Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

TESIS DOCTORAL

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS PROMOVIDAS DESDE LA RAZÓN Y LA PROPORCIONALIDAD EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Gabriela Valverde Soto

Granada, 2012

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Gabriela Valverde Soto
D.L.: GR 357-2013
ISBN: 978-84-9028-342-4

Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

TESIS DOCTORAL

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS PROMOVIDAS DESDE LA RAZÓN Y LA PROPORCIONALIDAD EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección de la Doctora Encarnación Castro Martínez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Gabriela Valverde Soto para optar al grado de Doctora en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Gabriela Valverde Soto

VºBº del Director

Fdo.: Encarnación Castro Martínez

El trabajo que se presenta en este documento pretende cumplir con el requisito de la elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctora dentro del programa de doctorado "Didáctica de la Matemática" impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Este trabajo se ha realizado en el Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en Educación Matemática" del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

La investigación que se recoge en este documento ha sido financiada por la Universidad de Costa Rica. La doctoranda ha disfrutado de una beca del *Régimen de Beneficios para el Mejoramiento Académico en el Exterior para el Personal Docente y Administrativo en Servicio*, misma que se extiende del 1º de octubre de 2007 al 30 de setiembre de 2012 y se ha regulado según el Oficio Número OAICE-09-CAB-189-2007.

Las transformaciones de la sociedad y sus repercusiones educativas se convierten en el elemento central para orientar el trabajo de los profesores, pues es a partir de los nuevos retos y exigencias como debe diseñarse el tipo de formación que han de recibir y el camino para su desarrollo profesional.
(Esteve, 2009)

Agradecimientos

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a la Universidad de Costa Rica, institución que me ha otorgado la beca que ha financiado totalmente mis estudios de posgrado, los que han derivado en la realización de esta tesis doctoral. Esta experiencia no sólo me ha permitido mejorar mi formación académica sino también ha contribuido en mi crecimiento personal.

A mi directora de tesis, Doña Encarnación Castro Martínez, a la que le agradezco la guía dada en estos cinco años, el apoyo constante, animándome en cada paso que debía dar, el cuestionamiento de mis ideas y la cuidadosa revisión de este trabajo. Gracias por permitirme trabajar a su lado, me ha enseñado mucho más que cuestiones académicas, su entrega y ejemplar trabajo será sin duda un referente para mi desarrollo profesional.

A los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada por darme consejos, por cuestionarme en cada presentación y permitirme reflexionar sobre la investigación y mejorarla. Especialmente a los profesores Isidoro Segovia y Marta Molina por colaborar de cerca con este proyecto.

Al grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico de la Universidad de Granada por facilitarme los dispositivos de grabación requeridos para recoger la información de los todos los equipos durante la fase de trabajo colaborativo.

A los doctores Yaffa Keret (The Open University of Israel), Mirela Rigo (Cinvestav) y Fernando Hitt (Universidad de Quebec), José Luis Lupiáñez (Universidad de Granada) y Pedro Gómez (Universidad de Granada) por responder a mis consultas y colaborar atentamente facilitándome información requerida en nuestra investigación.

A los estudiantes de la asignatura Matemáticas y su Didáctica del curso académico 2009-2010 que participaron en esta investigación, gracias por la motivación e implicación mostrada en las sesiones del estudio y por la cordialidad mostrada desde el primer día.

A German, gracias por acompañarme en esta experiencia, por el amor, la paciencia, comprensión, compañía y apoyo diario. Me has enseñado a ser más fuerte y sacar lo mejor de mí. Sencillamente, no tengo palabras para expresarte mi agradecimiento por dejar de lado tu trabajo, amigos y familia y permanecer a mi lado durante todo este tiempo.

A mi familia, quienes siempre estuvieron pendientes de mis necesidades, a la distancia me han apoyado incondicionalmente y han seguido a mi lado procurando compartir conmigo los momentos más importantes. A mi hermana, Karen, me ha apoyado cada día de mi vida especialmente en estos cinco años que he estado fuera de casa. Gracias por venir a España y querer participar de esta realidad.

A mis compañeros de la Facultad de Educación de la Universidad de Costa Rica quienes con su apoyo hicieron posible la adjudicación de mi beca. Especialmente a

Nayibe, Claudio, Jésica y María Marta Camacho por su apoyo constante, han sido más que compañeros de trabajo y sus palabras de aliento me ayudaron a continuar en los momentos difíciles.

A mi familia granadina, Manolo, Doña Lola, madre e hijas quienes me abrieron su hogar, me han apoyado en todos estos años y me han permitido compartir las alegrías de la vida familiar, sin duda han sido trascendentales en mi proceso de adaptación en España. El cariño que me han dado me ha hecho sentir como en mi casa.

A todos los compañeros del programa de doctorado de aquí, de Costa Rica y de otros países que a lo largo de estos años he conocido y han contribuido con valiosas sugerencias en beneficio de la mejora de esta investigación. Especialmente a Pedro Arteaga por brindarme su apoyo, consejos y darme ánimo siempre que nos vemos.

A mis amigas, Marielena y Danellys, por su sincera amistad y valiosa contribución en la mejora de este manuscrito.

A los amigos de Costa Rica que siguieron a mi lado, a pesar del tiempo y la distancia, eso ha fortalecido sin duda los lazos que nos unen. A mis amigos de Granada que me han hecho pasar excelentes momentos y han procurado que no sobredimensione mis preocupaciones.

Índice de Contenidos

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Presentación

Este documento recoge la investigación realizada por la autora para obtener el título de doctora por la Universidad de Granada, en el Programa de Doctorado "Didáctica de la Matemática". Con esta investigación se culmina el proceso de estudios de posgrado que inició en el curso académico 2007-2008, periodo en el que se cumplieron los requisitos para la obtención del título de máster en Didáctica de la Matemática. Como Trabajo de Fin de Máster realizamos una investigación que tiene por título *Razonamiento Proporcional: Un Análisis de las Actuaciones de Maestros en Formación* (Valverde, 2008); el cual suscitó algunas de las inquietudes que motivaron el desarrollo de la investigación que se recoge en este documento.

El objetivo del trabajo final de máster se centró en analizar las actuaciones, que como resolutores, exhibieron un grupo de maestros en formación inicial en problemas de proporcionalidad simple directa. Nos centramos en identificar las estrategias que aplican los sujetos para relacionar las cantidades cuando resuelven problemas sobre situaciones de proporcionalidad directa, describir el uso de la unidad que prevalece en estas situaciones, identificar las estrategias incorrectas o errores conceptuales que manifiestan los participantes, identificar y describir los procedimientos aplicados para abordar estos problemas. Finalmente el estudio se orienta a clasificar las actuaciones de los sujetos según el tipo de razonamiento proporcional mostrado en cada uno de los problemas resueltos. Entre los resultados destacados de dicho estudio observamos que los estudiantes de magisterio manifestaron las mismas ideas intuitivas y estrategias incorrectas que los estudiantes de primaria o secundaria que participaron en otros estudios que usaron tareas similares, entre las que está el predominio del razonamiento aditivo, la ilusión de linealidad y la interpretación inadecuada del dividendo, divisor o el cociente en una división.

Los resultados recogidos en el trabajo final de máster nos motivaron a reflexionar acerca del conocimiento matemático que poseen los estudiantes de magisterio sobre la razón y la proporcionalidad y la manera de abordar la enseñanza de estos conceptos que pueda proporcionar comprensión de los mismos, con el objetivo de evitar que los errores manifestados se transfieran a sus alumnos durante su posterior práctica profesional. Así pues, tomamos como vía de continuación el desarrollo de una investigación, tesis doctoral, centrada en un diseño instruccional que permitiese promover y estudiar las nociones de razón y la proporcionalidad en el ámbito de la formación inicial de maestros de Educación Primaria.

Desde las primeras delimitaciones del problema de investigación nos interesamos en desarrollar y estudiar una alternativa didáctica que contribuyera a que los maestros en formación lograran superar esas dificultades y no quedarnos solo en detectarlas.

Conforme avanzamos en el esbozo inicial de esta investigación decidimos considerar la componente relativa a las competencias matemáticas como un elemento primordial a incluir en el diseño instruccional. Esta decisión se tomó debido a que, como consecuencia de la adaptación de la educación al EEES[1], los programas de formación universitarios, en el marco común europeo, están fundamentados en la noción de competencia. En particular el programa de formación inicial de maestros de educación primaria considera las competencias específicas como una expectativa de aprendizaje a desarrollar dentro de este programa formativo.

La formación matemática de los futuros maestros[2] de la Universidad de Granada, durante el desarrollo de nuestro estudio, se aborda en dos asignaturas; una troncal que se denomina *Matemáticas y su Didáctica*, y otra de carácter obligatorio titulada *Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria*. No obstante, es en el contexto de la asignatura *Matemáticas y su Didáctica* en el que realizamos nuestra investigación. En el marco de la misma se establece que una de las competencias específicas se refiere a la adquisición de los conocimientos básicos de las matemáticas que han de impartir en el ejercicio de su labor profesional y la capacidad de aplicarlos a la práctica, también se espera que desarrollen la habilidad para el razonamiento lógico y la formulación de argumentos. Como expectativa de aprendizaje de la asignatura *Bases Matemáticas de la Educación Primaria*, del actual plan de formación, se establece el desarrollo de las competencias matemáticas básicas: pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones y emplear soportes y herramientas tecnológicas.

Por lo tanto, el interés de estudiar una alternativa instruccional que permitiese promover y estudiar las nociones de razón y la proporcionalidad en el ámbito de la formación inicial de maestros se complementó con otra necesidad procedente de las demandas expuestas en el marco curricular de la formación matemática de estos estudiantes, es decir, la preocupación por el desarrollo de la competencia matemática se sumó como parte de nuestro problema de investigación.

Decidimos que ambas inquietudes se podían abordar en nuestro estudio a través de la elaboración, implementación y análisis de un diseño instruccional centrado en estudiar y promover el aprendizaje de la razón y la proporcionalidad, desde un enfoque funcional del conocimiento matemático. Según Rico y Lupiáñez (2008) en este enfoque el conocimiento matemático permite modelizar situaciones reales, está centrado en la resolución de problemas en diferentes contextos; lo que interesa en esta perspectiva es cómo los estudiantes aplican los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas situados en entornos cotidianos con distinta complejidad. Este enfoque del conocimiento matemático es compatible y coherente con nuestro interés de promover la

[1] Espacio Europeo de Educación Superior

[2] Nos referimos a los futuros maestros que han participado en la investigación durante el curso académico 2009-2010. Periodo en el que estaba vigente el Plan de Estudios publicado en Ministerio de Educación y Ciencia (2001).

competencia matemática en el ámbito de la formación inicial de maestros de educación primaria.

Con base en los planteamientos previos adelantamos que nuestro estudio contempla dos objetivos fundamentales, los cuales recogemos a continuación:

1. *Estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una "secuencia de trabajo en el aula" que aborda la revisión y (o) reconstrucción de conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad.*
2. *Investigar cómo contribuye la secuencia de trabajo en el aula en el proceso de desarrollo de la competencia matemática de futuros maestros de primaria, resolviendo problemas elaborados para el caso y utilizando una metodología de trabajo colaborativo.*

La investigación realizada consiste en un tipo particular de experimento de enseñanza (dentro del paradigma de los experimentos de diseño) centrado en el desarrollo del conocimiento del profesor de matemáticas. Esta metodología de investigación establece un conjunto claro de acciones a seguir en las tres fases que la conforman: la elaboración, implementación y análisis del diseño instruccional.

La característica central del diseño instruccional elaborado en nuestra investigación es la inclusión de un conjunto de tareas matemáticas que abarcan distintos tipos de problemas de razón y proporcionalidad, las situaciones de estas tareas se sitúan en distintos escenarios del entorno cotidiano. Este diseño se fundamenta en la perspectiva funcional del conocimiento matemático considerado en el estudio PISA (OCDE[3], 2004). Para la elaboración del mismo se ha utilizado el análisis didáctico como herramienta para la planificación y organización de la secuencia de trabajo en el aula. El diseño instruccional se concretó en cuatro sesiones y se implementó en condiciones naturales de desarrollo de la asignatura Matemáticas y su Didáctica. Se utilizó una metodología de trabajo en el aula compuesta por cuatro fases: trabajo individual en clase, trabajo colaborativo, puesta en común y reconstrucción individual de la tarea fuera de clase. Todas ellas centradas en la misma tarea.

En esta investigación han participado estudiantes de dos grupos (G1 y G2) que cursaron la asignatura Matemáticas y su Didáctica[4] de la Diplomatura en Educación Primaria, durante el curso académico 2009-2010 de la Universidad de Granada. La decisión de trabajar con dos grupos no obedece a intereses de índole comparativo, sino a la necesidad de aplicar el diseño en varias circunstancias de modo tal que se forjaran oportunidades para mejorarlo.

Como es propio en las investigaciones de diseño, se han realizado dos tipos de análisis de la información: análisis continuados que se realizan durante los diferentes ciclos del

[3] Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (www.oecd.org)
[4] Asignatura troncal del plan antiguo de la diplomatura en Educación Primaria, ubicada en el 1º curso y de duración anual, con 9 créditos totales divididos de igual manera en prácticos y teóricos. Ha dado lugar a la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria en el actual plan de formación del curso 2010-2011.

proceso de investigación y un análisis final retrospectivo de todos los datos recogidos en el proceso de investigación.

El análisis preliminar de los datos se centra en la toma de decisiones orientadas a la reelaboración del diseño, las decisiones tomadas son de carácter práctico y con éstas se procura promover el aprendizaje de los estudiantes.

El análisis retrospectivo es cualitativo de corte interpretativo y se focaliza en tres unidades de estudio: gran grupo, pequeños grupos y casos individuales de estudiantes. El objetivo del análisis retrospectivo del gran y pequeño grupo es profundizar en la situación ocurrida durante la intervención en el aula, aportando marcos explicativos para las actuaciones de los estudiantes y supuestos sobre posibles formas de abordar las dificultades detectadas en nuevas circunstancias. Con ello se busca aportar "conocimiento" que amplíe los resultados recogidos en el campo de investigación relativo al proceso de enseñanza-aprendizaje de la razón y proporcionalidad, específicamente en el contexto de la formación de maestros de primaria El objetivo del análisis retrospectivo de casos individuales se interesa por estudiar las modificaciones o invariancias manifestadas por algunos estudiantes en las resoluciones individuales de la tarea.

Grupo de investigación en el que se sitúa nuestra investigación

Esta investigación ha sido desarrollada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* de la Universidad de Granada, inscrito en el Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía. En este grupo se entiende la construcción del conocimiento matemático como un fenómeno social y cultural.

En este grupo se desarrollan investigaciones centradas en distintas líneas de investigación entre las que están Pensamiento Numérico y Formación de Profesores, mismas que destacamos debido a que nuestro estudio aborda cuestiones contempladas en ambas líneas.

La prioridad de los trabajos realizados en la línea Pensamiento Numérico se establece sobre los contenidos matemáticos. Su campo de reflexión considera la aritmética escolar y las nociones básicas de número, incluye los sistemas numéricos superiores (enteros, racionales y decimales) y se extiende al estudio sistemático de las relaciones y estructuras numéricas, la teoría de números, el inicio del álgebra, entre otros. Actualmente se están desarrollando investigaciones sobre el razonamiento inductivo, pensamiento pre-algebraico y algebraico, así como sobre las nociones de límite y continuidad. Por otra parte los estudios sobre análisis de contenido están, igualmente, centrados en temas escolares de pensamiento numérico.

Desde una perspectiva cognitiva en este grupo de investigación, y en particular en esta línea, se realizan estudios que se fundamentan sobre la noción de competencia matemática, centran el interés en el conocimiento significativo en matemáticas, el dominio de sus procedimientos, el desarrollo de capacidades, el diagnóstico y tratamiento de los errores y dificultades. Además, tienen interés en el carácter aplicado del conocimiento matemático, es decir en el enfoque funcional del conocimiento matemático.

Por su lado, las investigaciones realizadas en la línea de Formación de Profesores prestan atención a la formación inicial de profesores de matemáticas de educación secundaria, se ocupa de caracterización profesional del profesor de matemáticas en ejercicio, y han hecho importantes esfuerzos de innovación para establecer y supervisar los programas de formación de maestros dentro de los títulos de grado de maestros (de primaria e infantil) creados recientemente. Los procesos de convergencia europea y el papel que se le concede a las competencias, está dando lugar a nuevas investigaciones que examinan el papel de las competencias profesionales de los maestros y los procesos formativos relacionados con ellas.

En vista de las consideraciones previas, indicamos que nuestro interés por estudiar el conocimiento común y las competencias matemáticas, promovidas en una secuencia de trabajo sobre la razón y la proporcionalidad, en el ámbito de la formación de maestros, implica que nuestro estudio se enmarque simultáneamente en estas dos líneas de investigación.

ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

El informe de esta investigación está estructurado en nueve capítulos, seguido del listado de las referencias bibliográficas utilizadas y de la lista de los anexos, los cuales se han incluido en el CD que acompaña a este documento. A continuación describimos brevemente el contenido de cada uno de los capítulos.

Capítulo 1. Recoge el encuadre del problema de investigación, el cual trata sobre la necesidad de elaborar, aplicar y analizar, en el contexto de la formación matemática de futuros maestros de primaria, experiencias de trabajo en el aula que posibiliten el desarrollo[5] del conocimiento matemático de los estudiantes de magisterio, desde una perspectiva funcional, como una forma de sustentar y contribuir al proceso de desarrollo de la competencia matemática de dichos estudiantes. Este capítulo concluye indicando las preguntas de investigación que generaron los objetivos generales y parciales del estudio, que así mismo se detallan.

Capítulo 2. En este capítulo presentamos una síntesis de las investigaciones previas relacionadas con los subconstructos de los números racionales y el razonamiento proporcional, las cuales se han realizado en contextos escolares y en entornos de formación inicial de profesores, principalmente de educación primaria.

Capítulo 3. Aborda los tres referentes conceptuales que fundamentan el desarrollo de nuestra investigación. En primer lugar describimos los fundamentos que respaldan la noción de competencia matemática que hemos adoptado en nuestra investigación, posteriormente recogemos distintas posturas en relación con el conocimiento

[5] En nuestra investigación el término desarrollo se refiere al incremento o mejora del conocimiento matemático de los futuros maestros. En el Capítulo 5 describimos el uso de la expresión “desarrollo del conocimiento del profesor” en el marco de una metodología de investigación centrada en el mismo.

profesional del maestro de matemáticas, concentrándonos en el conocimiento matemático común de este colectivo, y finalmente enfatizamos los procedimientos sugeridos por los autores para realizar el análisis didáctico de los contenidos de las matemáticas escolares.

Capítulo 4. En este capítulo presentamos el análisis didáctico de la razón y proporcionalidad que hemos realizado en nuestra investigación. Este Capítulo 4 se organiza en tres bloques: (1) análisis de contenido, (2) análisis cognitivo y (3) análisis de instrucción. El análisis de actuación se contempla en el Capítulo 7 *Análisis retrospectivo de las sesiones* y las pautas seguidas para efectuar este análisis se describen en el Capítulo 5 *Tipo de estudio y metodología*.

Capítulo 5. Este capítulo contempla dos secciones. En la primera parte del capítulo nos centramos en la descripción de las características de la Investigación de Diseño, propósitos y elementos centrales de la misma, así como en la descripción de los fundamentos del tipo de experimento que ha guiado el desarrollo de nuestro estudio. La segunda parte del capítulo comprende la descripción de los participantes, el papel de la investigadora en la experimentación, el contexto del estudio. En relación con el experimento de enseñanza destacamos los principios sobre los que se fundamenta, las fases del mismo y el papel del análisis didáctico en las fases. Posteriormente se abordan los aspectos metodológicos de la recogida y análisis de la información de esta investigación.

Capítulo 6. Este capítulo recoge la descripción de la planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones en las que aplicamos nuestro diseño. La descripción de cada una de las sesiones de trabajo, llevadas a cabo en el aula, se realiza siguiendo la pauta de los experimentos de diseño, a través de tres apartados: planificación, desarrollo y análisis de lo ocurrido en cada sesión.

Capítulo 7. En este capítulo se aborda una parte del análisis retrospectivo de la experimentación, se centra en el análisis retrospectivo de las sesiones, pues el estudio de casos se presenta en el Capítulo 8. El análisis retrospectivo de las sesiones se ha estructurado tomando en consideración las cinco dimensiones de análisis: (1) conocimiento matemático manifestado por los estudiantes en la resolución de las tareas, (2) balance de las tareas aplicadas, (3) logro de las expectativas de aprendizaje supuestas en la planificación de las tareas, (4) papel de la investigadora en la institucionalización de los conocimientos, y (5) metodología de trabajo en el aula.

Capítulo 8. Recoge el segundo análisis de la experimentación, éste considera el estudio de casos individuales, el cual se centra en el análisis de las modificaciones en los conocimientos matemáticos mostradas por los estudiantes en las dos fases de trabajo individual, el realizado al inicio de cada sesión y el trabajo individual realizado sobre la misma tarea fuera de clase.

Capítulo 9. Finalmente, en este capítulo se presentan las conclusiones que se derivan del desarrollo de esta investigación. Iniciamos la exposición de las mismas atendiendo a la consecución de los objetivos de la investigación, propuestos en el Capítulo 1 y describiendo paralelamente las principales aportaciones de este trabajo. Seguidamente reflexionamos y aportamos algunas conclusiones relativas a la metodología de investigación. Finalmente presentamos las limitaciones de este estudio y recogemos las líneas abiertas que constituyen perspectivas de continuación de la investigación.

Estructura de la Investigación

La Figura 0.1 recoge una visión panorámica de nuestra investigación, sus componentes y fases, así como la ubicación de ambos elementos en los nueves capítulos de esta memoria. Las palabras de enlace y la dirección de las flechas dirigen la lectura del esquema.

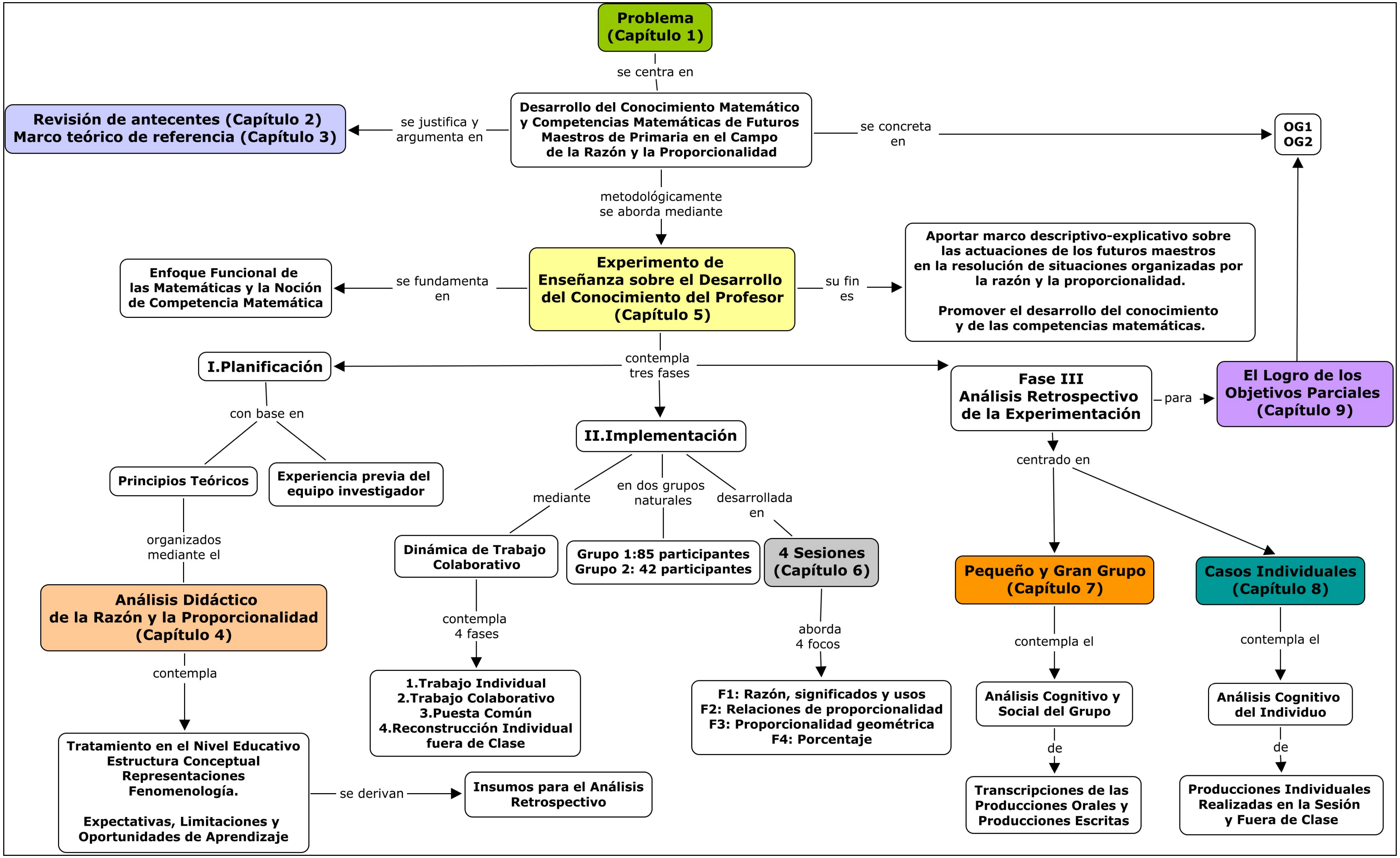


Figura 0.1. Estructura general de la investigación y relación con la organización de los capítulos de la memoria

Capítulo 1. Planteamiento del Problema

De manera general, el problema de investigación de este trabajo tiene que ver con la necesidad de elaborar, aplicar y analizar, en el contexto de la formación matemática de futuros maestros de primaria, experiencias de trabajo en el aula que posibiliten el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes de magisterio, desde una perspectiva funcional, como una forma de sustentar y contribuir al proceso de desarrollo de la competencia matemática de dichos estudiantes. Procuramos exponer el problema desde perspectivas más generales que estén relacionados con nuestra preocupación, y no enfocarlo únicamente desde posturas que afirman que este colectivo carece de un conocimiento profundo de las matemáticas escolares elementales. Es decir, el supuesto es que si se trabaja en beneficio de la mejora de los conocimientos matemáticos de los futuros maestros, esto es profundizando en los conceptos, sus propiedades, representaciones, etc. mediante la resolución de diversos tipos de problemas es posible que la competencia matemática se vea también promovida.

En primer lugar trataremos de sintetizar los hechos que han conducido a los sistemas educativos, del nivel básico obligatorio y en consecuencia en la educación superior, a reformular la propuesta curricular a partir de la noción de competencia. Dentro de esta postura nos interesa resaltar el papel de la competencia matemática de los estudiantes para maestro.

