enfoque de formación para una profesión vitalicia debe sustituirse por el poder de aprendizaje*" (Romberg, 1991; pg: 368).

Las Matemáticas, que son parte fundamental del currículo de la Educación Obligatoria, no escapan a este movimiento; es necesaria una reforma curricular que tenga en cuenta nuevos objetivos e incida tanto en el contenido como en el enfoque del proceso de enseñanza/aprendizaje, para que pueda dar respuesta a las exigencias planteadas.

En este contexto consideramos de gran utilidad investigaciones curriculares en las que se estudien y analicen nuevos planteamientos sobre conceptos y procedimientos conocidos, como es el caso de las estructuras numéricas; estas investigaciones, conectadas con el trabajo en el aula, contribuirán a la renovación y a una formación de calidad para los individuos: "*el currículo actual ofrece una visión restringida; no favorece la aparición de la* ***intuición*** *y razonamiento matemático, ni la resolución de problemas, sólo estimula actividades mecánicas*" (NCTM, 1991; pg: 13).

Pero, no sólo el sistema exige cambios en relación directa con la formación de los alumnos, también el profesor tiene dificultades. El hecho de repetir las mismas lecciones supone para él un cansancio; ésto hace que la calidad de sus reproducciones sea cada vez más baja y "*siente la necesidad fuerte de cambiar al menos la formulación de su exposición o de su instrucción, de los ejemplos, de los ejercicios y si es posible de la estructura misma de la lección*" (Brousseau, 1989; pgs: 9-11). La insatisfacción que produce en los profesores este hecho, al que Brousseau denomina **envejecimiento de los sistemas de enseñanza,** también plantea exigencias de innovación curricular. Por ello, los investigadores preocupados por los temas curriculares deben proporcionar a los profesores alternativas a las que recurrir.

I.2.1. Nuevo enfoque: interés por la Matemática Discreta.

Los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Matemática elaborados por el N.C.T.M. (1991) para las escuelas americanas, proponen introducir cambios en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas en los niveles obligatorios. Tanto en los contenidos propuestos como en los ejemplos presentados se observa la presencia de la matemática discreta, junto con sugerencias para integrarla en cada uno de los tópicos que componen el currículo.

Así, se proponen ejemplos sobre contenidos algebraicos, geométricos, de probabilidad, matrices, teoría de grafos; también se incluyen otros de tipo estratégico sobre pensamiento algorítmico, pensamiento crítico, técnicas para contar, iteración y recursión en el estudio de patrones, etc.

El libro *Discrete Mathematics across the Curriculum* (NCTM; 1991) pone de manifiesto la utilidad y necesidad de introducir cambios curriculares referentes a la Matemática Discreta, para lo cual señala una serie de argumentos:

* la Matemática Discreta favorece el desarrollo del pensamiento crítico y refuerza el razonamiento matemático ya que son propios de ella los procesos de inducción, los tratamientos recursivos y la formulación de conjeturas por generalización de casos particulares;

* la Matemática Discreta da sentido a la resolución de problemas de aplicación de la vida diaria; en un nivel de introducción se referirá a problemas que sean familiares y no puedan ser resueltos por rutinas de cálculo conocidas, lo cual llevará a los alumnos a explorar las situaciones propuestas y a proponer nuevas vías de resolución,"*los estudiantes a menudo tienden a visualizar la situación desarrollando un modelo o cualquier otra forma de representación*" (Dossey; pg: 8) ya que los algoritmos de cálculo con los que resolver estos problemas son propios de estudios de grado superior;

* la Matemática Discreta es una herramienta potente tecnológicamente; la Interacción de la Matemática Discreta con los ordenadores han hecho posible el desarrollo de nuevas aplicaciones, ha centrado la atención en nuevos tipos de problemas y ha abierto nuevas vías a la matemática.

Por Matemática Discreta no debe entenderse una rama nueva de la Matemática, a añadir a las que ya conforman el currículo, puesto que está presente en muchos de los tópicos que los niños trabajan: "*Estos tópicos incluyen técnicas de contar, razonamiento lógico, uso de patrones (iteración, recursión), algoritmos, probabilidad y redes*" (Zalewski; pg: 18).

El termino ***discreto*** es sinónimo de discontinuo, separado. La Matemática Discreta se refiere al estudio de objetos y conceptos que pueden dividirse en partes separadas o discontinuas. Se pueden considerar los métodos de la Matemática Discreta como alternativos a los de el planteamiento más clásico de matemática continua, si bien los dos se complementan en su aplicación a los problemas cotidianos.

Los números naturales constituyen un campo de trabajo privilegiado en Matemática Discreta puesto que son uno de los modelos fundamentales en este campo; por ello un mayor dominio y profundización de los sistemas de representación de los números naturales, enfatizando el análisis de la estructura de los números, el descubrimiento de patrones, y la búsqueda de regularidades pone en marcha algunos de los procedimientos y estrategias básicos en matemática discreta."*Construyendo la conexión entre la (matemática) continua y la discreta, en aquellos tópicos que lo permitan, proporcionará a los alumnos la preparación para el trabajo que han de realizar en el futuro*" (Dossey; pg: 8).

I.2.2 Tratamiento curricular diferenciado para funciones y sucesiones

Un ejemplo llamativo para nosotros de la disparidad de tratamiento curricular entre los problemas continuos y los discretos lo constituye la comparación entre el tratamiento de las funciones y el de las sucesiones.

Las investigaciones realizadas sobre funciones, Bell, Costello y Küchemann (1983), Janvier (1987), Romberg, Fennema y Carpenter (1993), han puesto de manifiesto que la comprensión de la noción de función se fundamenta sobre el dominio y coordinación de un sistema de símbolos y representaciones que incluye, al menos, cuatro componentes:

* expresiones verbales de dependencias funcionales;
* tablas numéricas;
* representaciones gráficas, por lo general, pero no exclusivamente, mediante diagrama cartesiano;
* notación simbólica, por lo general algebraica.

La organización del estudio sobre funciones en el currículo de matemáticas en España (M.E.C., 1993; pgs: 83-84, 175-176, 279-281) mantiene la siguiente secuencia general:

1º Estudio de la función lineal.

2º Estudio de la función afín.

3º Estudio de la función de proporcionalidad inversa.

4º Estudio de las funciones cuadráticas.

5º Estudio de la función exponencial.

6º Estudio de la función logarítmica.

7º Estudio de las funciones trigonométricas.

8º Otras funciones: parte entera, valor absoluto, etc.

En cada uno de los casos se trabaja sobre las cuatro componentes mencionadas, destacando las representaciones gráficas y notaciones simbólicas. El estudio de las funciones comienza en Secundaria Obligatoria, y se desarrolla equilbradamente a lo largo de esta etapa.

Este tratamiento varía radicalmente en el trabajo con sucesiones. En primer lugar, no se emplean cuatro sistemas de símbolos y representaciones sino, solamente tres:

* expresiones verbales que establecen una dependencia de variable natural;

* tablas numéricas, o primeros términos de la sucesión;

* notación simbólica o expresión del término general de la sucesión.

La representación gráfica no está considerada como un componente estable en el estudio de sucesiones; en algunos casos particulares, como son los números cuadrados, se incluye algún tipo de representación gráfica, no necesariamente discreta.

En segundo lugar, la secuencia para estudiar sucesiones también es diferente. Así, las primeras nociones sobre sucesiones numéricas las adquiere el alumno mediante el estudio de la sucesión de los números naturales, sucesiones de múltiplos de un número y sucesión de números primos (Ortiz, 1993; pgs: 67-71). Un estudio explícito del concepto de sucesión numérica se inicia con las progresiones aritméticas y se continúa con las progresiones geométricas; no hay estudio sistemático sobre sucesiones cuadráticas o de diferencias segundas constantes. El trabajo con sucesiones se presenta al finalizar la Educación Secundaria y, por ello, no tiene un tratamiento continuo y equilibrado.

El trabajo con sucesiones es posterior al trabajo con funciones, no emplea ningún sistema simbólico de representación gráfica y, por tanto, no apela al razonamiento visual y a la intuición que proporcionan las gráficas; tampoco sigue la organización establecida para el estudio de funciones; salta directamente de las sucesiones *lineales y afines* (progresiones aritméticas) a las *exponenciales* (progresiones geométricas), rompiendo la secuenciación de base intuitiva, más racional y progresiva establecida para las funciones.

I.2.3. Nuestro trabajo en un marco curricular.

Nos proponemos en este estudio implementar un desarrollo curricular que evite las deficiencias antes mencionadas, al menos las más significativas. Para ello, nos proponemos integrar en el currículo de matemáticas de Secundaria Obligatoria un sistema de representación de los números naturales que, destacando su carácter discreto, proporcione un instrumento de visualización y análisis para las sucesiones análogo a la representación de curvas en las funciones. Vamos a estudiar la potencia de las representaciones denominadas configuraciones puntuales para expresar relaciones y propiedades numéricas y cómo, mediante dichas representaciones, tales propiedades se descubren y utilizan por los estudiantes.

Tratamos de poner de manifiesto que estas representaciones proporcionan un modelo intuitivo para el desarrollo del Pensamiento Numérico, que potencia la comprensión de la noción de sucesión mediante la visualización. A través de estos modelos esperamos que se hagan evidentes propiedades destacables de los números naturales y de familias de números, que son fundamentales para su conocimiento y manejo. También nos proponemos alcanzar la noción de término general de una sucesión y su expresión mediante fórmula o notación algebraica a través del análisis de la estructura numérica común a los términos de una sucesión, que se realiza a partir de la representación de sus términos mediante configuraciones puntuales.

I.3. Marco conceptual

Dedicamos este apartado a realizar una breve presentación de las aportaciones teóricas de la psicología cognitiva y la educación matemática, que hemos considerado adecuadas y hemos utilizado como marco de referencia para nuestro trabajo; igualmente establecemos el significado de los principales términos y conceptos que se van a utilizar.

I.3.1. Modelos y representaciones.

La noción de modelo

En el *Vocabulario Científico y Técnico* (Real Academia de Ciencias, 1990) aparecen 44 entradas diferentes para el término modelo, la mayor parte de ellas ligadas a ramas concretas de la ciencia; con carácter general, el Diccionario establece: "*Modelo: esquema conceptual suceptible de un tratamiento matemático, que interpreta o predice el comportamiento de un sistema en el que se desarrolla un fenómeno determinado. Réplica a pequeña escala de un determinado sisterma*" (pg: 470)

Según Bachelard (citado por Arcá y Guidoni, 1989) el término **modelo** tiene una gran variedad de significados, entre otros:

- *Arquetipo* al que nos referimos, que consideramos ejemplar y al que tratamos de imitar.

- *Prototipo* de una clase donde se agrupan objetos, hechos, procesos o situaciones con características similares al prototipo.

- *Estructura hipotética* de la realidad inaccesible a la evidencia directa. En esta clase consideramos incluida la acepción de modelo conceptual, dada en el apartado anterior.

- *Esquematización* construida con una multiplicidad de datos de la experiencia (de la realidad) que proporciona una abstracción satisfactoria de como funcionan las cosas. Este último significado es el que vamos a seguir, con carácter general.

En términos más precisos Fischbein (1987) establece:

"*Un sistema B representa un modelo del sistema A si, sobre la base de cierto isomorfismo, una descripción o una solución producida en términos de A puede reflejarse consistentemente en términos de B y vice-versa*" (pgs: 121 y 202-203)

Un modelo ofrece un esquema o representación de un sistema original que, por sus cualidades, está adaptado a la naturaleza del pensamiento humano. Pensamos mejor con lo familiar, perceptible y manipulable, que con lo abstracto, no representable y desconocido. Esto hace de un modelo "*un poderoso instrumento mental, especialmente apto para la comprensión de las estructuras de la realidad, cuando su complejidad no nos permite alcanzar y representar directamente sus múltiples relaciones de conexión, y también para lograr un control directo del significado de los hechos*". (Arcá y Guidoni 1989; pgs: 162).

La noción de representación la tomamos de los trabajos de cognición matemática "*Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (...) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas*" (Hiebert y Carpenter, 1992; pg 66); en el sentido que venimos expresando, los modelos son representaciones estructuradas de nociones o conceptos matemáticos (Resnick y Ford, 1990; pgs: 137-145).

Modelos y educación matemática.

La utilidad general de un modelo es doble: por una parte facilita la interpretación de hechos y relaciones, conectando las representaciones externas con las internas; por otra, ayuda a resolver problemas de acuerdo con los hechos originales. Por ello, el uso de modelos debe potenciarse en la enseñanza y, en especial, en educación matemática, pues se trata de una herramienta esencialmente heurística. En cada caso, cuando hay un problema que resolver, se traslada a los términos específicos del modelo y, a través de éste, se debe encontrar la solución usando sus propias reglas y elementos. No obstante, y aún teniendo en cuenta la gran riqueza de implicaciones didácticas que tiene para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, Fischbein (1987; pgs: 205-211) previene sobre los conflictos que puede generar una fundamentación exclusivamente intuitiva de los conceptos y relaciones matemáticas. El modelo debe codificar los datos del original (sus propiedades, procesos y relaciones) en los términos que le son específicos e intuitivamente aceptables. En este sentido, cada modelo ofrece una representación de un determinado concepto y unas relaciones y propiedades asociadas. Cuando se utiliza un modelo para resolver problemas, éstos se resuelven en términos del modelo y se reinterpretan en términos del original. "*Un modelo es didácticamente útil si es por sí mismo una fuente de problemas y de soluciones, teniendo una correspondencia significativa con el original. Los buenos modelos heurísticos han de ser generativos, internamente consistentes y bien estructurados*". (Fischbein 1977; pg: 155).

Se destacan dos condiciones para asegurar la eficacia heurística de un modelo:

Fidelidad; el modelo ha de ser fiel al original sobre la base de un isomorfismo estructural entre ellos: ha de ofrecer una buena representación del concepto que permita determinadas actividades cognitivas con significación para el concepto. Una solución obtenida en términos del modelo y una solución obtenida en términos correspondientes del original deben de ser equivalentes.

Autonomía; el modelo ha de ser autónomo y no dependiente del original, esto exige una buena estructuración y un funcionamiento coherente regido por leyes propias.

El interés de la educación matemática por los modelos es prioritario y viene de antiguo, desde el momento en que muchas de las ideas matemáticas que se adquieren en la escuela deben presentarse mediante algún tipo de modelo que ayude a entenderlas y facilite su aprendizaje (Dienes, 1986; Skemp 1980; Castro, Rico y Castro, 1988; Hiebert y Carpenter, 1992; pgs: 86-88). Asi, en los primeros niveles la función de los modelos es proporcionar una definición de una operación o concretización de algoritmo o principio."*Una operación puede ser caracterizada como la colección de todos los modelos a los que representa*" (Vest, 1969; pgs: 6)

En la consideración estructuralista de las matemáticas, el trabajo del matemático se contempla como creación y manipulación de estructuras y el estudio de las matemáticas se lleva a cabo a través del estudio de dichas estructuras. La noción matemática de estructura (Reinhardt y Soeder, 1984; pg: 37) viene recibiendo atención por parte de los psicólogos (Piaget; 1975) y, más recientemente, por parte de los investigadores en Educación Matemática para estudiar la comprensión de los estudiantes y los procesos implicados en estos aprendizajes; en particular, los trabajos sobre cognición matemática y pensamiento matemático avanzado (Dreyfus, 1989, 1991), han elaborado un marco teórico con el que abordar el aprendizaje de estructuras matemáticas complejas. Las estructuras matemáticas proponen modelos para interpretar y predecir fenómenos del mundo físico. Nuestro interés en este estudio no está centrado en este aspecto de aplicación del conocimiento matemático, sino en la utilización de diversos modelos para el aprendizaje de nociones matemáticas complejas, y es en este sentido en el que vamos a emplear el término modelo. No estudiamos pues los fenómenos de modelización sino los fenómenos de comprensión y aprendizaje mediante el uso de distintos modelos para un mismo concepto, en el sentido indicado por Skemp para los símbolos (1980; pgs: 78-83).

La noción de modelo y la cognición matemática

Otra perspectiva distinta, que surge de la psicología cognitiva, es la noción de modelo conceptual: "*Los procesos usados al manipular y crear estas estructuras componen el* ***modelo conceptual*** *que tanto los matemáticos como los estudiantes de matemáticas usan para resolver problemas*" (Lesh y col., 1983 ; pg: 269).

Lesh y col. (1983; pg: 264) dan una descripción de lo que entienden por modelo conceptual para la cognición en matemáticas, en los términos siguientes:

Modelo Conceptual es una *estructura* en continuo cambio, compuesta por:

* Una red interconceptual de relaciones y operaciones, que el sujeto debe de coordinar para hacer juicios relativos a un concepto.

* Sistemas que ligan y/ o combinan redes interconceptuales de varios conceptos.

* Sistemas de representación (simbólico, dibujos, materiales concretos), y traslaciones y transformaciones dentro de los distintos modos de representación.

* Sistemas de modelización de procesos, o sea, mecanismos dinámicos que permiten utilizar las componentes anteriores para modificarlas o adaptarlas y para encajar situaciones reales.

Desde una perspectiva cognitiva todos los sujetos no disponen del mismo modelo para un determinado sistema conceptual o estructura matemática concreta, ya que los diferentes componentes mencionados, las relaciones entre ellos y sus representaciones están controlados y organizados con diferentes niveles de complejidad y se modelizan para situaciones distintas. Entendiendo por comprensión "*una representación estructural o conceptualmente ordenada, de las relaciones entre las partes de la información que se debe aprender, y entre esa información y esas ideas y nuestra base de conocimientos y experiencia*" (Wittrock, 1990; pg: 569), admitimos que los distintos sujetos presentan comprensiones diferentes sobre un mismo concepto o estructura matemática. "*Definimos la comprensión en términos del modo en que la información se representa y estructura*". (Hiebert y Carpenter, 1992; pg: 67). Esta comprensión se puede expresar contrastando el modelo conceptual estándar frente al modo en que un sujeto concreto estructura y organiza los elementos constituyentes de la noción matemática en cuestión. "*Comprender algo significa asimilarlo dentro de un esquema adecuado*" (Skemp, 1980; pg: 50); pero esto no puede interpretarse de manera dicotómica, como algo instantáneo que existe o no existe, antes bien hay que entender la comprensión como un proceso complejo, que evoluciona gradualmente; un proceso que, partiendo de la intuición, puede transformarse en un conocimiento estructurado. "*El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones (de una red de representaciones).Una idea matemática, hecho o procedimiento se entiende completamente si está conectado con redes previas*" (Hiebert y Carpenter, 1992; pg: 67)."*Conocimiento intuitivo es aquel que se acepta directamente sin recurrir a una detallada justificación. De esta forma los productos de la intuición son toscos hasta el punto de resultar inútiles si no sufren alteración. Para que sean útiles deben seguir un proceso de refinamiento y abstracción; deben de ser aclarados y desarrollados para potenciar tanto su claridad como su alcance, convirtiéndose en conceptos y proposiciones que se ligaran a construcciones conceptuales más elaboradas*" (Fischbein, 1987; pg: 3)

La noción de ***modelo conceptual*** es de mayor complejidad puesto que hace referencia a una variedad de formas de representar un concepto y, por tanto, de valorar su comprensión: empleo de símbolos escritos, lenguaje oral, modelos figurativos estáticos (dibujos, gráficos, diagramas), modelos manipulativos o mensajes del mundo real. Estos sistemas de representación difieren unos de otros: cada uno de ellos enfatiza aspectos diferentes de la estructura subyacente del concepto; es distinta su potencia generadora y su capacidad para discernir las ideas relevantes de los datos simples. En este trabajo vamos a utilizar la noción de modelo conceptual, referido a la estructura de los números naturales y las secuencias con estos números; también al modo en que los alumnos representan mentalmente estas estructuras. Por otro lado, vamos a emplear un tipo de modelos figurativos para ampliar los sistemas símbolicos usuales de representación de los número naturales y contribuir a la mejora de las representaciones internas. Se trabaja, pues, con dos significados diferentes de la noción de modelo; para evitar confusiones denominamos el primero ***modelo conceptual*** y al segundo, simplemente, ***modelo***.

I.3.2 Clases de modelos.

Los modelos pueden ser de distintos tipos y de ellos se han hecho distintas clasificaciones; Fischbein (1987; pgs: 121-122) considera tres dicotomías:

En la primera dicotomía distingue entre *Modelos Intuitivos* y *Modelos Abstractos*. Los modelos intuitivos son de tipo sensorial, pueden ser percibidos, representados o manipulados; las relaciones matemáticas (fórmulas, funciones) son modelos abstractos de ciertas realidades concretas. Un modelo intuitivo no es necesariamente un reflejo directo de una cierta realidad, a veces está basado en una interpretación abstracta de esta realidad. "*Los modelos intuitivos son las herramientas que dan forma a conocimientos intuitivamente aceptables. Son sustitutos válidos y aceptables que permiten trabajar nociones intuitivamente inaceptables*" (Fischbein, 1987; pg:121). Otra dicotomía distingue entre *Modelos Explícitos* y *Modelos Implícitos*. En ocasiones los modelos se elaboran para una situación concreta con el propósito de llegar más fácilmente a una solución; en otros casos los modelos se producen automáticamente y se usan tácitamente en conexión con una cierta realidad. Una tercera dicotomía distingue entre: *Modelos Analógicos* y *Modelos Paradigmáticos*. Es analógico el modelo si entre él y su original existen semejanzas sistemáticas que permiten asumir la existencia de otras semejanzas; el modelo y su original pertenecen a dos sistemas conceptuales distintos. En el caso de los modelos paradigmáticos, el original consiste en una cierta clase de entidades, mientras que el modelo viene dado por un ejemplar o una subclase de la categoría considerada."*Los modelos intuitivos tanto analógicos como paradigmáticos juegan un papel fundamental en el proceso de razonamiento productivo, pues no hay actividad de razonamiento productivo sin actividades intuitivas de globalización, extrapolación*" (Fischbein, 1987; pg: 122). En nuestro trabajo, el modelo de las configuraciones puntuales, que incorporamos a la actividad de los escolares para representar números y términos de una sucesión, es ***intuitivo, explícito y analógico.***

Bajo las consideraciones realizadas un modelo satisface la función de ofrecer una versión simplificada del original, que permite un mejor y más completo control de un conjunto de variables. "*Si el modelo es intuitivo tiene una doble ventaja. La mente humana está inclinada naturalmente a visualizar hechos. Nosotros pensamos más con imágenes porque tratamos de pensar sobre objetos materiales. Un modelo intuitivo ofrece una versión especial de diferentes tipos de hechos*" (Fischbein, 1977; pg: 155).

Gagatsis y Patronis (1990) proporcionan otra clasificación de modelos; para ello consideran que los modelos usados con más frecuencia en educación matemática se pueden dividir en dos grupos, que tienen en común mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Sin embargo, existe una gran diferencia entre ambos grupos, en lo que se refiere a su naturaleza y uso. Los modelos del primer grupo se caracterizan como *modelos de aprendizaje de procesos*; son de uso exclusivo de los investigadores y educadores; no se utilizan en clase por los propios alumnos, ya que estos no son conscientes de su proceso tal como está descrito en el modelo; se trata de una idea similar a la expresada anteriormente con la noción de modelo conceptual.

Por el contrario, los modelos del segundo grupo reflejan el proceso intuitivo implícito en el desarrollo del pensamiento. De este segundo grupo forman parte los siguientes:

Modelos concretos; representan una idea matemática mediante un objeto de tres dimensiones.

Modelos simbólicos; representan una idea matemática por medio de un signo o numeral comúnmente aceptado que denota operación matemática o relación.

Modelos pictóricos; representan ideas matemáticas mediante diagramas o ilustraciones. Estos últimos constituyen un paso intermedio entre los modelos concretos y los simbólicos. Nuestro modelo para representación de números puede considerarse dentro de este apartado

Esta tipología de modelos, similar a los modos de representación de Bruner, que *representan ideas matemáticas,* también coincide con tres de los tipos de sistemas de representación que señalan Lesh y col. (1983; pg: 270)

Los cinco tipos distintos de *sistemas de representación* que tienen lugar en el aprendizaje matemático y la resolución de problemas, son:

Experiencias básicas, donde el conocimiento está organizado alrededor de hechos reales y sucesos que sirven como contexto general para resolver otras situaciones problemáticas conocidas.

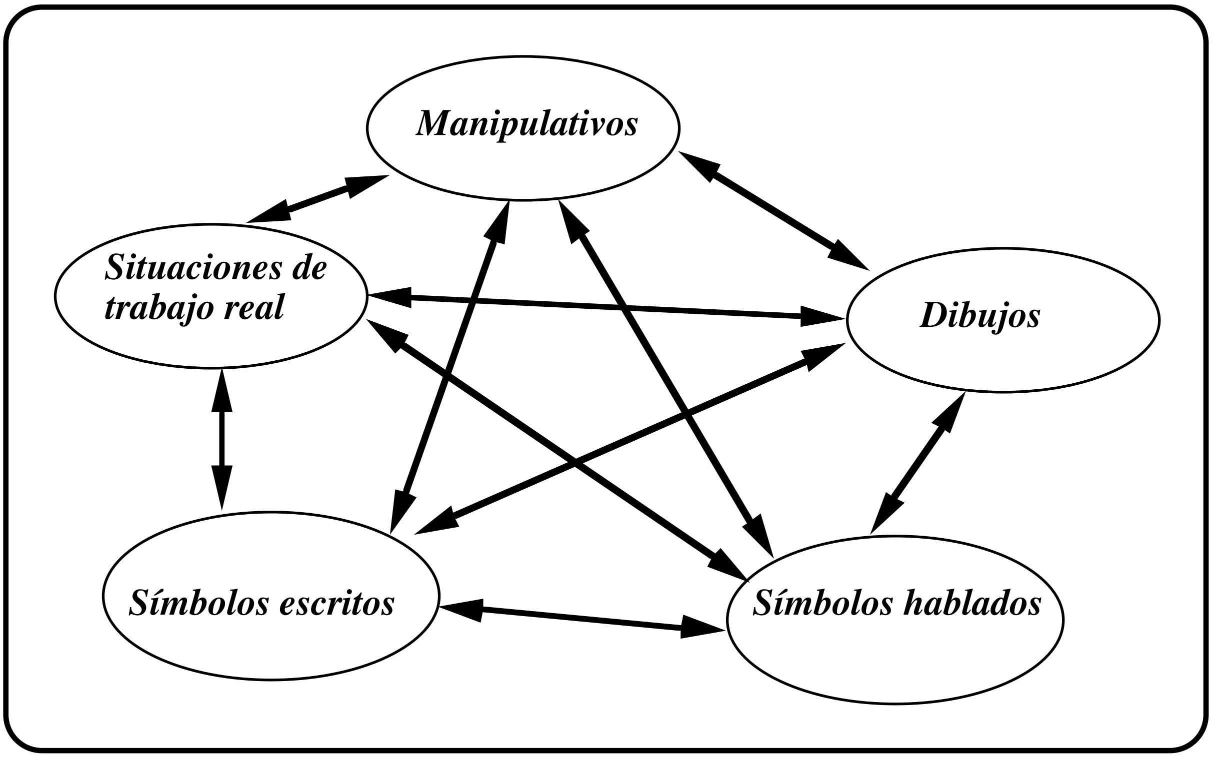
Modelos manipulativos, ayudan a construir relaciones y operaciones apropiadas a cualquier situación de la vida diaria.

Dibujos o diagramas, como figuras estáticas y que pueden ser interiorizadas como imágenes.

Lenguaje hablado, se pueden considerar aquí sublenguajes específicos relativos a un dominio.

Símbolos escritos, en relación con el lenguaje hablado pueden entrañar sentencias especiales.

Los autores destacan la importancia de estos tipos distintos de representación y de las traduciones y transformaciones de unos en otros, que se indican en el diagrama (Lesh y col., 1987; pg: 34).



I.3.3 Funciones de los modelos.

Modelos pictóricos.

Centramos nuestra atención en los modelos pictóricos y simbólicos, dándoles tratamiento separado; tenemos en cuenta que un sistema de representación consiste, ante todo, en una colección de elementos llamados caracteres o símbolos, sometidos a unas reglas de coordinación e interrelación. Algunos avances importantes en matemáticas han surgido por la utilización de un modelo pictórico, de la creación de representaciones icónicas potentes o ingeniosas (coordenadas cartesianas, notación decimal, etc.) que, en su inicio, funcionaron como modelos exteriorizados de ideas (estructuras) que ya eran conocidas. Más tarde, estas representaciones proporcionaron nuevas herramientas y generaron nuevas ideas.

Actualmente, las representaciones se utilizan en enseñanza de las matemáticas como herramienta aunque, a veces, con poco acierto. Esto se debe a que la relación entre representaciones pictóricas y estructuras conceptuales en el proceso de enseñanza aprendizaje es, generalmente, más complejo de lo que puede apreciarse en una primera consideración superficial. La representación icónica no tiene por qué ser necesariamente la primera y la más natural. Puede suceder que los modelos icónicos sean la representación simbólica de una estructura conceptual compleja. Así, "*los diagramas y las gráficas son imágenes visuales que están basadas en ciertas redes conceptuales. Cada una de estas imágenes visuales es una imagen conceptual controlada por su significado abstracto. Son representaciones pictóricas de entidades conceptuales y operaciones. Constituyen un lenguaje, porque su significado ha sido fijado convencionalmente y porque poseen la capacidad de expresar una gran variedad de ideas usando un número limitado de elementos y reglas de combinación*". (Fischbein, 1977; pg: 154)

Un buen modelo pictórico es necesariamente *generativo*, ha de ser capaz de generar un ilimitado número de sentencias partiendo de un número limitado de reglas; estos modelos son genuinamente utilizados en el desarrollo del pensamiento productivo. El valor de un modelo pictórico se expresa por esta capacidad generativa natural. Un buen modelo generativo posee también una capacidad específica de proliferación. Es abierto y flexible en el sentido de que es capaz de nuevos modelos relacionados y adaptados a nuevos tipos de problemas.

Algunos criterios útiles sobre el uso de modelos pictóricos o representaciones icónicas como soporte de un concepto o sentencia matemático son los siguientes:

* La representación debe de forzar al alumno a unir significado y símbolo.

* La representación debe de ser matemáticamente honesta y no ser falsa o controvertida.

* La representación se podrá adaptar a varias situaciones relacionadas con el mismo trabajo.

Si el tópico está eventualmente ligado a un algoritmo, la interpretación deberá sugerir el algoritmo, o dar una respuesta que lleven a sugerir un algoritmo (Sowder, 1976; pgs: 468-469)

Modelos simbólicos.

Se denomina **símbolo** a un ente que se toma como sustituto de otro, a este otro se le llama **referente.** También se ha dicho:"*Símbolo puede definirse como esencialmente sinónimo de representativo; cualquier cosa que representa desempeña una función simbólica*" (Newell, 1990; pg. 72). Estos entes pueden presentar una gran variedad de formas, desde objetos concretos a marcas escritas en el papel, y pueden representar desde conceptos simples a otros más complejos (Fernández y Rico, 1992; pg: 130-136).

Sostiene Piaget (1977; pg: 113) que el juego simbólico aparece al mismo tiempo que el lenguaje pero independientemente de éste, y desempeña un papel considerable en el pensamiento de los niños como fuente de representaciones individuales y de esquematización representativa. Una de las características humanas por excelencia es la capacidad destacada de simbolización, que comienza con la palabra y que termina en una simbolización general de todos los modos de tratamiento humano de las cosas. "*En el uso inteligente de los símbolos el hombre los utiliza en lugar de objetos, preocupándose de que las manipulaciones* *de los símbolos puedan trasladarse en todo momento a manipulaciones sobre los objetos*" (Paulus, 1984; pg: 24). Los símbolos que se conectan con ideas se usan para pensar sobre los conceptos que representan. Uno de los rasgos característicos de la matemática es la habilidad para manipular ideas complejas a través de símbolos. Un sistema de símbolos matemáticos constituye un lenguaje específico de la materia que tiene las siguientes funciones principales (Skemp, 1980; pgs: 73-74)

Facilitar la comunicación. Dado que los conceptos son objetos puramente mentales y no hay forma de observar directamente el contenido de la mente es necesario un medio visible que permita el acceso a los productos de la mente. El símbolo es un medio visible que está conectado a una idea; esta idea es el significado del símbolo.

Registrar el conocimiento. Entre las características de las ideas están el ser invisibles, inaudibles y perecederas; esto hace necesario un registro de las mismas que asegure la comunicación.

Formación de clasificaciones múltiples correctas. Un mismo objeto se puede clasificar de múltiples formas. Por la asignación de un símbolo a la clasificación somos capaces de concentrar nuestra atención sobre propiedades diferentes del mismo objeto. Cuantos más símbolos se puedan ligar a un objeto mayor será el número de clasificaciones en que pueda intervenir el mismo.

Hacer posible la actividad reflexiva. Por esta actividad se llega a ser conscientes de los propios conceptos y esquemas; percibir sus relaciones y estructuras y llegar a manipular de diversas maneras estas relaciones. Lograr que una idea se haga consciente parece estar conectado estrechamente con su asociación a un símbolo.

Ayuda para mostrar las estructuras. Por la reflexión somos conscientes de nuestras ideas y la relación que existe entre ellas. La selección correcta de símbolos puede ser de gran ayuda para evocar los conceptos correctos, o un obstáculo si no se eligen adecuadamente.

Automatizar manipulaciones rutinarias. El progreso en matemáticas exige que los procesos elementales se hagan automáticos, liberando así la atención del individuo que podrá centrarla en nuevas ideas; esto se lleva a cabo separando el concepto del símbolo y llegando a manipular este de acuerdo con hábitos adecuadamente formados.

Actividad mental creativa. El uso de símbolos asociados a un concepto posibilita el control voluntario, la comunicación y el registro de conocimiento.

En términos generales, los símbolos ayudan a generalizar ideas, así como a aplicar dichas ideas a diversas situaciones, y facilitan la transferencia del aprendizaje.La comprensión que se genera a través de los símbolos escritos se puede desarrollar por dos procedimientos: conectando con otras formas de representación; o estableciendo relaciones internas en el sistema simbólico; a menudo, esto sucede mediante el reconocimiento de patrones y regularidades en el sistema simbólico.

I.3.4 Dificultades generadas por el uso de modelos

Un campo de investigación en educación matemática se centra en identificar el origen o causa de las dificultades reales que los niños encuentran en el aprendizaje de las mismas (Rico, 1992). Una fuente de tales dificultades puede estar en la carencia de modelos intuitivos básicos cuando resuelven cuestiones matemáticas o en el uso indebido de los mismos. "*Una conclusión de nuestra investigación es que no sólo los estudiantes tienen serias dificultades para entender los contextos de problemas verbales de papel y lápiz, algunos de ellos también tienen dificultad para entender los modelos y los lenguajes necesarios para representar y manipular estas ideas. Hemos encontrado además que la habilidad de traslación es un factor que influye significativamente en el aprendizaje matemático y en la competencia para resolver problemas y el refuerzo y consolidación de estas habilidades facilita la adquisición y uso de ideas matemáticas elementales*". (Lesh y col, 1987). Muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas están generadas por una laguna o deficiencia en la representación intuitiva o por la distorsión producida por una incorrecta interpretación intuitiva.

La relación entre imagen y concepto en el uso de modelos intuitivos es compleja. En un proceso de resolución de problemas es necesario que el esquema conceptual y la representación intuitiva vayan conjuntamente. Entendemos que la labor del profesor en el el proceso de enseñanza/aprendizaje está en facilitar esta cooperación y mejorar los resultados, mientras que la labor del investigador debe dirigirse a poner de manifiesto la variedad de sentidos que es capaz de generar el alumno cuando trata de asignar significado a los modelos y representaciones propuestas por el profesor. Nuestro trabajo trata de responder a estas cuestiones trabajando con escolares de 12-14 años, mediante patrones puntuales para la representación de números y secuencias numéricas.

I.3.5 Patrones.

El término patrón es la traducción elegida para el término inglés *pattern,* de importancia considerable en educación matemática (N.C.T.M., 1991; Bell y otros, 1984). La idea básica implicada en esta noción es que toda situación repetida con regularidad da lugar a un patrón (Steen, 1988; pg: 611; Stacey, 1989; pgs: 147-149). Los patrones suelen formarse a partir de un núcleo generador; en algunos casos el núcleo se repite, en otros el núcleo crece de forma regular. La importancia del estudio de los números mediante la idea de patrón, que procede de los griegos, ha sido enfatizada recientemente (Rucker, 1987; pgs: 49-72)

Un cierto punto de vista considera la Matemática como la ciencia que estudia las regularidades, que trabaja sobre patrones. Analizar y observar patrones, desarrollar nuevas formas; establecer conexiones entre diferentes formas y transformar unas en otras, son actividades propias de la matemática. La matemática descubre patrones en los números, en el espacio, en el procesamiento de la información y en la imaginación (Steen; pg: 616). La teorías matemáticas ayudan a entender las relaciones entre patrones y a comprender sus estructuras; ayudan a explicar y predecir fenómenos naturales que se ajustan a un patrón.

Los Patrones en la Educación Matemática

La importancia del uso de patrones en la enseñanza escolar se pone de manifiesto por dos hechos relevantes :

Primero, en el mundo en que vivimos abundan los patrones y regularidades (Stevens, 1986).

Segundo, los patrones son frecuentes en matemáticas, por ello la habilidad para reconocer patrones matemáticos ayuda a la comprensión intuitiva de expresiones y relaciones que se pueden usar en estudios posteriores de matemáticas (Ericksen, 1991; pgs:255-258).

El trabajo matemático con patrones en los primeros niveles educativos se puede desarrollar de dos formas diferentes: reconociendo colecciones que presentan alguna semejanza; reconociendo y ordenando secuencias de objetos de acuerdo con una regularidad (N.C.T.M., 1991; pgs: 60-62; N.C.T.M., 1993; pgs: 12-16). Crear y reconocer patrones es una estrategia importante en la resolución de problemas matemáticos, sobre todo en aquellos casos en los que las cuestiones pueden ser resueltas: examinando casos especiales; organizando los datos sistemáticamente; determinando un patrón; y utilizando el patrón construido para obtener la respuesta (Stacey, 1989; N.C.T.M., 1991). En nuestro trabajo este tipo de estrategia se va a emplear con un determinado tipo de patrones para estudiar secuencias lineales y cuadráticas.

Los factores mencionados destacan la importancia de proponer trabajos sistemáticos con patrones a los escolares y el interés de que estos trabajos sean parte integrante del currículo de Matemáticas. En nuestro trabajo empleamos patrones numéricos y sus correspondientes representaciones mediante patrones puntuales.

I.3.6 Inducción.

La inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de casos particulares y sus combinaciones; su empleo está generalizado en todas las ciencias (Polya,1966; pg: 114). La observación y la inducción son métodos científicos generales para descubrir y enunciar leyes. La inducción trata de proporcionar regularidad y coherencia a los datos obtenidos a través de la observación; los procedimientos que utiliza son la generalización, la particularización y la analogía; de hecho, numerosos resultados matemáticos se han obtenido inicialmente por inducción y posteriormente han sido demostrados (Ortiz, 1993).

La intuición y la demostración formal son dos caminos distintos para percibir la *verdad* matemática, cada uno de ellos con características propias. La intuición es comparable a la percepción de un objeto material a través de los sentidos de la vista y el tacto; aventaja a la demostración formal en el sentido de que cualquier alumno puede establecer relaciones que le sería difícil demostrar; por otra parte, la manipulación formal de las reglas de la lógica y fórmulas del álgebra puede llegar mucho más lejos que la intuición. A veces es la intuición la que se adelanta, otras, es el razonamiento formal. Es útil e interesante emplear estos dos modos de razonamiento. "*Tratar de demostrar formalmente lo que se ha visto intuitivamente y de ver intuitivamente lo que se ha demostrado formalmente es un excelente ejercicio intelectual*" (Polya, 1966; pg: 124)

Las matemáticas presentadas con rigor son una ciencia sistemática, deductiva, pero el proceso de construcción del conocimiento matemático tiene algunas características de una ciencia experimental inductiva, por tanto ofrece una excelente oportunidad a los estudiantes de aprender el razonamiento demostrativo utilizando un procedimiento adecuado (Flores, 1992; pgs: 79-96). Las matemáticas no son sólo una ciencia demostrativa, este es el aspecto del producto acabado. Como cualquier otra ciencia tiene un proceso de desarrollo; los teoremas y propiedades hay que intuirlos y después probarlos (Lakatos, 1978).

I.3.7 Iteración y Recursión en educación matemática

La Real Academia de la Lengua (1992) proporciona las siguientes descripciones : *iteración equivale a repetición*; *recursión quiere decir retorno de una cosa al lugar de donde salió*. Con mayor precisión: *Iteración: repetición de un procedimiento de cálculo o de un razonamiento* (Bouvier y George, 1984; pg: 463). La noción de recursión es más compleja de enunciar en términos generales; asi lo pone de manifiesto Kilpatrick (1985; pg: 3) cuando comenta el enunciado siguiente: *Recursión es una técnica en la que se utiliza un proceso aparentemente circular para poner en práctica un proceso iterativo*

Los conceptos de Iteración y Recursión juegan un papel importante en los procesos de resolución de problemas matemáticos (Haussmann, 1985; pgs 18-23). El pensamiento recursivo es básico para la demostración de teoremas por inducción. La aplicación de métodos recursivos debe de iniciarse en la enseñanza de las matemáticas por procesos iterativos. Si la formulación de una solución se prepara por este camino, la iteración puede ser vista como una estrategia empírica que es directa y local. Esto ayuda a resolver problemas en un proceso de determinar una solución general. Una definición recursiva puede probarse por inducción pero ha de percibirse intuitivamente, por construcción iterativa de la secuencia (Kilpatrick, 1985; pgs 1-26; Miller, 1990; pgs: 555-558). La iteración es, explícita o implícitamente, parte de la matemáticas de todos los niveles. En algunos casos la iteración parece ser el concepto inicial. Esta cualidad característica es la ejecución repetida de una noción particular. Una secuencia de términos tales como a_n y a_{n+1} está determinada por sus predecesores por el mismo procedimiento. Repitiendo la misma operación se resuelve el problema de reconocer relaciones entre elementos de una solución, o se favorece el desarrollo de ideas para la demostración de un teorema matemático (Haussmann, 1985; pgs 18-23; Schumann, 1991; pgs: 953-963).

La recursión es una herramienta potente para generar secuencias. En una secuencia definida recursivamente, la relación de recurrencia expresa cada término de una sucesión en función de sus antecesores (Miller, 1991; pgs: 738-742). Al final el término enésimo de la secuencia, tiene en cuenta todos los términos que le preceden en la secuencia.

I.4 Antecedentes: investigaciones desde la psicología y la educación matemática.

I.4.1 Pensamiento matemático.

Conocer la naturaleza de los procesos de pensamiento que intervienen en la actividad matemática ha sido objeto de interés preferente tanto por parte de psicólogos como de matemáticos (Kilpatrick, 1992; pg: 5). Poincaré y Hadamard figuran entre los pioneros de esta preocupación; no obstante, ha sido en el último medio siglo cuando psicólogos y educadores matemáticos han sistematizado la investigación del pensamiento matemático (Nesher y Kilpatrick, 1990). Los trabajos de Polya (1957), Kilpatrick (1967) y Krutestkii (1963, 1976) figuran entre los más destacados, sirviendo de orientación para investigadores posteriores.

"*Se entiende por pensamiento o idea una imagen mental de alguna realidad, siendo el hecho de pensar una sucesión de tales ideas*" (Dewey, 1989; pg: 23). El pensamiento se refiere a los procesos encubiertos que no son directamente observables por los psicólogos. El pensamiento es algo que los psicólogos infieren a través de las acciones de los individuos ya que no se puede ver directamente. " *Una definición general de pensamiento incluye tres ideas: 1) el pensamiento es cognitivo, pero se infiere de la conducta; 2) el pensamiento es un proceso que establece un conjunto de operaciones sobre el conocimiento en el sistema cognitvo; 3) el pensamiento es dirigido y tiene como resultado la resolución de problemas* " (Mayer, 1986; pg: 21). Desde la perspectiva de nuestro trabajo vamos a considerar las siguientes clases de estudio e investigaciones relativas al pensamiento matemático:

1. Estudios sobre habilidad matemática
2. Estudios sobre habilidad espacial.
3. Estudios sobre visualización

I.4. 2 Habilidad matemática.

"*Habilidad es, de acuerdo con Eysenk, un constructo hipotético creado con el fin de explicar como unos individuos realizan ciertos tipos de tareas mejor que otros*" (Suwarsono, 1982; pg: 38).

Nosotros vamos a considerar habilidad matemática como sinónimo de pensamiento matemático, como hemos visto en parte de la literatura que trata estos conceptos.

Krutetskii en su obra "*The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*" (1976) trata de determinar cuáles son las componentes del pensamiento matemático, para ello realiza un estudio exhaustivo de la literatura de la época, antes de presentarnos su punto de vista. Krutetskii concluye que para dar una definición sobre habilidad matemática hay que clarificar:

* la especificidad de la habilidad matemática;

* la estructura de la habilidad matemática;

* las distintas tipologías que se pueden presentar, según los individuos.

Al hacer un análisis de habilidades se plantea la necesidad de diferenciar el concepto de ***habilidad*** del de***destreza***. Estas categorías están interrelacionadas, aunque son independientes. La diferenciación puede establecerse así:

* Por habilidad se entienden los rasgos psicológicos individuales de una persona, que favorecen la rapidez y demuestran dominio en una actividad concreta (en este caso las matemáticas). "*La habilidad es el rasgo psicológico del que depende la maestría de las destrezas en una actividad* " (Krutestkii; pg 71)

* Por destreza, se consideran las acciones específicas en un campo como el matemático.

Pero, ***para analizar tanto habilidades como hábitos, o destrezas, hay que analizar una actividad, pues se juzgan ambos usando los hechos y la ejecución de la actividad de las personas.*** Sin embargo la actividad se puede mirar desde un punto de vista diferente. Analizando la actividad desde el punto de vista de los rasgos psicológicos que son favorables a este dominio estaremos haciendo un análisis de la habilidad.

Tipos de habilidad matemática.

Los investigadores distinguen entre *habilidad matemática escolar* para manejar información matemática reproduciéndola y usándola independientemente y *habilidad creativa matemática,* en cuanto creación de un producto original que tiene un valor social. Al hablar de habilidad matemática escolar se tiende a asociarla con la habilidad de resolver problemas y tests de Matemáticas, aunque algunos psicólogos han encontrado ciertas propiedades fundamentales que la asocian con la habilidad para las matemáticas adquirida en la escuela.

Otra distinción es la que divide la habilidad matemática en *innata* y *adquirida*. Hay unanimidad entre los especialistas cuando consideran que un investigador creativo en matemáticas ha de tener predisposición innata, una inclinación favorable hacia esta labor. Así piensa Hadamard (1947); también Révéz (citado por Krutetskii) trata la naturaleza innata y hereditaria del talento matemático. Sin embargo, en lo que respecta a la habilidad matemática escolar, los psicólogos no están de acuerdo sobre hasta qué punto es innata o adquirida, así Adler, Beke y Wogt (citados por Krutetskii) están entre los que aseguran que dicha habilidad es innata y Rogers, Mensenkamp, Brown y Johnson, entre aquellos para los que la habilidad matemática es a la vez producto del entrenamiento. Algunas investigaciones referentes a la habilidad matemática (tanto la creativa como la que se desarrolla a través del aprendizaje) han tratado de determinar la esencia de dicha actividad que, se puede considerar como una función psicológica compleja.

Estructura de la habilidad matemática. Cuando Krutestkii se plantea la pregunta sobre si la estructura del pensamiento matemático es singular e indescomponible o es una propiedad compleja, considera de nuevo distintas investigaciones llevadas a cabo y encuentra psicólogos que se inclinan por la teoría de un grupo de factores, que mantienen una concepción fraccionaria de la habilidad matemática.

Entre los numerosos trabajos que cita de esta línea tomamos como ejemplo a Canisia (1962), quién en su investigación aísla doce factores y entiende que la habilidad matemática es la habilidad de razonar usando símbolos y que el proceso de pensamiento matemático está relacionado con la habilidad de extraer conclusiones, de organizar estructuras y manipular relaciones. Como ejemplo de estudios introspectivos señalamos a Hamley (1935), quién sostiene que la habilidad matemática es una función compleja en la que ***la imagen visual, junto con una inteligencia general juega el papel básico, además de la habilidad para percibir números y configuraciones espaciales y retener tales configuraciones como patrones mentales.***

Como conclusión de la revisión mencionada, Krutetskii establece la siguiente lista de habilidades diferentes:

1.- ***Habilidad para formalizar material matemático***, desde una forma aislada de contenido a una forma abstracta, desde relaciones concretas numéricas y formas espaciales, a operar con estructuras formales.

2.- ***Habilidad para generalizar material matemático***; detectar qué es importante y qué no lo es, abstrayendo lo irrelevante; también ver qué es común y qué es especialmente diferente.

3.- ***Habilidad para operar con numerales y otros símbolos***.

4.- ***Habilidad para secuenciar el razonamiento lógico***, relacionada con la necesidad de comprobar, demostrar y deducir.

5.- ***Habilidad para abreviar los procesos de razonamiento*** y pensar en estructuras mas reducidas.

6.- ***Habilidad para invertir procesos mentales.***

7.- ***Flexibilidad de pensamiento***. Incluye el proceso de paso de una forma mental a otra. Esta característica del pensamiento es importante para el trabajo creativo de un matemático.

8.- ***Memoria matemática***; se puede considerar que también rige el hecho específico de la ciencia matemática, ayuda a generalizar y formalizar estructuras y esquemas lógicos.

9.- ***Habilidad para conceptos espaciales***. Está directamente relacionado con la geometría, especialmente con la geometría del espacio.

Mas adelante presenta Krutestkii lo que llama el ***perfil general de la estructura de la habilidad matemática*** de los individuos en edad escolar (dicho perfil fue utilizado por Presmeg (1985) para realizar un análisis de dificultades en el trabajo de campo para su tesis doctoral):

1.- ***Obtención de información matemática***:

a) Habilidad para llegar a formalizar la percepción de material matemático, y conseguir la estructura formal de un problema.

2.- ***Procesar información matemática***:

a) Habilidad para pensar lógicamente en el universo de relaciones cuantitativas y espaciales, así como para pensar con símbolos matemáticos.

b) Habilidad para generalizar objetos matemáticos, relaciones y operaciones de forma amplia y rápida.

c) Habilidad para simplificar el proceso de razonamiento matemático y el sistema de operaciones correspondiente, así como de simplificar estructuras.

d) Flexibilidad de procesos mentales en la actividad matemática.

e) Habilidad para lograr simplicidad, economía y racionalidad en las soluciones.

f) Habilidad para reconstruir la dirección de un problema mental, pasando desde una dirección al proceso inverso de pensamiento (reversibilidad en el proceso mental del razonamiento matemático).

3.- ***Retención de información matemática:***

a) Memoria matemática (memoria generalizadora de relaciones matemáticas, esquemas de argumentos y demostraciones, métodos de resolución de problemas y principio de aproximación).

4.- ***Componente general sintética***:

a) Organización matemática de la mente.

No considera obligatorias dentro de este esquema las componentes siguientes:

5.- ***Rapidez en los procesos mentales,*** como característica temporal.

6.- ***Habilidad de cálculo*** (precisión y rapidez en el cálculo).

7.- ***Memoria para fórmulas, símbolos y números.***

8.- ***Habilidad para conceptos espaciales.***

9.- ***Habilidad para visualizar relaciones matemáticas.***

Estas últimas consideraciones de Krutestkii fueron criticadas por Presmeg (1985).

I.4.3 Habilidad Espacial.

El termino Habilidad Espacial, señala Suwarsono (1982; pg: 38), fue creado para explicar cómo algunos individuos son mejores que otros realizando ciertas tareas que se denominan "*tareas espaciales*".

Desde que en 1935 Hamley, matemático y psicólogo australiano, señalara que la habilidad matemática está compuesta de inteligencia general, imagen visual y habilidad para percibir números y configuraciones espaciales y retener tales configuraciones como dibujos mentales, se produjeron muchas investigaciones cuyo objeto de estudio fue la habilidad espacial, la imagen mental y el rendimiento matemático (Lean y Clements, 1981; pgs: 267).

Durante los años 50 y 60 se mantiene el interés sobre la relación existente entre habilidad espacial y habilidad matemática y se realizan gran número de investigaciones, Krutestkii señala a Wrigley 1958, Barakat 1951, Smith 1964 como trabajos en los que se considera que la habilidad espacial es esencial para el pensamiento matemático.

Por los años 70 el término Habilidad Espacial era ambiguo (Presmeg, 1985) y surge el debate sobre si la habilidad espacial es simple o por el contrario se puede considerar compuesta de otras capacidades. Tanto Suwarsono (1982) como Presmeg (1985), recogen en sus revisiones bibliográficas conclusiones de investigadores sobre la composición de la habilidad espacial. Así, Suwarsono cita a Guilford (1967, 1971), cuyo modelo de estructura intelectual estaba destinado a obtener una base comprensiva y sistemática de la inteligencia humana, estableció dicha estructura mediante 4 categorías de contenido, 6 de producto y 5 de operación, obteniendo un total de 120 factores; de ellos, 30 comprenden pensamiento visual.

Por su parte Bishop (1983, pg: 182) tratando de eliminar alguna confusión y ayudar a los educadores matemáticos a centrar sus investigaciones, propone dos tipos de habilidades diferentes:

1.- ***Habilidad para interpretar información figural***. Conocer y entender representaciones visuales y vocabulario espacial usado en trabajos de geometría, gráficos, mapas y diagramas de todo tipo. Los trabajos se refieren a leer, entender, interpretar tal información.

2.-***Habilidad para el procesamiento visual de la información***. Comprende tanto la idea de visualización como la traducción de relaciones abstractas e información no figural a términos visuales; manipulación y transformación de representaciones visuales y de imágenes visuales.

En términos de visualización también se expresan Lean y Clements (1981; pg: 276) cuando aseguran: "*Por habilidad espacial nos referimos a la habilidad para crear imágenes mentales y manipular estas imágenes en la mente*".

Suwarsono (1982; pg: 77) reconoce que "*aunque la habilidad espacial y la formación de imágenes visuales están relacionadas, los dos constructos no son idénticos. Están relacionados en el sentido de que algunas tareas espaciales pueden estar formadas con imágenes visuales*".

I.4.4 Visualización

El término ***visualización*** está presente en la definición de Habilidad Espacial, no obstante, la visualización tiene entidad en sí misma y las investigaciones y estudios sobre habilidad espacial y visualización se han desarrollado independientemente. La visualización no es una invención reciente, como señala Zimmermann y Cunnigham (1991; pg: 2) "*los diagramas son tan antiguos como la matemática misma*", la geometría se ha desarrollado siempre sobre diagramas, y en otras ramas de las matemáticas también los usan.

También es muy antigua la necesidad que el hombre tiene por determinar el papel que juega la imagen visual en el pensamiento (Gardner 1988). Al comienzo fueron los filósofos, luego los psicólogos especulativos y por último los psicólogos experimentales los que se interesaron por la exploración de las imágenes mentales. No ha sido menor el interés en cuanto a determinar la relación entre imagen visual y matemáticas; aspectos como la influencia de las imágenes visuales en el pensamiento matemático, en el aprendizaje de las matemáticas y la comprensión de las mismas es un tópico que ha despertado interés entre psicólogos y educadores (Zimmermann y Cunningham, 1991).

En los últimos años algunos investigadores han centrado su atención en descubrir cual es la función que la imagen visual ejerce sobre el aprendizaje de las matemáticas escolares. Algunos de sus hallazgos han sido los siguientes: Ball y Wittrok (1973) sostienen que los sujetos que han dibujado ellos mismos un diagrama para la formación de un concepto, recuerdan dicho concepto más significativamente que cuando se le ha proporcionado el dibujo con el concepto; por otra parte, los sujetos que realizan un dibujo del concepto aprenden mejor que aquellos que solo retienen la definición verbal de los mismos. Wittrot (1974) resume estas ideas argumentando que la generación activa de una imagen visual por el que aprende facilita más el aprendizaje que la simple presencia de la imagen visual misma.

Otros investigadores se han pronunciado a favor del desarrollo de la capacidad de visualización en el período de aprendizaje de los individuos. Así tenemos a: Tall (1991), quién asegura que rechazar la visualización es rechazar la raíz de algunas de nuestras más profundas ideas matemáticas; Cunnigham (1991; pg: 67) asegura que incorporando actividades de visualización en la educación matemática, aumenta la intuición y se proporciona al sujeto una mayor capacidad de entendimiento. El desarrollo de la capacidad de visualizar abre a los alumnos muchos caminos para pensar y hacer un nuevo tipo de matemáticas.

Naturaleza y características de las imágenes visuales.

Gardner (1988), hace una síntesis de las diferentes opiniones que los psicólogos contemporáneos tienen sobre la naturaleza y las características de las imágenes visuales. Entre otras expone las siguientes experiencias y conclusiones de Kossly y Shebar. Para Kossly las imágenes son visualizaciones espaciales temporales en la memoria activa, que se generan a partir de representaciones más abstractas alojadas en la memoria a largo plazo. Se esforzó en demostrar que las imágenes mentales eran una forma de representación. En opinión de Shebar, no debe de concebirse la imagen como una cosa, sino que es preferible hablar de la acción de imaginar, que es algo que legítimamente hacen las personas; para crear una figura se necesitan materias primas que no son necesarias para formarse una imagen.

Suwarsono (1982), después de analizar las opiniones de varios autores, señala que la controversia en torno a la naturaleza de la formación de imágenes visuales no se ha resuelto y cuestiones como ¿qué es exactamente una imagen visual? ¿cuál es la característica de las imágenes? ¿cómo se fija la imagen en la memoria? no han tenido una respuesta satisfactoria. Este autor acepta para su trabajo las siguientes puntos:

* las imágenes existen; son sinónimos de ver objetos o dibujos, incluso con el pensamiento, sin estar presentes a la vista;

* una imagen mental puede ser utilizada en el proceso de pensamiento de la resolución de un problema.

Otros autores han dado definiciones o descripciones en las que se puede apreciar qué entienden por visualización o formación de imágenes visuales en los individuos:

Bartlett en 1927 (recogido por Suwarsono) considera que formar una imagen es hacer referencia a un objeto concreto o situación en ausencia del mismo bajo la actuación de un estímulo adecuado.

Piaget (1969) considera la imagen mental como la evocación de un modelo (objeto) sin la presencia directa del mismo.

Presmeg (1985) define imagen visual como un esquema mental que depende de información visual o espacial.

Hebb (citado por Presmeg) dice que la imagen visual es la ocurrencia de actividad mental correspondiente a la percepción de un objeto, pero cuando el objeto no está presente al órgano de la vista.

Suwarsono da la siguiente definición: *Representación pictórica sobre un papel o en la mente*. (pg: 128)

Visualizar es sinónimo de ver mentalmente, ambos se pueden referir a objetos concretos o conceptos abstractos (Mariotti, 1991).

Zimmermann (1991) asegura que parece apropiado el término "*pensamiento visual*" para describir los aspectos del pensamiento matemático que está basado o puede ser expresado en términos de imágenes visuales. Define pensamiento visual de la siguiente forma "*Es el proceso de formar imágenes, ya sea mentalmente o dibujadas en un soporte material y usar tales imágenes de forma efectiva para descubrir y entender las matemáticas*" (pg: 127). Mantiene que para dar respuesta a la pregunta ¿qué entendemos por pensamiento visual?, es necesario conocer lo que un estudiante hábil en pensamiento visual es capaz de hacer. Para este autor el conocimiento relevante y la habilidad en visualización se pueden considerar divididos en cinco categorías que llama objetivos, distinguiendo entre ellos:

* Objetivos básicos.
* Objetivos funcionales.

* Objetivos generales.
* Objetivos relacionados específicamente con el cálculo.
* Objetivos de alto nivel.

Los objetivos básicos hacen referencia a: entender el álgebra y la geometría como lenguajes alternativos para expresar las ideas matemáticas; entender la matemática implícita en una gráfica; extraer información de un diagrama así como utilizar las gráficas para representar información matemática. En los objetivos funcionales se contempla la capacidad para entender qué conceptos están representados en un diagrama, usar estos para realizar demostraciones y para resolver problemas. Con objetivos generales se refiere a aquellos aspectos de la visualización que tienen amplia aplicación en distintas áreas de las matemáticas; se incluye aquí la habilidad para realizar estimaciones y aproximaciones en un contexto geométrico, reconocer y explicar simetrías, periodicidad, similitud, entender y reconocer patrones, entender trasformaciones geométricas, conseguir un amplio repertorio de imágenes visuales.

Los objetivos relacionados específicamente con el cálculo incluyen la habilidad de entender conceptos como el de diferenciación, visualizar elementos infinitesimales en figuras geométricas y visualizar superficies y figuras de tres dimensiones. Los objetivos de alto nivel hacen referencia a la habilidad de apreciar la belleza de las matemáticas, interpretar fenómenos y experiencias visuales de la vida real, explorar y descubrir visualmente ideas matemáticas.

Vemos que para algunos investigadores (sobre todo psicólogos) la idea de visualización está ligada a "*formación de una imagen mental*", lo cual entraña pensamiento figurativo y pensamiento operacional. El pensamiento figurativo está relacionado con patrones estáticos e imágenes. El pensamiento operativo con patrones en movimiento y la manipulación de imágenes visuales, no se considera un soporte material para la imagen. (Ben-Chaim, D. 1989; pg: 49). Para otros (sobre todo matemáticos), la visualización se refiere a la vez a la habilidad para interpretar y entender información figurativa y manipularla mentalmente; representar sobre un soporte material cualquier concepto matemático o problema y usar diagramas para representar conceptos matemáticos y resolver problemas. Esta última idea hace que la visualización no sea un fin en sí misma sino un medio para llegar a un fin que es la comprensión. Como aseguran Zimmermann y Cunnigham (1991; pg: 3) "*no se trata de visualizar un diagrama sino un concepto o problema a través de un diagrama*". Para ello es necesario un entendimiento pleno del problema en términos del diagrama o imagen visual. Nosotros vamos a tomar el término visualización en sentido amplio, es decir, vamos a considerar la perspectiva psicológica y la matemática.

I.4.5 Tipos de pensamiento matemático en relación con la visualización.

Paivio, citado por Presmeg (1985; pg: 8), sostiene que los sistemas analitico-verbal y verbal-simbólico están presentes en toda tarea de pensamiento, pero la proporción de uno u otro sistema varía de una tarea a otra y de un individuo a otro. Señala también tres variables que ejercen su influencia sobre el uso de imágenes visuales por un sujeto cuando realiza una tarea.

La primera es el ***estímulo o la característica de la tarea***. En general una tarea que esté directamente relacionada con objetos físicos tiene más posibilidad de evocar imágenes visuales que una tarea que no se relaciona con objetos físicos.

La segunda variable es la ***manipulación experimental***. Por ejemplo, si un sujeto ha recibido instrucción en el uso de imágenes visuales, al realizar una tarea estará mas inclinado a usar la imagen visual que aquellos que no han sido instruidos en dicha tarea.

La tercera variable son las ***características de los sujetos***. Un ejemplo de estas características es la experiencia previa que los sujetos hayan tenido con la tarea. Una persona que tiene experiencia con un tipo de tarea tiende a usar menos imágenes visuales que otra que tiene menos experiencia.

Según se desprende del planteamiento de Paivio ***se puede hacer distinción entre los escolares respecto a su habilidad de usar imágenes visuales, su preferencia a usarlas y la necesidad de su uso en el aprendizaje y en la resolución de problemas matemáticos.***

Esta idea ha sido considerada y aceptada por muchos autores, entre ellos:

Hadamard (1947), quién indica que entre los individuos, ya sean estudiantes o matemáticos, se distinguen dos modalidades los "*intuitivos*" y los "*lógicos*". Los segundos están preocupados por la lógica y han avanzado en su obra paso a paso. Los primeros están guiados por la intuición y en un primer golpe hacen rápidas, aunque a veces, precarias conquistas.

Presmeg (1985) también cita un trabajo realizado por Haeker y Ziehen en el año 1931, en el cual se identifican los siguientes grupos de sujetos:

* aquéllos para los que domina el elemento visual; resuelven visualmente problemas abstractos.

* aquéllos para los que el elemento abstracto es dominante; resuelven lógicamente problemas de geometría;

* sujetos en los que los dos elementos están equilibrados.

Lean y Clement (1981) consideran que los individuos pueden agruparse en tres categorías respecto a su dimensión visual-verbal.

* el primer grupo está formado por los ***visualizadores***, que son aquellos individuos que habitualmente usan imágenes visuales o notaciones pictóricas para resolver problemas.

* el segundo grupo lo forman los ***verbalizadores***, que tienden a usar códigos verbales en vez de imágenes visuales o notaciones pictóricas.

* el tercer grupo, compuesto por aquellos individuos que no tienen una preferencia sobre una forma u otra de procesar.

Krutetskii (1976) distingue cuatro tipologías diferentes para los escolares, dividiendo el tercer grupo en dos subgrupos:

* Analítica. Componente lógico-verbal muy arraigada; esta componente predomina sobre la componente pictorico-visual que es débil; no suele usar supuestos visuales para resolver un problema porque en realidad no los necesita.

* Geométrica. Componente pictorico-visual muy alta, que predomina sobre una componente lógico-verbal pobre; usan soporte visual para resolver problemas y a veces llega a ser una necesidad.

* Armónica. Las dos componentes tanto lógico-verbal como pictorico-visual están en equilibrio. Esta categoría la divide a su vez en dos subcategorías:

a) armónico-abstracto: puede usar soporte visual al resolver problemas pero prefiere no hacerlo;

b) armónico-pictórico: puede usar soporte visual al resolver un problema y prefiere hacerlo.

Piaget e Inhelder (1977) distinguen entre pensamiento perceptual y representacional y entre pensamiento figurativo y operativo. El pensamiento perceptual está relacionado con acciones sensoriomotoras mientras que el pensamiento representacional es necesario para la manipulación interna de imágenes. El pensamiento figurativo se relaciona con patrones estáticos e imágenes, mientras que el pensamiento operativo lo hace con patrones en movimiento de objetos y la manipulación de imágenes visuales. Moses (1977) y, posteriormente, Suwarsono (1982) llegan a la conclusión que no hay clases disjuntas entre los individuos respecto al predominio o rechazo de la visualización; la situación más real consiste en colocar a los sujetos en una escala continua en cuanto a su preferencia por el uso de imágenes visuales cuando resuelven problemas de matemáticas. Algunas investigaciones (Walter, 1963, citado por Lean y Clement, 1981), han concluido que la mayor parte de las personas pertenecen al grupo de los verbalizadores y muy pocas pertenecen al grupo de los visualizadores. Mayer (1986, pg: 323) recoge un trabajo realizado por Haeber en 1969. Consistía en mostrar a sujetos un dibujo y preguntarles por detalles puntuales del mismo, una vez retirado. Encontró que algunos niños tenían la capacidad de "ver" hasta el más perfecto detalle de los dibujos mostrados y responder a preguntas sobre los mismos, capacidad que no mostraban muchos adultos. Una explicación coherente a este hecho está en destacar que nuestra sociedad exige que codifiquemos la información verbalmente y no visualmente; por otro lado, las capacidades de leer y escribir van en aumento y ha decaido la utilización de representaciones por imágenes.

Eisenberg y Dreyfus (1986; pg: 153) constatan que es un hecho común que los estudiantes tiendan a inclinarse por un método analítico en el proceso de información matemática antes que por uno visual. Presmeg (1985) afirma que los alumnos mas sobresalientes en matemáticas son en la mayoría de los casos no visualizadores, como una conclusión de su tesis doctoral. Las razones que ella aduce para explicar este hallazgo hacen referencia a los factores que intervienen en el proceso de enseñanza/aprendizaje, unas de orden interno y otras de orden externo. Una hipótesis apunta hacia la idea de que, por su naturaleza, las matemáticas favorecen el pensamiento no visual. La componente lógico-verbal del pensamiento es la habilidad matemática por excelencia, según Krutetskii, mientras que la componente visual-espacial no es obligatoria. Esta puede ser la razón de que muchos matemáticos no posean un pensamiento de tipo geométrico. Una segunda posibilidad es que la evaluación usual en el currículo de las matemáticas escolares se realiza mediante la competencia en tests de papel y lápiz y otros tipos de exámenes, lo cual no favorecen el pensamiento visual. Una tercera explicación señala que los profesores en sus clases hacen hincapié en métodos no visuales y cuando aparece una solución de tipo visual, normalmente, no se considera válida por los mismos profesores. Los libros de texto también siguen una progresión de orden lógico de demostraciones no visuales y reservan para los ejemplos los métodos visuales.

Zimmermann (1991) hace referencia al trabajo de Mandy, Dik, Monk, Swan y Vinner los cuales llegan a la conclusión de que los alumnos tienen una alta tendencia a pensar algebraicamente más que visualmente, y esto ocurre así incluso cuando se fuerza a utilizar un proceso visual. Esta preferencia no es accidental, según Zimmermann, que a su vez da tres razones por las cuales esto es así:

a) Razón de tipo cognitivo: ***el proceso visual es mas difícil que el analítico.***

b) Razón de tipo sociológico: ***lo visual se considera menos sólido para la enseñanza.***

c) La tercera razón se refiere al punto de vista de algunos matemáticos, profesores e incluso alumnos de que ***lo visual no es matemático***.

I. 4.6 La visualización en la enseñanza de las matemáticas.

Las matemáticas se componen de elementos de distinta naturaleza, como son elementos espaciales, kinestésicos, algebraicos, aritméticos, lógicos, intuitivos...lo que hay que tener en cuenta para diferenciar modos de conocimiento (Zimmermann y Cunnigham, 1991; pg: 2); si se pone el énfasis en uno solo o un grupo de elementos, resulta un empobrecimiento de la ciencia y un potencial de aprendizaje incompleto por desequilibrio entre los elementos mencionados. El proceso de visualización es usual en el trabajo con muchos de los elementos considerados para las matemáticas; constituye un recurso fundamental para promover la actividad intelectual ya que sirve de puente entre el mundo real y la actividad mental de los individuos. Las funciones de la visualización en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas son destacadas por distintos autores:

"*La visualización matemática no es apreciación de figuras o dibujos en el pensamiento. La intuición que da la visualización matemática, no es un tipo de intuición vaga, un sustituto superficial del entendimiento, sino la clase de intuición que penetra en el mismo corazón de una idea. Da penetración y claridad al aprendizaje, actúa como una guía útil en la resolución de problemas, e inspira descubrimientos creativos*".(Zimmermann y Cunnigham, 1991; pg: 4).

El concepto de visualización matemática es un hecho importante en el desarrollo del *razonamiento y la habilidad matemática* (Ben-Chaim, 1989; pg: 53). Esto es especialmente cierto en el razonamiento inductivo/deductivo. Para este autor formar una conjetura, a partir de un patrón, y generalizarla es una componente propia del razonamiento inductivo. Probar conjeturas por un argumento o soporte lógico o encontrar un contraejemplo es la esencia del razonamiento deductivo. Los patrones tanto numéricos como geométricos pueden ayudar a los alumnos en la construcción de nociones de álgebra. La visualización actúa a modo de catalizador para entender y producir razonamiento inductivo. También permite la visualización entender de manera informal un razonamiento deductivo, donde el tratamiento algebraico se realizará más adelante.

Nuestra tesis es que ***la visualización es importante para la educación puesto que la comprensión alcanzada mediante elementos visuales y analíticos se complementan; por ello mismo, el aprendizaje debe lograrse integrando información que utilice ambos tipos de códigos***. En el curso normal de la enseñanza hay una doble vía para presentar y abordar los problemas: la visual y la simbólica, que se tienden a separar; nuestra pretensión consiste en poner de manifiesto las ventajas de generar en los alumnos un entendimiento visual en el desarrollo de la habilidad de resolver problemas, utilizando ambos pensamientos, visual y analítico, en concordancia.

Educación en la formación de imágenes.

Hadamard (1947) responde afirmativamente a la pregunta sobre si se puede, o no, educar la formación de las imágenes; para ello pone como ejemplo el proceso llevado a cabo por Titchner en este sentido, quien realizó un entrenamiento a base de imágenes visuales y auditivas con el fin de conseguir una amplia y variada gama. ¿Cuál puede ser la causa del rechazo (o el olvido) de muchos enseñantes de matemáticas de los procesos visuales en el desarrollo de su labor? Existen algunas respuestas a esta cuestión.

Cunnigham (1991; pg; 74) dice que la enseñanza basada en la visualización requiere, por parte de los profesores, poner en marcha muchas habilidades pedagógicas. No sólo se requiere dominar el contenido matemático sino que es necesario saber cómo comunicar las matemáticas visualmente. Para realizar una enseñanza de tipo visual es necesario tener en cuenta una serie de reglas:

* Determinar exactamente las cuestiones matemáticas que se van a presentar a través de una imagen y mostrarlas en el momento apropiado, de tal manera que se proporcione al alumno una información o se provoque un conflicto.

Determinar el orden en que el material debe presentarse a través de las imágenes y organizar esta presentación de forma secuenciada lógica y conectada; ofrecer a los estudiantes distintas opciones o vías para expresar su conocimiento matemático, sin confusiones o malos entendidos; presentar las imágenes de forma dinámica, dando a los alumnos las oportunidades apropiadas de exploración y control; considerar la forma en que los estudiantes pueden aprender a visualizar, cómo evaluar tal aprendizaje y cómo integrar este aprendizaje con otras partes y formas de su conocimiento matemático.

Tanto Cunnigham como Zimmermann apuntan otro problema para adoptar técnicas de visualización en educación matemática: no se conoce el modo adecuado de evaluar esta forma de aprendizaje. En el aprendizaje visual no se dispone de una colección familiar de hechos matemáticos o procesos de cálculo que haga fácil su evaluación. La visualización facilita la intuición, el entendimiento y la formación de conceptos, los cuales no se evalúan a través de técnicas escritas de papel y lápiz. Cunnigham (1991; pg: 75) señala la necesidad de más ejemplos de educación visual en matemáticas, alguna clasificación de las investigaciones hechas en visualización y una evaluación formal de las distintas técnicas de visualización; también propone que se deben hacer investigaciones para determinar instrumentos con los que evaluar el aprendizaje visual.

I. 5 Conceptos matemáticos

I. 5.1 Nociones básicas.

Configuración puntual. Se denomina así la representación gráfica de una colección finita de puntos, que responde a un propósito o a cierta intencionalidad. Ejemplo: grupos de puntos dispuestos en la misma forma que las constelaciones (Silvermann, 1990; pgs: 18-20).

Una configuración puntual ofrece una imagen visual de una cantidad: es un modelo gráfico de representación de números (Hogben, 1966; pgs: 10-13). Por lo general cada modelo tiene algún modo o criterio de estructuración; a veces, como en el ejemplo anterior, el criterio es copiar una organización que aparece en la naturaleza; otras veces el criterio sigue unas pautas de simetría o regularidad. Hay que tener en cuenta que una misma cantidad -un mismo número- puede representarse mediante una variedad de configuraciones puntuales.

Número figurado. Es una configuración puntual o disposición de puntos, que representa un cardinal mediante un modelo o figura reconocible; se consideran prioritariamente figuras geométrica en el plano o en el espacio (Freudenthal, 1991; pg: 44; Stein, 1975; pgs 25-33); en este trabajo nos limitamos a figuras planas.

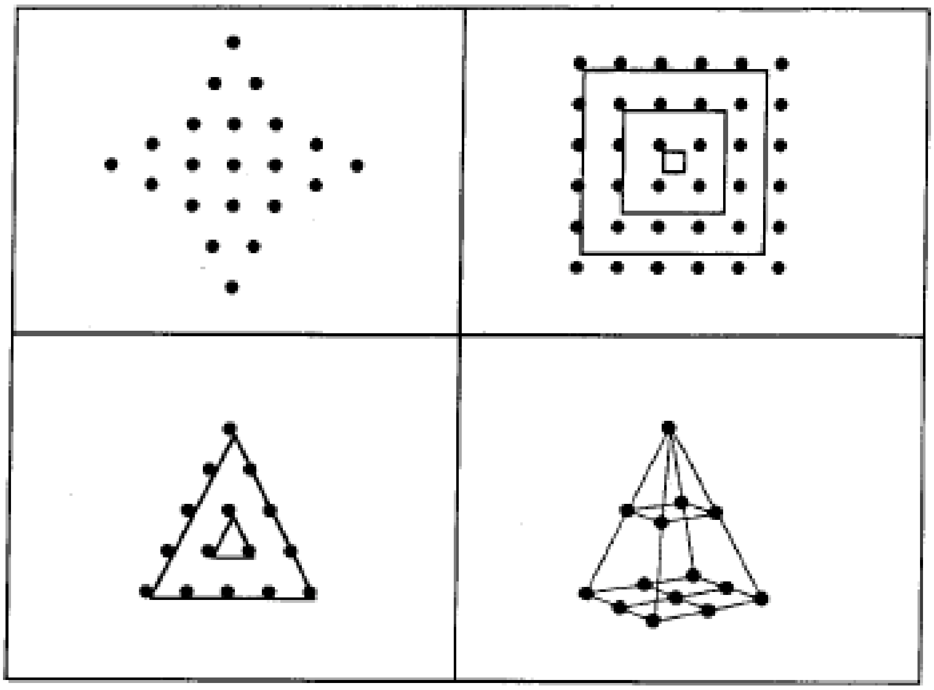


Figura 3

Patrón de puntos. Cuando una configuración puntual se considera como ejemplo o caso particular de una forma o estructura, con la que se pueden visualizar distintos números variando el tamaño pero no la forma, tenemos un patrón; un patrón puntual es una estructura de representación mediante configuraciones puntuales (Hervey y Litwiller, 1970; Pgs: 33-38; Pitts, 1979; pgs:). Cada configuración puntual puede considerarse, alternativamente, ejemplo de diferentes patrones; por ello la noción de patrón es general y distinta de la noción de configuración puntual.

Hay dos modos básicos de generar un patrón a partir de un modelo (N.C.T.M. 1993; pgs: 12-16):

a) generación modular; hay un módulo básico que se reitera

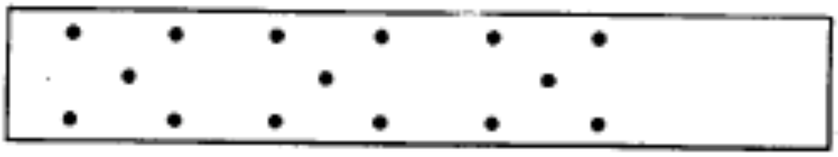


Figura 4

c) generación por ampliación; hay una forma básica que se amplía según un criterio

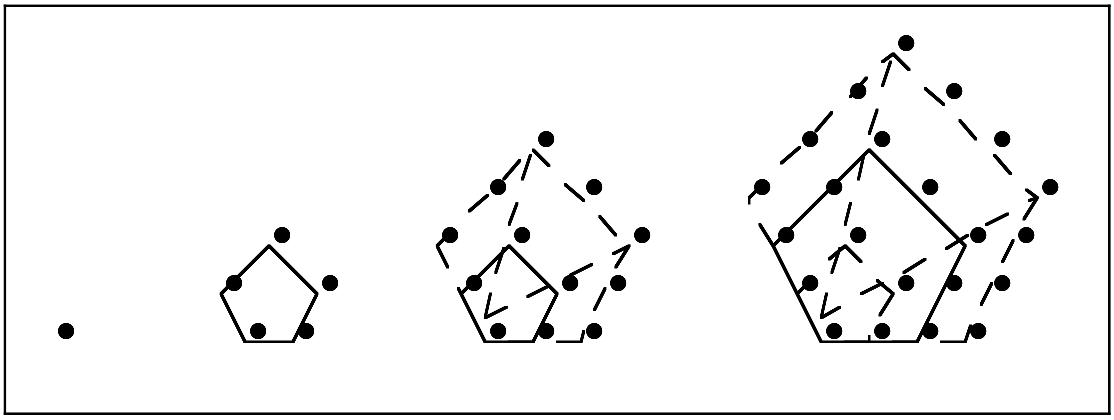


Figura 5

Número Poligonal.

Se designa así un tipo de patrón que representa números en base a un modelo geométrico cuya forma es un polígono y cuya generación se hace por ampliación (Lucas, 1891; pgs 53-55; Fourrey, 1899; pgs: 56-64; Beiler, 1966; pgs: 185-199; Wells, 1987). Cada tipo de polígono da lugar, al menos, a un patrón; asì, hay números *triangulares*, *cuadrados*, *pentagonales*, etc.

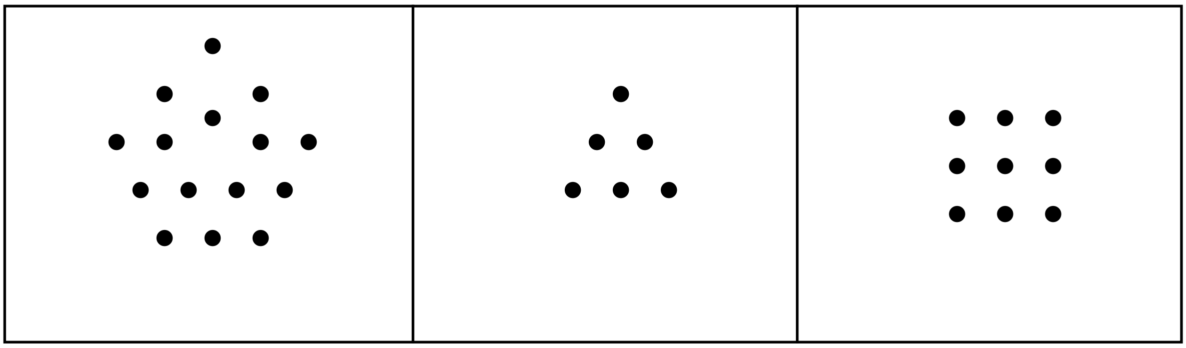


Figura 6

De igual manera, hay patrones ***piramidales*** que representan números organizando la cantidad de puntos correspondiente en forma de pirámide; ***cúbico*** es el patrón que representa números organizando la cantidad de puntos correspondiente en forma de cubo.

Las ***configuraciones puntuales*** son un modo de representación de números, basado en:

un único símbolo: el punto;

un espacio estructurado de representación, usualmente la trama cuadrada o la trama isométrica cuando trabajamos en el plano, también es posible considerar otras dimensiones (Barra, 1994; pgs: 19-26), pero queda fuera del objetivo de este estudio;

un modo de organización de la cantidad de puntos que satisface criterios de simetría o regularidad convenidos y que se pueden explicitar de manera sencilla.

Con estas tres condiciones establecemos un ***sistema simbólico de representación de números,*** que denominamos configuraciones puntuales (Beiler, 1966; pgs: 185-189), cuya ventaja consiste en proporcionar una multitud de modelos gráficos de un mismo número, mediante los que se hace una valoración visual y un análisis de diferentes estructuras aritméticas del número

De las precisiones anteriores se desprenden las siguientes consideraciones:

Cualquier número natural admite una variedad de representaciones mediante configuraciones puntuales.