Por otro lado recogemos posturas que defienden la necesidad de formar mejor a los futuros profesores, como base para incidir en la calidad de la educación. Dentro de esta perspectiva nos interesa señalar el peso que puede tener el conocimiento matemático de los futuros maestros en su labor educativa.

Posteriormente conectaremos ambas nociones, es decir la competencia matemática y el conocimiento matemático de los estudiantes de magisterio, que las consideramos dos caras de una misma moneda, pues para llegar a ser matemáticamente competente es preciso poseer un conocimiento del contenido profundo, amplio y conectado (Ma, 1999). No es posible aplicar conocimientos matemáticas en diversas situaciones, científicas y del entorno cotidiano, si no se tiene un conocimiento del contenido tal y como lo caracterizó Ma (1999).

1.1 Retos Actuales de la Educación

Actualmente los niños crecen en un entorno tecnológico en el que los medios de comunicación ejercen un importante papel en su educación. Internet, las redes sociales, la televisión, las conexiones vía satélite, entre otros, les proporcionan problemas y oportunidades para entender, conocer, aprender y experimentar nuevas situaciones. Actualmente muchos estudiantes hacen sus deberes con ayuda de internet, están expuestos a múltiples informaciones con un simple "click" acceden a la definición, propiedades o elementos cruciales de un concepto; mientras tanto en muchas escuelas los profesores siguen desarrollando una educación basada en formas de vida de hace dos siglos sometida a la presión de los resultados académicos, las pruebas estandarizadas o los cambios derivados de agendas políticas.

Esta situación ha conducido a los gobiernos, con ayuda de los especialistas en Educación, a replantearse el papel actual de la escuela en la formación de los escolares en relación con distintas dimensiones: cognitiva, social, emocional. Este cambio de paradigma ha sido el tema que se ha puesto sobre la mesa en espacios de reunión y debate internacional realizados en los últimos años como por ejemplo en el *Global Education Forum*[6].

Entre las cuestiones sobre las que existe consenso generalizado está la idea de que una de las misiones de la educación formal debe ser formar ciudadanos reflexivos, críticos, capaces de abordar la resolución de problemas desde diferentes perspectivas y no seguir saturando a los estudiantes con conocimientos que deben ser memorizados sin atribuirles sentido, lo cual es una misión casi imposible dada la acumulación de conocimientos que el ser humano ha ido construyendo a lo largo de la historia. Es evidente que la cantidad de contenidos que se estudiaban hace 50 o 60 años, en relación con cualquier área de conocimiento, no es la misma que han de estudiar los niños y jóvenes de hoy día, por lo que es una utopía pensar que el papel de la escuela ha de ser la transmisión de conocimientos.

Las actuales propuestas educativas defienden una educación global, que permita establecer relaciones entre las diferentes conocimientos y a la vez que los estudiantes desarrollan la capacidad para ver el mundo de una forma original y crítica con las ideas establecidas (OEI[7] y UNESCO, 2010; OEI, 2010; UNESCO, 2007). El reto de la educación actual es asumir el cambio de la sociedad y esto es lo que mueve a los sistemas educativos a reformular toda su estructura con base en la noción de competencia. Desde la perspectiva general manifestada en el proyecto DeSeCo se afirma que

> *Una competencia es más que conocimientos y destrezas. Involucra la habilidad de enfrentar demandas complejas, apoyándose en y movilizando recursos psicosociales (incluyendo destrezas y actitudes) en un contexto en particular. Por ejemplo, la habilidad de comunicarse efectivamente es una competencia que se puede apoyar en el conocimiento de un individuo del lenguaje, destrezas prácticas en tecnología e información y actitudes con las personas que se comunica.* (OCDE, 2005b, p.3)

[6]Disponible en http://www.globaleducationforum.org/

[7] Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura

Son varias las razones por las que se justifican los diseños curriculares basados en la noción de competencia. Cano (2008) señala tres de ellas. En primer lugar indica que nos hallamos inmersos en la *sociedad del conocimiento*, en la que la información se crea constantemente y parte de ella queda obsoleta con rapidez, por lo que lo importante no es la información en sí, sino ser capaz de buscar la información pertinente en cada situación, interpretarla y ser crítico con la misma de modo que se logre resolver los problemas. Esto es lo que pretenden los diseños por competencias, habilitar en las personas capacidades que les permitan aprender a lo largo de la vida. En segundo lugar, y ligado al cambio acelerado del saber, Cano (2008) señala la *complejidad*, afirma que el conocimiento es cada vez más complejo que no quiere decir que sea más complicado, sino que el conocimiento requerido en la sociedad actual ha de ser global e interrelacionado. En este sentido los diseños por competencias promueven la integración y apuestan por difuminar las fronteras que separan las áreas de conocimiento que se estudian en la escuela, instituto e incluso en la educación superior. Cano (2008) sostiene, en tercer lugar, que los diseños por competencias se justifican dada la necesidad de una *formación integral* que permita a las personas enfrentarse a una sociedad incierta, misma que caracteriza como una "sociedad basada en redes y primacía de las nuevas tecnologías pero con riesgo de brecha digital… sociedad del bienestar pero con riesgo de un creciente consumismo compulsivo" (p.3). En esta línea las propuestas por *competencias* incluyen conjuntos de conocimientos, habilidades y actitudes de carácter muy diferente, vinculados no solamente con lo cognitivo sino también con lo social y emocional.

El desafío actual de la educación obligatoria[8] es contribuir en la formación integral de las personas para que desarrollen aquellas competencias que les permitan responder a las exigencias de un mundo globalizado, altamente simbólico, inestable y recargado de información. Los desafíos que impone la realidad de nuestra sociedad al sistema educativo se han traducido en una serie de reformas en los niveles de educación obligatoria y superior, derivadas de los acuerdos europeos que promueven una política educativa común centrada en el aprendizaje de los estudiantes en la adquisición de capacidades, habilidades, competencias y valores que permitan a las personas una actualización constante de los conocimientos para desenvolverse eficazmente en la sociedad de hoy. En la educación obligatoria, primaria y secundaria, el marco curricular se ha organizado en torno a 8 competencias clave[9], y la educación superior se organiza según una estructura común de competencias genéricas y específicas, de cada disciplina de primero y segundo ciclo, y en una serie de ámbitos temáticos: estudios empresariales, ciencias de la educación, geología, historia, matemáticas, física y química.

Desde el área que nos concierne, la Educación Matemática, se ha asumido el desafío de la reforma educativa requerida por la sociedad actual apostando por la noción de

[8] Nos referimos a los procesos de enseñanza-aprendizaje que tienen lugar en las escuelas, institutos, o colegios, de primaria o secundaria, que son regulados por el gobierno de cada país.

[9] (1) Competencia en comunicación lingüística, (2) Competencia matemática, (3) Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico, (4) Tratamiento de la información y competencia digital, (5) Competencia social y ciudadana, (6) Competencia cultural y artística, (7) Competencia para aprender a aprender y (8) Autonomía e iniciativa personal.

competencia matemática o alfabetización matemática como eje central sobre el que se organiza el currículo de matemáticas de los niveles educativos obligatorios. Actualmente se sostiene a través del marco legal del currículo español de matemáticas (MEC, 2006a, 2006b), de proyectos internacionales como el estudio PISA (OCDE, 2004) y de la postura de especialistas en Didáctica de las Matemáticas (Rico y Lupiáñez, 2008) que el fin de la Educación Matemática no es que los escolares sean capaces de recitar contenidos, fórmulas o definiciones que seguramente están muy bien expuestos en los textos o en páginas webs especializadas en temas matemáticos, sino de lo que se trata es de ayudar a que los estudiantes elaboren las herramientas cognitivas que les permitan ser ciudadanos capaces de "identificar y comprender el papel que las matemáticas desempeñan en el mundo, realizar razonamientos bien fundados y utilizar e involucrarse en las matemáticas de manera que se satisfagan las necesidades de la vida del individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (OCDE, 2004, p. 21). Desde esta postura no se pretende restar importancia a la adquisición de conocimientos específicos durante el periodo escolar sino, como se afirma en el estudio PISA (OCDE, 2004), tener en cuenta que la aplicación de este conocimiento en la vida adulta depende de manera decisiva de la adquisición de unas destrezas y nociones más amplias.

Los fines de la Educación Matemática, en el contexto español, aparecen descritos en los diseños curriculares establecidos para las enseñanzas mínimas para la educación primaria y secundaria obligatoria respectivamente en los Reales Decretos 1513/2006 y 1631/2006 (MEC, 2006a, 2006b). Las orientaciones expuestas en los mismos, sobre la educación matemática, se fundamentan en los principios expuestos en el estudio PISA, dada la consideración de la competencia matemática como una de las competencias clave a desarrollar en todos los niveles de la educación obligatoria y la caracterización que se hace de la misma en estos documentos. En el ámbito de la educación primaria la competencia matemática se define como "la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral" (MEC, 2006a, p. 43059). En síntesis, el objetivo que persigue la educación matemática en la educación obligatoria es formar personas *matemáticamente alfabetizadas*, lo cual según el marco del proyecto PISA se refiere a personas que son capaces de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en las situaciones reales, aportar opiniones fundamentadas así como usar las matemáticas en circunstancias cotidianas que los ciudadanos han de afrontar en diferentes espacios sociales, laborales, de ocio, entre otros.

Aunque en el estudio PISA se evalúa y considera la competencia matemática de estudiantes de 15 años, consideramos, al igual que Sáenz (2007), que el desarrollo de la misma tiene que ser objetivo educativo de toda la enseñanza obligatoria, de modo que no sólo los profesores de secundaria han de trabajar en este sentido sino también los de primaria. Lo cierto es que los fundamentos del estudio PISA ya se han aceptado como elementos constituyentes del marco curricular del cual se han derivado todas las directrices que se recogen en los programas de estudio de matemáticas de la educación obligatoria en España.

A continuación recogemos algunas reflexiones sobre la relación que hay entre la calidad de la educación, la consecución de los fines de la misma y la formación del profesorado, en términos generales y en el ámbito de la Educación Matemática.

1.1.1 Formación del Profesor y Calidad de la Educación

Como se expresa en el Proyecto SITEAL[10] (OEI[11] y UNESCO, 2010) existe un consenso generalizado que afirma que la mejora del trabajo docente está estrechamente vinculada con la mejora de la calidad de la educación. Según este informe el desafío actual que enfrentan los países es diseñar propuestas para generar una carrera docente más ligada al desarrollo profesional, a la formación continua de los maestros, que estimule la adquisición de competencias y conocimientos que les permitan optimizar continuamente su formación y desempeño. Así mismo en el marco del proyecto "*Metas Educativas 2021: La educación que queremos para la generación de los Bicentenarios*" (OEI, 2010) se expresa que si se piensa en la calidad de la educación de un país, es inevitable hacerlo en relación con la calidad de su profesorado. De ahí la prioridad que la gran mayoría de las reformas educativas otorga al fortalecimiento de la profesión docente. Asimismo se expresa que un profesor que cuente con una formación inicial de calidad y con las oportunidades de acceder a programas de capacitación continua, puede contribuir al mejoramiento de los resultados de los niños en su rendimiento.

En esta línea, la formación inicial de los docentes se constituye, entonces, como un proceso de vital importancia para las definiciones de una educación de calidad, la cual es una necesidad vigente. De la calidad de la formación docente (en términos de contenidos, de creencias, de posibilidades de relacionar los aprendizajes propios y de sus alumnos entre los distintos ámbitos, etc.) depende en buena medida el éxito de la generación y aplicación de conocimientos en otros ámbitos de la vida laboral, cotidiana, escolar, entre otros (Alatorre, 2011). En este sentido uno de los intereses implicados en la creación del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) ha sido el de adaptar los programas de formación universitaria a las necesidades de la sociedad.

Tal y como afirma Esteve (2009) los cambios de la sociedad y sus efectos en el ámbito educativo se convierten en un elemento esencial para orientar el trabajo de los profesores, ya que los nuevos desafíos y exigencias del entorno marcan las pautas para diseñar el proceso formativo de los mismos y el camino para su desarrollo profesional. Y como se ha expuesto, es una realidad que la misión de la Educación Matemática actual en los niveles de educación obligatoria, en particular en la educación primaria, es el desarrollo de la competencia matemática de los escolares; por lo que es necesario exponer de forma genérica cómo se aborda la competencia matemática en el plano de la formación de maestros.

[10] Sistema de Información de las Tendencias Educativas en América Latina.
[11] Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura

De acuerdo con las disposiciones establecidas en el EEES, los nuevos programas de formación de maestros se han definido en términos de competencias. En la orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de maestro en educación primaria (MEC, 2007), se estable que el plan de estudios ha de incluir, como mínimo, un módulo relativo al área didáctico y disciplinar de la matemática en el que puedan, entre otras, adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones espaciales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.), plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana y valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico. En relación con las competencias específicas al área de las matemáticas, el estudio realizado por la ANECA[12] (2005) constituye un referente en la organización y adaptación de la educación superior española al EEES y señala que las dos competencias más valoradas por los profesores encargados de la formación del profesorado, guardan relación con la formación matemática básica de los docentes, estás son:

> *Usar y hacer usar a los alumnos los números y sus significados, ser capaz de medir y usar relaciones métricas, ser capaz de representar y usar formas y relaciones geométricas del plano y del espacio, ser capaz de analizar datos y situaciones aleatorias en situaciones diversas, tanto en situaciones no escolares como escolares.*
> *Conocimiento del contenido matemático suficientemente amplio que le permita realizar su función docente con seguridad.* (p. 101)

Sáenz (2007) afirma que existe un acuerdo generalizado sobre la necesidad de formar maestros competentes para enseñar las matemáticas. Sin embargo, en su estudio se advierte sobre las posibles dificultades que tendrían los futuros maestros para dirigir un proceso de aprendizaje de sus alumnos encaminado al dominio funcional de las matemáticas, cuando ellos mismos no tienen esas competencias.

Más aún, para que la actuación de los maestros sea efectiva, en beneficio de la competencia matemática de los escolares, es preciso que active una serie de conocimientos que contemplan aspectos propios del contenido matemático y cuestiones de corte didáctico. Desde nuestra experiencia en el ámbito de la formación matemática de maestros y de la extensa y constante producción realizada en esta línea de investigación reconocemos que la formación inicial de docentes está revestida de una complejidad particular. Ponte y Chapman (2008) plantean que este complejo panorama se puede visualizar a través de cuatro componentes claves: el conocimiento de las matemáticas, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el desarrollo de la identidad de los futuros docentes y un conjunto de algunos elementos que pueden influir en diferentes maneras sobre los programas de formación de profesores. Por ejemplo, características de los futuros docentes, de los instructores, elementos del programa de estudio, características socioculturales del entorno, organización del sistema educativo, rol de la investigación, entre otros.

[12] Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.

La naturaleza, caracterización y complejidad del conocimiento del profesor de matemáticas han sido descritos por investigadores como Shulman (1987), Hill, Ball y Schilling (2008), Bromme (1994), Ponte y Chapman (2008), entre otros, y en el Capítulo 2 lo recogemos con más detalle. Somos conscientes de que el conocimiento matemático es una condición necesaria aunque no suficiente para enseñar matemáticas. El conocimiento profesional del maestro tiene diversas dimensiones, desde la perspectiva de Hill et al. (2008) se puede considerar el conocimiento del profesor de matemáticas según dos dimensiones denominadas Subject Matter Knowledge (SMK) y Pedagogical Content Knowledge (PCK) ambas subdivididas en otros tipos. No obstante adelantamos que el interés de nuestra investigación se centra en el conocimiento del contenido matemático, o en términos de Hill, Ball y Schilling (2008) en el conocimiento común del contenido, pues hemos pretendido estudiar, desde un enfoque funcional[13], los conocimientos matemáticos comunes de maestros de primaria en formación inicial en los tópicos de razón y proporcionalidad.

Lo dicho nos permite aproximarnos directamente a nuestro problema de investigación, ya que entre las primeras cuestiones que motivaron la realización de nuestra investigación han estado las siguientes: ¿es posible que profesores o maestros que no son matemáticamente competentes puedan formar a escolares que sí lo sean?, ¿los maestros de primaria son matemáticamente competentes?, y más aún ¿los estudiantes de magisterio están desarrollando una competencia matemática que les permita lograr los fines de la Educación Matemática en la enseñanza en primaria? ¿Es posible llegar a ser competentes sin un conocimiento amplio, profundo y conectado de las matemáticas que se enseñan? Estas cuestiones aunque han sido de interés para nuestro estudio carecen de concreción pues son vagas en tanto su abordaje requeriría de investigaciones extensas en cuanto a recursos y tiempo.

Con el objetivo de ir delimitando las cuestiones anteriores, decidimos en primer lugar enfocarnos en un grupo concreto de participantes, los futuros maestros de educación primaria o como mejor se les conocen en el contexto español los estudiantes de magisterio. Elección que no ha sido arbitraria ya que desde la experiencia personal de la investigadora en el ámbito de la formación de futuros maestros en otro contexto de educación superior se ha percibido cómo aquellos conocimientos de los futuros maestros, que los formadores asumen comprendidos y correctamente relacionados, no están asimilados y mucho menos bien conectados con otros conceptos que se suponen también elementales, por lo que no requirió de mucho esfuerzo el suponer que la competencia matemática de los mismos precisa de un continuo fortalecimiento durante la formación inicial y permanente de los maestros. Esta preocupación motivó la realización del trabajo final de máster (Valverde, 2008) en el que se aplicó una prueba de problemas de razón y proporcionalidad a un grupo de 76 estudiantes de magisterio de la Universidad de Granada, en esta investigación se tuvo la oportunidad de constatar las debilidades en el conocimiento matemático que ya se habían identificado en la práctica

[13] Como se ha caracterizado en Rico y Lupiáñez (2008).

de la investigadora como profesora de matemáticas en el proceso de formación inicial de maestros.

Elección del Contenido Razón y Proporcionalidad

La elección del contenido matemático objeto del estudio surge a partir de nuestra experiencia como docentes de matemáticas de distintos niveles de la educación obligatoria así como en la formación de maestros de educación primaria, contextos desde los cuales reconocemos que la proporcionalidad es uno de los temas más sugerentes en la enseñanza de las matemáticas, dado que éste es un concepto básico en las matemáticas y es un tema de gran importancia en el currículo escolar (Fiol y Fortuny, 1990), ya que está relacionado con la mayoría de los contenidos de matemáticas y con otras asignaturas como Física, Biología, Química, entre otras.

El contenido tomado para tal experimento, las nociones de razón y proporcionalidad, se ha elegido, entre otros, por los siguientes motivos:

a) Ambas nociones matemáticas están asociadas a múltiples situaciones cotidianas, lo que permite poner en práctica un acercamiento de la matemática a la vida cotidiana.

b) La noción de razón posee una riqueza didáctica y una entidad matemática que amerita ser discutida en la formación de maestros. Freudenthal (1983) plantea que dicha noción posee una entidad propia ajena a la de fracción.

c) Es importante complementar los conocimientos de los estudiantes de magisterio relativos a los subconstructos del número racional pues los maestros han de plantear secuencias de enseñanza no centradas únicamente en el significado parte-todo del número racional (Llinares y Sánchez, 1988), como ha prevalecido en la enseñanza de la matemática escolar. Esto demanda de los futuros maestros una mayor comprensión de todos los subconstructos del número racional.

Pero quizá el argumento más poderoso sea que la proporcionalidad es considerada uno de los temas más sugerentes en la enseñanza de las matemáticas ya que es un contenido que impregna al currículo de matemáticas de primaria, secundaria e incluso de niveles superiores que mantiene múltiples relaciones con otros conceptos matemáticos y conexiones con otras áreas de conocimiento (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; A. Fernández, 2001; Lamon, 2007).

Después de la teoría del desarrollo humano de Piaget, en la que señalaba el razonamiento proporcional como elemento fundamental en la etapa de las operaciones formales (Inhelder y Piaget, 1958) la investigación sobre el Razonamiento Proporcional se ha centrado en estudios con adolescentes (Tourniaire, 1986). No obstante, diferentes estudios han mostrado consistentemente que muy pocos alumnos de secundaria, con habilidades promedio, usan el razonamiento proporcional de manera sólida (Post, Harel, Behr y Lesh, 1988). El tópico incluso permanece problemático para muchos estudiantes universitarios y existen evidencias sobre que una gran parte de nuestra sociedad nunca adquiere fluidez en el pensamiento proporcional (Ben-Chaim et al., 1998).

Las investigaciones orientadas a estudiar el razonamiento proporcional lo han hecho desde el análisis de las actuaciones de los estudiantes de la escuela primaria o de secundaria, a partir de esta situación surge nuestro interés por estudiar este fenómeno en otros contextos de aprendizaje, tal y como lo es la formación de maestros de primaria. Dado el rol fundamental de los números racionales en la matemática escolar, el amplio reconocimiento de las dificultades en el aprendizaje de este tópico, y el rol crucial que en los procesos de instrucción juega el conocimiento matemático de los contenidos escolares que poseen los maestros, nos parece sorprendente que pocos investigadores hayan estudiado las bases de conocimiento que los maestros requieren para enseñar los números racionales en sus múltiples subconstructos, incluyendo la razón y la proporcionalidad que constituyen el foco primordial de nuestra investigación.

1.2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Partiendo del hecho de que los futuros maestros han de ayudar a sus estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas y asumiendo la suposición de que para enseñar cualquier saber concreto lo primero es poseerlo, cabe destacar la relevancia de incluir, en el proceso de formación matemática de los estudiantes de magisterio, experiencias concretas de aprendizaje que promuevan la adquisición de competencias matemáticas. En este sentido, este desafío se ha abordado, principalmente, desde la reflexión y trabajo cooperativo de los profesores universitarios quienes se han preocupado por generar experiencias innovadoras para adaptar la formación de los estudiantes a este nuevo marco. Un ejemplo de esto, en el contexto de la formación de maestros de primaria de la Universidad de Granada (UGR), ha sido la propuesta elaborada por Ruiz, Molina, Lupiañez, Segovia y Flores (2009) para el desarrollo de la asignatura Matemáticas y su Didáctica. En esta propuesta se describe, entre otras, la organización de la primera lección, focalizada sobre el sistema de numeración decimal y aportan una detallada descripción de la contribución de esta lección a la adquisición de las competencias matemáticas específicas, las competencias profesionales relativas a la enseñanza de la matemática, las competencias profesionales interdisciplinares y las competencias transversales. Sin embargo, no se realiza una constatación empírica basada en una investigación acerca de la eficacia de la metodología, actividades o tareas consideradas en la asignatura en relación con la competencia matemática de los futuros maestros.

El informe del estudio PISA 2003 (OCDE, 2005a) no realiza ningún análisis que involucre directamente al profesor. Como afirma Gómez-Chacón (2006) en relación con este hecho, es razonable pensar que existe algún tipo de relación entre el rendimiento matemático de los alumnos y la formación del profesor, pero establecer de forma precisa cuál es el tipo de vínculo no es un asunto trivial. La citada autora informa de la acción formativa "*Matemáticas: PISA en la Práctica*" que incluyó un seminario de 55 expertos españoles que acordaron una serie de recomendaciones. En lo que respecta a los maestros, recomiendan mejorar el actual currículo matemático en su formación inicial; afirman que se detectan fuertes carencias de conocimientos matemáticos del profesor de primaria debido, en buena medida, al escaso número de horas en su formación inicial. También sugieren avanzar en la determinación de ejes articuladores de un marco teórico para un nuevo currículo y una nueva metodología en la formación de docentes en el área de matemáticas, y afirman que PISA ofrece un marco de evaluación de competencias matemáticas que podría ser aplicable en parte al profesor y, consecuentemente, a su formación.

La situación descrita justifica la necesidad de un estudio que aborde sistemáticamente la creación, puesta en práctica y análisis de una intervención de enseñanza orientada a contribuir en el proceso de adquisición de la competencia matemática de los futuros maestros de primaria, así como en el desarrollo del conocimiento matemático de los mismos.

No obstante, en el mismo sentido que lo plantean (Rico y Lupiáñez, 2008), reconocemos que el desarrollo de la competencia matemática constituye una tarea compleja de abordar que implica nuevos desafíos, pues no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas y el desarrollo de ciertas competencias. La realidad es que ni la ley ni los decretos, planes de formación o programas de la asignatura marcan el alcance, los componentes y los cauces que han de caracterizar el desarrollo de la competencia matemática. Tampoco la normativa hace referencia a estrategias para su consecución, a su vinculación con las dimensiones del currículo de matemáticas, ni a las condiciones y requisitos necesarios para su diseño y desarrollo.

Gairín (1998) afirma que el trabajo de los futuros maestros como especialistas en educación primaria les va a exigir que instruyan a los escolares en el tópico de los números racionales, entre otros la razón y otros conocimientos vinculados como lo son precursores de la proporcionalidad (A. Fernández, 2001). De ahí la relevancia de poner en marcha vías para fortalecer los conocimientos matemáticos y competencia matemática de los futuros maestros en el contexto de la razón y proporcionalidad.

Si bien no nos vamos a centrar en ello, consideramos que nuestro problema puede tener un enfoque diferente si se mira desde el marco teórico de los distintos tipos de conocimiento del profesor de matemática (Shulman, 1986; Bromme, 1994; Ball, 2000; Hill, Rowan y Ball, 2005; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ponte y Chapman, 2008). Aceptamos, en nuestro trabajo, que en la estructura de la noción de competencia matemática están los conocimientos matemáticos, considerando que son las diferencias entre un conocimiento experto y un conocimiento novel las que determinan una actuación competente de otra que no lo es (Rico y Lupiáñez, 2008). De lo anterior indicamos que uno de los focos de nuestra investigación es el conocimiento matemático puesto de manifiesto por los futuros maestros en la resolución de problemas que consideran diversos tipos de situaciones, la adecuación y sofisticación en el uso de ese conocimiento matemático es el que nos informa sobre la competencia matemática de los estudiantes de magisterio.

1.2.1 Preguntas y Objetivos de la Investigación

Además del reto señalado en el apartado anterior, sobre las experiencias de formación, consideramos que la investigación ha de proporcionar indicios de calidad de materiales (así como de formas de trabajar y de evaluar) diseñados para que contribuyan a la adquisición de competencia matemática por el alumnado.

Esta situación suscitó nuestro interés por realizar un “experimento de enseñanza”[14], siguiendo las tres fases que contemplan este tipo de estudios: planificación, implementación y análisis retrospectivo. Se ha enfocado en el estudio de algunos contenidos asociados a las nociones de razón y proporcionalidad y se ha desarrollado bajo el marco curricular propuesto en el estudio PISA (OCDE, 2004, 2005a; Rico y Lupiáñez, 2008). El marco teórico de este estudio enfatiza los procesos de matematización como medios para desarrollar la competencia matemática (Rico, 2006), pero la capacidad de matematización de problemas de la vida cotidiana es una destreza compleja cuya adquisición requiere un trabajo que supera el marco de un curso o de un nivel educativo, y que en el caso de los futuros maestros ha ido conformándose, en el mejor de los casos, desde su experiencia previa y seguirá desarrollándose en su formación inicial y continua.

Dado el interés de nuestra investigación por contribuir en el desarrollo de la competencia matemática y el conocimiento de los futuros maestros respaldándonos, a su vez, en la postura expuesta en el estudio PISA que sugiere el trabajo en resolución de problemas que impliquen situaciones cotidianas y de otros tipos como medio para el desarrollo de la misma, elegimos una metodología de trabajo en el aula basada en la resolución de problemas y en el aprendizaje colaborativo para desarrollar nuestra investigación, por entender que se adapta a las características expuestas.

Preguntas y objetivos de investigación

La información obtenida de la revisión de las investigaciones realizada, nos llevo a plantearnos dos preguntas que constituyen el cimiento de nuestro problema de investigación.

¿Cómo transcurre el proceso de diseño, puesta en práctica y análisis de una *secuencia de trabajo en el aula*? que:

- aborda la revisión y (o) reconstrucción de unos conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad,
- se fundamenta en un enfoque funcional de las matemáticas
- puesta en práctica mediante una dinámica de trabajo colaborativo y que
- se desarrolla en un entorno natural de formación inicial de futuros maestros de educación primaria.

¿Cuál es la contribución, de esta secuencia, al desarrollo de competencias matemáticas de maestros de educación primaria en formación inicial? enfocándonos en dos posibles fuentes de contribución:

- el trabajo realizado, en un entorno colaborativo, como respuesta ante las demandas cognitivas de las tareas,

[14] Más adelante se detallará en qué consiste.

- y el papel de la metodología de trabajo en el aula en el fomento de estas competencias.

En consecuencia el desarrollo de la tesis doctoral pretende atender dos objetivos generales:

1. *Estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una "secuencia de trabajo en el aula" que aborda la revisión y (o) reconstrucción de conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad.*
2. *Investigar cómo contribuye la secuencia de trabajo en el aula en el proceso de desarrollo de la competencia matemática de futuros maestros de educación primaria, resolviendo problemas elaborados para el caso y utilizando una metodología de trabajo colaborativo.*

Para abordar los objetivos generales nos enfrentamos al reto de elaborar una intervención de enseñanza, fundamentada teórica y empíricamente, que nos permitiera promover el desarrollo de conocimiento matemático y de competencias en los futuros maestros y estudiar, a la vez, dicho desarrollo. Para ello decidimos realizar un experimento de enseñanza en el marco de la investigación de diseño, dado que este tipo de estudios persiguen comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). En dicho experimento interviene la autora de este trabajo como docente, los alumnos son maestros de primaria en formación inicial y el contenido está centrado en las nociones de razón y proporcionalidad. En diferentes momentos del experimento se ha utilizado el análisis didáctico[15] como herramienta que ha permitido realizar ciertas acciones de manera organizada y justificada.

Como se ha expuesto en la presentación, en esta investigación nos hemos interesado en estudiar y promover el desarrollo del conocimiento matemático y las competencias matemáticas en dos grupos de formación inicial de maestros. Nuestro interés se centra en el funcionamiento del diseño instruccional en relación con el desarrollo del conocimiento matemático y de las competencias de los futuros maestros de primaria, por lo que este diseño constituye el objeto de nuestro estudio, en relación al cual deseamos analizar distintos elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje que tienen lugar durante la implementación de la propuesta de trabajo diseñada, a saber: (1) conocimiento matemático manifestado por los estudiantes en la resolución de las tareas, (2) balance de las tareas aplicadas, (3) logro de las expectativas de aprendizaje supuestas en la planificación de las tareas, (4) papel de la investigadora en la institucionalización de los conocimientos, y (5) metodología de trabajo en el aula (Figura 1.1).

[15] En relación con el uso de la expresión *análisis didáctico* adoptamos la postura expuesta en Gómez (2007).

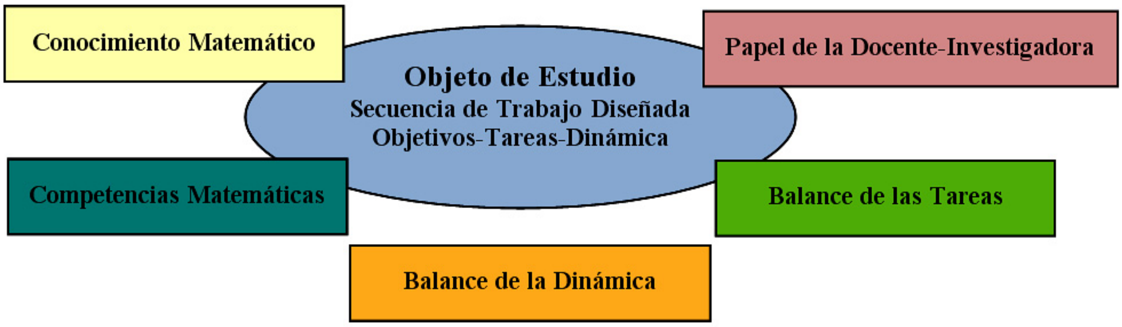


Figura 1.1. Objeto de estudio y dimensiones de análisis

1.2.2 Organización de los Objetivos de la Investigación

Los dos objetivos generales (OG1 y OG2) se abordan a través de siete objetivos parciales, cinco están vinculados al primer objetivo general y dos corresponden al segundo objetivo general. Dos de los objetivos parciales (OP1.2 y OP1.3), correspondientes al primer objetivo general, han requerido de la concreción de los mismos a través de otros objetivos que responden a cuestiones particulares relativas a los contenidos matemáticos razón y proporcionalidad, éstos se han descrito en la planificación de cada una de las sesiones (Capítulo 6). A continuación detallamos los objetivos generales y parciales de nuestra investigación.

OG1. Estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una "secuencia de trabajo en el aula" que aborda la revisión y (o) reconstrucción de conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad.

Objetivos Parciales del OG1

OP1.1. Desarrollar un análisis didáctico de los contenidos razón y proporcionalidad para planificar el diseño de la secuencia de trabajo en el aula.

OP1.2. Describir el conocimiento matemático puesto de manifiesto por los estudiantes en la resolución de las tareas durante el trabajo colaborativo, y en las dos fases de trabajo individual de algunos estudiantes[16].

OP1.3. Describir el papel de la investigadora como promotora del desarrollo del conocimiento matemático durante la fase de institucionalización.

OP1.4. Identificar fortalezas y debilidades de la dinámica de trabajo colaborativo puesto en práctica con respecto al desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes de magisterio.

OP1.5. Identificar fortalezas y debilidades de las tareas matemáticas realizadas en relación con el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes.

OG2. Investigar cómo contribuye esta secuencia en el proceso de desarrollo de la competencia matemática de futuros maestros de primaria, resolviendo problemas elaborados para el caso y utilizando una metodología de trabajo colaborativo.

[16] Será el devenir del estudio el que determine la cantidad.

Objetivos Parciales del OG2

OP2.1. Describir las actuaciones de los estudiantes, manifestadas en la resolución de las tareas matemáticas, en términos de las expectativas de aprendizaje específicas y de las competencias matemáticas consideradas en cada sesión.

OP2.2. Estudiar si la metodología de trabajo en el aula, desarrollada en la experimentación, ha contribuido en el desarrollo de las competencias matemáticas.

Los objetivos enunciados obedecen a un conjunto de supuestos que hemos asumido para el desarrollo de la investigación, a continuación los detallamos.

Supuestos

La resolución de problemas que implican situaciones cotidianas, a través de una metodología de trabajo colaborativo, suscita actuaciones que podrían promover el desarrollo de la competencia matemática de los futuros maestros de primaria. El supuesto es que si se trabaja en beneficio de la mejora de los conocimientos matemáticos de los futuros maestros, esto es profundizando en los conceptos, propiedades, representaciones, entre otros, mediante la resolución de diversos tipos de problemas, desde una perspectiva funcional, y a través de una dinámica particular de trabajo colaborativo es posible que la competencia matemática se vea también favorecida. El análisis didáctico y los diversos procedimientos considerados en esta perspectiva constituyen una herramienta eficaz que posibilitará la organización de los contenidos, expectativas de aprendizaje así como la selección y diseño de tareas a considerar en el experimento de enseñanza.

Debido a que la réplica de modelos experimentados en la formación inicial es una tendencia de actuación de los maestros y profesores en activo, procuramos elegir una dinámica de trabajo en el aula que posiblemente contribuya a enriquecer el conjunto de metodologías de enseñanza que en un futuro podrían aplicar en sus aulas de primaria.

La experimentación podría poner en evidencia errores y dificultades relacionadas con la razón y la proporcionalidad que ya han sido expuestas en estudios previos en los que han participado niños o adolescentes. Así como evidenciar otro tipo de actuaciones que no han sido expuestas en estudios previos en los que han participado niños o adolescentes. Es posible que a través de la implementación del experimento se promueva en los estudiantes de magisterio el desarrollo de conocimientos matemáticos comunes y especializados. A la vez, consideramos que es viable que los estudiantes manifiesten modificaciones en el trabajo posterior individual de las tareas causadas posiblemente por los intercambios dados en el trabajo colaborativo y en la puesta en común de las tareas.

En la Figura 1.2 presentamos un esquema en el que se recoge la organización de los objetivos generales y parciales de nuestro estudio en relación con las fases del experimento de enseñanza a través del cual se ha abordado metodológicamente el problema de investigación.

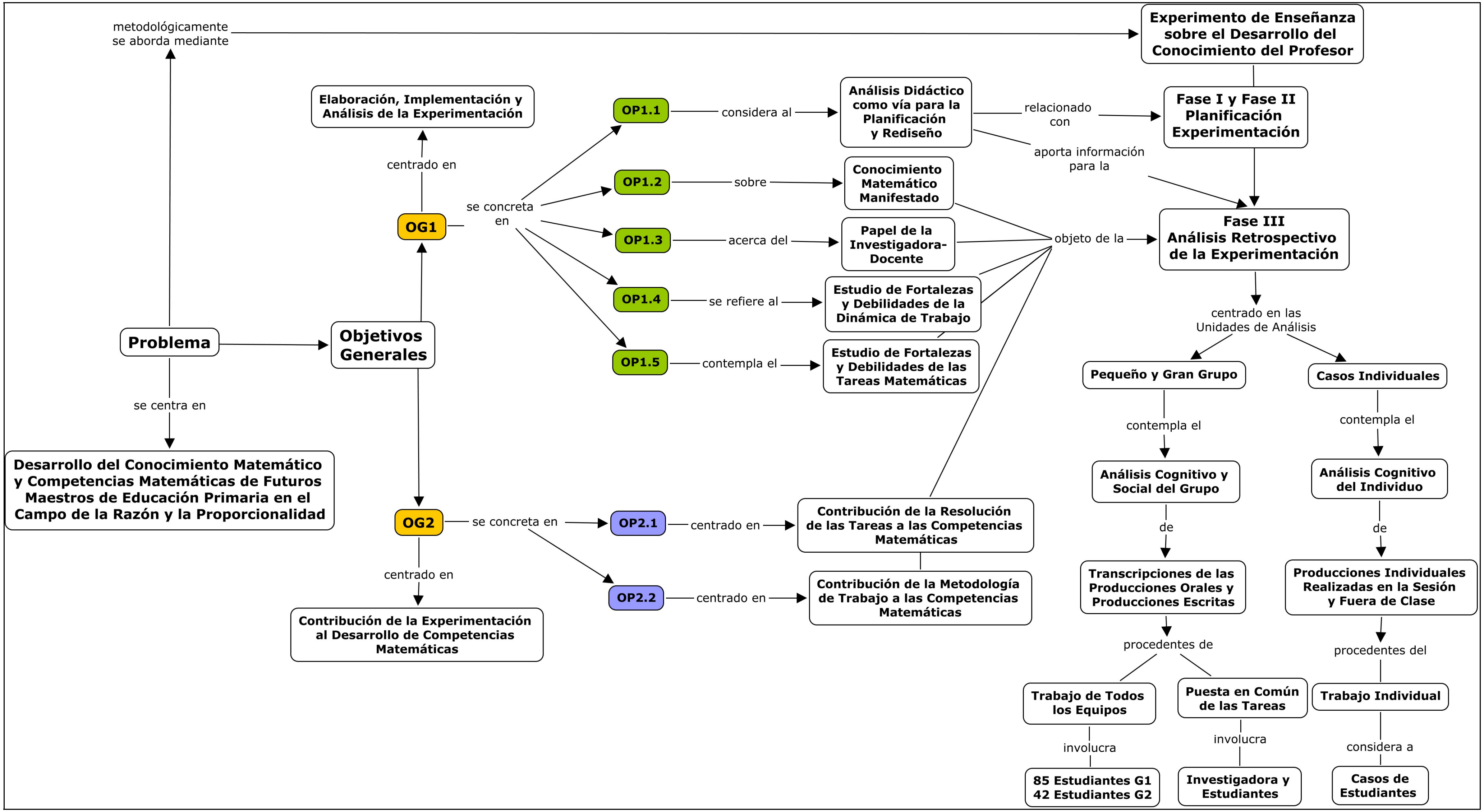


Figura 1.2. Organización de los objetivos generales y parciales del estudio en relación con las fases de la metodología del experimento de enseñanza

Capítulo 2. Revisión de Antecedentes

En este capítulo recogemos una síntesis de las investigaciones previas relacionadas con los subconstructos de los números racionales y el razonamiento proporcional, las cuales se han realizado en contextos escolares y en entornos de formación inicial de profesores de educación primaria principalmente, aunque consideramos algunos estudios que han tratado con maestros en activo. Tales estudios contemplan cuestiones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos situados en el campo de investigación de los subconstructos de los racionales, particularmente en relación con el razonamiento proporcional. Estas investigaciones permiten marcar las cuestiones centrales que caracterizan el estado de la cuestión en la que se sitúa nuestra investigación, la cual no es posible ubicar en una única línea de investigación debido a la complejidad derivada de estudiar nociones numéricas en el contexto de la formación de maestros.

Nuestro interés por estudiar el conocimiento común y las competencias matemáticas, promovidas en una secuencia de trabajo sobre la razón y la proporcionalidad, en el ámbito de la formación de maestros, implica que nuestro estudio se enmarque simultáneamente en dos líneas de investigación, la línea de Pensamiento Numérico y Algebraico y la línea de Formación de Profesores. En la Figura 2.1 ilustramos las áreas de estudio de cada línea que están relacionadas con nuestra investigación, la cual en términos generales, se sitúa en la intersección de los estudios centrados en la razón y la proporcionalidad y aquellos preocupados por promover el desarrollo del conocimiento matemático común de los futuros maestros de educación primaria.

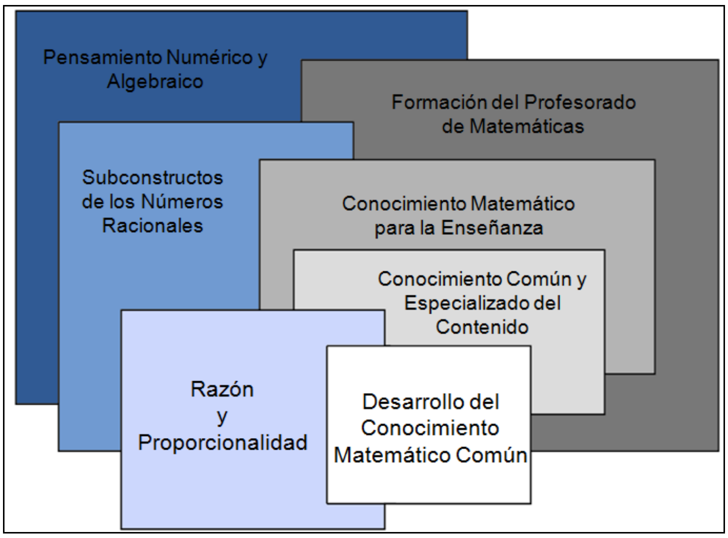


Figura 2.1. Esquema de ubicación de nuestro estudio

Organización del Capítulo

Como se describió en el capítulo anterior nuestra investigación pretende estudiar cómo ha sido el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una secuencia de trabajo diseñada para promover la competencia matemática de los estudiantes de magisterio, mediante una metodología de trabajo colaborativo y a través de la resolución de tareas situadas en entornos cotidianos cuya resolución requiere de la aplicación de conocimientos matemáticos centrados en las nociones de razón y proporcionalidad. Debido a lo expuesto anteriormente, nos interesamos por revisar investigaciones que contemplaran el conocimiento matemático para la enseñanza de profesores en formación inicial o en activo, primero en relación con los subconstructos de los números racionales para posteriormente focalizar la atención en este mismo tipo de participantes en relación con la razón y la proporcionalidad. Destacamos que en la búsqueda de estudios previos nuestro interés se ha puesto sobre el conocimiento del contenido, es decir sobre el conocimiento matemático común de los futuros maestros.

Como sugieren Ponte y Chapman (2008) la investigación sobre el conocimiento matemático para la enseñanza, particularmente sobre el conocimiento matemático común, continúa siendo una cuestión relevante alrededor del mundo y de ahí la importancia de recoger una visión general sobre la misma en el estado de la cuestión de nuestro estudio.

También hemos recogido estudios sobre los subconstructos de los números racionales y el razonamiento proporcional en los cuales los participantes han sido niños o adolescentes, esto se ha hecho con dos objetivos: (1) evidenciar, a través de las dificultades que experimentan los escolares en este campo, la necesidad de que los futuros maestros construyan un conocimiento sólido sobre los números racionales, y (2) recoger los principales aportes derivados de los estudios sobre el razonamiento proporcional con escolares debido a que, como afirman Lobato, Orrill, Druken y Jacobson (2011), la comprensión actual sobre el razonamiento proporcional de los futuros maestros se ha basado en lo que se ha expuesto en las investigaciones con niños o adolescentes. Finalmente recogemos algunos estudios centrados en cuestiones teóricas sobre la razón y proporcionalidad, y describimos en términos generales el estudio desarrollado por Sáenz (2007) enfocado en las competencias matemáticas de estudiantes de magisterio. Con base en las consideraciones expuestas estructuramos el capítulo en cinco secciones:

2.1. Estudios sobre el conocimiento matemático común de los profesores en formación inicial o en activo.

2.2. Estudios sobre los subconstructos de los números racionales (contextos escolares y entornos de profesores en formación inicial o en activo).

2.3. Estudios sobre la razón y la proporcionalidad (contextos escolares y entornos de profesores en formación inicial o en activo).

2.4. Estudios teóricos sobre la razón y la proporcionalidad.

2.5. Estudios sobre la competencia matemática de los futuros maestros de educación primaria.

2.1 Investigaciones Centradas en el Conocimiento Matemático Común de los Profesores[17] en Formación Inicial

La síntesis de estudios que recogemos en este apartado se fundamenta en la clasificación de investigaciones hecha por Ponte y Chapman (2008), misma que ha sido publicada en el *Handbook of International Research in Mathematics Education*, y de las cuales hemos revisado aquellas que consideramos pertinentes para nuestra investigación. Hemos adoptado la clasificación de estudios sugerida por estos investigadores, en la que se agrupan las investigaciones según dos tendencias que no son mutuamente excluyentes: (1) las investigaciones centradas en estudiar las debilidades del conocimiento matemático de los profesores en formación inicial, y (2) las investigaciones centradas en el desarrollo de este tipo de conocimiento. Aunque centramos nuestra atención en los estudios sobre el conocimiento matemático y el desarrollo del mismo, también recogemos una breve síntesis de algunos estudios enfocados en el conocimiento didáctico del contenido.

2.1.1 Conocimiento de las Matemáticas para la Enseñanza

Aunque no es nuestro cometido exponer aquí la caracterización que los autores exponen en relación con el conocimiento de las matemáticas para la enseñanza, en el siguiente párrafo indicamos en términos generales en qué consiste este tipo de conocimiento con el fin de introducirlo, en el Capítulo 3 abordamos esta noción con mayor detalle.

El NCTM describe el conocimiento matemático necesario para la enseñanza como: "el contenido y discurso matemático, incluye conceptos y procedimientos matemáticos y las conexiones entre ellos; múltiples representaciones de los conceptos y procedimientos matemáticos, formas de razonar matemáticamente, resolver problemas y comunicar efectivamente las matemáticas en diferentes niveles de formalidad" (NCTM, 1991, p. 132). Más recientemente, Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) lo definen como "Conocimiento de los hechos, conceptos y procedimientos matemáticos y las relaciones entre ellos, conocimiento de las formas en las que las ideas matemáticas pueden ser representadas, y el conocimiento de las matemáticas como una disciplina, en particular, cómo el conocimiento es producido, la naturaleza del discurso en matemáticas, las normas y estándares que dirigen los argumentos y demostraciones" (p.371). Hill, Rowan, y Ball (2005) definen el conocimiento matemático para la enseñanza como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor para llevar a cabo la enseñanza de las matemáticas" (p. 373).

Las diversas propuestas que se dedican a caracterizar el conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, Rowan, y Ball, 2005) o conocimiento de las matemáticas para la

[17] Cuando utilizamos el término "profesores en formación inicial" nos referimos de forma genérica a aquellos estudiantes universitarios que se están formando para enseñar matemáticas en primaria o en secundaria y que están inmersos en un programa de educación formal.

enseñanza (Ponte y Chapman, 2008) concuerdan en que el conocimiento del contenido es un aspecto central del mismo. El conocimiento del contenido es uno de los atributos críticos de los profesores efectivos (Shulman, 1986). Este es el fundamento de la enseñanza porque afecta lo que se enseña y el cómo se enseña. Por consiguiente no es sorprendente que el conocimiento matemático de los profesores en formación continúa siendo un tema central en la investigación sobre la formación de los profesores de matemáticas.

Skemp (1976) señala que tener un fuerte conocimiento de las matemáticas no garantiza que un docente sea un profesor efectivo, pero afirma que aquellos que no poseen tal conocimiento están probablemente limitados en su habilidad para ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión conceptual y relacional de las matemáticas. En este mismo sentido, y menos años atrás, Ball, Lubienski y Mewborn (2001) argumentaron que la calidad de la enseñanza está directamente relacionada con el conocimiento de la materia. Así mismo, de una manera más general Ma (1999) argumenta que los profesores necesitan una comprensión profunda de la matemática elemental para ser profesores efectivos. Esta comprensión va más allá de calcular correctamente y de un análisis razonado para los algoritmos de cálculo. Esta es una comprensión que debe ser profunda, amplia y minuciosa.

La revisión de estudios recientes sobre el conocimiento matemático de los profesores en formación sugiere que hay cierto nivel de consistencia entre las dimensiones del conocimiento descritas por el NCTM (1991) o por Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) recogidas anteriormente y aquellos aspectos explorados por los investigadores. Ejemplos de estudios que tratan algunas dimensiones del conocimiento matemático de los profesores en formación y que resultan de interés para nuestra investigación se recogen en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. *Estudios centrados en el conocimiento matemático de profesores en formación inicial*

Foco de Contenido Matemático	Investigadores
Números decimales	Stacey, Helme, Steinle, Baturo, Irwin y Bana, 2001
Números racionales	Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Harel, Behr, Post y Lesh, 1994; Tirosh, 2000
División de fracciones	Ball, 1990; Wheeler, 1983; Graeber y Tirosh, 1988; Simon, 1993
Razón y proporción	Berk, Taber, Carrino y Poetzl (2009); Ilany, Keret y Ben-Chaim, 2004; Lo, 2004; Miyakawa y Winslow (2009); Monteiro (2003); Simon y Blume (1994)
Resolución de problemas	Chapman, 2004; Pelead y Herschkovitz, 2004

En términos generales estos estudios sugieren una tendencia en la visión del conocimiento matemático de los profesores en formación inicial en términos de conceptos particulares, procedimientos, representaciones y procesos de razonamiento asociados al currículo escolar. Consideran una variedad de tópicos de aritmética, álgebra, geometría, estadística, probabilidad, y procesos como la resolución de problemas y la argumentación. Algunos de los estudios recogidos en la Tabla 2.1 también consideran la visión de la matemática que poseen los profesores en formación, la habilidad para aplicar la matemática y para reflexionar sobre los usos de la misma, en algunos de estos se abordan maneras de promover la comprensión de los conocimientos matemáticos, los presentamos en el apartado 2.1.2. Un tema común de estos estudios es que hay serias cuestiones con el conocimiento matemático de los futuros profesores que los programas de formación deben tratar.

En Ponte y Chapman (2006, 2008) se resumen algunos de los estudios de la Tabla 2.1, los cuales han mostrado reiteradamente preocupación por el conocimiento matemático de los profesores en formación inicial en términos de lo que ellos saben y en cómo aplican ese conocimiento. La mayor parte trata con profesores de primaria en formación inicial y en la Tabla 2.2 resumimos algunas conclusiones que han sido manifestadas en los mismos.

Tabla 2.2. *Conclusiones expuestas en estudios previos sobre el conocimiento matemático de los maestros de educación primaria en formación inicial*

- Conocimientos procedimentales que inhiben el desarrollo de una comprensión profunda de los conceptos relacionados con la estructura multiplicativa de los números enteros.
- Influencia de modelos de conducta primitivos (primarios) para la multiplicación y división. Conocimiento procedimental adecuado pero inadecuado conocimiento conceptual de la división y escasas conexiones entre ambos.
- Representaciones incompletas y comprensión limitada de las fracciones.
- Definiciones e imágenes distorsionadas de los números racionales.
- Falta de habilidad para conectar situaciones del mundo real y cálculos simbólicos.
- Dificultad en el procesamiento de la información geométrica, carencia de conocimientos básicos de geometría y habilidades de pensamiento analítico.

Estudios recientes continúan reflejando la tendencia en la identificación de limitaciones y (o) aumento de preocupación sobre el conocimiento matemático de los profesores en formación inicial. Tres áreas de las matemáticas han recibido una atención especial por parte de los investigadores: funciones, números racionales y problemas verbales. La conclusión predominante de esos estudios es que es necesaria una intervención en la formación de profesores para corregir las deficiencias detectadas.

Algunos estudios sugieren explícitamente aspectos del conocimiento matemático que la formación de profesores debe atender. Por ejemplo, Lo (2004), basada en una investigación de las estrategias de resolución en problemas de proporción, sugirió que los cursos de formación se beneficiarían si se facilita a los estudiantes tareas ricas en contexto y los animan a representar estas tareas con diagramas con el fin de dotar de significado sus resoluciones. Pelead y Herschkovitz (2004) basándose en su estudio sobre la resolución de problemas, han sugerido que los programas de formación de profesores deberían hacer conscientes a los docentes de los conflictos existentes entre la aplicación de un modelo matemático usando consideraciones circunstanciales y los peligros de aplicar un modelo matemático sin la completa comprensión de por qué se usa. Finalmente Tirosh (2000), basada en su estudio sobre el conocimiento de los maestros en formación acerca de las concepciones que tienen los niños sobre la división de fracciones, sugirió que los programas de formación deben familiarizar a los futuros docentes con errores comunes y procesos cognitivos aplicados por los estudiantes cuando dividen fracciones así como en los efectos del uso de tales procesos.