La denominación de *Números figurados* se reserva para aquellos casos en que se emplea una representación puntual en forma de figura, fundamentalmente geométrica (Cerdá, 1758; pgs: 224-230; Willerding, 1979; pgs: 29-39).

Dados varios números distintos es posible encontrar una representación de ellos que se ajuste a una misma estructura, lo que se visualiza por mantener un tipo de figura; cuando ésto ocurre y la figura puede ser compartida por otros números, entonces tenemos un patrón al que se ajustan los números considerados. Se dice entonces que ***los números comparten patrón.*** Cualquier colección de números no satisface un patrón; dado un patrón los números que lo satisfacen están determinados.

Números poligonales -para cada tipo de polígono- son aquellos números que admiten una representación según el patrón poligonal correspondiente. Igualmente se pueden considerar los números piramidales y los cubicos.

Secuencia. "*Una secuencia es un número de cosas o acontecimientos que se presentan uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo con un patrón definido, por lo general moviéndose por etapas hacia un resultado particular*" (Collins, 1987); "*Ordenación lineal de las unidades constituyentes de un (..) conjunto o colección* " (Real Academia, 1990).

Tomamos el término secuencia como primitivo del término *sucesión*, ya que los alumnos de los primeros cursos de secundaria comienzan su estudio con secuencias para pasar, posteriormente, a sucesiones.

Sucesión. "*Aplicación cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. La sucesión será de puntos, de números de un cierto tipo, de funciones, etc, si son esos los elementos del conjunto imagen*" (Real Academia, 1990).

En nuestro trabajo consideramos sucesiones de números naturales ***lineales*** o ***cuadráticas***, es decir, cuyas leyes vienen dadas mediante polinomios de primer grado:

$\boldsymbol{a_n = a\, n + b}$,

o de segundo grado:

$$a_n = a\,n^2 + bn + c,$$

respectivamente.

Las primeras también se denominan *progresiones aritméticas* (Fourrey, 1899; pgs: 48-55) y constituyen una clase de números congruentes módulo a.

A efectos de dominio, salvo mención en contrario, no consideramos incluido el número 0. Los coeficientes a, b y c toman valores enteros, por lo general, de manera que los valores de a_n sean naturales.

I.5.2 Números poligonales.

Triangulares.

Los números triangulares reciben su nombre del hecho de presentar una configuración puntual en forma de triángulo regular (Hamberg y Green, 1967; pgs: 339-342; Wells, 1987). Las representaciones usuales de los números triangulares son:

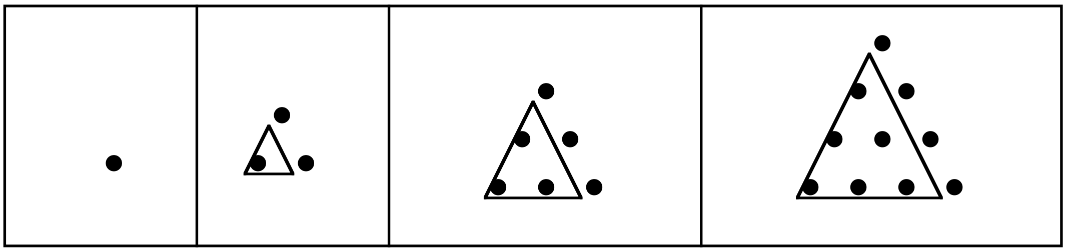


Figura 7

Los números triangulares forman la siguiente secuencia:

1, 3, 6, 10, 15... o bien:

$T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, $T_5 = 15$...

Dicha secuencia numérica presenta una regularidad en su formación que descubre el patrón numérico "sumar un natural consecutivo a partir del primer término" que es 1, para obtener los demás términos.

Observando el procedimiento de formación de los números triangulares se descubre un patrón geométrico de la representación de sus términos (Lucas, 1894; pgs: 26-27). Para formar T_2 se parte de T_1 y se colocan dos puntos en la línea inferior. Para formar T_3 a partir de T_2 se coloca una línea de tres puntos debajo de las que ya teníamos. Así se procede iterativamente, lo que permite escribir el siguiente patrón numérico:

$$1 = 1$$
$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

. ...

La construcción de una secuencia de números triangulares puede realizarse por un procedimiento de sumas reiteradas: (inverso al de las diferencias finitas).

1ª fila	1	1	1	1	1	1	1 ...
2ª fila	1	2	3	4	5	6	7 ...
3ª fila	1	3	6	10	15	21	28 ...

Cuadrados.

Se denominan así a los números que admiten una configuración puntual regular cuadrada; los números cuadrados se obtienen de contar los puntos que se pueden disponer en forma de tablero, o cuadrado (Fourrey,1899; pgs: 65-79; Wells, 1987).

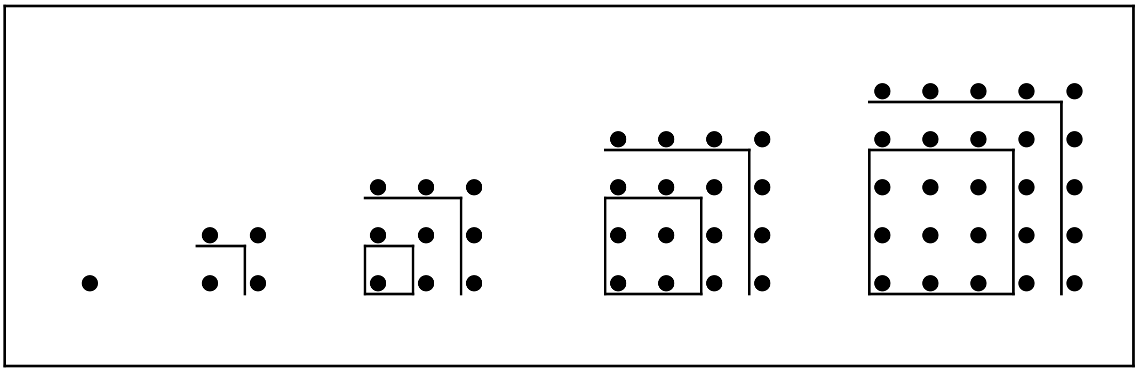


Figura 8

Los números cuadrados son las potencias segundas, o *cuadrados,* de los números naturales.

1, 4, 9, 16, 25, 36... ; o bien:

$C_1 = 1$, $C_2 = 4$, $C_3 = 9$, $C_4 = 16$, $C_5 = 25$, $C_6 = 36$...

El patrón de formación en esta secuencia numérica es: sumar números impares consecutivos, empezando desde 1. El segundo número cuadrado es suma de los dos primeros impares a partir de 1; el tercer cuadrado es suma de los tres primeros números impares a partir de 1, y así sucesivamente.

El patrón numérico que se obtiene es:

$$1 = 1$$
$$1 + 3 = 4$$
$$1 + 3 + 5 = 9$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

....

También es posible obtener los números cuadrados mediante tabla de sumas sucesivas, siguiendo una pauta inversa a las diferencias finitas:

1ª fila	2	2	2	2	2	2	2 ...
2ª fila	1	3	5	7	9	11	13 ...
3ª fila	1	4	9	16	25	36	49 ...

Pentagonales.

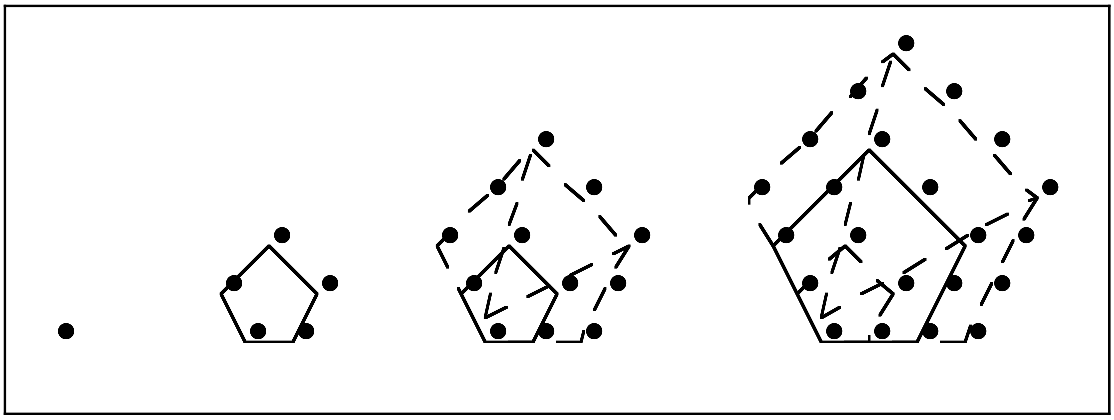


Figura 9

Secuencia:

$P_1 = 1,\ P_2 = 5,\ P_3 = 12,\ P_4 = 22,\ P_5 = 35...$

Patrón numérico:

$$1 = 1$$
$$1 + 4 = 5$$
$$1 + 4 + 7 = 12$$
$$1 + 4 + 7 + 10 = 22$$
$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$$

....

Tabla de formación

1ª fila	3	3	3	3	3	3 ...
2ª fila	1	4	7	10	13	16 ...
3ª fila	1	5	12	22	35	51 ...

Proceso general

Se consideran los siguientes pasos en el estudio de un patrón poligonal: *Representación*: se comienza por un punto en todos los casos; a continuación se dibuja un polígono regular con el número de lados que indique el número figurado de que se trate y se señala un punto en cada uno de sus vértices, así se obtiene el número poligonal de rango dos. Para construir los restantes polígonos se toma un vértice de referencia y los demás vértices se alinean con él trazando líneas auxiliares. Sobre cada una de estas líneas (a una distancia igual a la que tienen los puntos colocados inicialmente) se coloca un punto, obteniendo los vértices del nuevo polígono; a continuación se rellenan los lados hasta tener un número de puntos por lado igual al del orden considerado y respetando distancias. Con este procedimiento los lados que hay que rellenar son tantos como tiene el polígono menos dos, por lo que el número de puntos que aumenta cada uno, con respecto al anterior, es igual al número de lados menos dos (Beiler, 1966; pg: 188).

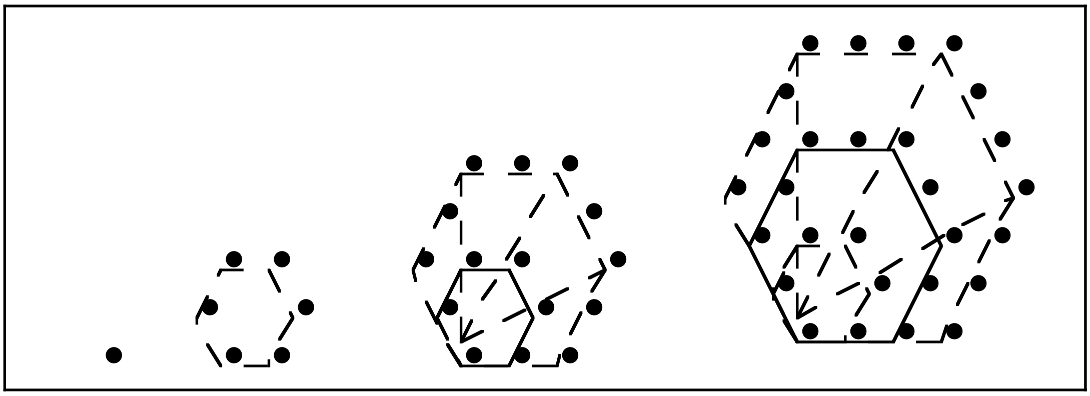


Figura 10

Secuencia númerica: se obtiene contando, en cada caso, los puntos que tiene la representación geométrica; la obtención de una expresión general para cada secuencia es conocido (Lucas, 1891; pg: 53; Beiler, 1966; pg: 189); el término n-ésimo del poligonal de r lados:

$P_n^r = n + (r-2) \cdot n(n-1)/2$, se obtiene como suma de los n primeros términos de la progresión aritmética que comienza en 1 y tiene de razón r-2.

Tabla de formación , el procedimiento más seguro, ya que identifica los números poligonales de orden r, con la secuencia de términos de diferencias segundas constante k (= r-2) y que comienza por 1:

1ª fila	k	k	k	k	k	k	...
2ª fila	1	1+k	1+2k	1+3k	1+4k	1+5k	...
3ª fila	1	2+k	3+3k	4+7k	5+11k	6+16k	...

I.5.3 Generalizacion

La generalización a partir de números poligonales se puede entender de tres maneras distintas:

a) dada la representación de un número según un patrón poligonal determinado, continuar dicho patrón; esta es la generalización más sencilla y la que debe trabajarse previamente con los escolares.

b) Conocidos varios patrones poligonales (triangular, cuadrado, pentagonal) ampliar el tipo de patrón teniendo en cuenta el número de lados del polígono considerado.

c) generalizar el número de dimensiones del espacio de referencia. Los números poligonales tienen dos dimensiones; los piramidales tres dimensiones; la consideración de un espacio emedimensional proporciona números figurados de dimensión m.

Las tabla 1 da los primeros pasos para la obtención de las dos primeras generalizaciones.

Tabla 1: Números poligonales (ocho primeros términos, hasta el rango décimo)

Orden Nombre	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Triangular	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Cuadrangular	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Pentagonal	1	5	12	22	35	51	70	92	117	143
Hexagonal	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Heptagonal	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Octogonal	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Noneagonal	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Decagonal	1	10	27	52	85	126	175	232	297	37

Los distintos rangos en cada número poligonal forman una sucesión cuyo término general (o generalización a que nos hemos referido anteriormente) puede obtenerse por varios procedimientos (Beiler, 1966; pgs: 193-194)

En esta tabla se pueden considerar múltiples regularidades, tanto por filas como por columnas.

Por columnas:

- La primera columna, es una secuencia de términos 1.
- La segunda columna, está formada por los números naturales empezando en 3.
- La tercera columna, contiene a los números múltiplos de 3 mayores que 3.
- La cuarta columna, está formada por múltiplos de 2 cuya diferencia es 6.
- La quinta columna, está formada por los múltiplos de 5 no terminados en 0.
- La sexta columna, solo aparecen múltiplos de 3.
- En la séptima, solo múltiplos de 7.
- En la octava, solo múltiplos de 4.
- En la novena solo múltiplos de 9.
- En la décima, solo múltiplos de 5.

También hay regularidades por filas. Otras regularidades son:

-La primera columnas de unos, indica que el primer orden de todos los números poligonales es uno.

-La diferencia constante, entre los enteros de la segunda columna es uno, siempre.

-En la tercera columna la diferencia es tres; en la cuarta la diferencia constante es seis; las diferencias constantes de los números en las respectivas columnas son:

0 1 3 6 10 15 21...

esto permite poder generar la tabla de los números poligonales a partir de los triangulares, actuando de la forma siguiente:

* se colocan en una fila los números triangulares;

* debajo de la anterior se vuelve a colocar otra vez la fila de números triangulares desplazados un lugar hacia la derecha; sumando estas dos filas obtenemos los números cuadrados.

* colocando una nueva fila de números triangulares debajo de los cuadrados, desplazándola un lugar con respecto a la anterior y sumando de nuevo estas filas, se obtienen los números pentagonales, y así sucesivamente. (Weaver, 1974; pg: 662)

De esta relación se deduce que:

* la suma de dos triangulares consecutivos es un número cuadrado;

* los números pentagonales se pueden generar por suma de un cuadrado y de un triangular.;

* los hexagonales, añadiendo un pentagonal y un triangular, y así continuan los demás.

Otras relaciones interesantes así como la conexión de los números figurados con la combinatoria pueden consultarse en Lucas (1891), Beiler (1966), Sloane (1973), Wells (1987).

I. 5. 4 Delimitación conceptual de nuestro trabajo.

Nuestro interés por las configuraciones puntuales tiene su origen, como ya se ha indicado, en encontrar un esquema gráfico para representar términos de las sucesiones de primer o segundo grado, que tomen valores enteros.

Las progresiones aritméticas admiten representaciones puntuales sencillas, por lo general rectangulares de base o altura constantes, o variantes de esta representación; las secuencias lineales se denominan así porque la representación gráfica de sus términos puede analizarse mediante una *descomposición en líneas* y la diferencia entre dos términos se puede describir como agregación de una línea.

Las sucesiones de diferencias segundas constantes son aquéllas cuyo término general viene dado por un polinomio de segundo grado; más en concreto: si la diferencia segunda constante es k, el coeficiente del término de segundo grado del polinomio correspondiente es k/2.

Los casos más sencillos son la sucesión de números cuadrados: $C_n = n^2$, la de los números rectangulares de diferencia de dimensión 1, $R_n = n\ (n+1)$, o de diferencia de dimensión 2, $R'_n = n(n+2)$.

La representación gráfica de sus términos se puede analizar teniendo en cuenta que las dos dimensiones son variables; el paso de un término al siguiente viene dado por un aumento de superficie según las dos dimensiones. La estructura de estos números se llama *cuadrática* o *multiplicativa* y el paso de un término al siguiente no es constante sino que, al aumentar en dos dimensiones, también es variable siendo esa variación lineal.

En general, si la ley de una sucesión es $a_n = an^2 + bn + c$, con a de la forma k/2, k natural, b y c valores enteros o racionales, dicha sucesión es de diferencias segundas constantes e igual a k; si a_n toma valores naturales para todo n, entonces cada término puede representarse como una figura plana poligonal, regular o irregular, manteniendo todos los términos un mismo patron de representación que viene establecido por la descomposición de cada figura en triángulos, mas (o menos) un número de líneas , mas (o menos) un número fijo de puntos.

Las secuencias de números poligonales constituyen los ejemplos más sencillos de sucesiones de segundo grado (o de diferencias segundas constantes) que admiten una representación gráfica visual, intuitivamente coherente. De hecho, los números triangulares constituyen las piezas básicas para el análisis de los números figurados planos (Olson, Goff y Blose, 1983; pgs: 624-625).

Nos proponemos introducir a los escolares del primer ciclo de secundaria (12-14 años) en el sistema simbólico de representación que hemos denominado configuraciones puntuales y emplear estas representaciones como recurso visual para realizar un análisis estructural de números que comparten un mismo patron de representación; de este modo obtendremos el desarrollo aritmético (aditivo o multiplicativo) que comparten los términos de una misma secuencia. A partir de las conexiones establecidas entre la secuencia numérica, la secuencia de representaciones y la secuencia de desarrollos aritméticos, tratamos de estudiar la comprensión que manifiestan estos escolares en establecer relaciones entre números, reconocer y utilizar patrones y proporcionar una generalización a la estructura común que tienen los términos de una secuencia. Este trabajo queda enmarcado conceptualmente en la teoría de números figurados y poligonales, el estudio de sucesiones enteras y las diferencias finitas de segundo orden.

Nuestro trabajo se encuentra delimitado por:

sucesiones lineales y cuadráticas de números naturales;

tres sistemas simbólicos: figurativo (configuraciones puntuales), simbólico estructurado (sistema decimal de numeración) y operatorio (desarrollos aritméticos).

Hacemos hincapié en los patrones de formación de las secuencias tanto puntuales como numéricas con motivo de hacer intervenir la visualización de dichos patrones en la formación del término general de las sucesiones.

Consideramos las configuraciones puntuales como modelos que expresan patrones de formación de secuencias numéricas, supliendo la falta de representación de este contenido en la escritura en el sistema decimal.

"*La visualización viene siendo reivindicada, con carácter general, como una de las vías de acceso a la comprensión del conocimiento matemático. Sin embargo hay pocos estudios sistemáticos que aporten evidencia sobre la virtualidad de la comprensión visual para los conceptos numéricos*" (Giaquinto, 1993; pg: 385); menos aún, trabajos que traten de presentar un tratamiento organizado de sistemas de representación para números, basados en interpretaciones visuales.

Nuestro propósito es incorporar el factor visual a través del contexto figurativo en el aprendizaje de los números y sus relaciones.

I. 5. 5. Trabajos e investigaciones previas.

Con el fin de conocer las investigaciones realizadas en este campo a nivel internacional realizamos: una consulta a la base de datos ERIC, el 21 de noviembre de 1991, con los términos clave *Pattern Recognition*, *Secondary School* y *Mathematics Education,* obteniendo un total de 51 referencias; una consulta a la base de datos MATHDI, el 22 de noviembre de 1991, con los términos clave *Polygonal Number* o *Figurate Number*, una segunda búsqueda, con los términos clave *Number Theory* y *Secondary,* una tercera con los términos *Spatial Ability* o *Spatial Visualizatio* y *Model*, finalmente, una cuarta petición con los términos *Spatial Ability* o *Spatial Visualizatio* y *Number,* excluyendo en todos los casos la documentación escrita en alemán; de esta consulta obtuvimos 45 referencias para los primeros descriptores, 50 referencias para los segundos, 3 referencias para los terceros y 19 referencias para los cuartos; una revisión, actualizada a 31 de diciembre de 1993, de los fondos de la hemeroteca de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

Como resultado de la búsqueda sistemática anteriormente descrita, y hecha la depuración correspondiente de aquéllos trabajos que no respondían al objeto de nuestro estudio, hemos controlado y fichado 113 artículos publicados en revistas de investigación, revistas profesionales y de divulgación, conectadas con la educación matemática; no se contabilizan aquí comunicaciones en actas, libros ni capítulos de libros. Queremos destacar que no hemos encontrado ningún estudio previo sistemático sobre el tópico elegido por nosotros, al menos no con el aparato conceptual y metodológico que hemos desarrollado. Sí hemos encontrado algunas exploraciones y experiencias de aula que utilizan los números figurados y poligonales; algunos de estos trabajos hacen una reflexión de carácter cognitivo, mientras que otros realizan alguna propuesta de tipo curricular. Por su cercanía a alguna fase de nuestro estudio hemos hecho una descripción resumida de ellos.

En la tabla aparecen sistematizados los artículos encontrados en revistas especializadas y revisadas, comenzando por el año 1962. Aparecen por filas en orden cronológico, con una serie de columnas que tienen en cuenta:

-datos de identificación, nombre del autor/es, lugar de trabajo y tipo de trabajo al que se refiere, pudiendo ser un trabajo de divulgación o un trabajo preparado para el aula;

-procedimiento que se aconseja seguir o se sigue, según el caso;

-conceptos tratados;

-aptitudes y desarrollo cognitivo que pretende.

Tabla 2: Resumen de trabajos realizados sobre el tema.

Datos de identificación	Procedimiento	Conceptos	Aptitudes	Desarrollo cognitivo
Clarkson, M. 1962. Poughkeepsie NewYork. sixth grade. 3 clases de 45 m.	Contexto de reso- lución de proble- mas. Números T, C. Patrones	triángulos, cuadra- dos. Relaciones entre los números Triangu- lares y Cuadrados. Pa- trones de diferencias.	Entusiasmo en el traba- jo.Participa- ción de todos.	Adquisición de conceptos, destre- zas y estrategias
Lademann, N. 1964 Downers Grove Ilinois. sixth grade.	Manipulativamente números cúbicos, sobre el papel poligonales	Representación de triangulares y cua- drados. Relaciones entre ellos. Patrones	Ilusión por investigar. Participación de todos.	Potencia la mani- pulación paso a la expresión simbó-lica.
Cox, A. M. 1965 grado inferior. períodos cortos duran-te 12 días.	Manipulativamente. regularidad de las sumas de impares	Números triangulares y cuadrados. Rela-ciones y formación de patrones.	Actividad lúdica. Participación de todos.	Paso de situación real a expresión simbólica.
Bradfield, D. 1967 Tulsa Oklahoma. Divulgación	Visualización de los números poligonales.	Números poligonales representación de NP Relaciones entre ellos. Término general.		Relacionar en el número,figuras ge- ométricas, formas algebraicas y es- tructura aritmética.
Hamberg, C. Green, T. 1967 Huntington Beach. California Divulgación	Revisión de los conceptos de Nú- meros Triangulares y Cuadrados. Re- solución de proble- mas utilizando estos conceptos.	Números triangulares y cuadrados. Con-cepto de sumatoria y sus propiedades. Términos generales y operaciones con ellos. Diferencias.		Desarrollo del pensamiento algebraico.
Trimble, H. 1968 Columbus. Ohio. Divulgación.	Representación puntual de figuras geométricas.Cons- trucción de tablas. Relaciones. Término general.	Números poligonales. Diferencias entre columnas en las tablas. Generaliza-ción m-gonal		Aprender a apren- der. Demostración de teoremas.
Wiscamb, M. 1970 Houston Texas. Divulgación	Patrones numéri- cos. Construcción de tablas. Términos generales.	Resolución de Problemas		Proceso de inducción.
Hervey, M. Bonnie, H. 1970 Northern Iowa. Divulgación.	Patrones puntua- les. Patrones numé- ricos.Generalización	Uso de tablas Uso de diferencias Términos generales. Matrices 2x2.		Proceso de inducción.
Smith, J. 1972 Covngton Kentucky Divulgación.	Representación de Números Poligo- nales. Secuencia aritmética. Sumato- ria y propiedades	Término n-ésimo de una sucesión. Los Números Poligonales como sucesiones a- ritméticas.Progresión aritmética.		Demostraciones de teoremas.
Schattschneider, D. 1972 Bethlehem	Observando regularidades llegar a	Representación puntual de números	Los alum- nos obtie-nen	Distintos métodos en la consecución de un

Pennsylvania.	la expresión S=n(n+1)/2	triangulares. Empleo de tablas.	resulta- dos propios.	resultado.
Szczepanski, R. 1972 Linton High School Divulgación.	Uso de relaciones geométricas para calcular diferencias finitas.	Teselaciones con rec tángulos y hexá-gonos regulares.Uso de tablas.Diferencias finitas.Expresiones algebraicas.		Desarrollo del pensamiento algebraico a través de las diferencias finitas.
Gullen, G. 1974 Fondson High School Dearbon Michigan. Divulgación.	Programa con el que obtener los factores primos de un número natural.	Rectángulos. Números triangulares		Demostración de teoremas por mé- todos algebraicos.
Clement, M. 1974 Student at Totley-Thrnbridge. College of Education.Divulgación.		Números hexagona- les centrados.Regu- laridades en las diferencias.		Establecer rela- ciones.Trabajo con patrones.
Atherton, R. 1974 Colleg Education. Berkshire.	Proceso desde el uso de bloques lógicos para construir números triangulares y cua-drados hasta rela-ciones numéricasde recurrencia, trián-gulo de Pascal y diferencias Finitas.	Números poligonales desde el hexagonal centrado.		Relaciones de los números poligonales y los triangulares.
Holt, M. 1974 Divulgación	Representación puntual de los números triangu- lares y cuadrados.	Números triangulares y cuadrados.		Formación de relaciones.
Weaver, C. 1974 David Hill Elemntary School Akron Ohio Divulgación	Expresión general para los números poligonales.	Números triangula-res, cuadrados,pen- tagonales, hexago- nales. Uso de tablas y diferencias.		Formación de rela- ciones entre los números poligona-les y los triangulares.
Arnall, R. 1974-75 North Walshan High School. Divulgación.	Relación de triangu- lares, cuadrados, pentagonales, he- xagonales y pira- midales con el triángulo de Pascal.	Figuras geométricas. Representación puntual de las figuras geométricas. Expre- siones algebraicas. Empleo de tablas.		Formación de relaciones entre los triangulares y los otros poligonales.
Cornelius, M. 1974-75 Departament of Education. University of Durham. Divulgación.	Resolución de problemas.	Punto, línea, plano, circulo, espacio.	La resolu- ción de pro- blemas pre- dispone al alumno a investigar.	Relaciones entre secuencias numéricas. Generalización de dichas relaciones.
Harmant, J. 1976 Gainesville, Florida Material en fichas Grade level 7-10	Fichas para trabajo individualizado. Representaciones puntuales. Regula- ridades en diferen- cias.	Números: triangulares cuadrados y pentagonales.	Todos realizan el trabajo de las fichas.	Representación puntual. Descubrimiento de patrones en las diferencias.
Izart, J. 1976-77 Student at R.G.S. Guildford. Divulgación	Obtener fórmula general a través de la observación de regularidad en la figura	Números hexagonales y octogonales centrados.		Proceso para llegar a obtener una fórmula general.
Sharlow, J. 1977 Eastern Connecticut State College Williamantic. Divulgación.	Observación de re- gularidades en la división de un rec- tángulo en sucesi-vas partes iguales. Obtención de la e-	Números triangulares Diferencias finitas. Expresiones algebraicas.		Aproximación visual al algebra.

	cuación de 2º grado			
Pitts, J. 1979. Secondary School. Worcester. Divulgación.	Conexión entre: Números poligo-nales, potencias y diferencias finitas.	Números triangulares rectangulares, cua-drados, cúbicos, po-tencias. Uso de ta-blas, patrones de dife rencias. Expresión algebraica.		Aproximación al algebra estableciendo relaciones.
Cherie Adler 1979. University of Georgia. Atheus. Material en fichas	Observación de regularidades. Construcción de regla.	Números cuadrados y cúbicos.	Todos realizan las fichas.	Descubrir patro-nes. Hacer gene-ralizaciones.
Economopoulos, M. 1981. Divulgación.	Inducción y Deducción.	números cuadrados, triangulares y rectangulares.		Razonamiento Inductivo y Deductivo.
Wivill, R. 1983. Divulgación	Distribución de números figurados en una tabla de multiplicar de doble entrada.	Números poligonales desde triangulares hasta hexagonales.		Observación de patrones.
Olson, M. 1983. U. Wyoming Goff, G.; Blose, M. U. Oklahoma. Divulgación.	Descomposición de Hexagonal en Triangulares. Uso de tablas. Expresión general.	Números poligonales desde triangulares a hexagonales.		Patrones
Pinkerton, K. 1984. Cambell High School Smyrna. Divulgación.	Trabajo con núme-ros triangulares y sus diferencias. Regularidades. Término general.	Números triangulares Regularidad de sus diferencias. Expresión algebraica del término general.		Patrones y regularidades.
Mauland, L. 1985. U. of North Dacota. Divulgación.	Término general de los Números poligonales.	Poligonales hasta el pentagonal. Rec-tangulares. Repre-sentación puntual, tablas, diferencias.		Reconocer patro-nes y relaciones. Introducción al algebra.
Whitcombe, A. 1986. Divulgación.	Comparación entre los Números poli-gonales centrados y los no centrados. Generación como suma de progre-siones aritméticas.	Poligonales centrados y no centrados hasta hexagonales.		Expresión alge-braica del término general. Rela-ciones entre estas expresiones.
Whitin, D. 1986 Divulgación	En un cuadrado dividido visualizar el número de cua-drados que hay.	Cuadrado		generación de patrones de figuras y numéricos.
Bamber, A. 1986-87 Ladypool Primary Scool Birminghan.	Investigaciones de un alumno.	Números cuadrados, triangulares, penta-gonales. Diferencias y relaciones entre ellas.	Los alum-nos se ani-man a tra-bajar con el tópico vien-do el trabajo de su com-pañero.	Relaciones entre patrones puntuales y numéricos.
Anónimo, en Plot nº 46. 1989. Divulgación	Sucesiones. Programa informático sobre ellas.	Números poligonales hasta hexagonales. Piramidales. Representaciones puntuales.		Recurrencia
Robold, A. 1989. Ball State University. Muncie, Indiana. Divulgación.	Construcción mani-pulativa de Núme-ros poligonales se-guido de repre-sentación.	Números poligonales hasta hexagonales. Patrones numéricos.		Uso de modelos manipulativos y uso de patrones.
Dong French. 1990. School of Educatión. University of Hull. Divulgación.	Números poligo-nales y propie-dades. Relación con la operación de	Números triangulares y cuadrados.		Exploración de dis-tintos procesos pa-ra obtener las expresiones gene-

	sumatoria.			rales de los términos.
Paul Andrew. 1990. Ercal Wood School Shropshie (Manches-ter Polytecnic). Divulgación.	Generalización de los números poligonales a partir de su formación.	Números triangulares cuadrados pentagonales. Uso de tablas.		Generalizar desde la figura y desde los patrones numéricos
Miller, W. 1990. Central University Michigan. Grade levels 6-12 Material en 4 fichas.	Hallar términos a partir de otros conocidos.	Números poligonales hasta los pentagonales.	Todos hacen las fichas.	Recursión. Generar datos. Descubrir patrones.
Norman,F. A. 1991. Divulgación.	Actividades para realizar con números figurados.	Número triangular, cuadrado, pentago-nal, hexagonal. Tablas		Conexión entre los aspectos geomé-tricos y aritméticos de los números.
Miller W. 1991. Central Michigan University. Mount Peasant. Grade levels 6-12. Guía para profesores.	Fichas de trabajo para los alumnos.	Números poligonales centrados. Relacio-nes de recurrencia. Expresión algebraica de los términos generales.		Procesos de recurrencia y de generalización.

Todos estos artículos están referidos a Números Figurados; según la información de la primera columna pueden clasificarse en dos bloques: aquellos en los que se exponen experiencias realizadas en el aula, y aquellos en los que sus autores hacen consideraciones y recomendaciones para su uso en la enseñanza. De estos 38 artículos, 8 corresponden al primer bloque y 30 al segundo, proporcionalmente -de acuerdo con las publicaciones- hay más autores que tratan el tema de manera teórica y animan a su utilización y muy pocos los que lo han trabajado en el aula. Dentro del primer apartado, algunos autores sólo publican el material utilizado; generalmente se trata de fichas para trabajo individual, este es el caso de Hartman (1976), C. Adler Aviv (1977) y Miller (1990). Otros autores describen la situación tal como se ha desarrollado en el aula y los resultados obtenidos, es el caso de Clarkson (1962), Lademann (1964) y Mae Cox (1965).

Tratando de encontrar aspectos comunes, cuestiones que se consideran de mayor interés o puntos donde se hace mas hincapié en el tratamiento que hacen los autores que han trabajado sobre números figurados, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

-todos los autores coinciden en que el trabajo con números figurados -ya sea de forma individual o colectiva- resulta agradable y gratificante a los alumnos, "l*os alumnos realizan el trabajo muy ilusionados*" (Lademann, 1964);

-el trabajo con números figurados conduce a los alumnos a realizar verdaderos descubrimientos sobre relaciones y propiedades de los números; este trabajo proporciona satisfacción a los alumnos, pues ven una recompensa a su trabajo: "*los alumnos a veces son mejores descubridores de patrones que sus profesores*" (Clarkson, 1962).

En el caso de Clarkson (1962), la resolución del problema de escribir los números naturales utilizando solamente cuatro veces la cifra 4 y las operaciones necesarias, lleva a los alumnos a considerar los números Triangulares y Cuadrados y a utilizar los patrones aritméticos de sus diferencias.

Lademann (1964), motiva a sus alumnos con la pregunta *¿los números forman figuras?* Los niños empiezan trabajando manipulativamente con cubos y llegan a obtener los números cúbicos, a partir de ahí y sobre el papel van construyendo los números triangulares y cuadrados, y descubren relaciones entre ellos y patrones siempre a partir de las representaciones.

La experiencia que Cox llevó a cabo la realiza con niños que trabajaban en los principios de las operaciones aritméticas. Aprovechando la época de Navidad se motiva a los niños para que construyan un árbol sobre un franelograma de tal forma que el primer día sólo ponen un objeto, el segundo día colocan en una segunda fila dos objetos, el tercer día colocan una tercera fila con tres objetos, y así sucesivamente. Todos los días cuando colocan una nueva fila calculan el número de objetos que tienen, obteniendo así una serie de números, cada uno asociado a un Arbol de Navidad de distinta altura; con esta actividad establecen relaciones y regularidades en la suma de números naturales consecutivos y descubren patrones sencillos.

Bamber (1986) cuenta el trabajo de investigación que desarrolla una alumna sobre patrones en Números Figurados, animada por un programa de la televisión.

En los casos de fichas para trabajo individual presentadas por Harmant, Adler y Miller uno de los objetivos que se proponen es descubrir patrones.

Schattschneider (1972) guía a sus alumnos a encontrar la expresión $S=n(n+1)/2$ utilizando varios procedimientos; finalmente uno de los procedimientos es descubierto por los alumnos utilizando un patrón y la regularidad que sigue.

En este bloque -en los artículos se cuenta el trabajo desarrollado en clase- es común la referencia al descubrimiento de patrones y regularidades.

En el bloque que hemos denominado "sugerencias para trabajar en el aula", también coinciden en el uso de los Números Figurados para reconocer patrones y regularidades, aunque desde enfoques distintos .

Whitin (1986) recomienda que el alumno trabaje con patrones, asegurando que este trabajo debería constituir parte importante del currículo de matemáticas. Asegura que en la mayoría de los casos el trabajo con patrones se realiza para llegar a una cuestión concreta.

Bradfiel (1967); Hamberg (1967); Trimble (1968); Weaver (1974); Izart (1976); Andrew (1990) parten de las representaciones puntuales de los Números Poligonales y llegan por generalización del modelo a las expresiones algebraicas que representan los términos generales de los mismos.

Mauland (1985) señala que estos patrones ayudan a adquirir de forma intuitiva fórmulas algebraicas por lo que recomienda que se utilicen en la introducción del Algebra.

Sharlow (1977) apunta que se pueden utilizar como una aproximación visual al Algebra.

Melfried y otros (1983) recomienda encontrar los términos generales de los Números Poligonales a través de la técnica de su descomposición a triangulares. La misma idea la presenta Atherton (1974).

Pinkerton (1984) considerando los Números Triangulares y su diferencias estudia las regularidades que presentan estas diferencias hasta llegar a su generalización.

Economopoulos (1981) hace una reflexión sobre como utilizar los Números Figurados para el desarrollo del pensamiento tanto inductivo como deductivo. Wiscamb (1970) y Harvey (1970) los consideran una buena herramienta para introducir la inducción.

Algunos autores relacionan los números figurados con la resolución de problemas de dos formas: después de plantear la tarea y revisión de conceptos se presentan problemas para resolver utilizando las propiedades de los Números Figurados; así lo hacen Hamberg y Green (1967). Plantear problemas cuya solución lleva al resolutor a los Números Figurados hasta generar los términos generales, ejemplo de esta situación aparece en el trabajo de Cornelius (1974).

I. 6 Problema de Investigación

Las consideraciones expuestas en los apartados anteriores enmarcan nuestro trabajo y delimitan nuestro problema de investigación. También nos permiten enunciar una serie de conjeturas sobre resultados que esperamos encontrar e hipótesis cuya confirmación o rechazo nos proponemos establecer.

Hemos situado nuestro estudio dentro del campo de la innovación curricular y para ello hemos organizado nuestro trabajo considerando dos niveles de reflexión sobre el currículo:

* actuación en el aula, con objetivos, contenidos, metodología y evaluación como componentes;

* planificación del sistema, donde las componentes consideradas han sido alumnos, profesor, conocimiento y escuela; junto con las relaciones entre las componentes mencionadas del sistema currículo.

Tres son las relaciones que centran nuestro trabajo:

las ***relaciones de comunicación profesor-alumno,*** mediante las que se concreta el proceso de enseñanza y se presentan los conocimientos de una manera organizada que los dota de significado;

las ***relaciones del profesor con el conocimiento matemático***, que se ponen de manifiesto en una determinada selección y planificación, en una adecuada organización y secuenciación de tareas, mediante las que ayudar a los alumnos a construir su conocimiento sobre el tópico estudiado;

las ***relaciones del alumno con el conocimiento matemático***, que se manifiestan en cada caso por la comprensión alcanzada sobre los conceptos, hechos, procedimientos y representaciones del tópico estudiado.

Para precisar el marco conceptual con el que abordamos nuestro trabajo hemos comenzado señalando algunas prioridades en los cambios curriculares actualmente en curso, así como algunas incoherencias; una de estas incoherencias es la carencia de un sistema adecuado de representación para el estudio de las sucesiones y es esta idea la que sirve de punto de partida al trabajo.

La segunda aproximación se hace desde la psicología cognitiva y, más en particular, desde la teoría del procesamiento de la información. Nos hemos centrado en una revisión de los estudios hechos sobre cognición matemática relativos a modelos y sistemas de representación con los que se aborda el análisis de la enseñanza/ aprendizaje de las matemáticas y, muy en en especial, los fenomenos de comprensión del conocimiento matemático y su valoración; no hemos pretendido, por supuesto, hacer una revisión exhaustiva de la cognición matemática, ni siquiera resumidamente.

Debido a la naturaleza del contenido con el que vamos a trabajar, destacamos la relevancia cognitiva de algunas nociones, tales como patrón, inducción, iteración y recursión y, muy en especial, la noción de modelo.

La revisión de estudios previos e investigaciones la hemos hecho en base a tres trabajos fundamentales: las investigaciones de Krutetskii, la tesis de Presmeg y la tesis de Suwarsono; aunque estos estudios se orientan al campo de la resolución de problemas realizan un análisis exhaustivo del pensamiento y la habilidad matemática, en especial de la visualización, que constituye una componente relevante para nuestro estudio.

Una tercera pieza en el marco que define este trabajo es la delimitación conceptual dentro de las matemáticas. Nuestro tema de trabajo pertenece al álgebra clásica y es un tópico que no se presenta en el currículo de ninguno de los niveles del sistema educativo español ni tampoco, por lo que conocemos, en ninguno de los paises de la Unión Europea ni en los Estados Unidos; sí se encuentran referencias en libros de historia, de curiosidades matemáticas y en trabajos sobre resolución de problemas y pensamiento creativo.

Uno de los objetivos de este estudio es hacer una propuesta curricular para alumnos de los dos primeros cursos de Secundaria (12-14 años) mediante la que trabajar los patrones numéricos y las sucesiones a partir de las configuraciones puntuales. Esto nos ha llevado a contemplar los números figurados como sistema simbólico estructurado para la representación de números y análisis de algunas propiedades. De nuevo tuvimos otra posibilidad: hacer un estudio de carácter semiótico de este nuevo sistema, posibilidad que no hemos abordado por no considerarla prioritaria en este momento y que, seguramente, podrá considerarse en algún próximo trabajo.

Al comenzar nuestro estudio no conocíamos en toda su extensión la riqueza de implicaciones que tiene el tema que hemos abordado; por ello, en más de una ocasión nos hemos tenido que esforzar por no abrir nuevas líneas de reflexión y estudio, manteniendo el proyecto de partida.

Nuestro proyecto de trabajo se resume en una propuesta de:

* integrar el sistema de representación de los números naturales, denominado configuración puntual, con el sistema decimal de numeración y con el desarrollo aritmético de estos números;

* trabajar con secuencias numéricas lineales y cuadráticas, analizando el patrón que las define mediante los modelos puntuales y los desarrollos operatorios;

* trabajar los procedimientos de continuar una secuencia, extrapolar términos, generalizar y expresar el término general y utilizar el término general en la obtención de términos concretos.

Las referencias de nuestro estudio están en:

- una teoría curricular y un marco de innovación y reforma del currículo de matemáticas;

- un marco de estudio e investigación sobre cognición matemática, en el que las nociones de modelo, visualización y comprensión son términos clave;

- un tópico matemático, delimitado por un sistema de representación ampliado, unos objetos matemáticos y unos procedimientos que delimitan, conjuntamente, la estructura matemática estudiada.

En el próximo capítulo presentamos la estrategia metodológica diseñada para llevar adelante nuestro trabajo.

Enunciamos a continuación la conjetura general a la que que queremos dar respuesta con esta investigación, dándole un enunciado formal de hipótesis. En el Capítulo II, apartado II.17, enunciamos las hipótesis de investigación de manera más precisa, hipótesis que ofrecen respuestas parciales a esta hipótesis general.

Hipótesis General

La carencia actual de una representación figurativa en la enseñanza/aprendizaje de los números y las relaciones numéricas, constituye una limitación para:

a) la comprensión del concepto de número como estructura de relaciones aritméticas,

b) el dominio y aplicación de tales relaciones.

Alternativamente, proporcionar un sistema simbólico de representación para los números y estudiar los patrones a los que se ajustan estas representaciones:

* mejora la comprensión de los conceptos numéricos;

* proporciona significado a las diferentes relaciones que se pueden considerar en cada número;

* permite representar relaciones entre números así como cambios en esas relaciones;

* facilita reconocer patrones a los que se ajustan los números de una sucesión;

* ayuda a probar/refutar propiedades de los números.

Los sujetos en edad escolar, en especial aquellos en los que predominan los procedimientos visuales, mejoran significativamente su trabajo con números al utilizar representaciones figurativas.

CAPITULO II
MARCO METODOLOGICO

II. 1. Introducción

Como se ha planteado en el capitulo anterior, nuestra investigación se propone establecer las posibilidades que tiene y las dificultades que plantea la enseñanza/aprendizaje de patrones y relaciones numéricas con alumnos de 12-14 años, cuando se incorpora e integra un nuevo sistema de representación denominado **configuración puntual**.

Nos proponemos explorar las posibilidades de comprensión de los conceptos de patrón numérico y sucesión numérica, en términos del análisis que surge de la representación gráfica de los números, que utiliza estrategias de visualización. Como ya se ha indicado, entendemos la comprensión en matemáticas en términos del procesamiento de la información, en el sentido de que "*consiste en establecer conexiones entre ideas, hechos, procedimientos y representaciones*" (Hiebert y Carpenter, 1992; pg: 67). De hecho, nuestro trabajo estudia la virtualidad de determinados esquemas de representación para poner de manifiesto la complejidad estructural subyacente en la noción de ***término general de una sucesión numérica.***

II. 2. Descripción del procedimiento general de la investigación.

A partir de ahora vamos a hacer referencia a un grupo que llamamos **grupo investigador**; el grupo está formado por las tres personas relacionadas directamente con la investigación, que son: el profesor encargado del curso con el que vamos a llevar a cabo el trabajo de campo, la investigadora de este trabajo y el director de la investigación. Las tres personas que componen este grupo poseen amplia experiencia tanto docente (una media de 20 años de docencia), como en producción de documentos escritos para el aula y materiales curriculares (fichas de trabajo, guiones de unidades didácticas, libros del alumno de distintos niveles educativos y guías del profesor); comparten, así mismo, su inquietud por mejorar los procesos relacionados con la vida del aula y forman parte de un Seminario Permanente de Innovación en Matemáticas, que viene investigando y trabajando desde hace 12 años. Las condiciones anteriores han pesado en gran manera sobre la consideración de cómo debía realizarse este trabajo y, por tanto, de cuál ha sido el desarrollo del mismo.

Una vez delimitado el problema, las primeras intuiciones que dan respuesta a la pregunta ***¿qué hacer?*** apuntan la necesidad de un estudio ***completo***, sin olvidar alguna de las componentes que intervienen en la enseñanza/aprendizaje de cualquier tópico de matemáticas. Así, nuestra línea de actuación consiste en preparar un material curricular novedoso, implementarlo utilizando una metodología propia y analizar los resultados que esta doble innovación producen en los alumnos.

Puestos de acuerdo en esta base general de partida, elegimos intencionalmente trabajar con un grupo de alumnos de 7º nivel de E.G.B., que vamos a denominar ***grupo experimental;*** en la situación de reforma actual del sistema educativo consideramos este nivel como primer curso de Secundaria. A partir de ese momento el desarrollo del trabajo se produce de acuerdo con la siguiente secuencia:

Primero: al comenzar la experiencia se suministra a los alumnos de 7º un test estandarizado (TEA) con el fin de comprobar su nivel en los factores que mide dicho test: factor V (dibujos, palabra diferente, vocabulario), factor R (razonamiento), factor N (cálculo).

Segundo: se elabora un material (escrito) propio, con el contenido específico que se quiere trabajar; este material es discutido, corregido y modificado por el grupo investigador hasta llegar a convertirse en unas fichas de orientación para el profesor que va a llevar la clase.

Tercero: la implementación del material se realiza en 4 sesiones de 80 minutos de duración, donde el profesor habitual del grupo guía la clase y el investigador actúa como observador participante.

Cuarto: concluido este trabajo de campo, se procede a realizar un estudio y análisis de ***todo*** lo acaecido en su transcurso, desde su programación hasta la evaluación de la producción de los alumnos, sin descuidar el desarrollo de las sesiones. La realización de este análisis del trabajo de campo crea la necesidad de unas herramientas válidas que permitan evaluar todos los elementos que en el mismo han intervenido. La elaboración de unas ***Categorías*** propias hacen posible tal evaluación.

Las categorías que hemos elaborado para este trabajo responden a tres tipos de necesidades. ***Categorías de Interacción Didáctica,*** que han hecho posible un estudio particular de la programación propuesta así como la comparación entre esta programación y la realidad de su puesta en practica. ***Categorías de Contenido Matemático*** que, cruzadas con las anteriores, permiten conocer qué aspectos concretos del contenido son tratados, y con qué desarrollo son propuestos. ***Categorías de Comprensión del Contenido,*** con las que poder abordar el trabajo realizado por los alumnos e interpretar las conexiones establecidas entre los conocimientos matemáticos presentados. Posteriormente entraremos en el detalle de cada una de ellas.

Quinto: el análisis anterior proporciona una serie de conclusiones, entre las que se encuentran: continuar el trabajo el curso siguiente con los mismos alumnos en 8º nivel y hacer una revisión del planteamiento en cuanto a contenido y recogida de datos.

Sexto: se plantea el trabajo para 8º curso en dos frentes paralelos:

a) Seguir el trabajo con el tópico elegido, introduciendo algunos cambios;

b) elegir otro grupo de alumnos: ***grupo de control***, de características similares al que realiza la experiencia, con el fin de efectuar unas mediciones en ambos grupos, experimental y control, antes y después de realizar el trabajo de campo del segundo curso.

El objetivo de estas medidas es estudiar si se produce, o no, variación en el comportamiento de los estudiantes (tanto de uno como de otro grupo) en dos pruebas paralelas A y B. La prueba A se suministrará a los alumnos antes de la realización del trabajo en el aula del grupo experiemntal y la B después de la experiencia. Con estas pruebas, A y B, pretendemos evaluar la competencia aritmética general de los alumnos, sin tener en cuenta el tópico específico que estamos trabajando; entendemos que una prueba de sucesiones posiblemente daría alguna ventaja a los alumnos del grupo experimental, con lo cual entendemos que los resultados estarían sesgados. El constructo a medir en estas pruebas A y B es la Competencia Aritmética. No hemos encontrado pruebas diseñadas para poder realizar estas medidas, por lo que ha sido necesaria la elaboración de las mismas por el grupo investigador, de forma que dieran satisfacción a los objetivos planteados. Antes de comenzar el trabajo de campo en 8º nivel de se procede a la realización por los alumnos de la prueba A.

Séptimo: se realiza la revisión y puesta a punto del material escrito para el desarrollo del trabajo en 8º nivel de los alumnos del grupo experimental; su implementación se lleva a cabo a lo largo de 5 sesiones de 80 minutos de duración en las que la investigadora pasa a llevar la clase y el profesor del curso desempeña las funciones de observador. Termina esta fase con la realización por los alumnos de la prueba B de los grupos experimental y control.

Con objeto de comprobar qué grado de comprensión han alcanzado los alumnos de la experiencia con el trabajo realizado sobre sucesiones y para estudiar hasta qué punto esta comprensión es producto del aprendizaje natural, de la intuición o bien se debe a una instrucción explícita, hemos preparado un test específico sobre cuestiones trabajadas en el aula con el grupo experimental, referentes a sucesiones. Como ocurre con los tests A y B, no encontramos ningún instrumento adecuado a nuestras necesidades, por lo que elaboramos un test propio.

Octavo: concluye nuestro trabajo en los centros relacionados con nuestra experiencia, después de la administración de la prueba sobre sucesiones.

Un estudio y análisis de todo el proceso del nivel 8º cierra un eslabón de esta cadena. El eslabón siguiente lo constituye la organización y el reflejo escrito de cuanto ha acaecido. La tabla 1 resume la temporalización del proceso anterior.

Tabla 1: Temporalización del proceso seguido.

FASE	DURACION APROXIMADA	FECHA
Intuición del problema	dos años	Cursos 88-89 , 89- 90
Revisión bibliográfica	cuatro años	1988-1992
Concreción del problema	dos meses	XII-91 y II-92
Planteamiento de hipótesis	2 sesiones de 3 horas	16-XII-91, 10-II-92
Elaboración del material de instrucción	viene de revisión bibliográfica	X-1988 a II-1992
Selección del grupo para el estudio piloto	1 sesión de 2 horas	12-diciembre-1991
Implementación del material preparado	4 sesiones de 80 minutos	4, 5, 11 y 12 - V- 92
Elaboración de instrumentos de análisis	8 sesiones de 3 horas	15 a 30 - V- 92
Análisis del estudio piloto	dos meses	VI y VII- 92
Selección del diseño para el segundo estudio	dos meses	IX y X- 92
Plan de análisis de datos	6 sesiones de 2 horas	X-92
Selección de grupo	en sesiones anteriores	X-92
Administración de pretest	1 sesión 30 minutos	27-II-93
Elaboración de material de instrucción	2 sesiones de 4 horas	I y II-93
Implementación del tratamiento	5 sesiones de 80 minutos	1, 2, 15, 16 , 22-III-93
Administración del postest y de la prueba de sucesiones	1 sesión, 1 hora de duración	23-III-93

II. 3. Encuadre de la investigación en los paradigmas convencionales.

Nuestra investigación no se encuadra en un paradigma único. Se sitúa entre dos perpectivas:

a) ***Heurístico-Interpretativa,*** con la que se pretende conseguir la comprensión global de las situaciones y las relaciones establecidas entre todos los agentes implicados en el trabajo, a la vez que permite dar respuesta a los interrogantes de cómo los sujetos perciben, crean, modifican e interpretan los hechos de la realidad matemática considerada.

b) ***Empírico-Analítica,*** con el fin de reducir el fenomeno que se estudia a dimensiones objetivables, susceptibles de medición, análisis estadístico y control experimental. (Arnal y otros, 1992; pg: 84)

En nuestro trabajo pretendemos una complementación entre ambos paradigmas, que trate de equilibrar, por una parte, el carácter subjetivo que se atribuye al paradigma interpretativo y, por otra, la simplificación de la compleja realidad escolar que se achaca al paradigma empírico (Cook y Reichardt, 186). De la fundamentación metodológico-interpretativa destacamos "*la primacía que se otorga a la experiencia subjetiva inmediata como base del conocimiento; el estudio de los fenómenos desde la perspectiva de los sujetos, teniendo en cuenta su marco referencial; y el interés por conocer cómo las personas* *experimentan o interpretan el mundo social que construyen en interacción*" (Arnal y otros, 1992; pg: 195).

Nuestra finalidad general consiste en comprender e interpretar la realidad del mundo escolar, que concebimos dinámica, múltiple, holística, compleja y divergente; en particular, el modo de interpretación y asignación por parte de los escolares de significado compartido a determinadas regularidades numéricas y sus percepciones, acciones e intenciones en estas tareas. En este marco la relación entre los sujetos y el objeto de conocimiento que se considera es una relación de dependencia, en la que se influyen e interrelacionan mutuamente las componentes del conocimiento, de la instrucción y del aprendizaje. El investigador está implicado en este marco de relaciones. Se da, pues, una relación mutua entre teoría y práctica, con un proceso de retroalimentación contemplado explícitamente como parte del diseño de esta investigación.

II. 4. Modalidad de investigación.

Siguiendo la clasificación presentada por Arnal y cols. (1992; p. 42) sobre modalidades de investigación, la nuestra responde a las siguientes características:

Por la ***finalidad*** perseguida, la nuestra es una investigación ***aplicada,*** ya que tratamos de resolver un problema "*práctico e inmediato en orden a transformar las condiciones del acto didáctico y a mejorar la calidad educativa*" (Arnal y cols., 1992; pg. 42).

En cuanto a su ***alcance temporal,*** hacemos un ***estudio transversal*** obteniendo datos de grupos diferentes en un mismo momento, y un ***estudio longitudinal*** para el que utilizamos datos de un mismo grupo a lo largo de un período de tiempo. Pretendemos conseguir de esta manera una mejora de nuestro trabajo ya que "*los puntos débiles de cada uno de estos métodos se pueden reforzar usando un método combinado*" (Cohen y Manion, 1990; pg: 336).

En referencia al ***objeto perseguido***, consideramos nuestra investigación de un doble tipo: ***a) descriptivo y b) experimental***. La investigación descriptiva "*trata de descubrir e interpretar lo que es*" (Cohen y Manion, 1990; pg: 101). Nosotros estudiamos -tratamos de descubrir e interpretar- ***qué es, en qué consiste y qué posibilidades de desarrollo tiene el conocimiento aritmético de los escolares de 12 a 14 años***, en particular, nos centramos en determinados aspectos no convencionales de dicho conocimiento (el término no convencional significa, en este caso, no considerado en el currículo de modo sistemático). A través de la experimentación tratamos de indagar la posible relación causal/funcional que nuestro tratamiento experimental/innovador pudiese producir sobre ciertas variables-producto de interés; controlando, evidentemente, el mayor número de amenzas posibles.

En cuanto al ***carácter de la medida*** utilizamos dos métodos diferentes; un método ***cualitativo*** que nos permite dotar de significado el estudio del "comportamiento" de los sujetos sometidos a tratamiento; y un método ***cuantitativo*** que proporciona datos susceptibles de análisis estadísticos que nos permiten validar nuestras hipótesis; de este modo creemos "*explicar de manera más completa la riqueza y complejidad del comportamiento humano*" (Cohen y Manion, 1990; pg: 331).

Los datos cualitativos proporcionarán una base para entender el significado de las relaciones que encontremos en el análisis estadístico. "*Esta base fenomenológica para el conocimiento resulta esencial al proceso de evaluación del impacto de los programas de intervención social. (...) Tal vez la base de la interpretación de los métodos cualitativos con los métodos cuantitativos en unas actividades de evaluación de un programa resida en el hecho de que los métodos cualitativos proporcionan el contexto de los significados en que pueden ser entendidos los hallazgos cuantitativos*" (William y Filstead, 1986; pg: 59)

Por el ***marco*** en que tiene lugar nuestra investigación, se trata de una investigación de ***campo*** que trabaja sobre el terreno del aula, con un grupo natural.

Por su ***dimensión temporal*** la consideramos ***experimental*** pues pretendemos introducir un cambio en el currículo y observar el efecto que produce en los individuos dicho cambio.

Por su ***orientación*** podemos decir que está ***orientada a la aplicación***. Se trata de dar respuesta a un problema concreto en el marco de la práctica educativa con el objetivo de mejorar el contenido currícular.

II. 5. La estrategia metodológica

El método empleado para lograr nuestros fines ha seguido dos vías complementarias a lo largo de todo el proceso de indagación:

a) una estrategia cualitativa de ***Investigación-Acción,*** que nos ha proporcionado comprensión de lo que ha ocurrido en el aula, mostrando la interrelación entre: profesor, investigador, alumno, -s, y contenido matemático;

b) una estrategia cuantitativa que se apoya en un ***diseño cuasiexperimental*** con el fin de completar la información obtenida en el proceso de Investigación-Acción, permitiéndonos conocer hasta qué grado un cambio en la variable dependiente ha sido debida a los efectos del tratamiento.

Entendemos que las características de la investigación-acción (I-A) se adecuan, perfectamente, a parte de las necesidades que requiere nuestro estudio.

De entre los métodos de recogida de datos que se emplean en esta modalidad de investigación, investigación-acción, hemos adoptado la ***observación*** para realizar esta parte del trabajo. Hemos llevado a cabo una ***observación participante*** y nuestra participación, como investigador principal, ha sido ***activa*** (de forma progresiva) ya que nos hemos integrado en el grupo modificando la "*vida*" del mismo. Hemos realizado una observación del desarrollo de las actuaciones de los alumnos, por lo que ésta tiene un carácter narrativo e introspectivo, teniendo en cuenta que la observación es a su vez del propio investigador que ha estado implicado en la acción.

A lo largo del tiempo en el que se ha desarrollado el trabajo de campo (en dos cursos) el papel del investigador y el del profesor se han ido modificando; en un principio, el investigador ha debido de negociar con el profesor un nuevo contenido del programa de matemáticas, pasando en el segundo año a tener responsabilidades de docencia propias del profesor. En esta segunda fase el profesor asume el papel de observador y crítico de la actuación docente del investigador. La necesidad de observación introspectiva ha condicionado el procedimiento de observación para el que hemos elegido grabar en video las distintas sesiones; este procedimiento, indica McNiff (1992), es la encapsulación más próxima que la tecnología moderna presenta de la clase; las desventajas que señala, disponibilidad de equipo y tiempo necesario para transcribir las sesiones, hemos conseguido superarlas. Las unidades de observación consideradas son las ***naturales,*** o sea las sesiones de clase, detectadas a través del sistema perceptivo y reflejadas en un lenguaje natural.

Pretendemos de este modo conseguir dos objetivos en relación con la observación: uno, que ***el grado de inferencia en la observación sea débil,*** ya que se enunciará solamente lo que se vea sin tener en cuenta (en dicha observación) el significado de los hechos; y otro, que ***la observación sea sistemática***.

Para analizar e interpretar el resultado de esta observación es necesario codificarla, para lo que hemos utilizado un ***sistema de categorías***, las cuales (Alvárez,1986; pg: 15) constituyen un ***proceso básico de sistematización*** de la información, en base a unos criterios fijados de antemano. Las categorías elegidas para realizar este trabajo son del tipo que Blanco y Anguera (1991) distinguen como ***nominales,*** ya que a través de ellas pretendemos registrar todos los hechos acaecidos en el aula.

El ***diseño cuasiexperimental*** considerado queda reflejado en la siguiente tabla:

Tabla 2: esquematización del diseño cuasiexperimental.

Grupos	Composición de los grupos	Medida pre-trata.	tratamiento	Medida pos-trata.
1	N_1	O_1	X	O_2
2	N_2	O_3	-	O_4

Como se puede apreciar, el diseño consta de dos grupos: experimental (1) y control (2). Dichos grupos no son equivalentes pues se trata de grupos naturales; el grupo 2 está formado por 76 alumnos (pertenecientes a tres clases distintas) y el grupo 1 tiene 36 alumnos (todos de la misma clase).

Los pasos seguidos en esta parte de la investigación se corresponden con la siguiente secuencia:

Primero: elección de los grupos; para ello hemos considerado como experimental aquél grupo con el que se lleva a cabo la I-A; hemos procurado seleccionar el grupo de control de manera que entre ellos existieran el mayor número de semejanzas posibles.

Segundo: realización de una medida de pretratamiento, o pretest, para comprobar cual es el estado de los sujetos antes de introducir el tratamiento.

Tercero: aplicación del tratamiento al grupo experimental, en este caso, se trata de trabajar el tópico de *números figurados*.

Cuarto: realización de una medida de postratamiento, o postest, que ha permitido comprobar si ha habido cambios con respecto al estado inicial que presentaban los sujetos.

Quinto: comparación de medidas, lo que ha permitido conocer los efectos del tratamiento y hacer una evaluación del mismo.

Como hemos comentado anteriormente, con este propósito, hemos elaborado dos pruebas *paralelas,* una considerada pretest (A) y otra postest (B); no hemos encontrado ningún test ya preparado, que nos permitiera medir adecuadamente la variable considerada.

Sexto: hemos realizado, además, una medición tanto al grupo de control como al experimental, sobre el tópico *sucesiones*, con el fin de comprobar en qué grado los alumnos de ambos grupos presentaban analogías y diferencias en su comprensión y conceptualización de estas nociones, que hemos trabajado con el grupo experimental, con el fin de comprobar si dichos conceptos son -prioritariamente- intuitivos y aparecen en los alumnos de forma espontánea como resultado de otro aprendizaje, o bien han sido producto del tratamiento

Para llevar a cabo esta segunda medida también hemos tenido la necesidad de confeccionar una prueba (C); al tratarse de una cuestión específica no disponíamos de material adecuado para ello.

La ***validez de contenido*** de las pruebas (grado en que los items son muestra representativa de todo el contenido a medir) se ha controlado mediante consulta a distintas fuentes documentales, ya que la finalidad de las mismas así lo requería. Para la confección de las pruebas A y B (pretest y postest) hemos considerado las aptitudes terminales que en el Currículo de Matemáticas se exige a los escolares de la actual E.G.B. Para la prueba C se ha considerado el trabajo llevado a cabo con el grupo experimental y el contenido desarrollado en el mismo pues "*el programa instruccional es la fuente original de los materiales de prueba*" (Thorndike y Hagen, 1989; p. 64). En el capítulo V. daremos más información sobre las pruebas.

Una vez elaboradas las pruebas, se sometieron a evaluación externa a cargo de personas cualificadas, con objeto de validar su contenido.

Resumiendo:

Nuestro enfoque metodológico es *empírico*, cosa que por otra parte se considera como rasgo diferencial de la Investigación-Acción (Cohen y Manion, 1990; pg. 282).

Durante el período de realización de este proyecto hemos estudiado, registrado, evaluado y actuado sobre la información recogida.

También señalamos que hemos introducido un grupo de control, "*con el objetivo de probar hipótesis específicas y llegar a un conocimiento más generalizable*" (Ib), cosa que no resulta extraña, según los autores citados y que "*introduce una nota de experimentalidad en el proyecto*".

Con el estudio cuasi-experimental, realizado mediante un diseño de grupo de control no equivalente y pretest-postest, tratamos de mantener cierto grado de control sobre las variables estudiadas y dotar a nuestros hallazgos de cierto grado de generalidad, al menos durante el contraste de los resultados del grupo experimental con el grupo control.

Nos situamos en una posición ecléctica, en la que intentamos completar la información obtenida mediante metodología cualitativa con ciertos controles experimentales.

II. 6. Descripción de la muestra.

Los ***individuos*** objetos de nuestro estudio son escolares de 12 a 14 años en el sistema de la Educación Obligatoria, en el momento de realizar la experiencia.

Hemos centrado nuestro estudio en un ***grupo natural***, es decir, un conjunto de alumnos agrupados en una misma clase de un mismo centro, que han compartido escolaridad durante los tres años que constituyen el tercer ciclo de la E.B.G. y que se han seleccionado mediante los criterios usuales de escolarización vigentes. Este grupo natural se va a considerar durante un período de 2 años: en el curso 91-92, cuando los alumnos se encontraban cursando 7º nivel de E.G.B.; el curso 92-93, en el que se encontraban en 8º nivel de E.G.B.

Aunque formalmente son dos grupos diferentes 7º y 8º, a efectos de investigación se consideran como un sólo grupo durante un período de dos años. Este grupo natural lo hemos denominado ***grupo experimental*** en esta investigación.

Durante el curso 92-93 hemos obtenido información de otro grupo natural de alumnos de 8º de E.G.B. pertenecientes a un Centro distinto. La información obtenida ha permitido controlar algunos de los resultados del grupo experimental. Tal y como se explicará en el diseño de este estudio, este segundo grupo ha actuado circunstancialmente como ***grupo de control***.

La elección de los grupos se ha realizado teniendo en cuenta la posibilidad de acceder a ellos con facilidad. "*El escenario ideal para la investigación es aquel en el cual el* *observador obtiene fácil acceso y establece una buena relación inmediata con los informantes y recoge datos directamente relacionados con los intereses investigativos*" (Taylor, 1986; pg: 36).

II. 7. Estrategia cualitativa

II.7.1 Caracterización de la Investigación-Acción.

La ***Investigación-Acción*** (Action-Research) es el nombre dado a un movimiento surgido para investigar en ciencias sociales, que se ha utilizado con frecuencia en investigación educativa.

La I-A educativa considera que la educación es un ***ejercicio unificado***, en el cual el profesor es el mejor juez del desarrollo de la clase y de la experiencia educativa total, y ***un potente método*** de unión entre la teoría y la práctica educativa.

La literatura ofrece distintas acepciones de I-A como: "*investigación en clase*", "*investigación de la acción*" y distintas definiciones; como ejemplo tenemos la de Kemmis y McTaggart (1988; pg: 9) "*es una forma de indagación introspectiva* ***colectiva*** *emprendida por participantes en situaciones sociales con objeto de mejorar la racionalidad y la justicia de sus prácticas sociales o educativas, así como la comprensión de estas prácticas y de las situaciones en que éstas tienen lugar*"; o la de McNiff (1991; pg: 1) "*se trata de una forma de reflexión que se interesa por una mejora en el desarrollo del currículo en la escuela básica, anima a los profesores a ser reflexivos en su práctica con objeto de mejorar la calidad de la educación. Se trata de una forma de indagación introspectiva colectiva*".

En todas estas definiciones se destaca la idea de ***reflexión sobre la práctica.***

Otra caracterización que resulta muy adecuada para nuestro estudio es la de Halsey (1972) "*investigación en la acción es la intervención a pequeña escala en el funcionamiento del mundo real y un examen próximo de los efectos de tal intervención*". Considerando el énfasis sobre la reflexión que se manifiesta en las distintas definiciones, destacamos las siguientes ideas que contribuyen a precisar y puntualizar la noción de I-A:

"*Es una práctica reflexiva social en la que no hay distinción entre la práctica sobre la que se investiga y el proceso de investigar sobre ella. Las prácticas sociales se consideran como* ***actos de investigación*** *como* ***teorías en la acción*** *o* ***pruebas hipotéticas*** *que han de evaluarse en relación con su potencial para llevar a cabo cambios apropiados. Desde esta perspectiva, la docencia no es una actividad y la investigación sobre la enseñanza otra. Las estrategias docentes suponen la existencia de <u>teorías prácticas</u> acerca de los modos de plasmar los valores educativos en situaciones concretas y, cuando se llevan a cabo de manera reflexiva, constituyen una forma de I-A.*

Si se considera una práctica social como la enseñanza como una actividad reflexiva, la división del trabajo entre prácticos e investigadores se desvanece". (Lewin, citado por Elliott, 1990; pg. 95).

"*La I-A en la escuela analiza las acciones humanas y las situaciones sociales experimentadas por los profesores*" (Elliott, 1990; pg. 24), que son susceptibles de cambio. Se relaciona con los problemas prácticos, experimentados por los profesores, y no con los problemas teóricos.

"*La I-A interpreta **lo que ocurre** desde el punto de vista de quienes actúan.(...) Las acciones y transacciones se interpretan en relación con las condiciones que ellos postulan* " (Elliott, 1990, pg. 25).

II.7.2 Proceso de la Investigación-Acción.

En su teoría sobre la I-A, Lewin consideró una ***preocupación temática*** y ***cuatro momentos*** de la investigación, que entran en juego en torno a esa preocupación temática.

El proceso puede ser el siguiente:

La gente ***describe*** sus preocupaciones, explora qué piensan los demás e intenta descubrir qué puede hacerse. En el curso de la discusión deciden sobre qué cosa se puede operar, adoptan un proyecto de grupo. De esta forma el grupo identifica una ***preocupación temática***. Los miembros del grupo investigador ***planifican*** la acción conjuntamente; ***actúan y observan*** individual o colectivamente y ***reflexionan*** juntos. ***Reformulan*** más críticamente planes informados y, de esta manera, el grupo edifica conscientemente su propia comprensión y su propia historia. Así, la identificación de la preocupación temática introduce al grupo en los cuatro aspectos fundamentales de la I-A:

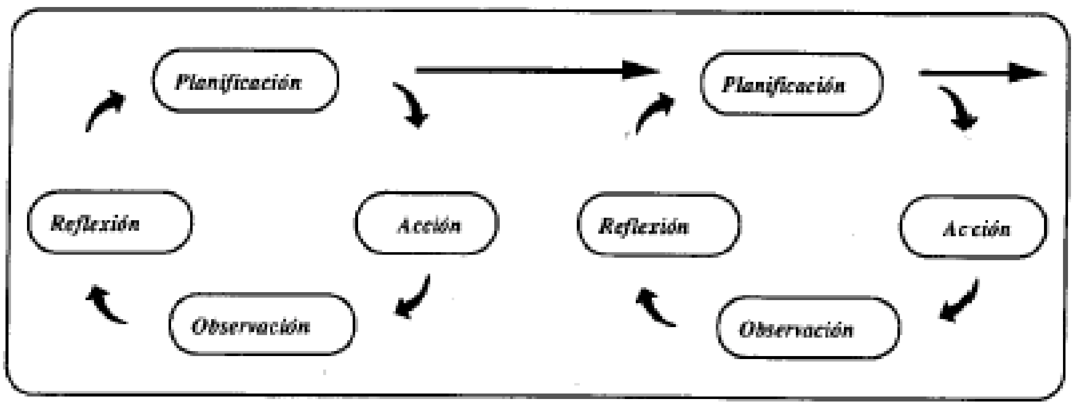
****Desarrollo de un plan.***

****Actuación para poner el plan en práctica.***

****Observación de los efectos de la acción.***

****Reflexión de dichos efectos, como base para una nueva planificación.***

Estos cuatro aspectos de la I-A se consideran entrelazados, formando una espiral de peldaños; cada peldaño está compuesto de cuatro fases, que son los aspectos señalados anteriormente: planificación, acción, observación y reflexión; en esquema se representa así:



El ***plan*** constituye la organización de la acción, debe de anticipar la acción, debe de mirar hacia adelante. El plan ha de ser flexible para poder adaptarse a efectos imprevistos.

La ***acción***, tal como aquí se entiende, es deliberada y está controlada. Está guiada por la planificación.

La ***observación*** tiene como misión documentar los efectos de la acción; mira hacia adelante proporcionando la base inmediata para la reflexión. Una observación cuidadosa es necesaria porque la acción es posible que se vea recortada por limitaciones de la realidad y no siempre se conocerán, de antemano, las limitaciones de esa realidad. La observación debe de planificarse de tal modo que se proporcione una base documental para la reflexión posterior.

La ***reflexión*** rememora la acción, pero es también un elemento activo. La reflexión ha de dar sentido a los procesos, los problemas y las restricciones que se han manifestado en la acción.

El recorrido por los peldaños de la espiral se realiza de la forma siguiente:

Los datos que se obtienen a partir del control de la acción son analizados, proporcionando una valoración de las circunstancias de la acción y sus efectos. La acción es sometida así a una reflexión crítica. Esta fase de valoración equivale a una nueva exploración que prepara el camino a una nueva planificación. El plan general es revisado a la luz de esta nueva información y da pié a la preparación del segundo paso de la acción sobre la base del primero. Se pone así en marcha el segundo peldaño de la espiral. En todo proceso de la investigación-acción están presentes tres elementos básicos: un ***objeto*** de investigación (el qué), un ***investigador*** (el quién), y un ***método*** (el cómo). Vamos a hacer algunas consideraciones sobre cada uno de estos elementos.

El proceso de la I-A da comienzo con la idea general de que es deseable alguna mejora o cambio. Una vez tomada la decisión sobre el terreno, o después de realizar una exploración preliminar, el grupo de I-A decide un plan de acción general.

El ***objeto*** de investigación se definirá en función de una experiencia o de un problema concreto vivido por el propio experimentador, es un objeto reconocido y situado en el espacio y en el tiempo. Elliot señala problemas *curriculares* en el nacimiento de la investigación-acción en la escuela; sostiene que surge asociada al movimiento para el desarrollo curricular de los años 60 y principio de los 70. Muchos de los proyectos que conformaban este movimiento se relacionaban con la transformación del contexto ***memorístico*** y de ***resolución de problemas de rutina*** del aprendizaje en las aulas a otros basados en tareas de ***comprensión***. Estas innovaciones pretendían articular las transformaciones mencionadas en torno a ideas relativas al aprendizaje ***autodirigido*** basado en el ***descubrimiento*** y en la ***investigación***. Estas ideas encierran una concepción del proceso de aprendizaje como una situación activa y personal.

Cada uno de los términos reseñados anteriormente pone de manifiesto un determinado aspecto de este proceso.

La ***autodirección*** implica que los resultados del aprendizaje se deben a la propia actividad del sujeto.

La ***investigación*** proporciona una descripción general del tipo de actividad implicada en las tareas de comprensión.

El ***descubrimiento*** se refiere a la cualidad de la experiencia intelectual que resulta de este tipo de actividad.

Al aceptar la enseñanza de este modo (concluye Elliott), los investigadores de clase adoptan la misma perspectiva que los planificadores de currículo tienen sobre el mismo.

Una vez trazado el plan y dividido en peldaños accesibles, los investigadores abordan la acción del primer peldaño.

Por lo que se refiere al investigador, el ***sujeto***, se le considera portador de valores, percepciones personales y finalidades; poseedor de una historia y unos compromisos profesionales, sociales y políticos. Se reconoce así la parte subjetiva del investigador y se señala como un problema difícil en la Investigación-Acción, el compromiso del investigador en relación a los objetivos de una acción en la cual está directamente implicado. Estos problemas epistemológicos, si bien no están definitivamente resueltos, son reconocidos por muchos autores; puede ayudar a su superación la idea de Weber (incluida en Goyette y Lessard, 1987; pg: 162) "***El investigador debe de formular juicios de hechos no juicios de valor***" lo que establece un criterio de control en este sentido y atribuye al investigador una subjetividad predefinida.

Como la Investigación-Acción considera la situación desde el punto de vista de los participantes, describirá y explicará "*lo que sucede*" con el lenguaje utilizado por los participantes. La posición del investigador en Investigación-Acción queda resumida así por Lewin (1984), "*El investigador en Investigación-Acción se concibe como un sujeto implicado en una acción o en relación a un objeto de investigación formulado a partir de un problema vivido en la acción: la implicación del investigador en el objeto de su investigación no sólo es aceptada sino querida*" (Goyette y Lessard, 1987; pg: 161)

En cuanto al ***procedimiento***: la idea de las cuatro etapas de Lewin, apuntada anteriormente ha ido sufriendo ligeras modificaciones por otros investigadores en I-A. Kemmis y McTaggart (1988; pg: 15) se acercan a dicha idea.

"*Cuando un grupo lleva a cabo una I-A han de abordar las siguientes actuaciones:*

-Desarrollo de un plan de acción críticamente informado que mejore lo que está ocurriendo.

-Una actuación que ponga dicho plan en práctica.

-Observación de los efectos de la acción en el contexto en que tiene lugar.

-Reflexión en torno a estos efectos como base para una nueva planificación. Una acción críticamente informada posterior etc. a través de ciclos sucesivos".

Susman y Evered en 1978 (Goyette y Lessard, 1987; pg: 191) introducen el diagnóstico como primera fase de la investigación considerando cinco fases; cada una de las fases tiene una función específica y todas ellas esenciales para la I-A, si bien en la práctica algunos proyectos de investigación pueden conceder más importancia a una u otra de esas fases.

Las fases que consideran son: diagnóstico, planificación, actuación, evaluación y aprendizaje específico.

González (1988) y Bartolomé (1992) hablan de la estructura de este proceso que hacen Carr y Kemmis, en el año 1986, sobre dos ejes, uno estratégico constituido por la acción y la reflexión y otro organizativo constituido por la planificación y la observación.

II.8. Nuestro modelo de Investigación-Acción.

Las caracterización de nuestro trabajo como I-A, está documentada por los antecedentes y especialistas que hemos comentado en los apartados anteriores; los rasgos que definen nuestra investigación son, resumidamente, los siguientes:

* Es una investigación en clase.

* Es una forma de indagación introspectiva.

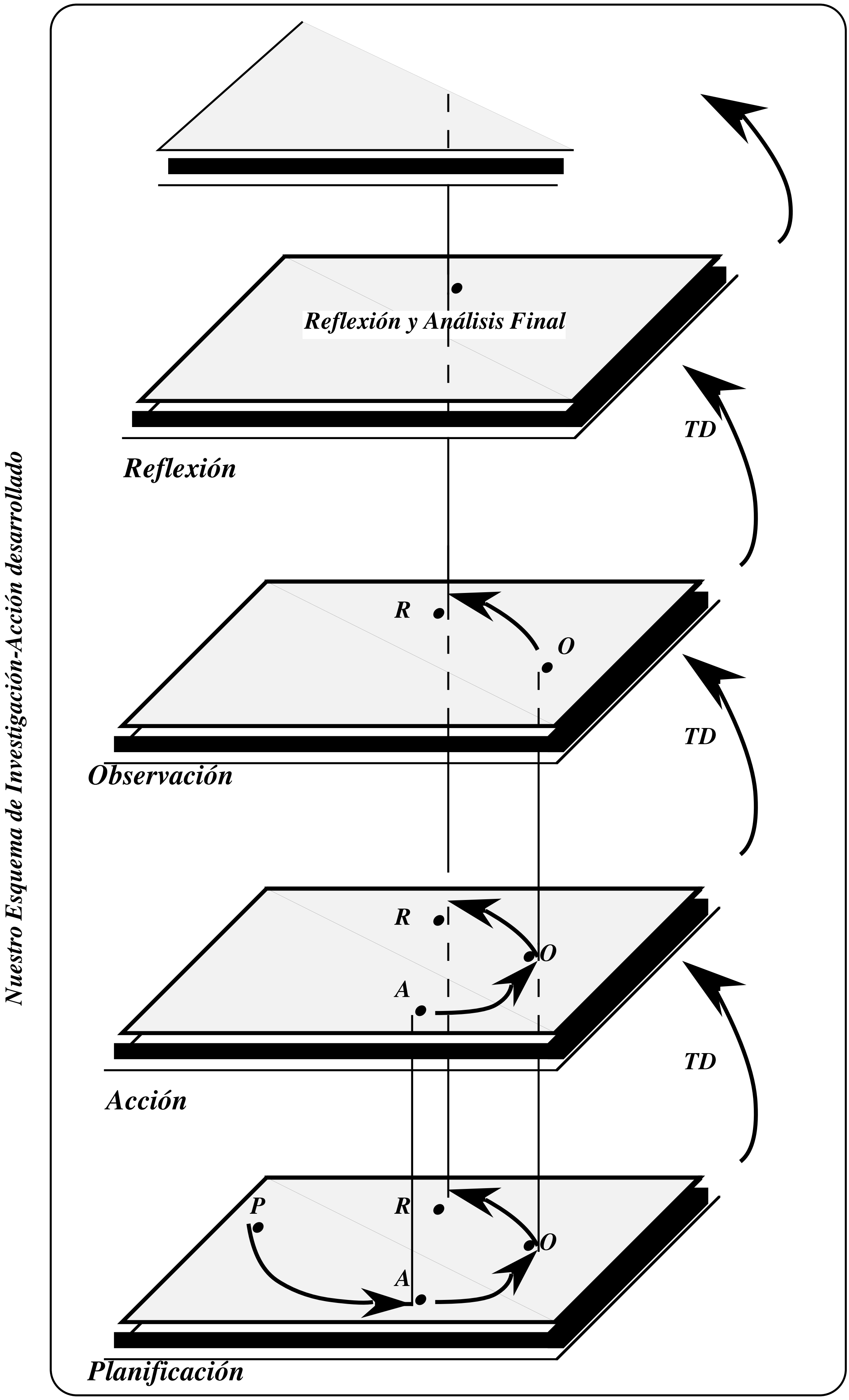
*Es una reflexión para mejorar el currículo.

*No establecemos diferencias entre la práctica sobre la que investigamos y el proceso de nuestra investigación.

*Se trata de un problema práctico y no teórico.

*Tratamos de interpretar *lo que hacen* los alumnos en un momento determinado, con un contenido determinado.

* Queda esquematizada en el siguiente diagrama:



Nuestro Esquema de Investigación-Acción desarrollado
Reflexión y Análisis Final
Reflexión
TD
R
O
Observación
TD
R
O
A
Acción
TD
P
R
O
A
Planificación

Nuestro proceso está constituido por dos grandes ciclos, cada uno compuesto por cuatro fases. Cada una de estas fases, a su vez, se considera articulada mediante un ciclo que incluye el aspecto específico del momento considerado y los aspectos posteriores.

Los dos ciclos que se consideran (a y b), dan lugar a ocho fases que son:

1_a. Diseño de un plan de acción; articulado a su vez en: planificación, acción, observación y reflexión relativas al plan de acción

2_a. Puesta en práctica del plan de acción; articulado mediante: acción, observación y reflexión de la fase de acción.

3_a. Observación de la práctica y de los efectos producidos por la misma en los alumnos; articulado mediante la observación y reflexión sobre la fase de observación.

4_a. Reflexión y valoración de la observación, para desarrollar un nuevo plan.

1_b. Diseño de un nuevo plan, revisión del anterior; de nuevo se articula en cuatro etapas

2_b. Puesta en práctica del nuevo plan; que se articula en tres etapas.

3_b. Observación de la práctica y sus efectos en los alumnos; que se articula en dos etapas.

4_b. Reflexión y conclusiones del trabajo.

De este modo se pone de manifiesto el carácter recursivo del modelo de Investigación-Acción, que nosotros destacamos para extraer todo su potencial heurístico; cada fase de los dos ciclos generales concluye con una valoración por consenso del equipo investigador y una toma de decisiones, que incluye la evaluación sobre la conveniencia de continuar o finalizar el estudio.

El primer ciclo (a) corresponde al estudio piloto, llevado a cabo el curso 91-92 con alumnos de 7º nivel; su desarrollo constituye el contenido del Capítulo III.

El segundo ciclo (b) corresponde al trabajo experimental llevado a cabo el curso 92-93 con los mismos alumnos en 8º nivel; su desarrollo constituye el contenido del capitulo IV.

II.9. Recogida de datos.

El tipo de datos que hemos recogido, prioritariamente, son de tipo cualitativo.

Los ***datos*** obtenidos tienen distinta procedencia: Documentos escritos por el investigador como preparación del desarrollo de las sesiones en clase; documentos escritos sobre las reuniones del grupo investigador; notas de campo tomadas por el investigador y/o por el profesor del curso en el transcurso de las sesiones; documentos escritos por los alumnos con los resultados de las tareas propuestas; documentos filmados de todas las sesiones desarrolladas en clase.

Las técnicas de ***recogida de datos*** utilizadas en estos casos han sido: Observación directa y participante; cuaderno de campo; grabación en vídeo de las distintas sesiones; protocolos para los trabajos que los alumnos realizan en clase.

En nuestro estudio tratamos de tener en cuenta los criterios de Shulman, evitando "*dejar al lector en la duda de cómo se recogieron ciertos datos o con qué frecuencia se* *realizaron ciertas observaciones*" (Shulman 1990, pg 52). Pero todo ello sin renunciar al estudio en detalle de un determinado caso concreto "*con el objetivo de desarrollar un modelo lo más completo posible de las situaciones y los contextos en los que está inmerso*".

II. 10. Criterios para seleccionar los datos.

Consideramos la enseñanza como una actividad naturalmente comunicativa e intencional, que pretende que los alumnos logren un aprendizaje óptimo que contribuya a su formación integral. Esto hace que sea una actividad compleja; a su vez, esencialmente interactiva ya que resulta de la implicación y la influencia recíproca entre los agentes intervinientes en el aula. Por otra parte, el conocimiento de la actividad precisa generada en el aula es una preocupación constante y esencial en la investigación didáctica (Medina, 1988).

Flanders (1977) critica la metodología de algunas investigaciones didácticas en los siguientes términos: "*las investigaciones sobre eficacia docente tratan de determinar las relaciones existentes entre el comportamiento didáctico y determinadas medidas de progreso habido en los alumnos. El diseño más común de investigaciones utilizadas al efecto compara un grupo de clases sometidas a "tratamiento experimental" con otro grupo de control. Los profesores del grupo experimental pueden haber seguido un programa de perfeccionamiento o estar enseñando un contenido matemático "no habitual". Se administra a todas las clases pre-test y post-test de rendimiento; el análisis estadístico de los datos dirá si ha habido diferencias significativas entre los dos grupos de clases. Sin embargo, creemos insuficiente una explicación en el sentido de indicar si los alumnos de los grupos experimentales aprendieron más, o no, que los de los grupos de control, por lo que creemos necesario la evaluación de la interacción en clase, recogiendo datos que nos permitan explicar por qué se dieron los resultados obtenidos. El análisis de la interacción nos suministra información acerca del tipo de comunicación verbal que tiene lugar en clase*" (pg: 30).

Coincidimos en nuestro planteamiento con estas ideas de Flanders, por lo que trataremos de llevar a cabo un análisis de **todo** lo ocurrido en el aula durante aquellas sesiones en las que hemos tomado parte porque "*estamos convencidos que la práctica docente necesita ser evaluada por sus cualidades intrínsecas. Tanto el producto como el proceso necesitan ser considerados de manera conjunta, al intentar mejorar la práctica*" (Elliott , 1991; pg: 50).

II.11. Sistema de categorías para el análisis.

En nuestro estudio nos proponemos llevar a cabo:

* Un análisis de la comunicación que se ha producido en el aula durante el tiempo en que hemos realizado nuestro trabajo.

* Un análisis del contenido que se ha desarrollado en las clases.

* Una evaluación de la comprensión de los alumnos en relación con el contenido matemático sobre relaciones numéricas, representaciones, reconocimiento de patrones y generalización.

Nos proponemos llevar adelante estas reflexiones desde una vertiente que permita conocer del modo más preciso cuál ha sido la actividad que se ha generado en el aula. Un estudio de estas características debe partir de la visión sistémica de la realidad de la clase y no puede reducirse a estudiar solamente el comportamiento del enseñante o de los alumnos; debe considerar las características del comportamiento tanto del profesor como de los alumnos lo más plenamente posible. Para ello adoptamos la visión de Titone (1989) quién elabora un modelo analitico-lingüístico de la comunicación didáctica que contempla:

a) Una serie de ***funciones didácticas*** que caracterizan la interacción en el aula entre profesor y alumnos como son: el exponer, el estimular, el reaccionar, el responder etc.

b) Un ***sistema de contenidos*** extraídos de las diversas sistematizaciones del saber; en nuestro caso es un tópico concreto de Matemáticas, que hemos denominado "Representación de números, análisis de relaciones numéricas y estudio de patrones y sucesiones".

c) Una serie de ***acciones verbales y representaciones que ponen de manifiesto la comprensión alcanzada*** por los escolares, mediante expresiones conceptuales y actuaciones procedimentales ligadas a los contenidos.

Todo ello requiere instrumentos de análisis adecuados que permitan realizar eficazmente dicha labor. Para la elaboración de estos instrumentos hemos tenido en cuenta opiniones de expertos en el tema y hemos revisado modelos elaborados con fines análogos. Blanco y Anguera (1991) consideran cuatro sistemas útiles para la codificación de la información en un proceso de observación. Estos sistemas son: verbales, nominales, dimensionales y estructurales. En el ***sistema nominal*** se trata de registrar los hechos producidos y no sólo las observaciones realizadas por observadores independientes. Dentro del sistema nominal distinguen: sistemas de rasgos distintivos y ***sistemas de categorías.***

Consideramos el sistema nominal idóneo para la codificación de nuestra observación, ya que tratamos de registrar la conducta de las personas que tienen participación en el aula, profesor y alumnos. Además, por tratarse de un estudio curricular, nos proponemos realizar un análisis del contenido; igualmente, hay una dimensión cognitiva, que tratamos de conocer mediante una valoración de la comprensión. Por todo ello, nuestro instrumento de organización y análisis de la información consiste en un ***sistema de categorías*** el cual proporciona, según Anguera (1991), un sistema de taxonomía conductual que permite un proceso básico de sistematización de la información así como un intento progresivo de agrupar dicha información en torno a los constructos que hemos llamado ***categorías de interacción didáctica, de contenido matemático y de comprensión.***

Las categorías, los criterios y los procedimientos de análisis del comportamiento verbal varían, según los investigadores y los modelos analíticos adoptados, por lo que después de revisar la literatura sobre los distintos modelos, o sistemas de categorías para el análisis de la interacción didáctica hemos comprobado que ninguno de ellos era totalmente útil para nosotros, por tanto hemos elaborado nuestro ***propio sistema de categorías,*** tomando en consideración ideas claves para su elaboración y siguiendo recomendaciones de algunos autores como Flanders (1977; pg: 61): "*Para el estudio de otros problemas del proceso de enseñanza-aprendizaje, habría que idear un sistema de categorías diferente*", o Bisquerra (1989; pg: 78): "*Las categorías se establecen en base al problema y propósito de la investigación*".

Las opiniones y consideraciones que hemos tenido en cuenta para dar forma a nuestro modelo, o sistema de categorías han sido los siguientes:

Titone (1986) expresa que "*el proceso de enseñanza-aprendizaje es esencialmente interactivo, dialéctico, en el que se entrelaza el lenguaje del docente con el del discente como momentos de un mismo proceso comunicativo*".

Por ***interacción*** en la clase, o interacción didáctica, entiende Flanders *la cadena de episodios o acontecimientos que se suceden en la misma*.

El ***mensaje didáctico*** se considera (Titone, 1986) como eje estructurador de la interacción didáctica, sobre todo la de naturaleza verbal. Se concibe como el aspecto formal de un ciclo de aprendizaje y se configura como una unidad que tiene sentido en sí misma.

La ***comunicación didáctica***, que se desarrolla fundamentalmente en forma verbal, se realiza sobre todo a través de: explicaciones, exposiciones, preguntas, diálogos o discusiones.

Análisis de interacciones es una etiqueta que cubre toda la técnica orientada al estudio de la cadena de acontecimientos del aula.

Un sistema de análisis de interacción, por lo general, incluirá (Flanders, 1977):

* Un conjunto de categorías claramente definidas

* Un procedimiento de observación y una serie de reglas fundamentales que regulan el proceso de codificación o cifrado.

* Medios para la tabulación de los datos recogidos

* Sugerencias útiles para las aplicaciones más comunes de la técnica en cuestión.

Titone (1986) entiende por sistema de análisis en la enseñanza un conjunto de categorías que cumplan:

* En ellas se encarna una manera particular de ver la realidad de clase.

* Exige que los eventos observados sean divididos en unidades de análisis.

* Sirve para clasificar tales unidades.

* Permite obtener una imagen fiel de uno o varios aspectos del complejo fenómeno de la enseñanza.

También indica que las categorías utilizadas en el análisis de la comunicación verbal deben de ser las siguientes: ***dar informaciones, impartir instrucción, hacer preguntas, aceptar o rechazar, dar respuestas, callar***. Estas categorías están de acuerdo en el concepto de enseñanza como proceso de interacción basado principalmente en la comunicación verbal, que tiene lugar entre enseñantes y alumnos en el curso de determinadas actividades, o momentos; estos momentos son: ***programar el trabajo escolar, crear las motivaciones, impartir informaciones, guiar las discusiones, intervenir a nivel disciplinar en problemas de orden psicológico o social y evaluar.***

La opinión de Cazden (citado por Medina, 1988) es que una descripción del proceso comunicativo en la clase debe de constar, entre otras, de:

* Análisis de las estructuras de participación

* Estudio comprensivo de la configuración de la lección.

* Interpretación de las demandas de los alumnos y de los modos de participación.

* Estudios de las preguntas de los profesores y de las respuestas de los alumnos, así como de sus iniciativas.

* Interacción entre los alumnos.

Todas estas consideraciones, nos han ayudado a perfeccionar el modelo que considerábamos útil en nuestro trabajo; para su elaboración hemos tenido en cuenta, además, las dos condiciones básicas que han de cumplir todo sistema de categorías (Anguera, 1991) ***exhaustividad*****,** se refiere a que cualquier comportamiento del ámbito considerado como objeto de estudio pueda ser asignado a una de las categorías; ***mutua exclusividad,*** significa el no solapamiento de las categorías que componen el sistema, que obliga a que a cada comportamiento se le asigne una y sólo una categoría.

II. 12. Sistema de categorias de nuestra investigación.

El sistema de categorias que hemos elaborado para nuestra investigación lo concebimos en tres subsistemas.

**** Categorías de Interacción Didáctica (CID).***

**** Categorías de Contenido Matemático (CCM).***

**** Categorías de Comprensión del Contenido (CCC).***

Con las ***Categorías de Interacción Didáctica*** (CID) analizaremos la comunicación verbal que se desarrolla en el aula. Su importancia reside en la puesta a punto de una herramienta global que, metodológicamente, permita abordar una descripción empírica amplia del acontecer del aula a lo largo de todo el proceso de investigación y, en particular, del trabajo coordinado entre investigador principal y profesor responsable en el aula.

Estas categorías ilustran, en cierto modo, el cambio operado en la vida ordinaria del aula tras la integración en ella de la investigadora en calidad de agente activo, experta en contenido y dispuesta a negociar con el profesor y el grupo-clase la implementación del programa de matemáticas, sobre la base de un tópico novedoso, desconocido previamente por el profesor e ignorado por el currículo hasta el momento.

Con las ***Categorías de Contenido Matemático*** (CCM) analizaremos el tema de estudio mostrando, en cada caso, la estructura específica y la secuencia de conocimiento matemático que lo configura.

A través de ellas se realiza la especificación del contenido matemático y se obtiene información sobre la concepción subyacente tanto del contenido como de la enseñanza de las matemáticas.

Este nivel de categorías es importante tanto en la organización del trabajo del profesor como en la posterior puesta en práctica del mismo, marcando los distintos pasos en la articulación de los contenidos. Estas categorías organizan mediante una secuenciación el conocimiento matemático, si bien entendemos que no suponen ni establecen una linealidad para la adquisición del mismo por los alumnos, ya que hay que contemplar las interconexiones y reorganizaciones de ideas. Su interés radica en que permiten planificar inicialmente y, posteriormente, analizar el desarrollo del contenido en la clase, con lo que hace posible la comparación de estas dos fases y permite comprobar hasta que punto el profesor se ha adaptado a la planificación.

Las categorías (CCM), por su naturaleza, son específicas en cada tema de trabajo; en nuestro estudio las (CCM) establecidas son específicas para desarrollo y representación de números, localización y análisis de patrones numéricos y leyes de sucesiones, si bien con distinto enfoque para los niveles de 7º y 8º.

La versión cualitativista de la estrategia metodológica desarrollada a lo largo de nuestra investigación, articulada sobre la base de una investigación cooperativa entre un profesor motivado por su formación y enriquecimiento profesional y un investigador experto en contenido, ha hecho posible sacar a la luz una diversidad y riqueza de tareas, impensable desde enfoques teóricos de diseño curricular que ignoren la dimensión práctica del trabajo real en el aula.

Las ***Categorías de Comprensión del Contenido*** (CCC) sirven para reflejar el estado de estructuración del conocimiento en cada uno de los sujetos sobre el contenido matemático tratado; ya hemos dicho que nuestra idea de comprensión consiste en esencia en "*la generación de una representación, estructural, o conceptualmente ordenada, de las relaciones entre las partes de la información que se debe de aprender, y entre esa información o esas ideas y nuestra base de conocimientos y experiencia*" (Wittrock, 1990).

Como ocurre con las categorías anteriores, también éstas son específicas, pues hemos dicho que están ligadas al contenido.

Mediante estas categorías estimamos distintos niveles de interrelación entre los conceptos, hechos, procedimientos y representaciones de cada uno de los aspectos contemplados en las CCM anteriores. Poseen un valor de jerarquía intrínseco cuyas implicaciones para la evaluación en el aula y el control del rendimiento de los alumnos en este tópico del programa constituye una aportación de esta investigación. Gracias al esfuerzo operativo que hemos realizado sobre los patrones de respuesta de los alumnos hemos conseguido explicitar una guía de indicadores, que tratamos de fundamentar empíricamente por vía inductiva.

II. 13. Categorías de Interacción Didáctica (CID)

Las consideramos agrupadas en las cuatro fases del proceso de Enseñanza/Aprendizaje: Presentación, Implementación, Sistematización y Socialización. A cada una de estas fases corresponden varias categorías, tanto referentes al profesor como al alumno.

La tabla muestra las categorías que hemos considerado, así como las fases en que han sido incluidas:

Tabla 3 : Categorías de interacción didáctica consideradas en nuestro estudio

Fases	**Categorías de Interacción Didáctica**	
	Profesor	Alumno
Presentación	Motiva Informa/explica	Recibe, interpreta y procesa información
Implementación	Propone tareas Da consignas	Realiza tareas
Sistematización	Reflexiona sobre el trabajo hecho	Hace preguntas y/o da sugerencias
	Sintetiza los conocimientos	Da respuestas.
Socialización	Dirige Puestas en común y debates	Expone resultados
	Favorece la interacción abierta	Dialoga con el profesor y/o los compañeros

A continuación describimos operativamente cada una de estas categorías, exponiendo nuestra acepción para cada una de ellas.

Motivación (M), es una reflexión o actuación, diseñada por el profesor y realizada conjuntamente con los alumnos, mediante la que se estimula el interés por la realización del trabajo haciendo surgir intuiciones que provoquen nuevas ideas, recuerdos de experiencias anteriores, etc. La motivación permite disponer de una información adecuada mediante la que conectar los nuevos conocimientos con otros ya existentes y orientar en la búsqueda de respuesta a las cuestiones planteadas.

Información (I), denominamos así a las exposiciones y explicaciones dadas por el profesor al alumno, a través de las cuales se transmite el contenido matemático, se precisa una idea o un concepto o, bien, se explicita un procedimiento, todo ello relacionado con el tema tratado. Las unidades de información son, en principio, conocimiento elaborado y aceptado, que no se presenta para su discusión. La información hay que interpretarla e integrarla. Su funcionalidad consiste en que organiza datos y experiencias previamente inconexos.

Actividades (A), o tareas a realizar: son actuaciones concretas y bien definidas que se proponen para que el conjunto de los alumnos las lleven a cabo; pueden responder a situaciones abiertas o ser ejercicios de rutina; en cualquier caso surgen de un propósito previo del profesor, o algún alumno, y tienen un rango de variación reconocido.

Consignas (C), son breves explicaciones en las que se resume una propuesta de trabajo. En nuestro caso las consignas se refieren a un modo concreto de realizar el trabajo general o bien a determinadas directrices para el trabajo de un tópico particular.
También pueden dirigirse a organizar el trabajo individual o en pequeño grupo. Usualmente, una actividad o grupo de actividades ejemplifican las consignas.

Reflexión (R), consiste en recapacitar sobre el trabajo realizado, su clarificación y la obtención de conclusiones. El resultado de la reflexión ha de llevar a una mejora en la comprensión y la expresión de un conocimiento, de manera que se avance en su objetivación.

Síntesis (S), en el momento de la síntesis se resume y organiza, total o parcialmente, el trabajo previamente realizado. Constituye el momento final en el desarrollo de uno de los tópicos en los que se ha organizado un tema o contenido; en esta situación los diferentes puntos estudiados y trabajados deben constituir un conjunto estructurado de algún modo que no existía anteriormente y, además, debe ser compartido por la totalidad de los alumnos.

Preguntas o sugerencias del profesor (PP), son cuestiones o comentarios del profesor sobre algún conocimiento, que inducen a los alumnos a recapacitar y relacionar conceptos de forma que obtengan algún conocimiento nuevo. Entre las sugerencias del profesor se encuentra el estimular a los alumnos para que expliciten sus interrogantes.

Respuestas del profesor (RP), el profesor responde a las preguntas o sugerencias que los alumnos le dirijan; en otro caso deberá dejar que sean los propios alumnos los que debatan entre sí para resolver sus dudas.

Preguntas o sugerencias de los alumnos (PA), las preguntas de los alumnos se plantean cuando hay alguna duda sobre el contenido matemático en el que se está trabajando o cuando se necesita información complementaria sobre la realización de alguna tarea: las preguntas irán dirigidas al profesor o a algún compañero de la clase. El profesor debe estimular y favorecer el planteamiento de estas cuestiones.

Respuestas de los alumnos (RA), Nos referimos a aquellas actuaciones en las que los alumnos expresan sus avances sobre el trabajo realizado y los descubrimientos hechos en el transcurso del mismo. Estas expresiones surgen como una reflexión personal estimulada por preguntas del profesor, preguntas de los compañeros o resultado de un debate.

Puesta en Común (PC), se trata de sesiones de trabajo conjuntas entre profesor y alumnos en donde el papel del profesor se debe limitar al de moderador; la finalidad principal consiste en hacer partícipes al resto de los compañeros de los logros particulares obtenidos por el trabajo individual o en pequeños grupos. Las puestas en común deben de servir para criticar, mejorar y avanzar las nociones matemáticas surgidas del trabajo previo, contribuyendo a la construcción social del conocimiento mediante la asignación de significados compartidos "*Dada que la comprensión es un estado mental al que cada alumno ha de acceder de modo individual, no es algo que el profesor puede observar directamente (...) Para valorar la profundidad de su comprensión es más seguro acudir a actividades de debate, mediante realización de ejercicios prácticos o de actividades más generales de resolución de problemas*" (Cockroft, 1985; pg: 84).

Interacciones Abiertas (IA), se trata de pequeños debates en los que uno o varios alumnos proponen alternativas diferentes a una misma cuestión, discutiendo y comparando las ventajas relativas de cada una de las opciones. Este tipo de situaciones abiertas son difíciles de planificar pero, sin embargo, se pueden provocar durante el desarrollo de la clase con cierta facilidad.

II.14. Categorías de Contenido Matemático (CCM)

Las consideramos como ***unidades de actuación*** por cuanto representan las distintas facetas -conceptual, procedimental, representacional- del conocimiento matemático que se está trabajando. "*En la enseñanza de la Matemática se distinguen tres elementos: hechos y destrezas, estructuras conceptuales y estrategias generales (...) estos tres elementos aluden a aspectos de la enseñanza y exigen atención independiente*" (Cockroft, 1985; pg: 86-87).

Las categorías de contenido matemático por ser específicas del contenido varían para cada uno de los niveles educativos con los que hemos trabajado, por lo que consideramos, independientemente, las CCM del nivel de 7º y las CCM del nivel de 8ª.

Las Categorías de Contenido Matemático elaboradas para 7º nivel son las siguientes:

1. Representación de números, nos referimos a cualquier imagen gráfica mediante la que se visualice un número, tanto al reconocimiento como a la elaboración de las mismas.

2. Representación puntual, se trata de representaciones gráficas que utilizan el punto como unidad en la representación.

3. Representación puntual geométrica, el énfasis se sitúa, en las representaciones que se organizan según un modelo geométrico y en la elaboración y análisis de tales modelos, teniendo en cuenta el desarrollo aritmético que se visualiza en cada caso.

4. Representación puntual de triángulos.

5. Representación puntual de cuadrados.

6. Representación puntual de rectángulos.

Estas tres categorías se dedican a un trabajo específico con tres modelos geométricos particulares: triángulos, cuadrados y rectángulos, cada uno de los, cuales da lugar a un patrón de representación. La importancia y peculiaridad de estos patrones hace que cada uno de ellos sea objeto de una categoría propia. La conexión entre desarrollo aritmético y visualización geométrica es un elemento determinante.

7. Nombre de los números representados en forma triangular.

8. Nombre de los números representados en forma cuadrada.

9. Nombre de los números representados en forma rectangular.

Se trabaja el aspecto simbólico que incluye las notaciones y denominaciones de las representaciones, y se tratan de modo explícito.

10. Reglas de formación de triángulos.

11. Reglas de formación de cuadrados.

12. Reglas de formación de rectángulos.

De nuevo, estas tres unidades se refieren a un mismo tipo de trabajo con tres patrones distintos. En este caso se trata de análisis de la secuencia de los números triangulares, cuadrados y rectangulares, para descubrir la estructura aritmética y geométrica que comparten, su regla de formación, y aplicarla en la continuación de algunos términos. El objetivo no consiste en descubrir una regla de formación y aplicarla, sino que se trata de analizar diferentes modos de relación entre los términos de la secuencia, diferentes expresiones de esas relaciones y delimitar, en cada caso, un modo sencillo de aplicar algunas de las reglas de formación que se han puesto de manifiesto.

13. Cálculo de un número triangular intermedio.

14. Cálculo de un número cuadrado intermedio.

15. Cálculo de un número rectangular intermedio.

También estas tres unidades se refieren conjuntamente a un mismo problema que es el de la extrapolación; se trata de que conocidos unos cuantos términos de una secuencia y establecido de algún modo el patrón común que comparten, se explicite éste y se aplique para obtener un término posterior, en tres o cuatro posiciones, al último conocido.

16. Cálculo del término general de los números triangulares.

17. Cálculo del término general de los números cuadrados.

18. Cálculo del término general de los números rectangulares.

Estas tres categorías se refieren a la obtención de una expresión para el término general de cada una de las sucesiones que se vienen estudiando; no se trata de llegar -en principio- a una expresión algebraica (precisamente uno de los objetivos de esta investigación consiste en estudiar las dificultades y la viabilidad de ese proceso) sino, más bien, de descubrir de cuantos modos interpretan la expresión "*término general de una secuencia*" y cuales son las formas de expresión de los alumnos emplean cuando se les propone representar de algún modo dicho término general.

19. Relaciones aritméticas entre números triangulares.

20. Relaciones aritméticas entre números cuadrados.

21. Relaciones aritméticas entre números rectangulares.

Con estas tres categorías, se aborda el estudio de las relaciones aritméticas, cualesquiera, que se pueden establecer entre números distintos de la misma secuencia; se quiere con este estudio potenciar la visualización de los diferentes números expresando aritméticamente las relaciones que se observan en la representación; en principio se trata de recoger qué tipo de relaciones son más intuitivas y se captan, por tanto, más fácilmente.

22. Obtención de algunos términos de la secuencia de números triangulares, a partir de su expresión general.

23. Obtención de algunos términos de la secuencia de números cuadrados, a partir de su expresión general.

24. Obtención de algunos términos de la secuencia de números rectangulares, a partir de su expresión general.

Con estas tres categorías se trata de analizar el sentido que atribuye a la expresión "*término general de una sucesión*", sea cual sea el modo de representación elegido y de qué modo se emplea dicho término general para obtener algunos términos concretos en cada secuencia.

Las **Categorías de Contenido Matemático enunciadas para el 8º nivel** son las siguientes.

1. Representación puntual de números.

2. Desarrollo aritmético de un número.

3. Representación puntual asociada a un desarrollo aritmético.

4. Representaciones puntuales que responde a un mismo modelo.

5. Expresión del patrón de una secuencia mediante configuración puntual común.

6. Expresión del patrón de una secuencia mediante desarrollo aritmético de sus términos.

7. Prolongación de una secuencia lineal expresada mediante un patrón puntual.

8. Prolongación de una secuencia cuadrática expresada mediante un patrón puntual.

9. Prolongación de una secuencia numérica lineal.

10. Prolongación de una secuencia numérica cuadrática.

11. Prolongación de una secuencia numérica cuyos términos se presentan mediante un desarrollo aritmético.

12. Prolongación de una secuencia cuadrática cuyos términos se presentan mediante un desarrollo aritmético.

13. Cálculo de un término intermedio en una secuencia lineal expresada mediante patrón puntual.

14. Cálculo de un término intermedio en una secuencia cuadrática expresada mediante patrón puntual.

15. Cálculo de un término intermedio en una secuencia numérica lineal.

16. Cálculo de un término intermedio en una secuencia numérica cuadrática.

17. Cálculo de un término intermedio en una secuencia lineal, cuyos términos se presentan mediante desarrollo aritmético.

18. Cálculo de un término intermedio en una secuencia cuadrática, cuyos términos se presentan mediante desarrollo aritmético.

19. Cálculo del término general en una secuencia lineal expresada mediante patrón puntual.

20. Cálculo del término general de una secuencia puntual cuadrática, expresada mediante patrón puntual.

21. Cálculo del término general de una secuencia numérica lineal.

22. Cálculo del término general de una secuencia numérica cuadrática.

23. Cálculo del término general de una secuencia lineal, cuyos términos se presentan mediante desarrollo aritmético.

24. Cálculo del término general de una secuencia cuadrática cuyos términos se presentan mediante desarrollo aritmético.

25. Término general de los números cuadrados.

26. Término general de los números rectangulares.

27. Termino general de los números triangulares.

28. Nociones generales sobre sucesiones, término general y representaciones del término general.

29.Término general de sucesiones puntuales a través de su descomposición en triángulos.

La elaboración definitiva de estas categorías se hizo una vez concluido el trabajo del 7º Nivel, y una vez conocidas las intuiciones, dificultades e interpretaciones de los alumnos sobre el sistema simbólico de las configuraciones puntuales; por ese motivo son más precisas y sistemáticas y han coordinado mejor el trabajo en el aula.

II.15. Categorías de Comprensión del Contenido (CCC)

Con las Categorias de Comprensión del Contenido analizamos las tareas realizadas por los alumnos en relación con el tópico que nos ocupa, viendo los modos de comprensión que presentan los alumnos sobre los contenidos trabajados, es decir, el grado de estructuración que tienen sobre hechos, conceptos, representaciones y procedimientos conectados con las configuraciones puntuales, la exploración de patrones numéricos y la generalización de sucesiones. Para ello nos proponemos analizar:

1. Uso de signos y dibujos para realizar representaciones gráficas de números. Para esta categoría tendremos en cuenta:

1.a. Complejidad de la representación (elementos distintos y relaciones que intervienen).

1.b. Contexto numérico empleado.

1.c. Tamaño de los números.

2. Uso de las representaciones gráficas llamadas Configuraciones Puntuales para representar números. En este caso se tendrá en cuenta:

2.a. Tipo de figura (forma y dimensión).

2.b. Estructuración de la figura (Simetría y orden, trama subyacente).

2.c. Variedad de configuraciones en la representación de un mismo número. No unicidad de este código.

3. Uso de operaciones y propiedades aritméticas para expresar un número como resultado de un desarrollo aritmético. En este caso se tendrá en cuenta:

3.a. Desarrollos aritméticos distintos para uno o varios números.

3.b. Desarrollos estructuralmente diferentes.

3.c. Tipos de operaciones implicadas en los desarrollos.

4. Traducción de un desarrollo numérico a configuración puntual y recíprocamente. Se considera:

4.a. El paso de un desarrollo numérico a configuración puntual.

4.b. La traducción numérica de una configuración puntual propuesta.

4.c. Transformaciones sobre una configuración puntual que llevan a cambios en el desarrollo numérico.

4.d. Cambios en un desarrollo numérico que llevan a transformaciones en la configuración puntual.

5. Elección de una configuración puntual como patrón para representar diferentes números. Hay que considerar.

5.a. Reiteración de una determinada forma a distintos tamaños, manteniendo un criterio uniforme para el cambio de tamaño.

5.b. Consideración de la forma elegida como patrón estable, independientemente del tamaño, con el que se representan distintos números.

5.c. Codificación de la forma estudiada mediante uno o varios términos y mediante un símbolo.

6. Análisis aritmético de patrones puntuales. Se tendrá en cuenta:

6.a. Realización de traducciones numéricas equivalentes para diferentes configuraciones que correspondan a un mismo patrón.

6.b. Reconocimiento de que un mismo patrón de configuraciones puntuales corresponde a una misma estructura de desarrollo aritmético.

6.c. Reconocimiento de que los números que comparten un patrón puntual, comparten igualmente estructura aritmética.

6.d. Consideración de que un patrón puntual expresa una estructura numérica.

7. Idea de secuencia numérica lineal y secuencia numérica cuadrática. Para ello observaremos:

7.a. Consideración de que un patrón numérico y su estructura correspondiente, establecen una secuencia en el caso de los términos de una sucesión lineal.

7.b. Consideración de que un patrón numérico y su correspondiente estructura, establecen una secuencia en el caso de los términos de una sucesión cuadrática.

8. Integración de los diferentes códigos para construir secuencias. Tendremos en consideración:

8.a. Prolongar una secuencia de dos o tres números que vienen dados mediante configuración puntual o desarrollo numérico: selección o reconocimiento de la estructura.

8.b. Prolongar una secuencia de dos o tres números realizando previamente una representación puntual y/o un desarrollo numérico de sus términos: búsqueda o elección de la estructura y aplicación.

8.c. Obtención de un término no consecutivo con los términos conocidos de una secuencia, utilizando la estructura numérica y/o el patrón puntual de sus términos: extrapolación.

9. Expresión del término general de una secuencia lineal o cuadrática.

9.a. Significado atribuido a la expresión "*termino general de una secuencia*".

9.b. Generalización del desarrollo numérico o estructura aritmética de los términos de una sucesión: el paso al término n.

9.c. Generalización del patrón de los términos de una sucesión: el uso de los puntos suspensivos o esquemas abiertos.

9.d. Notación algebraica del término general de una sucesión.

10. Utilización del término general de una sucesión lineal o cuadrática.

10.a. Obtención de varios términos de una sucesión a partir de su término general.

10.b. Obtención del desarrollo aritmético de varios términos de una secuencia a partir de su término general.

10.c. Obtención de la representación puntual de varios términos de una secuencia a partir de su término general.

11. Relaciones entre patrones triangulares, rectangulares y cuadrados.

11.a. Relaciones entre triangulares y rectangulares.

11.b. Relaciones entre triangulares y cuadrados.

11.c. Relaciones entre cuadrados y rectangulares.

II. 16. Estrategia Cuantitativa.

Con el fin de valorar si los logros de los alumnos con los que se ha llevado a cabo el desarrollo de la Investigación-Acción se han producido por efecto del tratamiento experimental, por la formación general recibida durante el período de enseñanza obligatoria, o bien por las características particulares del grupo experimental, se han diseñado para el curso de 8º dos procesos de evaluación distintos. Uno de ellos consiste en un estudio de evaluación mediante diseño cuasiexperimental, donde el grupo con el que se ha trabaja en I-A constituye el grupo experimental. El otro proceso de evaluación consiste en la medición final, a través de un test que sirva de indicador, del tipo de aprendizaje realizado por los alumnos en el tópico considerado.

La pregunta que nos planteamos se puede resumir en los siguientes términos. La información obtenida en este estudio con un grupo concreto ¿es resultado de la instrucción explícita o es efecto de una instrucción más general, que proviene de la educación obligatoria?, ¿hasta qué punto la información que se recoge depende del nivel y conocimientos propios de este grupo de alumnos?, ¿está condicionada la información recogida por las características del grupo experimental? Metodológicamente, al haber elegido un estudio de caso, la respuesta es sí y, como se ha dicho, nuestro interés se dirige a conocer lo que ocurre en ese grupo concreto de alumnos.

Sin embargo, queremos comparar nuestros escolares con otro grupo, para comprobar si la información trabajada es entendida, interpretada y utilizada por un grupo similar de alumnos, que no ha recibido el tratamiento experimental. Dicho en otros términos, queremos comprobar si el aprendizaje realizado por los alumnos sobre sucesiones numéricas a lo largo de la EGB se modifica significativamente después del tratamiento que nosotros vamos a realizar.

A estos efectos, la pregunta que nos planteamos es: ¿El uso de un modelo didáctico que combine las configuraciones puntuales y el desarrollo aritmético puede considerarse un facilitador del dominio del tópico "sucesiones" así como de la capacidad numérica de los alumnos?

En este caso estamos tratando de indagar en la clásica relación:

Enseñanza	↔	Aprendizaje
↓		↓
Modelo Didáctico	↔	Tópico Matemático
↓		↓
Configuración Puntual Desarrollos numéricos	↔	Sucesiones Comprensión

Este estudio, incardinado en el modelo metodológico general de Investigación-Acción es susceptible de ser enfocado desde perspectivas metodológicas complementarias. La deseada complementariedad metodológica abogada por Shulman (1986/89, 1988) puede ponerse de manifiesto apelando a ese "*programa que falta*" (missing progam) en el que se combinan los tres tipos de conocimiento: el de la materia, el pedagógico y el curricular. Estos tipos de conocimiento se estructuran, inicialmente, mediante un modelo genérico que se somete a investigación.

Someter el modelo propuesto a una **investigación evaluativa en la línea proceso-producto** constituye uno de los posibles "*modos de ver*" complementario a otras metodologías que se indican. Ya Shulman (1986/1989; pg: 68) señala que "*el programa de investigación proceso-producto (...) sirve ya sea para elaborar y refinar este modelo a través de la especificación de la influencia, o para demostrar la supuesta insuficiencia de la formulación...*".

II. 17. Formulación de Hipótesis.

La implementación de un modelo de enseñanza, basado en el uso de configuraciones puntuales y desarrollos aritméticos como facilitador del aprendizaje de las sucesiones numéricas, es susceptible de evaluación a nivel de producto. Al efecto, conjeturamos hipótesis plausibles que pueden poner de manifiesto un efecto diferencial del modelo de enseñanza sobre dominios de aprendizaje o aptitudinales. Estas hipótesis son:

*1ª. **Hipótesis de investigación***. El uso de configuraciones puntuales facilita un progreso en la capacidad aritmética de los alumnos que reciben tal modelo de enseñanza.

*2ª. **Hipótesis de investigación***. El uso de configuraciones puntuales facilita el dominio de un tópico matemático cual es sucesiones numéricas.

Enunciamos estas hipótesis de modo alternativo, asumiendo la producción de *efectos significativos* en variables dependientes de interés (aptitud numérica y dominio de las sucesiones numéricas) a partir, como causa, de la implementación de un modelo de enseñanza (variable independiente) basado en el uso de configuraciones puntuales. En el caso de que tal presunta relación causal no sea verosímil, habrá que asumir, con todas las limitaciones posibles, que el uso de configuraciones puntuales es una práctica informal que los alumnos incorporan naturalmente sin necesidad de apelar a su formalización didáctica.

II.18. Variables

Variable independiente. Uso o no uso del modelo didáctico propuesto. Se trata de una variable dicotómica.

Variable dependiente. Consideramos dos variables dependientes:

-dominio del tópico sucesiones, por los alumnos.

-capacidad aritmética de los alumnos.

II.19. Muestra

Se ha selecionado intencionalmente una muestra de 118 alumnos de 8º nivel de E.G.B. los cuales están organizados en cuatro grupos: uno de ellos el grupo experimental con 36 alumnos, los 82 restantes constituyen tres grupos de control.

Las características de estos grupos son los que siguen:

* 4 grupos natural-intacto de 8º nivel de Educación General Básica, pertenecientes a dos centros públicos de Granada capital. El grupo considerado experimental pertenece a uno de los centros. Los tres grupos restantes, con un total de 82 alumnos y un mismo profesor, pertenecen todos al otro centro y los hemos considerado como grupo de control.

* los dos centros que hemos tomado para nuestra experiencia son de características similares: son centros públicos, situados en barrios análogos de Granada capital.

* en cuanto a los alumnos, tienen una edad de 13-14 años, formando grupos mixtos compuestos por mitad aproximadamente de niñas y de niños; el nivel sociocultural de sus familias es medio, análogo en los dos centros.

* los 2 profesores de Matemáticas de estos alumnos pertenecen a un Seminario Permanente en el que se trabaja sobre innovación en la enseñanza de las Matemáticas y del que también forma parte el investigador; esto nos hace pensar que, aún habiendo diferencias en lo que se refiere a la forma de desarrollar su trabajo en el aula, tienen puntos comunes en sus creencias y en sus pautas de actuación respecto a la enseñanza de la Matemática, aspecto este que incide en los aprendizajes escolares de los grupos experimental y control.

La descripción del estudio cuantitativo y sus resultados aparecen en el Capítulo V de este trabajo.

II.20. Resumen final

Las ideas fundamentales que hemos utilizado para realizar el diseño metodológico de esta investigación, quedan sintetizadas en el cuadro:

Nivel	*Método General*	*Técnicas metodológicas afines*	*Cuestión básica*	*Núcleo*
Proceso	***Investigación en la Acción***	**** Observación de la interacción en el aula * Análisis del desempeño * Toma de decisiones***	***¿Cómo se implementa un cambio curricular?***	***Innovación curricular articulada en un sistema tricategorial (CID, CCM, CCC)***
Producto	***Experimen-tación***	**** Diseño cuasi-experimental * Diseño y validación de instrumentos de medida***	***¿Qué efectos produce un tratamiento innovador?***	***Relación: Enseñanza-Aprendizaje***

CAPITULO III
ESTUDIO EN 7º NIVEL

III.1. Introducción

Este capitulo está dedicado a presentar la relación y resultados de las fases de **planificación, acción, observación y reflexión** del trabajo realizado en el curso de 7º, dentro del esquema de Investigación-Acción correspondiente al primer ciclo de la espiral que organiza y resume el estudio; un planteamiento más convencional denominaría estudio piloto a esta parte del trabajo. En un estudio curricular la fase de diseño es determinante y a su estudio, análisis y crítica va dirigido parte de este capítulo.

Esquema general del trabajo:

Planificación.

Por mantener las condiciones usuales de trabajo en el aula, acordamos que fuese el profesor de matemáticas del curso quién dirigiese las sesiones. Esto llevó a una preparación y programación conjunta de las sesiones, que constituye parte de nuestro trabajo de campo. Gran parte de nuestra intervención está centrada en la planificación exhaustiva de las sesiones del trabajo en la clase con el profesor de matemáticas del curso. Para ello hemos realizado -como se verá- un análisis minucioso del contenido, una estrategia para su organización y presentación en el aula y el diseño de la secuencia metodológica que hemos creído más adecuada. Es, precisamente, este trabajo de planificación el que permitirá detectar y contextualizar las dificultades de aprendizaje de los alumnos en relación con los conceptos presentados, ubicando las dificultades que encuentren en el estudio de relaciones numéricas con nuestra propia didáctica.

Mediante las Categorías de Contenido Matemático, de Interacción Didáctica y de Comprensión del Contenido, elaboradas y presentadas en el capítulo anterior, estudiaremos la organización y estructura interna de las fases de planificación y desarrollo; igualmente, realizaremos el análisis y valoración del trabajo de los alumnos y la comprensión alcanzada en los tópicos estudiados sobre secuencias lineales y cuadráticas. Por ello, el **segundo apartado** de este capítulo está dedicado a presentar la preparación y programación, previas al trabajo en el aula, los factores clave que se tuvieron en cuenta y las propuestas de actuaciones que se diseñaron. Toda esta información enmarca y da sentido al desarrollo posterior y a las actuaciones de los alumnos y se contempla como una fase importante de este estudio. En este apartado se realiza un análisis detallado del material elaborado para la preparación y programación, determinando la estructura y componentes de cada una de las unidades de actuación diseñadas.

Acción.

El desarrollo de las clases y la puesta en práctica de las actuaciones previstas, como continuación de la fase anterior, da lugar al **tercer apartado** de este capítulo.

Observación.

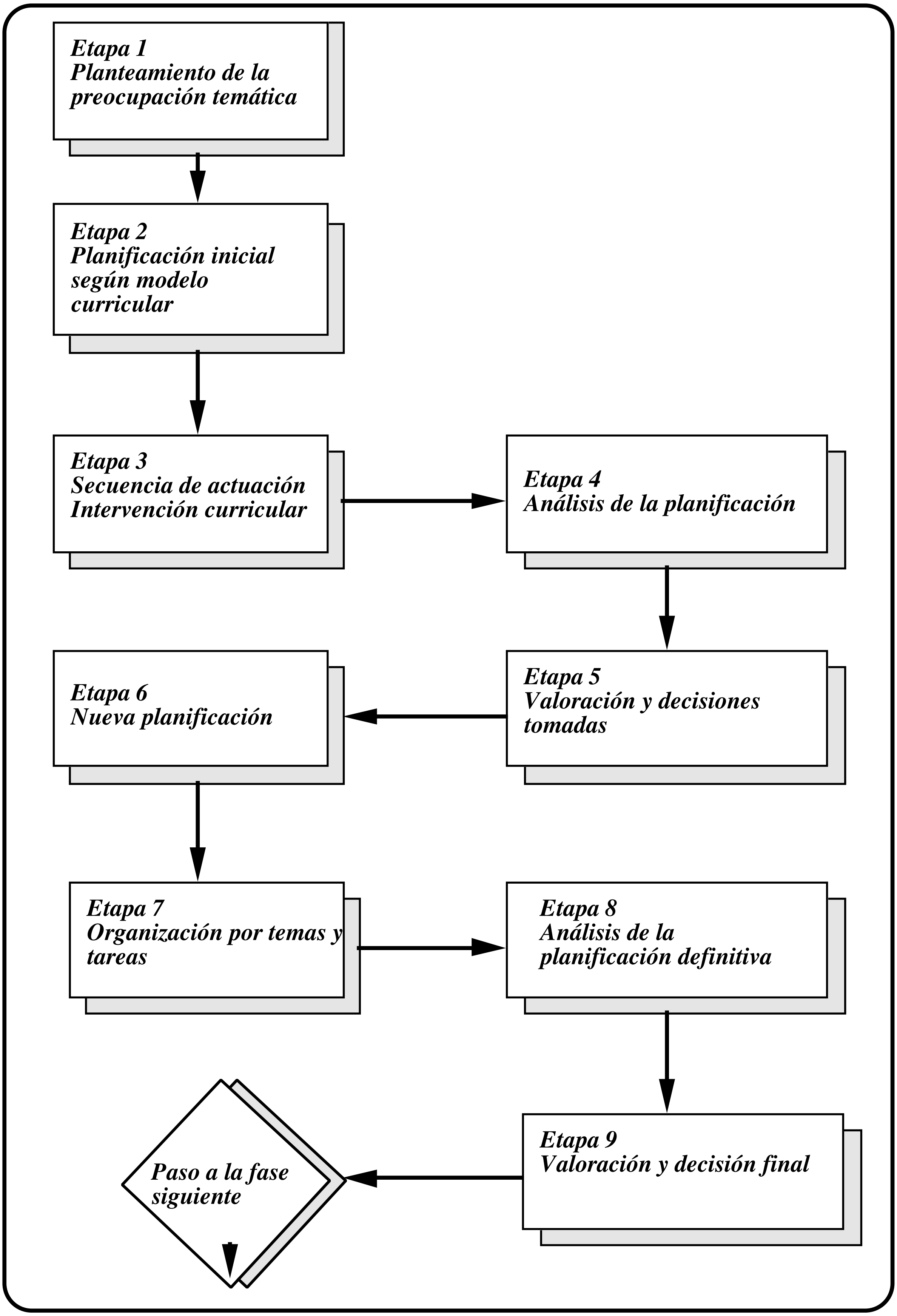
El análisis de las tareas realizadas por los alumnos en relación con el tópico sobre el que se está trabajando da pie al **cuarto apartado**.

Reflexión.

El **quinto apartado** está dedicado a la valoración crítica de este estudio piloto, resumen de los fenómenos observados más destacables y elaboración de las conclusiones provisionales que proporcionan una aproximación al estudio experimental en el nivel de 8º para el curso siguiente.

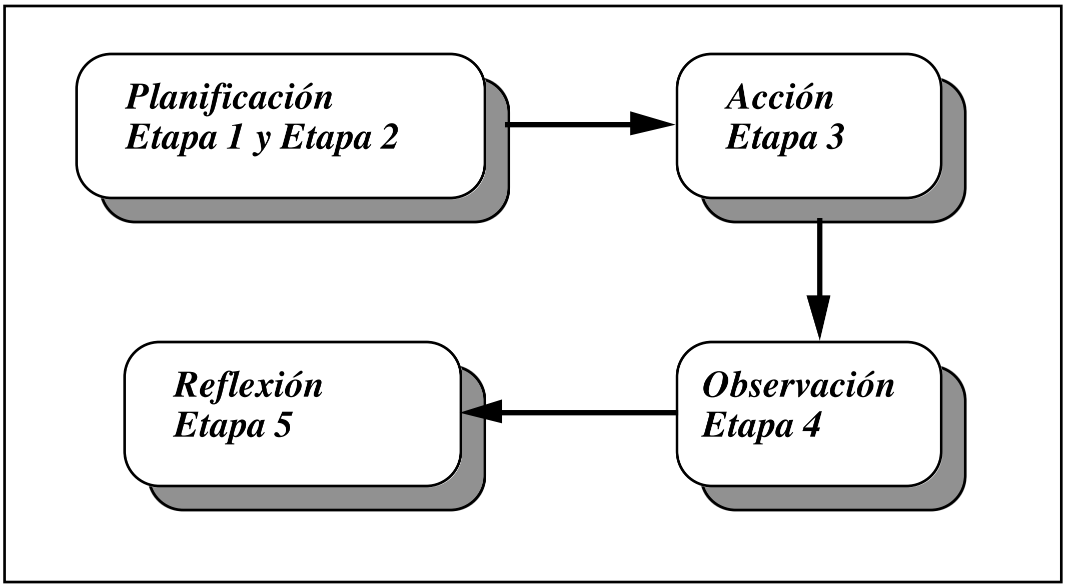
III.2. Fase de Planificación

El carácter recurrente del modelo elegido para la realización de este estudio se pone de manifiesto desde esta primera fase del trabajo de campo. Nos encontramos en la primera fase o nivel de nuestro estudio, la fase de **Planificación**. El trabajo realizado en esta fase queda esquematizado mediante el siguiente diagrama:

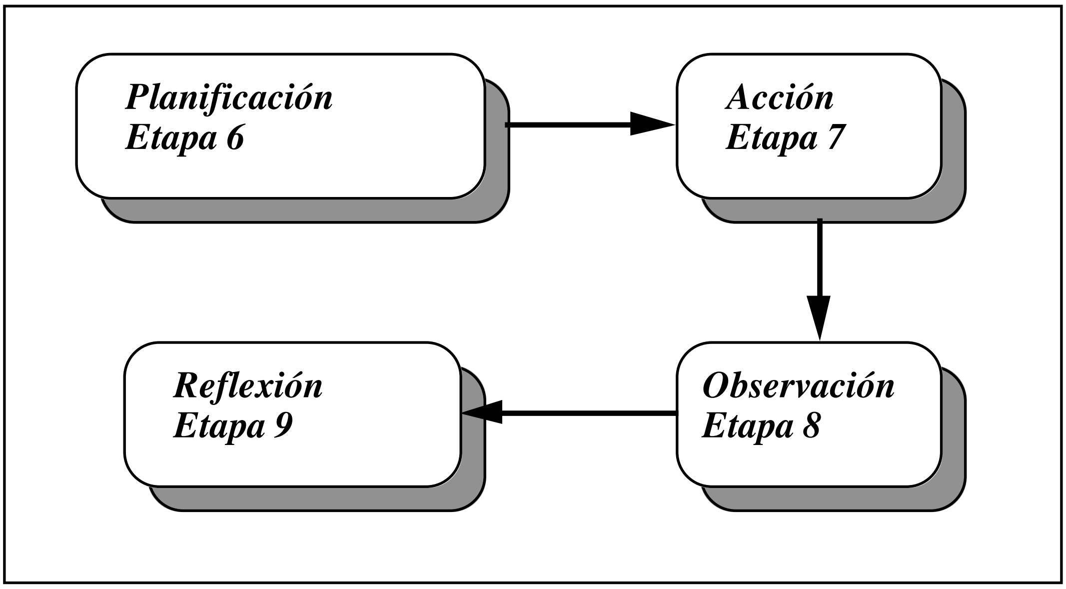

Etapa 1
Planteamiento de la preocupación temática
Etapa 2
Planificación inicial según modelo curricular
Etapa 3
Secuencia de actuación Intervención curricular
Etapa 4
Análisis de la planificación
Etapa 5
Valoración y decisiones tomadas
Etapa 6
Nueva planificación
Etapa 7
Organización por temas y tareas
Etapa 8
Análisis de la planificación definitiva
Etapa 9
Valoración y decisión final
Paso a la fase siguiente

El trabajo realizado se estructura en 9 etapas, que suponen una delimitación progresiva del plan de actuación bajo el que se lleva a cabo nuestro estudio. El paso de una etapa a la siguiente se realiza mediante la validez consensual del grupo de profesores implicados en la investigación: es el consenso que surge de los debates realizados y de los materiales elaborados el que permite valorar la conveniencia y tomar las decisiones adecuadas para pasar a la fase siguiente. En la realización de las 9 etapas mencionadas recorremos dos espirales de Investigación-Acción antes de culminar la fase de planificación.

La primera espiral la establece:



Las decisiones tomadas al finalizar la Etapa 5 dan entrada a la segunda espiral:



La valoración y decisiones de la etapa 9 cierran el ciclo; por un lado, dan repuesta a la preocupación temática y, por otro, establecen el paso a la fase siguiente.

Conjuntamente, ambas espirales, constituyen la fase de planificación de nuestro trabajo en este nivel. Veamos la realización de cada una de estas etapas.

III.2.1. Planteamiento de la preocupación temática

El día 12 de Diciembre del año 1991 se reúne el grupo formado por el investigador, el profesor de matemáticas encargado del curso experimental y el director de la investigación. El investigador hace partícipes a los restantes miembros del grupo de su propuesta de investigación y presenta un primer borrador, o propuesta de programación, del proceso a desarrollar en la clase. Este documento sirvió como base para la discusión, con el profesor de matemáticas encargado del grupo experimental y con el director de esta investigación, sobre los criterios a tener en cuenta en la puesta en práctica del trabajo en el aula y la planificación de la secuencia de actuación.

III.2.2. Planificación inicial según modelo curricular

Como resultado del intercambio de criterios entre los miembros del equipo investigador señalado anteriormente, surge una primera aproximación de la intervención curricular en el aula. Esta primera aproximación se presenta a continuación según los apartados:

a) objetivos;
b) contenidos;
c) metodología;
d) evaluación de la intervención curricular;
e) criterios prácticos.

Objetivos:

1.- Detectar ventajas e inconvenientes que, comparativamente, presentan la notación numérica y la representación geométrica en el estudio de las relaciones numéricas.
2.- Establecer condiciones bajo las que identificar una misma relación en diferentes números, reconocer los criterios que determinan la relación y expresar esos criterios a través de una generalización.
3.- Delimitar los conocimientos matemáticos empleados para reconocer y generalizar criterios.
4.- Determinar nuevos conocimientos matemáticos generados por el trabajo realizado .

Contenidos

1.- Representación de números.
2.- Representaciones puntuales.
3.- Patrones de representación.

4.- Números triangulares.
5.- Números cuadrados.
6.- Números rectangulares.

Metodología:

Pretendemos que en las sesiones de clase los alumnos sean activos y autores de su propio aprendizaje, para ello creemos que es imprescindible favorecer una atmósfera de libertad en el aula así como estimular la discusión y las relaciones interpersonales entre los miembros que conviven en la misma. Stenhouse (1984, pg. 194) anima a los profesores a librarse de roles rígidos y estereotipados y señala que su papel ha de ser como el de un arbitro neutral. Por ello intentaremos favorecer la participación de los alumnos en el proceso de aprendizaje y que sea a través de la realización de las tareas y actividades, programadas con tal fin, de donde surja el nuevo conocimiento; igualmente a través de la discusión y puesta en común se validará el conocimiento adquirido.

Evaluación:

De acuerdo con los objetivos y contenidos propuestos y con las categorías de análisis descritas anteriormente, planificamos la valoración del trabajo de los alumnos en el aula atendiendo a los siguientes criterios:

i. Expresión de intuiciones sobre representaciones numéricas.
ii. Exploración de posibilidades en las configuraciones puntuales.
iii. Reconocimiento, interpretación y utilización de códigos en las representaciones puntuales.
iv. Análisis sistemático de relaciones sobre algunos patrones de representación.
v. Reconocimiento de un patrón y construcción de nuevos términos de acuerdo con dicho patrón.
vi. Generalización de patrones.
vii. Relaciones y regularidades aritméticas entre distintos patrones.

Criterios Prácticos:

Con carácter general se acordó que:

La ***motivación*** a los alumnos se realizará, sobre todo, al comienzo de las clases, cuando se trate de cambiar de actividad y cuando los alumnos pierdan el interés por el trabajo.

El profesor facilitará ***información*** a los alumnos sólo cuando no sean capaces de obtenerla por ellos mismos.

Las ***tareas o actividades*** a realizar han de ser expuestas con claridad, repitiéndose cuantas veces sean necesarias hasta el total entendimiento por los alumnos.

Con las ***consignas*** se tratará de dar información adicional, aclarar algún punto o remachar algún aspecto.

Tanto las ***interacciones abiertas*** como las ***puestas en común*** tienen como finalidad convertir el conocimiento individual en conocimiento de grupo y, en este proceso de socialización, mejorar y hacer progresar el conocimiento individual, proporcionando, entre otras cosas, más riqueza de información.

Con las ***reflexiones*** sobre los resultados de los alumnos se hará hincapié acerca de aquellos aspectos que se pretendan destacar.

Las ***síntesis*** resaltarán y darán una idea clara y breve de los resultados obtenidos con el trabajo realizado.

III.2.3. Planificación de la secuencia de actuación

La secuencia de actuación o intervención curricular fue planificada por el grupo investigador con objeto de precisar, en todo lo posible, las actuaciones a llevar a cabo en la ***fase de acción*** y se elaboró en una sesión de trabajo conjunta entre el investigador, el profesor de matemáticas del grupo y el director de la investigación, realizada el día 16 de Diciembre del año 1991. En esta etapa de planificación es el profesor el que asume la responsabilidad sobre los objetivos, los contenidos y la metodología, por ello nos vamos a referir a las ***actuaciones del profesor*** en el entendimiento que se trata de fases que el profesor prevé realizar mediante su participación en el trabajo del aula en el que, por supuesto, participarán activamente los alumnos.

Las actuaciones del profesor están descritas en términos de las categorías de interacción didáctica (CID) y de contenido matemático (CCM), o unidades de actuación, recogidas en el capítulo anterior de este trabajo. Estas actuaciones hacen referencia a una faceta concreta (***conceptual, procedimental, representativa*** etc.) del conocimiento matemático que se está trabajando en el aula. Las referencias que aparecen de los alumnos son siempre de reacciones que el grupo investigador supone se presentarán por parte de los mismos, ya que se está programando la secuencia de actuación del profesor.

Cada unidad de actuación está reseñada con un código en el cual se indica el tipo de categoría (CID) con letras mayúsculas. Se ha introducido un nuevo código (CP) que se refiere a las consideraciones a tener en cuenta por el profesor que va a llevar la clase, en aquellos momentos que se consideran relevantes y que han sido hechas por el grupo investigador. Las categorías de contenido matemático o unidades de actuación van marcando la organización de la secuencia. El estilo con el que se realiza la descripción hace suponer que se está delante de la clase, debido a que el análisis del profesor se dirige en todo momento a su actuación ante los alumnos.

Al concluir esta Etapa, el Profesor de matemáticas del grupo dispone de información suficiente sobre el campo de trabajo que se quiere investigar: se han delimitado los contenidos, las secuencias de trabajo, los recursos que se van a emplear, los procedimientos que se quieren destacar así como las espectativas sobre lo que se quiere alcanzar.

El equipo investigador ha actuado en base a la preocupación temática y la planificación inicial entrando en los detalles de puesta en práctica. La complejidad puesta de manifiesto hace necesarios un análisis y una reflexión del trabajo realizado.

III.2.4. Analisis de la planificación para la intervención curricular

La planificación para la intervención curricular realizada en la sesión del 16 de Diciembre del año 1991, se analiza en términos de las 21 Categorías de Contenido Matemático establecidas para el nivel 7º por Categorías de Interacción Didáctica. Las intervenciones previstas quedan recogidas en la Tabla 1 y hacen un total de 65:

Tabla 1: Planificación inicial. Unidades de actuación con las Categorías de Interacción Didáctica que las forman.

C.I.D / C.C.M	M	I	A	C	PC	IA	R	S	Total
1 representación de números	x		x	x	x				4
2 representación puntual	x		x	x	x		x		5
3 rep. puntual geométrica			x	x	x				3
4 rep. pun. de triángulos		x	x		x			x	4
5 rep. pun. de cuadrados			x		x	x			3
6 rep. pun. de rectángulos			x		x		x		3
7 nombres de los números T			x		x			x	3
8 nombres de los números C		x				x			2
9 nombres de los números R			x		x			x	3
10 regla de formación de los T	x			x	x				3
11 regla de formación de los C		x	x		x				3
12 regla de formación de los R			x		x				2
13 cálculo de T intermedio	x	x	x			x			4
14 cálculo de C intermedio			x	x	x				3
15 cálculo de R intermedio			x	x	x				3
16 término general de los T			x	x	x				3
17 término general de los C		x	x		x				3
18 término general de los R			x	x	x				3
19 relaciones en T		x	x	x		x			4
20 relaciones en C			x		x				2
21 relaciones en R			x		x				2
Total	4	6	19	9	18	4	2	3	65

De un total de 21 unidades de actuación planificadas, encontramos

1 unidad estructurada mediante 5 categorías de interacción didáctica.

4 unidades estructuradas mediante 4 categorías de interacción didáctica.

12 unidades estructuradas mediante 3 categorías de interacción didáctica.

4 unidades estructuradas mediante 2 categorías de interacción didáctica.

En promedio, cada unidad de actuación queda estructurada mediante 3 unidades de actuación didáctica. Observando con más detalle encontramos que, en todas las unidades de actuación, aparecen las categorías actividad y/o consigna, determinando una fase de ***implementación*** para cada unidad de actuación (28 interacciones en total); igualmente se presentan las categorías puesta en común y/o interacción abierta, que determinan una fase de ***socialización*** por cada unidad de actuación (con 22 interacciones planificadas); solamente la unidad de actuación nº 8 carece de acción expresamente planificada.

Las fases acción y socialización abarcan 50 de las interacciones previstas, que suponen el 79% del total. El resto de las interacciones no tiene una distribución asistemática; responden igualmente a unas necesidades de planificación, en este caso más generales.

Para valorar la comprensión de los alumnos, consideramos los siete criterios anteriormente incluidos en el apartado d) de III.2.2. Cada uno de estos criterios comprende tres unidades de actuación, con el agrupamiento siguiente:

Criterio (i) "Expresión de intuiciones sobre representaciones numéricas", agrupa las unidades de actuación 1, 2 y 3.

Criterio (ii) "Exploración de posibilidades en las configuraciones puntuales", agrupa las unidades de actuación 4, 5 y 6.

Criterio (iii) "Reconocimiento interpretación y utilización de códigos en las representaciones puntuales", agrupa las unidades 7, 8, 9.

Criterio (iv) "Análisis sistemático de relaciones en los patrones de representación", comprende las unidades 10, 11 y 12.

Criterio (v) "Reconocimiento de un patrón y construcción de nuevos términos de acuerdo con el mismo", abarca las unidades 13, 14 y 15.

Criterio (vi) "Generalización de patrones", unidades 16, 17 y 18.

Criterio (vii) "Regularidades entre distintos patrones", comprende las unidades de actuación 19, 20 y 21.

Consideramos, igualmente, fases en el proceso de interacción didáctica, mediante el agrupamiento de las categorías de interacción. Como ya se ha mencionado y se explicó en el capítulo anterior, estas fases son:

Presentación: Motivación y/o Información.

Implementación: Actividad y/o Consigna.

Socialización: Puesta en Común y/o Interacción Abierta.

Sistematización: Resumen y/o Síntesis.

El resultado de este agrupamiento viene dado en la tabla 2:

Tabla 2: Criterios y Unidades de Actuación.

Criterios	Unidad de actuación	Presentación	Implementación	Socialización	Sistematización	Total
i	1	M	C+A	PC		
	2	M	C+A	PC	R	
	3		C+A	PC		
	12					
ii	4	I	A	PC	S	
	5		A	PC+IA		
	6		A	PC	R	
	10					
iii	7		A	PC	S	
	8	I		IA		
	9		A	PC	S	
	8					
iv	10	M	C	PC		
	11	I	A	PC		
	12		A	PC		
	8					
v	13	M+I	A	IA		
	14		C+A	PC		
	15		C+A	PC		
	10					
vi	16		C+A	PC		
	17	I	A	PC		
	18		C+A	PC		
	9					
vii	19	I	A+C	IA		
	20		A	PC		
	21		A	PC		
	8					

La tabla muestra que:

La ***presentación*** se contempla en todos los agrupamientos aunque no forma parte de todas las unidades de actuación.

La ***implementación*** y la ***socialización*** forman parte, de todas las unidades de actuación; esto se debe a que, por una parte, se considera la fase de implementación como el "núcleo" de las unidades, y por otra, el tipo de metodología adoptado obliga a que después de cada implementación se produzca la socialización.

La fase de ***sistematización*** es la que menos se prodiga, hasta tal punto que sólo aparece en los tres primeros agrupamientos. Esto es debido a que el peso de la presentación y organización del nuevo contenido se ha puesto en dichos agrupamientos, mientras que en los 4 últimos el interés está centrado en que los alumnos aprovechen los conocimientos adquiridos para realizar un trabajo de aplicación del mismo, lo que da lugar a que se produzca un descuido de la sistematización.

III.2.5. Valoración de la planificación y decisiones tomadas

El día 10 de Febrero del año 1992 se reúne de nuevo el grupo de investigación, examina la programación inicial y valora los distintos apartados de la misma, llegando a las siguientes conclusiones:

El ***contenido*** resulta excesivamente amplio; muchas de las ***tareas*** parecen difíciles para niños de 7º de E.G.B., con los que se va a llevar a cabo la fase piloto.

En algunas de las tareas finales las relaciones se establecen sólo a través de patrones de tipo aritmético, dejando de lado los patrones de tipo geométrico, esto es, las representaciones puntuales que constituyen parte de nuestro objetivo. Se hace necesario situar las representaciones puntuales en el centro de nuestro trabajo. Se acordó delimitar una parte del contenido considerada más idónea para la capacidades matemáticas de los niños de 7º que proporcionará información y marcará pautas a seguir en el curso posterior, con estos mismos alumnos en 8º.

La tabla 3 muestra qué aspectos se decide modificar y cuáles otros permanecen como en la programación inicial.

Tabla 3: Modificación en la Programación Inicial.

Objetivos	SE MANTIENEN
Contenido	CAMBIA
Metodología	SE MANTIENE
Evaluación	SE MANTIENE
criterios prácticos	SE MANTIENEN
planificación de la secuencia	SE MANTIENE

Para llegar a la Planificación Definitiva se hace necesario organizar el trabajo de los alumnos en torno a una serie de tareas mediante las que vayan apareciendo las distintas unidades de actuación, sin mantener el orden progresivo y secuencial de las mismas. La organización del trabajo de los alumnos no debe mantener el carácter analítico empleado por los investigadores sino que debe centrarse en tareas mediante las que llevar a cabo de modo simultáneo diversas actuaciones.

III.2.6. Planificación definitiva.

Como se puede apreciar en la tabla 3 se mantienen todos los aspectos de la programación inicial, excepto el contenido que se modifica por lo que la programación definitiva presenta las siguientes características:

Los ***objetivos*** son los mismos de la programación inicial.

El ***contenido*** se modifica en amplitud, pues se prescinde de los números rectangulares, y también en profundidad, ya que se suprimen las tareas consideradas más difíciles y quedan aquellas que se consideran idóneas para el estudio. El contenido se divide en dos temas y cada uno de los temas se organizan en ***tareas***. Con el primer tema se trata de introducir a los alumnos, de forma gradual, en el tópico objeto de estudio; el segundo tema, más específico, el trabajo se centra en los números triangulares y cuadrados.

La ***metodología*** se mantiene de forma general.

Según el esquema marcado por las Categorías de Interacción Didáctica, los criterios para la ***evaluación*** se reducen a cinco, por desaparición de algunos contenidos matemáticos.

i. Expresión de intuiciones sobre representaciones numéricas.
ii. Exploración de posibilidades en las configuraciones puntuales.
iii. Reconocimiento, interpretación y utilización de códigos en las representaciones puntuales.
iv. Análisis sistemático de relaciones sobre algunos patrones de representación.
v. Reconocimiento de un patrón y construcción de nuevos términos de acuerdo con dicho patrón.

Se precisa la ***temporalización*** que se fija en cuatro sesiones de 75 a 80 minutos cada una, que tendrán lugar los días 4, 5, 11 y 12 de Mayo de 1992.

III.2.7. Organización por temas y tareas.

De acuerdo con los criterios mencionados en la planificación definitiva el equipo investigador elaboró unos guiones de trabajo para el aula centrados en dos ***temas***:

Tema 1. Los números se representan.

Tema 2. Números triangulares y cuadrados.

En el tema 1 se trabajan las unidades de actuación 1, 2 y 3, organizadas en tres tareas; en el tema 2 se trabajan las unidades de actuación 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13 y 14 principalmente, organizadas en 4 tareas. Estas tareas son:

Tema 1. Los números se representan.

Tarea 1.1. Indica situaciones que recuerdes, y que se relacionen fácilmente con números. Representa dichas situaciones.

Tarea 1.2. Representa los números 6, 9, 15 utilizando puntos. Siempre que sea posible emplea el mismo tipo de representación para todos los números.

Tarea 1.3. Representa los números que quieras utilizando puntos, pero de tal manera que dichos puntos estén colocados formando figuras geométricas.

Tema 2. Números triangulares y cuadrados.

Tarea 2.1. Ayudándote de la plantilla, representa dos números triangulares distintos de 6 y de 15.

Tarea 2.2. Recopila y escribe en orden todos los números triangulares que puedas. Para ello puedes preguntar a tus compañeros.

Tarea 2.3. Busca relaciones entre los números triangulares.

Tarea 2.4. a) Ayudándote de la plantilla, representa números cuadrados.

b) Busca relaciones entre los números cuadrados.

Con el fin de sintetizar la propuesta de trabajo para el aula, se elaboran unos guiones de trabajo para cada uno de los temas y tareas previstos que se presentan en el Anexo II; mediante estos guiones se concreta la modificación realizada en la planificación.

III.2.8. Análisis de la planificación definitiva.

La estructura de la programación definitiva, para llevar al aula se muestra en la tabla 4 donde se puede observar (comparando con la tabla 1) la reducción realizada a la planificación inicial, lograda mediante un esfuerzo de precisión y delimitación de tareas.

Tabla 4: Planificación final. Criterios de Evaluación. Unidades de Actuación y Categorías de Interacción Didáctica que las forman.

Criterios	Unidades de actuación	M	I	A	C	PC	IA	R	S	Total
i	1. representación de números	x		x	x	x				4
	2. representación puntual	x		x	x	x		x		5
	3. rep. puntual geométrica			x	x	x				3
ii	4. rep. puntual de triángulos			x		x			x	3
	5. rep. puntual de cuadrados			x		x	x			3
iii	7. nombre de los números T			x		x			x	3
	8. nombre de los números C		x				x			2
iv	10. regla de formación de T	x			x	x				3
	11. regla de formación de C		x	x		x				3
v	13. cálculo de T intermedio		x	x			x			3
	14. cálculo de C intermedio			x	x	x				3
Total		3	3	9	5	9	3	1	2	35

El trabajo realizado en este apartado ha permitido:

Especificar el contenido sobre el que se va a trabajar.

Discutir y negociar con el profesor el mejor modo de organizar el trabajo de los alumnos y las interacciones en el aula.

Predecir algunas de las dificultades de comprensión que puedan tener los alumnos con algunos ***aspectos conceptuales y/o procedimentales del conocimiento objeto de estudio***; planificar el modo de abordar esas dificultades de comprensión, con el fin de ayudar a los alumnos a su superación.

Enfatizar la necesidad de estimular al máximo las intuiciones y concepciones que tienen los alumnos en relación con los diferentes aspectos que se van a estudiar, de manera que se pueda poner de manifiesto el modo en que se conceptualizan las relaciones numéricas mediante modelos y configuraciones puntuales.

III.2.9. Valoración y decisión final.

La decisión de continuar la investigación y avanzar hacia la fase de nivel de Acción de nuestro estudio se hace explícita al concluir todas las etapas de esta fase de Planificación. Mediante un esfuerzo conjunto, el equipo investigador ha logrado articular unos contenidos matemáticos (estructurados según unas categorías específicas) con una secuencia metodológica (estructuradas en unas Categorías de Interacción Didáctica) mediante la propuesta de una serie de Tareas. Las Tareas expresan una planificación concreta de interacción curricular, que cubren y satisfacen los objetivos, contenidos, metodología, evaluación y criterios prácticos de actuación enumerados.

Al concluir el trabajo en el nivel de Planificación el equipo investigador ha logrado elaborar un marco de referencia al que ajustará sus realizaciones prácticas posteriores, contrastará dichas realizaciones y, finalmente, tomará referencia para realizar la valoración final de los hallazgos logrados. En el momento de concluir la fase de Planificación el equipo investigador ha dotado de cierta operatividad a la preocupación temática y hay elementos de juicio suficientes para continuar con la fase siguiente.

III.3. Fase de Acción.

Esta fase de nuestro estudio se lleva a cabo a lo largo de 4 sesiones de trabajo en el aula, cada una de ellas de 80 m de duración. Estas sesiones tienen lugar los días 4, 5, 11 y 12 de Mayo de 1992. La información de la misma la vamos a organizar de acuerdo con el siguiente orden de ideas:

Acción propiamente dicha, estructurada según las Categorías de Contenido Matemático y de Interacción Didáctica, principalmente. Las sesiones se organizan según las tareas enunciadas en la Fase de Planificación.

Observación de cómo se ha llevado el desarrollo de la acción. Por cada sesión, y posteriormente a su realización, hay un seguimiento de la comprensión puesta de manifiesto por los alumnos durante la misma; en cada caso se destacan los hallazgos, que deben tenerse en cuenta en el desarrollo posterior.

Reflexión de la fase de acción. Esta reflexión conduce a una valoración crítica del trabajo realizado, a una serie de ajustes y modificaciones y a una decisión sobre el modo y la conveniencia de continuar el estudio.

Damos paso a la información de la acción desarrollada en el aula durante las cuatro sesiones citadas.

III.3.1.- Desarrollo de las sesiones

Primera Sesión

Esta sesión tiene lugar el día 4 de Mayo del año 1992.

El profesor de séptimo curso hace a sus alumnos una presentación de la persona que va a realizar la observación, y que por primera vez ha aparecido en la clase.

> "Os presento a Encarna que es una profesora de matemáticas que enseña a maestros y va a realizar una experiencia en nuestra clase. Por este motivo se va a grabar en video el desarrollo de las clases a las que ella asista".

El grupo de alumnos saludan a la profesora y se establece un corto diálogo en donde los niños se interesan por el trabajo de la profesora investigadora como enseñante de sus profesores de matemáticas, pronto se vuelve a la normalidad y el profesor de 7º se dispone a realizar su trabajo. Los alumnos no dan importancia al hecho de que el desarrollo de las sesiones de clase se vaya a grabar en video ni se sienten incómodos por la presencia de una persona ajena, hasta ese momento, al aula.

En esta primera sesión se desarrolla la Tarea 1.1 presentada en el apartado III.2.7.

La presentación de la tarea 1.1 se realiza de manera muy abierta y los alumnos dan una gran variedad de respuestas, utilizando gran diversidad tanto de representaciones para números, como números elegidos; sin embargo, no se presenta ninguna representación mediante puntos.

Antes de pasar a la Tarea 2 el profesor, tras una breve consulta con la investigadora, propone una tarea intermedia con la que destacar algunas ideas importantes para la continuidad del trabajo, en especial la noción de modelo, la tarea es la siguiente:

"Representar los números 6, 9 y 15 siguiendo una pauta o modelo para la representación".

En esta actividad surge la idea de ***modelo***, que no se ha explicado ni aclarado previamente; los alumnos piden aclaración:

> (PA). "¿El mismo modelo para los tres números?".
>
> (RP). "Como queráis, podéis utilizar el mismo modelo para los tres números o tomar uno distinto para cada uno de los números."

(PA). "Yo quiero que me lo expliques mejor pues no lo he entendido bien y no se como hacerlo".

(RP). "En realidad se trata de tomar una idea o dibujo y con el mismo crear el 6, el 9 y el 15. Son modelos que se han de repetir, tenéis que procurar que sean fáciles de representar y fáciles de ver".

(PA). "¿Un sólo dibujo?".

(RP). "Puede ser un dibujo sólo".

Con este diálogo los alumnos tratan de precisar la idea que se ha presentado anteriormente, se está operativizando la idea de ***modelo para la representación***, y queda explícito que se trata de ***un dibujo sencillo***. Ahora bien, se presentan dos interpretaciones: Los que identifican modelo con elemento simple y los que consideran el modelo como una organización de los elementos simples. Los alumnos construyen distintos ejemplos de la idea que han captado de modelo y realizan un control de validez.

(PA). "Esto es válido?"

(RP). "Si, han de ser cosas fáciles, olvidad ahora las figuras y centrad las ideas en la utilización de un modelo. Ahora más que el dibujo nos sirve la secuencia. Con objetos, con formas, con figuras."

Segunda Sesión.

La segunda sesión tiene lugar el día 5 de Mayo de 1992.

En esta sesión se hace una recopilación de todas las representaciones elaboradas por los escolares sobre representaciones de los números 6, 9 y 15 siguiendo un mismo modelo. La riqueza de formatos icónicos utilizados por los alumnos es tan grande que el profesor aprovecha para repasar algunas nociones implicadas en las representaciones. A continuación se trabaja en la Tarea 1.2 presentada en III.2.7.

La puesta en común de la actividad permite reflexionar sobre las distintas representaciones y las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas, llegando a la conclusión de que la representación a través de puntos ofrece una gran ventaja por su sencillez. Si, además, los puntos no están desordenados sino que forman una figura, es fácil saber rápidamente cuántos hay en una representación dada. Surge una gran riqueza de representaciones y pluralidad de modelos. El profesor sintetiza las ideas principales:

(S): "Todas estas son formas de representar los números que os he indicado, en algunas de estas representaciones ya se ve una estructura como en el caso de los tres dados, en el de las uvas vemos una estructura geométrica. Han aparecido modelos de puntos, de rayas, de cuadrados y de triángulos, de todo tipo de elementos, pero si nos fijamos bien el más fácil, rápido y sencillo de entender es el de los puntos, cada número puede estar representado por un punto, y los podemos ordenar de la forma que queramos".

Quedan enunciadas como ideas principales las siguientes:

* En un modelo "***se ve una estructura***"

* En un modelo "***se usan todo tipo de elementos***" con el criterio de que sea "***fácil, rápido y sencillo de entender***"

* "***Cada número (unidad) está representado por un punto***"

* "***Los puntos se pueden ordenar de la forma que queramos***"

Se ha continuado la operativización y ha surgido la idea de estructura como modo de organización de la representación; se han singularizado los objetos que forman el modelo y se ha dado prioridad a los puntos. La conclusión es que ***un modelo es un formato visual para una cantidad, que se realiza preferentemente con puntos.***

Se ha llevado a los alumnos a la idea de que es necesario algún modo de organización y esto se ha hecho proponiéndoles representaciones, analizándolas, clasificándolas y, finalmente, extrayendo conclusiones.

Finaliza en esta tarea la interpretación de la noción de modelo.

La tarea siguiente va dirigida a trabajar con representaciones puntuales:

> (A). "Representad los números 6, 9 y 15 utilizando puntos, siguiendo una pauta o patrón
>
> y, siempre que sea posible, repetid el patrón con los distintos números"

Surge una nueva idea la de ***patrón o reiteración de un modelo***, que se presenta de modo redundante "***repetid el patrón***". En este caso los alumnos ya han resuelto sus dudas anteriormente y comienzan a trabajar sin pedir aclaraciones; sin embargo, en los ejemplos propuestos aún siguen empleando algunas representaciones figurativas inadecuadas.

Tercera Sesión

Esta sesión tiene lugar el día 11 de Mayo de 1992, transcurrida una semana desde la sesión anterior.

Se analizan de nuevo los ejemplos propuestos y se avanza un paso más en la noción de representación puntual geométrica; la discusión se centra ahora en considerar si los diferentes formatos geométricos son válidos para cualquier cantidad. Queda clara la idea de que cuando hay un criterio se sigue un patrón.

El análisis del trabajo realizado en la Sesión anterior da entrada a la Tarea 1.3. A su vez, los resultados de esta tarea plantean la necesidad de tomar decisiones sobre lo que se entiende por representación triangular; cuando se presenta el papel isométrico para realizar representaciones triangulares las actuaciones de los alumnos quedan encaminadas para las siguientes tareas. De este modo se proponen las tareas 2.1, 2.2 y 2.3 sobre las que los alumnos hacen propuestas e interpretaciones y provocan una interacción considerable.

Los alumnos utilizan el papel isométrico como espacio de representación fluidamente. Asimilan la noción de representación triangular, con alguna sorpresa para el caso del 1. Igualmente asimilan la notación de los números triangulares y su correspondencia con el ordinal o posición que ocupa en la secuencia. Ante la propuesta de nuevas consideraciones sobre números triangulares realizan una producción considerable.

El trabajo de la tarea 2.1 comienza con una consigna sencilla "*Vais a dibujar números que tengan forma de triángulo*". No se presentan dificultades en representar números triangulares ni en conseguir la secuencia de los mismos.

Al abordar el nombre de los números triangulares surge cierta dificultad en aceptar que 1 es un número triangular debido a que su representación, por un punto, no tiene forma de triángulo.

También surgen una pluralidad de códigos para simbolizar los números triangulares; dos ideas destacan: la necesidad de marcar el ordinal y la conveniencia de indicar la noción de triangularidad. La tarea 2.2 no presenta otras características peculiares.

La tarea 2.3 vuelve a presentar dificultades de interpretación:

> (C). "Se trata ahora de encontrar relaciones entre los números triangulares. Existen muchas, lo que veáis que se cumple lo escribís en el folio. Cuantas más relaciones encontréis mejor."
>
> (C): "Hay que tener en cuenta la tabla, los dibujos y los números. En ellos encontraréis cosas. Hay que mirar si la serie sigue, o no, un orden".
>
> (C): "Tenéis que escribir todo aquello que veáis, no os preocupéis ahora si está bien o no. Podéis fijaros en la serie de los números o en la de los dibujos".

Son necesarias tres consignas para superar la inhibición que se crea en los alumnos ante la propuesta que se les hace. Sin embargo, en este momento, la investigadora le interesa conocer qué conexiones localizan los alumnos entre números triangulares y qué argumentos justifican esas relaciones; no estamos interesados en observar las interpretaciones que hacen de relaciones propuestas por el profesor. Por ello, aunque hay desconcierto, se les reitera la petición de que ensayen, busquen y expresen. El trabajo de la clase es totalmente individual. El hecho de que no se realice puesta en común provoca que los alumnos vayan abandonando el trabajo conforme avanzan en su búsqueda de relaciones.

Cuarta Sesión

Esta Sesión tiene lugar el día 12 de Mayo de 1992, un día después de la tercera.

La cuarta sesión comienza con un comentario sobre el trabajo realizado en la sesión anterior y una valoración positiva del mismo. No se hace puesta en común por no condicionar el trabajo con números cuadrados que se presenta a continuación.