Según Ponte y Chapman (2008) esos estudios proporcionan una imagen importante pero parcial del conocimiento de la matemática de los profesores en formación en términos de la cobertura de los contenidos del currículo de matemáticas. Pero como señalan Ball et al. (2001) lo que se pone de manifiesto a través de esos estudios es que estudiar lo que los profesores saben es insuficiente para resolver el problema de comprender el conocimiento que es necesario para la enseñanza de las matemáticas.

Gracias a los estudios centrados en el conocimiento matemático de los profesores de matemáticas en formación inicial, se ha logrado construir importantes ideas a partir de la gran cantidad de investigaciones conducidas en esta área. Éstos sugieren que los profesores en formación inicial necesitan construir matemáticas significativamente como una manera de desarrollar su conocimiento matemático para la enseñanza. A continuación presentamos estudios que se han preocupado por facilitar o promover este desarrollo.

2.1.2 Desarrollo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza

Adicionalmente a la identificación de cuestiones relacionadas con el conocimiento matemático de los profesores en formación inicial, los estudios recientes también tratan maneras de mejorar este conocimiento o remediar cuestiones específicas del mismo. Estas investigaciones representan formas alternativas para desarrollar un conocimiento de las matemáticas más apropiado para la enseñanza.

En general, éstos incluyen principios para el aprendizaje de los profesores en formación inicial. Por ejemplo, Cramer (2004) identificó las siguientes pautas para guiar los cursos de matemáticas para maestros:

El contenido matemático es incluido en conjuntos de problemas, los estudiantes recogen información, generan hipótesis y verifican conjeturas.

Los estudiantes trabajan en grupos pequeños para optimizar las oportunidades de discutir.

Los cuestionamientos se presentan para ayudar a los estudiantes a construir el conocimiento matemático.

El lenguaje, oral y escrito, de los estudiantes juega un rol importante facilitando la transición desde la exploración y resolución de problemas hacia las abstracciones formales matemáticas.

Se enfatizan las conexiones en y entre tópicos matemáticos.

> *El uso de la tecnología se integra en las actividades cotidianas del curso.* (Cramer, 2004, p.181)

La premisa subyacente de las investigaciones centradas en el desarrollo del conocimiento matemático es no proporcionar a los profesores en formación inicial más matemáticas, sino principalmente, permitirles comprender y reconstruir lo que ellos saben con mayor profundidad y significado (Ponte y Chapman, 2008). Presentamos el tipo de actividades de aprendizaje que se vienen investigando y que se han sugerido como vías prometedoras o efectivas para facilitar el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza.

El estudio de Beckmann et al. (2004) se desarrolla en el contexto curricular estadounidense y en el mismo se señala la importancia de integrar los contenidos y materiales matemáticos de los niveles de educación primaria y secundaria en los cursos de matemática del nivel "college" para profesores en formación inicial. El proyecto desarrollado pretendía mejorar seis cursos, para profesores en formación inicial de primaria y secundaria, mediante el uso de tareas matemáticas que facilitaran la introducción de conceptos importantes. En el estudio se esperaba que los profesores en formación inicial conjeturaran, razonaran, comunicaran ideas matemáticas y escribieran demostraciones válidas.

Una actividad que desarrollaron para promover la elaboración de conjeturas, el razonamiento y la demostración consistió en un problema de probabilidad el cual requería del razonamiento informal de los participantes. Otra actividad se centró en la búsqueda de patrones en la que los participantes iniciaban con un razonamiento informal y que después poco a poco llegaban a formalizar. La tercera actividad se centró en cuestiones de geometría y perseguía el uso de métodos de demostración formal. Esos autores concluyeron que la inclusión de estas actividades en los principales cursos de matemática de formación de profesores promovía en los futuros docentes la adquisición de una comprensión más profunda y conectada de los contenidos matemáticos.

En un estudio similar, Blomm (2004) desarrolló una secuencia de tres cursos, uno de contenido y dos de métodos de enseñanza, para profesores de secundaria en formación inicial. Los cursos estaban diseñados para que los futuros profesores trataran relaciones entre varios contenidos matemáticos y entre éstos con situaciones del entorno. En los cursos centrados en el contenido los participantes debían resolver problemas procedentes de una amplia variedad de fuentes entre las que estaban libros de texto, revistas de enseñanza y de competiciones tipo olimpiadas matemáticas. Desde la perspectiva de la investigadora, conforme el semestre avanzó, las fronteras entre las áreas de contenido, que estaban segmentadas, empezaron a difuminarse y los profesores en formación inicial empezaron a ver las matemáticas como una red de conceptos interrelacionados en lugar de un conjunto de fórmulas y destrezas aisladas.

A diferencia de los estudios de Beckmann et al. (2004) y Blomm (2004) que tratan con varias áreas de contenido matemático la mayoría de las investigaciones se centran en un tópico o concepto específico del currículo escolar. Sin embargo, como indican Ponte y Chapman (2008) aplican diferentes estrategias para desarrollar el conocimiento de los profesores en formación inicial. Ejemplos de esos métodos se presentan a continuación según 5 enfoques distintos, siendo la investigación de Ilany, Keret y Ben Chaim (2004), incluida en el enfoque 1, la que hemos tomado como principal referencia para el desarrollo de nuestra investigación. Posteriormente recogemos las características principales de los estudios contemplados en los otros enfoques.

Enfoque 1. En este enfoque se consideran estudios que utilizan un tipo particular de tareas matemáticas como medio para promover el desarrollo del conocimiento matemático de los futuros maestros.

La investigación desarrollada por Ilany et al. (2004) está centrada en el uso de, lo que los autores describen como, auténticas actividades investigativas, las cuales forman parte de un modelo para la enseñanza de los tópicos de razón y proporción en el contexto de la formación de maestros. Este modelo consiste en 4 componentes. La primera componente incluye las auténticas actividades investigativas de tasas, razón, escalas y proporción indirecta. Simultáneamente, los participantes deben leer artículos matemáticos y didácticos acerca de la razón y proporción. El segundo componente incluye la estructura de la actividad, esto es, un contexto familiar a los participantes y contiene problemas de valor ausente, comparación numérica, predicción y comparación cualitativa. Esos problemas requieren comparaciones que no dependen de valores numéricos específicos. El tercer componente implica la estructura de la unidad didáctica, incluyendo elementos como el trabajo en grupo. El cuarto componente trata de la evaluación del conocimiento de los participantes. Los resultados indicaron que este método fue exitoso produciendo cambios en la comprensión de la razón y proporción de los maestros en formación.

En el apartado 2.3.2 describimos con más detalle la propuesta desarrollada por Ilany et al. (2004) debido a que ha sido uno de los estudios más relevantes para la realización de nuestra investigación. Compartimos con estos autores la postura funcional, sobre el conocimiento matemático de los futuros maestros, asumida en el estudio.

En el estudio de Heaton y Mickelson (citado en Ponte y Chapman, 2008), el enfoque se concreta en dos tareas concebidas con el objetivo de desarrollar el conocimiento estadístico de maestros de primaria en formación inicial. En la primera tarea los estudiantes tuvieron que desarrollar una investigación estadística, teniendo así que plantear preguntas, identificar variables, planear y llevar a cabo la recolección de datos, ordenarlos y discutir los resultados. En la segunda asignación, los participantes tuvieron que desarrollar y aplicar en un sitio de prácticas una unidad de investigación estadística que debían realizar los niños. El propósito de ambas tareas fue el mismo, implicar a los participantes en un aprendizaje auténtico de contenidos y procesos estadísticos a través de la investigación.

En el estudio de Chapman (2007) se recurrió a la discusión colectiva de problemas aritméticos verbales como la base de un enfoque para facilitar el desarrollo del conocimiento matemático de futuros maestros de primaria en relación con la enseñanza de las operaciones aritméticas. Las tareas se agruparon en tres clases, según permitiesen a los estudiantes alcanzar alguno de los siguientes cometidos: (a) reflexionar sobre su conocimiento inicial, (b) explorar problemas verbales aritméticos desde múltiples perspectivas, y (c) aplicar el conocimiento resultante o adquirido. Los resultados de la investigación indican que las tareas realizadas pueden proporcionar una base efectiva para ayudar a los futuros maestros a desarrollar una profunda comprensión de las operaciones aritméticas, las relaciones entre éstas así como el conocimiento didáctico para la enseñanza de las operaciones aritméticas.

Enfoque 2. Otra estrategia seguida en algunos estudios para promover el desarrollo del conocimiento matemático consiste en la elaboración de diferentes explicaciones para un concepto matemático y en el debate de las mismas, esta estrategia ha sido utilizada en el estudio de Kinach (citado en Ponte y Chapman, 2008). El investigador llevó a cabo un experimento de enseñanza en un curso de métodos para docentes de matemática de secundaria, en éste los participantes aportaban diferentes explicaciones para la adición y sustracción de números enteros.

Enfoque 3. Este está centrado en la auto-reflexión e investigación de conceptos y procesos matemáticos. Chapman (citado en Ponte y Chapman, 2008) investigó el conocimiento de 28 profesores de secundaria en formación sobre la resolución de problemas, esta investigadora estudió la contribución de actividades de reflexión e investigación en el crecimiento del conocimiento de los profesores en relación con la resolución de problemas. Las actividades incluyeron: reflexión del conocimiento de los profesores en formación inicial sobre los problemas y la resolución de los problemas, comparación de problemas, reflexión de los procesos aplicados en la resolución de problemas describiendo y analizando narraciones de la experiencia vivida al resolver los problemas, representando los procesos con organigramas, trabajando de manera cooperativa y creando un modelo de resolución de problemas. Los resultados mostraron que al inicio de la experimentación, la mayoría de los participantes, consideraban los problemas como situaciones rutinarias y que percibían los procesos de resolución de problemas de forma consistente a través de procedimientos y técnicas mecanizadas. Después de las actividades de reflexión-investigación, el pensamiento de los profesores en formación inicial sobre los problemas, se acercó más a la perspectiva de un resolutor ideal.

En otro estudio similar, Chapman (2004) abordó la resolución de problemas aritméticos verbales con maestros de primaria en formación inicial. El propósito de tal investigación era promover la comprensión de este grupo en los tópicos antes mencionados. Las acciones seguidas en la intervención incluyeron la creación y comparación de problemas verbales de estructura similar, análisis y representación de problemas verbales con operaciones aritméticas enfocándose en la estructura del mismo y el significado de las operaciones, adicionalmente los estudiantes debían escribir artículos sobre la experiencia vivida. Los resultados indicaron que después de la intervención los maestros en formación mostraron una mayor comprensión de las operaciones aritméticas y de los problemas verbales, traducida en la exposición de diversas formas de representación del significado de las operaciones en distintos tipos de problemas verbales.

Enfoque 4. Este se centra en el uso de la tecnología para explorar conceptos matemáticos. Por ejemplo, en el estudio de Bowers y Doerr (citado en Ponte y Chapman, 2008) contaron con la participación de profesores en formación inicial de secundaria en actividades que implicaban el uso de la tecnología como una forma de desarrollar su comprensión de nociones de cambio como la velocidad. El objetivo fue introducir conflictos en el conocimiento que poseían y usar la tecnología para hacerles frente y resolverlos. Se diseñaron tres secuencias de enseñanza, las dos primeras consideraban análisis de investigaciones sobre el movimiento lineal y parabólico, además se procuró explorar la riqueza del teorema fundamental del cálculo, a través del estudio de las relaciones entre la gráfica de la velocidad y la de la función posición (distancia); en la tercera secuencia los participantes debían diseñar, implementar y reflexionar sobre un conjunto de lecciones, basadas en la tecnología, y dirigidas a la enseñanza de tales nociones a estudiantes de secundaria. Los resultados indicaron que el esfuerzo de los participantes para resolver sus propias dificultades de comprensión les permitieron finalmente desarrollar un conocimiento profundo de las cantidades representadas en las gráficas de velocidad y de posición, y de la relación entre las mismas.

Enfoque 5. Los estudios considerados en este enfoque se centran en el uso de mapas conceptuales para promover el desarrollo del conocimiento matemático de los profesores en formación inicial. Por ejemplo, el estudio de Bolte (citado en Ponte y Chapman, 2008) se centró en ampliar y evaluar la integración y expresión del conocimiento matemático de los profesores en formación. Se usaron mapas conceptuales y ensayos al principio de la lección como una forma de medir o revisar lo aprendido, durante la enseñanza para desarrollar una mejor comprensión o al final de la lección como una actividad de evaluación. Después de terminar una versión del mapa conceptual los participantes debían hacer un ensayo en donde explicaran y clarificaran las relaciones expresadas en el mapa conceptual. Los resultados indicaron que los participantes percibieron que la construcción del mapa conceptual y del ensayo los animó a reflexionar sobre su conocimiento, además se promovió la habilidad para establecer conexiones matemáticas. El autor concluyó que el uso de mapas conceptuales y ensayos interpretativos constituye una oportunidad para que los profesores en formación maduren matemáticamente y para que experimenten un método alternativo de enseñanza y evaluación.

Los estudios, incluidos en los enfoques anteriores, muestran una relación positiva entre el trabajo desarrollado en el curso de formación matemática y la comprensión matemática de los profesores en formación inicial, esta relación positiva se da cuando el curso incorpora principios como los sugeridos por Cramer (2004). Los estudios sugieren que una variedad de enfoques podrían conducir positivamente el aprendizaje de los profesores en formación. Por lo tanto, aunque la comprensión de los profesores en formación inicial acerca de las matemáticas escolares sea deficiente con experiencias apropiadas ellos pueden hacer la transición hacia una profunda y rica comprensión de al menos algunos tópicos. Esos estudios también señalan una tendencia actual de que los profesores en formación inicial exploren más profundamente ideas matemáticas del currículo escolar. Se incita a los profesores en formación inicial a revisar el contenido "familiar" de una manera "no familiar", con el objetivo de obtener el significado subyacente de los conceptos o procedimientos matemáticos.

Un propósito principal de los estudios centrados en el desarrollo del conocimiento matemático entonces es considerar enfoques o perspectivas para ayudar a los profesores en formación inicial a comprender las matemáticas que ellos enseñan. Pero, en general, según Ponte y Chapman (2008) es necesaria más investigación acerca de cómo enfoques específicos ajustan los diferentes objetivos y necesidades de los grupos de profesores en formación inicial, de primaria y secundaria, con distintos fundamentos y en diferentes sistemas educativos.

Consideramos que nuestro estudio es una investigación centrada en el desarrollo del conocimiento matemático de los maestros de primaria en formación inicial debido a que gran parte de nuestro interés ha sido estudiar cómo se desarrolla una secuencia de trabajo en el aula que ha sido elaborada con el objetivo de permitirles comprender y reconstruir lo que los futuros maestros saben en relación con la razón y la proporcionalidad con mayor profundidad y significado.

2.2 Investigaciones Sobre los Subconstructos de los Números Racionales

En la literatura de investigación centrada en los números racionales desarrollada en la década de los años 70 surgió la noción *subconstructos de los números racionales* (Kieren, 1976) para referirse a los distintos significados que se le asignan a la expresión $\frac{a}{b}$, o fracción, cuando ésta representa a un número racional y se emplea para organizar distintas situaciones.

Kieren (1976), consideró siete interpretaciones o subconstructos del número racional: la aritmética de las fracciones, como clase de equivalencia de las fracciones, como razón, como operador, elementos de un cociente, como medida y como fracción decimal. Clasificación que afina en la década de los 90, considerando solamente cuatro subconstructos: cociente, medida, operador y razón.

Freudenthal (1983), considera cuatro significados fundamentales para la fracción: parte-todo, cociente, comparación y fracción-magnitud. Por su lado, Behr, Harel, Post y Lesh (1992), proponen cinco subconstructos definidos en el *Rational Number Proyect* (RNP)[18], éstos son: parte-todo, cociente, medida, operador y razón. En Felip y Castro (2003) se recoge una descripción de cada uno de los subconstructos que aparecen referenciados en estudios relevantes sobre los números racionales.

[18] En la página http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/ se encuentra amplia información acerca de este proyecto.

Uno de los focos de contenido matemático de nuestra investigación es el subconstructo de razón, en el que la fracción $\frac{m}{n}$ representa una comparación multiplicativa entre dos cantidades.

Debido a que la noción de razón, desde la Didáctica de la Matemática, se enmarca como uno de los subconstructos de los racionales, decidimos iniciar nuestra búsqueda de antecedentes en relación con estas interpretaciones. Centramos la atención en la búsqueda de estudios en los cuales participaran tanto niños como profesores en formación inicial. En los siguientes apartados recogemos una síntesis de las cuestiones más relevantes manifestadas en los mismos.

2.2.1 Aspectos Cognitivos de Niños o Adolescentes

Existe una multitud de estudios centrados en los números racionales, no es nuestra intención presentar una imagen comprensiva de este amplio campo de investigación sino que nos aproximamos al mismo a través de los estudios centrados en los errores y dificultades que experimentan los estudiantes en relación con diferentes subconstructos de los números racionales, y a través de aquellos estudios que respaldan la necesidad de explorar la comprensión de subconstructos distintos al parte-todo.

Sobre errores y dificultades

Como señala Gairín (1998) la mayor parte de las investigaciones sobre los números racionales se han desarrollado con niños de educación primaria, motivo por el cual tales estudios se enfocan en problemáticas asociadas al entorno de enseñanza-aprendizaje en el que tiene lugar la instrucción. A partir de la completa revisión realizada por Gairín (1998) reseñamos los resultados recogidos por este investigador con el objetivo de presentar una panorámica de las dificultades que enfrentan los escolares con los números racionales.

- Existe desconexión entre los diferentes significados de la fracción, la cual se aprecia tanto en producciones individuales como colectivas. Según Haseman (citado en Gairín, 1998) el significado de la fracción depende de la clase de problema y forma de presentación del mismo; variaciones que no producen conflictos en los razonamientos de los estudiantes dado que éstos asignan un "estatus genérico de matemáticas".

- Según Gairín (1998) existen divergencias en relación con las posturas asumidas por los investigadores acerca de cuál es el significado de fracción predominante en los escolares; de modo que para un grupo de investigadores el significado prioritario de la fracción es el de la relación parte-todo en contextos discretos y continuos, mientras que otro grupo de investigadores identificó ideas sobre razón y proporción como interpretaciones de la fracción predominantes en los adolescentes.

- Según Wearne, Hiebert y Taber (citado en Gairín, 1998) las fracciones decimales tienen aspecto discreto al considerar numerador y denominador como entes numéricos diferenciados, pero tienen aspecto continuo al considerar la fracción como un solo ente numérico, y es este aspecto continuo de los decimales el que genera dificultades y resulta difícil de comprender para los escolares.

- Para los escolares es difícil asimilar que un número tenga más de una representación, y en el caso de los racionales se utiliza tanto la notación fraccionaria como la notación decimal para representarlos (Owens y Super, citados en Gairín, 1998)
- De acuerdo con diferentes investigadores los escolares sobregeneralizan el significado de las representaciones simbólicas, operaciones, relaciones de orden, y otras propiedades de los números naturales para los números racionales (Gairín, 1998).

Propuestas alternativas para la enseñanza del número racional

Las diversas dificultades que experimentan los escolares con los números racionales ha promovido la exploración de alternativas de enseñanza de este tópico, las cuales abarcan una multitud de enfoques para abordar la enseñanza de los números racionales. Parte de los estudios se han preocupado por ofrecer propuestas didácticas centradas en alguno de los subconstructos de los racionales. En este sentido Kieren (1976) afirma que es preciso comprender cómo se relacionan los diferentes significados de las fracciones y proporcionar a los estudiantes experiencias con todas las interpretaciones para así construir un significado efectivo de los números racionales. Por su lado y en el mismo sentido que Kieren (1976); Behr, Harel, Post y Lesh (1992) sostienen que un aprendizaje significativo del número racional se fundamenta en la comprensión de todos los significados de todos los subconstructos. Compartimos la postura de Llinares y Sánchez (1988) quien sostiene que uno de los objetivos a largo plazo del proceso de enseñanza del número racional ha de ser la integración de todos los subconstructos, ésta es una cuestión que el maestro en activo ha de tener en consideración y en consecuencia creemos que es justificable que este objetivo de aprendizaje se traslade al contexto de la formación de maestros.

La investigación de Vizcarra (2007) se ha centrado en mejorar la enseñanza del número racional positivo en la educación primaria, para ello diseña, implementa y evalúa una propuesta didáctica con alumnos cuyas edades están comprendidas entre los 9 y 11 años. La propuesta didáctica elude el significado de relación parte-todo y, en su lugar, utiliza los significados de medida y de cociente partitivo para introducir la fracción, y el número decimal, y para conectar significativamente ambos sistemas de representación. Del estudio teórico se detecta, en la primera mitad del siglo XX, que el significado denominado relación parte-todo surge asociado a las prácticas de enseñanza con el propósito de eludir los procesos de medida en el aula. Según Vizcarra (2007) este significado, que no pertenece a la fenomenología histórica del número racional, permite introducir de forma inmediata la representación simbólica de la fracción pero, a su vez, provoca graves limitaciones de comprensión.

2.2.2 Conocimiento Matemático Común de Profesores en Formación Inicial o en Activo

Después de la revisión de la literatura de investigación sobre los números racionales hemos comprobado que los trabajos realizados en el contexto de maestros en ejercicio o en formación (Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Harel, Behr, Post y Lesh, 1994) no se han orientado, exclusivamente, al estudio del razonamiento proporcional, sino que tratan con varios constructos de los números racionales (Tirosh y Graeber, 1990a, 1990b). A continuación presentamos una breve exposición de las investigaciones que hemos consultado.

Los estudios que involucran los números racionales y la formación de maestros tienden a enfocarse sobre las fracciones. Sin embargo, Stacey et al. (2001) se centraron sobre los decimales. En su investigación sobre la comprensión de los decimales por parte de maestros de primaria concluyeron que 1 de cada 5 participantes carecen de un buen conocimiento del contenido de los decimales y además que podrían transferir este conocimiento limitado a sus estudiantes. Los participantes de este estudio fueron 553 maestros en formación de cuatro universidades en Australia y Nueva Zelanda y 25 maestros que regresaban para un curso de mejora. La clasificación de los patrones del pensamiento de los maestros sobre los decimales incluyó longitud del decimal, truncamiento del decimal y localización del cero en el decimal.

Algunos de los estudios llevados a cabo en el contexto de la formación de maestros se han centrado en aspectos tales como: las justificaciones que éstos daban a la división de fracciones (Ball, 1990; Wheeler, 1983), su actuación en la resolución de problemas verbales que implicaban la multiplicación y división de fracciones (Graeber y Tirosh, 1988), y sus creencias acerca de la multiplicación y división (Tirosh y Graeber, 1990a, 1990b). Tales estudios han mostrado que el conocimiento que los maestros en formación poseen sobre los números racionales es procedimental y escasamente conectado. Aunque muchos de estos sujetos podían hacer cálculos con números racionales, mostraron dificultades significativas en la resolución de los problemas verbales de multiplicación y división, y sus creencias sobre las operaciones de multiplicación y división de racionales se basaban exclusivamente en las operaciones con números naturales (Ball, 1990; Simon, 1993). Resultados de tales estudios muestran que tanto los maestros activos como aquellos en formación lidian con los mismos conceptos y manifiestan las mismas ideas primitivas y falsas concepciones que los estudiantes de primaria o secundaria.

Los profesores de matemática, implicados en los programas de formación de maestros de primaria, a menudo expresan su insatisfacción con el conocimiento de las matemáticas y las actitudes hacia las mismas que muestran los futuros maestros. El conocimiento matemático de los maestros en formación frecuentemente es descrito como insuficiente (Ball, 1990; Graeber, Tirosh, y Glover, 1989; Simon, 1993; Wheeler, 1983). Además algunas investigaciones reportan que la visión de las matemáticas, que estos estudiantes poseen, corresponde a un cuerpo estático de conocimientos compuestos de hechos, métodos y reglas comprendidas por una pequeña porción de la población, mientras que al resto no le gustan las matemáticas y creen que ellos están condenados a no tener éxito (Tirosh, Graeber y Wilson, 1998).

De acuerdo con Durmus (2005) la insuficiencia del conocimiento didáctico y matemático de los maestros es una de las causas primarias de las dificultades que experimentan los estudiantes en las aulas. En el mismo sentido que Durmus, tiempo atrás, Lester (1984) plantea que uno de los motivos por los cuales los niños de primaria encuentran dificultades con los números racionales es que sus profesores tienen una comprensión inadecuada de los conceptos de los números racionales y disponen de destrezas limitadas para tratar con cuestiones procedimentales asociadas a los racionales.

Las competencias matemáticas de los maestros juegan un rol importante como fuente de las dificultades que los estudiantes en la escuela primaria tienen con los números racionales.

Gairín (1998) recoge una síntesis sobre los resultados derivados de diversas investigaciones centradas en estudiar el conocimiento matemático de los futuros maestros de educación primaria acerca de los números racionales. Entre las ideas que expone Gairín (1998) se encuentran las que indicamos a continuación:

- Muchos de los futuros maestros tienen dificultades en resolver cuestiones y problemas sobre números racionales y, en algunos casos, aunque éstos aporten respuestas correctas las justificaciones que sustentan tales respuestas no son aceptables.
- Los conocimientos personales sobre los números racionales de los futuros profesores (construidos a través de sus experiencias como estudiantes) tienden a estar limitadas al uso de reglas.
- Existe un predominio del significado parte-todo en los conocimientos personales de los futuros maestros.
- Los estudiantes para maestro tienen mayores dificultades en las tareas con las fracciones mayores que la unidad y en aquellas que exigen identificar la unidad.
- Los futuros profesores tienen un conocimiento simbólico y algorítmico aceptable de las fracciones, sin embargo no parece que logren establecer conexiones entre ellos.

El estudio de Gairín (1998) se realiza con maestros de primaria en formación inicial y se centra en los sistemas de representación de números racionales positivos. Consiste en una propuesta didáctica que pretende: (a) incrementar la comprensión de los futuros maestros sobre los números racionales positivos mediante el fortalecimiento de las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal, y (b) potenciar la reflexión, desde su posición de aprendices, sobre un proceso de enseñanza-aprendizaje cuyas herramientas conceptuales son las de la comprensión, modelo y sistema de representación. En dicha propuesta se concreta un modelo y se construyen dos sistemas de representación de cantidades no enteras de magnitud; de este modo se logra significar a las expresiones fraccionaria y decimal con cocientes, así como poner de manifiesto que esos dos tipos de expresiones admiten una estructura numérica subyacente similar. Se concluye que cuanto mayor es la comprensión del modelo por parte de los futuros maestros, más eficaces se muestran en la detección y diagnóstico de los errores de los escolares y más tienden a ofrecer razonamientos sustentados en el mundo de los objetos; mientras que los estudiantes para maestro que muestran una débil comprensión del modelo, llegan a aceptar como correctas respuestas erróneas de los escolares y tienden a usar el lenguaje simbólico en las explicaciones que ofrecen a los niños.