La tarea 2.4 - desglosada en 2.4a y 2.4b - sigue el mismo esquema ya empleado con los números triangulares, por lo que resulta conocido y el trabajo se realiza con mayor fluidez y precisión.

El profesor presenta tramas cuadradas como nuevas plantillas para trabajar sobre números cuadrados; en este caso se limita a ir marcando un cierto orden para las actuaciones de los alumnos e ir aclarando dudas. La mayor parte del tiempo se consume en realizar individualmente las tareas propuestas.

III.3.2. Observación.

Observando los resultados de los alumnos en el trabajo de la primera sesión sobre representaciones numéricas vemos que no aparece ningún caso de representación a través de puntos, cosa que nos hubiera llevado directamente a la actividad que teníamos programada para continuar. Se vió, en ese momento, la necesidad de introducir una actividad intermedia con objeto de preparar a los alumnos y que pudieran realizar con más facilidad la tarea programada.

Entre las expresiones intuitivas espontaneas de los escolares sobre representaciones numéricas no surge en esta sesión la representación puntual.

En la segunda sesión, aunque se sigue sin precisar la noción de modelo, se avanza un poco más en su clarificación: "*Olvidad las figuras*", sugiere un nuevo modo de organización de las unidades elegidas; "*más que el dibujo nos sirve la secuencia*". Esta organización de unidades simples -llamada modelo- visualiza una secuencia de números.

En las primeras sesiones observamos algunas limitaciones:

* Imprecisión del mensaje.
* Dificultad de abandonar las representaciones en figuras.
* Interpretación atomista: un modelo es un elemento sencillo que se repite.
* Interpretación global: un modelo es una figura que organiza elementos de manera reconocible.
* Inseguridad de los alumnos en la interpretación del mensaje.

La tarea siguiente a comienzos de la tercera sesión se realiza en un espacio de representación ya estructurado: la trama isométrica; cualquier representación de puntos agrupados sobre esta trama es un modelo, ya que se impone algún modo de organización. Por ello las ideas en este espacio quedan muy delimitadas; los patrones que se van a considerar son patrones geométricos planos y la discusión va a ir dirigida hacia el análisis de los dos patrones más sencillos: triangulares y cuadrados.

Los alumnos aceptan objetos progresivamente más abstractos y generales para representar cardinales. Utilizan puntos, rayas, cuadrados y triángulos como elementos en sus representaciones. Aceptan fácilmente la consigna de emplear solamente puntos en sus representaciones.

También aceptan la consigna de representar diferentes números siguiendo un pauta o patrón. Ante esta consigna realizan una variedad de representaciones.

III.3.3. Reflexión y análisis sobre la acción.

Un recuento de las distintas Categorías de Interacción Didáctica que forman las unidades de actuación proporciona los datos de la tabla 5, recogidos en el mismo orden de aparición:

Tabla 5: Unidades de Actuación y Categorías de Interacción Didáctica, en su orden de aparición

N	Categorías de contenido Matemático	Categorías de Interacción Didáctica	total
1	1. representación de números	M, C, A, C, IA, PC, R, A, IA, PC, S	11
2	2. representación puntual	A, PC, S	3
3	3 representación puntual geométrica	C, M, IA, R, S,	5
4	4. representación puntual de nº T	I, A, C, PC, R, S	6
5	7. nombre de números T	I, C, IA, I	4
6	10. regla de formación de T	IA, M, A, PC, A, PC	6
7	13. cálculo de T intermedio	C, I, A, C, C	5
8	5. representación puntual de nº C	M, R, C, A, C, PC	6
9	8. nombre de números C	M, I, A	3
10	11. regla de formación de C	C, A, C, C	5
			53

La unidad de actuación ***1 representación de números*** está organizada alrededor de dos actividades, lo que hace que el número de categorías que la forman sea mayor que en las demás unidades en las que sólo aparece una actividad. A excepción de esta unidad que tiene 11 categorías, el resto de las unidades de actuación presentan una media de 5 categorías. El trabajo global de este curso queda estructurado en 53 Categorías de Interacción Didáctica. Información destacable en esta tabla es la constatación de que el orden de las categorías establecido en la planificación no ha sido sustancialmente modificado, pero ha sido suficientemente flexible como para permitir los cambios y las modificaciones oportunas en cada momento. La tabla 6 presenta esta misma información de manera más resumida, en ella no aparecen ordenadas las categorías según su aparición sino que se tiene en cuenta solamente el número de las mismas.

Tabla 6 :Unidades de Actuación y Categorías de Interacción Didáctica de la fase de Acción.

CID CCM	M	I	A	C	PC	IA	R	S	total
1	x		xx	xx	xx	Xx	x	x	11
2			x		x			x	3
3	x			x		X	x	x	5
4		x	x	x	x		x	x	6
7		xx		x		X			4
10			xx		xx	X			5
13			x	xxx		X			5
5	x		x	xx	x		x		6
8	x	x	x						3
11			x	xxx					4
total	4	4	10	13	7	6	4	4	52

La tabla 2 análoga a la 4 en el apartado III.2.8, permite comparar y comprobar hasta qué punto se ha respetado en la Fase de Acción la Planificación realizada. Una comparación por filas muestra que no se ha considerado la unidad de actuación nº 14 que hace referencia al cálculo de un número cuadrado intermedio. El resto de unidades así como el orden de programación ha sido respetado. En todas la unidades de actuación -exceptuando la segunda- hay un aumento de Categorías de Interacción Didáctica, siendo mayor en la primera. Por término medio han aumentado dos categorías por unidad de actuación, pasando de una media de 3 en la planificación a una de 5 en la acción.

Por columnas, la información a destacar es que el aumento de categorías mencionadas se produce sobre todo en las consignas, el resto de categorías aumenta ligeramente y la Puesta en Común disminuye en 2. Este aumento de categorías que ha llevado de una planificación con 35 categorías a la implementación con 52 está justificada ya que la práctica es mucho más rica e imprevisible que cualquier programación, por minuciosa que esta sea.

Considerando que las categorías de IA y PC están formadas por preguntas, respuestas y/o sugerencias tanto del profesor como del alumno obtenemos la información de la tabla 7.

Tabla 7: Composición de las Categorías PC e IA en las distintas Unidades de Actuación.

Unidad de Actuación	PC				IA			
	PP	RA	PA	RP	PA	RP	PP	RA
1.	16	14	1	1	10	10		
2.	5	2						
3.							2	7
4.	8	7		1				
7.					0	3	2	5
10	3	7	1	1			1	3
13					2	1	3	1
5	9	8	1	1				
total	41	38	3	4	12	14	8	16

En la tabla 7 se observa que en la categoría de PC las preguntas están (fundamentalmente) a cargo del profesor, que realiza 41 preguntas, y el alumno se limita a responder, las respuestas son 38. En la categoría de IA, por el contrario, el alumno hace más preguntas que el profesor, contabilizándose 12 preguntas de los alumnos y 14 respuestas del profesor. Es destacable que en la IA los alumnos dan 16 respuestas.

Sumando los datos que se corresponden en las dos categorías aparece para el profesor: Preguntas (PP) 41+8=49 y respuestas (RP) 14+4=18, lo que supone un total de 67 intervenciones del profesor.

Para los alumnos: preguntas (PA) 12+3=15 y respuestas (RA) 38+16=54, lo que supone 69 intervenciones de los alumnos. Observamos que las preguntas realizadas tanto por profesores como por alumnos han sido seguidas de respuesta, manteniéndose un ritmo de interacción constante.

Para finalizar nuestra reflexión sobre el desarrollo de las sesiones que estructuran la Fase de Acción, hacemos notar el hecho de que se han tratado multitud de nociones singulares, organizadas en torno a dos ideas principalmente:

Primera: Noción de ***patrón geométrico puntual*** para la representación de números que ha surgido de la noción genérica de representación numérica.

Segunda: ***Estructura de relaciones en una secuencia de números que comparten patrón geométrico***; se ha planteado a partir de las nociones de números triangulares y de números cuadrados.

Recorrer con estos alumnos el camino que lleva desde la noción general de representación numérica a las nociones precisas de representación puntual geométrica y patrón de representación ha necesitado de los 2/3 del tiempo disponible en este curso. El desarrollo de la segunda idea ha ocupado 1/3 del tiempo y no ha concluido; en este caso necesitamos analizar las producciones de los alumnos para tomar decisiones pertinentes en orden a la planificación del próximo curso.

La organización en una figura geométrica plana, empleando puntos, se ha impuesto progresivamente como patrón de representación ya que un mismo formato resulta adecuado para diferentes números, y siempre se encuentran diferentes números para ese formato.

Se ha analizado la viabilidad de una forma concreta -el triángulo- para representar diferentes números. Al concluir esta parte del trabajo un patrón de representación es la organización de una cantidad de puntos con una figura geométrica determinada.

El desarrollo de la primera idea aunque, ha consumido mucho tiempo, se ha realizado mediante una interacción constante entre el trabajo personal y el intercambio de información de las puestas en común. Era una tarea necesaria, cuya extensión en el tiempo ha resultado superior a lo previsto, pero que tiene la ventaja de que no necesita repetirse.

La falta de experiencia y estudios previos en este campo ha hecho que nuestro avance haya sido algo más lento y cauteloso de lo usual.

Se ha logrado evitar la transmisión organizada de conocimiento, propia de la instrucción usual en matemáticas y que era la tendencia natural del profesor de la asignatura. También es cierto que nos ha faltado tiempo, otras dos sesiones al menos, para haber avanzado con los alumnos en el análisis de las relaciones propuestas. La participación de los alumnos ha sido estimulante y han puesto un interés considerable en dar respuestas con sentido a las propuestas hechas por el profesor.

III.3.4. Valoración y toma de decisiones

Las actuaciones y el interés mostrado por los alumnos nos hacen valorar positivamente la realización de esta fase. Aunque el tiempo empleado ha sido mayor que el previsto hemos apreciado esfuerzos importantes de los alumnos para comprender las ideas representadas y para trabajar sobre ellas; la riqueza de ejemplos obtenidos es, como se verá más adelante, considerable. Al concluir esta Fase quedan claras dos ideas: Primera, necesidad de analizar detalladamente las producciones de los alumnos mediante el empleo sistemático de las Categorías elaboradas para este estudio, con el fin de realizar una observación cuidadosa de dichas producciones y tipificar la comprensión mostrada por los alumnos. Segunda: conveniencia de continuar trabajando con estos alumnos sobre las configuraciones puntuales como sistema de representación de números, mediante el que se estudien determinados patrones numéricos.

La primera idea, impuesta por el interés, variedad y cantidad de producciones realizadas por los alumnos, nos lleva a decidir la continuidad de nuestro estudio en este curso. La segunda idea, derivada de las limitaciones asumidas en el desarrollo del trabajo para este curso, lleva a plantearnos la conveniencia de ampliar el estudio a un curso más.

III.4.- Fase de Observación

En esta fase presentamos un análisis de las tareas realizadas por los alumnos de 7º curso de E.G.B. durante las cuatro sesiones de trabajo en dicho nivel. Todas las tareas que se analizan han sido realizadas en el aula; algunas han sido objeto de una puesta en común con los alumnos; posteriormente, se recoge el material escrito elaborado para su análisis y valoración por parte de la investigadora. Los datos obtenidos en cada tarea se organizan según los diferentes apartados enunciados en las Categorías de Contenido Matemático (CCC) introducidas en el capítulo II. Nos interesa considerar las producciones de los alumnos desde la perspectiva de la comprensión mostrada, con el fín de analizar e interpretar el modo de organización y empleo que tienen los escolares sobre los distintos conceptos y procedimientos presentados. Cada una de las tareas no se estudia, por lo general, bajo una única categoría sino que suele analizarse mediante varias de ellas.

Pasamos a presentar la organización de los resultados obtenidos en cada tarea, de acuerdo con las categorías mencionadas. Pretendemos ver en cada caso la ***cantidad, calidad y diversidad*** de las respuestas; por ello presentamos esta información haciendo recuentos de frecuencias de los diferentes tipos aparecidos (estudio cuantitativo) y señalando las intuiciones más significativas mostradas por los alumnos sobre la comprensión de las nociones implicadas (estudio cualitativo).

III.4.1. Organización de los resultados obtenidos por tareas.

Tarea 1.1.

Recordar situaciones que estén relacionadas con números. Representar estas situaciones en el papel indicando a qué número se refieren y por qué.

Se pretende con esta primera tarea que los niños se familiaricen con distintas formas de representar los números. Queremos que el profesor no influya en esta labor sino que sean ellos mismos los que propongan formas distintas, de modo espontáneo.

Una vez concluida la actividad en el papel los niños exponen verbalmente lo que tienen escrito.

El análisis de las representaciones realizadas se hace de acuerdo con la primera Categoría de Comprensión del Contenido, que tiene los siguientes apartados:

1.a. Contextos numéricos que aparecen, o bien, situaciones distintas que los alumnos asocian con los números.

1.b. Complejidad de las representaciones que, los alumnos, emplean para los números, en particular, si surge, o no, algún modelo de forma espontánea y caso de que surjan ver cómo son dichos modelos.

1.c. Tamaño de los números empleados.

Atendiendo a estos apartados, sistematizamos los resultados obtenidos del modo siguiente:

1.a. Los contextos o situaciones asociadas con números aparecidas son:

* Como cardinal de un conjunto.
* Como figura que recuerda el símbolo del número (le hemos llamado contexto figurativo).
* Asociado a la idea de fracción.
* Como símbolo.
* Como fecha importante.
* Como medida.
* Como operación.

Un recuento de las frecuencias con que aparecen dichos contextos y el porcentaje de niños que las utilizan da los resultados de la tabla 8.

Tabla 8: Contextos, frecuencias y porcentaje de aparición.

Contexto	cardinal	figura	fracción	símbolo	medida	operación
Frecuencia	34	22	17	10	7	2
Porcentaje	97%	63%	48%	20%	6%	6%

Para 1.b. Complejidad de la representación. Se comprueba que cada uno de los alumnos realiza varias representaciones ya que son 35 alumnos los que participan en clase y tenemos 92 representaciones. En la mayoría de los casos toman números distintos, aunque también hay catorce casos de distintas representaciones para un mismo número.

Se observa, en una primera exploración de intenciones, que no son frecuentes las representaciones utilizando modelos; sólo en el contexto cardinal se aprecia algún indicio de lo que podría ser "un modelo". Se hacen las representaciones a partir de cuadraditos que se repiten bien en línea recta o formando una superficie, triángulos de manera aislada o unidos formando otras figuras, círculos separados o unidos (como en el caso de los aros olímpicos), incluso los diagramas de Venn contienen elementos que se repiten, si bien en estos casos la repetición se hace sin un orden concreto.

1.c Tamaño de los números. Por lo general, se trata de números pequeños, números de una cifra o, en todo caso inferiores a 20, o bien números grandes con fácil representación que corresponden principalmente a 100 o 1000, considerados como potencias de 10

Los números representados como:

* Una colección de objetos con números bajos como el 1, 2, 3, 5, el 6.
* Como lados de un polígono; también son números pequeños 3, 4 y 6.

Los números pequeños se visualizan rápidamente a través del dibujo.

En las representaciones de números grandes, se visualiza fácilmente el número. Así, por ejemplo, la representación de 100 como cuadrado de 10x10 y la de 1000 como cubo de 10x10x10.

Tarea 1.1b.

Representar los números 6, 9, 15, siguiendo una pauta, o modelo, para hacer dicha representación.

Pretendemos introducir a los alumnos en los modelos puntuales. Nos interesa, principalmente, ver si aparecen los modelos puntuales espontáneamente. Según la categoría 1.a consideramos:

i. Tipos de elemento que utilizan.

ii. Utilización de un mismo modelo, o no, para todos los números.

iii. Números que aparecen asociados a los modelos. ¿Qué sucede cuando un modelo no es útil para todos los números?.

Una vez corregida la tarea, tenemos:

i. Los elementos que los niños repiten como unidades para representar los números son de lo más variado, desde elementos simples como puntos, segmentos, triángulos pequeños, cuadrados pequeños, hasta figuras más complicadas como animales y objetos diversos.

Del recuento de estas representaciones obtenemos los datos de la tabla 9.

Tabla 9: Distintas unidades de representación, frecuencia y porcentajes.

Unidades de representación	objetos diversos	puntos	segmentos	cuadrados
Frecuencias	33	30	16	15
Porcentajes	94%	86%	46%	43%

ii y iii.- 19 alumnos utilizan (al menos una vez) la misma pauta para representar los tres números.

Cinco de ellos consideran los tres números dados como múltiplos de tres y hacen una representación en rectángulos 3x2, 3x3, 3x5 bien de puntos, bien de cuadrados.

Tres alumnos intentan una representación puntual para los tres números, en forma de triángulo, pero la solución que dan para el número nueve es dejar el punto del vértice sin poner.

Dos alumnos empiezan con un rectángulo para el seis, siguen con un cuadrado para el nueve e intentan otro cuadrado para el quince y, al no conseguirlo, dejan un vértice sin punto.

El resto de los que utilizan el mismo patrón para los tres números lo hacen de manera que repiten un objeto tantas veces como indica el número y al no darle una estructura concreta no se les crea ningún problema.

La representación utilizando puntos ha sido realizada por el 86% de los alumnos; sin embargo, en la mayoría de los casos estos puntos no se han organizado formando un patrón (sólo ha ocurrido en ocho casos).

Tarea 1.2.

Representar los números 6, 9, 15 utilizando puntos y siguiendo un patrón, siempre que sea posible repetir el patrón con los distintos números.

En este momento se ha fijado el punto como elemento básico más adecuado, que se ha de repetir cuando se representen los números. Centramos nuestra atención en los patrones, o configuraciones, que se pueden formar mediante los puntos, para ello utilizamos la segunda Categoría de Comprensión del Contenido, que tenía los siguientes apartados:

2.a. Tipo de patrón o figura (forma, dimensión,...)

2.b. Estructuración de las figuras (simetría, orden...)

2.c. Variedad de configuraciones en la representación de un mismo número. Unicidad de modelo para los tres números.

Una vez corregida la actividad encontramos los siguientes resultados:

2.a y 2.b. Hay algunas representaciones en donde los puntos están desordenados pero son poco frecuentes. Lo general es que dichos puntos estén organizados formando figuras; hemos obtenido para estos casos la siguiente clasificación:

* Puntos pintados desordenadamente.
* Puntos en línea recta.
* Contorno de figuras: Geométricas (triángulos, hexágonos); No geométricas (figuras simétricas, no simétricas).
*Superficies: Geométricas (triángulos, cuadrados, rectángulos); No geométricas (superficies simétricas, no simétricas).
* Puntos formando figuras tridimensionales.
* Configuraciones del dado y del dominó.

Por lo que se refiere al proceso de realización tenemos:

* Patrones con núcleo repetido. Esto es, se toma un motivo y se va repitiendo hasta obtener la representación total del número.
* Utilización del mismo modelo para los tres números.

El cruce entre algunos de estos tipos de representación proporciona los datos de la tabla 10.

Tabla 10: Cruce entre algunos tipos de representación.

	geométrico	no geométrico	total
lineal	24	7	31
contorno	26	43	69
superficie	38	5	43
cuerpo	4	-	4
total	92	55	147

Por lo que se refiere a figuras tridimensionales, 4 alumnos dibujan un cuerpo en el espacio, cuyos vértices son el número de puntos indicado.

2.c. En cuanto al proceso seguido tenemos:

9 alumnos toman un núcleo y, por repetición del mismo, obtienen toda la figura;

en 24 ocasiones los alumnos utilizan el mismo modelo para los tres números.

En la puesta en común de esta actividad se destacan los patrones que han obtenido los alumnos utilizando las formas cuadradas y triangulares, y se hace hincapié en el hecho de que no todos los números pueden ser representados a través de dichos patrones. Se enlaza de esta manera con la tarea de representar números en forma triangular sobre una plantilla isométrica.

Tarea 2.1.

Representar en la plantilla dos números de forma triangular distintos de 6 y 15.

Queremos conseguir con esta tarea una colección de, al menos, siete números triangulares con la aportación de todas las construcciones hechas por los alumnos. En la puesta en común se procura que los números vayan apareciendo de menor a mayor, queden ordenados y no presenten huecos en este orden.

El análisis de esta tarea se realiza de acuerdo con la categoría 5.a: Reiteración de una determinada forma en distintos tamaños, manteniendo un criterio uniforme para el cambio de tamaño. La mayoría de los alumnos ha dibujado más de dos números triangulares, dado que en la actividad segunda se pedía que siguieran dibujando y lo hicieron sobre la misma plantilla. No obstante, hay 10 casos que solo presentan dos números triangulares, aunque para la actividad segunda dibujan aquellos que necesitan y lo hacen en otro papel.

El T_1 no aparece de forma espontánea por lo que en la puesta en común el profesor hace ver que 1 es el primer número triangular.

La tabla 11 muestra la frecuencia con la que han aparecido los números triangulares de distinto orden.

Tabla 11: Frecuencia de aparición de los distintos números triangulares.

T_n	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{14}
f	22	5	4	8	19	15	9	3	6	3	2	1

El T_3 sólo ha aparecido 5 veces y T_5 8; esto es debido al hecho de pedirles que no construyeran los dos números triangulares que ya habían aparecido 6 y 15; por lo demás, el T_6 y T_7 han sido los más representados.

En cuanto al orden de aparición de estas representaciones se observa:

* 18 alumnos hacen una representación de los números de menor a mayor; que en 11 caso son consecutivos (no aparecen el 6 ni el 15) y en 7 casos presentan huecos.
* 8 alumnos hacen la representación de los números de mayor a menor; de ellas en 3 casos los números son consecutivos y en cinco dejan huecos.
* 8 alumnos hacen una representación donde los números dan "saltos", no llevan un orden ni creciente ni decreciente; de ellos, en 4 casos son consecutivos y en otros 4 casos presentan huecos.

Tarea 2.2.

Construir una tabla con tres filas de la forma siguiente:
En la primera colocamos por orden los nombres T_1, T_2, T_3, T_4
En la segunda fila, debajo de cada T el número que representa.
En la tercera fila, los dibujos de los triángulos de puntos que representan.

El objetivo aquí es doble: que se acostumbren a escribir en orden los datos y presentarlos de manera que se visualicen las tres secuencias nombres, números y figuras que los representan. Analizando la tarea de acuerdo con la categoría 5.b obtenemos que todos los alumnos han realizado la tabla correctamente. Las tablas se escriben unas veces en filas, como habíamos indicado, y otras en columnas; la serie de números llega hasta donde permite la superficie del papel que suele ocurrir entre el orden 5º y el 8º.

Tarea 2.3.

Encontrar relaciones entre los números triangulares.

Los alumnos, a la vista de los datos que tienen organizados en el cuadro, han de descubrir relaciones. Queremos comprobar qué relaciones son capaces de observar los alumnos en las representaciones de la secuencia tal como ha quedado ordenada.

Para realizar este análisis tomamos la categoría 11.a. "Relaciones entre las representaciones obtenidas con un mismo patrón", viendo en este caso las variedades de relaciones aparecidas. El trabajo realizado por los alumnos en esta actividad ha sido muy variado, proporcionando un total de 75 enunciados de relaciones diferentes; las respuestas las hemos organizado en tres grandes grupos y aparecen en la tabla 12.

Tabla 12: Respuestas dadas a la actividad 2.3. Frecuencias y porcentajes.

Grupos	Correctas	Incorrectas	Ininteligibles	Total
Frecuencia	57	9	9	75
Porcentajes	76%	12%	12%	

Las relaciones correctas hacen referencia a diferentes consideraciones, que nosotros hemos clasificado en los siguientes apartados:

* Relación entre el nombre del número triangular y los puntos de la base (R_1).

*Progresión que siguen los números que se van sumando (R_2).

* Relaciones de formación:

  - de tipo geométrico (R_3);
  - de tipo aritmético (R_4): sumando de 1 a n o sumando de n a 1;
  - indicios de expresión algebraica (R_5);
  - relación del tipo $T_n=n+T_{n-1}$ (R_6);

* Relación de divisibilidad (R_7).

* Otras relaciones (R_8).

Los datos obtenidos en cada uno de estos apartados aparecen recogidos en la tabla 13.

Tabla 13: Frecuencias y porcentajes de los distintos tipos de relaciones.

Tipo de Relación	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	Total
Frecuencia	5	3	20	10	3	8	8	1	58
Porcentaje	9%	5%	34%	17%	5%	14%	14%	2%	

Transcribimos a continuación los enunciados propuestos en cada uno de los apartados de la clasificación anterior:

Relaciones entre el nombre del número triangular y los puntos de la base (R_1):

(1 rep.) **"Para saber el nombre de cada número triangular cuentas los puntos de la base".**

(1 rep.) **"T_1 tiene en la base un punto. T_2 tiene de base 2. y así sucesivamente".**

(1 rep.) **"El número que acompaña a T es el número de puntos que tiene la base".**

(1 rep.) **"El número que tiene T es el de la base del triángulo".**

(1 rep.) **"La base del anterior mas un punto es la base del triángulo siguiente".**

Progresión que siguen los números que se van sumando (R_2):

(2 rep.) **"Cada vez que al lado del triángulo se le aumenta uno, va saliendo 2 puntos más, luego tres puntos más, 4, 5, 6, y así sucesivamente".**

(1 rep.) **"Los puntos de dentro van aumentando desde el T_4, dos más, tres más, cuatro más y así".**

Relaciones de formación.

Las relaciones que hemos llamado de formación son aquellos enunciados en los que se hace referencia al proceso de formación que se ha seguido para conseguir los números. En unos casos se utiliza una expresión aritmética y en otros casos una expresión geométrica. El mayor número de relaciones encontradas han quedado recogidas en este apartado.

Entre las de tipo geométrico (R_3) tenemos:

(10 rep.) **"Ir sumando cada vez un punto a la base"** (al decir suma se refieren a poner una fila de puntos como base que contiene un punto más que la base anterior). Algunos alumnos en lugar de llamarle base le llaman lado del triángulo.

(6 rep.) **"Ir aumentando los puntos de los triángulos. 2 puntos, 3 puntos, 4 puntos, 5 puntos etc".**

(2 rep.) **"Al triangular anterior se le pone una fila de puntos con un punto más".**

(1 rep.) **"A cada uno de los lados se le añade uno más".**

(1 rep.) **"A los puntos de la base cada vez se suma uno más".**

Por lo que a relaciones aritméticas de formación (R_4) se refiere tenemos:

(1 rep.) **"A los puntos de un lado se le suma uno y se suman los puntos totales y te da los totales siguientes".**

(2 rep.) **"Pones un número igual al de puntos de la base, ej. 5, y sumas 5 + 4 + 3 + 2 + 1 te da el triángulo equilátero 15".** (cada una de las respuestas presenta un ejemplo distinto.

(2 rep). **"Sabemos el valor sumando la base mas un número menos, así llegamos hasta uno"**.

(3 rep). **"A 1 se le suman 2, a 3 se le suman 3, a 6 se le suman 4, al 10 se le suman 5..."**

(2 rep). **"A uno se le suman 2, y cada vez uno más".**

En estos casos en los que se intentan sumar los números empezando por el más grande y llegando hasta 1, o empezando en 1 para llegar al mayor que tengan, aparecen indicios de expresiones algebraicas (R_5):

(1 rep.) **"Nºb de T_1 + Nºb de T_2 + Nºb de T_3 + y así hasta llegar al nº de T que desees".**

(2 rep.) **"(Nºb) + (Nºb-1) + (Nºb-2) + ... hasta llegar a 1".**

También hay relaciones de formación en función de la posición u orden que ocupa cada número triangular en la secuencia; la formación expresa el dato T_n mediante el valor de la variable n que establece el dominio de esta secuencia sumado con el término que le precede T_{n-1} (R_6):

(2 rep.) **"El número que tiene T debajo, se le va sumando al triangular anterior".**

(1 rep.) **"Se le va sumando al anterior el número del nombre del siguiente triángulo".**

(1 rep.) **"El valor más el nombre del siguiente te da el valor siguiente".**

(1 rep). **"Si al valor le sumamos el nombre del siguiente, te da su valor ejemplo: $T_7 = 28$, $28 + 8 = 36$ y $T_8 = 36$".**

(1 rep.) **"Si sumamos al número de T el valor te da el siguiente".**

(1 rep.) **"El número que tenga T se le suma al valor del triángulo y te da el siguiente triángulo".**

(1 rep). **"Al T_7 le sumo 8 y consigo T_8 y así todos los demás".**

Relaciones de divisibilidad (R_7):

(1 rep.) **"Todos los triangulares son divisibles por tres, de dos en dos".**

(1 rep.) **"T_2 y T_3 son divisibles por tres".**

(2 rep.) **"T_4 y T_5 son divisibles por cinco".**

(1 rep.) **"T_7 y T_8 son divisibles por dos".**

(1 rep.) **"T_9 y T_{10} son divisibles por cinco".**

(1 rep.) **"T_3 es seis veces menor que T_5".**

(1 rep.) **"T_3 y T_4 son divisibles por dos".**

Otras Relaciones (R_8):

(1 rep.) **"En los triangulares impares, el lado del triángulo por los puntos que tiene su altura, me da el total de puntos".**

No correctas:

(1 rep.) **"Para calcular T_{10}, si sabes T_7 sumas a T_7 10 y te sale T_{10}".**

(1 rep.) **"Para calcular T_{20} sumas $T_7 + 20$".**

(1 rep.) **"Para calcular T_1 se resta $T_3 - T_2$".**

(1 rep.) **"Si restas al T_6 el T_2 te da el T_1".**

(2 rep.) **"Para calcular T_{15} se multiplica $T_5 \times T_3$".**

(1 rep.) **"Para calcular T_6 multiplico $T_2 \times T_3$".**

(1 rep.) **"Si divides T_6 entre T_5 te da T_1".**

(1 rep.) **"Hay tres números consecutivos divisibles por tres y dos no, comenzando por el 1".**

No inteligibles:

(1 rep.) **"Se suma la base de los puntos. La suma de todos los puntos. Los números de T se suman".**

(1 rep.) **"Si al triangular 28 le cuentas los triángulos de tres que tiene dentro, te salen los triángulos, 3 que hay en total".**

(1 rep.) **"Según su orden, los lados son iguales. Casi todos son divisibles por tres".**

(1 rep.) **"Por ejemplo T_{20} pues 20 puntos de base y el mismo proceso para todos".**

(1 rep.) **"Multiplicando la base por un número".**

(1 rep.) **"El valor lo recibe según los puntos".**

(1 rep.) **"A T_4 le sumas lo que resta para llegar a T_{10} y a este le sumas los puntos totales del T_4 te da los totales del T_{10}."**

(1 rep.) **"A partir del T_1 se van sumando los puntos por dentro".**

(1 rep.) **"Sumando la base y restando la base así se sabe".**

Tarea 2.4a**.**

Representar sobre la plantilla números cuadrados.

Esta tarea, junto con la siguiente, son análogas a las realizadas sobre números triangulares, los objetivos también son análogos, por lo que el análisis de los resultados lo vamos a realizar utilizando el mismo procedimiento.

La tabla 14 muestra la frecuencia con que han aparecido los números cuadrados de los distintos órdenes.

Tabla 14: Frecuencia de aparición de los distintos números cuadrados.

C_n	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
f	22	36	35	36	34	30	28	21	3	1	2	1

Se puede observar en la tabla 14 que el C_1 no lo han considerado todos los alumnos, sólo 22 de los 36. El C_2 y el C_4 lo han considerado todos ellos. La mayoría de ellos llegan con la secuencia hasta el C_7 y muy pocos hacen términos a partir de C_8. En 6 de estas representaciones los números están en el mismo cuadrado viéndose el paso de uno al siguiente por aumento de una fila y una columna. Aparecen, además, 4 representaciones de rectángulos de la forma nx(n+1).

Tarea. 2.4b.

Encontrar relaciones entre los números cuadrados, relacionar además los números cuadrados con los triangulares.

En el mismo folio donde realizan la actividad anterior hacen esta otra, completando un cuadro similar al que hicieron con los números triangulares con tres filas; en una fila están los C_n, en la fila siguiente los números correspondientes y en la tercera fila los dibujos.

Se han presentado algunas diferencias notables con respecto al trabajo con números triangulares. Cuando establecen relaciones entre los números triangulares lo hacen a partir de las representaciones que ya tenían en el cuadro; sin embargo, en esta ocasión cada relación que enuncian está respaldada por un dibujo nuevo. Cuando tratan de relacionar triangulares con cuadrados, los consideran como figuras continuas, por lo que siempre el cuadrado se puede dividir en dos triángulos (o más) iguales. Este caso no se dió en los triangulares donde lo más importante eran los puntos, o sea, elementos separados.

En esta tarea sobre números cuadrados, los alumnos han enunciado muchas más relaciones que en la tarea anterior sobre números triangulares. Suponemos que han existido dos causas, fundamentalmente; han dispuesto de más tiempo y la actividad es análoga a la anterior. No obstante, el porcentaje de relaciones falsas es muy superior al de la actividad con números triangulares. Han enunciado 129 relaciones, de las que 57 no son correctas, 2 de ellas tienen difícil interpretación y 72 son correctas.

Vamos a clasificar las respuestas correctas y lo vamos a hacer de forma análoga a como hicimos con las respuestas de los números triangulares, utilizando los mismos códigos; en este caso no aparecen enunciados de relaciones tipo R_1 ni R_2 aisladamente. Los datos obtenidos en cada apartado están recogidos en la tabla 15.

Tabla 15: Distintos tipos de relaciones en números cuadrados; frecuencias y porcentajes.

Tipo de Relación	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	Total
Frecuencia	0	0	25	19	2	13	7	6	72
Porcentajes	0%	0%	35%	26%	3%	18%	10%	8%	

Transcribimos los enunciados en cada uno de los apartados considerados.

Relaciones de formación:

* De tipo geométrico, cómo se representan los números cuadrados (R_3):

(15 rep.) **"Para dibujar un número a partir de otro se aumenta una fila vertical y otra horizontal".**

6 de estas respuestas tienen el dibujo correcto pero se expresan mal cuando enuncian el procedimiento seguido.

(1 rep.) **"Al lado del cuadrado le sumas uno y te da el lado del otro cuadrado".**

(2 rep.) **"Partiendo de un punto avanzas un punto más y así se van formando los cuadrados".**

(7 rep.) **"Dentro de un cuadrado hay otro cuadrado, a partir de C_3".**

* De tipo aritmético, cómo se forma cada número cuadrado (R_4):

(11 rep.) **"El cuadrado sale de multiplicar el lado por sí mismo".**

(5 rep.) **"Aumentan de uno en uno y se multiplica el número por sí mismo.**

(3 rep.) **"Para saber de donde procede el número cuadrado se le extrae la raíz cuadrada".**

Relaciones en función de la posición que ocupa el número cuadrado, expresada por su índice que coincide con la base (R_5):

(1 rep.) **"El orden de los cuadrados coincide con el números de puntos del lado".**

(1 rep.) **"El lado tiene la medida del número que acompaña a la C".**

De tipo recurrente, cómo se forma cada número cuadrado a partir del cuadrado anterior (R_6):

(1 rep.) **"Se le suma al cuadrado dos de sus lados y un punto".**

(3 rep.) **"Para pasar de uno a otro se le extrae la raíz cuadrada al número, se le suma uno y el resultado se eleva al cuadrado".**

(1 rep.) **"Para hacer el cuadrado siguiente sabiendo los anteriores pones el cuadrado anterior más lo que le sumastes a este del anterior más dos".**

(8 rep.) **"Para pasar de C_1 a C_2 se le suma 3,**

de C_2 a C_3 se le suma 3 + 2 = 5,

de C_3 a C_4 se le suma 5 + 2 = 7. y así sucesivamente".

En una de ellas aparece la siguiente expresión:

1		4		9		16		25
	+ 3		+5		+7		+9	

Se presentan 2 respuestas de este tipo.

Relaciones de divisibilidad (R_7):

(2 rep.) **"El primer número representado acaba en cifra impar, el segundo en cifra par, el tercero en impar y así sucesivamente".**

(1 rep.) **"El cuadrado que se forma es múltiplo del número de puntos del lado".**

(1 rep.) **"C_2 es 1/4 de C_4".**

(1 rep.) **"C_1 es 1/4 de C_2".**

(1 rep.) **"C_3 es 1/4 de C_6".**

(1 rep.) **"C_4 es 1/9 de C_{12}".**

Otras Relaciones (R_8).

(1 rep.) **"De un cuadrado salen más cuadrados pequeños y también triángulos".**

(1 rep.) **"Un número cuadrado es una potencia de exponente dos".**

(1 rep.) **"Los números cuadrados se relacionan con los números pitagóricos".**

(1 rep.) **"Los cuadrados y los triangulares tienen en común que los dos llevan el nombre del número de la base".**

(1 rep.) **"C_2 al cuadrado da C_4".**

(1 rep.) **"Si a C_3 se le extrae la raíz cuadrada, se le suma uno al resultado y se eleva al cubo lo que sale es un número cuadrado C_8".**

No correctas.

Las relaciones no correctas las podemos clasificar igualmente en los siguientes tipos:

Relaciones de formación, de tipo geométrico (R_3)

Relaciones de formación, de tipo aritmético (R_4).

Relación entre distintos números cuadrados (R_9).

Relación entre números cuadrados y triangulares (R_{10}).

Los datos quedan recogidos en la tabla 16.

Tabla 16: Relaciones no correctas en números cuadrados; frecuencias y porcentajes

Tipo de relación	R_3	R_4	R_9	R_{10}	Total
Frecuencia	5	8	20	24	57
Porcentaje	9%	14%	35%	42%	

Las respuestas en cada uno de estos tipos han sido:
Relaciones de formación, de tipo geométrico (R_3):

(1 rep.) **"Partiendo de un punto y avanzando un punto se puede formar un cuadrado".**

(1 rep.) **"Haciendo grupos de cuadrados de nueve se puede formar otro más grande".**

(1 rep.) **"Los pares solo se pueden dividir en 4 partes, los impares en ocho partes iguales".**

(1 rep.) **"Los pares se pueden dividir en 4 partes, los impares en 16".**

(1 rep.) **"Partiendo de un mismo punto y avanzando un punto más nos da el cuadrado".**

Relaciones de formación de tipo aritmético (R_4):

(1 rep.) **"A cada lado le vas sumando uno y te da el próximo".**

(1 rep.) **"Va aumentando el mismo número de puntos en todos los lados".**

(1 rep.) **"A cada lado se le suma el doble del primero, el triple, el cuádruple..."**

(1 rep.) **"El orden de los cuadrados se va multiplicando por uno, por dos, por tres..."**

(1 rep.) **"Ir sumando dos puntos a cada cuadrado. Ejemplo: $C_3 = C_2 + 2$".**

(1 rep.) **"La diagonal de uno al siguiente es siempre uno más".**

(1 rep.) **"Para averiguar los puntos de uno se va sumando siempre dos más (que son los pares)".**

(1 rep.) **"Para formar un cuadrado a partir de otro es lo que le sumas a un cuadrado más dos".**

Relaciones entre distintos números cuadrados (R_9):

(1 rep.) **"$C_3 = C_2 \times 2$".**

(1 rep.) **"$C_x = C_2$ + (2.Nº de cuadrados)".**

(1 rep.) **"A partir de C_2 se añaden dos puntos más".**

(1 rep.) **"$C_3 = 1/2C_2 + 7/2C_2$".**

(1 rep.) **"Dividiendo el cuadrado en un cuadrado de cuatro puntos te sale el número anterior".**

(1 rep.) **"Los números cuadrados se pasan de uno en uno".**

(1 rep.) **"Si multiplicas un número cuadrado por otro número cuadrado, te da otro numero cuadrado".**

(1 rep.) **"Si dividimos el cuadrado en un cuadrado de cuatro puntos te sale el número anterior".**

(1 rep.) **"Dentro de cada cuadrado te sale otro cuadrado que va aumentando también de uno en uno".**

(1 rep.) **"En el interior de un cuadrado hay tantos cuadrados pequeños como puntos tiene el anterior".**

(1 rep.) **"El C_1 está cuatro veces en C_2, el C_2 está cuatro veces en C_3, el C_3 está cuatro veces en C_5".**

(1 rep.) **"Un cuadrado contiene dentro un número de cuadrados 2x2 igual al número de puntos del anterior".**

(1 rep.) **"C_3 es doble de T_3".**

Esta misma relación la da el mismo alumno con C_7, C_8, y C_{15}.

(1 rep.) **"Cada vez el cuadrado se va haciendo más grande y tiene dentro a otro cuadrado más pequeño".**

(1 rep.) **"C_6 tiene dentro de él 12 C_2".**

(1 rep.) **"Cada cuadrado se le va sumando el doble de cuadrados, el triple..."**

(1 rep.) **"C_2 es 1/16 de C_{12}".**

(1 rep.) **"Si dividimos un cuadrado en un cuadro de cuatro puntos, sale el número anterior".**

(1 rep.) **"Si al número cuadrado se le extrae la raíz cuadrada, se suma uno y se eleva al cubo te da el otro número cuadrado. Ejemplo: C_3 = raíz de 9 =3 + 1 = 4 x 4 x 4 = 64 = C_8".**

(1 rep.) **"$C_3 = 1/2C_2 + 7/2C_2$".**

Relaciones entre cuadrados y triangulares:

(1 rep.) **"En un cuadrado hay siempre dos triángulos con los mismos puntos y si ponemos en orden los cuadrados, los triángulos también siguen ordenados".**

(1 rep.) **"A partir de los cuadrados impares salen un triangular".**

(1 rep.) **"Los triangulares respecto de los cuadrados aumentan uno menos"**.

(2 rep.) **"El número triangular es la mitad del cuadrado".**

(1 rep.) **"El número triangular es la cuarta parte del número cuadrado".**

(1 rep.) **"El número triangular es 1/6 parte del número cuadrado".**

(1 rep.) **"Si dibujas las diagonales a los cuadrados te salen triangulares".**

(1 rep.) **"Los cuadrados con lado impar tienen dentro tres triángulos".**

(1 rep.) **"Cada número cuadrado está formado por dos triangulares unidos por la base".**

(1 rep.) **"Los cuadrados que tienen lado impar son cuatro veces más grandes que un triangular de base el lado del cuadrado".**

(1 rep.) **"Un cuadrado contiene el doble de triángulos que sus cuadrados 2x2".**

(1 rep.) **"T_5 es 1/4 de C_5".**

(1 rep.) **"T_2 es 1/2 de C_2".**

(1 rep.) **"En un cuadrado hay dos triángulos que su base va aumentando en uno".**

(1 rep.) **"En los cuadrados hay muchos triángulos de tres puntos que van aumentando, el número de triángulos que se le suma es de cuatro unidades".**

(1 rep.) **"T_3 es 1/2 de C_3".**

(1 rep.) **"C_3 tiene dentro $8T_2$".**

(1 rep.) **"De triangulares isósceles se forman cuadrados".**

(1 rep.) **"En un cuadrado impar te salen cuatro triángulos isósceles en los pares no".**

(1 rep.) **"Si haces un triángulo equilátero y de ahí quieres sacar un cuadrado haces la mitad del triángulo por cada lado".**

(1 rep.) **"Los triangulares se pueden meter en los cuadrados impares cuatro veces".**

(1 rep.) **"El triangular es la mitad del número cuadrado".**

(1 rep.) **"El triángulo 1/8 del número cuadrado".**

Corresponde ahora enjuiciar y valorar la información que hemos presentado al observar y organizar el trabajo de los alumnos. De nuevo consideramos las diferentes tareas antes de pasar a una valoración global. Los resultados de cada tarea se analizan en función de la comprensión que se expresa en cada una de ellas.

III.4.2. Análisis y reflexión sobre el trabajo de alumnos.

Este juicio corresponde a la información que se presenta en el apartado III.4.1. Vamos analizando los resultados de cada tarea en función del objetivo u objetivos de comprensión que se pretenden con cada uno de ellas.

La tarea 1.1 tiene como objetivo obtener propuestas espontáneas, de los alumnos, sobre distintas formas de representar los números. El trabajo realizado proporciona la siguiente información:

* La representación de números se ha hecho en 6 contextos o situaciones numéricas diferentes.
* Los números empleados son inferiores a 20 o potencias de 10.
* Se han propuesto 92 representaciones distintas.
* No surgen modelos de forma espontánea ante una primera propuesta; en el juego de las representaciones hay situaciones más intuitivas que las de un esquema organizado de elementos sencillos, aunque hay casos en los que se produce una aproximación.
* El punto como representación de la unidad no surge tampoco de modo natural.

El objetivo de la tarea 1.1_b es provocar la aparición de una pauta o modelo para la representación de números. Ante la propuesta concreta de ajustarse a un modelo -con la indeterminación ya puesta de manifiesto- encontramos:

* Una simplificación para los elementos elegidos para la representación y una sistematicidad en el uso de determinados elementos -palotes, cuadrados, círculos y puntos-.
* Un comienzo de la organización de los elementos según un modelo geométrico, tratando que los tres números se ajusten al mismo modelo; la frecuencia de acierto es aún baja.
* Han realizado 94 representaciones distintas.

En la tarea 1.2 comienza el uso de la trama isométrica como espacio de representación sobre el que trabajar; el objetivo consiste en descubrir patrones con los que representar distintos números sobre la trama. Del total de las 147 representaciones obtenidas destacan dos factores para su análisis.

* Formato de la representación: geométrico/no geométrico.
* Dimensiones de la figura: lineal, contorno, superficie o volumen.

Las representaciones surgen con algún tipo de estructuración, aunque el 20% de ellas tienen una organización simple, limitada a la linealidad.

Descubierto un modelo, en algún caso se repite para representar los tres números, pero la frecuencia es aún baja.

La tarea 2.1 tiene como objetivo trabajar sobre el patrón triangular.

El primer paso se produce con la elaboración del modelo triangular común para los números 6 y 15 y, a continuación, se emplea de manera coherente para la representación de nuevos números; esta comprensión la realizan la mayor parte de los alumnos antes de la puesta en común.

Hay un total de 97 respuestas diferentes; sobre ellas observamos:

* La representación triangular mayoritaria se produce para el número 3.
* Los números 21 y 28 se representan con una frecuencia mayor al pedir la reiteración del modelo.
* El número 10 tiene una frecuencia muy baja; parece no percibirse que entre 6 y 15 hay un hueco; el modelo se prolonga llegando hasta el 15, pero no se considera aún que haya una pauta con la que surjan los distintos números; puede que la consigna de no repetir la representación de 6 y 15 justifique este olvido.
* Hay un rechazo a considerar 1 dentro del patrón triangular.

La tarea 2.2 se propone ordenar y simbolizar la secuencia de números triangulares.

Su tratamiento se hace de forma rápida ya que los alumnos no encuentran dificultad en las tareas que se les proponen. El trabajo en el aula en este momento es mecánico y de bajo nivel ya que no se pide a los alumnos que hagan algún análisis sobre la estructura de los números que forman la secuencia, ni tampoco alguna reflexión sobre el significado aritmético del patrón que comparten estos números. Se pierde una ocasión para explicitar la comprensión lograda por los alumnos sobre el denominado *patrón triangular*.

Todos los alumnos realizan bien esta tarea, las respuestas se diferencian en la forma de hacer la tabla, unos la hacen de manera horizontal y otros de manera vertical.

El objetivo de la tarea 2.3 consiste en explicitar los significados que los alumnos atribuyen a la expresión *relaciones entre números triangulares*. Encontramos diferentes interpretaciones en las producciones de los alumnos.

En un primer caso, hay alumnos que destacan la relación que existe entre los puntos que forman la representación de cada número triangular y el nombre del número; así, hay 5 enunciados en los que se señala que el nombre del número coincide con el número de puntos que hay en la base de su representación; igualmente, hay tres alumnos que expresan que hay un aumento del número de puntos al ir creciendo el triángulo.

En un segundo caso se presentan una familia de argumentos que responden a la cuestión destacando algún modo de relación para la formación de los números triangulares. Se identifica en estos casos la relación de formación con la idea de *patrón triangular*, dotando de significado a la expresión "*relación para formar los números que se ajustan al patrón triangular*".

Los argumentos empleados son los siguientes:

A_1: *argumento geométrico*; el significado se fija sobre una relación que aparece en la figura geométrica correspondiente; lleva una ilustración junto a cada explicación.

A_2: *argumento aritmético*; el significado se establece sobre una relación aritmética que sirve para obtener un nuevo número triangular, sin prescindir de la referencia geométrica.

A_3: *argumento geométrico-algebraico*; el significado se establece identificando el dato *puntos de la base* como una variable -b- en función de la cual se establece el total de los puntos.

A_4: *argumento ordinal;* cada número se identifica con la posición que ocupa en la secuencia, que viene dado por su subíndice. En este caso el valor de cada T_n se quiere dar en función de la variable n.

A_5: *argumento recurrente*; cada término de la secuencia se expresa en función del término anterior mediante alguna expresión recurrente.

En el caso de los números triangulares A_4 y A_5 aparecen conjuntamente, con la ley $T_n=T_{n-1}+n$ que de, un modo u otro, se establece. La conjunción de A_4 y A_5 proporciona un argumento funcional para dotar de significado la noción de relación de formación de los números triangulares.

Un tercer caso lo proporcionan aquellos alumnos que establecen relaciones de divisibilidad entre distintos números triangulares. Son relaciones sencillas y todas ellas correctas.

Un cuarto caso descubre una "formula" para obtener el total de puntos de los números triangulares impares, mediante reajuste al caso discreto de la fórmula que permite calcular la superficie de un triángulo.

El quinto caso lo proporcionan aquellos alumnos que tratan de establecer relaciones aritméticas entre distintos números triangulares. Todas las relaciones propuestas son incorrectas; de ellas 4 son aditivas y 5 multiplicativas.

Finalmente, hay un sexto caso en el que incluimos los enunciados tentativos, es decir, que tratan de expresar de algún modo una relación sin conseguir completar la idea. Entre estos enunciados tentativos encontramos:

Los que hacen referencia al proceso de formación mediante suma de números consecutivos; (1º, 4º, 8º y 9º enunciados).

Los que ponen el énfasis en la consideración de la figura y su análisis en términos geométricos. (2º, 3º y 5º enunciados).

Los que expresan una idea general, sin interpretación especial (6º enunciado).

Enunciados absurdos (7º enunciado).

La producción recogida con esta tarea indica un esfuerzo de reflexión considerable por parte de los escolares, con intuiciones muy claras sobre cómo expresar el número de puntos -o el valor numérico- de los números triangulares. Destaca especialmente la siguiente idea: la virtualidad de la correspondencia entre el patrón de representación puntual y la expresión aritmética, que produce una integración de expresiones y de argumentos entre estos dos sistemas simbólicos diferentes para la representación de números. La falta de tiempo para una puesta en común pospone, inevitablemente, la exploración sistemática de estas conexiones para el curso próximo.

Tarea 2.4.a. Su objetivo consiste en estudiar el orden y la simbolización en la secuencia de números cuadrados. La facilidad aparente con la que los alumnos realizan esta tarea llevó a no dedicarles un tiempo especial en el aula y por ello su análisis queda reducido a facilitar el trabajo en la siguiente tarea.

La tarea 2.4.b. establece dos objetivos. Primero: encontrar relaciones entre números cuadrados; segundo: encontrar relaciones entre números cuadrados y triangulares.

Esta tarea se ha realizado mediante trabajo libre, no dirigido; la producción de relaciones se ha hecho espontáneamente, sin intervención del profesor. Respecto a la tarea análoga con números triangulares se ha pasado de 76 a 129 enunciados, es decir, la capacidad de buscar relaciones ha aumentado, pero el porcentaje de respuestas correctas ha pasado de 77% a 55%, lo que supone una disminución considerable. Se echa muy en falta una puesta en común en la que se expliciten los diferentes argumentos, y reflexiones sobre los diferentes significados y se sinteticen las ideas básicas. En conjunto puede decirse que la riqueza y variedad de relaciones contemplada por los alumnos ha sido considerable. Las respuestas más interesantes se agrupan en torno a la familia de argumentos que destacan la relación o relaciones que se pueden considerar para la formación de los números cuadrados, identificando de nuevo la relación de formación con la noción de *patrón cuadrado*.

Los argumentos utilizados ya aparecieron en los números triangulares:

A_1: *argumento geométrico*; el significado se fija sobre la figura geométrica, que se presenta en una ilustración.

A_2: *argumento aritmético*; en este caso es una expresión aritmética la que fija el significado.

A_3: *identificación de los puntos de la base como valor variable*, mediante el que se establece el total de puntos.

A_4: *identificación de las posición* que cada número cuadrado ocupa en la secuencia, dado por su subíndice.

En el caso de los números cuadrados A_3 y A_4 aparecen conjuntamente; no hay distinción entre el subíndice, la posición en la secuencia y el número de puntos de la base; los tres se utilizan indistintamente, dando lugar a un sólo tipo de argumento.

A_5: *argumento recurrente*; cada término de la secuencia se expresa en función del término anterior, llegando en un caso a considerarse las diferencias segundas entre los términos de la secuencia.

Se observa en este análisis una diferencia entre las ideas que destacan en la comprensión del patrón triangular y la comprensión del patrón cuadrado, si bien el peso de los argumentos geométricos es considerable en ambos.

Un segundo caso de respuestas son las que establecen relaciones de divisibilidad entre números cuadrados, todas ellas correctas.

El tercer caso está formado por enunciados generales, puramente descriptivos y que totalizan 6 respuestas.

El cuarto caso está constituido por relaciones entre distintos números cuadrados incorrectas o enunciadas deficientemente.

Finalmente, y en relación con el segundo objetivo de esta tarea, se presentan 24 enunciados incorrectos o insuficientes.

III.4.3. Valoración y decisiones.

El equipo investigador, al finalizar la fase de observación, determina agrupar las producciones de los alumnos en seis apartados:

I.- Constatación de hechos: el nombre de un número se establece contando los puntos de la base, o algún otro dato.

II.- Representación estructurada de números, mediante una simplificación del elemento que se toma como unidad y la organización de esas unidades.

III.- Argumentos que explican la formación de números triangulares/cuadrados: Predominan cinco argumentos:

A_1 =*Argumento geométrico.*

A_2 =*Argumento aritmético.*

A_3 =*Argumento geométrico/algebraico.*

A_4 =*Argumento ordinal.*

A_5 =*Argumento recurrente.*

Conviene destacar la fuerte conexión que se establece entre representaciones geométricas y expresiones aritméticas; ambos sistemas se presentan fuertemente interconectados, superando -en ambos casos- el 50% de las respuestas de los alumnos

IV.- Relaciones de divisibilidad.

V.- Otras relaciones aritméticas.

VI.- Enunciados tentativos, que no completan la idea que se quiere expresar o la enuncian incorrectamente.

Estos apartados son adaptación y dan respuesta a los criterios de valoración enumerados en III.2.4.

Aunque en la organización de la información no se ha destacado que los modelos estructurados no sólo representan un número sino también un desarrollo aritmético del mismo, la comprensión de los alumnos se dirige claramente en esta dirección y hay suficientes evidencias de ello.

Se trata de una idea compleja que los alumnos perciben intuitivamente pero que no han tenido tiempo de explorar con detalle y darle expresión adecuada. La exploración de relaciones ha puesto de manifiesto un núcleo de comprensión no previsto en la planificación inicial, que habrá que desarrollar en el próximo curso: cada representación puntual geométrica lleva a una espresión aritmética y recíprocamente. Explorar esta vía se presenta como un argumento fuerte para continuar este estudio el curso próximo, así como ampliar el estudio sobre los aspectos antes citados.

III.5. Fase de Reflexión.

Corresponde ahora reformular críticamente el plan de trabajo de cuya planificación y realización hemos informado. Para ello hemos diseñado nuestro trabajo de manera que disponemos de una base documental sobre la que llevar a cabo esta fase de reflexión.

Según el esquema metodológico expuesto en el capítulo anterior, con la reflexión debemos dar sentido a los procesos, los problemas y las restricciones que se han manifestado en la acción; también proporcionar una valoración de las circunstancias en las que se ha llevado a cabo la acción y sus efectos; finalmente, esta etapa establece el camino a una nueva planificación, para la que debemos establecer unas condiciones generales, fundadas en la información lograda en el trabajo de este curso.

Nuestra intención en este momento se centra en formular juicios de hechos y no juicios de valor.

Recordemos que el sistema de categorías diseñadas para nuestro estudio incluía:

Categorías de Interacción Didáctica (CID), con las que analizar las previsiones y las realizaciones en la comunicación profesor/alumno.

Categorías de Contenido Matemático (CCM), con las que organizar y analizar los contenidos que se trabajan en clase.

Categorías de Comprensión del Contenido (CCC) con las que evaluar el significado atribuido por los alumnos a los diferentes contenidos, así como el grado de comprensión alcanzado.

Concluyamos con la elaboración conscientemente de nuestro trabajo en 7º de E.G.B. haciendo una referencia crítica del mismo, completando de esta manera nuestra historia. Para ello hacemos una revisión general del trabajo realizado.

III.5.1. Revisión general del proceso.

Hay varias indeterminaciones en la Planificación Inicial; entre ellas podemos señalar:

Enunciado impreciso y excesivamente genérico de los objetivos 3º y 4º.

Enunciados amplios para los contenidos 1º, 2º y 3º; sólo con estos contenidos se cubren, fácilmente, todos los objetivos. Los contenidos 4º, 5º y 6º de enunciado más concreto, resultan imprecisos.

El objetivo de la investigación queda mejor establecido con la planificación de la secuencia de actuación, que está elaborada con mayor precisión.

En esta secuencia inicial los números triangulares se presentan después de los números cuadrados y de los rectangulares; se ha mantenido el orden en el que se hizo la planificación, pero en su numeración se han adaptado a las categorías de contenido matemático -CCM-. Por ello los apartados correspondientes, aparecen en el orden siguiente:

5. Representación Puntual de Cuadrados.
6. Representación Puntual de Rectángulos.
4. Representación Puntual de Triángulos.
8. Nombre de los números representados en forma de cuadrado.
9. Nombre de los números representados en forma de rectángulo.
7. Nombre de los números representados en forma de triángulo.

El resto de los apartados aparece en la planificación en el mismo orden que se considera para las categorías CCM, o unidades de actuación.

En la planificación inicial se utilizan 21 de las 24 unidades de actuación consideradas, como puede verse en la tabla 1. En esta misma tabla se observa que la distribución de interacciones para las distintas unidades de actuación es poco regular.

La tabla 2, donde se contemplan los criterios que organizan las unidades de actuación, en un agrupamiento por bloques, permite observar:

* Una estructura metodológica común, basada sistemáticamente en la previsión de una, o varias, categorías de ***implementación***, seguidas por otra u otras categorías de ***socialización***.
* Las categorías de ***presentación*** se consideran una por criterio.
* Las categorías de ***sistematización*** no se contemplan más que en los primeros criterios.

Con esta planificación inicial se cubren dos objetivos: Primero, hacer una descripción general detallada de todos los conocimientos implicados en el estudio, proponiendo una organización secuencial de los mismos. De esta manera el equipo investigador delimita el objeto sobre el que va a trabajar y el profesor encargado de presentar los contenidos recibe toda la información necesaria. Segundo: hacer una propuesta metodológica adecuada para explorar detalladamente la comprensión alcanzada por nuestros escolares de 7º de E.G.B. sobre relaciones aritméticas mediante el sistema de representación generado por las configuraciones puntuales. Esto corresponde a los criterios de valoración i), ii) y iii).

El análisis de la estructura de la planificación pone de manifiesto esta doble función de la planificación: secuenciar las 21 unidades de actuación e investigar sobre la comprensión que se alcanzaría con las configuraciones puntuales sobre relaciones aritméticas. Sin embargo, esto no resulta explícito para el equipo investigador en el momento en que se hace esa planificación; tal y como se realiza se considera que hay que obtener información en profundidad sobre las 21 unidades de actuación.

Pero el propio hecho de realizar la planificación hace evidente lo desmesurado de tratar de llevar adelante el estudio de las 21 unidades; por ello, la revisión de la planificación impone la eliminación explícita de 10 de las unidades de actuación, limitando el estudio a las 11 que aparecen en la tabla 4. No se proponen, en este caso, modificaciones sobre metodología, ni tampoco se realiza revisión sobre las interacciones didácticas que se consideran para cada unidad. La fase de planificación cubre así algunas de sus funciones; entre las más destacables se encuentran la necesaria concreción y delimitación de un campo de estudio enunciado, inicialmente, en términos muy genéricos. Al concluir la fase de planificación quedan claras las metas siguientes:

* Necesidad de poner de manifiesto las intuiciones y conceptos previos que tienen los alumnos sobre representaciones de números, modelos y configuración puntual.
* Necesidad de explicitar la comprensión que logran, en general, sobre cada número cuando disponen de una representación del mismo.

* Destacar el conocimiento y dominio de propiedades aritméticas para los números que se ajustan a un patrón triangular o cuadrado.
* Dominio alcanzable sobre las leyes de formación de números dentro de la familia de los números triangulares y de los números cuadrados.

También hay una deficiencia organizativa que va a condicionar el desarrollo posterior: una idea directriz del trabajo propone recoger información de los escolares sobre intuiciones en las representaciones numéricas para, a continuación, enseñarles e instruirles de manera organizada sobre secuencias de números triangulares y números cuadrados. Esquemáticamente se trata de despertar y explorar las intuiciones para, a continuación, transmitir más conocimientos. Los investigadores no son conscientes en este momento -y no se preparan para ello- de la necesidad de explorar igualmente las intuiciones y conceptos previos sobre números que comparten estructura. En esta etapa hay algunos elementos conceptuales que intervienen en el tópico de investigación que no se presentan bien delimitados. La planificación inicial establece un marco de referencia en el que se hacen explícitos unos determinados problemas de comprensión sobre las nociones de *patrón geométrico para las representación numérica* y *relaciones entre los números que comparten patrón geométrico de representación*.

En cuanto a la propia planificación destacamos:

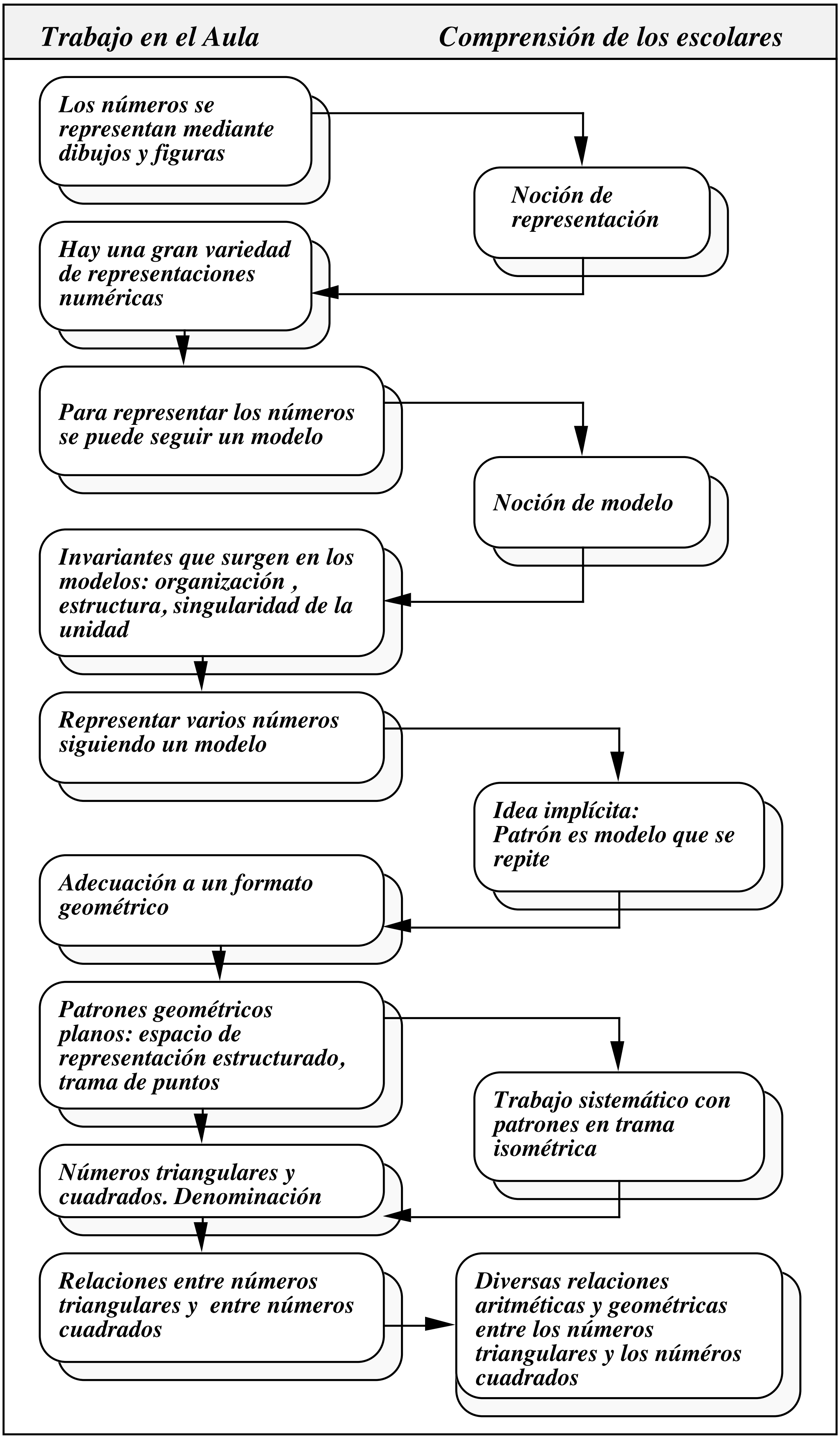
* Un número escaso de sesiones de trabajo y, por tanto, de tiempo.
* La metodología de exploración de intuiciones, debates y descubrimientos de los alumnos consume mucho tiempo, ya de por sí escaso.
* El profesor se encuentra desbordado por la riqueza de representaciones y la variedad de relaciones que los alumnos establecen, cosa que no estaba prevista.

Respecto al desarrollo de las clases señalamos:

* Alcanzar la noción de patrón lleva dos sesiones completas y 20 minutos de la sesión siguiente.
* No se puede trabajar con secuencias de números triangulares y cuadrados de manera adecuada con la organización del contenido propuesta.
* Se pone de manifiesto que las configuraciones puntuales constituyen un sistema simbólico estructurado para representar números, mediante el que se explican claramente determinadas propiedades.
* Se hace necesario revisar las Categorías de Contenido Matemático.

Respecto de las producciones de los alumnos hay dos cuestiones que resultan de especial interés:

* Los resultados alcanzados, la comprensión lograda, en el proceso de interacción didáctica, se pone de relieve en el siguiente esquema:


Trabajo en el Aula
Comprensión de los escolares
Los números se representan mediante dibujos y figuras
Noción de representación
Hay una gran variedad de representaciones numéricas
Para representar los números se puede seguir un modelo
Noción de modelo
Invariantes que surgen en los modelos: organización , estructura, singularidad de la unidad
Representar varios números siguiendo un modelo
Idea implícita: Patrón es modelo que se repite
Adecuación a un formato geométrico
Patrones geométricos planos: espacio de representación estructurado, trama de puntos
Trabajo sistemático con patrones en trama isométrica
Números triangulares y cuadrados. Denominación
Relaciones entre números triangulares y entre números cuadrados
Diversas relaciones aritméticas y geométricas entre los números triangulares y los númeos cuadrados

La potencialidad de los conceptos adquiridos se manifiesta en el segundo grupo de cuestiones sobre el que los alumnos muestran comprensión: encontrar relaciones entre números triangulares, encontrar relaciones entre números cuadrados y encontrar relaciones entre números triangulares y cuadrados.

La producción general de los alumnos por tareas ha sido como se muestra en la tabla 17:

Tabla 17: Producción de los alumnos en las distintas tareas

tarea	1.1	1.1b	1.2	2.1	2.2	2.3	2.4a	2.4b	total
frecuencia	92	94	147	97	36	76	249	126	917
porcentaje	10%	10%	16%	11%	4%	8%	27%	14%	

III. 5.2. Valoración del proceso.

La comprensión mostrada por los alumnos se puede resumir en los siguientes puntos:

1. Los números se representan; hay distintas interpretaciones intuitivas de la noción de ***representación***, que dan juego suficiente para expresar gráficamente números inferiores a 20 o bien las primeras potencias de 10.
2. Una progresiva simplificación del objeto elegido para representar una unidad, junto con una organización de estos objetos, sirven para precisar la idea -igualmente intuitiva- de un ***modelo de representación***.
3. La elección del punto como unidad proporciona un grado de simplificación y abstracción que permite centrar la consideración de cada representación en el modelo que expresa.
4. La trama de puntos isométrica o la cuadrícula, ofrecen un espacio estructurado para la representación en el que los modelos se organizan prioritariamente en formatos geométricos, a los que denominamos ***configuraciones puntuales***.
5. Durante todo este proceso el alumno está explorando y asumiendo un nuevo ***sistema de representación de números***. Una característica relevante del nuevo sistema consiste en la variedad de configuraciones puntuales que admite un mismo número.
6. Al representar diferentes números encontramos que algunas de sus representaciones responden a un mismo modelo. La similitud estructural de las configuraciones puntuales de números diferentes da origen a la noción de ***patrón***.
7. Un patrón de representación da origen a una ***familia de números***, caracterizados porque todos ellos admiten ser representados según ese modelo. Dado un patrón hay números que se ajustan a él y otros no lo hacen.
8. El ***patrón triangular*** es característico; tiene una regla de formación sencilla de enunciar y fácil de representar. Los números que se ajustan al patrón triangular constituyen una familia, que se expresa mediante notación simbólica específica y se presentan en secuencia ordenada.

9. Los números triangulares satisfacen unas determinadas ***reglas de formación*** que pueden expresarse geométricamente, aritméticamente, algebraicamente o mediante una relación de recurrencia.
10. Entre números triangulares se pueden considerar ***relaciones*** principalmente aditivas, o multiplicativas; la exploración de tales relaciones tiene interés heurístico propio.
11. El ***patrón cuadrado*** es, igualmente, relevante; tiene una regla de formación fácil de enunciar y de representar. Los números que se ajustan al patrón cuadrado constituyen una familia, que se expresa mediante notación simbólica específica y se presentan en secuencia ordenada.
12. Los números cuadrados satisfacen unas ***reglas de formación*** determinadas que se pueden expresar geométricamente, aritméticamente, algebraicamente o mediante una relación de recurrencia.
13. Entre números cuadrados y entre números cuadrados y triangulares, se pueden considerar ***relaciones*** aditivas, multiplicativas u otras; las exploraciones de estas relaciones ofrecen posibilidades heurísticas.

No todos los alumnos recorren completamente el programa anterior; los resultados observados nos muestran que los puntos 1 a 8 y 11 son comprendidos intuitivamente por los alumnos de este grupo: las nociones implicadas se emplean y utilizan significativamente; el nuevo código de representación numérico es asumido sin dificultad, al menos en los aspectos contemplados por nosotros en las Categorías de Comprensión del Contenido.

Los puntos 9, 10, 11, 12 y 13 ofrecen una variedad de producciones, argumentos e interpretaciones que muestran que la comprensión alcanzada por los escolares no es homogénea y presentan una variedad de errores y concepciones inadecuadas considerable.

La limitación del tiempo no ha permitido avanzar más en nuestro estudio durante este curso sobre la comprensión de los escolares en este campo.

Al mismo tiempo que se establece la viabilidad de las configuraciones puntuales como sistema de representación numérico, dotado de posibilidades expresivas variadas y de potencial heurístico para estudiar familias de números y analizar relaciones numéricas; también se pone de manifiesto la necesidad de estudiar de un modo más sistemático las secuencias numéricas definidas mediante un patrón, cosa que no se ha podido hacer en este curso. La adquisición del sistema de representación puntual ha necesitado más tiempo del previsto y no se ha podido trabajar a fondo con los números triangulares y cuadrados. Queda de manifiesto la necesidad de revisar todo el proceso para ajustar la planificación y la actuación a una adecuación con los hechos observados.

El modelo metodológico seguido ha mostrado su viabilidad heurística al permitir una valoración consensual, empírica y teórica al finalizar cada una de las fases, validando la decisión de pasar a la fase siguiente.

III.5.3. Conclusiones

Centramos este apartado en una serie de ***decisiones*** que nos parecen importantes para la continuación de nuestro estudio y la enunciación de ***logros*** más significativos conseguidos en este curso.

Decisiones.

La primera decisión hace referencia a la continuación del trabajo. Parece insuficiente el material recogido para establecer conclusiones sobre la comprensión de los alumnos respecto a las secuencias numéricas. La continuación del trabajo se estima importante.

La segunda decisión precisa un aspecto de la anterior: una vez decidida la continuación parece conveniente seguir el estudio con los mismos alumnos y así rentabilizar el trabajo realizado en este curso.

La tercera decisión establece la necesidad de revisar la planificación de manera que se tenga en cuenta el trabajo realizado y se eviten los errores detectados.

De acuerdo con las necesidades apreciadas en los alumnos se presenta con claridad la necesidad de revisar las Categorías de Contenido Matemático, ampliando este contenido o profundizando algunos apartados; esta es la cuarta decisión.

Hay dos orientaciones metodológicas que se quieren destacar en una próxima ampliación: potenciar el trabajo exploratorio y constructivo de los alumnos y limitar taxativamente la instrucción explícita por parte del profesor; estas dos orientaciones constituyen la quinta decisión.

Finalmente, la sexta decisión se refiere al acuerdo de sustituir al Profesor del Aula por el Investigador para la fase de Acción del próximo curso; este acuerdo se toma en base a garantizar una mayor flexibilidad en las intervenciones y orientaciones que se realicen en el aula fundadas en un mejor control de los contenidos.

Logros

El primer logro ha sido la constatación de una comprensión adecuada del nuevo sistema de representación numérico denominado ***configuración puntual***. Las nociones de representación, modelo, patrón y patrón geométrico han resultado funcionales y se han interpretado correctamente por parte de los escolares. Esto se ha manifestado con una diversidad de producciones considerables.

En segundo lugar, hay que señalar la riqueza de relaciones enunciadas para números triangulares y números cuadrados. En especial se destaca la conexión entre el patrón geométrico y el desarrollo aritmético como patrones correspondientes, que marca una línea de exploración para la continuación de este estudio.

En tercer lugar se ha mostrado la adecuación de las categorías elaboradas en nuestro modelo teórico para el análisis y valoración de las diferentes componentes del diseño curricular de nuestro trabajo, de su desarrollo y de los resultados obtenidos. Mediante la estructura y organización que han proporcionado las categorías mencionadas se han tomado decisiones fundadas para la realización de nuestro trabajo.

En cuarto y último lugar, el propio modelo estructurado según las fases de Planificación, Acción, Observación y Reflexión ha mostrado su potencial heurístico para llevar adelante nuestro trabajo.

Necesidad de continuar este estudio y validez global del modelo metodológico elaborado son las dos conclusiones principales, al finalizar esta fase de la investigación.

CAPITULO IV
ESTUDIO EN 8º NIVEL

IV.1. Introducción

En este capítulo se presenta un informe de las ***fases*** de ***planificación, acción, observación y reflexión*** correspondiente al trabajo llevado a cabo en 8º nivel y que constituye la segunda espiral de nuestra investigación, según el esquema diseñado correspondiente a la metodología de I-A.

El esquema general que sirve de guia en el desarrollo del trabajo y, como consecuencia, a este informe es el siguiente:

La ***planificación*** del trabajo da lugar a la primera parte de este capítulo. Consiste en la organización del contenido a tratar en el aula, su secuencia metodológica y las estrategias consideradas más idoneas a utilizar en su desarrollo.

La ***acción*** como desarrollo de las clases con la puesta en práctica de los actuaciones previstas en la fase de planificación da contenido a la segúnda parte de este capítulo.

La ***observación*** en referencia a los trabajos realizados por los alumnos durante las sesiones desarrolladas, da lugar al tercer apartado del capítulo.

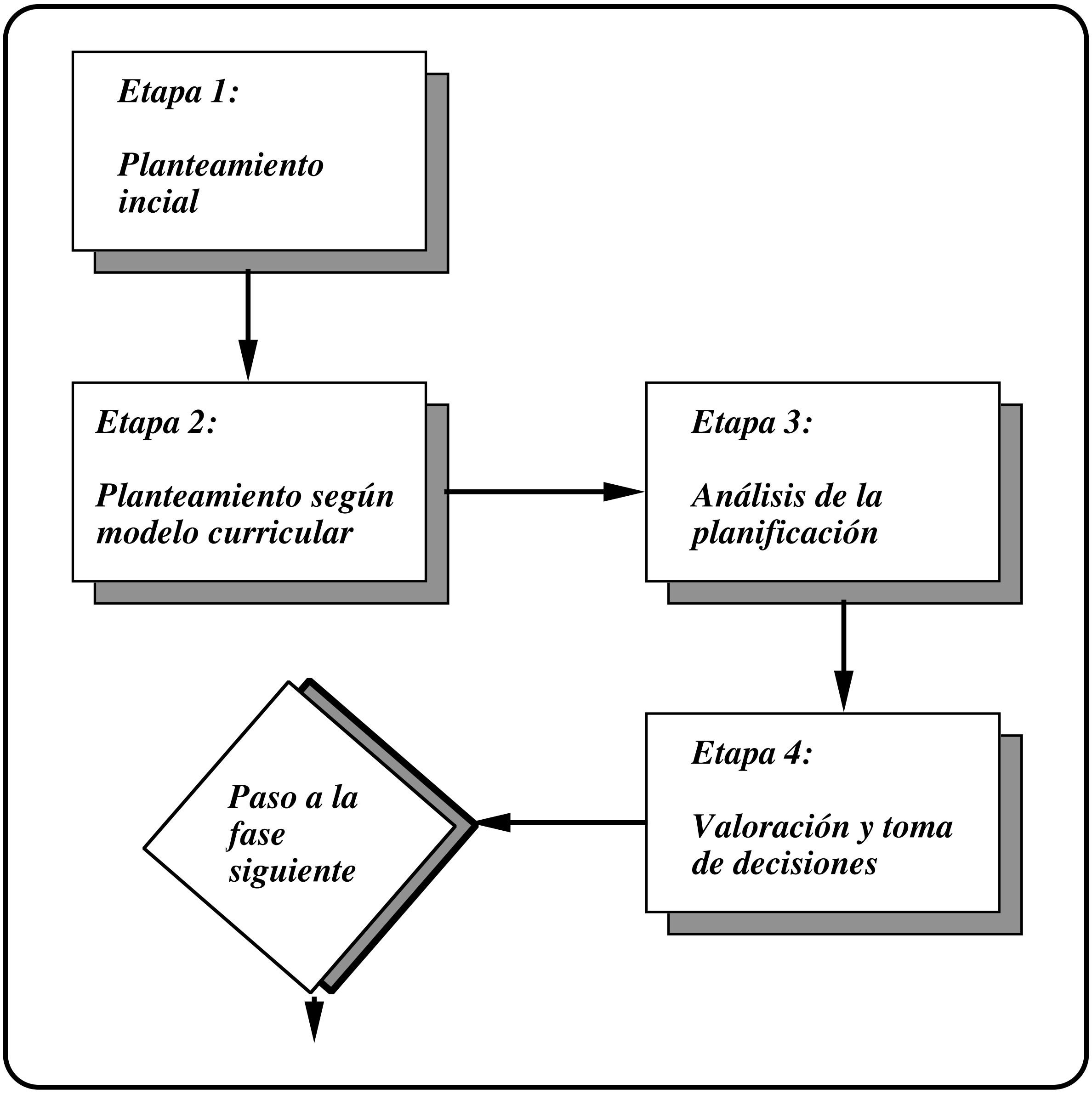
La ***reflexión*** y valoración crítica del trabajo llevado a cabo en 8º curso, da cuerpo al cuarto apartado.

La revisión y análisis realizado sobre el trabajo de los alumnos de 7º curso en la Fase de Reflexión, llevan al equipo investigador a una serie de conclusiones que inciden en el planteamiento y desarrollo de la investigación llevada a cabo en el curso 92-93.

Las dos decisiones más importantes afectan a que sea el investigador quien asuma las funciones de profesor durante las sesiones en las que se realice el trabajo de campo y a la revisión de los contenidos sobre los que van a trabajar los alumnos. Estas dos decisiones proceden de un hecho constatado en el curso 91-92: la necesidad de explorar en profundidad en la interconexión existente entre los modelos puntuales con los que se puede representar un número y los desarrollos aritméticos de ese mismo número. Los alumnos han mostrado en 7º curso una fuerte tendencia a trabajar sobre los dos sistemas simbólicos y a establecer relaciones entre ellos.

IV.2. Fase de Planificación.

La fase de planificación sigue un proceso en espiral que en esquema es como sigue:



IV.2.1. Planteamiento inicial.

El equipo investigador se reune el día 4 de Noviembre del año 1993 y toma las primeras decisiones, entre las que destacamos las siguientes:

Primera: profundizar en la comprensión que los alumnos tienen sobre la estructura de relaciones que se pone de manifiesto al representar un número mediante un patrón geométrico o un desarrollo aritmético y verificar la utilidad de este análisis en relación con el concepto más complejo de término general de una sucesión.

Segunda: limitar el trabajo a las sucesiones lineales y cuadráticas para lo es necesario un dominio matemático más amplio.

Tercera: no organizar las sesiones de trabajo como clases convencionales en las que se transmitan nuevos conocimientos, sobre los que a continuación se realizan una serie de ejercicios que permitan un adiestramiento.

Cuarta: explicitar las distintas interpretaciones y organizaciones que hacen estos alumnos con los nuevos sistemas de representación: patrones numéricos y desarrollos aritméticos, cuando se les proponen una serie de reflexiones sobre secuencias lineales y cuadráticas.

Nuestra preocupación temática queda delimitada por:

el trabajo con ***dos conceptos matemático***

* secuencias lineales
* secuencias cuadráticas

con ***tres sistemas simbólicos de representación***:

* patrones puntuales
* secuencia usual de números
* desarrollos aritméticos

sobre ***cinco actuaciones o procedimientos fundamentales***: *

traducción de los términos de una secuencia de uno a otro de los sistemas de representación

****continuación*** de una secuencia

****extrapolación*** de un término de la secuencia

****expresión*** del término general

****obtención*** de términos particulares a partir del término general.

Se toman los siguientes acuerdos, para llevar a cabo el estudio del curso 92-93.

Primero: Organizar el desarrollo de las sesiones de trabajo de modo que el investigador asuma el papel del profesor, manteniéndose el profesor de la clase como observador participante.

Segundo: Revisar los contenidos sobre los que se planifica el trabajo; esto lleva a una nueva redacción de las Unidades de Actuación con las que se establecen las Categorías de Contenido Matemático (CCM). Estas categorías ya se indican en el capitulo II por lo que nos remitimos a la descripción allí hecha.

Todas estas decisiones configuran la Planificación del curso 92-93.

IV.2.2. Planificación.

El día 16 de Noviembre del año 1992 el equipo investigador se reúne para revisar y, en su caso, modificar la planificación que queda estructurada como sigue:

Objetivos.