Sánchez y Llinares (1992), en su estudio sobre las fracciones, concluyen que la comprensión de los conceptos implicados influye en la estrategia instruccional que el profesor utiliza y sugieren que la formación inicial del profesorado debería concentrarse en desarrollar el conocimiento acerca de la relación entre procesos matemáticos y modelización de dichos procesos.

2.3 INVESTIGACIONES SOBRE LA RAZÓN Y LA PROPORCIONALIDAD

Investigadores como Lamon (2007) o Modestou y Gagatsis (2010) sugieren que es preciso aclarar la distinción entre el razonamiento proporcional y la comprensión de la proporcionalidad. En términos generales, pues en el Capítulo 4 detallamos esta cuestión, el razonamiento proporcional está descrito a partir de las actuaciones de los escolares en dos tipos de problemas, valor ausente y comparación; mientras que la proporcionalidad está vinculada a modelos matemáticos como la función lineal por lo que contempla otros aspectos cognitivos derivados de la multiplicidad de representaciones y de las situaciones organizadas por esta noción.

En vista de lo expuesto aclaramos que en ocasiones utilizamos los términos “razón y proporcionalidad” y no “razonamiento proporcional”, noción usada en la mayoría de las investigaciones con escolares, debido a que guardan un carácter más amplio y general que permite situar estudios en el contexto de la formación inicial de maestros que abordan otras cuestiones relacionadas con los contenidos que van más allá de los requeridos en el razonamiento proporcional.

2.3.1 Aspectos Cognitivos de Niños o Adolescentes

El razonamiento proporcional comprende una red de conocimientos y relaciones que constituyen una pieza fundamental en el desarrollo cognitivo de los escolares de diferentes niveles educativos, constituye además la base de otros conocimientos centrales en la educación matemática tales como las funciones lineales y se relaciona con otras áreas del currículo escolar dadas las aplicaciones en la química, física, ciencias sociales, entre otras (Lamon, 2007; Vergnaud, 1983). Estas son sólo algunas razones por las cuales se ha desarrollado ampliamente la investigación en relación con estos contenidos matemáticos. A continuación recogemos una síntesis de las aportaciones y cuestiones más destacadas sobre las que apuntan algunos de los estudios que han sido considerados referentes de nuestra investigación y que han tenido amplia difusión en revistas y otras publicaciones de impacto.

El razonamiento proporcional[19] ha sido estudiado ampliamente por algunos investigadores (Inhelder y Piaget, 1958; Noelting, 1980a; Noelting, 1980b; Karplus, Pulos y Stage, 1983; Tourniaire y Pulos, 1985; Lamon, 1993; Fernández, 2001; McLaughlin, 2003; Rapetti, 2003; Bjorg, 2005; Alatorre y Figueras, 2005; Ruiz y Valdemoros, 2006; Modestou y Gagatsis, 2007) quienes han planteado su propia visión acerca de lo que significa razonar proporcionalmente.

En las investigaciones efectuadas por los autores citados anteriormente, y con el fin de caracterizar el razonamiento proporcional que aplican los sujetos, se ha recurrido al planteamiento de tareas matemáticas que se diferencian en aspectos tales como el contexto, en la estructura numérica o en los tipos de razones involucradas.

De este modo en las investigaciones iniciales, al menos hasta las realizadas en la década de los 80, podemos reconocer tres tipos de tareas matemáticas utilizadas para caracterizar el razonamiento proporcional de los sujetos. En primer lugar los problemas que requieren de la comprensión de algunos principios de la física, adicionalmente a la comprensión de la proporcionalidad (Inhelder y Piaget, 1958), en segundo lugar se reconocen las tareas de tasas en las cuales aparecen razones relativas a objetos de distinta clase y bajo contextos de distinta índole, por ejemplo Quintero y Schwartz (citados en Tourniaire y Pulos, 1985) usan problemas que relacionan pacientes y médicos; y por último los problemas de mezclas (Noelting, 1980a, 1980b; Karplus, Pulos y Stage, 1983) los cuales, según Tourniaire y Pulos (1985) difieren de los problemas de tasas en varios sentidos; en los problemas de mezclas se constituye un nuevo objeto, por ejemplo vasos con agua y vasos con zumo de naranja originan un refresco de naranja, en contraste en los problemas de tasas en los cuales no emergen objetos nuevos, luego en los problemas de mezclas se requiere que el sujeto comprenda lo que sucede cuando los dos elementos son mezclados, y por último en la mayoría de los problemas de mezclas las cantidades están expresadas en la misma unidad mientras que en los problemas de tasa las cantidades son expresadas en diferentes unidades.

Algunos investigadores (Tourniaire y Pulos, 1985; Karplus, Karplus y Wollman, 1974; Cramer y Post, 1993; Post et al., 1988; Singer y Resnick, 1992), plantean otras tipologías de problemas tales como de probabilidad, valor ausente, comparación y predicción numérica, problemas tipo “por cada” o “de cada” sin embargo en muchas ocasiones se refieren a problemas, esencialmente del mismo tipo de los ya reportados previamente. Entre las tipologías recientes y mencionadas en trabajos más actuales (A. Fernández, 2001; Allain, 2000) está la clasificación de Lamon (1993), quien plantea una agrupación de los problemas con base en aspectos semánticos y matemáticos, tal clasificación resulta en 4 categorías, a saber: problemas bien compactos, parte-parte-todo, conjuntos asociados y los ampliadores o reductores que están vinculados esencialmente con la noción de semejanza.

Al margen de las variaciones y características particulares de los diferentes tipos de problemas, los investigadores (Tourniaire, 1986; Lamon, 1993, Karplus et al., 1983,

[19] Al hablar de razonamiento proporcional no lo hacemos en el mismo sentido que cuando se hace referencia al razonamiento inductivo o deductivo.

Noelting, 1980a; Noelting, 1980b; A. Fernández, 2001; Rapetti, 2003; Alatorre y Figueras, 2005; Modestou y Gagatsis, 2007) se han interesado por analizar las actuaciones de los sujetos; en este sentido, la pregunta: ¿Cómo resuelven el problema sujetos con diferentes conocimientos y edades? aparece reiteradamente en los reportes de investigación. En consecuencia la descripción cualitativa del razonamiento proporcional en términos de estrategias y errores, así como la identificación de dificultades relativas a las tareas de proporcionalidad ha sido uno de los focos primordiales y constantes en estos estudios.

Los trabajos previos han hecho referencia a estrategias de resolución, errores y obstáculos que niños y adolescentes manifiestan ante estos tipos particulares de problemas. Por ejemplo, a partir del análisis fenomenológico de Freudenthal (1983) en el que, entre otras cosas, se reconoce dos tipos de razones (internas y externas), algunas investigaciones (Noelting, 1980a; Noelting, 1980b; Karplus et al., 1983) reportan dos estrategias básicas que examinan la manera en la que los sujetos relacionan las cantidades del problema, según pertenezcan al mismo o a diferente espacio de medida. En relación con las dificultades que experimentan los estudiantes, recientemente Modestou y Gagatsis (2007) proporcionan argumentos para afirmar que los errores que cometen los alumnos al trabajar con la proporcionalidad no son casuales, los resultados de su investigación revelan que la aplicación errónea del razonamiento proporcional en situaciones que no son directamente proporcionales subyace a la existencia de un obstáculo epistemológico de linealidad.

A continuación detallamos con mayor detenimiento dos investigaciones realizadas en el marco de la investigación en Didáctica de la Matemática en el contexto español. El estudio de A. Fernández (2001) ha sido realizado con niños de primaria y ha resultado ser un referente trascendental para nuestra investigación dada la exhaustiva descripción de aspectos teóricos y empíricos recogidos por el investigador. El segundo estudio ha sido realizado recientemente por Oller (2012) y se sitúa en el contexto de la educación secundaria, esta investigación aporta, entre otros, ricos elementos históricos vinculados a las nociones de razón y proporción, los cuales han contribuido a complementar la formación personal de la investigadora sobre esos tópicos.

La investigación de A. Fernández (2001) se desarrolla en el entorno de la educación primaria, este investigador utiliza el marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales el cual promueve "la elaboración de marcos explícitos sobre los procesos que se desarrollan cuando se enseña en el sistema educativo unos contenidos matemáticos concretos a unos estudiantes concretos y lo que se pretende es que esos modelos sean adecuados para los fenómenos objetos de estudio" (A. Fernández, 2002, p. 29)

Como parte de la elaboración de uno de los componentes del marco teórico-metodológico elegido se realizó un análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad, basado en el trabajo de Freudenthal (1983) y mejorado por el investigador. Uno de los resultados de mayor peso, recogido en este análisis fenomenológico, se refiere a la organización de las situaciones o problemas que implican la noción de razón en tres tipos: exposiciones, composiciones y constructos; y se describe en cada caso la relación de proporcionalidad considerando parejas de razones de cada tipo.

La parte experimental de la investigación se realiza en dos fases, una centrada en la administración y análisis de diferentes versiones de un cuestionario constituido por tareas sobre razón y proporción, las cuales se enfocaban en seis temas: escalas, densidad, comparación de razones, tanto por cien, cuarta proporcional y proporcionalidad. La segunda fase del estudio contempló la selección de estudios de caso que se abordaron mediante entrevistas clínicas y el análisis correspondiente de las mismas.

El investigador concluye que el estudio de la razón, la proporción y la proporcionalidad se puede iniciar en los primeros niveles de la educación primaria a través de precursores de estas nociones matemáticas, la identificación de los mismos constituye uno de los aportes de esta investigación, estos precursores son: las comparaciones cualitativas, como promotoras de las comparaciones cuantitativas, distintas estrategias de normalización de razones que favorecen la comparación de las mismas, el uso de expresiones tales como "relativamente" "en relación con", entre otras; la visualización de razones mediante distintas representaciones. Otro de los aportes de esta investigación se refiere a la elaboración de un modelo de análisis y clasificación de actuaciones de los estudiantes, el cual constituye una herramienta que permite examinar y categorizar las actuaciones de los alumnos al resolver tareas o problemas en los que está involucrada la razón, la proporción o la proporcionalidad.

La investigación de Oller (2012) se centra en desarrollar y aplicar una propuesta curricular sobre la proporcionalidad aritmética, dirigida a estudiantes de primero de la ESO, la cual procura contribuir en la superación de las dificultades que tradicionalmente experimentan los estudiantes en relación con este tópico, a la vez que se promueve la comprensión que éstos poseen sobre la proporcionalidad, específicamente en relación con el uso de las estructuras multiplicativas subyacentes a la noción de proporcionalidad y la aplicación de las mismas en la resolución de problemas. La propuesta didáctica se articula en torno a la razón y la condición de regularidad, la proporcionalidad directa, los porcentajes, y la proporcionalidad inversa y se fundamenta en un análisis histórico de textos que han tratado los contenidos en cuestión. Entre los resultados de esta investigación se indica que la propuesta ha contribuido a que los estudiantes aborden los problemas dejando de lado el uso de procedimientos como la regla de tres. Sin embargo, los estudiantes han manifestado dificultades en el tratamiento de aspectos conceptuales como la consideración de la razón como "tanto por uno".

2.3.2 Conocimiento Matemático Común de Profesores en Formación Inicial o en Activo

El razonamiento proporcional es complejo y ayudar a los estudiantes a desarrollarlo no es una tarea fácil del profesor y el éxito de esta empresa depende en gran medida del conocimiento adecuado del docente en relación con los contenidos y procesos matemáticos relacionados con la razón y la proporcionalidad. Sin embargo, en contraste con la gran cantidad de investigaciones que se han dedicado a estudiar el razonamiento proporcional de los escolares existen pocos estudios que se han interesado por estudiar el mismo tópico en el contexto de la formación de maestros o de profesores de secundaria (Lobato, Orrill, Druken y Jacobson, 2011). Al igual que los estudios centrados en otros subconstructos de los números racionales, las investigaciones centradas en el razonamiento proporcional de futuros profesores sugieren que muchos profesores de primaria y secundaria en formación inicial y en activo manifiestan una comprensión deficiente de la razón y la proporcionalidad basada en conocimientos procedimentales como el producto cruzado o la regla de tres de los cuales desconocen la fundamentación (Harel y Behr, 1995; Riley, 2010). Las concepciones erróneas, dificultades y obstáculos relativos al razonamiento proporcional que han sido identificadas en los estudios con niños o adolescentes también han sido expresadas por profesores en activo o en formación inicial (Cramer et al., 1993; Post, Harel, Behr y Lesh, 1988; Simon y Blume, 1994; Valverde, 2008).

El ámbito de la investigación del conocimiento matemático para la enseñanza de futuros profesores en el campo de la razón y la proporcionalidad, también contempla estudios que se han centrado en el desarrollo del conocimiento matemático de los futuros docentes. En este apartado sintetizamos cinco investigaciones (Ben-Chaim, Ilany y Keret (2008); Berenson y Nason, 2003; Berk, Taber, Carrino y Poetzl, 2009; Monteiro, 2003; Rivas y Godino, 2010; Simon y Blume, 1994) que han resultado de utilidad para nuestra investigación no sólo porque se centran en los mismos contenidos matemáticos sino por las tareas utilizadas para explorar y desarrollar el conocimiento de los estudiantes para maestro, la metodologías de investigación seguida o por las dinámicas de trabajo en el aula realizadas.

Desarrollo del Conocimiento Matemático Común

Simon y Blume (1994) proponen la modelización matemática como un componente central de una intervención didáctica dirigida a promover la comprensión de la razón como medida. Los autores emplearon un experimento de enseñanza de “todo el grupo”, en una clase de matemáticas de futuros maestros de primaria para estudiar el desarrollo de la habilidad para identificar una razón como la medida apropiada de un atributo dado (razón como medida). Estudios previos así como los resultados de un pre-test para este estudio demuestran que los estudiantes a menudo recurren a comparaciones aditivas cuando las comparaciones multiplicativas son las apropiadas. El análisis de las dificultades con las que se encontraron los estudiantes cuando consideraron la razón como medida de un atributo de una situación física, conduce a la hipótesis de que una comprensión de la razón como medida requiere, además de una comprensión de aspectos de las relaciones multiplicativas, una comprensión de la modelización matemática. Este estudio sugiere que estudios previos no han revelado este tipo de conexión (entre procesos y contenidos matemáticos) porque estas conexiones no son observadas usualmente. Según los autores cuando la instrucción sobre la razón y proporción se centra en escribir razones o en buscar el valor ausente de una cuarta proporcional se hace un énfasis procedimental, luego la modelización matemática o validación de modelos no son esenciales ni relevantes. En contraste, problemas situados en contexto como “La cuesta de esquí”, se proponen como una forma de motivar a los estudiantes a generar un modelo matemático para el problema.

Los autores ofrecen algunas implicaciones para la formación de maestros, entre las cuales están: (1) los maestros deberían tener la oportunidad de construir y desarrollar a fondo las matemáticas que ellos necesitarán para enseñar; (2) idealmente, su conocimiento matemático debería extenderse más allá de lo que deberían enseñar; y (3) esto no se logra mediante la exigencia de un mayor nivel de matemáticas o de un mayor número de cursos de matemáticas tradicionales. Muchos profesores de matemáticas universitarios (National Council of Teachers of Mathematics, 1991; Simon y Schifter, 1991) defienden la idea de que a los futuros maestros se les debe enseñar de manera coherente a la forma como nos gustaría que enseñasen. Esta afirmación se sustenta en motivos relevantes entre los cuales están: el potencial de los futuros maestros para desarrollar una mayor comprensión conceptual, para aprender sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y para construir concepciones útiles de las matemáticas. Sin embargo, este estudio sugiere que la naturaleza de la actividad matemática en la clase (ej. Implicación en modelización matemática) puede también tener un efecto más directo sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares (ej. La razón como medida).

Ben-Chaim, Ilany y Keret (2008), Ben-Chaim, Keret e Ilany (2012) presentan algunos elementos relacionados con la creación, implementación y evaluación del impacto de “*auténticas actividades de investigación*” que se centran tanto en el contenido matemático común como en el conocimiento didáctico y las actitudes en la formación de docentes de matemáticas de primaria y secundaria. Se desarrolló, implementó y evaluó un modelo especial de aprendizaje como parte de las actividades desarrolladas en instituciones que forman docentes en Israel.

El modelo está centrado en el uso de, lo que los autores describen como, auténticas actividades investigativas. Éste toma la forma de un modelo comprensivo para la enseñanza de los tópicos de razón y proporción en la investigación de Ilany et al. (2004). Fue desarrollado después de realizar varios estudios piloto, centrados en el conocimiento matemático y didáctico de maestros de primaria en formación inicial y en activo y surgió como consecuencia de la experiencia alcanzada tras la exploración de auténticas actividades sobre el razonamiento proporcional. El modelo propuesto incorpora las principales áreas en la instrucción de maestros en formación inicial, particularmente en las áreas del conocimiento común y didáctico del contenido, razonamiento didáctico, instrucción y creencias. Está compuesto de 4 componentes que interactúan entre sí (Figura 2.2). El primer componente es el núcleo del modelo y consiste en auténticas actividades de investigación, que consideran 5 tipos de tareas: introductorias, de razón, de tasas, de semejanza (estos 4 tipos son tareas de proporcionalidad directa) y tareas de proporcionalidad inversa.

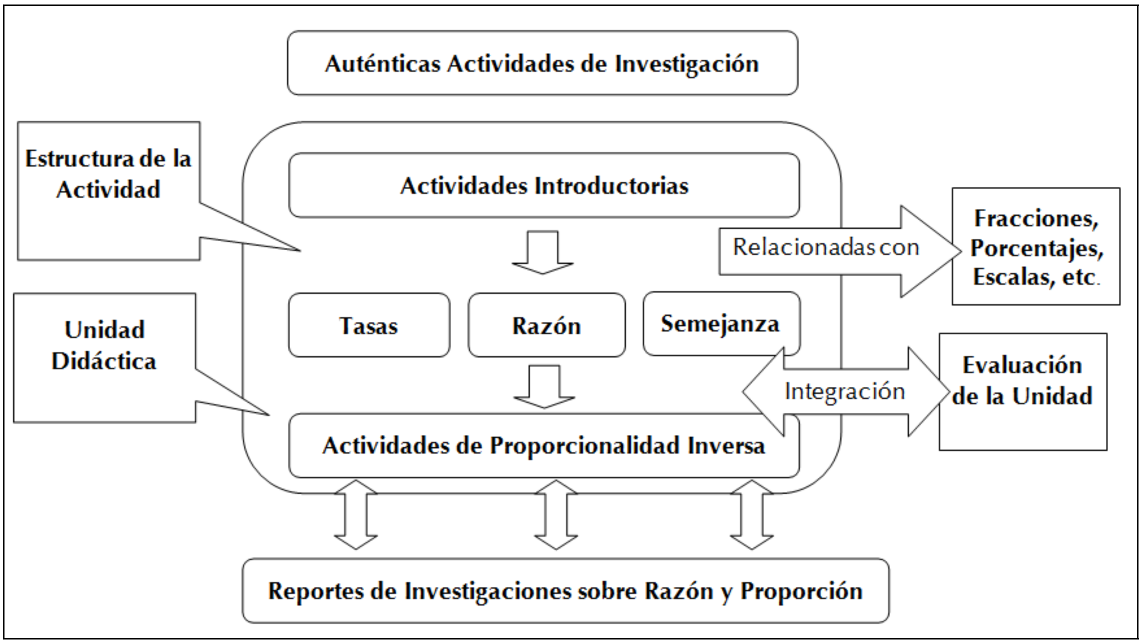


Figura 2.2. Modelo para la enseñanza del razonamiento proporcional en la formación inicial de maestros de primaria propuesto por Ilany et al. (2004) y Ben-Chaim, Keret, e Ilany (2007, 2012)

Paralelamente al trabajo en las actividades de investigación, los estudiantes para maestro han de leer y analizar publicaciones centradas en los tópicos de razón y proporción, tales artículos consideran cuestiones matemáticas y didácticas de esos contenidos. El análisis de los artículos permite a los estudiantes tomar conciencia de sus conocimientos matemáticos, mientras que la presentación de hallazgos de otras investigaciones posibilita la discusión de cuestiones centrales en relación con estrategias de enseñanza de esos contenidos, además promueve una perspectiva amplia de las dificultades de aprendizaje en estos tópicos. En este caso, la intención es promover la integración entre la práctica y la teoría.

El segundo componente incluye la estructura de la tarea. Como se ha indicado antes, éstas se han concebido como auténticos problemas de investigación, relacionados con contenidos y contextos familiares, tanto para los futuros maestros como para niños del nivel de primaria o secundaria. Las tareas incluyen los tipos de problemas reportados en la literatura de investigación que han sido considerados como apropiados para estudiar el razonamiento proporcional (Cramer, Post y Currier, 1993): (a) valor ausente, en los cuales se conocen tres de las cantidades de una proporción y el objetivo se trata de hallar el cuarto valor, (b) problemas de comparación numérica, en los cuales se conocen los elementos de dos razones o tasas, no se requiere una respuesta numérica pero las razones o tasas han de compararse, y (c) problemas de comparación y predicción cualitativa los cuales requieren comparaciones que no dependen de valores numéricos específicos.

El tercer componente incluye la estructura de la unidad didáctica (metodología del trabajo en el aula), la cual está centrada en un concepto, por ejemplo la noción de razón. La estructura de la unidad didáctica incluye: (a) trabajo en grupos, (b) discusión de los resultados con toda la clase, (c) resumen matemático y didáctico y (d) trabajo para desarrollar fuera de la clase.

El cuarto componente se centra en la evaluación de la unidad con varios tipos de instrumentos: (a) un instrumento para evaluar el conocimiento matemático y didáctico del contenido, (b) cuestionario de actitudes, (c) portafolio y (d) un instrumento para evaluar los reportes sobre los artículos de investigaciones. Una descripción más detallada del modelo se recoge en Keret, Ben-Chaim, e Ilany (2003) y en Ilany, Ben-Chaim y Keret (2004).

La conclusión del estudio es que la aplicación del modelo, incorporando teoría y práctica, conduce a un cambio dramático positivo en el conocimiento matemático y didáctico de los futuros docentes. Adicionalmente, se dio una mejora en sus actitudes y creencias hacia el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en general, y en la razón y proporción, en particular.

Monteiro (2003) desarrolla su estudio en el contexto de la formación de maestros de la Escuela Superior de Educación de Lisboa, esta investigadora explora las dificultades que tienen los futuros maestros de primaria con el concepto de razón y proporción, principalmente cuando resuelven problemas aplicando procedimientos algorítmicos. Según la autora esas dificultades pueden explicarse en las experiencias previas que vivieron los estudiantes de magisterio cuando fueron estudiantes de primaria o secundaria. Una acción fundamental desarrollada en el programa de formación, contexto de la investigación, se refiere a la reflexión sobre esas dificultades por parte de los estudiantes de maestro, comparando formas informales de resolución del problema, con la cual se persigue promover el desarrollo del conocimiento sobre la razón y proporción de los futuros maestros así como el conocimiento de ellos en relación con las dificultades que experimentan los niños en estos contenidos.

Berk, Taber, Carrino y Poetzl (2009) definen la flexibilidad en el uso de procedimientos matemáticos como la habilidad de emplear múltiples métodos de resolución para abordar problemas así como elegir estratégicamente cuál método es más eficaz, por ejemplo cuál método reduce las demandas de cálculo. El estudio se centra en caracterizar la flexibilidad de 148 futuros maestros de primaria en el dominio del razonamiento proporcional antes de un proceso de instrucción formal así como evaluar los efectos de dos versiones de una intervención de enseñanza en la que los estudiantes debían comparar diferentes formas de resolver problemas que involucraban la noción de proporción. Entre los resultados recogidos en esta investigación se señala que los participantes exhibieron una flexibilidad limitada antes de la instrucción formal y que la intervención condujo a significativos avances en la flexibilidad de los participantes, los cuales se mantuvieron seis meses después de la instrucción.

Rivas y Godino (2010) desarrollan una intervención de trabajo en el aula de formación inicial de maestros de educación primaria basada en el uso por parte de los estudiantes de magisterio de algunas herramientas derivadas del marco teórico denominado Enfoque Onto-Semiótico (EOS) para identificar objetos y significados involucrados en la resolución de un problema de comparación de razones, como instrumentos para desarrollar el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento común del contenido de los estudiantes de magisterio. Los investigadores han percibido un manejo inadecuado de las cantidades intensivas por parte de los estudiantes, señalan que aunque éstos aporten respuestas correctas han mostrado dificultades para aportar explicaciones pertinentes relativas a la resolución del problema. Sin embargo, este trabajo se centra en estudiar las potencialidades de la herramienta utilizada, es decir se centra en analizar las bondades del análisis epistémico desarrollado previamente a la experiencia de aula.

Berenson y Nason (2003) usan las representaciones de la razón como una herramienta para evaluar y promover el desarrollo del conocimiento del contenido. En esta investigación se recogen evidencias que sugieren que las representaciones proporcionan una valiosa imagen de la comprensión, en términos de la profundidad y precisión, del conocimiento del contenido que los futuros maestros muestran en la planificación de sus lecciones. Los estudiantes que mostraron una comprensión fuerte de la razón incluyeron múltiples representaciones en tales planificaciones.

Otros estudios que se han preocupado por promover el desarrollo del conocimiento de los profesores en formación inicial en relación con la razón y la proporcionalidad pero se han centrado en características asociadas al conocimiento didáctico del contenido *PCK*[20]. En este sentido, la investigación de Misailidou (2003) presenta una metodología innovadora para evaluar y posiblemente desarrollar el conocimiento didáctico del contenido (PCK) de profesores de matemáticas. En un trabajo previo la investigadora había desarrollado y validado una prueba para diagnosticar el conocimiento matemático sobre la razón y la proporción de estudiantes de secundaria. Una versión modificada de esta prueba se aplicó a una muestra de profesores de matemáticas en activo y en formación inicial con el propósito de evaluar su PCK, pues los profesores debían indicar los posibles errores que según ellos cometerían los estudiantes, sugerir ideas, métodos, alternativas de enseñanza para remediar las dificultades indicadas y predecir la dificultad de cada ítem mediante una escala de 5 categorías que iban de “muy fácil” a “muy difícil”. La adopción del modelo Rasch para el análisis de los datos proporcionó dos herramientas de retroalimentación los “Item maps” para cada tarea del instrumento y los “Performance maps” para cada profesor participante. En síntesis en esta investigación tales herramientas junto con el instrumento de diagnóstico se proponen como un nuevo y eficiente enfoque para explorar el conocimiento necesario para la enseñanza.

2.4 Aportes Teóricos Sobre el Razonamiento Proporcional

A nivel teórico encontramos estudios que identifican los componentes matemáticos del dominio del razonamiento proporcional, los objetivos cognitivos que ha de procurar la instrucción, en relación con los contenidos conceptuales y procedimentales de la razón y proporcionalidad, en los diferentes niveles educativos. A fines del los años 70 los investigadores estuvieron convencidos de la complejidad de las conexiones entre los

[20] Pedagogical Content Knowledge *PCK*, en el sentido de Hill, Rowan y Ball (2005)

números racionales, el razonamiento proporcional, y muchos otros conceptos matemáticos cuya naturaleza es multiplicativa.

Como ya describimos en el apartado 2.2, Kieren (1976) afirmó que para comprender los números racionales es preciso abordar las diferentes interpretaciones (parte-todo, razón, operador, cociente y medida), y no quedarse únicamente en el cálculo de operaciones con fracciones. Este investigador analizó la comprensión matemática de cada uno de los subconstructos, los mecanismos de equivalencia y partición que ayudan a los niños a construir la comprensión de cada subconstructo. Otros análisis (Behr, Lesh y Silver, 1983; Ohlsson, 1988) aportaron diferente cantidad de subconstructos, pero aunque se admita una u otra cantidad, el argumento más persuasivo que derivó de estos estudios se refiere a que el currículo de matemática, en ese momento, no estaba proporcionando una formación adecuada para la comprensión de los números racionales.

La fenomenología didáctica de Freudenthal (1983) ha ayudado a los investigadores a relacionar ideas matemáticas complejas (entre esas los subconstructos de los racionales) con objetos mentales, actividades humanas y fenómenos reales que son organizados por esas nociones matemáticas. Este investigador ha sugerido múltiples ejemplos de situaciones cotidianas accesibles para los escolares a través de los cuales la enseñanza puede proporcionar una incursión al mundo de los números racionales. Freudenthal elabora las nociones de *exposiciones*, *composiciones* y *constructos* para organizar las situaciones del entorno en las que está implicada la razón, y describe la noción de proporcionalidad a través de parejas de exposiciones, composiciones y constructos; en el Capítulo 4 detallamos la visión expuesta por Freudenthal.

Schwartz (1988) estudió el papel de las cantidades en operaciones multiplicativas ampliando la comprensión de la complejidad cognitiva de esas operaciones. En el análisis semántico realizado por estos investigadores distinguieron las cantidades extensivas de las intensivas, siendo las tasas consideradas como cantidades intensivas.

Vergnaud (1983, 1988) introdujo el constructo de campo conceptual. El campo conceptual multiplicativo se refiere a un complejo sistema de conceptos interrelacionados, ideas de los estudiantes (destrezas, competencias y dificultades), procedimientos, problemas, representaciones, objetos, propiedades y relaciones que no pueden ser estudiadas de manera aislada. Los contenidos del campo conceptual multiplicativo son diversos e incluyen tópicos tales como: multiplicación, división, fracciones, razones, proporciones simples y compuestas, números racionales, espacios vectoriales. La comprensión de este campo se desarrolla a lo largo de muchos años, y no se logra de forma lineal.

En el estudio de Clark, Berenson y Cavey (2003) intentan comprender la relación entre la razón y la fracción a través de un estudio fenomenológico en el que se usó como referencia libros de texto y la experiencia de los investigadores. Estos investigadores identifican 5 posibles modelos, usando diagramas de Venn, que describen la relación entre estas dos nociones, a saber: las razones como un subconjunto de las fracciones, las fracciones como un subconjunto de las razones, ambos conjuntos disjuntos, conjuntos distintos con intersección no vacía o conjuntos idénticos. Estos investigadores adoptan la postura que considera que las razones y las fracciones constituyen conjuntos distintos cuya intersección no es vacía (Figura 2.3). Utilizan este modelo para analizar la forma en la que los estudiantes usan las nociones de razón y fracción en la resolución de problemas que implican tales conceptos.

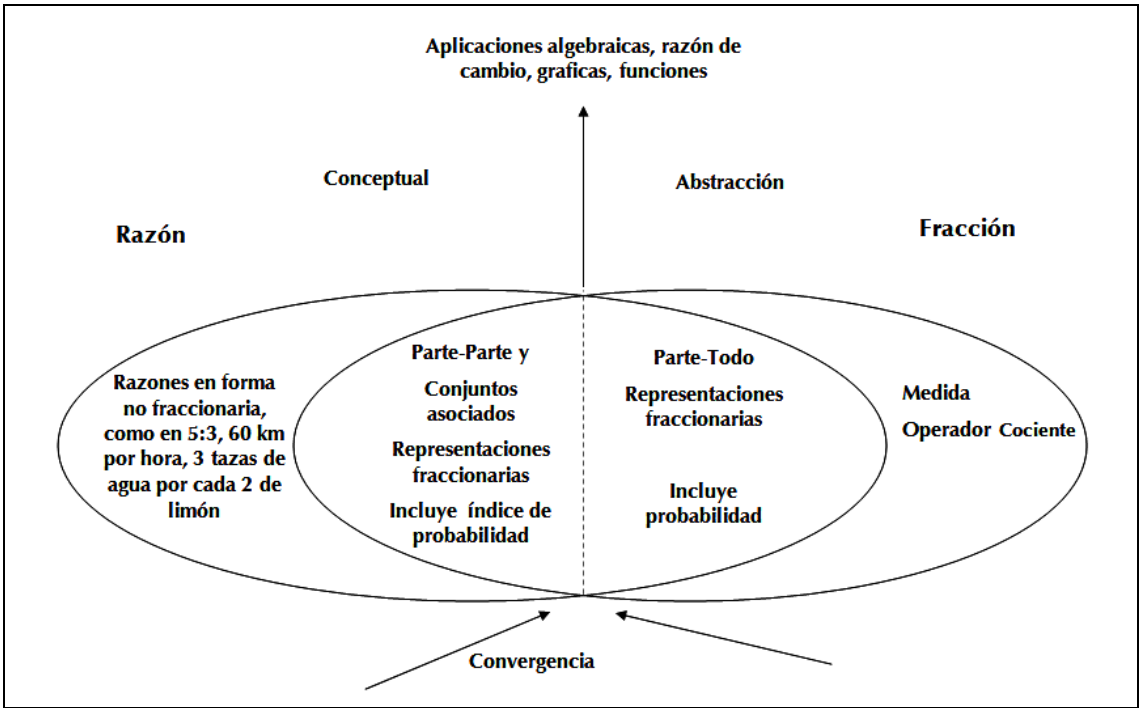


Figura 2.3. Modelo sobre la relación entre razón y fracción, propuesto por Clark, Berenson y Cavey (2003)

Recientemente, Modestou y Gagatsis (2010) proponen un nuevo modelo sobre el razonamiento proporcional, mismo que está basado tanto en información bibliográfica como en información procedente de investigaciones empíricas desarrolladas por los investigadores. Utilizan 3 pruebas escritas que incluyen situaciones de analogías, proporcionales y no proporcionales; éstos fueron administrados a niños de 7º a 9º grado. Los resultados recogidos por estos investigadores sugieren la existencia de un modelo *multi-componente* del razonamiento proporcional, contribuyendo así a la reformulación del concepto (Figura 2.4). Los componentes de este modelo son: el razonamiento analógico, la proporcionalidad rutinaria, y la conciencia meta-analógica. De este modo, el razonamiento proporcional no coincide exclusivamente con el éxito en la resolución del restringido campo de problemas de razonamiento proporcional, valor ausente o de comparación, sino también implica el manejo de analogías verbales y aritméticas (razonamiento analógico) así como la capacidad de distinguir las situaciones no proporcionales (conciencia meta-analógica). En la investigación se valida el modelo y se concluye que los problemas utilizados permiten explorar el razonamiento proporcional de los estudiantes en relación con los tres componentes propuestos por los investigadores.

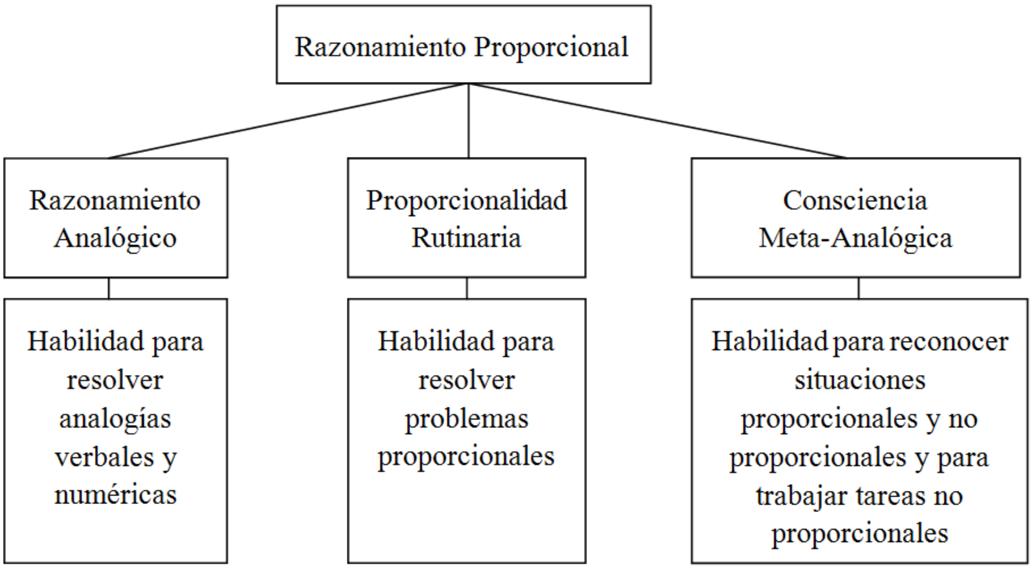


Figura 2.4. Modelo del razonamiento proporcional descrito por Modestou y Gagatsis (2010)

2.5 Investigación Sobre la Competencia Matemática de los Maestros de Primaria en Formación Inicial.

En la revisión de investigaciones centradas en la competencia matemática de futuros maestros de educación primaria encontramos un estudio desarrollado por Sáenz (2007), el cual se centra en evaluar el conocimiento funcional de las matemáticas desde la perspectiva del estudio PISA (OCDE, 2004) de estudiantes de magisterio, con el objetivo de establecer el perfil de rendimiento de los mismos. El rendimiento se determina en relación con factores afectivos, actitudinales y con la capacidad de resolución de problemas, no todos matemáticos.

Este investigador fundamenta la pertinencia de su investigación afirmando que los estudiantes de magisterio tendrán, en el futuro, que ayudar a los estudiantes de primaria a desarrollar las competencias matemáticas identificadas en PISA pues éstas se han utilizado para establecer los lineamientos definidos en el currículo escolar de matemática. Sáenz (2007) indica que aunque en PISA se evalúan estudiantes de 15 años, el desarrollo de las competencias matemáticas es un objetivo educativo de toda la enseñanza obligatoria, de modo que no sólo los profesores de secundaria han de trabajar en este sentido sino también los de primaria.

En la investigación utiliza las mismas variables que utiliza el estudio PISA, a saber, el contenido matemático de las tareas (cambio y relaciones, espacio y forma, cantidad, incertidumbre) y la complejidad del ítem (reproducción, conexiones, reflexión). El investigador sigue un proceso sistemático de distribución de los ítems que el estudio PISA 2003 ha hecho públicos en tres cuadernillos que incluyen los ítems de matemáticas y de solución de problemas, también aplica un cuestionario que recoge las variables afectivas y actitudinales.

Entre los resultados manifestados por Sáenz (2007) destaca la presencia de un perfil bajo de rendimiento de los estudiantes de magisterio con un porcentaje medio de respuestas correctas de un 64%. En la mayoría de ítems (17 de 31) los estudiantes de magisterio no superan significativamente el porcentaje de aciertos de los alumnos de 15 años. Según este investigador una cuestión muy preocupante es que se presenta una caída en el rendimiento cuando aumenta el nivel de complejidad de los ítems, de modo que los maestros en formación que tienen un rendimiento del 78 % de aciertos en tareas que exigen competencias de reproducción apenas pasan del 50 % en tareas de conexiones y reflexión. Además indica que sólo un porcentaje muy pequeño de futuros maestros (un 11%) alcanza un nivel de competencia alta, definida esa categoría con base no sólo en un rendimiento alto en la prueba global de matemáticas sino también en un rendimiento alto en las cuestiones de mayor dificultad.

Entre las recomendaciones derivadas de esta investigación se encuentra la sugerencia de apoyar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de magisterio al tiempo que aprenden a ser maestros. Según Sáenz (2007) los formadores de maestros deben centrarse en diseñar procesos de enseñanza-aprendizaje y de evaluación que pongan el énfasis en la adquisición de destrezas y conocimientos de matematización horizontal y vertical (Rico, 2006).

Capítulo 3. Marco Teórico

Nuestro estudio se fundamenta sobre tres pilares de referencia los cuales son el centro de atención de este capítulo dedicado al marco teórico, a saber: la noción de competencia matemática; el conocimiento matemático en el contexto de la formación inicial de maestros de educación primaria, y el análisis didáctico como herramienta de planificación que ha permito organizar los conocimientos matemáticos y competencias objeto del experimento de enseñanza. Describimos los fundamentos que respaldan la noción de competencia matemática que hemos adoptado en nuestra investigación. Posteriormente tratamos la postura expuesta por distintos investigadores en relación con el conocimiento profesional del maestro de matemáticas, concentrándonos en el conocimiento matemático común de este colectivo, específicamente en relación con la razón y la proporcionalidad. Finalmente centramos la atención en el análisis didáctico debido a que ha sido la herramienta utilizada en las tres fases del experimento de enseñanza realizado.

3.1 La Competencia Matemática de los Futuros Maestros de Educación Primaria

Dado que uno de los objetivos generales de nuestra investigación se centra en el estudio de la contribución de la experimentación al desarrollo de la competencia matemática de los futuros maestros de primaria, resulta conveniente presentar una revisión sobre las distintas acepciones relacionadas con el término competencia, seguidamente de la descripción que sobre esta noción encontramos en el ámbito de la formación de maestros de educación primaria. Posteriormente nos centramos en las definiciones y caracterizaciones que sobre la competencia matemática se plantean en el plano de la investigación en Didáctica de la Matemática y desde la perspectiva de proyectos internacionales enfocados en esta noción, especialmente sobre la postura expuesta en el estudio PISA, la cual ha sido uno de los principales fundamentos de nuestra investigación.

3.1.1 Generalidades Sobre la Noción de Competencia

Como se ha expuesto en el Capítulo 1 la necesidad de que la Educación responda de forma eficaz ante los nuevos retos derivados de la sociedad de las nuevas tecnologías y del conocimiento, ha motivado que distintas organizaciones como la OCDE o los gobiernos de los países de la Unión Europea hayan apostado por promover una reforma educativa centrada en mejorar la calidad de los aprendizajes basada en la noción de competencia. Esta noción se ha abordado extensamente desde diversos puntos de vista, la cantidad de definiciones es abrumadora y no es nuestro interés hacer una revisión exhaustiva o detallada de este término. En este apartado recogemos algunas definiciones, de las muchas que podemos encontrar, con el fin posterior de delimitar y situar la competencia matemática, sobre la que centramos nuestro interés, dentro de un marco más amplio.

Desde una perspectiva general el diccionario de la RAE[21] indica que la competencia se refiere a la pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado; de la que podemos extraer que la competencia está asociada a una acción, trabajo, gestión o quehacer de las personas, la mención de la idoneidad aporta un elemento adicional referido a la forma en que se hace esa acción e indica que la misma ha de realizarse de la mejor manera posible.

La competencia es la posibilidad que posee una persona de movilizar un conjunto integrado de recursos, entre lo que están los conocimientos, saberes, esquemas, automatismos y capacidades para resolver una serie de situaciones problema (Luengo, Luzón y Torres, 2008). En este mismo sentido Perrenoud (2003) entiende que la competencia es la facultad de movilizar un conjunto de recursos (saberes, capacidades, informaciones, etc.) para solucionar con eficacia una serie de situaciones. Entonces una actuación que pueda calificarse como competente pone en evidencia comportamientos formados por habilidades cognitivas, destrezas motoras y el uso de diversas informaciones para llevar a cabo, de manera eficaz, una actividad particular.

Diversos autores recogen una vasta cantidad de definiciones y acercamientos a la noción de competencia referidas a distintos campos de actuación, pero centrándose especialmente en el ámbito educativo (Cano, 2008; Luengo, Luzón y Torres, 2008; Lupiáñez, 2009; Rico y Lupiáñez, 2008).

De las posibles definiciones de competencias destacamos dos de ellas situadas en el contexto educativo debido a la trascendencia de los proyectos internacionales en los que se enmarcan. En el Proyecto Tunning, González y Wagenaar (2003) sostienen que las competencias representan una combinación dinámica de atributos, en relación al conocimiento y su aplicación, a las actitudes y responsabilidades, que describen los resultados de aprendizaje de un determinado programa o cómo los estudiantes serán capaces de desarrollarse al final del proceso educativo. En el marco del Proyecto Definición y Selección de Competencias (DeSeCo) se afirma que la competencia es la capacidad de asumir demandas complejas y llevar a cabo tareas de forma adecuada, lo cual supone una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores, actitudes, emociones y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz (OCDE, 2005b).

En relación con la definición genérica de competencia, dentro de marcos curriculares o de proyectos internacionales vinculados con temas educativos, Rico y Lupiáñez (2008) aportan un amplio marco de referencia que les ha hecho posible delimitar el significado del término en el ámbito de la educación y describir esta noción en relación a tres componentes: (1) componentes cognitivos o de otros tipos que cada autor revisado incorpora, (2) finalidades que se asignan a la noción de competencia y (3) contexto en el

[21] Real Academia Española

que se desempeña la competencia. Estos investigadores han estudiado múltiples acercamientos a la noción de competencia, en función de estos tres componentes. A partir de la comparación establecida entre las diferentes aproximaciones a la noción de competencia, sintetizan tres características comunes a las definiciones analizadas:

1. La competencia sirve para algo y se manifiesta mediante la acción. Se expresa a través de comportamientos que se aplican cuando se debe resolver problemas o situaciones variadas, pero en ambos caso revestidas de cierta complejidad que demanda del sujeto una actuación eficaz.
2. Se muestra mediante el desarrollo personal y social del sujeto competente, entendiendo este desarrollo como un crecimiento intelectual, emocional, social, entre otros. Se expresa en la manera en la que las personas deciden vivir, en cómo mejoran su situación y toman decisiones que les garanticen una mejor calidad de vida.
3. Hace referencia siempre a un contexto de aplicación, por lo que la caracterización de la misma, los comportamientos que dan cuenta de su logro o evolución, dependen del ámbito de acción, ya sea laboral, social o educativo.

Desde una perspectiva curricular, las competencias, al igual que los objetivos específicos, enuncian expectativas sobre el aprendizaje de los estudiantes, sin embargo ambas nociones no son equivalentes (Lupiañez, 2009). Este investigador señala que los objetivos se enuncian en términos de capacidades o de dominio de determinados conocimientos que se proponen para adquirirse en un tiempo cercano y hacen referencia a unos contenidos determinados; mientras que las competencias poseen un carácter global ya que integran diversos aprendizajes, no están usualmente vinculados con materias o contenidos específicos y se plantean para un período completo de formación, por lo que se admiten distintos grados de adquisición o desarrollo. Aunque ambas nociones tienen una frontera que las distingue también mantienen estrechos vínculos pues es a través del trabajo sobre los objetivos específicos y de tareas asociadas a los mismos, como una competencia se va construyendo.

En el contexto educativo europeo y particularmente en España, la organización de los aprendizajes y demás componentes de la acción educativa se ha definido en base a la noción de competencia clave o básica. Así, en el Real Decreto 1513/2006, por el que se determinan las enseñanzas mínimas en la educación primaria, en relación con la noción de competencia básica plantea que:

> *La incorporación de competencias básicas al currículo permite poner el acento en aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles, desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos. De ahí su carácter básico. Son aquellas competencias que debe haber desarrollado un joven al finalizar la enseñanza obligatoria para poder lograr su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida.* (MEC, 2006a, p. 43058)

En el ámbito de la educación superior la noción de competencia establecida en el Proyecto Tuning ha resultado ser uno de los referentes trascendentales en la configuración de los nuevos programas de estudio en España. Desde este proyecto las competencias y las destrezas se conciben como:

> ***Conocer y comprender*** *(conocimiento teórico de un campo académico),* ***saber cómo actuar*** *(la aplicación práctica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones),* ***saber cómo ser***[22] *(los valores como parte integrante de la forma de percibir a los otros y vivir en un contexto social). Las competencias representan una combinación de atributos (con respecto al conocimiento y sus aplicaciones, aptitudes, destrezas y responsabilidades) que describen el nivel o grado de suficiencia con que una persona es capaz de desempeñarlos.* (González y Wagenaar, 2003, p.80)

En el proyecto Tuning se proponen una serie de competencias genéricas para todas las titulaciones universitarias, clasificadas en tres grupos: competencias instrumentales, competencias interpersonales y competencias sistémicas. Además, se consideran las competencias específicas de cada titulación. Dado que nuestra investigación se desarrolla en el contexto de la formación de maestros de educación primaria recogemos a continuación la descripción y caracterización de las competencias relativas a esta titulación.

3.1.2 Competencias en la Formación Inicial de Maestros[23] de Educación Primaria

El sistema de formación inicial de maestros en España tiene una antigüedad notoria, a la fecha de hoy más de ciento sesenta y cinco años, tiempo a lo largo del cual los planes de formación han sufrido múltiples modificaciones en relación con las condiciones de acceso a estos estudios, la institución encargada de impartir esta formación, y especialmente en relación con las finalidades generales de la formación de maestros las cuales han derivado de los cambios experimentados por la sociedad española (Castro, 2011; Sierra y Rico, 1997).

La modificación más relevante y reciente que ha experimentado el programa de formación de maestros se debe a la incorporación de España al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). Este programa formativo ha sufrido transformaciones en las diferentes dimensiones y niveles del currículo, motivadas por la necesidad de organizar los estudios universitarios en función de la noción de competencia. Este proceso de transformaciones ha requerido del trabajo conjunto de profesores universitarios de distintas instituciones de Educación Superior y de entidades como ANECA[24], así como de profundas reflexiones sobre cómo desarrollar un programa de

[22] La negrita es de los autores.
23 En el sistema educativo español, salvo periodos muy concretos, la denominación general y oficial del Profesor de Primaria ha sido la de Maestro. Igualmente, la denominación genérica de las Instituciones encargadas de la formación de Maestros ha sido la de Escuelas de Magisterio o Escuelas Normales (Sierra y Rico, 1997).
24 Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.

formación de maestros basado en la noción de competencia (Flores, Segovia, Lupiáñez, Molina, Roa y Ruiz, 2007).

Uno de los resultados concretos de este proceso de trabajo y reflexión conjunta ha sido el Libro Blanco para la Titulación de Maestro en el cual se describen las competencias profesionales comunes a todos los perfiles de maestro y las competencias específicas referentes a cada perfil de maestro y área de conocimiento (lengua, matemáticas, ciencias, historia y geografía) hacia las cuales ha de orientarse el proceso de formación de los estudiantes de magisterio. Este ha sido uno de los muchos proyectos que derivaron en los actuales planes de formación de maestros vigentes en la Educación Superior en España.

Particularmente, el plan de estudios de la titulación de maestro especialista en educación primaria[25] de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada responde al decreto aprobado en el BOE de 14 de febrero de 2001 (MEC, 2001) establece que la formación de los maestros tiene un carácter generalista; son maestros de los distintos niveles de primaria, desde primero a sexto curso, encargados de impartir las materias de lengua, matemáticas, conocimiento del medio social, natural y cultural y expresión artística en las cuales, durante su formación, se incide especialmente. En este documento se enuncian las competencias que deseablemente han de desarrollar los estudiantes de magisterio a lo largo de su educación superior, las recogemos a continuación en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1.*Competencias profesionales de la titulación de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada*

Cognitivas (Saber)
Adquirir los conocimientos básicos sobre las distintas disciplinas que han de impartir en el ejercicio de su labor profesional y la capacidad de aplicarlos a la práctica de aula.
Adquirir los conocimientos psico-socio-pedagógicos básicos que le permitan el adecuado desarrollo de la labor docente.
Capacidad crítica para analizar el diseño curricular de cada una de las áreas docentes.
Adquisición de una visión globalizada e interdisciplinar de los contenidos objeto de enseñanza y aprendizaje.
Adquirir saberes reflexivos de naturaleza epistemológica, psicopedagógica y social que le permitan investigar e interpretar los acontecimientos del aula y tomar decisiones acertadas, sabiendo argumentarlas.
Entender e interpretar problemas relevantes para la enseñanza de la materia.
Habilidad para diseñar y desarrollar las asignaturas en un contexto social realista.
Habilidades para la obtención y tratamiento de la información de manera cualitativa y cuantitativa.
Habilidades básicas de manejo del ordenador.

25 Anexo A

Tabla 3.1.*Competencias profesionales de la titulación de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada*

Comunicación correcta, coherente y apropiada, oral y escrita, en la propia lengua, así como en una segunda lengua.
Capacidad para afrontar las dificultades y problemas propios de la profesión y tomar decisiones.
Capacidad de aprender a aprender.
Habilidad para el razonamiento lógico y la formulación de argumentos.
Capacidad para armonizar e integrar la teoría y la práctica educativa, así como para orientar y tutorizar al alumnado en los ámbitos personales, académicos y vocacionales.
Procedimentales/Instrumentales (Saber hacer)
Capacidad para ejercer como profesionales comprometidos en el cambio y mejora del proceso educativo y del entorno social en los contextos donde desarrollen su actuación así como de su mejora profesional, a través de la innovación y formación permanente.
Capacidad para actuar como investigador de los propios procesos en que se desarrolle su trabajo, así como para prestar la ayuda necesaria a fin de que los alumnos consigan su plenitud personal.
Capacidad para realizar su tarea como investigador, como medio de orientación, progreso, renovación y mejora de la calidad en el campo de la enseñanza.
Capacidad para diseñar y planificar proyectos educativos de forma autónoma, creativa y crítica, así como de tomar decisiones en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje.
Contactar con la realidad escolar que les permita la formación inicial en la práctica real de aula y, al mismo tiempo conlleve a la reflexión crítica entre teoría y práctica.
Capacidad para adaptarse a diversas situaciones de enseñanza y aprendizaje.
Capacidad de crítica y autocrítica en relación con el desarrollo de la profesión docente.
Actitudinales (Ser)
Capacidad para ejercer como maestro de manera crítica y reflexiva en una comunidad con diversidad cultural y con pluralidad de valores.
Ser hábil para relacionarse con todos los colectivos implicados en la enseñanza y para el trabajo en equipos interdisciplinares.
Adquirir actitudes y modelos de organización social que favorezcan la instauración en el aula de un compromiso ético y del derecho a la diferencia.
Capacidad de ejercer como agente subsidiario de la familia en la educación de los niños y favorecer actitudes positivas hacia el reconocimiento de su papel como agente de transformación y cambio social.
Convencimiento de que su actitud en las relaciones con sus alumnos ha de ser de observación, escucha, apertura, tolerancia, flexibilidad y empatía.
Adopción de actitudes inclusivas que faciliten la integración y normalización del

Tabla 3.1.*Competencias profesionales de la titulación de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada*

alumnado con necesidades educativas especiales.
Capacidad para la colaboración específica con profesionales especializados en orden a la implantación de estrategias preventivas en el desarrollo de los aprendizajes.
Participación en la transformación de la cultura institucional de los centros y ámbitos educativos donde intervengan, planteando dinámicas alternativas para ejercer la docencia.