Obtener el término general de sucesiones sencillas, entre las que se encuentran las sucesiones de los números cuadrados, rectangulares y triangulares.

Comprobar cuales de las expresiones utilizadas para las sucesiones (representación puntual, expresiones numéricas, y desarrollos aritméticos) son más asequibles para los alumnos.

Establecer relaciones entre expresiones algebraicas sencillas a través de las representaciones puntuales de las sucesiones.

Contenidos.

Secuencias lineales y secuencias cuadráticas. Los puntos a tratar sobre estos dos conceptos se concretan en los siguientes procedimientos.

- Patrones puntuales para representar secuencias.
- Desarrollo aritmético de los términos de una secuencia.
- Continuación de los términos de una secuencia.
- Obtención de un término avanzado en una secuencia sin necesidad de calcular los términos intermedios.
- Obtención del término general de una secuencia.
- Obtención de términos particulares de una secuencia a partir de su término general.

Las unidades de actuación proponen un desarrollo concreto de los contenidos anteriores.

Metodología.

La metodología, en términos generales, será la misma que la utilizada en el 7º curso. Se pondrá especial interés en estimular las reflexiones e intuiciones de los alumnos con el fin de recoger el máximo de información sobre las interpretaciones y organizaciones que elaboran sobre los conceptos trabajados. Se evitará, en lo posible, convertir las sesiones de trabajo en clases convencionales en las que el profesor transmite información y entrena a los alumnos sobre destrezas particulares.

Temporalización.

Entre cinco o seis sesiones de 80 m., aproximadamente, cada una.

Evaluación.

Criterio (i). Utilización de distintos sistemas simbólicos para representar números: configuración puntual y desarrollo aritmético.

Criterio (ii). Números que comparten patrón: formación de secuencias de patrones puntuales o aritméticos y traducción entre sistemas de representación distintos.

Criterio (iii). Continuación de una secuencia numérica lineal o cuadrática, empleando los diferentes sistemas simbólicos de representación.

Criterio (iv). Extrapolación de los términos de una secuencia numérica lineal o cuadrática, empleando los diferentes sistemas simbólicos de representación.

Criterio (v). Cálculo del término general de una secuencia lineal o cuadrática, empleando los diferentes sistemas simbólicos de representación.

Criterio (vi). Noción general de sucesión numérica.

Criterio (vii). Utilización del término general para calcular términos particulares o nuevos términos generales.

El criterio i) corresponde a la utilización y dominio de los diferentes sistemas simbólicos empleados para la representación de números.

Los criterios ii), iii), iv), v) y vii) corresponden a los procedimientos que se presentan y desarrollan en nuestro trabajo.

El criterio vi) corresponde al aspecto conceptual de este estudio.

Planificación de la secuencia de actuación.

Esta planificación está organizada sobre las unidades de actuación o (CCM) elaboradas para el 8º curso y las Categorías de Interacción Didáctica (CID) ya descritas en el capítulo anterior. La ***planificación*** está estructurada en 23 tareas distintas con las que se proponen a los alumnos actividades para trabajar, reflexionar y explorar en las 27 Unidades de Actuación o Categorías de Contenido Matemático establecidas para este curso. En principio, las tareas van siguiendo el esquema lineal de las C.C.M, hasta llegar a la tarea nº 8 en la que no sólo se presenta la unidad de actuación 8 sino también la 14, por la propia lógica del trabajo con los diferentes contenidos. Por ello, a partir de la tarea 8, las diferentes unidades de actuación no mantienen su orden inicial, sino que se van presentando de acuerdo con la lógica que imponen las propias tareas, lo que permite dar mayor énfasis a un sistema simbólico que a otro, a un tipo de sucesiones y a determinados procedimientos con las sucesiones.

IV.2.3. Organización por tareas

Vamos a comentar brevemente las diferentes tareas que aparecen en la Planificación y, a continuación, se verá cómo establecen prioridades en el trabajo del alumno.

Tarea 1: ***Realiza tres representaciones distintas del número 6 utilizando puntos***.

Esta tarea tiene por finalidad revisar rápida y ampliamente la noción de representación puntual para un número y la pluralidad de opciones que se presentan.

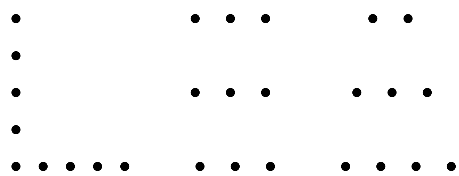
Tarea 2: ***Elige tres números y represéntalos utilizando el mismo patrón de puntos***.

Se pretende repasar las nociones de patrón o estructura común de representación para varios números distintos; en la planificación se prescinde de la noción intermedia de modelo, que tuvo importancia en 7º curso.

Tarea 3: ***En la igualdad 18=8+7+3 a la expresión 8+7+3 le llamamos desarrollo aritmético de 18. Escribe cuatro desarrollos del número 18 distintos del anterior.***

Se trata de analizar cada número, en términos de operaciones que dan como resultado dicho número. Se considera cada número como el punto en el que confluyen los resultados de diferentes operaciones, destacando así el carácter operatorio de los números. "*Cada número debe de aparecer como un sistema integrado de relaciones y no como un sistema estático*" (....) "*Las operaciones, mediante unos pocos principios, establecen una red de conexiones entre los distintos números. Se convierte así el concepto de número en un concepto operatorio y el sistema de los números naturales aparece dotado de una estructura respecto* *de las operaciones fundamentales*" (Castro, Rico y Castro, 1987, pg: 132). Aunque se trata de una idea clave en el desarrollo de nuestro trabajo, ya elaborada anteriormente, los comentarios que se hacen en la planificación de la tarea 3 no destacan suficientemente su importancia y no parecen considerar la revisión de los resultados.

Tarea 4: ***Las tres representaciones siguientes son del número 9.***



En la primera "se ve" el siguiente desarrollo del número 9=4+1+4. Escribe el desarrollo del número 9 que ves en las otras dos representaciones.

Se presenta la traducción desde la representación puntual al desarrollo aritmético; se eligen tres representaciones del número 9 -impar, cuadrado y suma de tres números consecutivos-. Un número no es lineal ni cuadrático, sí lo es su desarrollo operatorio o gráfico, ya que pone de manifiesto una estructura posible a la que el número se ajusta. A su vez, cada una de las representaciones gráficas admite diversas expresiones aritméticas: la simbolización gráfica tiene cierta imprecisión operatoria. Esta riqueza de matices tampoco aparece contemplada en la planificación; quizás lo más importante ha sido diseñar unas tareas que ponen de manifiesto todas estas posibilidades.

Tarea 5: ***El número 15 tiene varios desarrollos, por ejemplo:***

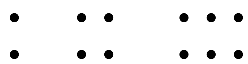
$$15 = 3 + 5 + 7 \text{ y } 15 = 3 \cdot 5$$

Escribe otros tres desarrollos distintos del número 15.

Realiza una representación puntual de 15 en donde se vea uno de los desarrollos anteriores.

Se plantea la traducción inversa: del desarrollo aritmético a la representación gráfica; de nuevo la planificación no destaca el interés especial de este tipo de traducción.

Tarea 6: ***Copia la secuencia de representaciones puntuales y auméntala añadiendo los tres términos siguientes.***



- Debajo de cada dibujo escribe el número que se representa.

- Debajo de cada número pon su desarrollo de manera que esté de acuerdo con la representación.

La tarea plantea continuar una secuencia cuyos términos están expresados mediante un patrón puntual y pide traducir esos términos a un desarrollo aritmético común.

Tarea 7: ***Copia las tablas siguientes y amplíalas con tres columna***

Tabla 1: Tarea 7.1

Representación	• • •	• • • • •	• • • • • • •
Número			
Expresión			

Tabla 2: Tarea 7.2

Representación	• • • •	• • • • • • • •	
Número			
Expresión			

Tabla 3: Tarea 7.3

Representación			
Número			
Expresión	3 x 1	3 x 2	3 x 3

Tarea 7.4

Construye una tabla similar a las anteriores con los números 1, 3, 6, 10, 15... Esto es hacer un desarrollo de los números y una representación puntual de manera que las dos se correspondan.

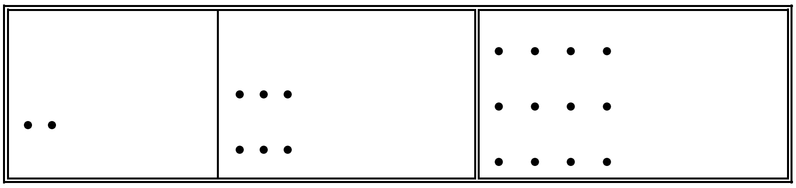
Tarea 7.5

Inventa una secuencia numérica. Represéntala utilizando un patrón de puntos y desarrolla los números de manera que la representación sea adecuada al desarrollo.

Se introduce un elemento auxiliar clave en este estudio: ***la tabla***, con la que organizar los sucesivos términos de una secuencia (columnas) y los distintos modos de expresión de la secuencia (filas). En este ***espacio de representación*** se va a trabajar desde ahora con las secuencias, sea cual sea el sistema o sistemas simbólicos elegidos. Con este esquema se produce una organización del trabajo del alumno, una ordenación de los términos y una anticipación de la importancia que tiene la variable "***posición del término en la secuencia***" (variable n). Las distintas opciones de la tarea 7 tratan de familiarizar a los alumnos con este esquema estructurado, con el que ampliar los términos de una secuencia y traducir las expresiones dadas a los restantes códigos simbólicos.

Tareas 8: ***Copiar la secuencia:***

1º ***2º*** ***3º***



Dibuja el 4º término.
Dibuja el término 7º sin dibujar los intermedios.
Explica por qué piensas que el dibujo que has hecho es el correcto.

Tarea 9: ***A continuación tienes los tres términos de una secuencia numérica.***

1º ***2º*** ***3º***

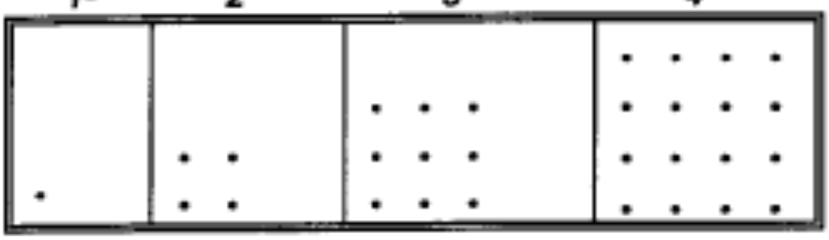
1+2+3+4 ***2+3+4+5*** ***3+4+5+6***

Copia esta secuencia y escribe el término siguiente.
Escribe el término 7º sin hacer los intermedios.
Explica por qué sabes que es ese el término y no otro.

Las tareas 8 y 9 trabajan la extrapolación; en un caso con configuraciones puntuales y en el otro con desarrollos aritméticos. Se introducen los ordinales para indicar los diferentes términos de la sucesión en la tabla correspondiente; se marca así la relación entre la posición de un término (1º, 2º, 3º...) y su valor f(1), f(2), f(3)...

Tarea 10: ***En el cuadro siguiente tienes una secuencia puntual y la expresión de los números que representan en forma de potencias.***

1º 2º 3º 4º

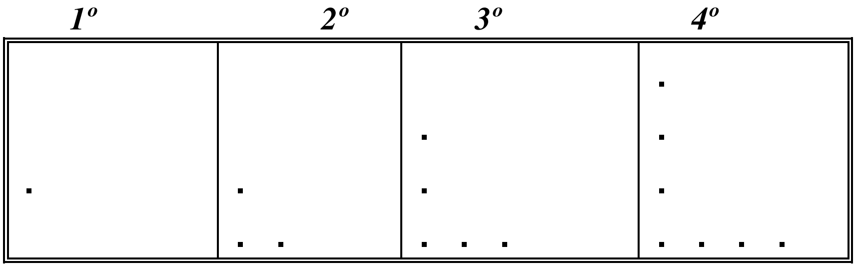


1^2 2^2 3^2 4^2

Copia la tabla y amplíala con los lugares 5º, 9º y nº (enésimo).
Explica por qué crees que tu respuesta es la correcta.

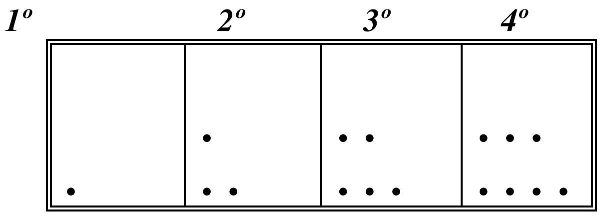
Esta tarea es una de las más importantes en este estudio, ya que en ella se presenta por vez primera el término n-ésimo. La estrategia planificada consiste en presentar la sucesión de los cuatro primeros números cuadrados en una tabla en la que se relacionan el orden del término, su representación puntual y el desarrollo aritmético. Se pide a los alumnos que añadan el siguiente término, el noveno y el n-ésimo, todo ello sin preparación especial. Se espera que se presenten dificultades y se proponen las medidas para superarlas.

Tarea 11: ***A continuación tienes una secuencia puntual.***



Dibuja el término siguiente.
Dibuja la figura que ocuparía el lugar n.
Debajo de cada figura indica el número que representa.
Escribe debajo de cada número su desarrollo.
Escribe a continuación cómo se llaman estos números.

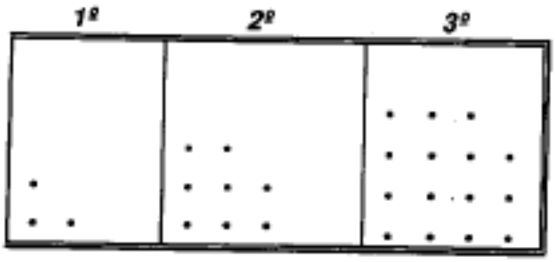
Tarea 12: ***Aquí tienes otra secuencia puntual:***



Dibuja el término siguiente.
Dibuja el término que ocupa el lugar n.
Debajo de cada figura indica el número que representa.
Escribe debajo de cada número su desarrollo de forma que esté de acuerdo con la representación.
Indica si existe alguna diferencia entre estos números y los anteriores.

Las tareas 11 y 12 proponen dos representaciones puntuales diferentes de la secuencia de los números impares; en ambas se pide continuar un término más, escribir el término n-ésimo, escribir los números representados y los desarrollos aritméticos correspondientes, así como reconocer de qué números se trata.

Tarea 13: ***Con la siguiente secuencia vas a trabajar como con las anteriores.***



Dibuja el término siguiente.
Indica cómo es el de lugar n.
Escribe debajo de cada figura el número que representa.
Debajo de cada número escribe su desarrollo.
Se proponen las mismas cuestiones para la representación puntual de los cuatro primeros términos de la sucesión: n^2+2n ("anterior a los números cuadrados").
Tarea 14: ***Tienes la siguiente secuencia:***

1º	***2º***	***3º***	***4º***
1	***1+2***	***1+2+3***	***1+2+3+4***

Escribe el 5º término.
Escribe el término enésimo.
Realiza una representación puntual de cada uno de los términos.
Escribe a continuación como se llaman estos números.
Presenta varios términos de la sucesión de números triangulares mediante desarrollo aritmético; la propuesta de trabajo consiste en añadir un término, escribir el término n-ésimo y traducir a representación puntual.
Tarea 15: ***Escribe el término 7º y nº de la siguiente sucesión numérica:***
2, 4, 6, 8, 10, 12,...
Si lo crees necesario ayúdate de una representación y de un desarrollo de los números.

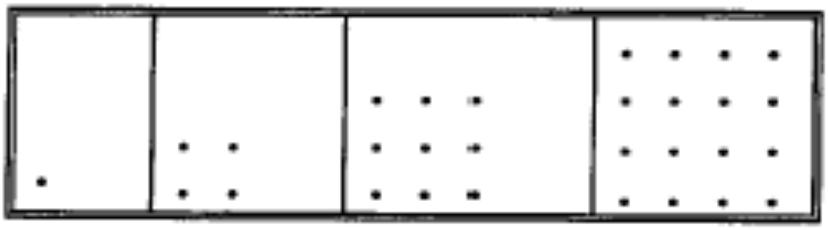
Propone obtener directamente el término general de una sucesión numérica, indicando la posibilidad de ayudarse de una representación puntual o de un desarrollo aritmético.
Tarea 16: ***Escribe la secuencia de los números rectangulares, y síguela dos términos más.***
Escribe el término enésimo.
Escribe un desarrollo de estos números de la forma más simple posible.

Propone obtener el término general de la secuencia de números rectangulares con ayuda de la representación gráfica.
Tarea 17: ***Expresa el término general de la relación que hay entre números rectangulares y triangulares.***

Se realiza la división gráfica de los números rectangulares en dos números triangulares para obtener el término general de los triangulares a partir del correspondiente término general de los rectangulares.

Concluida la tarea 17 se planifica una discusión sobre la noción de sucesión, de manera que se establecen las conexiones oportunas entre la representación puntual, el desarrollo aritmético común a los términos de una sucesión y el término general.

Tarea 18: ***Dibuja los cuatro primeros términos de una sucesión de cuadrados. Divide cada uno de los cuadrados por una línea, así:***



¿Cómo son las dos figuras que se ven en la representación?

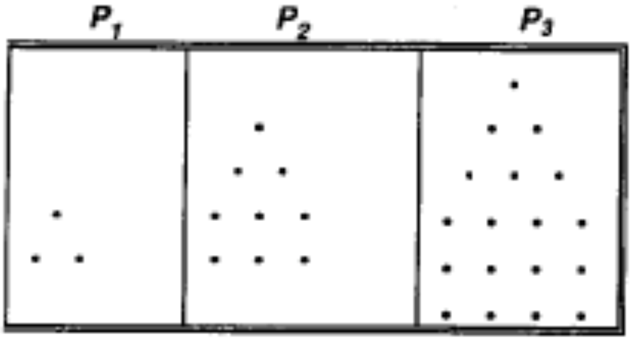
¿De qué tipo? ¿Son iguales? ¿Qué relación hay entre ellas?

Busca una regla que relacione de forma general los cuadrados y los triangulares.

Tarea 19: ***Continúa esta sucesión de puntos dos términos más.***

Descompón cada una de las figuras en triángulos (siempre de la misma manera).

Busca la expresión general P_n utilizando la expresión de los números triangulares.



Las tareas 18 y 19 se dedican al estudio de las descomposiciones gráficas de configuraciones puntuales cuadradas o pentagonales en triángulos, de manera que puedan relacionarse igualmente sus términos generales.

Tarea 20: ***Tenemos una expresión de término general***

$$S_n=n+(n+1)+(n+2)$$

Indica una propiedad común de los términos de esta sucesión.

Representa los tres primeros términos de esta sucesión de forma puntual.

Tarea 21: ***Indica una propiedad común de los términos de la siguiente sucesión:***

$$A_n=3n-1$$

Las tareas 20 y 21 estudian la propiedad común de los términos de una sucesióndada por su término general.

Tarea 22: ***Dada la siguiente sucesión numérica:***

2, 5, 8, 11...

Realiza una representación puntual de los cuatro primeros términos.

Escribe su término general.

Propone los primeros términos de una sucesión de números y pide hacer una representación puntual de cada uno de ellos, para pasar luego a escribir su término general.

Tarea 23: ***Inventa el término general de una sucesión.***

Señala la propiedad común de sus términos.

Haz una representación puntual de los tres primeros términos.

Finalmente, se propone inventar el término general de una sucesión, estudiar la propiedad común de sus términos y representarla.

Es interesante destacar que, a partir de la tarea 6, el trabajo con secuencias - independientemente del tipo de secuencia, del modo de su representación y del procedimiento estudiado - se ha organizado mediante una tabla de dos o más filas. Cada fila diferente corresponde a un modo de simbolización distinto para los términos de la sucesión, o bien para indicar el orden de sus términos. A partir de la tarea 8 se incluye siempre una fila que indica el ordinal de los correspondientes términos.

IV.2.4. Analisis de la planificación

La tabla 1 muestra como se estructura la planificación, que aparece en el Anexo IV, en función de las Categorías de Interacción Didáctica y las Categorías de Contenido Matemático.

Tabla 1: Estructura de la planificación en función de (CID) y (CCM).

CID CCM	M	I	A	C	PC	IA	R	S	total	distinto tipo
1.	x		xx	x	xx				6	4
2.		xx	xx	x	x				6	4
3.			xxxxxx				x		7	2
5.			xx	x		x			4	3
6.		x	xxxxx	xxx	x	x			11	5
7.		x	xxxxxx	xx	x				10	4
8.	xx	xx	xxx	x	xx				10	5
10.			x	x		x			3	3
11.			x	x		x			3	3
12.			xx	x	x				4	3
14.	xx	xx	xx	x	xx				9	5
18.			x	x	x				3	3
19.			xx						2	1
20.	xxx	xx	xxxx	x	xxx	x			14	6
21.			x	x	x				3	3
22.			x						1	1
24.			x						1	1
25.		x				xx	x	x	5	4
26			x						1	1
27.		x	x	x		x			4	4
total	8	12	44	17	15	8	2	1	107	

En la tabla 1 se aprecia que entre las Categorías de Interacción Didáctica la ***actividad*** es la que más se ha considerado; se ha prestado menos atención al intercambio de información y corrección del trabajo mediante una puesta en común. La ***síntesis*** sólo aparece una vez en la sesión final. Por lo que se refiere a las unidades de actuación, algunas de ellas no se han tenido en cuenta explícitamente en esta programación; en concreto, esto ha ocurrido con las unidades 4, 9, 13, 15, 16, 17 y 23.

La 4 (representaciones puntuales que responden a un mismo modelo) queda implícita en otras tareas en donde las secuencias de desarrollos puntuales vienen dadas o se propone al alumno realizarlas. La 9 (prolongación de secuencias numéricas lineales) también está implícita en otras tareas en donde el alumno ha de escribir los números de una secuencia representada puntualmente y expresar su desarrollo aritmético.

La 13 (extrapolación de términos en una secuencia lineal expresada mediante patrón puntual) sólo se trata en una secuencia cuadrática. Las unidades 15 (extrapolación de térmminos en una secuencia numérica lineal), 16 (extrapolación de términos en una sucesión numérica cuadrática), 17 (extrapolación de términos en una secuencia lineal cuyos términos se presentan mediante desarrollo aritmético) y 23 (cálculo del término general de una secuencia lineal cuyos términos se presentan mediante desarrollo aritmético) no han sido tratadas en la planificación.

En resumen, del total de 27 unidades de actuación planificadas, encontramos:

* 1 unidad organizada por seis categorías de interacción distintas; se trata de la unidad nº 20 que es uno de los conceptos claves en este planteamiento, ya que consiste en obtener el término general de una secuencia cuadrática dada mediante representación puntual; también esta unidad es la que lleva un mayor número de interacciones previstas: 14.

* 3 unidades organizadas por 5 categorías de interacción distintas, las unidades 6, 8 y 14 que se refieren a tareas de traducción desde la simbolización puntual al desarrollo aritmético, prolongación de sucesiones puntuales cuadráticas y extrapolación en secuencias puntuales cuadráticas, respectivamente. Igualmente las previstas en cada una de ellas es de 11, 10 y 9 interacciones respectivamente .

* 5 unidades organizadas por 4 categorías de interacción didáctica, las unidades 1, 2, 7, 25, y 27; las tres primeras centradas sobre los sistemas simbólicos para expresar los términos de una sucesión, representación puntual y desarrollo aritmético; las dos últimas sobre noción general de sucesión y obtención del término general de una sucesión a partir de la representación puntual de su término general. El número de interacciones previstas en cada unidad es superior a 4.

* 6 unidades organizadas por 3 categorías de interacción didáctica, las unidades 5, 10, 11, 12, 18 y 21. Salvo la unidad 5 que hace de nuevo referencia a la configuración puntual de los términos de una secuencia, las seis unidades restantes hacen referencia a prolongar y traducir los términos de una secuencia; prolongar y extrapolar en una secuencia dada mediante desarrollo aritmético (12 y 18) ó bien obtener el término general de una secuencia numérica lineal (21). En este caso el número de interacciones previstas coincide con el número de categorías empleadas, prácticamente.

* 1 unidad organizada por 2 categorías de interacción didáctica, la unidad 3, si bien el número de interacciones previstas es muy elevado: En este caso se trata de traducir desarrollos aritméticos a una representación puntual.

* 4 unidades organizadas por 1 sola categoría de interacción didáctica -la actividad- se trata de las unidades 19, 22, 24 y 26.

Finalmente, hay 7 unidades que se han enunciado y no se han planificado en la práctica, se trata de las unidades 4, 9, 13, 15, 16, 17 y 23. Sólo una de estas unidades, la nº 13, hace referencia a un tipo específico de sucesiones cuyos términos vienen dados mediante representaciones puntuales.

Si consideramos las interacciones didácticas encontramos que, en todas las unidades de actuación, aparecen las categorías de actividad y/o consigna, determinando una fase de ***implementación*** para cada unidad de actuación, excepto en la número 25. También se presentan las categorías puesta en común y/o interacción abierta, que determinan la fase de ***socialización***, en la práctica totalidad de las unidades de actuación (exceptuando las unidades 3, 2, 24 y 26).

Las fases de implementación y socialización abarcan 84 de las interacciones previstas que suponen el 80% del total. El resto de las interacciones no tienen una distribución regular, aunque conviene destacar el predominio de las categorías de interacción didáctica motivación e información en las unidades 8, 14 y 20 todas ellas referidas a secuencias cuadráticas expresadas mediante patrón puntual.

La estructura subyacente a esta planificación se pone de manifiesto cuando agrupamos las unidades de actuación teniendo en cuenta los criterios de evaluación que se consideren prioritarios para evaluar la comprensión de los alumnos, explicitado en el dominio de uno o varios procedimientos.

Criterio (i) "Sistemas simbólicos para representar números: configuración puntual y desarrollo aritmético", compuesta por las unidades de actuación 1, 2 y 3.

Criterio (ii) "Números que comparten patrón: formación de secuencias de patrones puntuales o aritméticos y traducción entre sistemas de representación distintos", compuesta por las unidades de actuación 4, 5 y 6.

Criterio (iii) "Continuación de una secuencia numérica lineal o cuadrática, empleando los diferentes sistemas simbólicos de representación", compuesta por las unidades de actuación 7, 8, 9, 10, 11 y 12.

Criterio (iv) "Extrapolación de los términos de una secuencia numérica lineal o cuadrática, empleando los diferentes sistemas simbólicos de representación ", compuesta por las unidades de actuación 13, 14, 15, 16, 17 y 18. Criterio (v) "Cálculo del término general de una secuencia lineal o cuadrática, empleando los diferentes sistemas simbólicos de representación", compuesta por las unidades de actuación 19, 20, 21, 22, 23 y 24.

Criterio (vi) "Noción general de sucesión numérica", compuesta únicamente por la unidad de actuación 25.

Criterio (vii) "Utilización del término general para calcular términos particulares o nuevos términos generales", compuesta por las unidades de actuación 26 y 27.

De acuerdo con estas etapas y las fases citadas para la interacción didáctica, la planificación queda estructurada según indica la tabla 2:

Tabla 2: Criterios de evaluación y unidades de actuación.

Criterio	unidad de actuación	represen-tación	implemen-tación	socializa-ción	Sistematización	total
i	1 2 3	M I	A+C A+C A	PC PC	 R	10
ii	5 6	 I	A+C A+C	IA IA		7
iii	7 8 10 11 12	I M+I	A+C A+C A+C A+C A+C	PC PC IA IA PC		18
iv	14 17	M+I	A+C A+C	PC PC		8
v	19 20 21 22 24	 M+I	A A+C A+C A A	 PC+IA PC		12
vi	25	I		IA	R+S	4
vii	26 27	 I	A A+C	 IA		5

IV.2.5. Análisis de las tareas.

Si consideramos las tareas diseñadas y los distintos tipos de secuencias que se presentan en ellas, podemos profundizar en el análisis de la planificación.

En la planificación se han propuesto 10 secuencias diferentes:

* Números Impares I; aparece en las tareas 4, 7, 11 y 12.

* Números Pares P; aparecen en las tareas 6 y 15.

* Números Cuadrados C; en las tareas 4, 10 y 18.

* Números anteriores al cuadrado C-1; en la tarea 13.

* Números triangulares T; en las tareas 9, 14, 17 y 18.

* Números rectangulares de diferencia 1, R; En las tareas 8, 16 y 17.

* Números pentagonales P_t; en la tarea 19.

* Múltiplos de 3 (más, menos 1): M_3; en las tareas 7, 21 y 22.

* Múltiplos de 4: M_4; en la tarea 7.

*Suma de tres números consecutivos: S_3; en las tareas 4, 20 y 22.

De estas 10 secuencias, 5 corresponden a secuencias lineales I, P, M_3, M_4 y S_3, y las otras 5 a secuencias cuadráticas: C, C-1, T, R, P_t.

Cada una de las secuencias se ha elegido para presentar o desarrollar unos procedimientos concretos, según se indica en la tabla 3

Tabla 3: Procedimientos y secuencias en cada una de las tareas

procedimiento / tarea	traducir	continuar	extrapolar	obtener término general	aplicar término general
4	I, C, S_3				
5	R, S_3				
6	P	P			
7	I, M_4, M_3 T	I, M_4, M_3, T			
8		R	R		
9		T	T		
10		C	C	C	
11	I	I		I	
12	I	I		I	
13	C_1	C_1		C_1	
14	T	T		T	
15	P	P		P	
16	R	R		R	
17					R_1, T
18					I_1, C, T
19				P_T	P_T
20	S_3				S_3
21					M_3
22	S_3, M_3	S_3, M_3		S_3, M_3,	
Total	19	16	3	10	8

Los procedimientos que tienen planificado un mayor tratamiento son los denominados ***traducir*** -pasar los términos de la secuencia de un sistema simbólico de representación a otro- y ***continuar***, añadir uno, dos o tres términos en una secuencia, consecutivos con los que ya hay. La traducción se ejemplifica con nueve secuencias distintas, mientras que la continuación se ejemplifica con las diez secuencias utilizadas. La obtención del Término General de la secuencia está prevista en 10 tareas y nueve tipos de secuencias diferentes. La aplicación del término general para obtener términos particulares, o para expresar la propiedad común de los términos de una secuencia, se planifica para siete tipos de secuencias distintas, en sólo cinco tareas. Finalmente, el procedimiento de extrapolación es el que menor atención ha recibido en la planificación.

Agrupando las sucesiones según que se trate de lineales o cuadráticas, y teniendo en cuenta los distintos procedimientos se obtiene la tabla 4.

Tabla 4: Cruce de sucesiones y procedimientos.

secuencias procedimiento	Lineales	cuadráticas
traducir	13	6
continuar	9	7
extrapolar	0	3
obtener término general	5	5
aplicar término general	3	5
total	30	26

En la tabla 4 se puede apreciar que, excepto en el procedimiento de traducir, se mantiene un equilibrio entre las dos clases de sucesiones, parcial y globalmente. Si cruzamos esta información con el sistema simbólico de representación prioritariamente utilizado en la configuración puntual, tenemos una visión más real de la planificación. Completamos así nuestro análisis de la planificación señalando el tipo de sistema simbólico empleado para representar los términos de cada secuencia, desglosado igualmente por tareas (tabla 5).

Tabla 5: Sistema simbólico contemplado en las distintas tareas.

sistema simbólico ___________ tarea	secuencia numérica	configuración puntual	desarrollo aritmético	notación algebraica
4		xxx		
5	xx			
6		x		
7	x	xx	x	
8		x		
9			x	
10		x		
11		x		
12		x		
13		x		
14			x	
15	x			
16		xx		
17				x
18		x		
19		x		
20				x
21				x
22	x			
total	5	15	3	3

Queda claro que el grueso de nuestro trabajo está centrado en secuencias representadas mediante configuraciones puntuales y que los procedimientos sobre los que nos propusimos trabajar fueron: traducir a otro sistema simbólico de representación, continuar la secuencia y obtener el término general.

Los procedimientos se organizan en la secuencia de tareas del siguiente modo:

* Traducción entre sistemas simbólicos. Continuar una secuencia y Extrapolar: Tareas 4 a 10.

* Traducción entre sistemas simbólicos. Continuar una secuencia y obtener su término general: Tareas 10 a 16.

* Aplicar el término general para obtener términos de la secuencia: Tareas 17 a 21.

No tiene sentido diferenciar los procedimientos con tareas distintas, aunque analíticamente sean distintos, en la práctica van coordinados.

Las Categorías de Interacción Didáctica y las Categorías de Contenido Matemático permiten un análisis formal de la Planificación realizada, con el que detectar las prioridades y las carencias. Ahora bien, para interpretar correctamente toda la información ha sido necesario considerar las tareas programadas según los tipos de procedimiento empleados, el sistema simbólico de representación prioritario y el tipo de sucesiones utilizadas. Quizás las características más significativas de la planificación en este curso ha consistido en apreciar la insuficiencia de los aspectos formales de la programación, en especial los relativos a las Categorías de Conocimiento Matemático, y avanzar hacia una estructuración y organización del trabajo más precisa y sistemática, centrada en una mejor planificación de las tareas.

Todas las tareas propuestas pueden describirse en términos de tres variables, ya consideradas en la Planificación que ahora toman su autentica dimensión:

1. Tipo de sucesión: lineal o cuadrática.
2. Sistema simbólico de representación: numérico, configuración puntual o desarrollo aritmético.
3. Procedimientos propuestos: traducción, continuación, extrapolación, obtención del término general, aplicación del término obtenido.

Desde esta perspectiva se podría haber hecho una mejor organización de las CCM propuestas que, en todo caso, tendremos en cuenta en lo que sigue.

IV.2.4. Reflexión sobre la planificación.

Comenzamos señalando que la ***fase de planificación*** para el estudio realizado en 8º nivel no ha necesitado un trabajo de revisión y reelaboración tan exhaustivo y detallado como ocurrió en el caso de 7º nivel. Varias son las razones que justifican este hecho.

La primera es que, al asumir el investigador las funciones del profesor en las sesiones de trabajo en el aula, no ha sido necesario explicitar cada uno de los pasos excesivamente, ya que no ha habido que precisar el sentido y la orientación de las nociones y procedimientos utilizados, ni analizar detalladamente las posibles interpretaciones que los alumnos pudieran hacer de cada una de las tareas; por ello, aunque se haya trabajado sobre un campo conceptual más amplio que el del curso pasado, se han podido emplear esquemas más sintéticos en la fase de planificación ya que no era necesario convenir con el profesor el sentido y la orientación de las ideas a desarrollar.

La segunda es consecuencia de haber quedado clarificados el conjunto de símbolos, notaciones, conceptos y procedimientos sobre los que se pretendía trabajar; mientras que en 7º curso estábamos explorando la iniciación de un campo conceptual sobre cuya comprensión por parte de los jóvenes no se tenían noticias previas, en 8º los elementos de este campo conceptual se encuentran bien delimitados. La investigadora tenía claro que el campo de estudio venía delimitado en este curso por dos conceptos matemáticos: las sucesiones lineales o progresiones aritméticas y las sucesiones cuadráticas o sucesiones de diferencias segundas constantes; estos objetos se presentaban mediante tres sistemas simbólicos de representación diferentes: la notación numérica usual, las configuraciones geométricas puntuales y los desarrollos aritméticos; finalmente estos objetos se trabajaban en cinco tipos de actuaciones o procedimientos distintos: traducción de los términos de una sucesión de un sistema simbólico a otro, continuación de los primeros términos de la sucesión, extrapolación de términos en una sucesión o escritura de términos avanzados no consecutivos, expresión del término general de una sucesión, y obtención de términos particulares de la sucesión a partir del término general.

En tercer lugar, quedaba ya claro que el objetivo de la investigación no consistía en impartir unos conocimientos estructurados y valorar el grado de asimilación del conocimiento explicado. No se ha concebido este trabajo como un estudio sobre la instrucción y aprendizaje sino como una investigación sobre la comprensión de dos sistemas simbólicos no estándar con los que expresar la estructura común de varios términos de una secuencia; a partir de ahí, se han querido explorar las posibilidades de expresar esa estructura común mediante una notación generalizada en función de una variable cualificada: la posición ordinal de cada término de la secuencia.

Nuestro objetivo ha estado centrado en facilitar las posibilidades expresivas de los alumnos en este sentido y a delimitar las contradicciones y dificultades que surgen con estos sistemas simbólicos.

Finalmente, la experiencia del curso anterior permite abreviar la fase de planificación explícita, sometiendo el documento inicial a una crítica mayor durante el tiempo de su elaboración y puesta en práctica. En la fase de planificación no están recogidas las distintas revisiones que se han hecho, sino que se presenta un único documento que corresponde a la planificación final del trabajo realmente realizado. Esto facilita la presentación del trabajo en este nivel aunque supone cierta pérdida de información ya que la secuencia general establecida en base a las unidades de actuación, fue parcialmente revisada y criticada después de cada una de las sesiones de trabajo con los alumnos. No hemos querido abusar del carácter recursivo del esquema Planificción- Acción-Observación-Reflexión, pero no cabe duda que ha tenido una consideración mayor en este curso.

Una crítica al trabajo en esta fase consiste en no haber previsto los instrumentos de codificación adecuados para integrar las revisiones y adaptaciones de la planificación inicial, es decir, para describir en este apartado los sucesivos subciclos que recorre la planificación, teniendo en cuenta las informaciones parciales obtenidas en la acción.

IV.2.7. Valoración y decisión final.

De nuevo el trabajo realizado en esta ***fase de planificación*** ha permitido:

* Especificar el contenido sobre el que se va a trabajar y marcar unas prioridades en el mismo.

* Discutir en el equipo investigador sobre el mejor modo de organizar el trabajo de los alumnos y la secuencia de interacción en el desarrollo de la clase.

* Planificar los instrumentos conceptuales y procedimentales en los que se va a centrar el trabajo de los alumnos, predecir los puntos conflictivos y las actividades que se van a proponer para obtener el máximo de información sobre la comprensión que alcanzan los alumnos en estos puntos y las dificultades que se presentan.

* Recordar de nuevo la necesidad de lograr el máximo de riqueza expresiva por parte de los alumnos en el manejo de los diferentes sistemas simbólicos de representación numérica y su ampliación para notar la estructura común de los términos de una sucesión -termino general-

El objetivo de este trabajo es, en este momento, planificar la recogida de información sobre la comprensión de los alumnos en relación con el tópico estudiado y no lograr el máximo rendimiento en un proceso de instrucción.

Entendemos que la Planificación de tareas hecha propone condiciones de trabajo viables para dar sentido a la noción de término general de una sucesión entendida como la estructura o patrón de desarrollo numérico común que tienen los diferentes términos de dicha sucesión, en función de la posición que ocupa cada término en la secuencia. Si estas condiciones provocan la realización de las tareas previstas por parte de los alumnos estaremos en condiciones de estudiar las diversas interpretaciones que realizan y los tipos de comprensión alcanzados.

El equipo investigador considera que el análisis realizado es suficiente y que se está en condiciones de proponer tareas adecuadas y orientar el trabajo de los alumnos. Se toma la decisión de iniciar el trabajo en el aula durante el mes de marzo, evitando la cercanía de final de curso

IV.3.Fase de Acción.

Esta fase de nuestro estudio se lleva a cabo a lo largo de 5 sesiones de trabajo en el aula, cada una de ellas de 80 m. de duración. Estas sesiones tienen lugar los días 1, 2, 15, 16 y 22 de Marzo del año 1993. La información de esta fase la organizamos por los siguientes apartados:

Acción propiamente dicha.
Observación
Reflexión

manteniendo el mismo orden de ideas expresado en 7º nivel.

Damos paso a la información de la acción desarrollada en el aula durante las cinco sesiones realizadas.

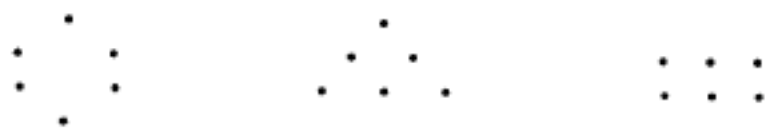
IV.3.1. Desarrollo de las Sesiones

Primera Sesión

Esta sesión tiene lugar el día 1 de Marzo del año 1993. Al llegar a clase la investigadora saluda a los alumnos y les recuerda el trabajo realizado el curso anterior. A continuación plantea el interés por ampliar el estudio iniciado y les propone seguir trabajando sobre el mismo tema; los alumnos aceptan la tarea propuesta y se inicia la primera sesión de trabajo.

Esta Primera Sesión se dedicó a desarrollar las Tareas 1 a 6, mediante las que se presentan las Unidades de Actuación 1, 2, 3, 6 y 7. El trabajo en estas sesiones está dedicado a recordar nociones ya vistas en el curso pasado y a presentar ideas nuevas; las nociones que se repasan son:

* Diferentes ***representaciones puntuales de un mismo número***; se trabaja sobre el número 6 como estaba planificado; en la pizarra se presentan 13 representaciones distintas. Algunos ejemplos son:



* Ajustar las representaciones puntuales de números distintos a ***un patrón común;*** los alumnos eligen los ejemplos, de los que se presentan 5 en la pizarra; no se recuerda la noción de ***modelo***.

(PP). Vais a representar en la pizarra vuestros resultados. Tu primero.

(RA). He tomado los números 7, 9, 10 y los he representado en forma de H.

(PP). Ahora muéstranos tu trabajo.

(RA). Yo he representado los números triangulares 3, 10, 15.

(PP). ¿y tu?

(RA). Yo he hecho cuadrados con los números 4, 10, 12.

(PP). ¿Alguno tiene una representación distinta?

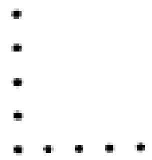
(RA). Siguiendo la forma de una cruz he representado los números 6, 9, 13.

(PP). Otra distinta.

(RA). Con forma de L yo he puesto los números 4, 6, 10.

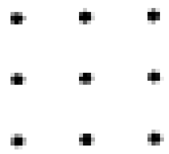
* ***Desarrollo aritmético de un número***; esta idea resulta fácil y se pasa por ella rápidamente.

(I): Os voy a poner un ejemplo: Tomamos el número 9, lo podemos representar, como uno de los compañeros ha hecho antes, en forma de L. Así estaremos representando el desarrollo del número nueve:



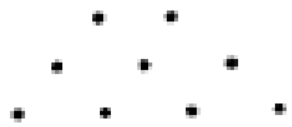
que representa el desarrollo 9=5+4 o bien 9=4+1+4.

Podemos hacer esta otra representación:



que se referirá al desarrollo de 9=3x3 o bien 9=3+3+3.

O bien esta otra representación:



que correspondería a uno de estos dos desarrollos:

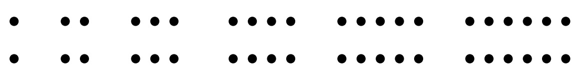
9=2+3+4 o 9=3+3+2+1.

. * ***Representación puntual de un desarrollo aritmético***: se consideran distintas posibilidades de representación para un mismo número y, por tanto, de establecer un desarrollo asociado a esa representación. También surgen distintas lecturas de una misma representación puntual: la traducción desde la representación puntual al desarrollo aritmético no es unívoca. Finalmente, se destaca que un mismo número se ajusta a distintos patrones, lo que significa que se puede considerar estructuralmente en distintas secuencias.

* También se trabaja en la continuación de una secuencia puntual, lo que implica el mantenimiento de un patrón.

Como noción diferente se presenta la traducción de un patrón puntual, expresado mediante tres términos de una secuencia, al desarrollo aritmético compartido de dichos términos. Se pone de manifiesto que se presentan distintos posibilidades de desarrollo aritmético para un mismo patrón puntual, y se proponen algunos ejemplos. Aquí se pone de manifiesto una deficiencia en el enunciado de la Unidad de Actuación nº 6, ya que no incluye el dato de la traducción desde el patrón puntual de los términos de la secuencia.

(RA). He seguido la secuencia y he escrito lo siguiente:



(RA). 2, 4, 6 , 8, 10, 12

(RA). 2x1, 2x2, 2x3, 2x4, 2x5, 2x6

(RA). Yo he seguido la secuencia de puntos igual que esa pero en la de los números he hecho esa y dos más.

(RA). 1+1, 2+2, 3+3, 4+4, 5+5, 6+6

(RA). 2+0, 2+2, 2+2+2, 2+2+2+2, 2+2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2

(RA). Yo tengo una distinta.

(RA). Las dos filas primeras igual que las que hay ya representadas, la última fila así:

2^1, 2^2, $2^2 + 2$, 2^3, $2^3 + 2$

(PP). ¿Alguna respuesta distinta a estas ha aparecido?

(RA). Yo tengo una secuencia que no está en la pizarra:

Se diferencia de las anteriores en la última fila que tengo esto:

4+0, 4+2, 4+4, 4+6, 4+8

(RA). La mía también es distinta en la última fila:

2x1, 2^2, 3x2, $2+2+2^2$, 5x2

En esta sesión se presentan cinco ejemplos de sucesiones distintas: I, C, S_3, R y P; el procedimiento fundamental sobre el que se trabaja es el de traducción, concentrándose en el paso de representaciones puntuales o desarrollos aritméticos y considerando las diferentes posibilidades.

Segunda Sesión

Esta sesión tiene lugar el día 2 de Marzo de 1993.

Está dedicada a desarrollar las Tareas 6, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 y 7.5, y en ella se presentan las Unidades de Actuación 5, 6, 7, 10 y 11.

Comienza la sesión realizando un análisis detallado sobre la traducción de los términos de la secuencia de los números pares desde la representación puntual al desarrollo aritmético; se consideran cuatro posibilidades diferentes. La conclusión que se realiza es:

"***Dependiendo de cómo esté hecha la secuencia puntual se puede saber qué desarrollo común tienen los términos de la secuencia de números a que nos estamos refiriendo***".

La aportación más importante en este sentido es la presentación de una *tabla* como espacio en que se organiza el trabajo con sucesiones. La tabla está formada por varias líneas; cada una se utiliza para un modo diferente de escribir los términos de la secuencia, es decir, en una línea nos dan la información o secuencia de trabajo en un sistema simbólico concreto y tenemos que traducir esa información a otros dos códigos distintos; para ello se utilizan otras dos líneas más:

Ordinales:	**1º**	**2º**	**3º**	**4º ....**
Representaciones:				

Números: ____
Desarrollos:

La tabla es ampliable con más espacios por línea; estos espacios se utilizan en la ejecución de un segundo procedimiento: continuar la secuencia. La presentación de la tabla da lugar a un pequeño debate sobre su interpretación y modo de utilización, así como la línea más adecuada en donde colocar la información que se proporciona.

Se inicia el trabajo con una tabla en la que hay que continuar una secuencia dos o tres términos más y traducir esos términos a los restantes códigos con cuatro ejemplos de sucesiones: dos de ellas en representación puntual, otra mediante desarrollo aritmético y la cuarta simplemente con números; los tres primeros ejemplos son sucesiones lineales y el cuarto es una sucesión cuadrática conocida, la de los números triangulares. Finalmente, se pide a los alumnos que inventen un quinto ejemplo y que trabajen sobre él.

Esta sesión se realiza el día 15 de Marzo de 1993, transcurridas dos semanas desde la sesión anterior. En ésta se desarrollan las tareas 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14 y representa las Unidades de Actuación 7, 8, 12, 14, 18, 19, 20 y 24.

Se produce la incorporación de una línea inicial a la tabla en la que escriben el ***orden de cada uno de los términos*** de la secuencia; esta línea dota a la tabla de una estructura más fuerte, ya que fija no sólo la posición de cada término, sino que también señala la variable de la que dependen los términos de la secuencia. Las dos primeras tareas (8 y 9) se dedican a presentar y trabajar un nuevo procedimiento: extrapolar términos en una secuencia, es decir, escribir términos avanzados no consecutivos con aquellos que se tiene. Se aprende así a espaciar dentro de una tabla, es decir, a dejar una parte en blanco o con puntos suspensivos, en la que se supone debiera estar la información no escrita. El primer ejemplo que se trabaja es el de los números rectangulares representados mediante configuración puntual y el segundo el de los números triangulares mediante desarrollo aritmético aditivo. Los procedimientos tratados en estas dos tareas consisten en continuar cada secuencia uno o dos términos más y, a continuación extrapolar saltando sobre varios términos.

La tarea central es la Tarea 10; en ella se presenta la sucesión de números cuadrados mediante configuración puntual y se pide continuarla, extrapolar un término y expresar el término general. La orden que se les da, literalmente, es:

"Ahora hacéis una ***representación*** del término que ocupa el lugar n".

Los alumnos quedan desconcertados; en este momento se les proporciona la argumentación siguiente:

(RP). Veis que vamos siguiendo un orden creciente, cada término ocupa un lugar que está dado por un número de orden y que el cuadrado que hacemos está relacionado con ese número de orden. Pues bien, pretendemos dibujar un término que ocupe un lugar que vamos a designar por n, esta letra n va a representar a uno cualquiera de los otros términos uno general, uno cualquiera por lo que ha de ser semejante a ellos.

(PA). ¿Represento el término que yo quiera?

(RP). No, el que tiene que estar en el lugar n poniendo en cada fila del cuadro aquello que esté de acuerdo con el resto de la secuencia.

Los alumnos hacen intentos para resolver la tarea pero no están seguros de lo que están haciendo, lo que crea un cierto desconcierto que se traduce en que se consulten entre ellos y no trabajen en silencio. El profesor intenta animarlos por lo que les dice:

(C). Esto que estáis haciendo no lo habéis hecho antes, por lo que no tenéis por qué saber hacerlo perfectamente pero, podéis intentarlo, después yo os diré si vuestros resultados son, o no, correctos.

(R). Hay que tener en cuenta qué se ha hecho en el lugar 5º y en el 7º y de la misma manera hay que actuar para el lugar enésimo.

(RA). Lo que hay que poner en la primera fila es fácil, una n con un cero pequeño, lo difícil es la representación.

(R). Repasad lo que hemos hecho para los primeros términos, como son los dibujos en cada uno de ellos y de acuerdo con eso dibujad el término que ocupa el lugar y que se llama enésimo.

Se produce un pequeño silencio, los alumnos intentan llegar a la solución.

(PC). El profesor entiende que ha llegado el momento intervenir, y ayudar a los alumnos a razonar y guiarlos para que den algún tipo de respuesta

(PP). ¿Como habéis dibujado el término 5º?

(RA). (respuesta en común) Es un cuadrado que tiene de lado cinco puntos.

(PP). ¿Y el término 7º?

(RA). (respuesta común) Un cuadrado de siete filas y siete columnas.

(R) Luego podéis pensar que el término enésimo tiene una forma y un tamaño concreto.

(RA). Si, yo se que es un cuadrado de n puntos en las filas y n puntos en las columnas, pero no se eso como ponerlo.

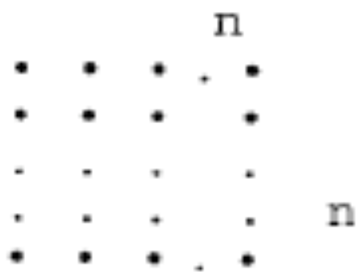
(PP). ¿Que forma tiene?

(RA). Forma de cuadrado

(PP). ¿Cuantos puntos tiene de lado dicho cuadrado?

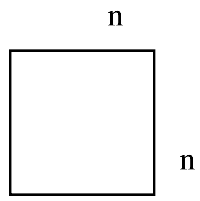
(RA). Ene puntos.

(I). Eso se representa haciendo una interrupción en la representación y poniendo unos puntos suspensivos, pero dado que la representación que estamos utilizando es de puntos puede llevarnos a confusión por lo que podemos utilizar unas rayitas en lugar de los puntos. Les hace en el encerado la representación siguiente:



(IA). Los alumnos que han hecho su propia representación lo indican.

(PA). Yo he hecho una representación de ene cuadrado con un cuadrado donde he indicado que el lado del mismo es n.



(RP) La idea es buena, aunque no refleja exactamente que los dibujos están hechos a base de puntos, ya que la figura que habéis dibujado está hecha con una sola línea. La forma que yo os he dicho es la que usualmente se utiliza.

(PP). Supongo, que no tenéis problemas para rellenar la última fila de la tabla.

(RA). No, hay que poner n^2.

En este momento hay que discutir la interpretación de "***un término cualquiera***" ya que puede confundirse con la elección por parte del alumno del término que se quiera. Hay varios intentos pero se detecta inseguridad. Se establece un diálogo que lleva a la conclusión de que el término enésimo es un cuadrado con n puntos de lado; el profesor tiene que hacer la representación.

Algunos alumnos han utilizado una representación continua para el cuadrado de lado n, lo cual es lógico por resultar familiar. En este caso el desarrollo aritmético del término n-ésimo no presenta problemas. La sesión concluye con las Tareas 11 a 14 en las que trabajan individualmente; en todas ellas hay que continuar una secuencia, obtener su término enésimo y, a continuación, traducir sus términos a los restantes sistemas simbólicos. Hay dos ejemplos dados mediante representación puntual: los números impares -en dos versiones diferentes- y los antecesores de los números cuadrados; el tercer ejemplo es el de la sucesión de números triangulares dada mediante desarrollo aritmético; el cuarto ejemplo es el de los números pares en notación numérica usual.

La noción de término general de una sucesión es el núcleo principal de esta Sesión.

Cuarta Sesión

Se desarrolla esta sesión el día 16 de Marzo de 1993. La sesión se destina a analizar, en detalle, las Tareas 11, 12, 13 y 14; se plantea dos nuevas tareas no planificadas, que denominamos 14-bis y 15-bis, y presenta las Unidades de Actuación 3, 4, 7, 13, 18, 19, 21, 23, 24, y 28.

Comienza la sesión corrigiendo los resultados de continuar, extrapolar, representar el término general y traducir los términos a desarrollos aritméticos sobre la secuencia de números impares dados en configuración puntual. Estos procedimientos facilitan la ***obtención de una fórmula o expresión algebraica*** para el término general; algunos alumnos encuentran expresiones como 2n-1 y n+(n-1). No todos los alumnos comparten las expresiones anteriores; se genera una discusión interesante sobre la confusión respecto de la variable que indica la posición del término y la expresión del término. Dos alumnas profundizan el debate:

(RA). Yo digo que cualquiera de las dos expresiones n+(n-1) o 2n-1 es buena por que las dos son iguales y nos dicen los puntos que hay en el término enésimo. No podemos escribir n por que sería igual que lo que hay en la primera fila

(RA). Yo no estoy de acuerdo con ella, pues quiero poner una expresión simple y no un desarrollo.

(I). No es posible indicar el número de puntos que hay en el término enésimo, con una expresión simple. Hemos de elegir entre n+(n-1) que parece indica mejor que tenemos dos filas y una de ellas tiene un punto menos que la otra y 2n-1 que parece indicar dos filas iguales con un punto en común.

(PA). Entonces puedo poner n+(n+1) ya que también en esta expresión se indican dos filas en donde una de ellas tiene un punto más que la otra.

(RP). Piénsalo y comprueba si es, o no, correcto.

(RA). Si, porque siempre hay un punto más en la fila que en la columna.

(RA). No estoy de acuerdo porque eso no coincide con lo que hay en los primeros términos.

Alumna A, identifica las expresiones n+(n-1) y 2n-1 como válidas y equivalentes.

Alumna B, rechaza ambas expresiones "***por ser un desarrollo y no una expresión simple***".

La intervención del profesor aclara la imposibilidad de expresar el término n-ésimo con una expresión simple. Continúa la polémica entre las dos alumnas al considerar B la expresión alternativa n+(n+1) válida como término general. Se verifican las dos opciones, n+(n-1) y n+(n+1), con valores concretos para superar el bloqueo; las alumnas desarrollan argumentos y llegan a un acuerdo sobre el término general adecuado, al menos para los que siguen el debate.

Se plantea de nuevo el rechazo del valor "n" como expresión del término general; se llega a la distinción entre el orden del término -variable- y su valor -función, para el caso de los números impares. Finalmente se comparan las variantes en la expresión del término general: dependiendo del tipo de desarrollo considerado; se establece la equivalencia entre ambas.

La Tarea 15-bis se ha planificado a la vista de los desarrollos aritméticos presentados por los alumnos para la secuencia de las representaciones puntuales de los antecesores de los números cuadrados. Se presentan tres opciones:

a) n+(n+1)n

b) $(n+1)^2-1$

c) $n^2+ 2n$

y se pide a los alumnos que hagan la representación puntual de los tres primeros términos y del término general para cada una de las notaciones anteriores. Por cada desarrollo aparecen dos representaciones diferentes en la puesta en común; al pedirle que comprueben si hay alguna representación que sirva para más de una de las notaciones propuestas, se pone de manifiesto que la representación presentada en la Tabla 13 es adecuada para los desarrollos a), b) y c). Se concluye así la equivalencia entre los desarrollos y las representaciones.

Finalmente se trabaja sobre el Problema del número de lados y diagonales en un polígono regular presentado como Tarea 14-bis surge una nueva unidad de Actuación y que hemos numerado como 28. Se estructuran los datos de los primeros polígonos en una tabla para su identificación y estudio como una secuencia; se discute la posición que ocupa en la secuencia un polígono particular, se obtiene el número de segmentos para ese caso y se concluye calculando la expresión del término general. De nuevo el análisis en esta sesión se centra en la expresión del término general de una secuencia y en su traducción a una configuración puntual.

Quinta Sesión

Esta sesión tiene lugar el día 22 de Marzo de 1993. En ella se trabaja en las tareas 15, 16, 17, 18, 19, 20 y 21; en esta sesión se presentan las Unidades de Actuación 20, 21, 22, 24, 35, 36 y 27. Se comienza repasando la noción de "*expresión del término general de una sucesión*"; sigue presentándose la confusión entre la posición del término n-ésimo: n, y su expresión algebraica, que es la generalización del desarrollo aritmético que comparten los términos de la secuencia. Hecha esta revisión se pasa a obtener términos concretos de la secuencia a partir del término general, es decir, se aplica la noción de término general.

Una segunda parte se dedica a obtener la expresión general de los números triangulares a partir de la expresión general de los números rectangulares; obtenida esta expresión general, de nuevo se aplica para obtener los primeros términos de la secuencia. Finalmente, en base a descomposiciones gráficas de los números cuadrados en dos números triangulares se establece la relación general $C_n=T_n+T_{n-1}$ La Sesión concluye proponiendo a los alumnos la realización individual del resto de las tareas, diseñadas de la 19 en adelante.

IV.3.2. Observación

Al finalizar la Fase de Actuación en el aula queremos destacar:

* La variedad de interpretaciones que hacen los alumnos al traducir entre los diferentes sistemas simbólicos de representación.

* Las dificultades para entender la noción de término general de una secuencia.

* Las limitaciones que presentan los sistemas simbólicos para esta idea de término general. Algunos de estos problemas se han puesto de manifiesto a lo largo del debate, y

esperamos que en el análisis de los trabajos realizados individualmente por los alumnos se destaquen y perfilen con mayor claridad.

* La mayor crítica que tenemos que asumir sobre el desarrollo de estas sesiones es la intervención del Profesor resolviendo los conflictos de interpretación y comprensión de los conceptos y procedimientos implicados en determinados momentos clave en donde quizá hubiera sido necesario conseguir una profundización mayor en las contradicciones mostradas por determinados planteamientos de los alumnos.

IV.3.3.Reflexión y análisis sobre la acción.

Una vez concluida la Fase de Actuación la primera reflexión se dirige a destacar que la secuencia que establecen las Unidades de Actuación no tiene un desarrollo lineal; esto ya se comentó en el Análisis de la Planificación: y queda suficientemente claro al realizar un seguimiento de la Acción mediante las Tareas diseñadas: en cada Tarea concurren dos o más Unidades de Actuación, por lo general. Por ello, es también usual que una misma Unidad de Actuación se presente más de una vez a lo largo del desarrollo de las sesiones de trabajo en esta Fase de Acción. Considerando la secuencia de unidades de actuación realizada en cada sesión de trabajo, elaboramos la siguiente tabla:

SESIONES	TAREAS	UNIDADES DE ACTUACION
Primera	1 a 6	1-> 2-> 3-> 6/7
Segunda	6 a 7	6/7-> 6/7-> 11/5-> 10/6
Tercera	8 a 10	6/14-> 12/18-> 8/14/20-> 7/19-> 8/20-> 12/14
Cuarta	11 a 21	7/13/19-> 21/19/23-> 3/4-> 28/18/24
Quinta	15 a 21	25/21/22/25/26/25-> 20/24-> 20/26-> 27

El orden temporal del desarrollo es de izquierda a derecha. En cada fila aparecen agrupadas las diferentes Unidades de Actuación tratadas en una misma tarea. Por este tratamiento en el aula de las diferentes Unidades de Actuación encontramos que en cada sesión las tareas se han presentado mediante distintas categorías de Interacción Didáctica.

En la tabla 6 hacemos un recuento de las diferentes categorías de Interacción Didáctica que han organizado las distintas Unidades de Actuación.

Tabla 6: Categorías de Interacción Didáctica por Unidad de Actuación

CID ________ CCM	M	I	A	C	PC	IA	R	S	Total
1.	x		Xx	xx	xx	xx	x		10
2.	x		X						2
3.		x	Xx	xx	xx	x	x		9
4.					x		x		2
5.			X	x					2
6.	x	xxx	Xxxxx	x	x	x	x		13
7.	xx		Xxxxx	xx	xx	x		x	13
8.	xx	x	Xxx		x				7
10.			Xx						2
11.			X	x					2
12.	x		Xx		x		x		5
13.					x				1
14.	x		Xxx	xx	x				7
18.	x		X	xx	x		x		6
19.	x	xxxx	Xx	x	xx		xxx	xxx	16
20.	x	xxxxxxxx	Xx	x	x	xxx	xxx		19
21.		x		xxxxx		xxx	xx		11
22.						x	x		2
23.		x			x				2
24.		x	Xx	x					4
25.		xx			x		x	xx	6
26.				x			xx		3
27.		x	X				xx		4
28.	x		X	xxxx	x	x	x		9
totaL	13	23	36	26	19	13	21	6	157

Comparando con la planificación vemos que las unidades 4, 13, y 23 han recibido finalmente tratamiento. Aparece una Nueva Unidad de actuación, la número 28, que corresponde a la Aplicación de los Conocimientos sobre sucesiones a la Resolución de Problemas; esta unidad no estaba prevista en la planificación. Globalmente, el número de Unidades de Actuación realizada ha sido de 157, lo que supone un aumento del 45% sobre las previstas. Desglosando las categorías PC e IA según las intervenciones de los Profesores y de los Alumnos obtenemos la información siguiente de la tabla 7:

Tabla 7: Intervenciones de alumnos y profesor en las categorías de PC e IA

unidades de actuación	PC				IA			
	PP	RA	PA	RP	PA	RP	PP	RA
1.	18	18			3	3		
2.	1	1						
3.	7	13			2	1		
4.	2	3						
5.								
6.	6	8			1	1		
7.	3	3			2	2	1	1
8.	2	2	1	1				
10					3	3		
12	2	2	1	1				
13.	1	1						
14.	2	2						
18.	3	4	1	1				
19.	4	7	1	1				
20.	8	11			3	3	1	2
21.	6	12		3				
22.	4	7		3				
23.	1	6	1					
24.	1	2						
25.	5	4						
26.	8	10		1				
27.	5	7		1				
28.	10	14						
Total	99	137	5	12	14	13	2	3

El total de intervenciones del Profesor es de 126, mientras que el de los Alumnos es de 159.

IV.4. Fase de Observación

A continuación presentamos un resumen y análisis de los documentos escritos obtenidos en el desarrollo de las clases de 8º de E.G.B, comprende los resultados de las tareas realizadas por los alumnos de este nivel en relación con nuestra investigación.

Cambios experimentados en la programación establecida hacen que no dispongamos de documentos escritos de las tareas 3, 4, 16, 17 y 18 ya que se realizaron y se corrigieron sobre la marcha de la clase y se consideraron como parte de la información. Aparece la tarea 15-bis que no había sido programada y que se consideró de interés introducir, dada la evolución del trabajo. Los datos obtenidos en cada tarea se organizan y analizan según las Categorías de Comprensión del Contenido (CCC), como ya se hizo en 7º nivel.

IV.4.1. Organización de los resultados obtenidos por tareas

Tarea 1 ***Haced tres representaciones distintas del número seis utilizando puntos.***

Corregida la tarea obtenemos los siguientes resultados:

Todos los alumnos realizan la tarea; ocho de ellos han dado tres respuestas solamente, los demás han sobrepasado el número pedido (la tabla 8 muestra el número de respuestas dadas por los alumnos y la frecuencia con que ha aparecido dicho número) proporcionando 181 resultados. Los resultados los hemos analizado y clasificado de acuerdo con la Segunda Categoría de Comprensión del Contenido, que tenía los apartados: 2-a Tipo de figura, 2-b Estructuración de la figura, 2-c Variedad de configuraciones .

Al considerar los tipos de figuras realizados observamos:

* Representación en una dimensión. Los seis puntos están colocados formando una línea recta. Han sido 14 las representaciones que han aparecido de este tipo.

* Representaciones en dos dimensiones. Los seis puntos están dispuestos según dos dimensiones formando figuras que unas veces son geométricas, otras son representaciones de objetos familiares y otras no tienen, para nosotros, un significado concreto. 166 respuestas corresponden a esta categoría.

* Representaciones en tres dimensiones. Los puntos se colocan formando una figura tridimensional. Ha aparecido una sola respuesta en esta clase.

Tabla 8. Número de respuestas dadas por los alumnos.

nº repres.	3	4	5	6	8	9	11	12	14	Total
frecuencia	8	5	9	3	2	1	1	2	1	181

Clasificamos las representaciones bidimensionales; no lo hacemos con las representaciones lineales (pues no presentan variedad) ni con las de tres dimensiones (pues sólo ha aparecido un caso). Si atendemos a la estructuración de las figuras representadas, limitándonos a las de dos dimensiones, encontramos dos criterios:

* ***formato***, que puede ser:

geométrico -G- la representación es una figura geométrica;

figurativo -F- representa una figura familiar;

no figurativo -NF- si la representación no responde a los conceptos anteriores.

**** organización***, en este caso la representación puede ser:

simétrica -S-,

escalonada - E-,

no tener una organización reconocible, la designamos -SO-**.**

La tabla 9 muestra un ejemplo de las distintas variantes de representación, según el formato. La tabla 10 proporciona la clasificación de todos los datos obtenidos en esta primera tarea.

En esta, como en todas las tablas posteriores en las que se den resultados de trabajos de los alumnos, aparece en una primera columna el número asignado al alumno.

En la segunda columna se anota el número de representaciones que ha realizado cada alumno (NR).

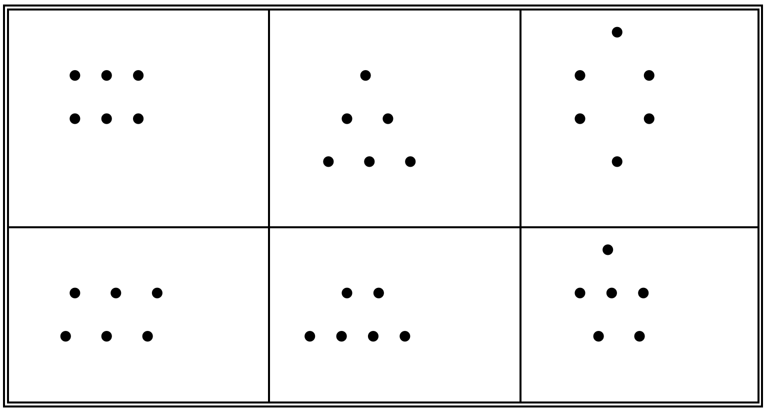
En la tercera columna, el número de dichas representaciones que son de dos dimensiones (NS).

Las tres columnas siguientes recogen el número de representaciones atendiendo a su ***formato*** (G) geométrico, (F) figurativo, (NF) no figurativo.

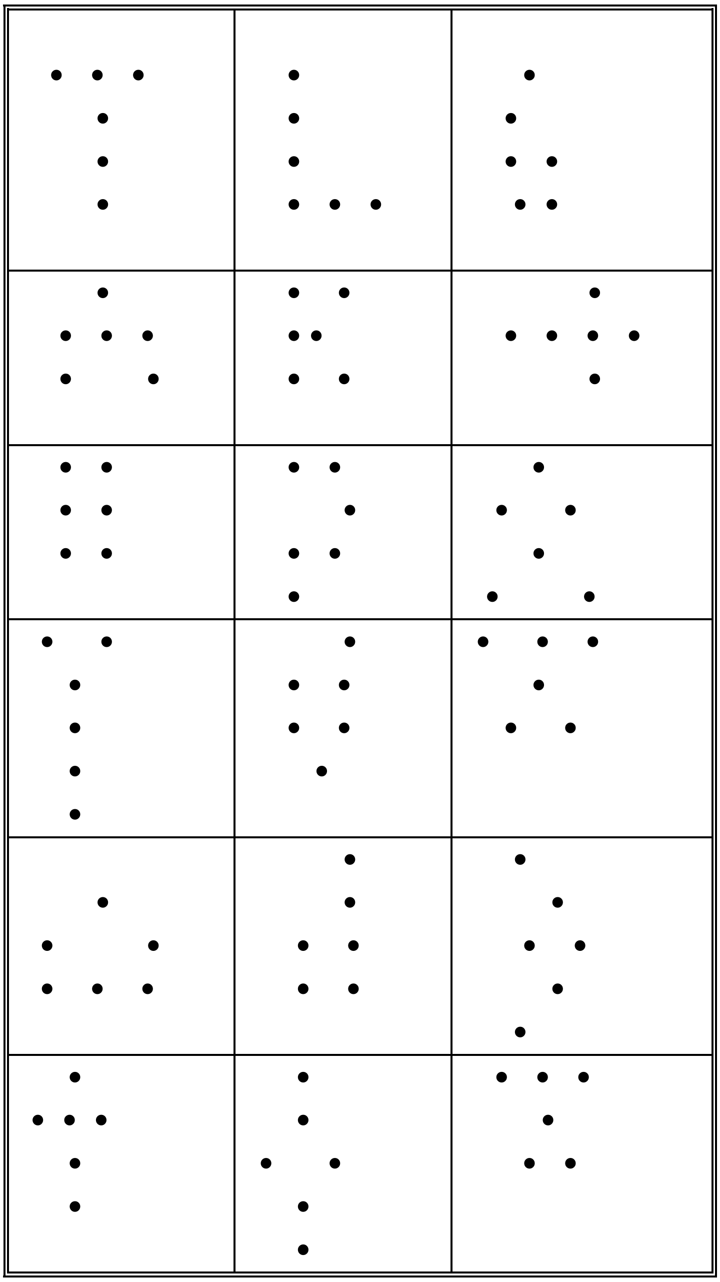
Las tres últimas columnas clasifican los datos según su ***organización***: (S) simétricas, (E) escalonadas, (SO) sin una organización reconocible.

Tabla 9. Clasificación de las representaciones aparecidas.

GEOMETRICAS



FIGURATIVAS



NO FIGURATIVAS.

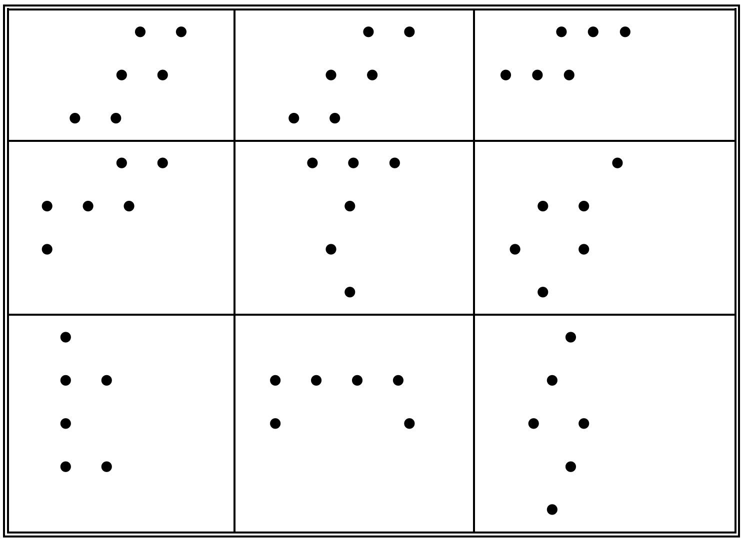


Tabla 10: Clasificación de los resultados de la tarea 1.

N	Nº R	Su	G	F	NF	Si	E	SO
01	6	6	2	4	-	3	1	2
02	14	14	4	10	-	9	1	4
03	5	4	2	2	-	4	-	-
04	3	3	3	-	-	3	-	-
05	5	4	4	-	-	4	-	-
06	4	4	3	1	-	2	1	1
07	5	5	3	2	-	4	-	1
09	5	4	2	2	-	2	-	2
10	3	2	1	1	-	2	-	-
11	11	10	3	7	-	5	2	3
12	3	3	3	-	-	3	-	-
13	6	5	3	2	-	4	-	1
14	4	4	3	1	-	4	-	-
15	5	4	1	3	-	2	-	2
16	5	5	2	-	3	3	-	2
17	5	4	2	1	1	4	-	-
19	5	5	3	2	-	5	-	-
20	12	12	4	8	-	8	1	3
21	4	3	3	-	-	3	-	-
22	5	4	3	1	-	3	-	1
24	3	3	1	2	-	1	-	2
25	8	7	3	2	2	4	1	2
26	8	7	3	2	2	3	2	2
27	4	4	3	1	-	3	-	1
29	6	5	4	1	-	4	-	1
30	4	3	2	1	-	3	-	-

31	3	3	3	-	-	3	-	-
32	12	11	2	5	4	7	2	2
33	3	3	1	2	-	3	-	-
34	3	3	1	2	-	2	-	1
35	3	3	2	-	1	2	-	1
36	9	9	4	5	-	6	1	2
total %	181	166	83 50	70 42	13 8	118 71	12 7	36 22

Tabla 11: Cruce entre los criterio formato y organización en las representaciones en dos dimensiones

	Geométricas	figurativas	no figurativas	total
simétricas	6 formas ————— 79 representaciones	12 formas ————— 38 representaciones	1 formas ————— 1 representaciones	118
escalonadas	1 formas ————— 4 representaciones		5 formas ————— 8 representaciones	12
sin organización		8 formas ————— 32 representaciones	4 formas ————— 4 representaciones	36
total	83	70	13	166

Tarea 2 ***Elige tres números pequeños y represéntalos utilizando un mismo patrón de puntos.***

Analizamos los resultados de esta tarea según la categoría: 2.c: Variedad de configuraciones en la representación de un mismo número. No unicidad de este código y 5.a: Reiteración de una determinada forma a distintos tamaños, manteniendo un criterio uniforme para el cambio de tamaño.

De los 32 alumnos que asisten a clase, 26 hacen esta tarea de acuerdo con la consigna dada; seis alumnos, se apartan de dicha consigna y hacen algo distinto.

Según el tipo de figura empleada las respuestas de los alumnos se clasifican del siguiente modo:

I.- Lineales (5 casos).

II.- En dos dimensiones (74 casos).

a) geométricas (49)

b) figurativas (22)

c) otras (3)

III.- Tridimensionales (1 caso).

En la tabla 12 presentamos una clasificación de las representaciones que los alumnos han realizado. Según la terna de números utilizada:

Tabla 12: Ternas de números y formas de representación

Terna	frecuencia	formas	lineal	geomé-trica	figurativa
(2,3,4)	1	1	*		
(3,5,7)	5	2		*	
(3,6,9)	4	3		*	*
(3,6,10)	9	3		*	
(3,6,15)	1	1		*	
(3,10,15)	2	2		*	
(4,6,8)	4	4	*	*	
(4,6,10)	4	4	*	*	*
(4,7,10)	1	1		*	
(4,8,10)	4	4		*	*
(4,8,12)	2	2		*	
(4,9,16)	7	3		*	*
(4,12,20)	1	1		*	
(4,16,25)	1	1		*	
(5,6,7)	5	4	*		*
(5,6,8)	1	1		*	
(5,7,9)	4	3		*	*
(5,7,10)	1	1			*
(5,7,11)	1	1			*
(6,8,10)	3	2		*	
(6,9,12)	1	1		*	
(6,9,14)	5	5		*	*
(6,10,15)	1	1		*	
(6,12,16)	1	1			*
(7,8,9)	1	1			*
(7,9,11)	4	3			*
(7,9,12)	1	1			*
(7,10,16)	1	1			*
(8,12,15)	1	1			*
(9,10,11)	1	1			*
(9,12,22)	1	1			*
(11,13,15)	1	1			*
total 32	total 80				

Además de estas, la terna (5,10,14) con una representación tridimensional.

Las ternas que comienzan por 3, 4 y 6 se representan mediante una figura geométrica, principalmente.

Las ternas que comienzan por 5, 7, 8, 9 y 11 utilizan representaciones figurativas de objetos, letras y números.

Las distintas ternas presentadas se ajustan a patrones numéricos distintos:

* Patrón lineal o diferencia constante: (2,3,4); (3,5,7); (3,6,9); (4,6,8); (4,7,10); (4,8,12); (4,12, 20); (5,6,7); (5,7,9); (6,8,10); (6,8,10); (6,9,12); (6,10,14); (7,8,9); (7,9,11); (9,10,11); (11,13,15) son el 49%.

* Patrón de diferencia segunda constante: (3,6,10); (4,9,16); (4,6,10); (5,6,8); (5,7,10); (5,7,11); (6,10,15); (7,9,12); (7,10,16) son el 27%.

* Sucesión creciente, con aumento en las diferencias: (3,6,15); (6,12,22) constituyen el 6%.

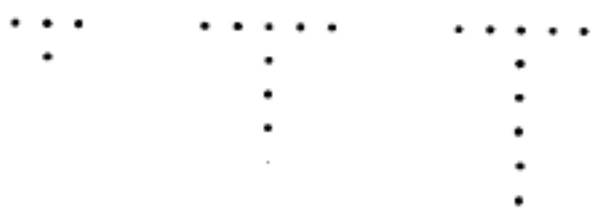
* Sucesión creciente, con disminución en las diferencias: (3,10,15); (4,8,10); (4,16,25); (5,10,14); (6,12,16); (8,12,15) constituyen el 18%.

Ahora bien, esta clasificación no se ajusta exactamente a la interpretación que hace el alumno; así ocurre con la terna (4,6,10) en la que el patrón responde a una secuencia de números pares, en la que se ha olvidado el número 8.

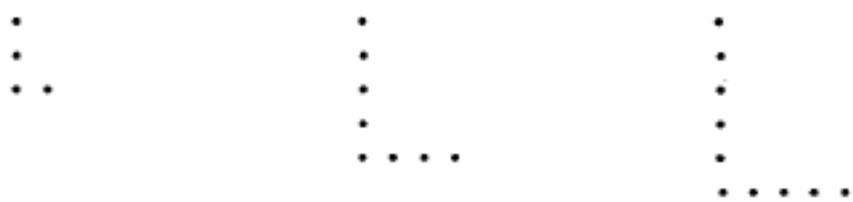
También hay ternas cuya representación no mantienen un patrón

Las respuestas que no mantienen el patrón representan algo menos del 18%; en todos los casos se sigue la disposición elegida para los puntos pero no se mantiene la regularidad entre una representación y la siguiente. Por ejemplo en el caso del alumno nº 22 que realiza tres representaciones para los números 4, 8 y 10 en las que no sigue una regularidad, al aumentar el número de puntos, salvo que aumentan de tamaño las figuras.

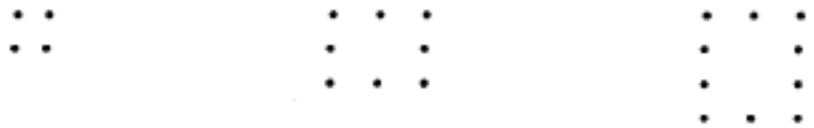
a)



b)



c)



En el caso del cuadrado, por ejemplo, el paso del primero al segundo término de la secuencia se hace aumentando uno en los cuatro lados, sin embargo el paso del segundo al tercer término se hace aumentando un punto solo en dos de las caras.

Tarea 5 ***Escribe tres desarrollos del número 15 utilizando sobre todo las operaciones de suma y de producto.***
Toma uno de estos desarrollos y representalo utilizando puntos.

El análisis de la primera parte de esta tarea lo realizamos teniendo en cuenta la Categoría 3 de Comprensión del Contenido, para ello hay que considerar 3a: Desarrollos aritméticos distintos para uno o varios números; 3b:. Desarrollos estructuralmente diferentes; 3c: Tipos de operaciones implicadas en los desarrollo. Los desarrollos del número 15 están hechos, mayoritariamente, utilizando la operación suma por dos razones fundamentales:

En primer lugar se indicó a los alumnos que utilizaran preferentemente las operaciones de suma y producto; en segundo lugar, con el producto sólo hay una posibilidad 3x5 mientras que con la suma las posibilidades son mucho más variadas. No obstante, han aparecido desarrollos que utilizan otras operaciones, como vemos en el resumen de los resultados.

En la tabla 13 se presentan los distintos desarrollos del número 15 realizados por los alumnos, así como la frecuencia con que aparece cada uno de ellos:

Tabla 13: Tipos de desarrollos y frecuencia de aparición.

operación	desarrollo	nº de respuestas
suma con dos sumandos		
	15=10+5	10
	15=11+4	3
	15=14+1	1
	15=6+9	1
	15=13+2	1
	15=8+7	2
suma con tres sumandos		
	15=5+5+5	12
	15=7+7+1	3
	15=2+6+7	1
	15=4+5+6	5
	15=4+4+7	2
	15=5+9+1	1
	15=2+7+6	1
	15=10+2+3	2
	15=8+4+3	1
	15=8+1+6	1
	15=9+4+2	1
	15=7+3+5	2
	15=11+2+2	1

	15=2+3+10	1
suma con cuatro sumandos		
	15=3+2+5+5	1
	15=3+6+3+3	1
	15=3+5+5+2	1
	15=3+4+3+5	1
suma con cinco sumandos		
	15=1+2+3+4+5	3
	15=2+5+1+2+1+4	1
producto de dos factores		
	15=3x5	13
	15=15x1	5
	15=30x0.5	1
	15=2x7.5	5
diferencia y suma:		
	15=21-8+2	1
diferencia		
	15=25-10	1
	15=16-1	1
	15=21-6	1
	15=20-5	2
	15=50-30-5	2
suma y producto		
	15=7x2+1	2
	15=2x5+5	4
	15=3x3+6	2
	15=9+3x2	1
	15=2x2+11	1
	15=2x3+3x3	1
producto y diferencia		
	15=6x4-9	1
	15=5x5-10	1
	15=5x2+10(-5)	1
división		
	15=60:4	1
	15=300:20	1
potencias		
	$15=4^2-1$	2
	$15=3^2+2x3$	1
	$15=2^4+2^2++1$	1
	$15=3^2+2^2+2$	1
	$15=1^2+2^2+3^2+1^2$	1
radicales		
	$\sqrt{15}= 225$	
total	53	115

El segundo apartado de la tarea pide que se haga una representación de uno de estos desarrollos; los resultados son: 24 de los 32 alumnos realizan dos, o más, representaciones.