El interés de nuestra investigación se centra, como ya se ha descrito en el Capítulo 1, en una de las competencias específicas de los futuros maestros: la competencia matemática. En el siguiente apartado describimos cómo se aborda esta noción en este ámbito de formación.

3.1.3 Competencias Matemáticas en la Formación Inicial de Maestros de Educación Primaria

La investigación que hemos realizado se desarrolló en el contexto de la asignatura Matemáticas y su Didáctica en el curso académico 2009-2010[26], momento en el que, aunque estaba vigente el plan de estudios recogido en la resolución de 25 de enero de 2001 de la Universidad de Granada (MEC, 2001), se culminaba un proceso de cambios en las directrices de la educación superior y en la organización curricular de este nivel educativo. Estos cambios han sido motivados por la adaptación del sistema de formación inicial universitaria al sistema de grados y postgrados del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES).

El primer paso para revisar la formación de los maestros fue el trabajo realizado por una red de universidades españolas con el objetivo explícito de realizar estudios y supuestos prácticos en el diseño de un Título de Grado adaptado al Espacio Europeo de Educación Superior, coordinado desde la Universidad Autónoma de Madrid. El resultado fue el Libro Blanco, Título de Grado en Magisterio (ANECA, 2005).

El estudio realizado por la ANECA[27] (2005), en relación con las competencias específicas al área de matemáticas, señala dos competencias que guardan relación con la formación matemática básica de los docentes, como las más valoradas por los profesores encargados de la formación del profesorado:

> *- Usar y hacer usar a los alumnos los números y sus significados, ser capaz de medir y usar relaciones métricas, ser capaz de representar y usar formas y relaciones geométricas del plano y del espacio, ser capaz de analizar datos y situaciones aleatorias en situaciones diversas, tanto en situaciones no escolares como escolares.*
> *- Conocimiento del contenido matemático suficientemente amplio que le permita realizar su función docente con seguridad.* (p. 101)

26 Ver Apartado 3.2.2
27 Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.

Las competencias específicas de la titulación se concretan de forma particular en cada una de las asignaturas que se contemplan dentro de este programa formativo. El interés de nuestro estudio se centra en la formación matemática de los futuros maestros la cual, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, se aborda a través de una asignatura troncal, *Matemáticas y su Didáctica* y una obligatoria, *Currículo de Matemáticas de Educación Primaria*, complementariamente los estudiantes pueden complementar su formación matemática eligiendo una asignatura optativa, centrada en la resolución de problemas.

Sin embargo, destacamos que nuestra investigación se desarrolla en la asignatura Matemáticas y su Didáctica, misma que detallamos posteriormente en el apartado 3.2.2. Aunque durante el curso 2009-2010 aún no estaban vigentes los planes actuales de formación inicial de maestros de educación primaria, el desarrollo de la asignatura Matemáticas y su Didáctica ya se desarrollaba desde el enfoque curricular basado en la noción de competencia. Esta asignatura había sido objeto de un proceso de re-organización y experimentación, promovido en la Facultad de Ciencias de la Educación, con el objetivo de extraer conclusiones para la remodelación de los títulos universitarios que debía producirse en el año 2010 en el marco de la convergencia europea de la educación superior.

En el marco de esta asignatura, nos interesamos en aquellas competencias específicas contempladas en el perfil de maestro de educación primaria que persiguen formar a los futuros maestros de forma tal que éstos en el futuro puedan ayudar a los niños a alcanzar los objetivos del área de matemáticas del currículo escolar. En este sentido, Llinares (2009) afirma que ser competente en la enseñanza de las matemáticas significa ser competente en dos ámbitos, por una lado significa *conoce*r y por otro lado *saber usar* el conocimiento en las situaciones de enseñanza en las que es pertinente. Este investigador afirma que un maestro competente es aquel que posee un conocimiento específico sobre cómo gestionar las situaciones comunicativas en la clase de matemáticas, con el fin de potenciar el desarrollo de la competencia matemática en los alumnos, centrando la atención en cómo se comunican los procesos matemáticos usados y en qué medida las representaciones usadas ayudan a transmitir lo que se pretende. Para estos efectos es indudable que el futuro maestro debe desarrollar, entre otras, una competencia matemática que le permita realizar distintas acciones en la labor educativa dirigidas al desarrollo de sus estudiantes.

Los principios de los nuevos planes de formación inicial de maestros de primaria se recogen en el marco legal de la orden ECI/3857/2007 de 27 de diciembre. Es esta orden se establece explícitamente la consideración de la competencia matemática como una expectativa de aprendizaje que deben desarrollar los futuros maestros. Se establece que el plan de estudios del grado de maestro ha de incluir como mínimo un módulo relativo al área didáctico y disciplinar de la matemática en el que puedan, entre otras, adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones espaciales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.), plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana y valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.

Aunque no hemos entrado en la descripción de las competencias matemáticas, adelantamos que Lupiáñez y Rico (2008) proponen que éstas expresan expectativas de aprendizaje relativas al conocimiento matemático en acción, consiste en utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible, saber hacer en la práctica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos, enfatizando procesos sociales como la comunicación y la argumentación, además afirman que la competencia matemática se desarrollará exitosamente en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen a una amplia variedad de situaciones provenientes de otros campos y de la vida cotidiana.

3.1.4 La Noción de Competencia Matemática

Es mucho lo que se ha escrito sobre la competencia matemática y no es nuestro interés repetir lo que ya han expuesto otros investigadores sino presentar algunas de las propuestas con el fin de identificar descriptores de la misma que nos permitan estudiar las producciones matemáticas de los estudiantes para maestro y lograr describir el nivel de desempeño manifestado por ellos en las tareas realizadas en nuestra investigación. Nuestra investigación se fundamenta en un supuesto elemental y es que los maestros de primaria no pueden ayudar a los niños a desarrollar la competencia matemática si ellos mismos no han logrado construir un nivel de desempeño aceptable de la ésta. En este sentido Niss (citado en Gómez, 2007, p. 127) afirma que un "buen profesor de matemáticas" es aquel que puede inducir y promover el desarrollo de las competencias matemáticas en sus estudiantes, lo cual obviamente implica que el profesor mismo debe poseer esas competencias matemáticas.

Un acercamiento a la noción de *competencia matemática* exige la revisión de las perspectivas expuestas, en relación a la misma, desde diversos ámbitos de actuación. En contraste con la noción genérica de competencia vinculada también al ámbito laboral, la competencia matemática es una noción utilizada en la elaboración de nuevos marcos curriculares y constituye el núcleo de proyectos de evaluación de gran cobertura como lo es el estudio PISA[28] (OCDE, 2004).

Desde una perspectiva internacional el Informe *Adding It Up: Helping children learn mathematics* (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001) se ocupa de explorar cómo los estudiantes de educación infantil (pre-escolar) hasta el 8º grado aprenden matemáticas, además aportan sugerencias sobre cómo enseñar matemáticas, recomiendan reformas curriculares que podrían incidir en la mejora del aprendizaje de las matemáticas a lo largo de ese periodo formativo. En este informe los autores indican que con base en su experiencia como investigadores y profesores de matemáticas y en el análisis de las matemáticas objeto del aprendizaje han decidido adoptar el término "*mathematical proficiency*" para referirse a una serie de componentes, que según ellos, son necesarios para que cualquier persona aprenda matemáticas.

28 Programme for International Student Assessment. En castellano se ha traducido como Proyecto Internacional para la Producción de Indicadores de Rendimiento de los Alumnos.

Este informe considera que la "*mathematical profiency*", traducida al castellano por Lupiáñez (2009) como competencia matemática y por oros autores como pericia matemática (Puig, 2008). Tiene cinco componentes (Figura 3.1), las cuales son interdependientes.

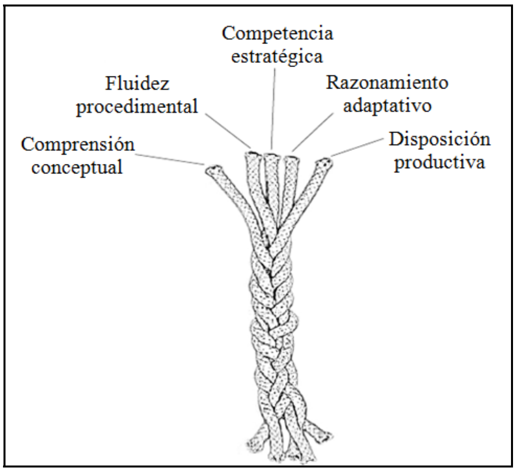


Figura 3.1. Componentes de la "competencia matemática" en el Informe Adding It Up

Lupiáñez (2009) sintetiza cada uno de los componentes descritos en este informe como a continuación:

> Comprensión conceptual*: comprensión de los conceptos matemáticos, las operaciones y las relaciones. Se refiere a una comprensión integrada y funcional de las ideas matemáticas.*
> Fluidez procedimental*: habilidad para llevar a cabo procedimientos de manera fluida, precisa, eficiente y apropiada. También se refiere al conocimiento de cuándo y cómo llevarlos a cabo.*
> Competencia estratégica*: habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos.*
> Razonamiento adaptativo*: capacidad para el pensamiento lógico, la reflexión, la explicación y la justificación. También se refiere a las relaciones entre conceptos y situaciones.*
> Disposición productiva*: inclinación habitual a considerar las matemáticas como algo sensible, útil y que vale la pena, conjuntamente con la creencia de ser diligente y eficaz en matemáticas.* (p. 91)

Desde un marco europeo, en el marco del *Proyecto Eurydice*[29] se señalan algunos descriptores que caracterizan a una competencia como *competencia clave*, entre estos criterios están: ser potencialmente beneficiosa para todos los miembros de la sociedad, cumplir con los valores, convenciones éticas, económicas y culturales de la sociedad a

29 La Red Eurydice tiene como misión analizar y ofrecer información sobre los sistemas y políticas educativas europeas. La componen 37 unidades nacionales con base en los 33 países participantes en el programa de Aprendizaje Permanente de la UE (Estados miembros de la UE, países de la Asociación Europea de Libre Comercio, Croacia y Turquía).

la que afectan y consideran el contexto de modo tal que se toman en cuenta las situaciones comunes y probables que las personas deberán enfrentar a lo largo de la vida. En este proyecto se considera que el *cálculo aritmético*, al igual que destrezas elementales de lectura y escritura, constituyen el punto de partida para cualquier aprendizaje (Unidad Europea de Eurydice, 2002).

En el contexto de la educación en España, el currículo de la educación obligatoria ha incorporado como eje neurálgico de la misma las competencias básicas o claves, las cuales permiten subrayar aquellos aprendizajes que se consideran indispensables, las definen como:

> *aquellas competencias que debe haber desarrollado un joven o una joven al finalizar la enseñanza obligatoria para poder lograr su realización personal, ejercer la ciudadanía activa, incorporarse a la vida adulta de manera satisfactoria y ser capaz de desarrollar un aprendizaje permanente a lo largo de la vida.* (MEC, 2006a, p. 43058)

Una de las competencias clave o básicas que se ha fijado para la educación primaria es la competencia matemática (Real Decreto 1513/2006). Desde el marco legal que delimita las enseñanzas mínimas en este nivel se establece que el objetivo general es conseguir la alfabetización numérica de los individuos, la cual se entiende como:

> *…la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito. Es importante resaltar que para lograr una verdadera alfabetización numérica no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, se precisa también, y principalmente, actuar con confianza ante los números y las cantidades, utilizarlos siempre que sea pertinente e identificar las relaciones básicas que se dan entre ellos.* (p. 43095-43096)

En este marco legal se plantea que la resolución de problemas ha de ser uno de los pilares sobre los cuales ha de funcionar la educación matemática ya que es el principal soporte del aprendizaje de las matemáticas, dado que ofrece la oportunidad para que los niños pongan en práctica múltiples capacidades tales como “leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo que se va revisando durante la resolución, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado, hasta la comunicación de los resultados” (MEC, 2006a; p. 43096)

Más concretamente, en el Real Decreto 1513/2006 se fija de la siguiente forma lo que se entiende por competencia matemática en la educación primaria:

> *Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.*

Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social.

Asimismo esta competencia implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información. Estos procesos permiten aplicar esa información a una mayor variedad de situaciones y contextos, seguir cadenas argumentales identificando las ideas fundamentales, y estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones. En consecuencia, la competencia matemática supone la habilidad para seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros) y aplicar algunos algoritmos de cálculo o elementos de la lógica, lo que conduce a identificar la validez de los razonamientos y a valorar el grado de certeza asociado a los resultados derivados de los razonamientos válidos.

La competencia matemática implica una disposición favorable y de progresiva seguridad y confianza hacia la información y las situaciones (problemas, incógnitas, etc.) que contienen elementos o soportes matemáticos, así como hacia su utilización cuando la situación lo aconseja, basadas en el respeto y el gusto por la certeza y en su búsqueda a través del razonamiento.

Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella. En definitiva, la posibilidad real de utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Por ello, su desarrollo en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

El desarrollo de la competencia matemática al final de la educación obligatoria, conlleva utilizar espontáneamente -en los ámbitos personal y social- los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, para resolver problemas provenientes de situaciones cotidianas y para tomar decisiones. En definitiva, supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas de apoyo adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad. (MEC, 2006a; p. 43059)

Los planteamientos expresados en el marco legal de la educación primaria nos permiten reafirmar la necesidad de formar a maestros que estén capacitados para que puedan, durante su labor docente, ayudar a que los niños adquieran un nivel destacado de competencia matemática.

Desde una perspectiva un tanto distante a las expuestas previamente, Puig (2008) define la noción de competencia matemática en el marco de los Modelos Teóricos Locales[30] como recogemos a continuación:

> *"Ya hemos indicado que, considerada en el ámbito más general, el del conjunto de las matemáticas, la competencia proporciona una descripción de la conducta del sujeto epistémico de las matemáticas, es decir, ha de explicar y predecir el conjunto potencialmente infinito de todas sus actuaciones (...). Cuando se trata de un alumno concreto, lo que sería su modelo de actuación local, es decir, el que da cuenta de sus actuaciones observadas, no puede considerarse que da cuenta de su competencia en el dominio en cuestión, ya que sólo da cuenta de lo observado en las circunstancias en que se hayan tomado los datos. Sin embargo, abusando del lenguaje, se habla en ocasiones del nivel de competencia de un alumno, comparando sus actuaciones observadas con las actuaciones que predice el modelo de competencia".* (p. 93)

Indudablemente la definición y caracterización de competencia matemática que ha tenido mayor difusión y atención durante los últimos diez años ha sido la propuesta en el estudio PISA (INECSE, 2005; Lupiañez y Rico, 2008; OCDE, 2004; OCDE, 2005a; Rico, 2006, 2007). Desde el que se entiende que la alfabetización o competencia matemática es:

> *la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades para su vida individual como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. Esta competencia general se puede desglosar en una serie de competencias específicas o particulares*. (OCDE, 2004; p. 37)

De esta propuesta se deriva la preponderancia puesta sobre la capacidad de plantear, formular, resolver, e interpretar problemas, aplicando los conocimientos matemáticos en múltiples situaciones y contextos que varían en complejidad. En el apartado 3.2.2 presentamos la descripción de la asignatura Matemáticas y su Didáctica y de su versión actual Bases Matemáticas para la Educación Primaria, en ambas se refleja que la competencia matemática es una expectativa de aprendizaje sobre la cual se trabaja en el programa de formación inicial de maestros.

En nuestra investigación hemos adoptado la postura propuesta en el estudio PISA en relación con la noción de competencia matemática debido a varias razones que recogemos a continuación:

---

[30] Marco teórico y metodológico usado en la investigación en Educación Matemática por diversos investigadores entre los que destacan Luis Puig, Eugenio Filloy, Teresa Rojano, Alejandro Fernández Lajusticia.

- La limitada descripción de la competencia matemática que se desprende de los documentos curriculares revisados correspondientes al nivel y asignatura en la que ha tenido lugar el desarrollo del experimento de enseñanza de nuestra investigación. Y en este sentido el marco del estudio PISA ofrece una descripción concisa de la competencia matemática y sus componentes.
- Como afirma Lupiáñez (2009) "el impacto de la noción de competencia planteada por el estudio PISA ha sido y está siendo determinante para la revisión de las orientaciones y de la normativa sobre las matemáticas escolares en la mayoría de los países de la OCDE, como en España, y en otros en vías de desarrollo" (p. 90).
- La conexión que guarda con el planteamiento funcional del currículo de matemáticas, en éste "los conceptos y procedimientos matemáticos tienen un para qué cercano, sirven para algo tangible, pues las nociones matemáticas constituyen herramientas mediante las que actuamos para dar respuesta a cuestiones, problemas e interrogantes del entorno. Esta perspectiva se centra en cómo los escolares pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana, más que en conocer qué contenidos del currículo han aprendido." (Rico y Lupiáñez, 2008; p. 175). Esta perspectiva responde a nuestro interés de elaborar una propuesta de trabajo en el aula que estimule el desarrollo de la competencia matemática de los futuros maestros de educación primaria a través de la resolución de problemas que involucren situaciones del entorno cotidiano de las personas.
- El estudio PISA contempla diferentes aspectos que hacen posible considerarlo como un marco curricular para la enseñanza de la matemática (Rico y Lupiáñez, 2008), este marco se ajusta a las expectativas de aprendizaje supuestas en la guía docente de la asignatura Matemáticas y su Didáctica o en la versión actual de esta asignatura.

Por los motivos hasta ahora considerados nos dedicamos, en los siguientes apartados, a exponer los aspectos fundamentales del estudio PISA que utilizamos en nuestra investigación para fundamentar el experimento de enseñanza y para describir el trabajo realizado por los estudiantes de magisterio durante la experimentación, estos aspectos son: caracterización de la competencia matemática, concreción de la competencia matemática en ocho competencias específicas y la descripción de los niveles de desempeño vinculados a cada una de esas ocho competencias.

3.1.5 Fundamentos del Estudio PISA[31]

El objetivo de la evaluación internacional que hace PISA ha sido establecer hasta qué punto los sistemas educativos de los países participantes (42 en 2003) han preparado a sus estudiantes de 15 años para jugar un papel constructivo como ciudadanos partícipes en la sociedad. Constituye un compromiso por parte de los gobiernos de los países

[31] En la dirección www.pisa.oecd.org se encuentra una vasta cantidad de información sobre los propósitos, orígenes y características de este estudio, no es nuestra intención recoger exhaustivamente esta información sino clarificar de qué manera hemos utilizado los insumos del estudio PISA 2003 en la elaboración, aplicación y análisis del experimento de enseñanza objeto de nuestra investigación.

miembros de la OCDE para establecer un seguimiento de los resultados de los sistemas educativos en cuanto al rendimiento de los alumnos, dentro de un marco internacional común (OCDE, 2004). El estudio adopta un enfoque amplio para evaluar el conocimiento y las destrezas que se promueven en el ámbito de la educación secundaria, teniendo como principal fundamento la utilización del conocimiento en tareas y situaciones complejas que pertenecen a distintos ámbitos del entorno. Uno de los principales objetivos de este estudio es analizar la capacidad de los estudiantes para aplicar los conocimientos adquiridos en el contexto escolar en la resolución de cuestiones que probablemente enfrenten las personas de la sociedad actual.

El proyecto PISA se ha enfocado en las áreas de lengua, ciencias y matemáticas. Ha sido el estudio PISA 2003 el que se ha utilizado como referencia principal de nuestra investigación debido a que el centro de atención del mismo ha sido el área de matemáticas. En este estudio se incide en la competencia matemática, definida como “la capacidad de los estudiantes para reconocer, comprender y participar en las matemáticas y opinar con fundamento sobre el papel que desempeñan las matemáticas en la vida diaria” (OCDE, 2004; p. 14). En el mismo documento se afirma, de forma equivalente, que “la competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (OCDE, 2004; p. 28).

Es preciso subrayar que ha sido el enfoque funcional del conocimiento matemático propuesto en el estudio PISA el que ha suscitado nuestro interés por adoptar la misma postura en la toma de decisiones que derivaron en el diseño del experimento que se ha realizado en nuestra investigación. Desde esta postura se consideran las matemáticas como un lenguaje, cuyo aprendizaje requiere que los estudiantes adquieran y comprendan los elementos y estructuras que comprenden: términos, hechos, signos, símbolos, procedimientos y destrezas, pero principalmente requiere que se aprenda a utilizar esos elementos para resolver problemas complejos en una variedad de situaciones (OCDE, 2004). Por lo que resulta un tanto inútil que una persona conozca muy bien estos elementos de las matemáticas y no llegue a ser capaz de entender las relaciones entre los mismos ni saber cómo utilizarlos para resolver problemas.

3.1.5.1 Enfoque Funcional de la Matemática

El dominio de la *competencia matemática* del estudio PISA (OCDE, 2004) comprende tres unidades principales:

- El *contenido matemático* que se requiere para resolver los problemas, organizado de acuerdo a ciertas nociones claves. Para los propósitos de la evaluación de PISA, estas *nociones claves* son: *cantidad, espacio y forma, cambios y relaciones, e incertidumbre*. Los contenidos vinculados a la razón y proporcionalidad, sobre los que hemos centrado nuestro estudio, consideran una diversidad de conocimientos que se hacen presentes en los cuatro ejes de contenido, pero se relacionan de forma más directa con los ejes *cantidad,* y *cambios y relaciones*.

- Las *situaciones* en que se ubican los problemas. Según su grado de cercanía con la situación particular del estudiante, se distinguen cuatro tipos de contextos: (1) personales, que se relacionan con las actividades cotidianas vinculadas directamente con la vida del estudiante, (2) educativos o laborales, aquellas que el estudiante pudiera enfrentar en un ambiente escolar o en un supuesto entorno de trabajo, (3) públicas, las que surgen en la interacción diaria del individuo con el mundo externo y (4) científicas, son situaciones más abstractas con las cuales el estudiante está poco relacionado; por ejemplo, problemas científicos, una teoría o un referidas a cuestiones puramente matemáticas. En nuestra investigación hemos utilizado la tipología de situaciones propuesta en el estudio PISA (OCDE, 2004) como uno de los descriptores usados para caracterizar las tareas realizadas en la experimentación (Capítulo 6 *Descripción de la Planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones*).
- Las *competencias* que deben ser aplicadas para conectar el mundo real, en el que se generan los problemas, con las matemáticas, para resolver así los problemas. Son pensar y razonar, comunicar, argumentar, representar, modelizar, plantear y resolver problemas, utilizar el lenguaje simbólico, formal, y técnico, y las operaciones, y emplear soportes y herramientas tecnológicas. La descripción de las competencias matemáticas aportada en el estudio PISA y que detallamos más adelante, se ha utilizado en la investigación para estudiar las actuaciones manifestadas por los estudiantes de magisterio ante las demandas exigidas en la resolución de las tareas realizadas en la experimentación.

Estas tres unidades corresponden a los componentes del *enfoque funcional* del currículo de matemáticas (Rico y Lupiáñez, 2008), dado que las personas resuelven las tareas (situaciones, contextos, problemas) aplicando las herramientas cognitivas de que disponen (conocimientos conceptuales y procedimentales) y para lograrlo debe manifestar su competencia en la puesta en marcha de unos ciertos procesos que caracterizan su razonamiento matemático (ej. comunicar, justificar, modelizar, entre otros). Como ya se ha expuesto en la presentación de esta memoria, el objetivo del experimento de enseñanza objeto de nuestra investigación, ha sido promover y estudiar el desarrollo del conocimiento matemático de los futuros maestros desde una perspectiva funcional.

Una de las nociones que reciben mayor atención en el estudio PISA es la "*matematizar*", la cual se entiende como el proceso o conjunto de estrategias que han de seguirse para resolver un problema matemático que implica una situación de la vida real, tal y como se conciben en este estudio. Se sostiene que la matematización debería ser uno de los objetivos educativos que deben promoverse en todos los niveles (OCDE, 2004). La actividad de matematizar comprende cinco acciones:

1. Partir de un problema situado en la realidad.
2. Sistematizar el problema según conceptos matemáticos.

3. Gradualmente reducir la realidad mediante procedimientos como la consideración de cuáles son los rasgos importantes del problema, la generalización y formalización (y con ello se potencian los rasgos matemáticos de la situación y se transforma el problema real en un problema matemático que representa fielmente la situación).
4. Resolver el problema matemático.
5. Dar sentido a la solución matemática en términos de la situación real.

3.1.5.2 Estudio PISA Desde una Perspectiva Curricular

Aunque el proyecto PISA 2003 es un estudio internacional que incide sobre la competencia matemática que poseen los estudiantes en un momento de su formación secundaria, alrededor de los 15 años, nos interesamos especialmente por otra forma de concebir este estudio. Rico y Lupiañez (2008) aportan una nueva visión que considera al estudio desde una perspectiva curricular. Estos investigadores plantean que:

> *El estudio PISA es un estudio curricular, puesto que se basa en la evaluación de los sistemas educativos; evaluación que consiste en la valoración del aprendizaje de los alumnos expresado en términos de competencias. El estudio PISA está enmarcado en una estructura curricular precisa, coherente con las distintas áreas que configuran el estudio*. (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 230)

Encontramos en esta postura la razón que nos ha conducido a elegir el marco del estudio PISA como fuente de principios que argumentan la elaboración, puesta en práctica y análisis del experimento de enseñanza realizado. Los fundamentos del estudio nos han servido de guía para organizar las expectativas de aprendizaje, locales y globales, que esperábamos se pudieran trabajar con los estudiantes de magisterio en el contexto matemático de la razón y la proporcionalidad. En este sentido Rico y Lupiáñez (2008) indican que:

> *la consideración del estudio PISA desde una perspectiva curricular tiene como valor añadido el que contribuye a plantear directrices e ideas potentes que pueden servir de guía para tomar decisiones en relación con el currículo de matemáticas en curso y que ha sido objeto de evaluación. Currículo que, en España, está basado en un enfoque funcional y entre cuyas prioridades sobre el aprendizaje de los alumnos se encuentra el desarrollo de su competencia matemática.* (p. 231)

Según estos investigadores en el estudio PISA se da respuesta a las cinco cuestiones que caracterizan cualquier plan de formación, las respuestas que conforman esta reflexión se sintetizan en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2. *Estudio PISA como un marco curricular*

Componentes de un Marco Curricular	Respuestas que se desprenden del Estudio PISA
Finalidad ¿Por qué enseñar matemáticas?	Consiste en desarrollar la competencia matemática de los estudiantes, el principal fundamento de este estudio es la utilidad del conocimiento matemático en la resolución de problemas que impliquen situaciones de distinta naturaleza y complejidad.
Contenidos ¿Qué matemáticas enseñar?	En el mismo sentido que la finalidad descrita, los conceptos y procedimientos son herramientas, que de acuerdo con la situación, pueden asumir distintos significados y representaciones. Estos permiten organizar y describir fenómenos.
Expectativas de aprendizaje ¿Para qué aprendizaje?	Se pretende el desarrollo de competencias y dominio de procesos cognitivos requeridos en la resolución de problemas. Los estudiantes deben dominar competencias matemáticas específicas que contemplan acciones que concretizan la competencia matemática general.
Metodología ¿Cómo enseñar matemáticas?	La actividad matemática de los escolares que PISA postula se basa en la matematización, que se identifica con la resolución de problemas.
Evaluación ¿Qué instrumentos permiten evaluar la competencia matemática?	Tareas que demandan la aplicación del conocimiento matemática en situaciones de diversos tipos y que abordan una multitud de contextos diferentes, éstas destacan el carácter funcional de las matemáticas con diversos niveles de complejidad.