En la tabla 14 se resume el trabajo realizado por los alumnos en esta parte de la tarea.

En la segunda columna se indica el número de representaciones que ha realizado cada alumno. En las cuatro columnas siguientes se clasifican los desarrollos que los alumnos han representado, según el tipo de operación utilizado: (+) suma; (.) producto; (+.) suma y producto, (O) si se ha utilizado otro tipo de operación, en esta columna indicamos con R si se ha utilizado la operación de resta en el desarrollo y con F si la representación responde a un friso. Una última columna encabezada por SI da todos aquellos casos en los que cada sumando se visualiza independientemente en la representación Tabla 14: Representaciones asociadas a un desarrollo del número 15.

N	Nº.R	+	•	+ .	O	SI
1	xx	x	-	x	-	Xx
2	xxx	xx	-	-	R	Xxx
3	xx	x	x	-	-	X
4	x	x	-	-	-	X
5	xx	x	x	-	-	X
6	x	x	-	-	-	X
7	xxx	xx	-	x	-	Xxx
9	xxx	xx	x	-	-	Xx
10	xx	x	-	x	-	Xx
11	x	-	-	-	F	-
12	xx	x	x	-	-	X
13	x	-	x	-	-	-
14	xxxxxx	xxx	x	x	R	Xxxxx
15	xxx	xxx	-	-	-	Xxx
16	xx	x	x	-	-	X
17	xx	xx	-	-	-	Xx
19	xx	xx	-	-	-	Xx
20	xxx	xxx	-	-	-	Xxx
21	x	-	x	-	-	-
22	xx	xx	-	-	-	Xx
24	xxxxx	xx	-	xxx	-	Xxxxx
25	xxxx	xxx	x	-	-	Xxx
26	xx	x	x	-	-	X
27	x	x	-	-	-	X
29	x	x	-	-	-	X
30	xxx	xx	x	-	-	Xx
31	xxx	xx	x	-	-	Xx
32	x	x	-	-	-	X
33	x	x	-	-	-	X
34	xx	x	x	-	-	X
35	xxxxx	-	x	xxx	R	Xxxx
36	xx	x	-	-	R	Xx
total %	74	45 61	14 19	10 14	5 7	

La tabla muestra que aproximadamente el 60% hacen una representación que corresponde a un desarrollo donde se utiliza la suma. Algo más del 18% hace una representación de un desarrollo donde se utiliza el producto. También, algo más del 13% hacen una representación donde se han utilizado la suma y el producto para hacer el desarrollo. La suma de la última columna es 59 coincide con el resultado de sumar las columnas indicadas con +, ∑, +∑ y O (menos uno que es el nº 11) esto nos asegura que todos los alumnos que hacen una representación de un desarrollo en el que aparece la estructura aditiva, indican cada sumando como un elemento independiente en la representación.

A continuación presentamos una clasificación de los desarrollos del número 15 representados por los alumnos; para hacer la clasificación vamos a tener en cuenta las operaciones empleadas e indicaremos algunos ejemplos.

Suma

Para la suma consideramos: sumas formadas por sumandos simples y sumas cuyos sumandos son productos (incluimos en este apartado las potencias considerándolas como producto de factores iguales).

Sumas de sumandos simples

Hay 42 casos, que presentan las siguientes variantes:

* Cada sumando es una fila, pueden ser seguidas o paralelas (10 casos)

3+3+4+5 en cuatro líneas paralelas.

* Cada sumando es una fila de puntos los cuales forman una figura (28 casos)

5+4+2+4, representa un muñeco

7+3+5, forma la figura de un barco de vela

4+4+7, los dos 4 están representados como un triángulo, el 7 como una línea recta entre ellos.

7+7+1, cada siete es un "escalón" formado por dos filas una de cuatro puntos y otra de tres.

5+5+5, un rectángulo de 2x5 y una fila de cinco paralela al rectángulo y separada de él por el signo +.

* Cada sumando es una forma -no lineal- distinta (4 casos)

7+3+4, se representa el 7 como un rectángulo de 3x2 y un punto al lado, a continuación está representado el tres como un triángulo y a continuación el cuatro por un cuadrado.

9+6, como un cuadrado 3x3 y al lado un rectángulo de 2x3.

5+5+5, cada uno de los cincos es la cara de un dado, (en este caso los tres dados los consideramos distintos).

Sumas en cuyos sumandos intervienen productos

Se presentan 10 casos, con las siguientes variantes:

* Cada sumando se representan por una fila de puntos (3 casos, dos de ellos del mismo alumno):

5.2+5, son dos filas de cinco puntos consecutivas.

*Productos representados como rectángulos, (5 casos):

2x6+3, un rectángulo de dos por seis y una línea de tres.

2x5+5, un rectángulo de dos por cinco y el contorno de un pentágono.

* Cada sumando es una potencia de dos y se representan por cuadrados:

3^2+2^2+2, los dos primeros sumandos son dos cuadrados de lados 3 y 2.

3^2+3x2, un cuadrado de 3x3 y un rectángulo de 3x2.

Producto

Se presentan 11 casos

3x5, se representa como un rectángulo (6 casos), el mismo rectángulo sirve en dos ocasiones para representar 5+5+5).

3x5, como friso, repetir un modelo de forma lineal (3 casos).

3x5, con dos dados uno con la cara del tres y el otro con la cara del cinco (1 caso).

3x5, representado en una fila de 15 puntos separados de cinco en cinco por una coma (1 caso).

Resta

Han aparecido 4 casos en los que el desarrollo representado corresponde una operación de resta.

Dos tiene una representación lineal.

16-1, dieciséis puntos y además uno separado de la línea anterior.

25-10, veinticinco puntos en línea recta, diez de ellos subrayados.

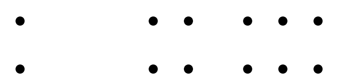
Una representación mixta, parte lineal y parte no lineal.

20-5, un rectángulo de 5x4 seguido de una fila de cinco puntos.

Una representación no lineal

16-1, un cuadrado de 4x4 y un punto a la derecha.

Tarea 6 ***Dada la siguiente secuencia de puntos***



Síguela tres lugares más.

Escribe debajo de cada dibujo el número que representa.

Debajo de cada número haz un desarrollo del mismo de manera que esté de acuerdo con el patrón elegido.

El análisis de los resultados de esta tarea se realiza según el apartado **a** de la CCC nº 8; 8a: Prolongar una secuencia de dos o tres números que vienen dados mediante configuración puntual o desarrollo numérico: selección o reconocimiento de estructura.

En la tabla 15 se recogen las soluciones a la tarea. La 2ª columna contiene los resultados de seguir la secuencia tres lugares; indicamos con x que se tiene en cuenta el patrón para continuar la secuencia y con **-** que no se tiene en cuenta.

La tercera columna recoge la secuencia numérica que está representada, en esta ocasión también se indica con x el caso correcto y con - el incorrecto. En la cuarta columna se recogen, para cada alumno, todas los desarrollos que haya presentado.

La observación de las dos primeras columnas de la tabla indican que ningún alumno presenta fallos en la resolución de los dos primeros apartados de la tarea. La cuarta columna indica para cada uno de los casos, a qué expresión responden los cinco términos del desarrollo.

Tabla 15: Resultados de la tarea 6.

N	continuar	secuencia numérica	desarrollo de la secuencia numérica
01	x	x	n+n / 2n
02	x	x	n+n / 2n / $2+2+2..._{n}...+2$
03	x	x	n+n / 2n
04	x	x	n+n / $2.1, 2^2, 2.3, 2^3, 2.5$
05	x	x	n+n / 2n / $2+2+2..._{n}...+2$
06	x	x	n+n / 2n
07	x	x	2n
09	x	x	n+n / 2n
10	x	x	2n / 1+1, 4+0, 4+2, 4+4, 4+6
11	x	x	n+n / $2+2+2..._{n}...+2$
12	x	x	n+n
13	x	x	n+n
14	x	x	$2.1, 2^2, 3.2, 2+2+2^2, 5.2$
15	x	x	n+n / 2n
16	x	x	n+n
17	x	x	1+1, 2.2, 3+3, 4.2, 5+5, 6.2
19	x	x	n+n / 2n / $2+2+2..._{n}...+2$
20	x	x	n+n / 2n
21	x	x	n+n / 2n
22	x	x	n+n
24	x	x	2n
25	x	x	n+n / 2n
26	x	x	n+n / 2n / $2+2+2..._{n}..+2$ / $2, 2^2, 2.3, 2^3, 2.5$
27	x	x	2n
29	x	x	2n / $2+2+2..._{n}...+2$
30	x	x	n+n
31	x	x	n+n
32	x	x	n+n / 2n
33	x	x	2n
34	x		$2^1, 2^2, 2^2+2, 3^3, 3^3+2$
35	x	x	n+n
36	x	x	n+n / 2n / 2+2+2..n.+2

Seguir la secuencia puntual no presenta dificultad para los alumnos que como muestra la segunda columna de la tabla, todos lo hacen bien; los números representados en la misma se obtienen también con facilidad, como se observa en la columna tercera de la tabla; en cuanto a los desarrollos de dichos números, los alumnos han escrito todas las formas que han visto.

La tabla 16 presenta los datos anteriores de forma resumida.

Tabla 16: Tipos de desarrollos y frecuencias.

tipo de desarrollo	+2	n+n	2n	E	total
frecuencias	7	23	20	6	56
porcentajes	12%	41%	36%	11%	

Un recuento del número de desarrollos realizado por cada alumno proporciona la tabla 17. En la primera fila se indica el número de desarrollos distintos realizados por los alumnos y en la segunda la frecuencia de alumnos que realiza tal número de desarrollos distintos.

Tabla 17: Número de desarrollos y frecuencia de aparición.

número	1	2	3	4
frecuencia	14	13	4	1

Casi la mitad de los alumnos hacen un solo desarrollo, la otra mitad hacen dos, o más, estos alumnos ven la secuencia puntual de dos maneras distintas. La operación utilizada con más frecuencia en estas expresiones ha sido la suma de dos sumandos iguales; le sigue muy de cerca el producto de dos por el número natural correspondiente. Un porcentaje muy bajo ha utilizado la suma del número 2 constantemente para hacer los desarrollos y la tabla muestra que estos alumnos hacen además otro desarrollo. Hay otro porcentaje, similar al anterior que hace un desarrollo especial de los números de la secuencia, veamos cuales son.

Los alumnos nº 4 y nº 26 dan la siguiente secuencia de desarrollos:

$1.2,\quad 2^2,\quad 2.3,\quad 2^3,\quad 2.5$

vemos que en los lugares impares toma el producto de dos por el número impar correspondiente y en los lugares pares toma una potencia de dos.

El alumno nº 10 hace lo siguiente:

$1+1,\quad 4+0,\quad 4+2,\quad 4+4,\quad 4+6.$

Si prescindimos del primer sumando el resto sigue un modelo de dejar constantemente fijo el primer sumando (igual a cuatro) e ir sumando los números pares en orden creciente.

El alumno nº 14 da la secuencia siguiente:

$2=2.1,\quad 4=2^2,\quad 6=3\cdot2,\quad 8=2+2+2^2,\quad 10=5\cdot2.$

Este alumno mantiene una regularidad en los términos impares, que obtiene como un producto de dos por el impar correspondiente. Los términos pares trata de expresarlos mediante potencias de 2.

El alumno nº 17 tiene esta otra secuencia:

$2=1+1$, $4=2 \cdot 2$, $6=3+3$, $8=4 \cdot 2$, $10=5+5$, $12=6 \cdot 2$.

En este caso se alternan dos expresiones; una, en los términos impares que expresa como sumas de dos sumandos iguales y otra, en los términos pares que expresa como producto de dos por los números pares consecutivos.

El alumno nº 34 presenta lo siguiente:

$2=2^1$, $4=2^2$, $2^2 + 2$, 2^3, $2^3 + 2$.

Este alumno da una secuencia con regularidad a partir del segundo término. Eleva el número dos a una potencia sucesiva en los términos pares, los impares están formados por el término anterior más dos.

Estas secuencias tienen interés por la información que proporcionan sobre la comprensión de los alumnos; no se adaptan a la consigna dada por la cual el desarrollo de los números debía de estar de acuerdo con el patrón de formación de los mismos.

No aparece en ningún caso la secuencia:

2 2+2 4+2 6+2 8+2

A continuación nos referimos a cinco tareas englobadas con el número 7; desde la 7.1 a la 7.5. Para la realización de estas se proporcionó a los alumnos una plantilla en forma de tabla de tres filas y siete columnas; se pide que en una fila escriban las representaciones, en otra los números representados y en la otra los desarrollos de dichos números.

Tarea 7.1: ***Copia y sigue esta tabla cuatro lugares más.***
Debajo de cada figura escribe el número que representa.
Debajo de cada número escribe un desarrollo que esté de acuerdo con la representación.

• • •	• • • • •	• • • • • • •

Los resultados de esta tarea se analizan, igualmente, de acuerdo con la CCC 8a; las producciones de los alumnos de están recogidas en la tabla 18.

En las columnas 2ª y 3ª se indica con x la respuesta correcta y con **-** la incorrecta. En la columna 4ª se escriben los desarrollos dados por los alumnos.

Tabla 18: Resultados de la tarea 7.1

N	continuar	secuencia numérica	desarrollo aritmético de la secuencia
02	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
03	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
04	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
05	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
06	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
07	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
08	x	x	2+1, 3+2, 2^2+3, 3^2, 5+5+1, 20-7, 10+5
09	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
10	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
11	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
12	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
3	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
14	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
15	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
16	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
17	x	x	2+1, 3+2, 3+4, 5+4, 8+3, 10+3, 5.3
19	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
20	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
21	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
22	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
23	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
24	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
25	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
26	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
27	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
28	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
29	x	x	2+1, 2+3, 2+5, 2+7, 2+9, 2+11, 2+13
30	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
31	x	x	3=2+1, 5=3+2, 7=5+2, 9=7+2, 11=9+2
32	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
33	x	x	2+1, 2+3, 2+5, 2+7, 2+9, 2+11, 2+13
34	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
35	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7
36	x	x	2+1, 3+2, 4+3, 5+4, 6+5, 7+6, 8+7

El análisis de la actividad muestra que todos los alumnos siguen la secuencia puntual correctamente hasta ocupar los siete lugares del cuadro y escriben en la fila siguiente los números representados.

Por lo que se refiere al desarrollo aritmético de esta secuencia que han realizado encontramos:

29 alumnos hacen un desarrollo de los números como suma de dos sumandos consecutivos, primero el mayor y despues el menor: (n+1)+n; parece que la interpretación es considerar cada figura formada por dos filas de puntos, una de las cuales tiene un punto más que la otra; 5 alumnos realizan otro tipo de desarrollo de estos números.

Hay un grupo de tres, los números 29, 31, y 33, que dan este desarrollo de los números:

2+1, 2+3, 2+5, 2+7, 2+9, 2+11, 2+13

mantienen el primer sumando fijo e igual a dos y como segundo sumando los números impares. Consideran que la representación se realiza añadiendo 2 puntos a los anteriores.

El alumno nº 8 da el siguiente desarrollo:

2+1, 3+2, 2^2+3, 3^2, 5+5+1, 20-7, 10+5

no sigue una ley para dar los desarrollos de los números, (este alumno no había venido a clase el día anterior).

El alumno nº 17 presenta la secuencia de desarrollos siguiente:

2+1, 3+2, 3+4, 5+4, 8+3, 10+3, 5x3

se puede pensar que para los cuatro primeros términos se ha utilizado la ley de sumar uno a cada uno de los sumandos, pero a partir del quinto término trata de encontrar otra característica diferente. En estos 2 casos consideramos que los alumnos no han realizado un desarrollo de los números de acuerdo con la representación.

La tabla 19 presenta un resumen de los desarrollos realizados por los alumnos con frecuencias y porcentajes de los mismos.

Tabla 19: Desarrollos distintos

tipo de desarrollo	(n+1)+n	2+(2n-1)	otros
frecuencia	29	3	2
porcentaje	85%	9%	6%

Tarea 7.2: ***A continuación tienes los primeros términos de una secuencia puntual. Haz una tabla semejante a la anterior:***

• •   • • • •
• •   • • • •

Sigue la secuencia cuatro lugares más.
Escribe debajo de cada figura el número que representa.
Debajo de cada número escribe un desarrollo que esté de acuerdo con su representación.

Igualmente, el análisis de los resultados de esta tarea se realiza mediante el apartado a de la Categoría 8-a de Comprensión del Contenido. Como se puede apreciar, el patrón puntual se puede entender como aumentar cuatro puntos al pasar de un término al siguiente o bien doblar el termino anterior. El análisis de las respuestas indica que esta última posibilidad no la ha considerado ningún alumno.

La observación de los resultados muestra que:

Todos los alumnos siguen la secuencia puntual hasta completar los siete huecos de la tabla que se les ha proporcionado, 25 alumnos indican con una separación -línea o coma- los grupos de cuatro puntos que van añadiendo, esto lo hemos indicado en la tabla con la letra G, los que no han hecho esta indicación están codificados con una x.

Todos escriben la secuencia numérica correspondiente. Para los desarrollos de los números de la secuencia distinguimos entre el número de desarrollos que han realizado y el tipo de desarrollo.

- 22 alumnos presentan un desarrollo.
- 12 alumnos presentan dos desarrollos.

Las respuestas dadas por los alumnos están recogidas en la tabla 20.

La tabla 21 recoge un análisis de los desarrollos de la secuencia que han presentado los alumnos.

Tabla 20: Resultados de la tarea 7.2:

N	sigue	sec. N	desarrollos de la secuencia
02	G	x	2+2, 2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2, / 4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4...
03	G	x	2+2, 2+2+2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2+2+2 / 4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4
04	G	x	4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4...
05	G	x	2+2, 2+2+2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2+2+2 / 4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4,
06	x	x	4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4
07	G	x	2+2, 4+4, 6+6, 8+8, 10+10 / 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5
08	G	x	4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4
09	G	x	4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4
10	x	x	2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 2.10
11	G	x	4, 4+4, 4+4+4, 8+8, 8+8+4, 12+12, 12+12+4
12	G	x	2+2, 4+4, 8+4, 12+4, 16+4, 20+4, 24+4
13	x	x	2+2, 2+2+2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2+2+2
14	x	x	4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6
15	x	x	2+2, 4+4, 6+6, 8+8, 10+10
16	G	x	2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 2.10 / 2+2, 4+4, 6+6, 8+8, 10+10
17	G	x	2+2, 2+2+2+2+2+2, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4, 8+8+8, 4+4+4+4+4+4+4
19	x	x	2+2, 2+2+2+2+2+2,2+2+2+2+2+2+2+2 /4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4
20	G	x	2+2, 2+2+2+2+2+2,2+2+2+2+2+2+2+2 /4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4
21	G	x	2+2, 4+4, 6+6, 8+8, 10+10 / 2+2, 2+2+2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2+2+2
22	G	x	2+2, 2+2+2+2+2+2,2+2+2+2+2+2+2+2 /4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4
23	x	x	4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4
24	G	x	2+2, 2+2+2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2+2+2 / 2+2, (2.2)+(2.2), (2.4)+(2.4)
25	G	x	2+2, 2+2+2+2+2+2...4+4+4+4+4+4, 4+4+4+4+4+4+4
26	G	x	4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4

27	x	x	2+2, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4
28	G	x	2.2, 4.2, 6.2, 8.2, 10.2, 12.2
29	G	x	4, 4+4, 8+4, 12+4, 16+4, 20+4, 24+4
30	G	x	2+2, 4+4, 8+4, 8+8, 16+4, 12+12
31	G	x	4, 4+4, 8+4, 16+4, 20+4, 24+4
32	G	x	4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4
33	G	x	4, 4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4
34	G	x	2+2, 2+2+2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2+2+2
35	x	x	2+2, 2+2+2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2+2+2
36	G	x	2+2, 2+2+2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2+2+2 /4,4+4, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4

Tabla 21: Resumen de los resultados de la tarea 7.2.

desarrollo	4+..$^{(n)}$.+4	2+..$^{(2n)}$.+2	2n+2n	4n	2.2n	$a_n=a_{n-1}+4$	otros	total
frecuencia	16	13	5	2	3	3	4	46
porcentaje	35%	28%	11%	4%	7%	7%	8%	

En la tabla 21 aparecen los distintos desarrollos que han realizado los alumnos.

- 16 desarrollos utilizando el sumando cuatro (+4) reiteradamente. Lo hemos codificado por 4+..$^{(n)}$.+4

- 13 desarrollos en los que se utiliza el sumando dos (+2) para pasar de un término al siguiente. Lo hemos codificado por 2+..$^{(2n)}$.+2. Hay 9 alumnos que hacen a la vez una descomposición en sumas de dos y una en suma de cuatro.

- 2 desarrollos son el producto de 4 por las veces que se repite el módulo de cuatro puntos. Lo hemos codificado por 4n.

- 3 desarrollos se presentan de forma que se suma 4 al resultado de la suma anterior. Lo hemos codificado por $a_n=a_{n-1}+4$.

- 5 desarrollos son suma de dos sumandos pares iguales. Lo hemos codificado por 2n+2n.

- 3 están expresados a través del producto de 2 por un número par que es el número de puntos que aparece en las filas, si se considera la representación como dos filas de puntos. Lo hemos codificado por 2.(2n).

- 4 desarrollos no se acomodan a una regla común; estos cuatro desarrollos que hemos codificado por (O) otros son:

Alumno nº 11. En la secuencia puntual va añadiendo grupos de cuatro puntos que separa por una línea; escribe la secuencia numérica siguiente:

2+2, 4+4, 4+4+4, 8+8, 8+8+4, 12+12, 12+12+4,

esta secuencia no refleja el modo de crecer de la secuencia puntual; sin embargo, sigue una regularidad. El cambio de expresión a partir del cuarto término puede ser debido a la intención de simplificar las expresiones. Prescindiendo del primer término se ve la siguiente regularidad: en los lugares pares aparece la suma de dos sumandos iguales, estos sumandos son los múltiplos de cuatro; en los lugares impares se toma la suma anterior mas cuatro.

Alumnos nº 17 y nº 25. También estos alumnos presentan indicios de separación entre los cuatro puntos que van añadiendo en los primeros lugares; terminan sin que se vean estas separaciones en los tres últimos lugares.

La secuencia la escriben de la forma siguiente:

nº 17: 2+2, 2+2+2+2, 4+4+4, 4+4+4+4, 4+4+4+4+4, 8+8+8, 4+4+4+4+4+4+4+4,

nº 25: 2+2, 2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2, 2+2+2+2+2+2+2+2, 4+4+4+4+4+4, 4+4+4+4+4+4+4.

los dos empiezan tomando sumas de sumandos 2 y cambian a sumas de sumandos 4; el nº 17 , además, intercala un término de sumandos con 8.

Alumno nº 24. En todos los términos de la secuencia se ven los grupos de cuatro puntos que se van añadiendo.

Por lo que se refiere a las secuencias de desarrollos hace un intento de un desarrollo distinto así: 2x2+2x2, 2x4+2x4, a partir de aquí no continua.

Tarea 7.3: ***Dada la secuencia:***

3x1, 3x2, 3x3,...

Realizar una tabla análoga a la de las tareas anteriores. Para ello sigue la secuencia cuatro lugares más.

Escribe los numeros de la sucesión.

Haz una representación puntual para cada número que se corresponda con la secuencia dada.

Igualmente los resultados de esta tarea se analizan según el apartado a de la categoría 8ª de Comprensión del Contenido.

La tabla 22 recoge los resultados de la tarea 7.3.

Tabla 22: Resultados de la tarea 7.3.

N	seguir	sec. N	representación puntual
02	x	x	rectángulo 3.n
03	x	x	rectángulo 3.n
04	x	x	rectángulo 3.n
05	x	x	rectángulo 3.n
06	x	x	rectángulo 3.n
07	x	x	rectángulo 3.n
08	x	x	dos filas
09	x	x	rectángulo 3.n
10	x	x	rectángulo 3.n
11	x	x	filas con distintos puntos
12	x	x	friso añadiendo grupos de tres
13	x	x	añade columnas de tres.

14	x	x	rectángulos 3.n
15	x	x	rectángulos 3.n
16	x	x	añade columnas de tres
17	x	x	añade columnas de tres
18	x	x	añade columnas de tres
20	x	x	añade columnas de tres
21	x	x	añade columnas de tres a lo anterior
22	x	x	añade columnas de tres a lo anterior
23	x	x	friso añadiendo grupos de tres
24	x	x	rectángulos 3.n
25	x	x	añade columnas de tres
26	x	x	rectángulos 3.n
27	x	x	friso añadiendo grupos de tres
28	x	x	dos filas añadiendo grupos de tres
29	x	x	rectángulos 3.n
30	x	x	rectángulos 3.n
31	x	x	rectángulos 3.n
32	x	x	rectángulos 3.n
33	x	x	rectángulos 3.n
34	x	x	friso añadiendo grupos de tres
35	x	x	añade columnas de tres
36	x	x	rectángulos 3.n

Los datos se han codificado de la forma siguiente:

En la segunda columna aparecen los datos referentes a seguir la secuencia, indicando con x si se hace correctamente y con - si no se hace o no se hace bien. En la tercera columna se incluyen los datos que se refieren a escribir la secuencia numérica correspondiente, la notación es análoga a la anterior.

La cuarta columna recoge las representaciones realizadas por los alumnos; consideramos rectángulos 3.n a las figuras rectangulares de lado 3 por otro variable igual al lugar que ocupa el término de la sucesión. *Añadir columnas de tres* lo consideramos en el caso en que se ve la separación entre las distintas columnas, ya sea con una coma o una línea. Con *añadir columna a lo anterio*r hacemos referencia a poner una columna a lo anterior en donde se ve la separación entre lo que se tenía y la columna añadida. Los resultados muestran que esta tarea no tiene dificultad para los alumnos. Todos resuelven bien las dos primeras cuestiones.

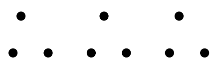
La representación de la secuencia puntual la realizan de distintas formas como se muestra en la tabla 23:

Tabla 23: Representaciones realizadas:

Forma	rectángulo	columnas de 3	añadiendo 3 en columna	friso	filas distintas de puntos	total
frecuencia	18	7	2	4	3	34
porcentaje	53%	20%	2%	4%	9%	

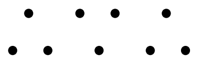
4 alumnos toman un módulo de tres puntos, formando un triángulo, y lo repiten tantas veces como indica el factor variable, esto da una representación que hemos denominado en "forma de friso"; no obstante, existen diferencias en la manera de hacer este friso dependiendo de la organización de los módulos.

El nº 12, hace una repetición lineal del módulo:

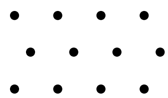


este alumno ya utilizó este patrón en la actividad 3ª.

Los nº 23 y 27 van añadiendo el módulo de tres puntos de forma que se alterna la posición de este:



El número 34, repite la terna y forma un friso de tres filas de puntos:



2 alumnas, la nº 8 y la nº 28, colocan dos filas de puntos paralelas, iguales en el caso de ser el producto un número par, si el número es impar colocan un punto sin emparejar al lado derecho del dibujo, a continuación de la fila inferior (el nº 28) o entre las dos filas (el nº 8). Se da la circunstancia de que estas dos alumnas no estuvieron en clase el día anterior.

El alumno nº 11 va construyendo figuras a base de filas de puntos de la forma siguiente:

3x1 es representado como una fila de tres puntos.

3x2 dos filas, de tres puntos.

3x3 dos filas, una de cinco y otra de cuatro puntos.

3x4 tres filas, de cinco, cuatro, y tres puntos.

3x5 tres filas, de seis, cinco y cuatro puntos.

3x6 cuatro filas, de seis, cinco, cuatro y tres puntos.

3x7 cinco filas, de seis, cinco, cuatro, tres, dos y un punto.

Tarea 7.4: ***Dados los números 1, 3, 6, 10, 15, hacer un desarrollo de los mismos y una representación puntual de manera que las dos secuencias se correspondan.***

El análisis de los resultados de esta tarea se realiza según el apartado b de la categoría 8ª de Comprensión del Contenido.

Los resultados de la tarea se resumen en la tabla 24 que consta de tres columnas.

En la segunda columna se anota la representación puntual realizada de la secuencia numérica indicamos con (NC) aquellos casos en que no hay correspondencia entre la representación y el desarrollo aritmético realizado de la secuencia, que hacen un total de 6 (18%) alumnos.

En la tercera columna están los desarrollos aritméticos escritos por los alumnos en cada caso.

Tabla 24: Resultados de la tarea 7.4.

N	representación	desarrollo
02	una fila (NC)	1, 1+1+1, 2+2+2, 3+3+3+1
03	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4,
04	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4,
05	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4,
06	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4,
07	dos filas	1, 1+2, 3+3, 6+4, 10+5
08	Dos filas (NC)	1.1, 3.1, 3+3, 5+5, 7+7+1
09	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4
10	fila y punto al lado	1+0, 1+2, 1+5, 1+9, 1+14
11	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4
12	friso con grupos de tres	1.1, 3.1, 2.3, 2.5, 5.3
13	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4
14	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4
15	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4
16	figuras distintas (NC)	3+0, 3+3, 3+7, 3+12
17	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4
19	friso con grupos de tres	1+0, 1+2, 1+2+2+1,
20	figuras distintas (NC)	1, 2+1, 4+2, 6+4, 8+7
21	triangular	1, 2+1, 3+3, 4+6, 5+10
22	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4
23	dos filas (NC)	1, 1+2, 1+5, 1+9, 1+14,
24	rectangular	1, 3.1, 3.2, 2.5, 3.5
25	friso	1, 2+1, 3+3, 3+3+3+1,
26	dos filas	1, 1+2, 3+3, 4+6, 5+10
27	una fila	1, 1+2, 1+5, 1+9, 1+14
28	dos filas	1.1, 3.1, 2.3, 2.5, 3.5
29	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4
30	dos filas	1, 2+1, 4+2, 6+4, 10+5
31	dos filas (NC)	1, 1+2, 3+3, 6+4, 10+5
32	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4
33	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4
34	una fila	1, 1+1+1, 1+1+1+1+1+1
35	triangular	1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4
36	friso (NC)	1, 3, 3.2, 3+7, 3+12

Los datos resumidos de las dos columnas aparecen en la tabla 25.

Tabla 25: Tipos de representaciones

representación	triangular	dos filas	friso	una fila	rectángulo	otros
frecuencia	16	6	4	4	2	2
porcentaje	47%	17%	12%	12%	6%	6%

Todos los alumnos que han realizado la representación triangular han escrito el desarrollo correspondiente como suma de números consecutivos; sólo en uno de los casos se ha empleado una expresión recurrente para los desarrollos.

Tarea 7.5.: ***Inventa una secuencia numérica. Represéntala utilizando un patrón de puntos y desarrollando los números de manera que la representación sea adecuada al desarrollo.***

El análisis de los resultados de esta tarea se realiza según la categoría 8 de Comprensión del Contenido.

Como repuestas a esta tarea han aparecido 56 secuencias, que se recogen en la tabla 26.

La tabla 19 proporciona la siguiente información:

. 22 alumnos han realizado una secuencia

. 9 alumnos han presentado dos secuencias

. 3 alumnos han presentado tres secuencias.

En total disponemos de 49 desarrollos y 49 representaciones, de los que sólo en 8 casos (16%) no hay correspondencia entre el desarrollo aritmético y la representación asociada, lo cual se indica con (*) en la tabla.

Tabla 26: Resultados de la tarea 7.5.

N	Representación	secuencia	desarrollo
02	cinco filas variables	-	5.1, 5.2, 5.3...
03	2 filas: 1 fija y 1 variable módulo de 4 fijo, fila variable 1 punto sobre una base de 3, 4, 5 puntos	5, 6, 7... 6, 7, 8... 4, 5, 6...	3+2, 3+3, 3+4... 4+2, 4+3, 4+4... 1+3, 1+4, 1+5...
04	rectangular 5n+2	7, 12, 17...	5.1+2, 5.2+2, 5.3+2...
05	fila fija y fila variable módulo fijo 4, fila variable	6, 8, 10... 6, 7, 8...	4+2, 4+4, 4+6... 4+2, 4+3, 4+4...
06	dos filas variables	5, 7, 9...	3+2, 3+2+2, 3+2+2+2...
07	dos filas para cada término	4, 7, 11...	* 2+2, 4+3, 7+4...
08	una fila y un punto	4, 5, 6...	3+1, 4+1, 5+1,...
09	dos módulos fijos de 4 y una fila variable	10, 12, 14...	4+2+4, 4+4+4, 4+6+4...
10	tres filas variables tres filas variables dos cuadrados de lado variable	12, 15, 18... 8, 11, 14... 8, 18, 32...	5.2+2, 6.2+3, 7.2+4... 1+4+3, 2+5+4, 3+6+5... 2^2+2^2, 3^2+3^2, 4^2+4^2,
11	tres puntos y dos filas variables	7, 9, 11...	3+1+3, 3+2+4, 3+3+5...
12	dos filas variables	3, 5, 7, 9...	2+1, 3+2, 4+3, 5+4...
13	dos filas	6, 8, 8, 10, 10	2+4, 3+5, 2+6, 3+7, 2+8
14	dos filas variables una fila variable y dos puntos	7, 9, 11, 15, 17 6, 8, 10, 12	* 4+3, 5+4, 7+4, 8+5, 10+5 * 3+3, 4+4, 5+5...
15	cuadrados	4, 9, 16, 25...	2.2, 3.3, 4.4...
16	dos filas variables	5, 7, 9...	* 2+3, 2+5, 2+7...
17	cuadrados	4, 9, 16, 25...	1+3, 4+5, 9+7, 16+9...
19	friso, módulos de tres friso, módulos de tres	6, 9, 12, 15... 6, 9, 12, 15...	3+3, 3+3+3, 3+3+3+3... 3+3, 6+3, 9+3...
20	dos filas variables más un punto figura circular	6, 8, 10, 12... 3, 5, 7, 9...	3+2+1, 4+3+1, 5+4+1... 1+1+1, 2+1+2, 2+3+2...
21	cuadrados	1, 4, 9, 16...	1^2, 2^2, 3^2, 4^2...
22	cuadrados	4, 9,16, 25...	2.2, 3.3, 4.4, 5.5...
23	tres filas variables	6, 12, 18, 24...	3+3, 3+3+3+3, 3+3+3+3+3+3
24	módulo de 4 fijo, fila variable	4, 5, 6, 7...	4, 4+1, 4+2, 4+3...
25	dos filas rectángulos tres filas variables	5, 6, 7, 8... 6, 8, 10... 10, 13, 16...	* 2.2+1, 2.2+2, 2.2+3... 3.2, 4.2, 5.2... 3+2+5, 4+3+6, 5+4+7...
26	tres filas variables	6, 8, 10, 12...	3.2, 4.2, 5.2, 6.2...
27	dos filas dos filas	1, 2, 3, 4... 2, 5, 8, 11...	1, 1+1, 1+2, 1+3, 1+4... 2, 2+3, 2+6, 2+9...
28	dos filas un cuadrado se le van uniendo puntos	3, 6, 9, 12... 4, 5, 6, 7...	3.1, 3.2, 3.3, 3.4... * 2^2 2^2+1, 2^2+2, 2^2+3...
29	rectángulos friso módulo de dos	2, 4, 8, 10... 3, 4, 5, 6...	2.1, 2.2, 1.3, 2.4... 1+2, 1+3, 1+4, 1+5...
30	tres filas variables	6, 9, 12, 15...	3+2+1, 4+3+2, 5+4+3...
31	dos filas variables	5, 7, 9, 11...	* 3+2, 5+2, 7+2...
32	cuadrados centrados tres filas variables	12, 24, 40... 4, 7, 10, 13...	3.4, 6.4, 8.5... 3+1, 5+2, 7+3, 9+4...
33	trama cuadrada	-	* 4, 4+4+4+4
34	módulos de cinco	5, 10, 15, 20...	2+1+2, 2+1+2+2+1+2...
35	tres filas variables	5, 8, 11, 14...	5, 5+3, 5+3+3...
36	dos filas variables dos filas variables	5, 7, 9, 11...	3+2, 4+3, 5+4... 3-1, 4-2, 5-3...

Todos los desarrollos realizados por los alumnos son, excepto en un caso, distintos. La tabla 27 clasifica y resume los desarrollos, según las operaciones empleadas.

Tabla 27: Tipo de operación en los desarrollos.

operaciones	suma de 2 sumandos	suma de 3 sumandos	sumandos variables	producto	cuadrados	suma y producto
frecuencias	23	7	6	5	6	2
porcentajes	47%	15%	12%	10%	12%	4%

Queda claro que la mayor parte de los desarrollos, 72%, emplean exclusivamente la operación suma, si bien empiezan a considerarse sumas de sumandos variables

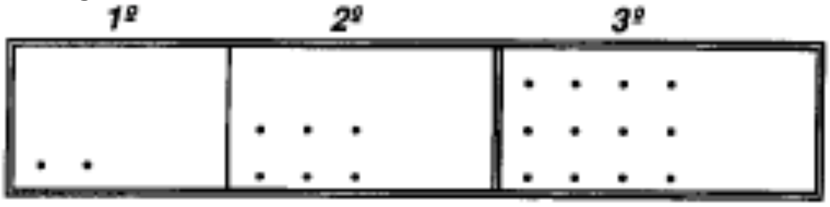
La tabla 28 proporciona datos referentes a los tipos básicos de representación o patrones empleados:

Tabla 28: Patrones empleados.

módulo básico	filas	grupo de 3, 4 o 5 puntos	rectángulo	cuadrado	círculo
frecuencia	29	9	3	7	1
porcentaje	59%	18%	6%	15%	2%

Igualmente, en el momento de realizar esta tarea, no hay patrones articulados salvo los cuadrados y rectángulos sencillos, el resto de las representaciones se producen por agregación de filas -una por sumando- o por reiteración un módulo de 3, 4 o 5 puntos construyendo un friso. El predominio de la estructura aditiva sobre la multiplicativa se destaca también en las representaciones.

Tarea 8: ***Copia la siguiente secuencia.***



Dibuja el término 4º. Dibuja el término 7º sin dibujar los intermedios.
Explica por qué piensas que el dibujo que has hecho es el correcto.

Los resultados de esta tarea, así como de las dos siguientes, se analizan mediante el apartado c) de la Categoría 8ª de Comprensión del Contenido, que dice: Obtención de un término no consecutivo con los términos conocidos de una secuencia y/o el patrón puntual de sus términos: extrapolación. Revisados los resultados de los alumnos en esta tarea comprobamos que todos ellos dibujan los términos pedidos, tanto el cuarto (el siguiente) como el séptimo; esto indica que han establecido alguna relación que ha permitido representar estos términos con el mismo patrón que los anteriores. También se satisface así el apartado a) de la Categoría 5ª de Comprensión del Contenido

Las explicaciones sobre lo que han pensado para realizar el dibujo, utilizan dos argumentos diferentes. Hay 21 alumnos que dicen haber relacionado los términos de la secuencia con el número de orden, esto lo codificamos en la tabla mediante R y hay otros 12 que relacionan cada término con el anterior, en la tabla lo codificamos con A; 1 alumno no responde a esta cuestión. La tabla 29 en sus tres primeras columnas resume esta información.

Tarea 9: ***A continuación tenemos los tres primeros términos de una secuencia numérica.***

1º 2º 3º

--

1+2+3+4 2+3+4+5 3+4+5+6

--

Cópiala y escribe el término siguiente.

Escribe el término 10º sin hacer los intermedios.

Explica por qué sabes que los términos que has escrito son correctos.

Los resultados muestran que no hay diferencias importantes en la realización de esta tarea y la anterior. Los alumnos también siguen en esta ocasión la secuencia correctamente, tanto en el término siguiente como en el 10º.

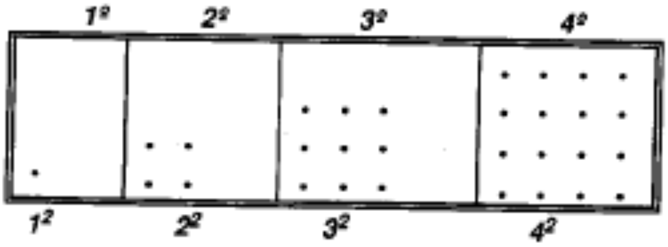
En cuanto a los argumentos empleados para representar dichos términos ocurre como en la tarea anterior, unos se centran en la relación de los términos de la sucesión con el número del orden (22 alumnos) y otros reflejan la relación entre cada término y el anterior (10 alumnos), dos alumnos no responden a la cuestión.

Estos datos aparecen en la tabla 29 en las columnas 4ª 5ª y 6ª.

Comparando los resultados de esta tarea con la anterior vemos que:

* 27 de los 34 alumnos mantienen en las dos actividades el tipo de argumento, esto es: si en la primer tarea establecen la relación con el número del orden, en la segunda tarea también; si en la primera la relación es entre un término y el anterior, en la segunda mantienen el mismo argumento.
* Hay 4 alumnos que no mantienen el mismo tipo de argumento: tres de ellos pasan de una relación entre términos a una relación de cada término con el ordinal. Un alumno, hace lo contrario, pasa de una relación con el ordinal a otra entre los términos. Los tres restantes no dan repuesta a una de las dos preguntas.

Tarea 10 ***En el cuadro siguiente aparecen los cuatro primeros términos de una secuencia en representación puntual y su expresión desarrollada en forma de potencia.***



Copia el cuadro y amplialo con los lugares 5º, 9º y nº (enésimo).

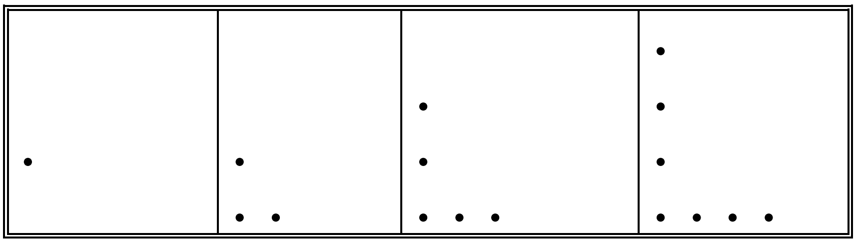
Corregida la tarea encontramos: Todos los alumnos representan los términos 5º y 9º. Sólo 11 de ellos hacen una representación del término nº, que en todos los casos consiste en un cuadrado con trazo continuo, en el que se indica con una n que es esa la medida del lado. De estos 11 alumnos, 9 han utilizado como argumento para explicar las representaciones de términos hechas, la relación de cada término con el lugar que ocupa en las dos ocasiones; los otros dos alumnos han modificado su argumento en este sentido. El resumen de estos datos aparecen en la tabla 21 en las columnas 7ª, 8ª y 9ª en la que indicamos con X cuando se ha realizado la representación del cuadrado.

Tabla 29: Resumen de los resultados de las tareas 8, 9, 10

N	1ª 4º T	2ª 7º T	3ª Argu	4ª 4º T	5ª 10ºT	6ª Argu	7ª 5º T	8ª 9ºT	9ª Repre
01	x	x	R	x	x	R	x	x	X
02	x	x	R	x	x	R	x	x	-
03	x	x	R	x	x	R	x	x	X
04	x	x	A	x	x	R	x	x	-
05	x	x	R	x	x	R	x	x	-
06	x	x	R	x	x	R	x	x	-
07	x	x	A	x	x	R	x	x	X
08	x	x	A	x	x	A	x	x	-
09	x	x	R	x	x	R	x	x	X
10	x	x	A	x	x	A	x	x	-
11	x	x	A	x	x	-	x	x	-
12	x	x	A	x	x	A	x	x	-
13	x	x	R	x	x	R	x	x	-
15	x	x	R	x	x	R	x	x	-
16	x	x	R	x	x	-	x	x	-
17	x	x	A	x	x	R	x	x	X
18	x	x	A	x	x	A	x	x	-
19	x	x	R	x	x	R	x	x	X
20	x	x	R	x	x	R	x	x	-
21	x	x	R	x	x	R	x	x	-
22	x	x	R	x	x	R	x	x	-
23	x	x	A	x	x	A	x	x	-
24	x	x	A	x	x	A	x	x	-
25	x	x	R	x	x	A	x	x	X
26	x	x	R	x	x	R	x	x	X
27	x	x	R	x	x	R	x	x	-
29	x	x	R	x	x	R	x	x	X
30	x	x	R	x	x	R	x	x	-
31	x	x	R	x	x	R	x	x	-
32	x	x	R	x	x	R	x	x	X
33	x	x	-	x	x	A	x	x	-
34	x	x	A	x	x	A	x	x	-
35	x	x	A	x	x	A	x	x	-
36	x	x	R	x	x	R	x	x	X

Tarea 11: ***A continuación tienes una secuencia puntual:***

1º 2º 3º 4º



Dibuja el término 5º.

Dibuja la figura que ocuparía el lugar n.

Debajo de cada figura indica el número que representa.

Escribe debajo de cada número su desarrollo, de manera que esté de acuerdo con la representación.

Escribe a continuación como se llaman estos números.

Los resultados de esta tarea se analizan de acuerdo con la Categoría 9ª de Comprensión del Contenido: 9. Expresión del término general de una secuencia lineal o cuadrática:

9.a. Significado atribuido a la expresión "término general de una secuencia".

9.b. Generalización del desarrollo numérico o estructura aritmética de los términos de una sucesión: el paso a n.

9.c. Generalización del patrón de los términos de una sucesión: el uso de puntos suspensivos o esquemas abiertos.

9.d. Notación algebraica del término general de una sucesión.

La tarea consta de cinco apartados y en el cuarto han de llegar a una expresión del término general. La tabla 30 resume el trabajo de los alumnos en esta tarea; en las columnas 2ª y 3ª anotamos los resultados de los dos primeros apartados de la tarea, indicando con x si la respuesta es correcta y con - si la representación no es correcta o no se ha realizado; en las columnas 4ª y 5ª aparecen escritas las secuencias dadas por los alumnos, la secuencia numérica en la columna 4ª y el desarrollo aritmético de dicha secuencia culminando en el término general, en la columna 5ª. La 6ª columna corresponde al nombre que han dado los alumnos a los términos de la secuencia:

I: Impares; N: Naturales; E: Enteros; C: Cuadrados.

Tabla 30: Resultados de la Tarea 11

N	5º T	nº T	secuencia numérica	desarrollo y término general	nombre
01	x	x	1, 3, 5, 7, 9	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+(n+1)	I
02	x	x	1, 3, 5, 7, 9... n+(n-1)	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+(n-1)	I,N
03	x	x	1, 3, 5, 7, 9...(2n)-1	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+(n-1)	I,N
04	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+1+1, 2+1+2, 3+1+3...n+1+n	I
05	x	x	1, 3, 5, 7, 9...2n-1	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+n-1	I,N
06	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n	I,N
07	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n	I
08	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1+1, 2+1, 3+2, 5+2, 7+2...n.n	N
09	x	x	1, 3, 5, 7, 9...(n+n)-1	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+(n-1)	I,N
10	x	-	1, 3, 5, 7, 9...3n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+(2n)	I
11	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n	I,N
12	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+n	I
13	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 3+2, 4+3, 5+4...n+(n-1)	-
15	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n+(n-1)	1, 2+(2-1), 3+(3-1)...n+(n-1)	I
16	x	x	1, 3, 5, 7, 9...2n-1	1, 2+1, 2+3, 3+4, 4+5...(n-1)+n	I,N
17	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n-1	I
18	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 7-2, 5+2, 8+1, nº-n	N
19	x	x	1, 3, 5, 7, 9	1+0, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n	-
20	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n	I,N
21	x	x	1, 3, 5, ,7 ,9...n	1+0, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n	I
22	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+(n-1)	I,N
23	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 3+2, 5+2, 6+2...n	N
24	x	x	$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2...n^2$	1.1, 2.2, 3.3, 4.4, 5.5...n.n	C
25	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n	I,N
26	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1+0, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n	-
27	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 1+4, 1+6, 1+8...n+n	-
29	x	x	1, 3, 5, 7, 9...2n	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n	I,E
30	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n	I
31	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 1+4, 1+6, 1+8...n+n	I,E
32	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+(n-1)	I,N
33	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n+1	1, 1+2, 1+2+2, 1+2+2+2...n+n	I
34	x	-	1, 3, 5, 7, 9	2+1, 3+2, 4+3, 5+4	I
35	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 4+1, 6+1, 8+1...n+1	I
36	x	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+1+1, 1+1+1+1+1...n+n+...	I,N

La tabla 30 pone de manifiesto en sus tres primeras columnas que: los 34 alumnos han representado el término 5º correctamente. La representación del término enésimo no la hace el alumno 34 y el alumno 10 la hace mal, el resto no ha tenido dificultad para hacer dicha representación.

La cuarta columna, en donde aparecen las sucesiones numéricas, muestra como 33 alumnos siguen la secuencia de los impares de 1 a 9 sin problemas, pero solamente 6 de ellos logra escribir correctamente la expresión del término enésimo

La quinta columna proporciona la siguiente información:

Todos los alumnos que en la secuencia numérica han expresado correctamente el término de lugar n, dan también correctamente el término general, 6 de ellos con expresiones equivalentes. Solamente 1 alumno mantiene el valor n como expresión del término general.

La expresión del término enésimo a partir de la secuencia es como recoge la tabla 31.

Tabla 31. Término enésimo a partir de la secuencia numérica.

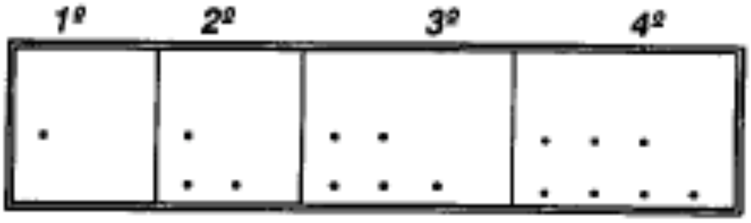
término enésimo	no se escribe	n	n+1	2n	3n	n+(n-1)	(n+n)-1	2n-1	n^2	total
frecuencia	3	21	1	1	1	2	1	3	1	34
porcentaje	9%	6%	3%	3%	3%	6%	3%	9%	3%	

La escritura del término enésimo a partir de los desarrollos se distingue como indica la tabla 32.

Tabla 32: Término enésimo a partir del desarrollo.

término enésimo	no se escribe	n	n+1	n+(n-1)	n.n	n+n	n+(n+1)	n+1+n	n+2n	n^0-n
Frecuencia	1	1	1	10	2	15	1	1	1	1
Porcentaje	3%	3%	3%	29%	6%	44%	3%	3%	3%	3%

Tarea 12: ***A partir de la secuencia puntual siguiente:***



Dibuja el término 5º.

Dibuja el término que ocupa el lugar n.

Debajo de cada figura indica el número que representa.

Escribe debajo de cada número su desarrollo de forma que esté de acuerdo con la representación. Escribe como se llaman estos números.

Los resultados de esta tarea se analizan de nuevo con la Categoría de 9ª de Comprensión del Contenido. La tabla 33 recoge los resultados obtenidos en esta tarea:

las columnas 2ª y 3ª recogen los datos sobre el primer y segundo apartados de la tarea, que consisten en dibujar los términos 5º y nº; indicamos en la tabla con x si la respuesta es correcta y con - si no lo es; la columna 4ª recoge las secuencias numéricas escritas por los alumnos en sus respuestas al apartado tercero de la tarea; la columna 5ª recoge el desarrollo y el término general; la columna 6ª incluye los nombres dados a los números.

Tabla 33: Resultados de la tarea 12.

N	T 5º	T nº	secuencia numérica	desarrollo y término general	n
01	X	x	1, 3, 5, 7, 9	1+0, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+(n-1)	I
02	X	x	1, 3, 5, 7, 9...n+(n-1)	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...(n-1)+n	I,N
03	X	-	1, 3, 5, 7, 9...2n-1	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+(n+1)	I,N
04	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5... n+n	I
05	X	x	1, 3, 5, 7, 9...2n-1	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+(n-1)	I,N
06	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+n	I,N
07	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...(n-1)+n	C
08	X	-	1, 3, 5, 7, 9...nº	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...nº+n	N
09	X	x	11, 3, 5, 7, 9...n+(n-1)	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+(n-1)	I
10	X	-	1, 3, 5, 7, 9...3n	1, 2+1, 4+1, 6+1, 8+1...(2n)+n	I
11	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1+0, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+n	I,N
12	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...(n-1)+n	I
13	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+(n-1)	-
15	X	x	1, 3, 5, 7, 9...	(2.1)-1, (2.2)-1, (2.3)-1...2n-1	-
16	X	-	1, 3, 5, 7, 9...2n-1	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...(n-1)+n	-
17	X	-	1, 3, 5, 7, 9..n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+(n+1)	I
18	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1+0, 4-1, 2+2+2-1, 4+2+1...n+n	N
19	X	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...(n-1)+n	I
20	X	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 4-1, 4+1, 4+(4-1), 4+(4+1)...n+(n-1)	I
21	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n+(n+1)	1+0, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+n+1	I
22	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 4+1, 6+1, 8+1...(n-1)+1	I
23	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+n-n	E,N
24	X	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...(n-1)+n	-
25	X	x	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 2.2+1, 2.3+1, 2.4+1...n.n+1	I,N
26	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1+0, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+n	I,N
27	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 1+4, 1+6, 1+8...n-1	-
29	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 4+1, 6+1, 8+1...n+1	I
30	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+(n+1)	I
31	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1+0, 1+2, 3+2, 6+2, 7+2...n+2	I,E
32	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n+(n-1)	1.1, (1.2)+1, (2.3)+1, (2.4)+1...(2n)+1	I
33	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 1+2, 2+3, 3+4, 4+5...n+n	I
34	X	-	1, 3, 5, 7, 9	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4	I
35	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 3+2, 4+3, 5+4...n+1	I
36	X	-	1, 3, 5, 7, 9...n	1, 2+1, 4+1, 6+1, 8+1,...n+1	I

La observación de la tabla 33 proporciona la siguiente información: Todos los alumnos realizan la representación del término siguiente de la secuencia (término 5º).

Solamente 9 alumnos representan correctamente el término enésimo

Todos los alumnos escriben la secuencia numérica hasta 9.

6 alumnos escriben correctamente la expresión que corresponde al término enésimo a partir de la secuencia numérica, de ellos 3 dan la expresión n+(n-1) y 3 la expresión 2n-1; de estos 6 alumnos, 5 son los mismos que escribieron correctamente el término general de la secuencia en la tarea 11. La escritura del término enésimo a partir de la secuencia se hace como se indica en la tabla 34.

Tabla 34: Término enésimo a partir de la secuencia numérica.

término enésimo	no se escribe	N	3n	n+(n-1)	2n-1	n+(n+1)	total
Frecuencia	3	23	1	3	3	1	34
Porcentaje	9%	67%	3%	9%	9%	3%	

La escritura del término enésimo a partir de los desarrollos viene dada en la tabla 35.

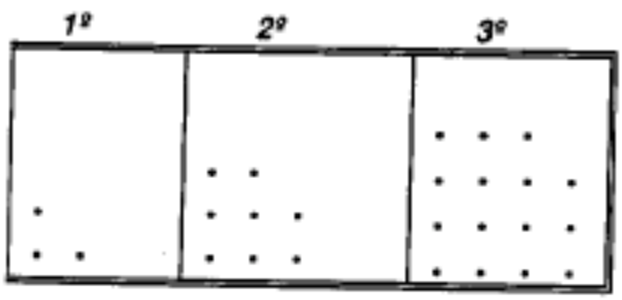
Tabla 35: Término enésimo a partir de la secuencia de los desarrollos.

T N	n+1	n+(n-1)	2n-1	n+n	n+(n+1	2n+n	(n-1)+1	n+n-n	n.n+1	n-1	n+2	2n+1
f	3	11	1	7	4	1	1	1	1	1	1	1
%	9%	32%	3%	20%	12%	3%	3%	3%	3%	3%	3%	3%

1 alumno no da término general alguno.

Como se ve, tiene interés la comparación de resultados de las tareas 11 y 12 ya que corresponden a los mismos números con distinta representación puntual. Hay una gran diferencia entre la 3ª columna de las dos tablas en donde se recogen los resultados de las representaciones puntuales del término enésimo. Mientras que en la tarea 11 prácticamente todos los alumnos son capaces de hacer la representación para la tarea 12 sólo lo logran 9 alumnos. La dificultad está en que en la tarea 11 han de indicar n en los dos tramos de puntos suspensivos y en la doce hay que indicar en una fila n y en la otra n-1 y es la relación de expresar que en una fila hay un punto menos que en la otra la que crea la dificultad.

Tarea 13: ***Con la siguiente secuencia vas a hacer como con las anteriores.***



Dibuja el término siguiente.
Indica como es el término de lugar n.

Escribe debajo de cada figura el número que representa.
Debajo de cada número escribe su desarrollo.

De nuevo los resultados de esta tarea se analizan con la Categoría 9ª de Comprensión del Contenido. Recogemos en la tabla 36 las respuestas de los alumnos a los diferentes apartados de esta tarea. La 2ª columna recoge los resultados sobre dibujar el término siguiente. La 3ª columna los datos correspondientes al apartado segundo de la tarea que consiste en obtener el termino que ocupa el lugar n; en las dos columnas indicamos con x si la respuesta es correcta y con - si no lo es. En la 4ª columna escribimos la sucesión numérica dada por los alumnos. En la 5ª columna se incluyen los desarrollos y el término general que han obtenido.

Tabla 36: Resultados de la tarea 13.

N	T 4º	T nº	Secuencia numérica	desarrollo y término general
01	X	x	3, 8, 15, 24,...n	1+2, 2+3+3, 3+4+4+4, 4+5+5+5+5,...n+(n+1)^2 2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...(n+1)^2+n 1+(2.1), 2+(2.3), 3+(3.4),...n+(n.(n+1)
02	X	x	3, 8, 15, 24,...n.(n+1)+n	(2.1)+1, (2.3)+2, (3.4)+3,...n.(n+1)+n 1+2, 2+3+3, 3+4+4+4,...n+(n+1)+(n+1)+(n+1)...
03	X	x	3, 8, 15, 24,...2n+n^2	1+2, 2+3+3, 3+4+4+4, 4+5+5+5+5,...n+(n+1)+(n+1) 2^2+(2.2), 3^2+(2.3), 4^2+(2.4),...n^2+(2.n)
04	X	-	3, 8, 15, 24,...n	2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...n^2-1
05	X	x	3, 8, 15, 24,...2n+n^2	1+2, 2+3+3, 3+4+4+4, ...n+(n+1)+(n+1)... 2^2+(2.2), 3^2+(3.2), 4^2+(4.2),...n^2+2n
06	X	-	3, 8, 15, 24,...n	1+2, 2+(2.3), 3+(3.4), 4+(4.5),...n+(n.n) 2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...n^2-1
07	X	-	3, 8, 15, 24,...n	1+2, 2+(3.2), 3+(4.3), 4+(5.4),...n+(n+1).n
08	X	-	3, 8, 15, 24,...n	2.1, 2.3+2, 3.4+3, 4.5+4,...n.(n+1)-n
09	X	x	3, 8, 15, 24	2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...(n+1)^2-1
10	X	-	3, 8, 15, 24,...3n	2+1, 3+3+2, 4+4+4+3, 5+5+5+5+4,...(2n)+2
11	X	-	-------	1+2, 2+3+3, 3+4+4+4, 4+5+5+5+5,...n+n (2.3)+2, (3.4)+3, (4.5)+4,...(n.n)+n
12	X	-	3, 8, 15, 24,...n	1+2, 6+2, 12+3, 20+4,...n+n
13	X	-	3, 8, 15, 24,...n	2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...n^2-1
15	X	x	3, 8, 15, 24	2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...(n+1)^2-1
16	X	-	3, 8, 15, 24,...n^2-1	2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...n^2-1
17	X	-	3, 8, 15, 24,...n	2+1, 3+3+2, 4+4+4+3, 5+5+5+5+4,...n+n+n+n+n+(n-1)
18	X	-	3, 8, 15, 24,...n	4-1, 4+4, 5.3, 6.4,...n.n
19	X	-	3, 8, 15, 24,...n	1+2, 2+2+3, 3+4+4+4, 4+5+5+5+5,...(n-1)+n+n+n...
20	X	-	3, 8, 15, 24	2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...n^2-1
21	X	-	3, 8, 15, 24,...nº	2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...n^2-1 1^2+2.1, 2^2+2+2, 3^2+3+3, 4^2+4+4,...n^2+n+n
22	X	x	3, 8, 15, 24,...n	2+1, 3.2+2, 4.3+3, 5.4+4,...(n+1).n+n
23	X	-	3, 8, 15, 24,...n	1+2, 2+3+3, 3+5+5+5, 4+5+5+5+5,...n+n+n+n+n
24	X	x	3, 8, 15, 24	1+2, 2+(2.3), 3+(3.4), 4+(4.5),...n+n(n+1)
25	-	-	3, 8, 15, 19	2+1, 6+2, (4.3)+3, (4.4)+3,...(n.n)+n
26	X	-	3, 8, 15, 24,...n	2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...n^2-1
27	X	-	3, 8, 15, 24,...n	1+2, 1+7, 1+14, 1+23,...n^2-1

29	X	-	3, 8, 15, 24,...n	2+1, 6+2, 12+3, 20+4,...n
30	X	-	3, 8, 15, 24,...n	2+1, $3+(3^1+2)$, $4+(4^2+3)$, $5+(5^3+4)$,...$n+(n^n+n)$
31	X	-	3, 8, 15, 24,...n	1+2, 2+6, 3+12, 4+20,...n 2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...n^2-1
32	X	-	3, 8, 15, 24,...$(n+1)^2$-1	2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1,...$(n+1)^2$-1
33	X	-	3, 8, 15, 24	1+2, 2+3+3, 3+4+4+4, 4+5+5+5+5,...(n+1)n+n
34	X	-	3, 8, 15, 24	2+1, 3+3+2, 4+4+4+3, 5+5+5+5+4
35	X	x	3, 8, 15, 24	1^2+1+1, 2^2+2+2, 3^2+3+3, 4^2+4+4,...n^2+n+n
36	X	-	3, 8, 15, 24,...n	2+1, 6+2, 12+3, 20+4,...n+n

El análisis de la tabla por columnas, nos dice que:

Según se observa en la segunda columna, todos los alumnos representan correctamente el término 5º de la sucesión puntual. La tercera columna informa que solamente 9 alumnos han realizado correctamente la representación del término enésimo.La cuarta columna muestra como 32 alumnos siguen correctamente la secuencia numérica hasta el cuarto término; un alumno, el número 25 escribe la secuencia pero tiene un error de cálculo en el cuarto término; otro alumno no hace la secuencia. El término enésimo, en esta secuencia numérica, lo escriben correctamente 4 alumnos que son: los números 2, 3, 5, y 32; los alumnos 2, 3 y 5 han hecho bien la representación del término, el alumno 32 no.

La tabla 37 proporciona las distintas expresiones dadas por los alumnos como término general y las frecuencia con la que los mismos han aparecido.

Tabla 37: Distintas expresiones del término general en la secuencia numérica.

término general	n(n+1)+n	n^2+2n	$(n+1)^2$-1	n^2-1	n	3n	nada	total
frecuencia	1	2	1	1	19	1	9	34
porcentaje	3%	6%	3%	3%	56%	3%	26%	

La quinta columna proporciona la siguiente información: Por lo que se refiere al desarrollo que los alumnos han presentado de esta secuencia, hemos de decir que 1 alumno ha presentado 3 desarrollos, 7 alumnos han presentado dos desarrollos y el resto, 26 alumnos 1 desarrollo lo que da un total de 43 desarrollos que representan las 8 posibilidades que a continuación se detallan e indican la estructura común que los alumnos han visto en las representaciones. Ejemplificamos con el tercer término:

-12 alumnos dan el desarrollo: 2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, 5^2-1

lo que supone ver en las figuras un cuadrado al que le falta un vértice.

-11 alumnos dan la secuencia desarrollada así: 1+2, 2+3+3, 3+4+4+4, 4+5+5+5+5, lo cual indica ver cada representación como filas de puntos unidas, la primera tiene un punto menos que las restantes.

-9 alumnos dan la secuencia: 1+(2.1), 2+(2.3), 3+(3.4), 4+(4.5) lo que corresponde a ver las figuras como un rectángulo, en el que los lados se diferencian en un punto, al que se le une una línea igual al lado menor.

-3 alumnos dan una secuencia, que puede considerarse como la anterior pero en la que el producto aparece efectuado; esta es: 2+1, 6+2, 12+3, 20+4

-4 alumnos dan la secuencia: $2^2+(2.2)$, $3^2+(2.3)$, $4^2+(2.4)$, $5^2+(2.5)$; que corresponde a ver un cuadrado al que se le unen dos filas de igual número de puntos que su lado.

-3 alumnos no dan un desarrollo de estos números de acuerdo con las representaciones, son: 4-1, 4+4, 5.3, 6.4, alumno nº18.

2+1, 6+2, (4.3)+5, alumno nº 25

1+2, 1+7, 1+14, 1+23, alumno nº 27.

La expresión del término general la obtienen correctamente el 38% de los 34 alumnos (13 casos de los 43 desarrollos presentados por los alumnos). Las distintas expresiones utilizadas así como su frecuencia viene dadas en la tabla 38:

Tabla 38: Expresión del término general a partir de la secuencia de desarrollos

término general	frecuencia	porcentaje
n(n+1)+n	6	14%
n^2+2n	4	9%
$(n+1)^2$-1	3	7%
n^2-1	9	21%
n+(n+1)+(n+1)	3	7%
(n-1)+n+n+n	2	5%
n+n+n+n+n	1	2%
n+n	3	7%
n	2	5%
n.n+n	3	7%
$(n+1)^2$+n	2	5%
n(n+1)-n	1	2%
2n+2	1	2%
n.n	1	2%
nada	1	2%
n+(n^n+n)	1	2%
total	43	

Entre los términos generales erróneos hay que distinguir aquellos que siguen la misma estructura del desarrollo de los números, si bien se pierde la idea de concordancia con el orden que ocupan, es el caso de la expresión n^2-1, o bien no se indica el número de veces que se repite un sumando como en la expresión n+(n+1)+(n+1)+... Encontramos 16 expresiones que no se adaptan a la estructura del desarrollo; a la que corresponde n·(n+1)-n, parece una distracción la que ha cambiado el signo + por el -. Los alumnos 6, 11, 23, 25 cometen el error de no considerar las diferencias de una unidad que hay entre los números que aparecen en cada desarrollo y los generalizan a todos por n. En el resto no vemos que exista relación entre los desarrollos y la expresión finalmente escrita.

Tarea 14: ***A continuación tienes la siguiente secuencia:***

1º   2º   3º   4º

----

1   1+2   1+2+3   1+2+3+4

Escribe el 5º término.

Escribe el término enésimo.

Realiza una representación puntual de cada uno de los términos.

Escribe como se llaman estos números.

Igualmente se analizan los datos de esta tarea mediante la Categoría 9ª de la Comprensión del Contenido. En la tabla 39 se recoge el trabajo realizado por los alumnos en esta tarea.

En la 2ª columna se recoge la solución dada al escribir el término 5º, indicamos con el símbolo x si la solución dada es correcta y con - si no lo es.

En la 3ª columna se incluyen las respuestas dadas para la escritura del término enésimo.

En la 4ª columna se indica el tipo de representación hecha por cada alumno, y se introduce un dato a través de los signos 1 y 0 que indica si el enésimo término de la representación es o no correcto.

Tabla 39: Resultados de la tarea 14.

N	T 5º	término enésimo	representación puntual	enésimo	nombre
01	X	(n-3)+(n-2)...+n	triangular	1	N, consecutivos
02	X	1+2+3+4+5...+n	triangular	1	N
03	X	1+2+3+4+5...+n	triangular	0	triangulares
04	X	1+2+3+4+5...+n	triangular	1	triangulares
05	X	1+2+3+4+5...+n	triangular	0	triangulares
06	X	n+(n+1)+(n+2)+(n+3)...	triangular	0	N
07	X	n+(n+1)+(n+2)+(n+3)...	triangular	0	primos entre si
08	X	n+n+n+n+n	triangular	0	N
09	X	1+2+3+4+5...+n	triangular	1	consecutivos
10	X	1+n+2n	figurativa	0	consecutivos
11	X	n+n+n+...	triangulares	0	consecutivos
12	X	n+(n+1)+(n+2)+(n+3)...	triangulares	0	-
13	X	1+2+..n..x+(x+1)+(x+2)	triangular	1	-
15	X	1+2+3+4+5+...n	triangular	-	triangulares
16	X	n+(n+1)+(n+2)+	triangular	0	consecutivos
17	X	1+2+3+4+5+n+(n+1)	triangular	0	triangulares
18	X	n+m+n+m+n	rectangular	0	N
19	X	1+2+3+4+5...+n	triangular	0	triangulares
20	X	1+2+3+4+5...+n	triangular	1	triangulares
21	X	n+(n+1)+(n+2)+(n+3)...	triangular	0	triangulares
22	X	1+2+3+4...	triangular	1	triangulares
23	X	n+n+n+n+n+n	triangular	0	N, E
24	X	1++3+4+5...+n	triangulares	1	triangulares
25	X	n+(n+1)+(n+1)+(n+1)	triangulares	0	triangulares
26	X	n+(n+1)+(n+2)...	triangulares	0	consecutivos
27	X	1+2+3+4+5...+n	lineal	0	numeral
28	X	1...+...+...etc	triangular	1	triangulares
30	X	n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+...	triangular	0	-
31	X	1+2+3+4+5...+n	dos filas	0	consecutivos
32	X	1+2+3+4+5...+n	triangular	1	triangulares
33	X	n.(n+1)	triangular	1	consecutivos
34	X	n+n+1+n+2+n+3	triangular	0	consecutivos
35	X	n+(n+1)	triangular	0	consecutivos
36	X	1+2+3+4+5...+n	triangular	0	triangulares

Analizamos esta tabla por columnas. La 2ª columna muestra que los 34 alumnos que asisten a clase escriben el término 5º, que es el siguiente en la secuencia dada. Un recuento en la 3ª columna proporciona los datos que se recogen en la tabla 40.

Tabla 40: Expresión del término enésimo para la sucesión de los números triangulares

término enésimo	frecuencia	porcentaje
1+2+3+4+...+n	14	41%
n+(n+1)+(n+2)	8	23%
n+n+n+n	3	9%
1+2+3+4+...	3	9%
(n-3)+(n-2)+...+n	1	3%
1+2+2n	1	3%
n+n+n...	1	3%
n+(n+1)+(n+1)+(n+1)	1	3%
n+(n+1)	1	3%
n(n+1)	1	3%

La tercera columna recoge el tipo de representación que han realizado los alumnos. En ella se detectan los siguientes resultados.

-30 alumnos hacen una representación puntual en forma triangular si bien, sólo 11 de ellos (32%) representa correctamente el término enésimo.

-4 hacen una representación que no sigue un patrón, se trata de los alumnos siguientes: el nº 10 que realiza una representación utilizando figuras, el número 18 que hace una representación a base de rectángulos, el número 27 que hace una representación lineal y el número 31 que realiza una representación en dos filas.

En la cuarta columna aparece información que resumimos en la tabla 41 en cuanto al nombre dado a estos números.

Tabla 41: Nombre dado a los números.

Nombre	triangulares	consecutivos	naturales	nombre de numerales	primos entre sí	nada
frecuencia	14	10	6	1	1	3
porcentaje	40%	28%	17%	3%	3%	9%

Tarea 15: ***Escribe el término 7º y nº de la siguiente secuencia numérica:***

2, 4, 6, 8...

Si lo crees necesario te puedes ayudar con una representación puntual o con un desarrollo de estos números.

Esta tarea también se analiza mediante la Categoría 9ª de Comprensión del Contenido. Sólo han realizado esta tarea 27 de los 34 alumnos que había en la clase. Los ocho alumnos restantes no la hicieron por falta de tiempo. Los resultados de la tarea quedan recogidos en la tabla 42 atendiendo a la siguiente distribución: En la 2ª columna están los resultados dados por los alumnos a la primera cuestión de esta tarea que consiste en escribir el término 7º, indicaremos con x si la solución es correcta y con - si no lo es. En la 4ª columna se incluye la expresión dada como término enésimo. En la 5ª columna indicamos el tipo de representación cuando se ha realizado. En la 6ª columna, el desarrollo cuando se ha llevado a cabo.

Tabla 42: Resultados de la tarea 15

N	T 7º	T enésimo	representación	desarrollo
01	x	2.n	-	-
02	x	2.n	una fila para nº rectángulo 2.n	-
03	x	2.n	rectángulos 2.n	-
04	x	n	rectángulos 2.n	-
05	x	2.n	rectángulos 2.n	-
06	x	2.n	-	-
07	x	(n+2)+(n+4)	-	-
08	x	n	rectángulos 2.n	-
09	x	2.n	-	-
11	x	n	-	-
13	x	n.n	-	-
16	x	2.n	-	-
17	-	n+n	rectángulos 2.n	1.1, 2^2,3.2, 4.2, 4+3, n+n
18	x	n	rectángulos 2.n, 7º y nº o	-
19	x	n+2	añade filas de 2	-
20	x	2.n	-	-
22	x	2.n	rectángulos 2.n	-
23	x	n	rectángulos 2.n	-
24	x	2.n	rectángulos 2.n	-
26	x	2.n	-	-
27	x	n+2	-	-
29	x	2.n	rectángulos 2.n	1.1, 2.2, 3.2, 4.2,...7.2
31	x	n	-	2.1, 2.2, 2.3, 2.4...2.7...2.n
32	x	2.n	rectángulos 2.n	-
33	x	n+1	rectángulos 2.n	
35	x	2.n	-	-
36	x	2.n	rectángulos 2.n	2.1, 2.2, 2.3, 2.4...2.7...2.n

26 de los 27 alumnos que realizan la tarea, escriben el término 7º correctamente, solamente uno de ellos no lo hace bien. En relación con el término general resumimos los datos en la tabla 43.

Tabla 43: Expresión del término general.

término general	2n	n+n	n	n+1	n+2	(n+2)+(n+4)	total
frecuencia	16	1	6	1	2	1	27
porcentaje	59%	4%	22%	4%	7%	4%	

En cuanto a la representación del término enésimo los datos son los que recoge la tabla 44.

Tabla 44: Representación del término enésimo.

tipo de representación	no hay	rectángulo 2n	añadir filas de dos puntos
frecuencia	12	14	1
porcentaje	44%	52%	4%

Solamente 4 alumnos (el 15%) hacen un desarrollo en tres de los casos, también hacen una representación y coinciden las dos formas simbólicas. En el cuarto caso no hay representación. Los resultados obtenidos por los alumnos en la Tarea 13 hacen conveniente establecer una discusión sobre las diferentes interpretaciones que pueden hacerse para el desarrollo aritmético de los términos de la sucesión allí presentada, así como de su término general. Por ello se acuerda incorporar una nueva Tarea a las diseñadas inicialmente y que se denomina 15-bis.

Tarea 15-bis: ***Hacer una representación puntual de cada una las secuencias siguientes:***

a) $1+(1.2),\ 2+(2.3),\ 3+(3.4), \ldots\ n+(n.(n+1))$

b) $2^2-1,\ 3^2-1,\ 4^2-1, \ldots\ (n+1)^2-1$

c) $1^2+(2.1),\ 2^2+(2.2),\ 3^2+(2.3), \ldots\ n^2+(2.n)$

El análisis de los resultados de esta Tarea se hace de acuerdo con la Categoría 4ª de Comprensión del Contenido. Los resultados de esta tarea aparecen ordenados en la tabla 45:

Tabla 45: Resultados de la tarea 15-bis:

N	representación de n+(n.(n+1))	representación de $(n+1)^2$-1	representación de n^2 +2n	coinciden
01	fila y rectángulo	cuadrado-uno	cuadrado-uno	b=c
02	cuadrado-uno	cuadrado-uno	cuadrado-uno	a=b=c
03	cuadrado-uno	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	a=b
04	fila y rectángulo	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	
05	rectángulo n(n+2)	cuadrado-uno	cuadrado-uno	b=c
06	fila y rectángulo dos filas cuadrado-uno	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	a=b
07	cuadrado-uno	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	a=b
08	fila por sumando	rectángulos	rectángulo n(n+2)	
09	cuadrado-uno	cuadrado-uno	cuadrado-uno	a=b=c
10	rectángulo n(n+2)	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	a=c
11	fila por sumando	cuadrado-uno	fila por sumando	
12	fila por sumando	menos puntos	fila por sumando	
13	fila por sumando	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	
14	sin patrón	sin patrón	sin patrón	
15	fila y rectángulo	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	
16	fila por sumando	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	
17	fila por sumando	cuadrado-uno	fila por sumando	
18	= n de puntos	rectángulos	cuadrado-uno	
19	=n de puntos	igual número de puntos	igual número de puntos	
21	rectángulo n(n+2)	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	a=c
22	fila por sumando	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	
24	cuadrado-uno	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	a=b
25	rectángulo n(n+2)	cuadrado+punto	rectángulo n(n+2)	a=c
26	cuadrado-uno	cuadrado-uno	cuadrado-uno	a=b=c
27	fila por sumando	fila por sumando	igual número de puntos	
29	fila por sumando	distinto número de puntos	rectángulo n(n+2)	
30	fila por sumando	cuadrado-uno	cuadrado y rectángulo	
31	fila por sumando	cuadrado-uno	rectángulo n(n+2)	
32	fila y rectángulo	cuadrado-uno	cuadrado-rectángulo	
33	sumando por fila	rectángulo+uno	dos filas por sumando	
34	Rectángulo+uno	cuadrado+uno	rectángulo n(n+2)	
35	fila y rectángulo	cuadrado-uno	cuadrado y rectángulo	
36	fila y rectángulo	cuadrado-uno	cuadrado y fila	

Cada una de las filas recoge las representaciones realizadas por los alumnos de las secuencias a), b) y c) todas ellas equivalentes pero expresadas mediante desarrollos aritméticos distintos. La observación de la tabla 45 da la información siguiente:

Apartado a) Representación puntual de la expresión:

1+(2x1), 2+(2x3), ... n+(nx(n+1))

El alumno nº 6 ha hecho tres representaciones distintas de esta secuencia, por lo que tenemos 35 soluciones aunque sólo hubiera 33 alumnos en clase. Estas soluciones aparecen clasificadas en la tabla 46.

Tabla 46: Representaciones puntuales de la expresión (a).

Tipo de representación	dos filas de puntos	fila y rectángulo	cuadrado menos un punto	rectángulo n.(n+2)	se mantiene número de puntos	inadecuada	total
frecuencia	13	7	7	4	2	2	35
porcentaje	37%	20%	20%	11%	6%	6%	

Apartado b) Representar con puntos la secuencia:

2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, ... $(n+1)^2$-1

proporciona los resultados que aparecen clasificados en la tabla 47.

Tabla 47: Clasificación de las representaciones realizadas en el apartado b.

tipo de representación	cuadrado menos un punto	cuadrado y un punto al lado	dos filas y un punto al lado	rectángulo	dos filas	representación inadecuada	total
frecuencia	23	2	1	2	2	3	33
porcentaje	70%	6%	3%	6%	6%	9%	

En el apartado c) al representar con puntos

1^2+(2x1), 2^2+(2x2), 3^2+(2x3), ... n^2+(2xn)

surgen las respuestas que se clasifican en la tabla 48.

Tabla 48: Representación del apartado c:

tipo de representación	cuadrado y dos filas	cuadrado menos un punto	fila por sumando	cuadrado y rectángulo	cuadra-do y fila	puntos sin patrón	representación inadecuada	total
frecuencia	16	6	3	3	1	3	1	33
porcentaje	49%	18%	9%	9%	3%	9%	3%	

Las representaciones coinciden en los casos siguientes:

- 3 alumnos realizan la misma representación en a,b y c como un cuadrado al que le falta un punto en uno de los vértices.

- 4 alumnos hacen la misma representación en a y b; como cuadrado menos uno, como en el caso anterior.

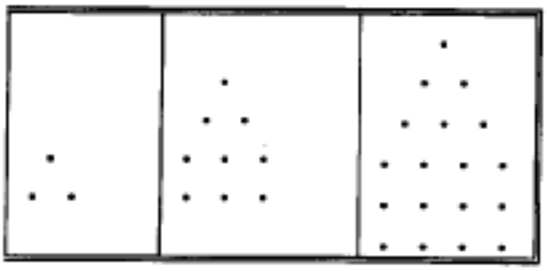
- 2 alumnos hacen la misma representación en b y c como cuadrado menos uno, como en los casos anteriores.

- 5 alumnos consideramos que hacen la misma representación a y c; tres de ellos realizan una representación en forma de rectángulo n.(n+1), los otros dos hacen el mismo patrón de la siguiente forma: fila y rectángulo en el caso de a) y cuadrado y rectángulo en el caso b).

- 19 alumnos realizan distintas representación en los tres casos.

Las tareas siguientes corresponden a la quinta y última sesión de las dedicadas a nuestra investigación. Asisten a clase 34 alumnos

Tarea 19: ***Continúa esta sucesión de puntos dos términos más.***
Descompón cada una de las figuras en triángulos (siempre de la misma manera). Busca la expresión general P_n utilizando la expresión de los números triangulares.



P_1 P_2 P_3

Los resultados de esta tarea se analizan mediante la Categoría 9ª de Comprensión del Contenido. La tabla 49 recoge la información relacionada con el trabajo realizado por los alumnos en esta tarea. En las columnas 2ª, 3ª y 4ª aparecen los términos que han hecho los alumnos y que han sido P_4 y P_5; P_4 y P_n; o bien P_4, P_5 y P_n. La quinta columna da información sobre el tipo de descomposición en triángulos, si ha sido correcta se indica por x y si no lo ha sido por **-**. La sexta columna recoge las expresiones generales que los alumnos han dado de esta secuencia en función de los números triangulares.

Tabla 49: Resultados de la tarea 19

N	P_4	P_5	P_n	desc.	expresión general
02	X		x	x	$P_n=T_{n-1}+T_n+n.(n+1)/2$ $P_n=(n+1)n+m+(n-1)+(n-2)$
03	X		x	x	$P_n=n.(n+1)+n+(n+1)+(n+2)...$
04	X	x		x	$P_n=3T_n$ $P_n=3n.(n+1)/2$
05	X		x	x	$P_n=(n-1).n+n+(n-1)+(n-2)...1$ $P_n=(n-1).n+(n.(n+1))/2$ $P_n=3n(n+1)/2$
06	X			x	$P_1=3T_1$, $P_2=3T_2$, $P_3=\_3T_3$, $P_4=3T_4$,...$P_n=3T_n=3n.(n+1)/2$
07	X	x		x	$P_n=n.(n+1)+n+(n-1)+(n-2)...$
08	X	x		-	-
09	X	x		x	(1.2)+1, (2.3)+3, (3.4)+4, (4.5)+10...$P_n=n.(n+1)+n.(n+1)/2$
10	X		x	-	$P_1=T_1$, $P_2=T_1+T_2+T_3$, $P_4=T_1+T_2+T_3+T_4+T_5$, $P_n=T_{n1}+T_{n2}+T_{n3}$.
11	X	x		x	$P_1=3T_1$, $P_2=3T_2$, $P_3=3T_3$, $P_4=3T_3$, $P_5=3T_5$... $P_n=3n(n+1)/2$
12	X	x		x	$P_1=3T_1$, $P_2=3T_2$, $P_3=3T_3$, $P_4=3T_4$, $P_5=3T_5$...$P_n=n(n+1)+(n-1)+(n-2)$
13	X	x	x	x	-
14	X	x		x	$P_1=3T_1$, $P_2=3T_2$, $P_3=3T_3$, $P_4=3T_4$, $P_5=3T_5$...$P_n=n.(n+1)+n.(n+1)=n+2$
15	X	x	x	x	-
16	X	x	x	x	-
17	X	x		x	$P_n= 3.n.(n+1)/2$
18	X	x		x	-
19	X	x	x	x	$P_n=n.(n+1).n+(n+1).(n-2)$
20	X	x	x	x	$P_1=T_2$, $P_2=T_2+T_2+T_2$, $P_3=T_3+T_3+T_3$, $P_4=T_4+T_4+T_4$,...$P_n=T_n+T_n+T_n$.
21	X	x	x	x	-
22	X	x		x	$P_n=3.T_n$, $P_n=3.n.(n+1)/2$
23	X	x		x	$P_n=n.(n+1)/2$
24	X	x	x	x	$P_1=3T_1$, $P_2=3T_2$, $P_3=3T_3$, $P_4=3T_4$, $P_5=3T_5$,...$P_n=3T_n$
25	X	x		x	$P_n=n.(n+1)/2$
26	X	x		x	$P_1=3T_1$, $P_2=3T_2$, $P_3=3T_3$, $P_4=3T_4$, $P_5=3T_5$, ... $P_n=3.n(n+1)/2$
27	X	x		x	$P_n=3T_n$
28	X	x		x	$P_n=3T_n$
30	X	x		x	$P_1=3T_1$, $P_2=3T_2$, $P_3=3T_3$, $P_4=T_4$, $P_5=T_5$...$P_n=n.(n+1)+(n-1)(n-2)$
31	X	x		x	$P_n=3T_n$
32	X	x		x	(1.2)+1, (2.3)+3, (3.4)+6, (4.5)+10, (5.6)+15...n(n+1)+n(n+1)/2
33	X		x	x	$P_n=T_n+T_{n+1}$
34	X			x	2.1+0, 3.2+3, 4.3+6, 5.4+10
35	X		x	x	$P_1=3T_1$, $P_2=3T_2$, $P_3=3T_3$, $P_4=3T_4$, $P_5=3T_5$...$P_n= 3n.(n+1)/2$
36	X	x		x	$P_1=(1.2)+1$, $P_2=(2.3)+3$, $P_4=(3.4)+6$, $P_4=(4.5)+10$, $P_n=(n(n+1)+(n+1)/2$

Las columnas 2ª, 3ª y 4ª nos proporcionan la información siguiente que aparece resumida en la tabla 50 sobre los términos que los alumnos han representado.

Tabla 50: Frecuencia con la que aparecen los términos P_4, P_5 y P_n

término representado	P_4	P_5	P_n
frecuencia	34	26	13
porcentaje	100%	76%	38%

En la quinta columna se encuentra la información sobre la descomposición de las figuras en triángulos hecha por los alumnos.

-30 alumnos hacen una descomposición en triángulos, tal como se había pedido.

Los 4 alumnos restantes hacen lo siguiente:

- nº 8, descompone la figura en dos partes, ninguna de las cuales es un triángulo.

- nº 10 descompone los tres primeros términos en triángulos para el cuarto hace otra descomposición distinta.

- nº 18 descompone también en dos partes no triangulares.

- nº 34 no descompone.

La sexta columna recoge todos las expresiones dadas como términos generales, por los alumnos. Aparecen varias opciones que consideramos correctas y quedan recogidas en la tabla 51.

Tabla 51: Tipos de expresiones generales.

expresión de P_n	3n(n+1)/2	$3T_n$	n.(n+1)+n+(n-1)+(n-2)+...	n(n+1)+n(n+1)/2	incorrectas	total
frecuencia	8	6	7	3	9	33
porcentaje	25%	18%	21%	9%	27%	

Tarea 20: ***Tenemos una expresión de término general:***

$$S_n=n+(n+1)+(n+2)$$

Indica una propiedad común de los términos de esta sucesión.
Representa los tres primeros términos de esta sucesión de forma puntual.

Los resultados de esta Tarea se analizan mediante la Categoría 10ª de Comprensión del Contenido. La tabla 51 contiene, de manera organizada, el trabajo realizado por los alumnos en esta tarea. En la segunda columna de la tabla se ha recogido la propiedad que asignan a los término de la sucesión. En la tercera se indica cómo es la representación puntual de los tres primeros términos de la misma. Cuando indicamos una fila por sumando se están considerando cada paréntesis como un sumando.

Tabla 51: Resultados de la tarea 20

N	Propiedad	representación
02	-	tres filas, una por sumando
03	consecutivos	tres filas, una por sumando
04	impares consecutivos	tres filas, una por sumando
05	-	tres filas, una por sumando
06	los tres suman tres números pitagóricos	tres filas, una por sumando
07	consecutivos	tres filas, una por sumando
08	-	figurativo
09	consecutivos triangulares	números triangulares 6, 10 y 15
10	el número de puntos aumenta de tres en tres	tres filas, una por sumando
11	aumentan de tres en tres	tres filas, una por sumando
12	-	tres filas, una por sumando
13	-	tres filas, una por sumando
14	-	números triangulares 6, 10 y 15
15	son números consecutivos n, n+1 y n+2	tres filas, una por sumando
16	-	números triangulares 6, 10 y 15
17	consecutivos	tres filas, una por sumando
18	-	números triangulares 3, 6 y 10
19	-	
20	son números trapecios	tres filas, una por sumando
21	-	tres filas, una por sumando
22	es una suma de números consecutivos	tres filas, una por sumando
23	-	triangulares 1, 3 y 6
24	-	tres filas, una por sumando
25	números consecutivos	tres filas, una por sumando
26	triangulares consecutivos	triangulares 6, 10 y 15
27	cada línea aumenta de uno en uno	tres filas, una por sumando
28	aumentan sumándole al inicial 3, 4...	tres filas, una por sumando
30	-	tres filas, una por sumando
31	cada línea aumenta de 1 en 1	tres filas, una por sumando
32	consecutivos	tres filas, una por sumando
33	se le quita 1, 2, 3 y se le suma 1	tres filas, una por sumando
34	se le suma a n un número	1, 2 y 3 puntos
35	consecutivos	tres filas, una por sumando
36	consecutivos	triangulares 6, 10 y 15

La segunda columna que recoge las respuestas dadas por los alumnos a la cuestión de indicar una propiedad común para los términos de la sucesión S_n=n+(n+1)+(n+2) proporciona los datos siguientes:

- 9 alumnos: números consecutivos.

- 1 alumno: suma de números consecutivos.
- 2 alumnos: triangulares consecutivo.
- 1 alumno: números trapecio.
- 2 alumnos: los números aumentan de tres en tres.
- 1 alumno: se le suma a n un número 1.
- 1 alumno: los tres suman tres números pitagóricos.
- 2 alumnos: cada línea aumenta de 1 en 1.
- 1 alumno: se le quita 1, 2, 3 y se le suma 1
- 1 alumno: aumenta sumándole al inicial 3, 4...
- 13 alumnos no responden a este apartado.

La tercera columna dice la forma que tiene la representación puntual que han realizado los alumnos; los tipos de representación considerados quedan recogidos en la tabla 52.

Tabla 52: Tipos de representación puntual

representación puntual	tres filas trapecio	triangular	contorno de triángulo	1, 2 y 3 puntos
frecuencia	24	7	1	1
porcentaje	73%	21%	3%	3%

Las tres tareas siguientes no las realizan todos los alumnos, la razón es que por trabajar en una misma sesión varias actividades seguidas no todos lo hacen con la misma concentración y rapidez, produciéndose diferencias que se manifiestan en la no conclusión de las tareas finales.

Tarea 21: ***Indica una propiedad común de los términos de la siguiente sucesión:***

$$a_n=3n-1$$

Representa los tres primeros términos de la sucesión de forma puntual.

Los resultados de esta Tarea también se analizan según la Categoría 10ª de Comprensión del Contenido.

La tabla 53 recoge los datos proporcionados por los alumnos en esta tarea.

Tabla 53: Resultados de la tarea 21.

N	propiedad	representación
03	al número se le suma tres	rectángulos 3.n menos un punto del vértice
05	3.x, n veces	cada 3.x es un rectángulo
06	-	dos filas paralelas, n+(n+1)
07	-	una fila por número
08	-	1, 2, y 3 puntos
09	sigue una sucesión par impar	rectángulos 3.n menos un punto del vértice
10	aumentan de tres en tres	una fila por número
12	-	rectángulos 2.n
13	-	dos filas paralelas, n+(n+1)
14	-	rectángulos 2.n
16	3n-1, 3n, 3n+1	figurativo
17	siempre falta uno para completar	dos filas paralelas, n+(n+1)
18	-	1, 2 y 3 puntos
19	-	distinto número de filas para cada término
20	triangulares	triangulares 3, 6 y 10
21	-	cuadrados menos un punto del vértice
22	-	dos filas paralelas, n+(n+1)
24	-	rectángulos 3.3 -1, 4.3-1 y 5.3-1
25	son números cuadrados	rectángulos 3.3, 3.4, 3.5 y un punto grueso
26	-	rectángulos 3.n menos un punto del vértice
27	cada vez aumenta de tres en tres	tres filas, una por término
28	-	dos filas de puntos
30	-	tres filas, una por término
31	aumenta de tres en tres	tres filas, una por término
32	-	rectángulos 3.1, 3.2, 3.3
34	aumentan de tres en tres	dos filas, una por término
35	-	rectángulo 3.n menos un punto del vértice

En la segunda columna se recogen las propiedades que los alumnos indican. En la tercera columna las representaciones puntuales que los mismos han llevado a cabo de los tres primeros términos.

Observando la tabla 53 en su 2ª columna se comprueba que para la primera cuestión no hay ningún alumno que exprese correctamente una propiedad no trivial.

-16 alumnos no dan respuesta.

-5 alumnos: los puntos aumentan de tres en tres.

-1 alumno: par, impar, par,...

-1 alumno: siempre falta uno para completar.

-1 alumno: son números triangulares.

-1 alumno: son números cuadrados.

-1 alumno: 3.x ene veces.

-1 alumno: da los tres términos sucesivos 3n-1, 3n, 3n+1

La tercera columna confirma que la segunda cuestión, la realizan 27 alumnos, los cuales hacen representaciones que responden a distintos tipos que recogemos en la tabla 54:

Tabla 54: Tipos de representación

tipos de representación	rectángulos de lado 3, menos un vértice	rectángulo de lado 2, menos un vértice	fila de puntos por número	otros	total
frecuencia	5	4	7	11	27
porcentaje	18%	15%	26%	41%	

Tarea 22: ***Dada la siguiente sucesión numérica:***

2, 5, 8, 11...

Realiza una representación puntual de los cuatro primeros términos.

Escribe su término general.

Los resultados se analizan mediante la Categoría 10ª de Comprensión de Contenido.

La tabla 55 recoge los resultados que los alumnos han proporcionado de la tarea 22.

Tabla 55: Resultados de la tarea 22.

N	Representación	término general
01	dos filas	2(n+1)
03	dos filas	n+3
05	2, 2+3, 2+3+3, 2+3+3+3 una fila por sumando	-
06	2, 2+3, 3+5, 3+8, una fila por sumando	-
07	una fila por término	n+(n+3)+(n+6)
08	figuras sin patrón	-
09	rectángulos 3.n menos un vértice	3.n-1
10	dos filas una fija de 4 puntos	-
12	figuras sin patrón	-
14	una fila para cada término	n+(n+3)+(n+6)+(n+8)
16	2, 4+1, 6+2, 8+3, una fila por cada sumando	-
17	filas sin regularidad	n+3

18	figuras sin regularidad	-
19	filas sin regularidad	n+3
20	dos filas	n, n+1
21	filas sin regularidad	2.n
24	una fila para cada término	nº-1
25	dos filas	n+n+3+n+6
26	dos filas	-
28	dos filas	
30	una fila para cada término	-
31	1+1, 3+2, 4+4, 6+5 una fila para cada sumando	n+(n-1)
32	dos filas	-
34	dos filas	-
35	filas sin regularidad	-

En la segunda columna se indica el tipo de representación que han hecho. En la tercera columna se incluye la expresión que han dado como término general de la sucesión propuesta.

El análisis de los resultados muestra que sólo un alumno (el nº 9) ha llegado al término general correcto después de realizar una representación puntual acertada que le ha permitido obtener el término general. El resto, (24 alumnos) no consigue una representación puntual adecuada y no llegan al término general. 13 de ellos ni lo intenta; los 11 restantes, que por lo general representan tomando una o dos filas para cada término, dan expresiones del término general que resultan comprensibles desde las representaciones.

n+3, escriben los alumnos nº 3, 17 y 19. Estos alumnos están expresando la diferencia que hay entre dos términos consecutivos.

n+(n+3)+(n+6)+(n+8) escriben los alumnos nº 7, 14 y 25. Estos alumnos también ven la diferencia que hay entre dos términos consecutivos y escriben como sumandos cuatro términos consecutivos de la sucesión (con n= 2).

Las demás respuestas no se pueden agrupar.

Tarea 23: ***Inventa el término general de una sucesión.***
Señala la propiedad común de sus términos.
Haz una representación puntual de los tres primeros términos.

La tabla 56 recoge los datos proporcionados por los alumnos a esta tarea. Las tres columnas por orden recogen los resultados de las cuestiones propuestas:

Tabla 56: Resultados de la tarea 23.

N	término general	propiedad común	representación
01	n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)	consecutivos	números triangulares 1, 3 y 6
03	2.n+1	se le multiplica por dos al número que corresponda y se le suma 1	rectángulos 2.n y un punto
05	2, 4, 6, 8	son pares	rectángulos 2.n
06	n^2-2	-	cuadrados menos dos puntos
07	n+n(n+2)+n(n+4)	-	1, 3, y 5 puntos, en dos filas
08	n+2	-	rectángulos 2.n
09	2n+1	impares	rectángulo 2.n mas un punto
10	3n	-	rectángulos 3.n
12	n+(n+3)+(n+6)+(n+9)	-	2, 5, 8. fila por término
14	n+(n+2)+(n+5)+(n+8)	-	2, 5, 8, fila por término
16	n+n+n^2	-	2, 4, 16 en cuadrado
17	2, 6, 10, 14	pares	dos filas
18	1, 2, 3...n	-	fila por término
19	(n+3).2	-	rectángulos 2(n+3)
20	n+5	par, impar	6, 7, 8 en dos filas
21	1, 3, 6	-	triangulares
24	n.(n-1)	-	1, 2, 6 rectángulos n(n-1)
25	n+n+1+n+2	todos tienen n	6, 9, 11 en tres filas
26	n+(n+1)+(n+2)	todos tienen n	6, 9, 11 en tres filas
30	n+(n+2)+(n+4)+(n+6)	números pares	rectángulos 2.n
31	n^2-1	-	cuadrado menos un punto
32	(n+1).n	-	4.3, 5.4, 6.5 en rectángulos
34	n+3	impares consecutivos	rectángulos 3.n
35	3, 6, 9	múltiplos de 3	filas sin regularidad

Tenemos resultados de 24 alumnos. No tenemos prevista ninguna Categoría de Contenido Matemático para analizar las dos primeras cuestiones de la tarea. Para la primera "inventar el término general de una sucesión" vamos a valorar si dan una expresión que tenga sentido como término general y, en ese caso, si corresponde a una sucesión lineal o cuadrática. En la segunda cuestión centramos nuestra atención en comprobar qué responden cuando se les pregunta por "propiedad común". La tercera cuestión la analizamos teniendo en cuenta la Categoría 10c de las CCC que dice: Obtención de la representación puntual de varios términos de una sucesión a partir de su término general.

Despues de corregida la tarea con los criterios anteriores encontramos que: Las expresiones algebraicas que se pueden considerar términos generales de una sucesión son 20, y constituyen el 87% de las respuestas; las expresiones unas veces están simplificadas y otras no.

Tabla 57: Expresiones algebraicas propuestas como término general

expresiones simplificadas	expresiones no simplificadas
2n+1	n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)
n^2+2	n+n(n+2)+n(n+4)
n+2	n+(n+3)+(n+6)+(n+9)
3.n	n+(n+2)+(n+5)+(n+8)
(n+3)2	$n+n+n^2$
n+5	n+n+1+n+2
n(n-1)	n+(n+1)+(n+2)
n^2-1	n+(n+2)+(n+4)+(n+6)
(n+1)n	
n+3	
1,2,3...n	

En estas expresiones observamos: entre las simplificadas hay 8 que corresponden a sucesiones lineales y 4 a sucesiones cuadráticas; entre las no simplificadas, 7 corresponden a sucesiones lineales y 1 a cuadrática, por tanto los alumnos han presentado 15 términos generales de sucesiones lineales y 5 cuadráticas; 4 alumnos escriben varios términos (3 o 4) de una secuencia numérica pero no llegan a escribir el término general.

En cuanto a la segunda cuestión tenemos: 1 alumno indica el proceso aritmético implícito en la expresión dada como término general; 1 alumno dice que ha tomado los múltiplos de 3; 6 alumnos hacen alusión a la paridad de los términos; 2 indican que en el término general aparece una **n**; 1 alumno indica que son consecutivos; 13 alumnos no responden a la cuestión.

Por lo que se refiere a la tercera cuestión: Entre los alumnos que dan una expresión simplificada del término general se encuentra la mayoría de los que dan una representación puntual correcta de los tres primeros términos; así de los 12 alumnos de este grupo 9 hacen esta representación correctamente, 1 representa los términos 4º, 5º, 6º; y 2, los que toman como términos n+2 y n+3 cambian el signo y representan los tres primeros términos de 2n y 3n. Entre los 8 que han dado una expresión no simplificada del término general, ninguno da correctamente el número de puntos correspondiente a los tres primeros términos de la sucesión y las representaciones son en filas de puntos (una o una por sumando).

IV.4.2. Análisis y reflexión sobre el trabajo de los alumnos de 8º nivel.

Corresponde esta reflexión a la información presentada en el apartado anterior; con ella realizamos un análisis de la comprensión mostrada por los alumnos en las distintas tareas propuestas, sobre la base de los resultados proporcionados, tomando como referencia los objetivos planteados y las categorías elaboradas para su análisis.

La Tarea 1 tiene como finalidad que los alumnos recuerden y recuperen las nociones elaboradas el curso anterior sobre el Sistema Simbólico de representación de números denominado ***Configuración Puntual***. Comprobamos que los alumnos no tienen ningún problema en emplear modelos puntuales, que estos modelos utilizan figuras de dos dimensiones y que, en su gran mayoría (92%), presentan un tipo reconocible de estructuración. El total de representaciones puntuales contabilizadas para el número 6 es de 181. La tendencia generalizada en estas representaciones es que los puntos no aparezcan colocados de manera desordenada sino colocados de forma que evoquen una figura. El 70% de estas figuras presentan algún tipo de simetría y la mitad de ellas son figuras geométricas; un porcentaje elevado (42%) hace una representación con una figura familiar.

En este curso el predominio de los formatos geométricos sobre los figurativos, y de ambos sobre los no figurativos, es considerable. La instrucción recibida el curso anterior hace que los alumnos comiencen su trabajo este curso centrándose sobre el tipo de representación ya conocido. La Tarea 2 pone de manifiesto que los alumnos utilizan gran variedad de configuraciones para representar tres números distintos. De hecho, han trabajado con:

Tabla 58: Variedad de Configuraciones para tres números.

Representaciones lineales...........	5 casos
Disposición en forma de ángulo......	13 casos
Contornos de figuras.................	6 casos
Superficies poligonales.............	30 casos
Forma de cruz........................	6 casos
Formas de letras....................	12 casos
Friso...............................	3 casos
Otras figuras........................	5 casos
Representación especial.............	1 caso

Para ello han empleado 33 formas diferentes, de las que el 50% son lineales y el 27% cuadráticas, de manera espontanea. De la observación de los resultados proporcionados por los alumnos quedan claras las siguientes consideraciones:

* el 92% de las representaciones son configuraciones de dos dimensiones, y el 62% corresponde a configuraciones geométricas;
* el 67% de las ternas elegidas son los primeros términos de una sucesión lineal o cuadrática;
* el 82% de las representaciones mantienen un mismo patrón para los tres números;
* gran parte de los alumnos (63%) comienzan por la representación y, a continuación escriben la terna.

Todo lo anterior pone de manifiesto un dominio inicial bien consolidado de las configuraciones puntuales para representar números, que se ajustan a un modelo común y la constatación de que esos números inician una secuencia lineal o cuadrática en la mayor parte de los casos.

Debido al ritmo de trabajo de los alumnos se consideró oportuno introducir las tareas 3 y 4 como información por parte del profesor con el fin de indicar a los alumnos qué se entendía, en este caso, por desarrollo aritmético de un número y cómo visualizar en una representación puntual dichos desarrollos. Se utilizó para tal fin como ejemplo el número 9. Esta es la razón por la que en el trabajo de los alumnos se pasa de la tarea 2 a la tarea 5. En la Tarea 5 los alumnos proponen gran variedad de desarrollos distintos para el número 15, en total 53, de los que 7 de ellos abarcan el 41% de las respuestas obtenidas. Estos 7 desarrollos tienen un sentido estructural claro:

Tabla 59: Desarrollos para el número 15.

10+5..................	estructura decimal
7+8;	
4+5+6;	
1+2+3+4+5.......	sumandos consecutivos
5+5+5...........	sumandos iguales
3x5..............	factorización
4^2-1.............	anterior a un cuadrado

y son los que mayor frecuencia acumulan. Las operaciones implicadas en los desarrollos han sido las que se recogen en la Tabla 60.

Tabla 60: Operaciones implicadas en los desarrollos.

operación	Suma	diferen-cia	producto	división	producto y suma	potencia	raíces	total
frecuencia	60	8	24	2	14	6	1	115
porcentaje	52%	7%	21%	2%	12%	5%	1%	
desarrollo	26	6	4	2	9	5	1	53
porcentaje	49%	11%	8%	4%	17%	9%	2%	

Las representaciones puntuales elegidas se distribuyen como se refleja en la tabla 61:

Tabla 61: Tipos de operaciones implicadas en las representaciones puntuales

sumas simples	sumas de productos	productos	restas	total
42	10	11	4	67
63%	15%	16%	6%	

Igualmente, la representaciones elegidas muestran predominio destacable de la suma y, a continuación, del producto. El desconocimiento de un código para representar la resta lleva a improvisar e inventar marcando el minuendo y el sustraendo con distinto trazo. No hay ningún intento de una figura a la que le falte la parte correspondiente al sustraendo; así, por ejemplo, 16-1 se representa como 16 puntos y uno al lado más grueso, no como un cuadrado de 4x4 al que le falta un punto. Consideramos que esta no es una idea intuitiva.

En la Tarea 6 se propone por primera vez la continuación de una secuencia lineal dada mediante tres términos que se expresan mediante configuración puntual. La interpretación de esta información es unánime: todos los alumnos interpretan las configuraciones puntuales propuestas como los términos de una secuencia lineal de diferencia dos y continúan los tres términos siguientes manteniendo el patrón propuesto; igualmente, la escritura de los números se realiza correctamente en todos los casos. No hay unanimidad en la traducción a desarrollo aritmético de las configuraciones puntuales. Predominan dos interpretaciones del modelo:

Primera: n+n; cada término es la suma de dos sumandos iguales, que interpreta la configuración como un agregado de dos filas con igual número de elementos que van aumentando en una unidad; esta interpretación la hacen el 72% de los alumnos.

Segunda: 2n; cada término es un producto de dos factores: 2 por un natural, que interpreta la configuración como un rectángulo de altura fija (2 puntos) y base variable, cuyos elementos van aumentando en una unidad. Esta interpretación la hacen el 62% de los alumnos.

Tercera: considera cada término como suma de varios sumandos, todos ellos iguales a 2: 2+2+2...**n**...+2; se interpreta así la configuración como un rectángulo, que se va ampliando al añadir dos puntos verticales a una secuencia que comienza por dos puntos verticales; esta interpretación la hacen el 22% de los alumnos y, en todos los casos, han hecho una al menos de las dos interpretaciones anteriores.

Ya hemos dicho que ningún alumno considera la expresión recurrente $a_n=2+a_{n-1}$ para expresar el desarrollo aritmético de estos términos pero si hay un intento de formular

$a_n = 4+2(n-1)$, excluido a_1. Hay otras 5 expresiones, cuatro de las cuales tratan de encontrar una regularidad utilizando las potencias de 2, y otra combina alternativamente las leyes n+n y 2n. Los resultados de esta primera tarea de continuación de una secuencia lineal dada mediante configuración puntual y su traducción a desarrollo aritmético muestra la multiplicidad de interpretaciones que se presentan de modo natural.

El bloque de tareas que se incluyen en el número 7 (desde 7.1 hasta 7.5) responden a un mismo objetivo: trabajar la traducción entre los tres sistemas simbólicos que hemos elegidos y los dos tipos de secuencias lineal y cuadrática, en un orden de dificultad que consideramos creciente. En la tarea 7.1, como en la 6, se vuelve a trabajar en una secuencia lineal cuyo módulo de ampliación es aumentar 2; la diferencia entre ellas está en que las dos filas de puntos no son iguales, se diferencian en un punto; la representación se realiza en una trama isométrica, los números son los impares a partir del tres.

La tabla 62 muestra los resultados de los alumnos en esta tarea.

Tabla 62: Expresiones algebraicas utilizadas.

Expresión	(n+1)+n	2+(2n-1)	otros
frecuencia	29	3	2
porcentaje	85%	9%	6%

Las dos cuestiones iniciales : *seguir la secuencia* y *escribir el número de puntos* no tienen dificultad. En cuanto a la tercera cuestión:

* 3 alumnos ven el patrón de formación como de aumento de dos y lo expresan de forma recurrente 3, 3+2, 5+2...; este cambio puede ser debido a que el investigador ha apuntado esta posibilidad cuando se hizo la puesta en común de la tarea anterior;

* la interpretación prioritaria (85%) es la suma de dos sumandos consecutivos, escribiendo en primer lugar el sumando mayor; de este modo se admite que dos filas horizontales paralelas y distintas representan una suma, en donde el primer sumando viene dado por la fila superior.

Comparando los resultados de esta tarea con los de la tarea 6, observamos: no se producen modificaciones en las respuesta a las dos primeras cuestiones, pero si hay una gran diferencia en los resultados de la tercera cuestión. Mientras que el patrón en la tarea 6 es interpretado mayoritariamente como aumentar 2 puntos, uno en cada una de las filas; al reconocer el patrón en la tarea 7.1 el acento se pone en la diferencia de un punto, que presentan sus filas. Dos interpretaciones vemos a este hecho: a) influye el tipo de representación, mientras que en la tarea 6 la representación está en una trama cuadrada, en la tarea 7.1 está en una trama isométrica; b) al representar en el encerado las secuencias el profesor siguió un proceso distinto; para la tarea 6 fué aumentando los puntos de dos en dos dibujando alternativamente uno arriba y otro abajo; en la representación de la tarea 7.1 la hizo poniendo la fila superior y a continuación la inferior.

La Tarea 7.2 es similar a la 6 y a la 7.1, pero con mayor riqueza de interpretación para los desarrollo aritméticos. En primer lugar, la secuencia puntual presentada con sólo dos términos, ofrece la posibilidad de una prolongación aditiva o multiplicativa; este segundo supuesto no se produce en ningún caso.

Las interpretaciones que se presentan para los desarrollos aritméticos son las siguientes:

* $4+4+\ldots^{n}\ldots+4$; se trata de un rectángulo o un friso que se va ampliando por agregación constante de un grupo de 4 puntos que coincide con el primer término.
* $2+2+\ldots^{2n}\ldots+2$; se trata de un rectángulo, o un friso, que se amplia por agregación constante de 2 grupos de 2 puntos verticales, que coincide con el primer término;
* $2n+2n$; se trata de una suma de dos sumandos pares iguales; cada figura se considera formada por dos filas iguales cuyo número de puntos es par;
* $4n$; se trata de un producto de dos factores: el primero 4 y el segundo varía con el término de la secuencia; se interpreta la figura como una iteración de grupos de 4 puntos, es una interpretación difícil, que sólo hacen dos alumnos.
* $2\cdot(2n)$; se trata también de un producto de dos factores: el primero 2 y el segundo la secuencia de los números pares; en este caso la imagen de un rectángulo de altura 2 y base un número par está en correspondencia con la configuración puntual.
* $a_n=a_{n-1}+4$; la ley de recurrencia se presenta de forma clara, si bien no son muchos los alumnos que la reconocen.

Los cuatro alumnos restantes tratan de explorar nuevas posibilidades.

La Tarea 7.3 es la inversa de las anteriores; se trata ahora de construir la configuración puntual a partir del desarrollo de los términos de la secuencia, es decir, encontrar el modelo al que se ajustan tres desarrollos aritméticos de una misma secuencia. Los alumnos interpretan correctamente la actividad y todos ellos tratan de traducir los desarrollos aritméticos a un mismo patrón, si bien las interpretaciones que realizan son distintas. Algo más del 50% representan los distintos términos como una secuencia de rectángulos de altura 3 y una base que toma sucesivamente los valores naturales; un 26% indican la formación como el resultado de añadir una columna de tres puntos verticales a la figura anterior; el 12% utiliza frisos cuyo motivo básico son tres puntos en forma de triángulo para representar los distintos términos y, finalmente, un 9% explora otras posibilidades, que no llegan a sistematizar. Con la Tarea 7.4 se culmina la exploración sistemática de la integración de los distintos códigos -representación puntual, desarrollo aritmético y números- para continuar secuencias numéricas al captar la estructura común que comportan los términos proporcionados junto con los nuevos que se escriben. En este caso la tarea consiste en representar mediante configuraciones puntuales y hacer el desarrollo aritmético de los cinco primeros términos de la secuencia de números triangulares. Los alumnos deben de buscar y elegir la estructura más adecuada coordinando los dos sistemas simbólicos de representación, cosa que consiguen la mayor parte de ellos (82%). No todos los alumnos emplean la representación triangular, sino que aparecen otros patrones alternativos: dos filas, rectángulo, friso; ahora bien, todos los alumnos que emplean el patrón triangular lo ajustan correctamente con el desarrollo aritmético de sumas de sumandos consecutivos. Para dar respuesta a la Tarea 7.5 los alumnos han de inventar una sucesión, hacer su representación mediante configuración puntual y escribir los correspondientes desarrollos aritméticos. Los alumnos proponen 49 sucesiones, de las que 48 son sucesiones distintas. La coherencia entre desarrollos aritméticos y configuraciones puntuales viene dada por un 84% de concordancia entre ambos sistemas de representación.

El predominio de los desarrollos y representaciones aditivas es abrumador: un 72% para los desarrollos y un 77% para las representaciones; los únicos patrones de secuencias de segundo orden que se presentan son los cuadrados, pero con una incidencia aún baja. Se supone que estos alumnos de 8º tienen un dominio amplio de la estructura multiplicativa, que la emplean y utilizan sin dificultades considerables y que tienen capacidad para establecer relaciones multiplicativas entre números, sin embargo, cuando se les propone escribir varios términos de una secuencia, representarlos y desarrollarlos, se produce una regresión pues el 75% de las producciones están basadas en relaciones aditivas, sólo un escaso 20% emplea relaciones multiplicativas. En este momento cabe predecir que los alumnos trabajan mucho más fácilmente con secuencias lineales que con secuencias cuadráticas, predominando entre estas últimas los cuadrados. También es cierto que, salvo el caso de los números triangulares, son muy pocos los ejemplos considerados de sucesiones cuadráticas.

Con la Tarea 8 da comienzo la tercera sesión, a la que asisten 34 alumnos.Se trata de continuar una secuencia cuadrática dada por un patrón puntual y extrapolar un término; todos los alumnos realizan correctamente la tarea y, excepto uno, proporcionan un argumento coherente para justificar su actuación.

La Tarea 9 es similar a la anterior; se trata ahora de una secuencia lineal cuyos términos vienen expresados mediante desarrollos aritméticos. Todos los alumnos añaden el término siguiente y escriben también el 10º término; igualmente, argumentan correctamente la tarea hecha con sólo dos excepciones.

En la Tarea 10 se trabaja la sucesión de números cuadrados expresada con el patrón puntual. Todos los alumnos continúan y extrapolan la secuencia. Cuando se les pide representar el término enésimo 11 de ellos (32%) dibujan un cuadrado continuo, cuyo lado mide **n**. La discusión sobre la interpretación del término enésimo en la secuencia de cuadrados se hizo en el punto IV.3.1.

La Tarea 11 pone de manifiesto que:

* La representación puntual del término enésimo de la secuencia puntual de números impares es sencilla; todos los alumnos excepto 2, utilizan el convenio de dejar unos espacios de distancia y señalar con **n** la dimensión de la fila de puntos correspondiente.
* Continuar la secuencia de impares varios términos lo hacen todos correctamente, excepto un alumno.
* Cuando hay que escribir el término enésimo 3 alumnos no escriben nada y 21 escriben **n**; tenemos que el 70% de los alumnos confunden el significado de término enésimo con posición que ocupa dicho término.
* Solamente 6 alumnos (18%) proporcionan la expresión correcta directamente desde la secuencia.
* La secuencia de desarrollos la realizan correctamente todos los alumnos excepto uno; el término general del desarrollo lo expresan correctamente 10 alumnos (29%), lo que supone una mejora respecto del apartado anterior.
* Inicialmente hay 21 alumnos que escriben **n** para el término general; después de hacer el desarrollo solamente 1 escribe **n**.
* Hay 17 alumnos que se aproximan a la expresión correcta escribiendo n+n, n+(n+1) o n+1+n; un análisis de los desarrollos de los términos con estos alumnos les puede llevar a la expresión correcta.

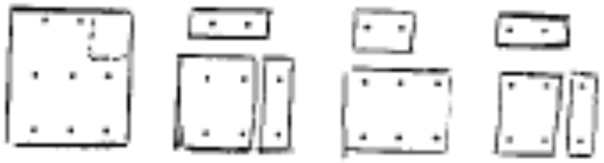
La Tarea 12 es idéntica a la anterior -secuencia de números impares- la diferencia está en que se propone un patrón de representación distinto en cada caso. El segundo patrón resulta más difícil para encontrar la expresión del término general; de hecho sólo 9 alumnos realizan la tarea propuesta en este sentido. Cuando se propone continuar los términos de la secuencia lo hacen todos correctamente y al pedir que se escriba el término general un 79% de los alumnos vuelven a escribir lo mismo que en la tarea anterior; de hecho hay 23 alumnos que escriben **n**, aún cuando ya se había discutido la inadecuación de este símbolo para expresar el término enésimo. Se detecta un error básico: ***término enésimo en una secuencia de números se interpreta o identifica con posición que ocupa dicho término***.

Cuando se propone realizar los desarrollos aritméticos de los términos todos los alumnos hacen desarrollos adecuados. ***La expresión general del desarrollo aritmético no se identifica con n en ningún caso***. Todos los alumnos, excepto 1, tratan de buscar una expresión en la que haya dos sumandos, ensayando distintas posibilidades. Sólo aciertan 12 alumnos (35%). Se detecta igualmente, que ***la expresión general del término de una secuencia tiene un significado distinto cuando se pide a partir de los números que cuando***

se pide a partir de los desarrollos. Se trata de dos sistemas simbólicos distintos, que tienen expresiones diferentes término a término ¿Por qué han de coincidir en el término general?.

En la Tarea 13 aumenta la complejidad de la secuencia, en relación con las dos anteriores. La expresión del término general mediante el patrón la realizan correctamente 9 alumnos; en este momento del estudio sólo una cuarta parte de los alumnos emplea correctamente los convenios para expresar un término general mediante configuración puntual.

La escritura de los primeros términos de la secuencia la realizan la práctica totalidad de los alumnos, pero sólo cuatro de ellos escriben correctamente el término general; siguen siendo más del 50% los alumnos que consideran **n** la expresión adecuada para el término general de una sucesión. Al pasar a los desarrollos aritméticos de los términos de la secuencia, los alumnos consideran 8 posibilidades diferentes, cuatro de las cuales responden a análisis diferentes de las configuraciones puntuales propuestas. Ejemplos:



3^2-1 $\quad$ 2^2+2+2 $\quad$ $2+2\cdot3$ $\quad$ $2^2+2.2$

En cuanto a la expresión del término general derivada de los desarrollos aritméticos encontramos que el 25% de las propuestas son correctas, y que la expresión **n** para dicho término general disminuye al 5% (sólo 2 alumnos las utilizan).

En la Tarea 14 se trabaja sobre la secuencia de números triangulares dada mediante desarrollo aritmético. Encontramos que todos los alumnos escriben correctamente el siguiente término y el 41% de ellos también el término enésimo; ningún alumno utiliza la notación **n** para referirse al enésimo término. El paso a la configuración puntual del término enésimo está orientado adecuadamente en 30 alumnos, pero sólo 11 de ellos (32%) lo hacen correctamente. El 40% de los alumnos conocen la denominación adecuada de estos números.

En la Tarea 15 se propone el caso más general: dados los términos de una secuencia hay que escribir los términos 7º y enésimo; se sugiere la representación puntual y el desarrollo como ayudas posibles para llegar a dicho término. Se trata de una secuencia sencilla, la de los números pares. El reconocimiento del término general lo hacen correctamente el 63% de los alumnos; sólo 1 de ellos utiliza la expresión **n**. Un 56% de los alumnos hacen una representación puntual, que resulta correcta en todos los casos. Finalmente, no realizan el desarrollo aritmético más que 4 alumnos (15%). A partir de los resultados de la Tarea 13, se propone la Tarea 15-bis en la que se trata de discutir la traducción a representación de los desarrollos propuestos por los alumnos para la secuencia de la tarea 13, que viene dada mediante patrón puntual. De las tres opciones que se presentan la opción a) es la que produce mayor dispersión en las interpretaciones hechas y sólo el 20% hace la lectura adecuada; la opción b) la interpretan correctamente el 75% de los alumnos; hay que tener en cuenta que se trata de la opción presentada en la prueba. Las representaciones realizadas para cada opción quedan clasificadas en el tabla 63.

Tabla 63: Representación puntual de tres expresiones algebraicas equivalentes.

opción Tipo	a	b	c	total
dos filas de puntos	13	2	3	18
dos filas y un punto que se resta		1		1
Rectángulo	4	2		6
fila y rectángulo	7			7
cuadrado menos un punto en el vértice	7	23	6	36
cuadrado y un punto que se resta		2		2
cuadrado y fila			1	1
cuadrado y dos filas			16	16
cuadrado y rectángulo			3	3
representan los puntos	2		3	5
representación inadecuada	2	3	1	6

La opción c) la interpretan correctamente el 50% de los alumnos. Una estrategia en las tres opciones consiste en representar mediante dos filas de puntos, una por sumando, que predomina en la opción a).

En la Tarea 19 se presentan pentágonos que se han de descomponer en triángulos y así obtener el término general de lo secuencia de números pentagonales. La continuación de la secuencia resulta asequible para todos los alumnos; la representación del término general sólo la hacen un 38%. El 88% son capaces de descomponer el pentágono en triángulos y, a partir de esa descomposición, obtener la expresión general del término de la secuencia. Hay un 73% de alumnos que escriben una expresión adecuada para el término general, empleándose cuatro notaciones distintas. La Tarea 20 proporciona el término general de una sucesión y se les pide a los alumnos que reconozcan una propiedad de sus términos y que represente los mismos siguiendo un patrón. Los enunciados que se dan para propiedades son vagos e imprecisos; sólo 2 alumnos enuncian una propiedad de manera adecuada; el dominio conceptual es bajo. La representación resulta más precisa: el 73% hacen una representación que responde a la expresión del término general aportado.

En la Tarea 21 se repite la idea de la Tarea 20 con la sucesión 3n-1.

El enunciado de una propiedad común no lo proporciona ningún alumno. La representación puntual que responde a la expresión del término general la hacen inicialmente el 18% de los alumnos. La traducción del término general de sucesión al patrón al que se ajustan sus primeros términos no parece resultar sencilla.

La Tarea 22 en la que se dan los términos de la secuencia de la tarea anterior y se pide hacer una representación puntual de esos términos; sólo un alumno encuentra una representación puntual adecuada mediante rectángulos de lado 3 a los que resta un punto en el vértice. El resto de alumnos hace representaciones tentativas que no representan un patrón claro y, por ello, no llegan a obtener el término general.

En la tarea 23 se pide a los alumnos que inventen el termino general de una sucesión, de ella han de decir cual es la propiedad común que poseen sus términos y hacer una representación puntual de los tres primeros términos. Por ser esta la última de las tareas se pretende con ella recoger la visión que les ha quedado a los alumnos de qué es el término general de una sucesión ya que han de proporcionar uno. La respuesta la pueden dar recordando los trabajados realizados y tomando uno de los términos utilizados o inventando alguno similar. Sólo el 87% de los alumnos da una expresión que se puede considerar un término general. De ellas, el 60% de las expresiones corresponden a una expresión preparada y simplificada como se suelen dar estas expresiones; por el contrario el 40% son expresiones con varios sumandos y en todos ellos aparece n, los cuales se pueden simpificar. Al enlazar esta primera cuestión con la tercera de esta misma tarea se ve que ningún alumno de los que dan este tipo de expresiones hace una representación correcta de los tres primeros términos: no está clara la noción del papel que desempeña el término general; entendemos que con estas expresiones se intenta dar el término general de la sucesión para cada uno de los sumandos; así por ejemplo:

n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4) indica que se empieza por un valor n y se toman 4 números sucesivos descendentes.

IV. 4.3. Valoración y decisiones.

Al concluir la fase de observación en 8º nivel, el equipo investigador clasifica las producciones de los alumnos según los procedimientos inicialmente previstos.

I Representación de números.

Hemos puesto de manifiesto el dominio del Sistema Simbólico Configuración Puntual; los alumnos emplean modelos estructurados de puntos, preferentemente geométricos, para representar números (por lo general, menores que 50). También hemos encontrado dominio en los Desarrollos Aritméticos como escritura operatoria de los números naturales basada en las operaciones aritméticas elementales. Los alumnos no encuentran dificultad para utilizar ambos sistemas de manera adecuada y escribir con ellos una expresión común para tres números de una secuencia.

II. Traducción entre sistemas de representación.

Las configuraciones puntuales admiten diferentes interpretaciones cuando se traducen a desarrollos aritméticos; pequeñas alteraciones en la representación puntual conducen a desarrollos aritméticos diferentes. La estructura aditiva es prioritaria en la interpretación y traducción de las configuraciones puntuales a desarrollos aritméticos; los alumnos consideran distintos niveles de análisis en sus interpretaciones, que indican también distintos niveles de comprensión de la estructura de una configuración puntual. Algunos desarrollos aritméticos tienen una traducción prioritaria a configuración puntual. Así, una suma de varios sumandos (fijos o variables) se traduce como un agrupamiento de líneas, en el que cada sumando es una línea; un producto de dos factores se traduce en una disposición rectangular en la que cada dimensión coincide con un factor. La traducción entre los sistemas de representación se sistematiza cuando se realiza sobre varios términos de una secuencia (tres o cuatro), es decir, cuando se contempla para un patrón. El grado de integración entre los sistemas es muy fuerte, aún cuando no existe una interpretación única para las traducciones. Cuando se propone a los alumnos que inventen una secuencia y la representen lo hacen sin dificultad, pero poniendo de manifiesto:

* una tendencia acusada a comenzar por la representación puntual y seguir por el desarrollo;
* un predominio de los desarrollos aditivos.

La comprensión de los alumnos hay que matizarla en este sentido: conocimiento de los sistemas de representación, pero predominio de los códigos y normas más simples en su empleo. La traducción de una secuencia de desarrollos a representación puntual también admite varias interpretaciones cuando las expresiones aumentan su complejidad.

III. Tareas de extrapolación.

En estas tareas se pone de manifiesto un dominio del patrón en cada uno de los sistemas al aplicar la regla -visual o aritmética- a términos avanzados. La comprensión de los alumnos en estas tareas no ha presentado problemas, al menos con los ejemplos propuestos en nuestro trabajo.

IV. Concepto y obtención del término general de una sucesión.

La noción de término general de una sucesión es un concepto complejo. Nuestros alumnos han puesto de manifiesto:

* fuerte tendencia a interpretar la idea de término enésimo de una secuencia con el ordinal **n** que expresa la posición de ese término;

* no hay dificultades especiales en la representación puntual del término enésimo de una secuencia, al menos con los ejemplos utilizados; sí se detecta una tendencia a utilizar esquemas continuos y abandonar los discretos;
* el desarrollo del término enésimo suele encontrarse con facilidad; en ningún caso se identifica con n.

La expresión general del término de una sucesión tiene significados muy distintos para los alumnos cuando hay que obtenerla a partir de los números que cuando hay que obtenerla a partir de los desarrollos. Si la secuencia viene dada mediante patrón puntual y la traducción al desarrollo aritmético presenta cierta complejidad de interpretaciones, la obtención del término general a partir del desarrollo es una tarea difícil que no es comprendida/ ejecutada más que por un número escaso de alumnos; la tendencia prioritaria es afirmar que el término general es n.

V. Interpretación del término general de una sucesión.

Detectamos:

* dificultad en traducir la expresión algebraica a propiedades de los términos;
* cierta soltura en la obtención de la representación puntual en algunos casos;
* escribir el desarrollo aritmético de los primeros términos a partir del término general no resulta sencillo; una vez que n toma un valor concreto se efectuan las operaciones.

En resumen: el campo de estudio inicialmente propuesto se clarifica para los procedimientos I, II y III, con mayor dificultad en sucesiones cuadráticas que lineales; surge, por otra parte, una riqueza de interpretaciones en las tareas de traducción que apunta hacia la necesidad de una mayor sistematización. Los procedimientos IV y V, basados en el concepto de término general de una secuencia delimitan algunos problemas esenciales de comprensión de este concepto, pero estos problemas quedan simplemente enunciados; sería necesario profundizar en su estudio.

Al finalizar este estudio en 8º nivel, el equipo investigador da por concluido su trabajo de campo y recomienda continuar investigando sobre el concepto de término general de una sucesión empleando configuraciones puntuales y desarrollos aritméticos, con alumnos del Segundo Ciclo de Secundaria.

IV.5 Fase de Reflexión.

Hemos venido realizando una revisión crítica de nuestro trabajo al concluir cada una de las fases establecidas por nuestro diseño. La experiencia adquirida nos ha hecho ser más sistemáticos en este curso y, por ello, nuestra reflexión se ha realizado al mismo tiempo que llevábamos a cabo nuestro estudio. Nos queda destacar la información más significativa, a nuestro juicio, y resumir los datos y conclusiones destacables.

IV.5.1 Revisión general del proceso.

La delimitación de la preocupación temática realizada en la sesión inicial de esta fase de la investigación, proporciona un grado de precisión considerable. Las decisiones que se toman en dicha sesión establecen una dirección clara para el trabajo en este curso. El esquema de organización del trabajo en el aula mediante tareas propuestas al alumno permite un control preciso al especificar las variables y las condiciones de trabajo en cada momento; el análisis estructural realizado en IV.2.4 y IV.2.5 así lo ponen de manifiesto. Queda claro nuestro interés inicial por explorar la configuración puntual como Sistema Simbólico de representación (dando menor énfasis al Desarrollo Aritmético), en actividades de traducir y continuar secuencias, principalmente, y obtener el término general, en segundo lugar. Las decisiones se han tomado por consenso del equipo investigador y, en este caso, la planificación ha cubierto su funcionalidad.

Respecto de la actuación en el aula reiteramos dos críticas:

* la primera, relativa a las intervenciones del profesor, que resuelven conflictos sin agotar las posibilidades de debate y explotación de contradicciones;
* la segunda, relativa a algunas producciones de los alumnos realizadas en el curso de las puestas en común -como es el caso de la tarea 14 bis- que no se recogieron y no se han podido analizar; aunque son escasas, hubiera sido conveniente disponer de este material.

El ritmo de trabajo individual, en particular en las sesiones segunda y quinta, es muy intenso; hubiera sido necesario algo más de tiempo para la puesta en común.

La estructuración de las clases mediante las tareas resulta un dato clave para analizar la planificación, actuar y organizar la fase de observación. Esta estructuración ha permitido cubrir en la práctica todo el programa propuesto y, mediante ella, hemos establecido un marco de referencia en el que se han hecho explícitos unos problemas de comprensión determinados sobre las nociones de:

* expresión de los términos de una secuencia y continuación de la misma, mediante los sistemas simbólicos *Configuración puntual* y *Desarrollo aritmético;* traducción entre las diferentes representaciones;
* concepto de término general de una sucesión y expresión de dicho término general mediante los sistemas simbólicos estudiados.

Aproximadamente, se dedica la mitad del tiempo a cada una de estas nociones, si bién es cierto que cuando se trabaja en la segunda también se está trabajando con la primera.

Ya hemos comentado la información obtenida sobre la comprensión alcanzada por los alumnos en estas dos nociones. Se trata de conceptos complejos cuya comprensión tiene muchos matices; algunos de ellos se han delimitado en este estudio y otros esperan nuevas evidencias basadas en nuevas investigaciones.

La producción general de los alumnos ha sido como se muestra en la tabla 64.

Tabla 64: Producción de los alumnos en las distintas tareas.

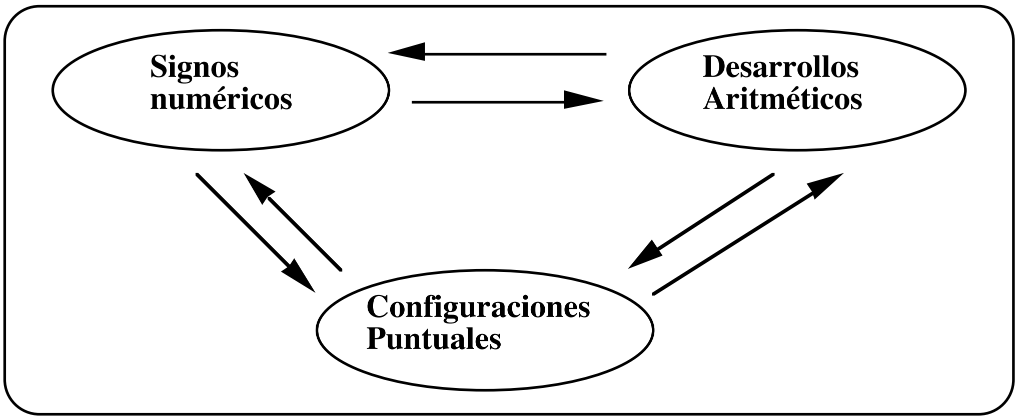
tarea	1	2	5	6	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	8	9	10
frecuencia	181	80	115	56	34	46	34	34	49	34	34	34
porcentaje	16%	7%	10%	5%	3%	4%	3%	3%	4%	3%	3%	3%

tarea	11	12	13	14	15	15bis	19	20	21	22	23	total
frecuencia	34	34	34+43	34	27	35	32	33	27	32	24	1113
porcentaje	3%	3%	7%	3%	2%	3%	3%	3%	2%	3%	2%	

IV.5.2. Valoración del Proceso en 8º nivel

En el desarrollo de las sesiones de trabajo los alumnos se han visto estimulados para trabajar sobre aspectos como:

1. Profundizar sobre el sistema de representación de números por configuraciones puntuales, que ya se había trabajado en el curso anterior y agregar el sistema de desarrollos aritméticos.
2. Utilizar los sistemas de representación para estudiar el patrón que comparten varios números.
3. Iniciarse en el concepto de sucesión de números naturales, a partir del estudio de números que comparten patrón.
4. Trabajar con tres tipos de representación simbólica y los procesos de traslación entre ellos; se ha dado especial importancia a los 6 procedimientos de traducción posibles entre los tres sistemas de representación de referencia.



5. Traducir secuencias, de un sistema a otro de representación; establecer la relación entre patrones numéricos y geométricos equivalentes.
6. Extrapolar términos, lo que permite fijar la atención en los patrones a seguir.
7. Establecer la relación entre el lugar que ocupa un término de la secuencia y la expresión de dicho término como paso previo para considerar la posición genérica que llamamos enésima.

8. Obtener el término general de una sucesión a partir de sucesiones expresadas con los tres sistemas simbólicos. Por su utilidad han quedado ordenados del siguiente modo: representación puntual, desarrollo aritmético y representación numérica.
9. De este plan de trabajo, observamos que:

a) se muestra conflictivo el hecho de que el término general de una sucesión posea una expresión algebraica (equivalente a un desarrollo aritmético) y no una expresión simple, como ocurre con los elementos de la secuencia dados en numerales.

b) se pone de manifiesto que la misma sucesión numérica puede tener representaciones puntuales distintas, y también desarrollos aritméticos distintos lo que proporcionará expresiones para el término general distintas (aunque equivalentes).

10. Particularizar, para los primeros términos, la expresión general de una sucesión.
11. Apreciar la ley a la que se ajustan los números de una secuencia, expresados según los distintos tipos de representación considerados.
12. Encontrar expresiones de términos generales para secuencias más complicadas; la descomposición en triángulos de la representación puntual de los términos da oportunidad para iniciar el trabajo con expresiones algebraicas más complejas.

En resumen: El avance logrado en 8º ha sido superior, con gran diferencia, al conseguido en 7º; entendemos que esto es debido al trabajo realizado el año anterior.

El proceso que ha permitido pasar desde las representaciones puntuales hasta la expresión del término general ha sido progresivo; los alumnos han realizado este trabjo guiados por las tareas propuestas y orientados por el profesor.

Destaca un predominio de la estructura aditiva sobre la multiplicativa en el trabajo realizado por los alumnos. En las representaciones de desarrollos aditivos cada sumando se representa independientemente; esto resulta un obstáculo para los desarrollos en los que aparece una resta, ya que se pretende representar al minuendo y sustraendo independientemente indicando de alguna forma (punto más grueso, subrayado) que hay que restar.

IV.5.3.Conclusiones

Algunos de los logros alcanzados que queremos destacar en el estudio de 8º son:

Se ha puesto de manifiesto que existe un camino intuitivamente más claro y estructuralmente más coherente para llegar a una expresión algebraica como término general de una sucesión; escribir la secuencia numérica, a continuación la expresión algebraica y comprobar que los términos son valores concretos de la expresión tiene un significado difícil de comprender.

Se ha puesto en evidencia la dificultad que encierra pasar de los términos de una sucesión numérica (cuya notación general **intuitiva** es **n**) a su término general cuya expresión algebraica es función de **n.**

Poner de manifiesto cómo se pueden obtener expresiones algebraicas distintas, aunque equivalentes, de una misma sucesión, justificando el paso de una a otra.

La planificación, centrada en la organización de las clases mediante una secuencia de tareas, ha proporcionado una estructuración adecuada a nuestro trabajo e investigación, acorde con la metodología de investigación diseñada.

Ha resultado satisfactorio comprobar el entusiasmo con el que los alumnos han trabajado sobre números figurados; esto nos reafirma en la convicción de que es un tópico que motiva y hace interesante el trabajo.

El buen entendimiento que los alumnos han mostrado en todo momento con la investigadora ha sido, igualmente, un logro importante en este trabajo.

CAPITULO V
EVALUACION DEL ESTUDIO

V.1. Introducción.

En este capítulo nos proponemos exponer los resultados de la evaluación a la que hemos sometido nuestro modelo. Existen trabajos anteriores en los que se llevó a cabo este mismo procedimiento. Así, Stenhouse (1979/1987. pp. 71-78) sometió a evaluación sumativa su *English Humanities Curriculum Project,* cuando indagó en los efectos que producía un estilo de enseñanza sobre las relaciones raciales; para ello utilizó un diseño cuasi experimental clásico, en la línea de Campbell y Stanley (1963).

Este estudio de evaluación forma parte de nuestra Investigación y lo configuramos teniendo en cuenta que:

a.- Está inserto en un método más general, como es la Investigación-Acción.

b.- Está orientado a integrarse con los hallazgos obtenidos anteriormente, como son: el enfoque cognotivista relativo a mediadores tanto en el alumno como en el profesor, el análisis de tareas insertas en protocolos de realización del alumno y la toma de decisiones del equipo investigador.

c.- La insuficiencia de los test standarizados como criterios adecuados para medir la eficacia de la enseñanza; por tanto, las tareas y tests de desempeño que se realizarán, estarán adaptados y modificados hasta que sus "*mediciones*" (realizaciones) se ajusten al juicio de los expertos, tanto en el campo temático (educación matemática) como en el pensamiento pedagógico (relación enseñanza-aprendizaje), en nuestro estudio.

Estas consideraciones son pertinentes para recordar que esta investigación no es una experiencia sólo de aprendizaje; nuestro equipo ha planificado una serie de tareas estructuradas para que los alumnos pongan de manifiesto sus conocimientos en aritmética, utilizando un nuevo sistema simbólico de representación de números, y se enfrenten a diversas tareas, entre ellas, la obtención del término general de una secuencia numérica. Se trata de un estudio de caso, como ya se he mencionado, sobre un grupo elegido intencionalmente; nuestro propósito es estudiar la comprensión que manifiestan los alumnos del grupo elegido ante las tareas presentadas anteriormente, que han configurado un modelo explícito de enseñanza. No puede haber pretensión de generabilidad estadística en este trabajo por razones de diseño y metodología; no hemos obtenido la muestra por selección aleatoria de la población disponible, ni hemos hecho una asignación aleatoria de los tratamientos. Tanto por razones de coherencia como por razones técnicas no vamos a aplicar estadística inferencial en esta evaluación.

Sin embargo, siguiendo a Cronbach (1975; p.125) valoramos este trabajo como "*Un paso adecuado a las condiciones locales, con lo cual cualquier generalización es una hipótesis de trabajo, no una conclusión definitiva*", interpretamos que con este estudio ofertamos un "*modo más de ver*". Por ello, consideramos légitimas las siguientes preguntas:

¿Hasta qué punto la información obtenida en este estudio depende de las características singulares del grupo elegido?

Los hallazgos encontrados ¿son resultado de una instrucción explícita o son efecto de una instrucción más general, propia del periodo de educación obligatoria?

Las características específicas del grupo experimental de alumnos ¿han condicionado la experiencia?; un grupo de alumnos similar ¿proporcionaría una información equivalente?

Para responder, al menos parcialmente, a estas cuestiones nos proponemos comparar la capacidad aritmética y los conocimientos y el dominio de procedimientos en sucesiones numéricas de los alumnos, con los que hemos trabajado, con los de un grupo que no ha recibido información explícita sobre exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Nos proponemos comprobar si la información trabajada en nuestro estudio es entendida, interpretada y utilizada por un grupo de alumnos similar. No pretendemos de este modo generalizar nuestros resultados sino ofrecer alguna tendencia que indique que, en condiciones semejantes, un grupo escolar similar al nuestro puede, igualmente, desarrollar su comprensión sobre patrones numéricos. De esta manera establecemos, de algún modo, que nuestro tópico es adecuado no sólo para la muestra intencional elegida, sino también para grupos naturales del sistema educativo. En este sentido hay que interpretar las hipótesis formuladas en el apartado II. 17 (pg: 107).

V. 2. Instrumentos de medida.

V. 2.1. Prueba de sucesiones

Con esta prueba se medirá la variable dependiente "dominio de las sucesiones"

V.2.1.1 Validez concurrente

La validez concurrente de la prueba de sucesiones la vamos a determinar correlacionando sus valores con los obtenidos en un *test standarizado de aptitud escolar* (TEA, 1987), en concreto con los factores *Seriación numérica y Cálculo*.

Tabla 1: Indices de validez concurrente del instrumento *Prueba de Sucesiones*.

r	Test total	Factor sucesiones numéricas	Factor cálculo
Prueba de sucesiones	.591*	.642*	.458*

N= 35

*: p< 0'001

Los coeficientes de concurrencia son de valor medio en magnitud (aproximadamente 0.5) y con significación estadística ($p<0.001$). Puede afirmarse que la prueba de sucesiones tiene una validez concurrente aceptable respecto a un test estandarizado de aptitud escolar (Fernández y otros, 1990; Pg: 299).

V.2.1.2 Validez de Contenido.

Para verificar la validez de contenido se han incluido todos los items que representan el universo de contenidos posible. Para la elaboración de tal universo de items se han tenido en cuenta tres criterios de categorización propios de todo estudio que utilice el análisis de contenido, que son:

a) Los procedimientos estudiados en el trabajo con sucesiones:
1. Continuar una sucesión dada.
2. Extrapolar términos de una sucesión dada.
3. Expresar la ley a la que se ajustan los términos de una sucesión dada.
4. Hallar los primeros términos de una sucesión a partir de su término general.
5. Hallar el término general de una sucesión a partir de los primeros términos.

b) Los tres sistemas de representación simbólicos con los que hemos estado trabajando:
I. configuración puntual.
II. símbolos numéricos (sistema decimal de numeración).
III. desarrollo aritmético de los números.

c) Tipos de sucesión considerada:
l. linales
c. cuadráticas.

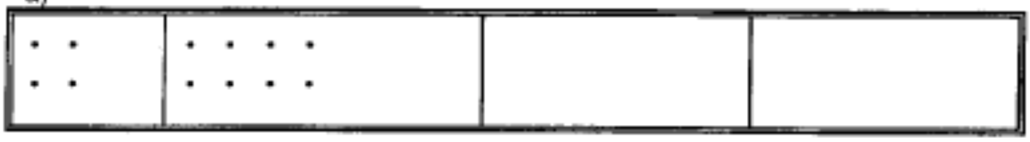
El cruce de estos tres criterios y sus categorías correspondientes dan como resultado 30 items, los cuales se diferencian dos a dos, al menos, en una característica. Las sucesiones elegidas para cada uno de los items han sido tomadas de los ejemplos propuestos por los alumnos en su trabajo de clase. El consenso de 4 expertos consultados permite afirmar que la prueba tiene una validez de contenido aceptable (Thorndike y Hagen, 1989; pgs: 62-65). La prueba aplicada ha sido:

Prueba de Sucesiones

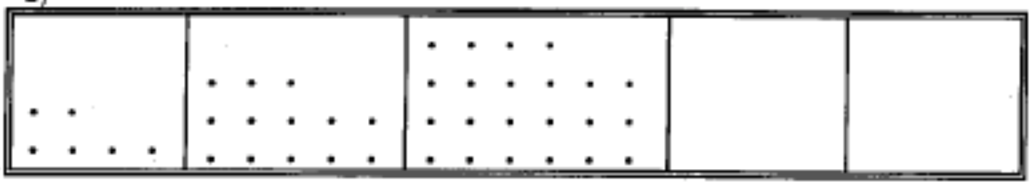
Nombre.. Edad...... Colegio.......................................Curso......

1.- Dibuja los dos términos siguientes en estas secuencias de puntos:

a)



b)



2.- Escribe los tres números que siguen en estas secuencias

a) 1, 4, 7, 10, __, __, __,

b) 3x1-2, 3x2-2, 3x3-2, ____, ____, ____

c) 2, 6, 12, 20, ___, ___, ___,

d) 2x4, 2x5, 2x6, ___, ___, ___,

3.- Escribe, sólo, el término 8º de las secuencias siguientes:

a) 3, 7, 11,... _____

b) 3+2+1, 4+3+2, 5+4+3,... _____

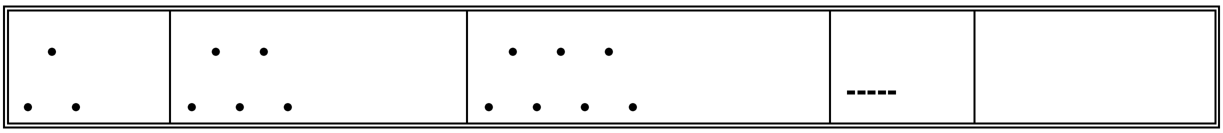
c) 3, 8, 15, 24, ... _____

d) 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, ... _

4.- Dibuja, sólo, el término 7º de las siguientes secuencias:

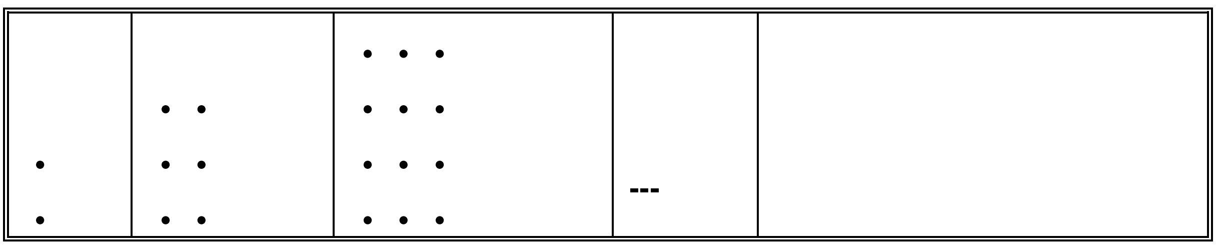
a)

1º 2º 3º 7º



b)

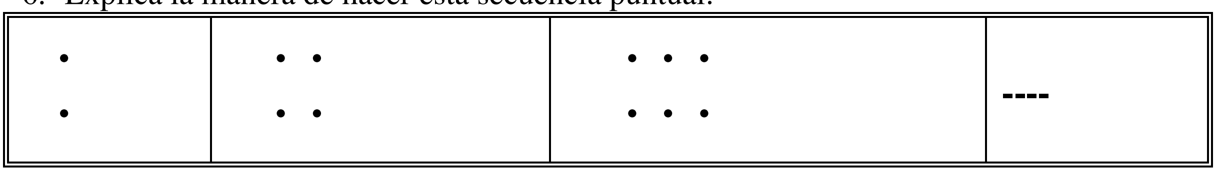
1º 2º 3º 7º



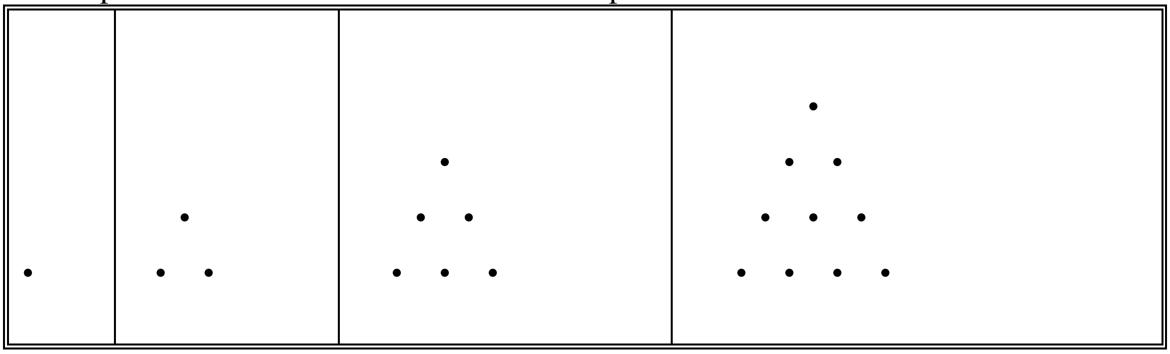
5.- Explica la regla seguida para formar esta secuencia numérica:

6, 8, 10, 12,..

6.- Explica la manera de hacer esta secuencia puntual:



7.- Explica la manera de hacer esta secuencia puntual.



8.- Explica la regla que siguen los números de la siguiente secuencia:

4+2, 4+4, 4+6, 4+8,..

9.- Explica la regla que siguen los números de esta secuencia:

1, 4, 9, 16, …

10.- Explica la regla que siguen los números de esta secuencia:

$4+2^2$, $6+2^2$, $8+2^2$, $10+2^2$,..

11.- La expresión general de una secuencia es 3n+2. Representa con puntos los tres primeros términos de esta secuencia.

12.- Escribe los tres primeros términos de la secuencia cuya expresión general es: (n-1)+n+(n+1).

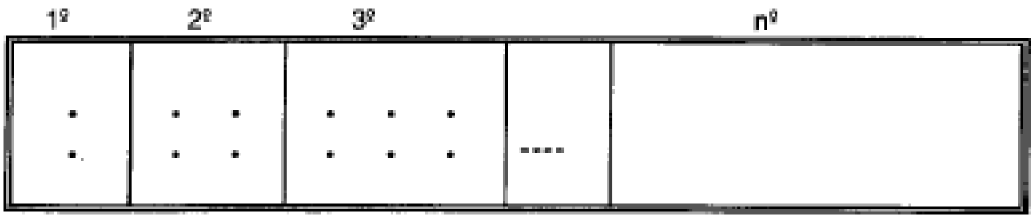
13.- Escribe un desarrollo aritmético de cada uno de los tres primeros términos de la secuencia que tiene de expresión general 4n-2.

14.- La expresión general de una secuencia es (n+1)(n+4). Representa con puntos los tres primeros términos de esta secuencia.

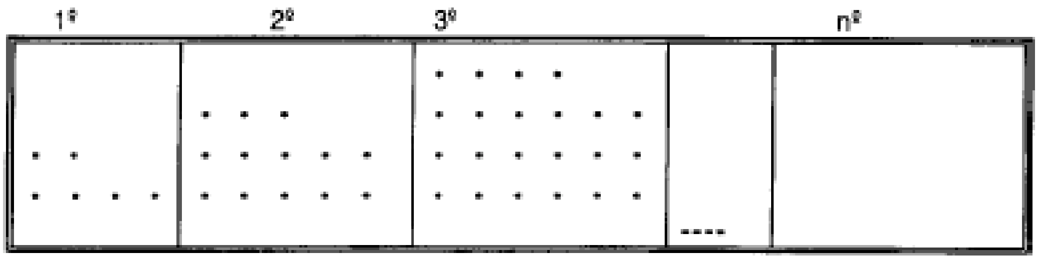
15.- Escribe los tres primeros términos de la secuencia cuya expresión general es 3n(n+1).

16.- Escribe un desarrollo aritmético de cada uno de los tres primeros términos de la secuencia que tiene por término general 3n-2.

17.- Dibuja el término de lugar n de las siguientes secuencias a)



b)



18.- Escribe el término de lugar n de las secuencias siguientes:

a) 6, 9, 12, 15, ...

b) 3+2+1, 4+3+2, 5+4+3, ...

c) 2, 6, 12, 20, ...

d) 3x1, 4x2, 5x3, 6x4, ...

V.2.1.3 Validez de Constructo.

Para indagar la validez de constructo se ha tratado de discernir la estructura factorial de la prueba utilizando sucesivamente la técnica de análisis de componentes principales y el método de solución rotada (oblimin directo) (Kerlinger, 1985; pgs: 324-332; Muñiz, 1992; pgs: 122-123). Se obtiene una matriz singular de rango = 29 y con la posibilidad de eliminar el análisis del item 27 que no ha sido contestado por ningún sujeto.

Solución factorial por componentes principales

La solución por componentes principales permite extraer 5 factores que explican el 70% de varianza en el espacio factorial. Las cargas $|a| < 0.30$ se han puesto a 0.

N=119. La tabla 2 presenta la agrupación de los items en 5 factores.

Tabla 2: Solución factorial por componentes principales

factor Item	I	II	III	IV	V	h^2 para 10 factores
1	-	.36	-	-	.35	0.62
2	.40	.30	-	-	.39	0.61
3	.35	.33	-	-	-	0.44
4	-	.52	.50	-	-	0.73
5	.43	-	-	-	-	0.63
6	-	.48	.57	-	-	0.81
7	.30	.30	-	.35	-	0.45
8	.35	-	-	.36	-	0.72
9	-	-	-	.51	-.44	0.72
10	.47	-	-	-	-	0.62
11	.45	.45	.51	-	-	0.71
12	.52	.43	.37	-	-	0.73
13	-	.46	.64	-	-	0.75
14	.39	.55	.43	-	-	0.73
15	.40	-	.31	-	-	0.72
16	-	-	-	-	.30	0.74
17	.53	-	-	-	-	0.76
18	-	-	-	-.41	-	0.71
19	.70	-	-	-	-	0.68
20	.46	-.41	-	-.32	-	0.65
21	.68	-	-	-	-	0.65
22	.51	-.30	-	-	-	0.69
23	.58	-.38	-	-	-	0.73
24	.64	-.43	-	-	-	0.73
25	.46	-	-	-	.51	0.70
26	.35	-	-	-	.31	0.73
28	.43	-	-	.38	-	0.70
29	-	-	-	.46	-	0.81
30	.43	-.33	-	.48	-	0.72
1	5.27	3.09	2.16	1.87	1.64	
% acumulado	26.4	41.9	52.7	62.1	70.3	

Según los datos de la tabla, 21 items cargan positivamente en el factor I; el cual lo podemos denominar como ***Factor general de Dominio del Tópico.*** En este factor I están representados (independientemente) los cinco procedimientos considerados en el criterio de categorización a): continuar, extrapolar, explicar la regla, hallar los primeros valores, cálcular el término general; los tres sistemas de representación considerados en el criterio b): simbolos numéricos, desarrollos aritméticos y configuraciones puntuales; y los dos tipos de sucesiones del criterio c): sucesiones lineales y cuadráticas. Si bien, no están todas las combinaciones posibles entre ellos; faltan las combinaciones que corresponden a los items que consideramos demasiado sencillos como pueden ser el 1 o el 4, por ejemplo, o demasiado difíciles como el 29, o el 8 (que presenta muchos errores, debido a los fallos de cálculo mental que cometen los alumnos cuando calculan el término intermedio).

Observamos que el constructo "***dominio de las sucesiones***", cuando se operativiza y se mide con el instrumento ad hoc, tiene una estructura multifactorial, con un factor general que satura en la mayoría de los items y explica la mayor parte de la varianza de ese instrumento.

Sin duda, la solución factorial rotada (oblimin directo) puede darnos una idea más completa de cómo se estructura el constructo implícito en esta prueba.

Solución Factorial rotada y clasificada

Una solución factorial que explique el 100% de la varianza en el espacio factorial. Las cargas factoriales $|a| < 0.30$ se han puesto a cero.

Tabla 3: Solución factorial rotada y clasificada

Factor item	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	-	-	0.40	-	-	0.51	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	0.69	-	-	-	-
3	-	-	-	-	0.31	0.36	-	-	-	-
4	-	-	0.84	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-	-	0.63	-
6	-	-	0.89	-	-	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	0.46	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	0.82	-	-	-	-	-
9	-	-	-	0.32	0.48	-0.50	-	-	-	-
10	-	-	-	-	0.71	-	-	-	-	-
11	-	0.79	-	-	-	-	-	-	-	-
12	-	0.69	-	-	-	0.34	-	-	-	-
13	-	0.86	-	-	-	-	-	-	-	-
14	-	0.83	-	-	-	-	-	-	-	-
15	-	-	-	-	-	-	-	0.70	-	-
16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.74
17	-	-	-	-	-	-	-	0.77	-	-
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.74
19	0.62	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	0.81	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	0.71	-	-	-	-	-	-	-	-	-
22	0.36	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	0.85	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	0.71	-	-	-	-	-	-	-	-	-
25	-	-	-	-	-	-	0.68	-	-	-
26	-	-	-	-	-	-	0.84	-	-	-
28	-	-	-	0.76	-	-	-	-	-	-
29	-	-	-	0.72	-	-	-	-	-0.54	-
30	-	-	-	0.74	-	-	-	-	-	-
1	3.03	2.76	2.05	1.99	1.84	1.64	1.62	1.47	1.32	1.31

La interpretación que hemos realizado de los factores obtenidos aparece en la tabla 4.

Tabla 4: Interpretación de los factores

Factor	items que satura y correspondencia con criteros.	Denominación del factor	Correspondencia con contenido
I	19 - (4,I,l) 20 - (4,II,l) 21 - (4,III,l) 22 - (4,I,c) 23 - (4,II,c) 24 - (4,III,c)	Primeros términos	Cálculo de los primeros términos a partir del término general en todas sus variantes.
II	11 - (2,I,c) 12 - (2,I,c) 13 - (3,II,l) 14 - (3,I,l)	Extrapolar y explicar con representación puntual.	Extrapolar términos en una sucesión o Explicar la regla común de los términos de una sucesión, lineal o cuadrática, con predominio de configuración puntual.
III	1 - (1,I,l) 4 - (1,III,l) 6 - (1,III,l)	Continuar secuencia lineal	Continuación de los términos de una sucesión. La característica común es ser lineal, en un caso es puntual en otros dos casos es un desarrollo aritmético.
IV	9 - (2,II,c) 28 - (5,III,l) 29 - (5,II,c) 30 - (5,III,c)	Término general no visual	Cálculo del término general cuando la secuencia viene dada en expresión numérica o desarrollo aritmético.
V	3 - (1,II,l) 7 - (2,II,l) 8 - (2,III,l) 9 - (2,II,c) 10 - (2,III,c)	Extrapolación no visual	Tres items se refieren a extrapolar términos en caso de secuencias dadas numericamente y por desarrollos aritméticos. Uno a seguir una secuencia lineal numérica.
VI	1 - (1.II,l) 2 - (1,I,c) 3 - (1,II,l) 9* - (2,II,c) 12 - (2,I,c)	Continuar una secuencia gráficamente.	Tres items tienen en común continuar una secuencia puntual lineal o cuadrática. Otros tres tienen en común el ser numérica. El 9 con carga negativa, es un item en el que los alumnos no dan el resultado correcto debido a error al hacer el cálculo mental.
VII	25 - (5,I,l) 26 - (5,I,c)	Término general gráfico	Hallar el término general de una secuencia dada en configuración puntual, lineal o cuadrática.
VIII	15 - (3,I,l) 17 - (3,II,c)	Explicar cuadrática	Explicar la regla que siguen los términos de una secuencia cuadrática en términos numéricos y en configuración puntual.
IX	5 - (1,II,c) 29* - (5,II,c)	Extraño inexplicado	Este factor está compuesto por el item 5 cuyo comportamiento fue anormal, y el 29 que lo consideramos de los más dificiles. Son items aislados.
X	16 - (3,III,l) 18 - (3,III,l)	Explicar en desarrollo	Explicar la regla que siguen los términos de una secuencia cuando los mismos vienen expresados como desarrollos aritméticos.

*: Carga negativa: Factor bipolar; N=119

La observación de la tabla permite asegurar que, sin duda, el criterio de categorización más relevante es el que se establece en base a los procedimientos considerados (**a**).

Un análisis de la tabla muestra que, excepto en el caso del factor I, en el resto, la representación puntual (que también se ha denominado gráfica o visual) está separada en factores distintos respecto a aquellos casos en los que dicha representación no aparece.

Algunos items, aparentemente sencillos, pero que incluían un número excesivo de respuestas incorrectas, presentan una asociación para la que no encontramos explicación; este es el caso del item 9 y tambien del item 5.

.

V.2.1.4 Fiabilidad

* Fiabilidad por consistencia de items/unidades

Se ofrecen algunos valores de la fiabilidad de la prueba de sucesiones, calculados mediante diversos procedimientos:

Θ de Carmines = 0.84 obtenida en el análisis principal (componentes principales).

α de Cronbach = 0.82

Valores con alta magnitud y significación estadística ($p<0.001$)

* Fiabilidad por consistencia de partes (mitades: items pares vs items impares): r= 0.77 (correlación entre distribuciones pares e impares); aplicando la fórmula predictiva de Spearman-Brown, ya que las varianzas respectivas son homogéneas:

$$R=2r/1+(n-1)r=2.077/1+0.77=0.87$$

Valor de alta magnitud y evidente significación (Fernández y otros, 1990; pgs 284-285)

* Fiabilidad a partir de componentes de varianza: Indice de Hoyt (Shavelson, 1988; pgs: 502- 506).

Para los 30 items que determinan el instrumento y 119 sujetos, se aplica una Anova de medidas repetidas sujetos x items, utilizando el programa 8V "Modelo general mixto del BMDP. (Dixon, 1990).

Tabla 5:

Compo-nente	F. de V.	SC	gl	MC	componentes de varianza
aleatorio	sujetos	88.5	118	0.76	0.024
fijo	items	382.06	29	13.17	0.109
residual	s x i	468.77	3422	0.14	0.137

El valor obtenido es r = 0.84

V.2.2. Prueba de capacidad aritmética.

Esta prueba, con formas paralelas como ya se ha indicado, tiene una doble función: como medida de una covariante (pretest) y como medida de la variable dependiente "capacidad aritmética", específicamente (postest). Las pruebas se incluyen a continuación:

Prueba Pretest

COLEGIO.................................ALUMNO................................curso......

1.- Escribe el mayor número que puedas utilizando tres veces el número 2.

2.- A continuación tienes una descomposición del número 18:

$$18 = 7 + 8 + 3$$

Escribe cuatro descomposiciones distintas de 18, empleando las operaciones que quieras.

3.- Escribe el mayor número posible utilizando tres veces el número 10.

4.- Al unir los vértices de un polígono mediante segmentos obtenemos sus lados y sus diagonales. ¿Cuantos segmentos se pueden trazar en un polígono de 15 lados, contando lados y diagonales?

5. Escribe cuatro números naturales que se refieran a tí personalmente, indicando en cada caso cuál es la referencia. Por ejemplo, alguien puede decir "1992 es el año que yo he vivido".

6.- Tienes cuatro nombres (persona, animal, cosa) y cuatro números:

gato	4500
Persona jubilada	12750
jarrón de porcelana	4
balón	790

Haz parejas nombre-número indicando en cada caso el motivo del emparejamiento.

7.- Cinco amigos preparan una excursión, cada uno pone 145 PTA.
Compran dos refrescos a 175 PTA cada refresco y cinco bocadillos y no les sobra nada. ¿Cuanto les costó cada bocadillo?.

8.- Los números tienen multitud de propiedades. Escribe cinco propiedades del número 18.

9.- Empleando solamente la cifra 4 y utilizando la operaciones que quieras, escribe el número 7.

10.- Señala una propiedad común que tengan los siguientes números: 3, 6, 10, 15, 21.

11.- Escribe los dos términos que siguen en los números del ejercicio anterior.

Prueba Postest

COLEGIO.........................ALUMNO..curso....

1.- Escribe el mayor nº que puedas utilizando solamente la cifra 3, tres veces.
2.- Tienes a continuación un desarrollo del número 21: 21 = 3 + 5 + 6 + 7
Escribe otros cuatro desarrollos distintos de 21, empleando las operaciones que quieras.
3.- Escribe el mayor número posible empleando tres veces el número 10.
4.- En una clase hay 20 alumnos, cada uno de ellos saluda a todos los demás con un apretón de manos. ¿Cuantos apretones de manos se han dado, en total, despues de saludarse todos?
5.- Escribe cuatro números relacionados con tu colegio, indicando en cada caso a qué aspecto se refiere.
6.- A continuación tienes cuatro números y cuatro situaciones.

330	perro
2500	ciclista
4	barco
10750	cuaderno

Asocia cada número con la situación que consideres más adecuada, explicando el criterio de asociación.
7.- Seis compañeros se han reunido para preparar un trabajo de clase. Cada uno ha aportado 175 PTA. Compran cinco cartulinas a 75 PTA cada cartulina y tres paneles y no les sobra dinero. ¿Cuanto costó cada panel?
8.- Los números tienen múltiples propiedades. Escribe cinco propiedades distintas del número 21.
9.- Empleando únicamente la cifra 4 y utilizando las operaciones que quieras, escribe el número 9.
10.- Escribe una propiedad común que tengan los siguientes números.

3, 6, 10, 15, 21, 28.

V.2.2.1. Validez concurrente

Obtenida tras correlacionar con un test standarizado de aptitud escolar (TEA, 1987) y con dos factores específicos de tal test (seriación numérica y cálculo).

Tabla 6:Correlación pretest- postest con prueba estandarizada

r	total-test	Factor seriación numérica	Factor cálculo
capacidad aritmética. factor A (pretest)	.59*	.57*	.47**
capacidad aritmética. factor B (postest)	.54*	.50***	.44****

N=34

*: p<0.001 ; **: p<0.05 ; ***: p=0.002 ; ***: p=0.009

Los coeficientes de concurrencia son de valor medio (aproximadamente 0.5) y con significación estadística suficiente. Puede afirmarse que la prueba de capacidad aritmética (con sus dos formas paralelas) tiene una validez concurrente aceptable respecto a un test estandarizado de aptitud escolar.

V.2.2.2. Validez de contenido.

Para verificar la validez de contenido se ha procedido a seleccionar intencionalmente 10 items de un universo de items posibles que representan el dominio denominado "capacidad aritmética". El criterio para elaborar estos items ha sido plantear cuestiones generales sobre uso del sistema decimal de numeración, comprensión de contextos numéricos, problemas aritméticos y secuencias numéricas; son cuestiones incluidas en pruebas de inteligencia y cuyo dominio no corresponde a definiciones o algoritmos específicos. Estas cuestiones responden al perfil esperado de formación que un ciudadano debe recibir durante el periodo obligatorio de su educación; admiten diferentes niveles de interpretación y pueden responderse por sujetos de formación y cultura diversos. La prueba se ha aplicado en nuestro trabajo con profesores en formación y ha sido discutida con otros profesores especialistas.

Los items finalmente seleccionados corresponden a situaciones en donde el alumno ha de hacer uso de la aritmética para resolver situaciones no estandarizadas, que en la mayoría de los casos responden a situaciones abiertas; por ello las respuestas tienen distinto valor dependiendo del grado de bondad de las mismas.

El consenso de expertos permite afirmar que la prueba, en sus dos formas, tiene una validez de contenido aceptable, pero mejorable si se incluyesen más items.

V.2.2.3. Validez de constructo

Tratamos de indagar la estructura factorial del constructo en este instrumento, para ello operamos con la Forma Pretest.

La solución por componentes principales permite extraer 4 factores que expliquen el 100% de la varianza del espacio factorial. Cargas $|a| < 0.30$ se han puesto a cero.

Tabla 7: Factores de la prueba de Aptitud Aritmética

Items \ Factores	I	II	III	IV	h^2
1	0.67	0.65	-	-	0.92
2	0.49	-	0.44	-	0.50
3	0.74	0.58	-	-	0.91
4	-	-	0.79	-	0.71
5	-	-	-	0.60	0.49
6	-	-0.35	-	0.66	0.62
7	0.44	-0.50	-	-	0.52
8	0.56	-0.43	-	-	0.57
9	0.52	-0.35	-	-	0.46
10	0.57	-	-	-0.40	0.51
λ	2.46	1.53	1.13	1.09	

Se hace difícil pensar que exista un factor general ya que en el factor I con mayor valor propio no está saturado por tres items (4,5,6). La solución rotada (oblimin directo) no permite obtener una mejor interpretación como se verá; sabiendo, además que la correlación entre factores son nimias.

Tabla 8: Correlaciones entre factores rotados:

	I	II	III	IV
I	1.00			
II	0.22	1.00		
III	0.12	0.16	1.00	
IV	-0.02	0.09	-0.01	1.00

Solución rotada y clasificada

Tabla 9: Factores en la solución rotada

Factores / items	I	II	III	IV
1	0.98	-	-	-
2	-	-	0.57	-
3	0.94	-	-	-
4	-	-	0.85	-
5	-	-	-	0.64
6	-	-	-	0.74
7	-	0.74	-	-
8	-	0.74	-	-
9	-	0.67	-	-
10	-	0.48	-	-0.32
1	1.94	1.84	1.26	1.14

Las interpretaciones de los factores y su posible correspondencia, interpretada por nosotros, con las categorías de contenido establecidas previamente es como sigue:

Tabla 10: Nombre e interpretación de los factores

Factor	items que satura	denominaciones	Correspondencia con contenidos
I	1-3	sistema numérico	El contenido de estos dos items es similar; en ambos casos se trata de hallar el mayor número que se pueda escribir con tres cifras en un caso se trata de la cifra 2, en otro caso con el 10
I I	7-8-9-10	operaciones aritmética como útil	En todos los casos se trata de aplicar operaciones aritméticas para resolver una situación problemática
I I I	2-4	Pensamiento creativo	Ambos items tienen carácter creativo; el 2 porque hay que dar un desarrollo que no refleje exactamente el ejemplo; el 4 porque hay que buscar una estrategía con la que resolver el problema
IV	5-6-10*	relación: aritmética-realidad	Los items 5 y 6 poseen la característica común de asociación de números con situaciones reales cotidianas. La correlación negativa que presenta el item 10 la interpretamos por la disyunción del mismo con los anteriores, ya que la relación entre los números en este caso es totalmente abstracta

*: Carga negativa: Factor bipolar; N=119 casos/sujetos.

V.2.2.4. Fiabilidad combinada

Fórmula combinada pretest-postest. Dado que existen dos formas paralelas, cada una administrada en un momento distinto (pretest, postest), es posible determinar un coeficiente de fiabilidad muy consistente al combinar ambas modalidades (equivalencia y estabilidad).

$r = 0.70$

$p < 0{,}001$

Un coeficiente de magnitud alta y con significación estadística.

V. 2.2.5. Fiabilidad por consistencia de items/unidades

Algunos coeficientes de fiabilidad por consistencia de unidad son:

Tabla 11:

	Forma A (Pretest)	Forma B (postest)
Θ de Cármines	0.66	0.69
α de Cronbach	0,70	0,72

valores, todos ellos, de magnitud suficiente y con significación.

V.2.2.6. Fiabilidad a partir de componentes de varianza: Indice de Hoyt.

Para los 10 items (valorados de 0 a 5) que determinan el instrumento y 119 sujetos, se aplica un ANOVA de medidas repetidas sujetos x items, sobre la distribución pre-test.

Tabla 12:

Componente	F. de V.	SC	gl	MC	σ^2 (componente de varianza)
aleatorio	sujetos	461.19	113	4.08	0.408
fijo	items	841.22	9	93.47	0.806
residual	s x i	1581.57	1017	1.56	1.555

$r = 0.72$

Los coeficientes de fiabilidad los estimamos como muy aceptables teniendo en cuenta la complejidad de la prueba (conocimiento parcial), y el limitado número de items (sólo 10).

V.2.2.7. Fiabilidad para criterios de corrección.

Un problema afín, derivado del formato abierto de este tipo de instrumento, es el de la valoración diferencial posible de cada item, o sea, calificar el conocimiento parcial a partir de la ponderación de las respuestas alternativas posibles. Esta aproximación al conocimiento parcial debería ser más habitual en ambitos educativos, aunque como señalan Crocker y Algina (1986), la evidencia empírica sobre su bondad obtenida hasta la fecha no es muy concluyente.

Un problema en este tipo de pruebas estriba en las posibles discrepancias (ausencia de fiabilidad intervaloradores), lo cual afecta evidentemente a la validez.

Un modo de verificar esta presencia de fiabilidad entre valoradores es utilizar un estadístico de acuerdo, como es la clásica Kappa de Cohen (1960).

Para el cálculo de la fiabilidad de los criterios empleados para la corrección de pretest y del postest se ha introducido un segundo evaluador distinto del investigador, o sea dos evaluadores, y seis niveles de excelencia o categorias de valoración de las repuestas a los items.

Se ha calculado la fiabilidad entre evaluadores a partir de las puntuaciones obtenidas por 20 sujetos (el 20%, aproximadamente, de la muestra) elegidos siguiendo una estrategía de muestreo aleatorio constante en el grupo de control y experimental.

Aunque conscientes de las limitaciones que presenta el cálculo del *porcentaje global de acuerdo* entre los dos evaluadores (ya que no se tienen en cuenta los posibles acuerdos debidos al azar) se ha realizado su estimación como primera aproximación en el cálculo de la fiabilidad interevaluadores. Para ello ha sido necesario construir la siguiente tabla, en cuya diagonal podemos encontrar el número de acuerdos totales entre los dos observadores.

Tabla 13: Frecuencias de acuerdo-desacuerdo en 200 items por 2 valoradores sobre 6 categorías de valoración.

	0	1	2	3	4	5
0	55	1	1			
1	1	13	1	2		
2		3	22	6		
3			2	29	9	
4				5	22	3
5				2	1	21

Total de acuerdos = 55 + 13 + 22 + 29 + 22 + 21 = 162

% global de acuerdos = 81%

Podemos afirmar que existe una alta fiabilidad en los criterios de corrección de las pruebas. Para superar los acuerdos debidos al azar, se calcula un coeficiente más ajustado, cual es el propuesto por Cohen (1960).

Tabla14: Frecuencias de acuerdo-desacuerdo y marginales:

	0	1	2	3	4	5	f_{i2}
0	55	1	1				57
1	1	13	1	2		1	18
2		3	22	6			31
3			2	29	9		40
4				5	22	3	30
5				2	1	21	24
f_{i1}	56	17	26	44	32	25	

El valor obtenido 0,76, puede ser considerado como un índice de consistencia alto entre las puntuaciones asignadas por los dos evaluadores (Bakeman y Gottman, 1989: 114; Krippendorf, 1990: 216; Cohen y Manion, 1990: 432; Anguera, 1992: 192; Leon y Montero 1993: 63).

Por último, como prueba de contraste con los resultados anteriores, podemos cálcular el índice de concordancia "W" de Kendall, que permite estimar la correlación existente entre las puntuaciones dadas por uno y otro evaluador a cada uno de los items del cuestionario.

Tabla 15: Tabla de cálculo para determinación de índice de concordancia ("W" de Kendall)

	0	1	2	3	4	5	
0	0.95	0,003	0,0006				0,95
1	0,0009	0.55	0,002	0,005			0,56
2		0,01	0,6	0,02			0,63
3			0,003	0,48	0,06		0,54
4				0.01	0,50	0,01	0.52
5				0,003	0,003	0,74	0,75
	0,95	0,56	0,61	0,52	0,56	0,75	3,95

El valor obtenido, 0,87 está próximo al valor máximo, 1; lo cual denota que la correlación o acuerdo entre los dos evaluadores aunque no es perfecta, si que es bastante alta (Downie y Heath, 1983; pg: 140)

V.3. Diseño de investigación

V.3.1. Selección del diseño de investigación.

Para poner a prueba las hipótesis en curso, se necesita un diseño de investigación. Se ha adoptado el diseño de grupo de control no equivalente, según la denominación dada por Cambell y Stanley (1966/1973; pg:93-99).

Este diseño pasa por ser el más utilizado y difundido en investigación educativa y, afortunadamente, bastante interpretable. Comprende un grupo experimental y otro de control, al menos, medidos ambos a nivel pretest y postest. Su estructura es:

Tabla 16: Diagrama del diseño cuasiexperimental de grupo de control no equivalente y pretest-postest.

$$G_E: O_1 \xrightarrow{\quad x_1 \quad} O_2$$

$$G_C: O_3 \xrightarrow{\quad x_0 \quad} O_4$$

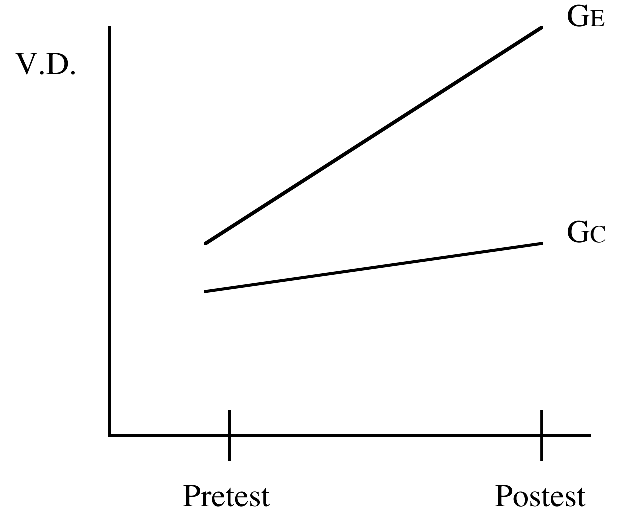
x_1: tratamiento innovador

x_0: ausencia de tratamiento

En donde O_1 y O_3 son medidas de una covariante (en este caso capacidad aritmética) previa que permite igualar los grupos; O_2 y O_4 son medidas agrupadas a nivel postest de la/s variable/s dependiente/s de interés; x_1 es el tratamiento didáctico: ***exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.***

Se trata de un diseño de los denominados cuasiexperimentales, ya que los grupos no poseen equivalencia previa por no haberse formado por asignación aleatoria. Son, pues, grupos naturales o intactos: clases regulares de 8º nivel. La equivalencia entre los grupos se intenta obtener a partir del uso de premedidas de posibles variables intervinientes que actúen como covariante con la variable dependiente. Campbell y Stanley (1966/1977; pg: 94) aclaran que "*cuanto más similares sean en su reclutamiento (formación) el grupo experimental y control, más eficaz resulta el control de la equivalencia entre grupos*". Es evidente que la gran amenaza a la validez interna de este diseño es la regresión hacia la media si se utilizan grupos con puntuaciones pretest extremas; así como que la fiabilidad de la covariante no está garantizada debido a un posible efecto de techo o suelo de los instrumentos. Sin embargo, el contexto de esta investigación se asemeja al expresado por Campbell y Stanley (1966/77; pg: 97) cuando afirman: "*Si el experimentador dispone de dos grupos naturales, por ejemplo, dos clases, y no puede elegir con libertad cual ha de recibir X (tratamiento experimental), o* ***por lo menos no tiene ningún motivo para sospechar que se haga un reclutamiento diferencial*** *con respecto a X. Aunque los grupos puedan diferir en sus medidas iniciales, el estudio se aproximará a la experimentación propiamente dicha*".

La interpretación de resultados procedentes de este diseño dependerá del patrón particular de hallazgos resultantes. Cook y Campbell (1979; pg: 103-112) discuten cinco patrones posibles. Aventuramos que sea el patrón 2 (ambos grupos crecen a valor promedio distinto y en una misma dirección) el que aquí se presenta, por ser el más común.



Patrón gráfico de hallazgos según diseño en curso

V.3.2. Amenazas a la validez del diseño

En la siguiente tabla se presentan los controles realizados sobre las principales amenazas que afectan a la validez del diseño elegido.

Tabla 17: Control de las principales amenazas a la validez del diseño.

VALIDEZ INTERNA		
Amenaza	**Control**	**Grado**
1. Historia	-Intrasesional: Los grupos recibieron sendos tratamientos simultáneamente (enseñanza). -Extrasesional: No hubo acontecimientos externos descollables.	+ +
2. Implementación	-Implementadores: Profesores muy similares en formación, antecedentes, motivación y conociendo su participación en el experimento. -Condiciones de implementación standarizadas.	+ +
3. Selección	-Sujetos participantes de similares características: edad, madurez sexo, estatus socioeconómico. No evidencia de notables diferencias intergrupales. -Tamaño muestral: alrededor de 30 sujetos por grupo, susceptible de detectar un tamaño de efecto mayor que 0.50 con una potencia en el contraste superior a 0.60 a un $\alpha < 0.05$.	+ +
4. Maduración	Sujetos de la misma edad cronológica y mental e igual nivel escolar.	+
5. Actitud de los sujetos	-Los tratamientos fueron parte regular de la enseñanza. -Efecto Hawthorne. -Efecto John Henry o de rivalidad compensatoria por tratamiento menos deseable. -Efecto de desmoralización por resentimiento.	+ = + +
6. Localización	-Salones de clase similares: concordancia. -Disponibilidad de recursos similar.	+ +
7. Instrumentación	-Deterioro de los instrumentos: fiabilidad y validez aceptables. -Efectos **techo** o **suelo** de instrumentos de medida de las V. Ds. -Sesgo del recolector de datos: concordancia en las calificaciones de dos calificadores previa standarización del procedimiento de calificación. Utilización de una prueba impresa con criterios de corrección standarizados.	+ + +
8. Administración de pretest	-Uso de pruebas paralelas para la variable aptitudinal en la que el efecto de la práctica podría ser cuestionable dado que el tiempo entre administración de pretest y de postest fue corto. -Interacción del tratamiento (enseñanza innovadora de un tópico) con el pretest (prueba aptitudinal).	+ +
9. Mortalidad	-Porcentaje de mortalidad en cada grupo. -Mortalidad diferencial según tratamiento.	+ +
10. Regresión	-Grupos naturales sin puntuaciones extremas en el pretest. Uso de análisis de covarianza.	+
11. Interacción selección-maduración.	-Comparación en intervalos temporales idénticos. -La regresión del postest con una variable madurativa (aptitud) determina pendientes homogéneas en cada grupo. -No probable desarrollo abrupto de la maduración debido a similar edad de los grupos y brevedad del tratamiento.	+ + +
12. Interacción historia-selección	-Sesiones múltiples de implementación del tratamiento. -Grupos de tratamiento extraidos de un mismo escenario.	+ +
13.Interacción	-Posibles efectos techo o suelo asociado a un tratamiento determinado.	¿

selección-instrumentación		
14. Ambigüedad de la dirección causal	Orden de procedencia de las variables está claro VI---->VD (enseñanza/aprendizaje)	+
15. Difusión o imitación de tratamientos	-Tratamiento bien diferenciado -No posibilidad de interacción entre G.E y G.C.	+ +
16. Igualación compensatoria de tratamientos	-Apoyos diferenciales a uno u otro grupo.	+
VALIDEZ EXTERNA		
18. Interacción administración de test tratamiento	-Aprensividad de la evaluación. -Sensibilización por el pretest.	+ =
19. Interacción selección-tratamiento	-Representatividad de los grupos.	¿
20. Interferencias de tratamientos múltiples	-Algún grupo estuvo sometido a un tratamiento afín con anterioridad	-
21. Dispositivos reactivos	-Artificialidad de la situación experimental. -Conciencia del alumno de que está participando en un experimento. -Presencia de extraños-	+ = =

Código:

+ : control fuerte, amenaza poco probable.

= : control débil; posible amenaza.

- : control escaso; amenaza probable.

V.3.3. Procedimiento experimental.

Tabla 18: Caracterización del tratamiento:

Característica	Explicitación en caps. III y IV
Duración	5 sesiones de 80 m cada una
Período del día	Tarde
Agrupamientos	-Clases naturales -Disposición libre en el aula -Dos grandes grupos
Tratamiento experimental	-Presentación de tareas por la investigadora -Realización de tareas individuales y colectivas por los alumnos -Discusión, puestas en común grupales
Ritmo de grupo de tratamiento	Al paso
Orientación	Información del profesor y de los propios alumnos
Deberes para casa	Ninguno

V. 4. Análisis de datos por hipótesis en curso

V.4.1. Hipótesis 1ª: Efecto del tratamiento sobre capacidad aritmética.

Los datos muestrales se ofrecen en la tabla 19.

Tabla 19: Datos muestrales.

	n	X	S_x	ε_x	Y	S_y	ε_y	Y	ε_y	S_y
G.Ex.	36	27.1	5.60	0.94	30.2	9.47	1.58	26.6	1.09	x
G. Co.	82	20.7	5.71	0.64	21.7	6.27	0.69	23.3	0.69	x
total	118	22.6	6.39	0.60	24.4	8.33	0.77			7.38

`X: Covariante -pretest directa;`Y: Postest directa; Y: Postest ajustada

Estadísticos descriptivos de contraste.

a): Tamaño del efecto δ de Cohen (Cohen; 1988) para medias directas: Un δ se detecta si $Y_E - Y_C / S_y > X_E - X_C / S_y$; tenemos:

30.2 - 21.7/8.33 > 27.1- 20.7 /6.39 o bién 1.02 > 1.00; δ = 0.02. Tamaño del efecto, δ = 0.02, despreciable. Habría que no rechazar la hipótesis nula a nivel muestral.

b): Tamaño del efecto δ de Cohen (Cohen; 1988) para medias ajustadas; en este caso δ = 0.48; el tamaño del efecto se incrementa cuando utilizamos puntuaciones residuales que se obtienen por las diferencias entre predicción por regresión y directas. Se trata de un tamaño del efecto medio que favorece al grupo experimental.

c): Medidas de la fuerza de la asociación para un modelo de efectos fijos (Snyder y Lawson, 1993)

Utilizando algunos estadísticos que verifican la fuerza de la asociación, al igual que un coeficiente de indeterminación, o sea, varianza de la variable dependiente explicada por la dependiente, tenemos:

Tabla 20:

estadístico	fórmula	valor	significación sustantiva
eta cuadrática (η^2)	SC_E/SC_T	0,04	NO
omega cuadrática (Ω^2)	$SC_E-((v-1)xMC_p)/$ SC_T+MC_P	0,038	NO
epsilon cuadrática (ε^2)	$SC_E-((v-1)xMC_P)/SC_T$	0,038	NO

SC: suma de cuadrados; E,D: entre, dentro; MC: media cuadrática.

ν: Niveles de la variable independiente.

En los tres estadísticos calculados, propios de un modelo univariado de efectos fijos, la fuerza de la asociación es baja: sólo el 4% de la varianza de la variable dependiente es explicada por la variable independiente.

A nivel muestral, podemos fácilmente asumir la no existencia de efectos con significación del tratamiento innovador en una variable dependiente de interés cual es la capacida aritmética. En consecuencia aceptamos la nulidad de la hipótesis H 1ª. ***El trabajo de exploración de patrones mediante configuraciones puntuales no ha mostrado una mejora diferencial y sustantiva de la capacidad aritmética de los alumnos que han seguido este modelo de enseñanza frente a los que no lo han seguido.***

V. 4.2. Hipótesis 2ª: El efecto del tratamiento sobre dominio del tópico sucesiones numéricas.

Tabla 21: Datos muestrales

	n	X	S_x	ε_x	Y	S_y	ε_y	Y	ε_y	S_y
G.Ex	35	27.1	5.60	0.94	18.5	4.11	0.68	16.6	0.68	
G.Co	79	20.7	5.71	0.64	14.4	4.53	0.49	15.2	0.43	
total	114	22.6	6.39	0.60	15.6	4.71	0.43			4.40

X: Covariante-pretest directa; Y: postest directa; Y: postest ajustada

Estadísticos descriptivos de contraste:

a) Tamaño del efecto δ de Cohen para medias directas; en este contraste, el tamaño del efecto, δ=0.13, favorece al grupo de control aunque su magnitud sea escasa. Como decisión habrá que no rechazar la hipótesis nula.

b) Tamaño del efecto (δ Cohen) para medias ajustadas: δ = 0.32. El tamaño del efecto para medias ajustadas es de magnitud media y favorece al grupo experimental.

c) Medidas de la fuerza de la asociación para un modelo univariado de efectos fijos (Snyden y Lawson, 1993).

Tabla 22:

Estadístico	fórmula	Valor	significación sustantiva
Eta cuadrática (η^2)	SC_E/SC_T	0.02	NO
Omega cuadrática (Ω^2)	SC_E-((v-1xMC_D)/ SC_T+MC_D	0.014	NO
Epsilon cuadrática (ε^2)	SC_E-((v-1)xMC_D/SC_T	0.014	NO

La variable independiente llega escasamente a explicar el 2% de la varianza de la variable dependiente. Parece una asociación bastante limitada y, en consecuencia, mantenemos la nulidad de la hipótesis 2 a nivel muestral. Admitimos que ***El trabajo de***

exploración de patrones mediante configuraciones puntuales no determina un mayor dominio de las sucesiones numéricas en alumnos que han seguido este modelo de enseñanza, frente a los que no lo han seguido.

CAPITULO VI
CONCLUSIONES

Cerramos nuestro trabajo realizando una síntesis del proceso de **reflexión sobre la práctica** que hemos venido haciendo, y que ha sido el eje conductor de toda esta investigación.

Indicábamos en el capítulo I: "*Nuestro objetivo es poner de manifiesto, analizar e interpretar la comprensión que muestran los escolares de 13 y 14 años de edad sobre las nociones de estructura de un número, patrones y relaciones numéricas, sucesiones y término general de una sucesión cuando se incorpora un sistema ampliado de simbolización para los números naturales*." (pgs: 4-5)

Este objetivo ha quedado cubierto, lo cual se pone de manifiesto en los apartados III.5.3 y IV.5.3, de este trabajo. Los escolares de 7º nivel integran el sistema de representación puntual para los números y lo utilizan adecuadamente, trabajando con diferentes modelos geométricos; profundizan sobre este sistema de representación en 8º nivel.

En 7º enuncian una gran riqueza de relaciones para números triangulares y cuadrados y establecen argumentos que conectan el patrón geométrico y su correspondiente patrón aritmético a través de las representaciones puntuales. En 8º trabajan sobre números que comparten patrón, iniciando de forma intuitiva el concepto de sucesión y trabajando sobre la noción de término general.

Toda esta producción la obtienen los escolares realizando una secuencia de tareas estructuradas, sin que se les suministre instrucción explícita.

Otro de nuestros objetivos era "*estudiar la potencialidad de las representaciones a través de Configuraciones Puntuales para expresar relaciones y propiedades y cómo, mediante dichas representaciones, tales propiedades se descubren y utilizan por los estudiantes. Tratamos de poner de manifiesto que estas representaciones proporcionan un modelo intuitivo*" (pg: 11).

Los trabajos realizados por los alumnos a partir de las tareas propuestas muestran que, de los tres sistemas empleados en la representación de números, la configuración puntual es más intuitivo debido a su carácter gráfico, lo que permite un tratamiento y análisis visual de la estructura de una cantidad. Sin embargo, este sistema adquiere su mayor potencia cuando se trabaja conjuntamente con los desarrollos aritméticos y la notación decimal usual; una configuración puntual adquiere sentido cuando se emplea como visualización de un determinado desarrollo aritmético de un número -o familia de números- concreto-s. La variedad de desarrollos que puede sugerir una misma representación puntual ponen de relieve este carácter intuitivo.

La realización de nuestro estudio ha permitido poner de manifiesto algunos hechos importantes relativos al concepto de sucesión y de término general.

Primero: los términos de una sucesión numérica se caracterizan por la posición que ocupan (valor de la variable); *expresar el término general se identifica con expresar la posición del término general*, por ello hay muchos alumnos que responden **n** cuando se les pide el término general de la sucesión.

Segundo: las relaciones de comunicación entre profesor y alumno han establecido que **n** *representa un valor general cualquiera*, por ello cuando se pide la expresión del término general la respuesta más común es **n.**

Estos dos argumentos son importantes porque expresan un modo erróneo de interpretación de la noción *término general de una sucesión,* bastante persistente. Y en definitiva, atestiguan que el procesamiento de información con una alta carga conceptual de naturaleza muy abstracta no se verifica en este nivel escolar.

Tercero: el análisis del desarrollo aritmético que comparten los diferentes términos de una secuencia, al hacerse en términos de la variable, facilita la expresión de su término general dando el valor genérico **n** a dicha variable; aún así hay fuertes resistencias a identificar *el desarrollo general* con *el término general* de la sucesión

Cuarto: al representar varios términos de una secuencia mediante configuración puntual se pueden analizar sus términos mediante diferentes desarrollos aritméticos y, por tanto, obtener expresiones algebraicas distintas, aunque equivalentes del término general de la sucesión. La representación puntual del término general de una sucesión necesita de la ayuda del profesor; se trata de un conocimiento de los que Piaget denomina social, que necesita ser transmitido.

La riqueza de información proporcionada por los alumnos con los que hemos trabajado deja abierto un campo de estudio considerable, en el que continuar la exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.

De las anteriores consideraciones entendemos que damos respuesta satisfactoria a la primera parte de nuestra hipótesis general: "*Alternativamente, proporcionar un sistema simbólico de representación para los números y estudiar los patrones a los que se ajustan esta representaciones mejora la comprensión de los conceptos numéricos, proporciona significado a las diferentes relaciones que se pueden considerar en cada número, permite representar relaciones entre números así como cambios en esas relaciones, reconocer patrones a los que se ajustan los números de una sucesión y probar/refutar propiedades de los mismos*" (pg 66).

El modelo de Investigación-Acción, estructurado según las cuatro fases de Planificación, Acción, Observación y Reflexión, que hemos adoptado se ha revelado como una metodología potente para nuestros propósitos de investigación. La adaptación realizada por nosotros ha permitido integrar una innovación curricular en el diseño metodológico elegido; la consideramos una de las aportaciones de este trabajo. Componentes clave han sido la consideración recurrente del ciclo de Investigación-Acción en las distintas fases; la valoración y toma de decisiones explícita al concluir cada una de las fases; la articulación del trabajo en el aula mediante una secuencia estructurada de tareas; el énfasis por potenciar el trabajo autónomo de los alumnos tanto en su dimensión individual como en su dimensión grupal.

El sistema tricategorial elaborado se ha mostrado eficaz para el control del proceso desarrollado y para analizar la comprensión puesta de manifiesto por los alumnos en la realización de las tareas

La evaluación de nuestro trabajo de campo, que hemos realizado comparando el desempeño del grupo experimental con otros tres grupos naturales en una prueba de capacidad aritmética y otra de sucesiones, pone de manifiesto que las diferencias iniciales entre ambos grupos -experimental y control- medidas mediante una prueba de capacidad aritmética, no se modifican después del tratamiento, al menos con los instrumentos y condiciones empleados por nosotros. Si bien tenemos que reconocer que el grupo experimental es un grupo de rendimiento alto, que ha trabajado muy motivado y con entusiasmo, es igualmente cierto que las tareas planificadas por nosotros son asumibles por otros grupos naturales de escolares de la misma edad y condiciones sociales generales equivalentes. No hemos encontrado diferencias significativas entre el grupo experimental y los de control con los instrumentos de medida utilizados. Los dominios que hemos analizado, al trabajar sobre secuencias y patrones numéricos mediante configuraciones puntuales, puede considerarse similar a la que mostrarían grupos naturales equivalentes, aunque estuvieran formados por alumnos menos brillantes o motivados. Este es el sentido con el que interpretamos los resultados obtenidos de esta evaluación.

No puede rechazarse la hipótesis nula para la primera hipótesis de investigación: "*El uso de configuraciones puntuales facilita un progreso en la capacidad aritmética de los alumnos que reciben el tratamiento*". Los dos grupos, tanto experimental como control, mejoran sus resultados entre la primera y la segunda prueba, lo que puede interpretarse como que el uso de este modelo didáctico no altera la evolución normal de la capacidad numérica de los alumnos que lo han seguido.

Igualmente, tampoco puede rechazarse la hipótesis nula para la segunda hipótesis de investigación: "*El uso de configuraciones puntuales facilita el dominio del tópico matemático sucesiones numéricas*" Lo cual podemos interpretar como que las configuraciones puntuales constituyen un recurso informal o innato. El alumno es capaz de ponerla en curso sin necesidad de una enseñanza previa, cuando se le proponen actividades adecuadas.

Las cuestiones más intuitivas, como continuar y extrapolar, las realizan tanto los alumnos de uno como de otro grupo; presentan un mayor grado de dificultad los procedimientos de cálculo de primeros términos y dar una regla para los términos de una sucesión cuando se conoce el término general; por último, el procedimiento de cálculo del término general presenta más dificultad.

Todo lo anterior es válido para los dos grupos. Por todo esto, tenemos que dejar en suspenso la segunda parte de nuestra hipótesis general: "*Los sujetos en edad escolar, en especial aquéllos en los que predominan los procedimientos visuales, mejoran significativamente su trabajo con números al utilizar representaciones figurativas*" (pg: 66); ya que no se ha conseguido evidencia sobre la misma.

Hemos detectado intuiciones muy fuertes sobre el tópico de sucesiones, que hemos empleado en la evaluación. El descubrimiento de patrones en secuencias expresadas en cualquiera de los tres tipos de representación lo han llevado a cabo tanto alumnos del grupo de control como del grupo experimental; por ello consideramos que es un tópico adecuado para alumnos de estos niveles.

El estudio factorial realizado sobre los datos de las respuestas a las pruebas ha puesto de manifiesto los siguientes hechos: la prueba de sucesiones tal como está organizada, establece en el constructo que pretende medir ***dominio de sucesiones*** una estructura multifactorial con un factor general que hemos llamado ***factor general de dominio del tópico***.

Las pruebas pretest y postest (paralelas) muestran cuatro factores que hemos denominado: ***sistema numérico***, tiene relación con el dominio del sistema decimal y de las operaciones; ***operaciones aritméticas como útil,*** en donde se trata de utilizar la aritmética para encontar solución a problemas; ***pensamiento creativo***, por cuanto las soluciones se pueden alcanzar por varios caminos; ***contextos aritméticos,*** los items que componen este factor relacionan situaciones cotidianas con hechos numéricos.

Como resumen final de este trabajo queremos destacar aquellos hallazgos que creemos más importantes así como señalar los puntos y líneas de investigación que han quedado abiertas.

Hallazgos

La racionalidad que establecimos para nuestro estudio (pp.4-6) la enmarcamos en tres apartados: Contenido, Organización Curricular y Diseño Metodológico; vamos a emplear estos mismos apartados para señalar los hallazgos de nuestro trabajo.

En relación al **Contenido** hemos de señalar dos niveles: aritmético y algebraico:

A nivel aritmético, la incorporación del sistema de representación denominado **configuración puntual** proporciona un instrumento para analizar los números y obtener diferentes desarrollos aritméticos de un mismo número. El carácter operatorio que proporciona el nuevo sistema simbólico a los números naturales queda de manifiesto durante el trabajo realizado en 7º nivel; se consigue de este modo considerar cada número mediante una diversidad de desarrollos aritméticos.

Se ponen de manifiesto las nociones de modelo y patrón de representación. Se refuerza así el concepto de que hay números que comparten **estructura aritmética**; dicha estructura se visualiza mediante un **patrón geométrico** y se expresa mediante un desarrollo aritmético. Esta noción es un primer paso hacia la generalización, sobre base aritmética.

La riqueza de **relaciones entre números** que comparten patrón es un tercer dominio de conocimientos que los alumnos ponen de manifiesto en 7º nivel y en el que aparecen los primeros intentos de generalización en expresiones numéricas.

A nivel algebraico se comienza con el estudio sistemático de las secuencias numéricas mediante el triple sistema de representación empleado.

Un primer hallazgo se encuentra en la agilidad mostrada por los alumnos en las tareas de continuar o extrapolar términos de una secuencia mediante el uso alternativo de los diferentes sistemas de representación y las traducciones entre ellos.

Un segundo hallazgo ha sido la explicitación de un obstáculo para la noción de término general de una sucesión. De acuerdo con el triple sistema de representación, el término general de una sucesión es:

* "un número en general", "cualquier número de la sucesión" y, por tanto su expresión es **n**, al considerar la notación numérica usual;
* al emplear el patrón geométrico, la necesidad de dejar espacios vacíos entre los puntos para indicar el paso a **n** lleva a que algunos alumnos utilicen modelos continuos para el término general. Esto indica una dificultad en el manejo de este sistema;
* al emplear el desarrollo aritmético encontramos que:

  -si el desarrollo es traducción de la configuración puntual hay una diversidad de expresiones posibles de distintos niveles de complejidad; estas expresiones aunque traducen el mismo patrón no siempre se consideran equivalentes y, en ocasiones no tienen una sistematicidad;

  -si el desarrollo está dado, no suele presentar dificultad su paso al término general, pero no se admite fácilmente la obtención de una expresión simplificada equivalente.

Hemos comprobado que no hay integración entre los tres sistemas simbólicos para expresar la noción de término general de una sucesión; son muy pocos los alumnos que identifican dicho término general con la estructura operatoria común que comparten los términos de una secuencia y cuya notación más adecuada viene dada mediante el desarrollo.

También hemos detectado un segundo obstáculo algebraico, si bien no lo hemos analizado extensamente: se trata de la elección de la expresión del término general en función de **n** o de **n+1**, según sea el término por el que comienza la secuencia. Muchos alumnos consideran equivalentes las expresiones n+(n+1) y (n+1)+n o $(n+1)^2$-n y n^2-(n-1) etc.

Igualmente, hallar los primeros términos de una sucesión a partir de su término general no lo realizan la mayoría de los alumnos dando los valores 1, 2, 3...a **n**, sino que pueden ser otros valores distintos de la secuencia natural.

Finalmente, si bien las sucesiones lineales resultan más sencillas de analizar, interpretar y generalizar que las sucesiones cuadráticas, se pone de manifiesto que ambas se interpretan con mayor fluidez y precisión cuando se emplean las configuraciones puntuales y los desarrollos aritméticos.

En cuanto a **Organización Curricular** el hallazgo principal ha consistido en la estructuración de una secuencia de enseñanza/aprendizaje mediante un conjunto de tareas que concretan la propuesta general inicial. Cada una de estas tareas está contemplada y analizada en el marco que establecen los tres sistemas de categorías enunciados (pp. 92 y sgs.). Las tareas consideran e integran las tres dimensiones estudiadas por las categorías: relación alumno/profeso, relación profesor/conocimiento, relaciones alumno/conocimiento, ofreciendo a los alumnos posibilidades variadas de trabajo sobre las configuraciones puntuales, patrones geométricos y secuencias numéricas; en las tareas se sintetizan la multiplicidad de variantes puestas de manifiesto y se recorren todas ellas. Para el profesor ofrecen diferentes posibilidades de organización y reflexión.

Un segundo hallazgo ha consistido en la revalorización de la planificación o diseño del currículo por el Profesor, en este caso por el equipo investigador; si bien a nivel declarativo son muchos los trabajos que reconocen la importancia de esta fase, son muy pocos los que muestran evidencia de su utilidad en una investigación. El ejercicio de autocrítica y la revisión de la planificación inicial han probado una capacidad de mejora en la puesta en práctica y una mayor posibilidad de control del proceso en el aula.

A nivel **metodológico** nuestra aportación se centra en:

* Elaboración de un sistema de Categorías de Interacción Didáctica mediante las que organizar, analizar, y valorar el diseño y desarrollo de unidades didácticas en general.
* Elaboración de un triple sistema de categorías, que configuran un instrumento de análisis y valoración para las relaciones que se producen en el sistema profesor-alumno-conocimiento, al trabajar sobre un tópico concreto de matemáticas.
* Elaboración y puesta en práctica de una adaptación del modelo de Investigación-Acción que ha mostrado su viabilidad y potencial heurístico para investigar sobre la comprensión del conocimiento matemático.
* Elaboración y validación de dos instrumentos de evaluación del conocimiento matemático de los escolares "*Prueba de Sucesiones*" y "*Prueba de capacidad aritmética*".
* Elaboración y puesta en práctica de una evaluación externa para la experiencia realizada sobre exploración de relaciones numéricas mediante configuraciones puntuales con un grupo de escolares de 12-14 años.

Estos cinco apartados, conjuntamente, constituyen el modelo metodológico elaborado en y para el marco de esta investigación y son una aportación propia, para la que hemos consultado las fuentes mencionadas.

Líneas de investigación abiertas

En la conclusión de todo trabajo son varios los interrogantes que están abiertos a cuya clarificación nos proponemos contribuir en un futuro. En particular queremos destacar el estudio de los errores de los alumnos en la Prueba de Sucesiones y la comparación de estos errores en ambos grupos; también queda pendiente el estudio de la evolución de los escolares a lo largo de las tareas realizadas en nuestro trabajo, como un primer paso para identificar tipos de comprensión.

El estudio y exploración de sucesiones mediante patrones geométricos en otros niveles educativos es una prolongación natural de este trabajo, ya iniciada en la actualidad.

Como hemos visto, mucha ha sido la información recogida y los niveles de interpretación posibles no han quedado agotados con este estudio. Igualmente, surgen nuevas tareas para trabajar en clase, cuyo análisis detallado es necesario para realizar una propuesta curricular adecuada que incorpore estos conceptos e instrumentos al currículo de matemáticas de Secundaria. Pero, principalmente, aún quedan cuestiones importantes por clarificar respecto a la comprensión de los escolares sobre las estructuras numéricas y sus sistemas de representación. Este es el reto de la investigación en Didáctica de la Matemática, a cuyo avance esperamos haber contribuido dentro de la línea de Pensamiento Numérico.

REFERENCIAS

Abele, A. 1978. "The Usage of Graphs in Solving Mathematical Problems". *Educational Studies in Mathematics*; pp. 7-15.

Alayo, F.; Basarrate, A.; Fernández, S. 1992 "Introducción al Agebra: Problemas numéricos y generalizaciones". *Sigma*, pp. 46-49.

Alvarez, M. 1986. "Introducción a la edición española" de *Métodos Cualitativos y Cuantitativos en Investigación Evaluativa*. Cook, T. y Reichardt, Ch. (ed.) Morata. Madrid.

Anderson, O. 1989. "Figurate Numbers". *Mathematics in School*.; pp.40-41.

Andrew, P. 1990. "Generalising number patterns". *Mathematics in School*.; pp.9-13.

Anguera, M. 1991. "Proceso de categorización". En: *Metodología Observacional en la Investigación Psicológica*. Anguera (ed.) PPU. Barcelona.

Anguera, M. 1992. "Metodología observacional" en *Metodologías de Investigación en Ciencias del Comportamiento*. Arnau, J.; Anguera, M.; Gómez, R.(eds.). Universidad de Murcia.

Apostol, T. 1980. "*Introducción a la Teoría de Números*". Editorial Reverté. Barcelona.

Arnal, J.; del Rincon, D.; Latorre, A. 1992. "*Investigación Educativa. Fundamentos y Teoría*". Labor. Barcelona.

Arnall, J. 1974-75. "Figurate Numbers, Supermarkets and Pascal triangles". *Mathematics in School*. ;. pp. 2-4.

Arca, M.; Guidoni, P. 1989. "Modelos Infantiles y Modelos Científicos sobre la Morfología de los Seres Vivos." *Enseñanza de las Ciencias*.; pp. 162-167.

Arcavi, A.; Friedlander, A.; Hershkowitz, R. 1989-90. "L'Algebre avant la lettre". *Petit X*; pp. 61-71.

Atherton, R. 1974. "Hexagonal Numbers in Context". *Mathematics in School*. ; pp. 28-29.

Avital, S.; Grinblat, U. 1983. "Number Three Comes to See". *Arithmetic Teacher*. nº 7; pp. 46-49.

Aviv, C. 1979. "Pattern Gazing". *Mathematics Teacher*. nº1; pp. 39-43.

Bakeman, R.; Gottman, I. 1989. "*Observación de la Interacción*". Morata . Madrid.

Ballieu, M. 1989. "Différences Finies, Charles Babbage et son Differential Engine". *Mathematique et Pédagogie*. nº 73; pp. 27-39.

Bamber, A. 1986. "Triangular numbers: A classroom experience". *Mathematics in School*; pp. 18-19.

Barra, M. "Savoir Prouver". *Plot* nº 50;. pp. 29-32.

Barra, M. 1994. "Being Able to see in d-Dimensional Space". *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*. N. Malara & L. Rico (edts.). Modena.

Bartolomé, M. 1992. "La Investigación Cooperativa" en: *Metodología Observacional en la Investigación Psicológica*. Anguera (ed.). PPU. Barcelona.

Becquer, J. 1970. "Research in Mathematics Education: The Role of Theory and of Aptitude-Treatment-Interaction". *Journal for Research. in Mathematics Education;* pp. 19-27.

Behr, M.; Easman, P. 1975. "Interactions Between Structure-of-Intellect Factor and two Methods of Presenting Concept of Modulus Seven Arithmetic- a follow-up and refinement study". *Journal for Research in Mathematics Education*.; pp.151-157.

Beiler, A. (1966) "*Recreations in the Theory of Numbers*". Dover. New York.

Bell, A.; Costello, J.; Küchemann, D. 1983. "*Research on Learning and Teaching. A Review of Research in Mathematical Education*" NFER-NELSON. Windsor. England.

Bell, A.; Binns, B.; Burkhardt, H.; Fraser, R.; Gillespie, J.; Pimm, D.; Ridgway, J.; Swan, M.; Trott, C. 1984. "*Problems with Patterns and Numbers*". Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham.

Ben-Chaim, D.; Lappan, G.; Houang, R. 1989. "The Role of visualization in the Middle School Mathematics Curriculum". En *Focus on Learning Problems in Mathematics*. ; pp. 49-60.

Berstein, B. 1976. "A tip on checking Solutions". *Mathematics in School* ; pp. 31.

Bideaud, J.; Meljac, C.; Fisher, J. (eds.) 1992 "*Pathwais to Number. Children's Developing Numerical Abilities*. LEA. Hillsdale. N. J.

Bishop, A. 1979 "Visualising and Mathematics in a pre-technological culture". *Educational Studies in Mathematics* ; pp. 135-146.

Bishop, A. 1980. "Spatial Abilities and Mathematics Education". *Educational Studies in Mathematics*.; pp.257-269.

Bishop, A. 1983 "Space and Geometry". En: *Adquisition of Mathematics Concepts and Processes*.. R. Lesh & M. Landau (eds.). Academic Press. Orlando. Florida.

Bishop, A. 1989. "Review of Research on Visualization in Mathematics Education". *Focus on Learning Problems in Mathematics*.; pp. 7-15.

Bisquerra, R. 1989. "*Métodos de Investigación Educativa guia práctica*". CEAC. Barcelona.

Blanco, A.; Anguera, Mª T. 1991. "Sistemas de Codificación". En *Metodología Observacional en la Investigación Psicológica* Volumen I. Anguera (ed.). PPU. Barcelona.

Bodin, A. 1991-92. "Reflexions sur les Representations, les Conceptions et les Competences à grande échelle des programmes de mathématiques de l'Enseignement Secondaire". *Petit X* ; pp. 17-40.

Bouvier, A.; George, M. 1984. "*Diccionario de Matemáticas*". Akal. Madrid.

Bradfield, D. 1967. "The Majesty of numbers". *Mathematics Teacher,* nº6; pp. 588-592.

Brousseau, G. 1989. "Fundamentos de Didáctica de la Matemática" *Publicaciones del Seminario de Didáctica de la Matemática García Galdean*o. Serie II. Universidad de Zargoza.

Burton W, J. 1969. "*Teoría de los Números*". Trillas. México.

Buxarrais, R. Mª. 1989. "Análisis de interacción profesor-alumno como catalizadora del proceso de aprendizaje". *Revista de educación* . nº 28; pp. 419-428.

Campbell, D.; Stanley, J. 1973. "*Diseños Experimentales y Cuasiexperimentales en la Investigación Social*". Amorrortu Editores. Buenos Aires.

Carreras, M. 1991. "Métrica del registro observacional" en: *Metodología Observacional en la Investigación Psicológica*.. Anguera (ed.). PPU. Barcelona.

Castro, E.; Rico, L.; Castro, E. 1988. "*Números y Operaciones. Fundamentos para una Aritmética Escolar*". Síntesis. Madrid.

Castro, E.; Marín MªP.; Salmerón, G. 1992 "*Configuraciones puntuales en la subitización de los primeros números*" II Congreso Internacional de Educación Infantil. Granada.

Castro, E 1993 "*Papel de la Visualización en el aprendizaje de las Matemáticas. Una experiencia de Aula*" VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática. Sevilla.

Castro, E. ; Rico, L. 1994. "VIsualización de Secuencias Numéricas" *Revista Uno,* nº1 (en prensa).

Cerdá, T. 1758. "*Lecciones de Mathematica o Elementos Generales de Arithmetica y Algebra para uso de la clase*". Compañía de Jesús. Barcelona.

Chevallard, Y. 1991-92. "Le Caractere Experimental de l'Activite Mathematique". *Petit X* nº 30; pp. 5-15.

Clarkson, D. 1962. "Taxicab geometry, rabbits, and Pascal's triangle-discoveries in a sixth-grade classroom" *Arithmetics Teacher,*; pp. 308-313.

Clement, M. 1974. "Hexagonal Numbers". *Mathematics in School* ; pp. 32.

Clements, K. 1982. "Visual Imagery and School Mathematics". *For the Learning of Mathematics* ; pp. 33-37.

Cockcroft, W. 1985. "*Las Matemáticas sí cuentan*". Informe Cockcroft. MEC. Madrid.

Cohen, J. 1960. "A coefficient of agreement for nominal scales". *Educational & Psychological Measurement*". ; pp. 34-46.

Cohen, J. 1988. "*Statistical power analysis for the beavioral sciences*". LEA. Hillsdale.

Cohen, L.; Manion, L. 1990. "*Métodos de Investigación Educativa*". La Muralla. Madrid.

Colas, B.; Buendía, L. 1992. "*Investigación Educativa*". Alfar. Sevilla.

Collins Publishers.1987. "*English Language Dictionary.*" The University of Birmingham.

Cook, T. D.; Cambell, D.T. 1979. "*Quasi-Experimentation Analysis & Design Issues in Field Settings.*" Rand McNally. Chicago.

Cook, T.; Reichardt, Ch. 1986. "Hacia una superación del enfrentamiento entre los métodos cualitativos y los cuantitativos". En: *Métodos Cualitativos y Cuantitativos en Investigación Evaluativ*a. Cook, T. y Reichardt, Ch. (ed.) Morata. Madrid.

Cornelius, M. 1974. "Variations on a Geometric Progression". *Mathematics in School.* ; pp. 32-33.

Courtney, JR; Becker, J. 1979. "The Interaction of Cognitive Aptitudes with Sequences of Figural and Symbolic Treatments of Mathematical Inequalities". *Journal for Research in Mathematics Education.*; pp. 25-36.

Cowles, M. 1988. "A Number Game-Summing Consecutive Positive Integers". *Mathematics Teacher*. nº 7; pp.548-549

Cox, A. 1965. "Christmas tree numbers". *Arithmetic Teacher,* nº8; pp. 648-651.

Crocker, L.; Algina J. 1986. "*Introduction to Classical and Modern Test Theory.*" Holt Rinehart . New York.

Cronbach, L. 1975. "Beyond the two disciplines of scientific psychology". *Americam Psychologist.*; pp. 513-531.

Crookes, Z. 1988. "De Pulchritude Numerorum Figuratorum". *Mathematics in School.*; pp. 38-39.

Croos, T. 1991. "Square-triangular numbers". *The Matematical Gazzete.*; pp. 321-323.

Crossley, J. 1987. "*The Emergence of Number*". World Scientific. Singapore.

Crump, T. 1993. "*La Antropología de los Números*". Alianza Editorial. Madrid.

Cunningham, S. 1991. "The Visualization Environment for Mathematics Education" En *Visualization in theaching and Learning Mathematics*. MAA NOTES number 19

Curcio, F. 1987. "Comprehension of Mathematical Relationships Expresed in Graphs." *Journal for Research in Mathematics Education*. ; pp. 382-393.

Dantzig, T. 1954. "*Numbers The Language of Science*". The Free Press. New York.

Dewey, J. 1989. "*Cómo Pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo*". Paidós. Barcelona.

Dhombres, J. 1987. "*Mathématiques au fil des Ages*". Gauthier-Villars. París.

Dickson, L. 1952. "*History of the Theory of Numbers*". Volumen II. Chelsea Publishing. Company. New York.

Dienes, Z. 1986. "*Las seis etapas del aprendizaje en Matemáticas*". Teide. Barcelona.

Dixon, W.J. (ed.) BMDP Statistical Software Manual. Berkeley, CA: University of California Press.

Dossey, J. 1991. "Discrete Mathematics: The Math for Our Time". En: *Discrete Mathematics across the Curriculum k 12*. NCTM. Reston. Virginia.

Dreyfus, T.; Eisenberg, T. 1982. "Intuitive funtional Concept: A Baseline Study on Intuitions." *Journal for Research in Mathematics Education*. ; pp. 360-380.

Dreyfus, T. 1991(a). "Advanced Mathematical Thinking Processes". En *Advanced Mathematical Thinking* Ed. Tall, D. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

Dreyfus, T. 1991(b). "On the Estatus of Visual Reasoning in Mathematics and Mathematics Education". *Proceeding Fifteenth PME Conference*. Furinghetti, F. (edt.). Assisi. Italy.

Dufour-Janvier, B.; Bednarz, N.; Belanger, M. 1987. "Pedagogical Considerations Concerning the problem of Representation". En *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Janvier, C. (ed.) LEA. Hillsdale. New Jersey.

Dowinien, N. y Hearth, R. 1983. "*Métodos estadísticos aplicados*". El Castillo. Madrid.

Du Rapau, JR.; Ray L. 1981. "Interaction of General Reasoning Ability and Processing Strategies in Geometry Instruction". *Journal for Research in Mathematics Education*.; pp. 15-26

Duval, R. 1993. "*Semiosis et Noésis*". Conférence A.P.M.E.P, I.R.E.M (en prensa).

Eastman, P.; Ray, L. 1975. "Interactions of Spatial Visualization and General Reasoning Abilities with Instructional treatment in Quadratic Inequalities: a Further Investigation". *Journal for Research in Matematics Education*.;. pp.143-149.

Economopoulos, M. 1981. "Classroom Activities for able students". *Arithmetic Teacher*. nº 6; pp. 50 y 59.

Edmonds, G. 1970. "An Intuitive Approach to Square Numbers" *Mathematics Teacher*.; nº2; pp. 113-117

Eisenberg, T.; Dreyfus, T. 1986. "On Visual Versus analitycal Thinking in Mathematics." *Proceedings of the Tenth International Conference. on Psychology of Mathematics Education. London.*

Eisemberg, T.; Dreyfus, T. 1989. "Spatial Visualization in the Mathematics Curriculum". *Focus on Learning Problems in Mathematics*. ; pp. 1-5.

Elashoff, A. 1969. "Analysis of covariance: A delicate instrument". *American Educational Research Journal*. 6

Elliot, J. 1990. "*La Investigación-Acción en Educación*". Morata. Madrid.

Elliot, J. 1991. "Estudio del Currículum Escolar a través de la Investigación Interna". *Interuniversitaria de Formación del Profesorado*. nº 10; pp 45-68.

Elliott, J.; Barret, G,; Hull, C.; Sanger, J. Wood, M.; Haynes, L. 1986. "*Investigación/Acción en el Aula*". Conselleria de Cultura. Generalitat Valenciana.

Eperson, D. 1984. "Triangular and square numbers". *Mathematics in School*.; p. 18.

Ericksen, D. 1991. "Students Ability to Recognize Patterns". *School Science and Mathematics*. ; pp. 255-258.

Eves, H. 1976. "*An Introduction to History of Mathematics*". Saunders College P. New York.

Fennema, E. 1972. "Models and Mathematics". *Arithmetic Teacher*. nº 10;. pp. 635-639.

Fernández, A.; Rico, L. 1992. "*Prensa y Educación Matemática*". Síntesis. Madrid.

Fernández, Mª J.; García, J.; Fuentes, A.; Asensio, I. 1990. "*Resolución de Problemas de Estadística Aplicada a las Ciencias Sociales*". Síntesis. Madrid.

Fielker, D. 1988 "Metaphors and Models" *Mathematics Teaching*. ; pp. 4-6.

Figueras, O.; Filloy, E.; Valdemoro, M. 1985 "The Development of Spatial Imagination Abilities and Contextualization Strategies: Models Based on the Teaching of Fractions". *Proceeding of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. V.1.*

Filstead, W. 1986. "Métodos Cualitativos. Una experiencia necesaria en la investigación evaluativa." En *Métodos Cualitativos y Cuantitativos en Investigación Evaluativa*. Cook, T.; y Reichardt, CH. (eds.) Morata. Madrid.

Fischbein, E. 1977. "Image and Concept in Learning Mathematics." *Educational Studies in Mathematics*.; pp. 153-165.

Fischbein, E. 1979. "Intuition and Mathematical Education" En *Mathematics Education Report*. Lesh; (ed.) Secada.

Fischbein, E.; Tirosh, D; Melamed, U. 1981. "Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement?". *Educational Studies in Mathematics*.; pp. 491-512.

Fischbein, E. 1987. "*Intuition in Science and Mathematics*". Reidel Publishing Company. Dordrecht.

Fischbein, E. 1989. "Intuition in Science and Mathematics". *Journal for Research in Mathematics Education*.; pp. 213-218.

Flanders, N. 1977. "*Análisis de la Interacción Didáctica*". Anaya. Madrid.

Fletcher, T. 1974-75. "By-products from the Mind". *Mathematics in School*.; pp. 25-26.

Flores, A. 1992. "Ida y vuelta: Primero adivinar y luego probar". *Educación Matemática*.; pp. 79-85.

Fourrey, E. 1899. "*Récréations Arithmétiques*". Librairie Nony. París.

Frege, G. 1972. "*Fundamentos de la Aritmética*". Laia. Barcelona.

French, D. 1990. "Sums of Squares and cubes" *Mathematics in School*. ; pp. 34-37.

Freudenthal, H. 1991. "*Revisiting Mathematics Education*". Kluwer Academic Publishers Dordrecht.

Fuson,K. C.; Hall, J. 1983. "The Acquisition of Early Number Word Meanings: A Conceptual Analysis and Review". En *The Development of Mathematical Thinking*. H Ginsburg (ed.). Academic Press. Orlando.

Fuson, K. C. 1988. "*Children's Counting and Concepts of Number*". Springer. New York.

Gagatsis, A.; Patronis, T. 1990. "Using Geometrical models in a proces of reflective thinking in learning and teaching mathematics". *Educational Studies in Mathematics* ; pp. 29-54.

García-Baró, M. 1993. "*Categorías, Intencionalidad y Números*". Tecnos. Madrid.

Gardner, H. 1988. "*La nueva ciencia de la mente*". Paidós. Barcelona.

Gardner, M. 1988. "*Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*". Labor. Barcelona

Gellert, W.; Küstner. H.; Hellwich, H.; Kästner, H. (eds.) 1982. "*Pequeña Enciclopedia de Matemáticas*". Pagoulatos. Atenas.

Giaquinto, M. 1993. "Visualizing in Arithmetic". *Philosophy and Phenomenological Resear.* ; pp. 385-396

Glasersfeld, E. 1987. "Preliminaries to Any Theory of Representation". En *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Janvier, C.(ed.) LEA. Hillsdale. New Jersey.

Gonzalez, R. 1988. "La calidad de los centros educativos". *Actas del IX Congreso Nacional de Pedagogía*. Alicante.

Goyette, G.; Lessard-Hebert, L. 1987. "*La investigación-acción. Funciones, Fundamentos e Instrumentación.*" Laertes. Barcelona.

Graening, J. 1971. "Induction: Fallible but Valuable". *Mathematics Theacher;* pp. 127-131.

Gray, E.; Tall, D. 1993. "Success and Failure in Mathematics: the Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept". *MT*.; pp. 6-10.

Grugnetti, L. 1987. "De l'Arithmetique-géométrie à la **construction** d'une formule". *Math Ecole*..

Gullen, G. 1974. "The Smallest prime factor of a natural number". *Mathematics Teacher*. nº 4; pp. 329-331.

Guitel, G. 1975. "*Histoire Comparée des Numérations Écrites*". Flammarion Éditeur. París VIe. París.

Gutiérrez, J. 1993. "Elementos para el Análisis de la Investigación en la Acción". En *Análisis de la Investigación Educativa*. Buendía (ed.). Universidad de Granada.

Hadamard, J. 1947. "*Psicologia de la Invención en el campo Matemático*". Espasa Calpe. Buenos Aires.

Haggard, P.; Morales, K. 1993. "Discovering Relationships and Patterns by Exploring Trapezoidal Numbers". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.; pp. 85-90.

Hall, H.; Knight, S. 1910. "*Higher Algebra, a sequel to Elementary Algebra for School*". MacMillan and Co. London.

Hallpike, C. 1986. "*Fundamentos del Pensamiento Primitivo*". Taurus. Madrid.

Hamberg, C; Green, T. 1967. "An application of triangular numbers to counting". *Mathenatics Teacher*., nº 4; pp. 339-342.

Harman, J. 1976. "Figurate Numbers". *Mathematics Teacher*., nº1; pp. 47.

Haussmann, K. 1985. "Iterative and recursive modes of thinking in mathematical problem solving processes" *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* ; pp. 18-23.

Heath, T. 1981(a). "*A History of Greek Mathematics. From Aristarchus to Diophantus*". Dover. New York.

Heath, T. 1981(b). "*A History of Greek Mathematics*". Dover. New York.

Hernán, F. 1989. "La Analogía en la Formación de Conceptos". *Suma* nº3; pp. 13-20.

Hervey, M.; Litwiller, B. 1970. "Polygonal Numbers: a study of patterns" *Arithmetic Teacher*., nº 1; pp. 33-38.

Hiebert, J. 1988. "A theory of Developing Competence with Written Mathematical Symbols". *Educational Studies in Mathematics*.; pp. 333-355.

Hiebert, J.; Carpenter, T. 1992. "Learning and Teaching with Understanding". *En Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws (ed.) NCTM-MacMillan. New York.

Hitt, F. 1989. "Experimentación en un ambiente de computo con los números poligonales". *V Simposio Internacional de la Educación Infantil y Juvenil y la Computadora*. Hidalgo. Mexico.

Hitt, F. 1992. "Percepción e imagen mental en relación a sistemas de representación e implicaciones para su uso con la microcomputadora". *Memorias del tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Valencia.

Hofmann, J. 1960. "*Historia de la Matemática*". Tomo I. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana. México

Hogben, L. 1966. "*El Universo de los Números*". Destino. Barcelona.

Holt, M. 1974. "Tangling with Squares". *Mathematics in School* ; p. 36.

Hopkins. 1989. "*Investigación en el aula. Guia del profesor.*" PPU. Barcelona.

Howson, G.; Keitel, C.; Kilpatrick, J. 1981."*Curriculum Development in Mathematics*". Cambridge University Press.

Hurford, J.R. 1987. "*Language and Number*" Basil Blackwell. Oxford.

Husserl, E. 1972. "*Philosophie de l'arithmétique.*" Presses Universitaires de France. París.

Ifrah, G. 1985. "*Las cifras. Historia de una gran invención*". Alianza Editorial. Madrid.

Izart, J.L.; Guildford, R.G. 1976-77. "A Note on Figurate Numbers". *Mathematics in School* ; p.31.

Janvier, C. 1987 "Traslation Processes in Mathematics Education". En *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Janvier, C. (ed.) LEA. Hillsdale. New Jersey.

Jimenez, E. 1877. "*Tratado Elemental de la Teoría de los Números*". Imprenta de la viuda de Aguado e Hijo. Madrid.

Johannot, L. 1947. "*Le raisonnement mathematique de l'adolescent*" Paris. Delachaux et Niestle.

Juraschek, B. 1986. "The Binomial Grid". *Mathematics Teacher*.; pp. 337-339.

Kaput, J. 1987. "Representation Systems and Mathematics". En *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Janvier, C. (ed.) LEA. Hillsdale. New Jersey.

Kemmis, S.; McTaggart, R. 1988. "*Como planificar la investigación-acción*". Laertes. Barcelona.

Ken, D.; Hedger, K. 1980. "Growing Tall". *Educational Studies in Mathematics*.; pp. 137-179.

Kerlinger. 1981. "*Investigación del Comportamiento*.". Interamericana. México.

Kilpatrick, J. 1967. "*Analyzing the Solution of Word Problems in Mathematics: An Exploratory Study*. " Doctoral Dissertation, Stanford University

Kilpatrick, J. 1985. "Reflection and Recursion". *Educational Studies in Mathematics*.; pp. 1-26.

Kilpatrick, J. 1992 "A History of Research in Mathematics Education". En *Handbook Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws, D. (ed.) NCTM.-Macmilan. New York

Kirshner, D. 1989. "The Visual Syntax of Algebra". *Journal for Research in Mathematics Education*.; pp. 274-287.

Krippendorf, K. 1990. "*Metodología del Análisis del Contenido. Teoría y Práctica*". Paidós. Barcelona.

Krutetskii, V.A. 1963. "Some Characteristics of the Thinking of Pupils with Little Capacity for Mathematics". *En Educational Psichology in the USSR*. Simon & Simon (eds.) Routledge. London.

Krutetskii, V.A. 1976. "*The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*." University of Chicago Press.

Lademann, N. 1964. "Shapes in numbers". *Arithmetic Teacher*.; pp. 428-430.

Lakatos, I. 1978. "*Pruebas y Refutaciones. La Lógica del Descubrimiento Matemático*". Alianza Universidad. Madrid.

Lean, G.; Clements, M. (Ken). 1981. "Spatial Ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance". *Educational Studies in Mathematic*. ; pp. 267-299.

Leon, O; Montero, I. 1993. "*Diseño de Investigaciones*. Mc Graw Hill. Madrid.

Lesh, R.; Landau, M.; Hamilton, E. 1983. "Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Researsch". En *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Lesh, R.; Landau, M. (eds.) Academic Press. Orlando, Florida.

Lesh, R.; Post, T; Behr, M. 1987. "Representations and Translation among Representation in Mathematics Learning and Problem Solving". En *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Janvier, C. (ed.) LEA. Hillsdale. New Jersey.

Lines, M. 1986. "A number for your Thoughts". En *Facts and Speculation about Numbers fron Euclid to the Latest Computers*. Hilger (ed.)

Lombardo, L. 1971. "*La Matemática de Pitágoras a Newton*". Laia. Barcelona.

López, R. 1986. "*Construcción de Instrumentos de Medida en Ciencias Conductuales y Sociales*". Alamex. Barcelona.

Lucas, E. 1891. "*Théorie des Nombres*". Gauthier-Villars et Fils, Imprimeurs-Librairies. París.

Lucas, E. 1894 "*Récréations Mathématiques*". Librairie Scientifique et Technique. París.

MacNiff, J. 1992. "*Action Research: Principles and Practice*". Routledge. Canadá.

Maletsky, E. 1979. " Pattern Gazing". *Mathematics Teacher.;* pp. 39-43.

Mariares, F. 1913. "Curiosidades Aritméticas". *Revista de la Sociedad Matemática Española*. Tomo II; pp. 333-335.

Mariotti, M.A.; Pesci, A. 1991. Visualization in Problem Solving and Learning. *Proceedings Fifteenth PME Conference*. Furinghetti, F. (edt.). Asissi. Italy

Mauland, L. 1985. "An Exercise with Polygonal Numbers" *Mathematics Teacher*.; pp. 340-344.

Mayer, R. E. 1986. "*Pensamiento, resolución de problemas y cognición*" Paidós. Barcelona.

Mckim, R. 1980. "*Thinking Visually. A Strategy Manual for Problem Solving*" Dale Seymour Publications. Palo Alto.

Mears, C. 1979. "A note on Hexagonal Numbers". *Mathematics in School*.; pp. 29-31.

Meavilla, V. 1992 ."Algebra visual: Suma de números triangulares" *Sigma*; pp. 56-58.

Meavilla, V. 1993. "*Estudio sobre el Comportamiento Visual en Algebra de los alumnos del segmento educativo 12-16*". Memoria de Tercer ciclo. Programa de Doctorado de la Universidad de Valencia.

MEC. 1993. "*Propuestas de Secuencias Matemáticas*" Escuela Española. Madrid.

Medina, A. 1988. "*Didáctica e Interacción en el Aula*". Cincel. Madrid.

Menninger, K. 1992. "*Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers*". Dover Publications. New York.

Miller, W. 1990. "Polygonal Numbers and Recursion". *Mathematics Teacher*.; pp. 555-558.

Miller, W. 1991. "Recursion and the central polygonal numbers". *Mathematics Teacher*.; pp. 738-742.

Moses, B.E. 1977. "*The Nature of Spatial Ability and its Relationship to Mathematical Problem Solving*. Ph. D. Dissertation. Indiana University.

Mottershead, L. 1977. "*Sources of Mathematical Discovery*". Blackwell. Hong Kong.

Mottershead, L. 1985. "*Investigations in Mathematics*". Blackwell. Great Britain.

Mozoomdar, A. 1985. "More on figurate numbers" *Mathematics in School*.; p. 29.

Muñiz, J. 1992 "*Teoría Clásica de los Textos*". Pirámide. Madrid.

NCTM. 1991. "*Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*". Edición S.A.E.M. Thales. Sevilla

NCTM. 1993. "*Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Addenda Series. Nivel Inicial* " Edición S.A.E.M. Thales. Sevilla.

Nesher, P.; Kilpatrick, J. (eds.) 1990 "*Mathematics and Cognition*" ICMI Study Series. Cambridge University Press. Cambridge.

Newel, A. 1990. "*Unified Theories of Cognition*". Harvard University Press. Cambridge.

Niven, I.; Zuckerman, H. 1969. "*Introduccion a la teoria de los numeros*". Limusa-Wiley. México.

Norman, F.A. 1991. "Figurate Numbers in the classroom". *Arithmetic Teacher;* pp. 42-45.

Ogilvy, C.; Anderson, J. 1988. "*Excursión in Number Theory*". Dover Publications. New York.

Olson, M.; Goff, G.; Blose, M. 1983. "Triangular Numbers: the building blocks of figurate numbers". *Mathematics Teacher*.; pp. 624-625.

Ore, O. 1988. "*Number Theory and its History*". Dover Publications. New York.

Ortíz, A. 1993. "*Series numéricas y Razonamiento Inductivo*". Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Otte, M. 1990. "Arithmetic and Geometry: Some Remark on the Concept of Complementarity". *Studies in Philosophy and Education*.; pp. 37-62.

Paivio, A. 1975. "Perceptual Comparisons Through the mind's eye". *Memory and Cognitions* ; pp. 635-647.

Paulus, J. 1984. "*La Función Simbólica y el Lenguage*". Herder. Barcelona.

Pérez, G. 1994(a). "*Investigación Cualitativa Retos e Interrogantes*". Tomo I. Métodos. La Muralla. Madrid.

Pérez, G. 1994(b). "*Investigación Cualitativa Retos e Interrogantes*". Tomo II. Técnicas y análisis de datos. La Muralla. Madrid.

Phillips. J.1972. "*Los Orígenes del Intelecto según Piaget*" Fontanella. Barcelona.

Piaget, J.; Inhelder, B.; Szeminska, A. 1948. "*La Géométrie Spontanée de l'Enfant*". Presses Universitaires de France. París.

Piaget, J. 1961. "*La Formación del Símbolo en el niño*". Fondo de Cultura Económica. México.

Piaget, J. 1969. "*Biología y Conocimiento*". Siglo XXI. Madrid.

Piaget. J.; Inhelder, B. 1975 "*Génesis de las Estructuras Lógicas Elementales*". Guadalupe. Buenos Aires.

Piaget, J. 1977 "*Seis estudios de psicología*". Ensayo. Seix Barral.

Piaget, J.; Inhelder, B. 1977. "*Psicología del niño*" (primera edición 1969). Morata. Madrid.

Pinkerton, K. 1984. "Triangular diferences". *Mathematics Teacher* ; pp. 272-274.

Pitts, J. 1979. "Number Patterns". *Mathematics in School*.; pp. 7-9.

Polya, G. 1957. "*How To Solve It: A new aspect of mathematical method*". Doubleday. New York.

Polya, G. 1966. "*Matemáticas y Razonamiento Pausible*". Técnos Madrid.

Polya, G. 1979. "*Cómo plantear y resolver problemas*". Trillas. Serie de Matemáticas. Mexico.

Powell, M. 1974-75. "More Hexagonal Numbers". *Mathematics in School*.; pp.13-14.

Presmeg, N. 1985. "*The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics. A Classroom Investigation*. Ph. D. Dissertation. Cambridg. University.

Presmeg, N. 1986. "Visualization and Mathematical Giftedness".

Educational Studies in Mathematics.; pp. 297-311.

Presmeg, N. 1989. "Visualization in Multicultural Mathematics Classrooms". *Focus on Learning Problems in Mathematics*.; pp. 17-23.

Presmeg, N. 1992. "Prototypes, Metaphors, Metonynies and Imaginative Rationality in High School Mathematics." *Educational Studies in Mathematics*.; pp. 595-610.

Radatz, H. 1979. "Error Analysis". *Mathematics Education*.; pp. 163-172.

Real Academia de Ciencias. 1990. Exactas, Físicas y Naturales "*Vocabulario Científico y Técnico*". Espasa Calpe. Madrid.

Real Academia de la Lengua 1992. "*Diccionario de la Lengua Española*" Espasa Calpe. Madrid.

Real Academia Española. 1981. "*Esbozo de una nueva Gramática de Lengua Española*". Espasa Calpe. Madrid.

Reed, R. 1974-75. "The Lemming Simulation Pattern" *Mathematics in School*.; pp. 5-6.

Reinhardt, F. Soeder, H. 1984. "*Atlas de Matemáticas 1*".Fundamentos, álgebra y geometría. Alianza Editorial". Madrid.

Resnick, L. 1983. "A developmental Theory of Number Understanding". En *The Development of Mathematical Thinking*. H. P. Ginsburg. (ed.) Academic Press. Orlando.

Resnick, L.; Ford, W. 1990. "*La Enseñanza de las Matemáticas y sus Fundamentos Psicológicos*". Paidós MEC. Barcelona.

Rey Pastor, J.; Babini, J. 1986. "*Historia de la Matemática*." Gedisa. Barcelona.

Richards, A. 1974. "Figurate numbers, supermarkets, and Pascal triangles". *Mathematics in School*.; pp. 2-4.

Rico, L. 1990. "Diseño Curricular en Educación Matemática. Elementos y Evaluación". En *Teoría y Practica de la Educación Matemática*. Llinares, S. y Sánchez, MªV (eds.) Alfar. Sevilla.

Rico, L. 1992. "*Investigación sobre Errores de Aprendizaje en Educación Matemática*". Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rico, L.; Castro, E. 1994. "Difficulties and Errors in Number Reasoning Development". *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*.N. Malara & L. Rico (eds.) Modena

Riley, M.; Greeno, J.; Heller, J. 1983. "Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic". En *The Development of Mathematical Thinking*. H. P. Ginsburg (ed.). Academic Press. Orlando.

Robold, A. 1989. "Manipulative models for figurate numbers" *School Science and Mathematics*.; pp. 30-39.

Romberg, T. 1991. "Características Problemáticas del Currículo Escolar de Matemáticas". *Revista de Educación* ; pp.323-406.

Romberg, T. 1992. "Perspectives on Scholarschip and Research Methods". En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Grouws, D. (ed.) NCTM-Macmillan. New York.

Romberg, T.; Fennema, E.; Carpenter, T. 1993. "*Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*". LEA. Hillsdale. N.J.

Rosen, K. 1988. "*Elementary Number Theory and its Aplications*". Addison-Wesley. New Jersey.

Rucker, R. 1987. "*Mind Tools. The Five Levels of Mathematical Reality*". Penguin Books. London.

Sáez, MªJ.; Carretero, A. (1993). "El Estudio del caso de aula: Una alternativa a la Investigación en la Acción". *Bordón*.; pp.39-45.

Saxe, G.; Postner, J. 1983. "The Development of Numerical Cognition: Croos-Cultural Perspectives". En *The Development of Mathematical Thinking*. H. P. Ginsburg.(ed.). Academic Press. Orlando.

Sastry, K. 1992. "Cubes of Natural Numbers in Arithmetic Progression". *Crux Mathematicorum*.; pp. 161-164.

Schattschneider, D. 1972. "Discovering S=n(n+1)/2". *Mathematics Teacher*.; pp. 111-112.

Schoenfeld, A.; Arcavi, A. 1988 "On the meaning of variable". *Mathematics Teacher*. ; pp. 420-427.

Schumann, H. 1991. "Interactive generalizing of geometric configurations". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.; pp. 953-963.

Scott, H. 1987. "A lot of Xs". *Mathematics Teaching*.; pp. 14-15.

Sharlow, J. 1977. "Visualizing Mathematics with rectangles and rectangular solid" *Mathematics Teacher* ; pp. 60-63.

Shavelson, R. 1988. "*Statistical Reasoning for the Behavioral Sciences*". Allyn & Bacon. Boston.

Shuard, H.; Rothery, A. 1984 "*Children reading mathematics*" John Murray (eds.). Oxford.

Shulman, L. 1986. "*La Investigación de la Enseñanza I. Enfoques teorías y métodos*". Paidós. MEC. Barcelona.

Shulman, L. 1988. The nature of disciplined inquiry in Education. En "*Complementary methods for research in Education*". Jaeger, R. (ed.) Washington. D.C. AERA.

Shulte, A. 1964. "Pythagorean Mathematics in the modern classroom". *Mathematics Teacher*.; pp. 228-232.

Sierra, R. 1985. "*Técnicas de Investigación Social*". Paraninfo Madrid.

Silverman, E. (ed.) 1990. "Group the Star Patterns". *Arithmetic Teacher*, nº 9, Ideas.

Sloane, N. 1973. "*A Handbook of Integer Sequences*". Academic Press. California.

Smith, J. 1972. "The nth Polygonal Number". *Mathematics Teacher*.; pp. 221-225.

Snyder, P.; Lawson, S. 1993. "Evaluating results using corrected and uncorrected effect sice estimates". *Journal of Experimental Education;* pp. 334-339.

Skemp, R. 1980. "*Psicológia del aprendizaje de las matemáticas*". Morata. Madrid.

Sowder, L. 1976 "Criteria for concrete models". *The Arithmetic Teacher*. October. pp. 468-470.

Sowell. E. 1989. "Effects of Manipulative Materials in Mathematics instruction". *Journal for Research in Mathematics Education*.; pp. 498-505.

Stacey, K. 1989. "Finding and using Patterns in Linear Generalising Problems". *Educational Studies in Mathematics*.; pp. 147-164.

Steen, L. 1988. "The Science of Patterns". *Science* ; pp 611-616.

Stein, R. 1975. "*Mathematics an Exploratory Approach*". Mcgraw-Hill Book Company. New York.

Stenhouse, L. 1984. "*Investigación y desarrollo del Currículum*". Morata. Madrid.

Stenhouse, L. 1987. "*La Investigación como base de la Enseñanza*". Morata. Madrid.

Stevens, P. 1986. "*Patrones y Pautas en la Naturaleza*". Biblioteca Científica Salvat. Barcelona.

Suwarsono, S. 1982. "*Visual imagery in the mathematical thinking of seven grade students*": Tesis doctoral. I.K.I.P. Sanata Darma, Teromolpos 29, Yogiakarta.

Szczepanski, R. 1972. "Predictor Polynomials". *Mathematics Teacher*.; pp. 267-271.

Tahta, D. 1972. "Pegboar Primes" *Mathematics Teaching*.; pp. 4-7.

Tall, D. 1991. "Intuition and Rigour: The Role of Visualization in the Calculus". En *Visualization in theaching and Learning Mathematics*. MAA NOTES number 19.

Taylor, S.; Bogdan, R. 1986. "*Introducción a los Métodos Cualitativos de Investigación*". Paidós. Barcelona.

TEA 1987. "*Test de Aptitudes Escolares*" (Nivel 1,2,3) TEA Ediciones, S.A. Madrid.

Tejedor, F. J. 1984. "*Análisis de varianza aplicado a la investigación en Pedagogía y Psicología.*" Anaya. Madrid.

Thorndike, R.; Hagen, E. 1989. "*Medición y Evaluación en Psicología Educativa*". Trillas. Mexico.

Titone, R. 1989. "*El lenguaje en la interacción didáctica*". Narcea. Madrid.

Tourret, A. 1981. "More on Hexagonal Numbers". *Mathematics in School*. ; pp. 24-25.

Trimble, H. 1968. "The Heard of Teaching". *Mathematics Teacher*.; pp. 485-488.

Uspenski, V. 1978. "*Triángulo de Pascal*". Lecciones populares de matemáticas. Mir. Moscú.

Vergnaud, G. 1987. "Conclusion". En *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Janvier, C. (ed.) LEA. Hillsdale. New Jersey.

Vest, F. 1969 "A catalog of models for the operations of addition and subtration of Wole numbers". *Educational Studies in Mathematics* ; pp. 59-68.

Vinogradov, I. 1977. "*Fundamentos de la Teoría de los números*". Mir. Moscú.

Voigt, J. 1985. "Patterns and Routines in Classroom interaction". *Recherches en Didactique des Mathématiques*.; pp. 69-118.

Weaver, C. 1974. "Figurate Numbers". *Mathematics Theacher*.; pp. 661-666.

Webb, N. 1979 "Processes, Conceptual Knowledge and Mathematical Problem-solving Ability". *Journal for Research in Mathematics Education*.; pp. 83-93.

Wells, D. 1986. "*Dictionary of Cuirous and Interesting Numbers*. Penguin Books. London.

Wigley, A. 1992. "Models for Teaching Mathematics". *MT*.; pp. 4-7

Wiscamb, M. 1970. "A Geometric Introduction to Mathematical induction". *Mathematics Teacher* ; pp. 402-404.

Whitcombe, A. 1986. "Figurate Numbers: The other alternative".

Mathematics in School.; . pp. 40-41.

Whitin, D. 1986. "More Patterns with Square Numbers". *Arithmetic Teacher*.; pp. 40-42.

Whertheimer, M. 1991. "*El pensamiento Productivo*". Paidós. Barcelona.

Willerding, M. 1979. "*Conceptos Matemáticos. Un enfoque Histórico*". Cecsa. Mexico.

Wittrock, M. 1989. "*La Investigación de la Enseñanza, I. Enfoques teorías y métodos*". Paidós. Barcelona.

Wittrock, M. 1990. "Procesos de Pensamiento en los alumnos" en *La Investigación en la Enseñanza III*. Wittrock (ed.). Paidós Barcelona.

Wittrock, M. 1974. "A Generative Model of Mathematics Learning". *Journal for Research in Mathematics Education*. November pp. 181-196.

Wivill, R. 1983. "The multiplication configurate". *Mathematics in School*.; pp. 18-19.

Yerushalmy, M; Chazan, D. 1990. "Overcoming visual obstacles with the aid of the supposer" *Educational Studies in Mathematics*. ; pp. 119-210.

Zalewski, C. 1991. "Strengthening a k-8 Mathematics Program with Discrete Mathematics". En *Discrete Mathematics across the Curriculum k 12*. NCTM. Reston. Virginia.

Zimmermann y Cunningham. 1991. "Visualization and the Nature of Mathematics". En *Visualization in theaching and Learning Mathematics*. MAA NOTES number 19.