Competencias Matemáticas

El proyecto PISA subraya que "un individuo que deba participar con éxito en la matematización en una gran variedad de situaciones necesita poseer un número suficiente de competencias matemáticas que, juntas, puedan ser consideradas como una competencia matemática comprensiva" (OCDE, 2004; p. 40-41). Para que un estudiante resuelva un problema es preciso que ponga en marcha un conjunto de procesos o competencias matemáticas, las cuales son concreciones de la alfabetización matemática y se reflejan en capacidades que los estudiantes muestran cuando están implicados en la resolución de problemas.

Como se ha recogido en el apartado 3.1.5.1 estas competencias o procesos generales son: (1) *pensar y razonar*, (2) *argumentar*, (3) *comunicar*, (4) *modelizar*, (5) *plantear y resolver problemas*, (6) *representar*, (7) *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico* *y las operaciones*, y (8) *emplear soportes y herramientas tecnológicas*, posteriormente presentamos la descripción detallada de cada una. El estudio PISA (OCDE, 2004) considera que los logros de los estudiantes en matemáticas se pueden expresar mediante este conjunto de competencias, ya que describen los procesos que se requieren para un domino matemático general.

Niveles de Desempeño de las Competencias

Uno de los principios que han guiado nuestra investigación ha sido considerar que aunque una tarea sea de una cierta complejidad por ejemplo de reflexión es posible que los estudiantes para maestro manifiesten actuaciones que evidencien únicamente indicadores del logro de las competencias del grupo de reproducción. En este sentido compartimos la postura expuesta en el estudio PISA cuando señala que el nivel de competencia matemática se refleja en la manera en la que las personas utilizan los conocimientos y las herramientas matemáticas para resolver problemas, es decir el nivel de desempeño se puede observar en términos del mayor o menor grado de eficacia con que aplique los conocimientos matemáticos en una situación de cualquier tipo.

Tres grupos de competencia condensan los diferentes procesos cognitivos necesarios para resolver diferentes tipos de problemas. Estos grupos reflejan el modo en que los estudiantes utilizan normalmente los procesos matemáticos al resolver los problemas. A continuación se recoge una descripción general de las actuaciones que se contemplan en los tres niveles de desempeño de cada una de las competencias matemáticas.

Grupo de Reproducción

Las competencias de este grupo implican esencialmente a la reproducción del conocimiento estudiado. Incluyen aquellas que se emplean más frecuentemente en las pruebas estandarizadas y en los libros de texto: conocimiento de hechos, representaciones de problemas comunes, reconocimiento de equivalentes, recopilación de propiedades y objetos matemáticos familiares, ejecución de procedimientos rutinarios, aplicación de destrezas técnicas y de algoritmos habituales, el manejo de expresiones con símbolos y fórmulas establecidas y realización de cálculos (OCDE, 2004; p. 42).

Grupo de Conexión

Las competencias del grupo de conexión se apoyan sobre las del grupo de reproducción, conduciendo a situaciones de solución de problemas que ya no son de mera rutina, pero que aún incluyen escenarios familiares o casi familiares (OCDE, 2004; p. 44). Las capacidades se centran en el establecimiento de conexiones o relaciones entre conceptos, procedimientos o representaciones.

Grupo de Reflexión

Las competencias de este grupo incluyen un elemento de reflexión, por parte del estudiante, sobre los procesos necesarios o empleados para resolver un problema. Relacionan las capacidades de los alumnos para planificar estrategias de resolución y aplicarlas en escenarios de problemas que contienen más elementos y pueden ser más inusuales que los del grupo de conexión (OCDE, 2004; p. 46). Para que las actuaciones referidas a una competencia estén en el grupo de reflexión es preciso que éstas reflejen procesos de razonamiento complejos, establecimiento de relaciones entre conocimientos que no son directas.

Complejidad de las Tareas

Otra manera de entender los "*grupos de competencias"* es a través de la complejidad de las tareas que se utilizan para estudiar la competencia matemática de los estudiantes. Como sostienen Rico y Lupiáñez (2008) las ocho competencias matemáticas no son variables de tarea, sino variables del individuo, dado que éste puede resolver el problema a través de distintas estrategias y mediante la aplicación ciertos conocimientos matemáticos. Los autores citados señalan un vínculo directo entre la complejidad de las tareas y las actuaciones de los estudiantes, estos investigadores indican que:

> *…el requerimiento de procesos más complejos, creativos o estructurados delimita distintos tipos de competencias en los estudiantes que, en principio, se concretan en las tres clases consideradas: reproducción, conexión y reflexión. Alumnos más competentes llevarán a cabo procesos de mayor complejidad, alumnos menos competentes sólo trabajarán procesos de complejidad menor.* (Rico y Lupiáñez, 2008; p. 260)

Los expertos del estudio PISA consideran tres niveles de complejidad a la hora de considerar los ítems con los que estudian las competencias:

- Primer nivel: Reproducción y procedimientos rutinarios.
- Segundo nivel: Conexiones e integración para resolver problemas estándar.
- Tercer nivel: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

En la Tabla 3.3 incluimos los descriptores de cada uno de los niveles de complejidad a la vez que presentamos ejemplos concretos. En el Capítulo 6 "Planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones" describimos la complejidad de las tareas que hemos utilizado en la experimentación usando como referencia los indicadores de la Tabla 3.3.

Tabla 3.3. *Indicadores de los niveles de complejidad de las tareas*

	Nivel de Complejidad	Ejemplos de Tareas
Reproducción	Contextos familiares. Conocimientos ya practicados. Aplicación de algoritmos estándar. Realización de operaciones sencillas. Uso de fórmulas elementales.	Escribe 69% en forma de fracción.
Conexión	Contextos menos familiares. Interpretar y explicar. Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación. Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.	María vive a 2 Km del colegio, y Martín, a 5 Km. ¿A qué distancia vive María de Martín?
Reflexión	Tareas que requieren comprensión y reflexión. Creatividad Ejemplificación y uso de conceptos. Relacionar conocimientos para resolver problemas más complejos. Generalizar y justificar resultados obtenidos.	Elabora una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes conociendo la razón entre las longitudes de sus lados correspondientes.

Llegado a este punto es importante señalar otras cuestiones acerca de la utilidad del marco del estudio PISA en nuestra investigación. Recordamos que uno de los objetivos de nuestro estudio se centra en describir las actuaciones de los estudiantes en términos de las expectativas de aprendizaje específicas y de las competencias matemáticas consideradas en la planificación de cada sesión, para el logro del mismo recurrimos a los indicadores de actuación de cada competencia matemática así como a los niveles de desempeño que se incluyen en las Tablas 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10. Asimismo, en el Análisis Cognitivo, describimos la manera en la que hemos concretizado la propuesta de competencias matemáticas del estudio PISA en nuestra investigación. Pues es preciso situar estas competencias en relación con los contenidos matemáticos de nuestro estudio (razón y proporcionalidad) así como con respecto a los objetivos específicos de aprendizaje contemplados en el diseño de la experimentación.

A continuación se presentan los descriptores que caracterizan cada una de las competencias matemáticas y los niveles de desempeño asociados, desde la perspectiva del estudio PISA (OCDE, 2004) y desde algunas posturas particulares que complementan la descripción indicada en el estudio.

1. Pensar y Razonar

Desde una perspectiva general pensar está relacionado con examinar, reflexionar y consiste en formar y relacionar ideas (Moliner, 1986), mientras que razonar se relaciona con discurrir, ordenando ideas en la mente para llegar a una conclusión (RAE, 2001). Tanto pensar como razonar son, por lo tanto, actividades mentales. De forma más concreta, y centrándonos en el área que nos ocupa, Rico y Lupiáñez (2008) indican que esta competencia contempla capacidades que son propias de la actividad matemática, supone comprender el tipo de preguntas y respuestas requeridas en el tratamiento de las cuestiones matemáticas. Adicionalmente señalan que esta competencia tiene que ver con la capacidad de desarrollar estrategias con cierta independencia o con seguir instrucciones.

En la Tabla 3.4 recogemos los indicadores de actuación que caracterizan los tres niveles de desempeño de la competencia *pensar y razonar* desde la perspectiva del estudio PISA (OCDE, 2004).

Tabla 3.4. *Competencia pensar y razonar*

Reproducción
Formular las preguntas más simples (¿cuántos...?, ¿cuánto es...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (tantos, tanto). Distinguir entre definiciones y afirmaciones. Comprender y emplear conceptos matemáticos en el mismo contexto en el que se introdujeron por primera vez o en el que se han practicado subsiguientemente.
Conexión
Formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, etc.); distinguir entre definiciones y afirmaciones y entre distintos tipos de éstas; Comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos que difieren ligeramente de aquellos en los que se introdujeron por primera vez o en los que se han practicado después.
Reflexión
Formular preguntas (¿cómo hallamos...?, ¿qué tratamiento matemático damos...?, ¿cuáles son los aspectos esenciales del problema o situación...?) y comprender los consiguientes tipos de respuesta (plasmadas mediante tablas, gráficos, álgebra, cifras, especificación de los puntos clave, etc.). Distinguir entre definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis y afirmaciones sobre casos especiales y articular de modo activo o reflexionar sobre estas distinciones. Comprender y emplear conceptos matemáticos en contextos nuevos o complejos. Comprender y tratar la amplitud y los límites de los conceptos matemáticos dados y generalizar los resultados.

2. Argumentar y Justificar

En la cotidianeidad argumentar se considera sinónimo de discutir o replicar (Moliner, 1986; RAE, 2001). Sin embargo, desde la Didáctica de la Matemática se sugieren distintas acepciones para este término que no tienen mucho que ver con la acción de discutir. Después de la Tabla 3.5 recogemos algunas de estas propuestas. Es evidente que en las aulas de educación obligatoria así como en las de formación de maestros de educación primaria no es habitual la presencia de las demostraciones formales, por lo que compartimos la postura asumida por Rico y Lupiáñez (2008) cuando sugieren que en las aulas donde el objeto de aprendizaje son las matemáticas escolares tienen lugar otros tipos de justificaciones, lo que nos conduce a adoptar una postura más general que la expuesta en el estudio PISA en relación con esta competencia y en consecuencia adoptamos la denominación planteada por estos investigadores "*Argumentar y Justificar*".

En la Tabla 3.5 recogemos los indicadores de actuación que caracterizan los tres niveles de desempeño de la competencia *argumentar* según el estudio PISA (OCDE, 2004). Sin embargo, indicamos que en nuestra investigación se aborda el estudio de las justificaciones que los maestros de primaria en formación ponen de manifiesto al resolver tareas matemáticas abiertas y debido a que las mismas no se ajustan a los modos formales de justificación-demostración matemática consideramos necesario ampliar el marco de referencia de la argumentación sugerido en el estudio de PISA y abordar las actuaciones de los futuros maestros con un marco más flexible como lo es el propuesto en Rigo (2009) y en Rigo, Rojano y Pluvinage (2011). El cual describimos brevemente después de la Tabla 3.5.

Tabla 3.5. *Competencia argumentar*

Reproducción
Seguir y justificar los procesos cuantitativos estándar, entre ellos los procesos de cálculo, los enunciados y los resultados.
Conexión
Razonar matemáticamente de manera simple sin distinguir entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir y evaluar el encadenamiento de los argumentos matemáticos de diferentes tipos; tener sentido de la heurística (p. ej., ¿qué puede o no puede pasar y por qué?, ¿qué sabemos y qué queremos obtener?).
Reflexión
Razonar matemáticamente de manera sencilla, distinguiendo entre pruebas y formas más amplias de argumentación y razonamiento; seguir, evaluar y elaborar encadenamientos de argumentos matemáticos de diferentes tipos; emplear la heurística (p. ej., ¿qué puede o no puede pasar y por qué?, ¿qué sabemos y qué queremos obtener?, ¿cuáles son las propiedades esenciales?, ¿cómo están relacionados los diferentes objetos?).

Rigo (2009) indica que el término *justificación* se utiliza para hacer referencia a todo tipo de recursos argumentativos que se dan en clases de matemáticas para sustentar enunciados con contenido matemático y para promover un grado de adhesión y convencimiento hacia él. En su estudio afirma que se toma el término 'justificación' en el sentido más amplio: incluye argumentos sustentados en razones (como las pruebas matemáticas o los razonamientos de la ciencia), los argumentos discursivos y retóricos así como las argumentaciones basadas en motivos. Desde nuestra perspectiva inferimos que en el estudio de Rigo se considera que la argumentación es una forma de justificación. Esta investigadora plantea que los procesos de justificación se aplican a enunciados o proposiciones y dentro de ellos están los mecanismos técnicas, recursos y todo tipo de procesos que regularmente emplea el colectivo para sustentar, explicar y justificar sus verdades; incluyen recursos de adhesión basados en el empleo del discurso verbal así como en el lenguaje gestual que en muchos casos es inconsciente. Ella plantea que en su estudio el término justificación se toma en el sentido más amplio, incluye argumentos sustentados en razones (como las pruebas matemáticas o los razonamientos de la ciencia), los argumentos discursivos y retóricos así como las argumentaciones basadas en motivos.

Rigo (2009) no utiliza los términos argumento o argumentación como sinónimos de justificación. La investigadora sostiene que deliberadamente introdujo en su investigación el término ***justificación*** y no otro. Según su postura esto se debe a que los términos *demostración, prueba, argumento, argumentación, razones o razonamientos* tienen ya significados dados (además son todos polisémicos) y en su estudio era necesario un término que sirviera para hacer referencia a mecanismos de sustentación tanto matemáticos como no matemáticos. Para Rigo, el término justificación cumple adecuadamente con el este propósito, además sostiene que ningún otro de los términos antes mencionados cumple con esta condición.

Esta investigadora analiza, entre otros elementos, las justificaciones que aportan alumnos de primaria y su maestra en el contexto de la resolución de ejercicios matemáticos que se plantean en clase y que provienen del libro de texto en uso. En su estudio describe distintos tipos de justificaciones según sea el fundamento de las mismas. La investigadora plantea que dentro de las justificaciones se reconocen dos tipos de sustento: (1) los argumentos basados en razones y (2) las argumentaciones apoyadas en fuentes que denomina supra-racionales[32], con esto se refiere a las argumentaciones que están basadas en los motivos personales de quien está argumentando. Indica que en el segundo tipo de argumentaciones, la justificación no obedece a una lógica racional, sino al propósito de conseguir alguna ganancia de tipo práctico o algún bienestar personal de aquel que arguye, lo cual no significa que este tipo de argumentación esté necesariamente alejada de la verdad (Rigo et al., 2011, p. 2). Adicionalmente reconoce otro tipo de justificaciones que están basadas en la confianza que se deposita en los algoritmos o fórmulas matemáticas y en los resultados que se desprenden de estos procedimientos, éstas pueden sustentarse en razones o en motivos de quien arguye.

Como ya se ha indicado hemos usado la propuesta de esta investigadora para describir las justificaciones que manifestaron los estudiantes para maestro durante la resolución colaborativa de las tareas implicadas en la experimentación.

3. Comunicar

En plano general, comunicar hace referencia a transferir a otros las propias ideas o sabiduría (Moliner, 1986). Descubrir, manifestar o hacer saber a alguien algo. Conversar, tratar con alguien de palabra o por escrito (RAE, 2001). Sin embargo, la consideración de un mensaje particular como lo es la matemática reviste a esta competencia otros matices. La capacidad de comunicar y explicarse matemáticamente significa que los estudiantes deben ser capaces de proporcionar suficientes razones para

[32] En trabajos actuales se refiere a este tipo como fuentes extra-racionales.

que sus compañeros y el profesor puedan comprender por qué han hecho lo que han hecho en relación con la resolución de un ejercicio o problema matemático.

Tal y como apunta Llinares (2003a) el desarrollo de las capacidades de comunicar y explicar matemáticamente es un aspecto clave de la formación matemática de los estudiantes ya que contribuye en el desarrollo de la comprensión de los conceptos al ser un contexto en el que se establecen relaciones entre definiciones, procedimientos, representaciones, además es un contexto en el que se favorece la argumentación y justificación de los procedimientos o conocimientos empleados. En la misma línea, Rico y Lupiáñez (2008) plantean que la comunicación, verbal o escrita, es el medio a través del cual se realiza el proceso de enseñanza y aprendizaje pues ésta se produce cuando el profesor explica alguna noción matemática, propone tareas o cuando los estudiantes interactúan para resolverlas, entre otras muchas situaciones de comunicación matemática en el aula. Además indican que la competencia *comunicar* incluye las diversas maneras de expresarse en relación con un conocimiento matemático así como comprender lo que otras personas expresan.

En la Tabla 3.6 recogemos los indicadores de actuación que caracterizan los tres niveles de desempeño de la competencia *comunicar* según el estudio PISA (OCDE, 2004).

Tabla 3.6. *Competencia comunicar*

Reproducción
Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas sencillas, tales como reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares, mencionando cálculos y resultados, normalmente de una única manera.
Conexión
Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o cómo explicar los cálculos y sus resultados (normalmente de más de una manera) hasta explicar asuntos que implican relaciones. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.
Reflexión
Comprender y saber expresarse oralmente y por escrito sobre cuestiones matemáticas que engloban desde cómo reproducir los nombres y las propiedades básicas de objetos familiares o explicar cálculos y resultados (normalmente de más de una manera) a explicar asuntos que implican relaciones complejas, entre ellas relaciones lógicas. También comporta entender las afirmaciones orales o escritas de terceros sobre este tipo de asuntos.

4. Modelizar

Modelizar, en el campo de la Educación Matemática, se refiere a describir situaciones reales en términos matemáticos. El modelo trata de explicar matemáticamente la realidad. En la modelización se emplean expresiones matemáticas para indicar hechos, entidades, variables, operaciones y relaciones entre ellos para estudiar el comportamiento de sistemas más complejos (RAE, 2001). De una manera más concreta, Castro y Castro (1997) sostienen que “un modelo es una esquematización abstracta de la realidad, entendiendo que esta realidad puede pertenecer al mundo de los fenómenos o al de los conceptos" (p. 106); también indican que los modelos posibilitan la observación y representación de relaciones entre los elementos o partes del modelo. Tales autores plantean que en el ámbito de la matemática elemental se utiliza el término modelo en un sentido genérico pues "matematizar la realidad a través de un modelo cuando determinados hechos y sus relaciones se expresan a través de términos y relaciones matemáticas abstractas" (p. 107).

Las tareas de modelización se caracterizan por una alta complejidad, dada la gran cantidad de conexiones y relaciones que son precisas de establecer, las cuales muchas veces, son externas a las matemáticas. El proceso de modelización se inicia con un problema en la vida real, en este contexto se seleccionan los datos relevantes para en seguida establecer las estructuras matemáticas que organizan esos datos, este proceso de conoce como matematización horizontal. Posteriormente el problema se resuelve dentro de las matemáticas aplicando relaciones entre conceptos matemáticos, relaciones procedimentales, entre otros procesos matemáticos. La solución hallada debe finalmente interpretarse en términos de la situación real (Rico y Lupiáñez, 2008).

En la Tabla 3.7 recogemos los indicadores de actuación que caracterizan los tres niveles de desempeño de la competencia modelizar según el estudio PISA (OCDE, 2004).

Tabla 3.7. *Competencia modelizar*

Reproducción
Reconocer, recopilar, activar y aprovechar modelos familiares bien estructurados; pasar sucesivamente de los diferentes modelos (y sus resultados) a la realidad y viceversa para lograr una interpretación; comunicar de manera elemental los resultados del modelo.
Conexión
Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo; traducir la «realidad» a estructuras matemáticas en contextos que no son demasiado complejos pero que son diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes. Comporta también saber interpretar alternando los modelos (de sus resultados y la realidad), y comunicar los resultados del modelo.
Reflexión
Estructurar el campo o situación del que hay que realizar el modelo, traducir la realidad a estructuras matemáticas en contextos complejos o muy diferentes a los que están acostumbrados los estudiantes y pasar alternando de los diferentes modelos (y sus resultados) a la «realidad», incluyendo aquí aspectos de la comunicación de los resultados del modelo: recopilar información y datos, supervisar el proceso de construcción de modelos y validar el modelo resultante. Conlleva también reflexionar analizando, realizando críticas y llevando a cabo una comunicación más compleja sobre los modelos y su construcción.

5. Plantear y Resolver Problemas

Existe una amplia variedad de acercamientos y posturas, en el campo de la Didáctica de la Matemática, en relación con noción de problema, no es nuestro interés abordar esta cuestión sino rescatar la diferencia que Larios (2000), como otros autores, establece entre los problemas y los ejercicios. En los ejercicios se puede decidir con rapidez si se saben resolver o no; se trata de aplicar un algoritmo, que pueden conocer o no, pero una vez localizado se aplica y se halla la respuesta. Según Larios (2000) en los problemas no es evidente el camino a seguir, incluso puede haber varios, y desde luego no está codificado y enseñado previamente, según este autor hay que apelar a conocimientos dispersos, y no siempre de matemáticas; además hay que relacionar conocimientos, entre otras capacidades. Desde la perspectiva de la competencia, Rico y Lupiáñez (2008) afirman que ésta tiene que ver con que los individuos sean capaces de resolver una gran variedad de tipos de problemas que involucren distintas situaciones y contextos.

En la Tabla 3.8 recogemos los indicadores de actuación que caracterizan los tres niveles de desempeño de la competencia *plantear y resolver problemas* según el estudio PISA (OCDE, 2004).

Tabla 3.8. *Competencia plantear y resolver problemas*

Reproducción
Exponer y formular problemas reconociendo y reproduciendo problemas ya practicados puros y aplicados de manera cerrada; resolver problemas utilizando enfoques y procedimientos estándar, normalmente de una única manera.
Conexión
Plantear y formular problemas más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más independientes que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y distintas formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones).
Reflexión
Exponer y formular problemas mucho más allá de la reproducción de los problemas ya practicados de forma cerrada; resolver tales problemas mediante la utilización de procedimientos y aplicaciones estándar pero también de procedimientos de resolución de problemas más originales que implican establecer conexiones entre distintas áreas matemáticas y formas de representación y comunicación (esquemas, tablas, gráficos, palabras e ilustraciones). También conlleva reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.

6. Representar

La acción de representar significa hacer presente “algo” ya sea con palabras, figuras u otro tipo de elementos. Cuando ese algo es un objeto matemático es frecuente servirse de un gráfico, tabla o símbolo para mostrarlo. Castro y Castro (1997) indican que “las representaciones externas, como lo son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre muchas otras, son el medio por el cual los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales haciéndolas accesibles a los demás” (p. 101). Según estos autores cada uno de los distintos modos de representar un mismo concepto matemático proporciona una caracterización diferente de dicho objeto, enfatizan que no hay un único sistema de representación que ponga de manifiesto toda la estructura subyacente a un concepto matemático. En este mismo sentido, Gómez indica que “los diferentes sistemas de representación que admite una estructura matemática le otorga diferentes significados a efectos de su enseñanza, pues ponen de manifiesto distintos elementos, características o propiedades de la estructura” (Gómez, 2002, p. 265-266). La comprensión de un concepto matemático está asociada a la competencia *representar*, según Castro y Castro:

> *Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema, también consiste en convertir o traducir una representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades.* (Castro y Castro, 1997, p. 103)

Así mismo, Rico y Lupiáñez (2008) rescatan el valor social de la competencia *representar* cuando plantean que en varias actividades cotidianas es preciso extraer informaciones en gráficos, tablas cuantitativas o bien traducir una problema a una estructura matemática. Tales argumentos sustentan la relevancia de promover el desarrollo de la competencia *representar* en los diversos niveles de escolarización.

En la Tabla 3.9 recogemos la caracterización e indicadores de actuación que caracterizan los tres niveles de desempeño de la competencia *representar* según el estudio PISA (OCDE, 2004).

Tabla 3.9. *Competencia representar*

Reproducción
Descodificar (decodificar), codificar e interpretar representaciones de objetos matemáticos previamente conocidos de un modo estándar que ya ha sido practicado. El paso de una representación a otra sólo se exige cuando ese paso mismo es una parte establecida de la representación.
Conexión
Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos, y traducir y diferenciar entre diferentes formas de representación.
Reflexión
Descodificar, codificar e interpretar formas de representación más o menos familiares de los objetos matemáticos; seleccionar y cambiar entre diferentes formas de representación de las situaciones y objetos matemáticos y traducir y diferenciar entre ellas. También conlleva combinar representaciones de manera creativa e inventar nuevas.

7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones

La competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y uso de las operaciones* está muy relacionada con la de representar ya que se centra en el dominio del sistema de representación simbólico y en la pericia requerida para operar en él (Rico y Lupiáñez, 2008). Estos investigadores sugieren que esta competencia "tiene que ver con la aplicación directa de reglas y fórmulas que constituyen herramientas fundamentales para el trabajo en matemáticas. Ese tipo de rutinas son importantes a la hora de afrontar la resolución de tareas matemáticas más complejas." (p. 250).

En la Tabla 3.10 recogemos los indicadores de actuación que caracterizan los tres niveles de desempeño de la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones* según el estudio PISA (OCDE, 2004).

Tabla 3.10. *Competencia utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y uso de las operaciones*

Reproducción
Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico rutinario que ya se ha practicado en situaciones y contextos sobradamente conocidos; manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos rutinarios.
Conexión
Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico: Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico básico en situaciones y contextos menos conocidos y manejar afirmaciones sencillas y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos mediante procedimientos familiares
Reflexión
Empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico: Descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico ya practicado en situaciones y contextos desconocidos y manejar afirmaciones y expresiones con símbolos y fórmulas, tales como utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos. También conlleva la habilidad de saber tratar con expresiones y afirmaciones complejas y con lenguaje simbólico o formal inusual, y realizar traducciones entre este lenguaje y el lenguaje natural.

8. Emplear soportes y herramientas tecnológicas

En educación los soportes y herramientas tecnológicas hacen referencia a artefactos como calculadoras y ordenadores. Siguiendo a Rico y Lupiáñez (2008) esta competencia se centra en el uso de recursos que contribuyan a la resolución de tareas matemáticas. En la Tabla 3.11 recogemos los indicadores de actuación que caracterizan los tres niveles de desempeño de la competencia *emplear soportes y herramientas tecnológicas* según el estudio PISA (OCDE, 2004).

Tabla 3.11. *Competencia emplear soportes y herramientas tecnológicas*

Reproducción
Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares en contextos, situaciones y procedimientos similares a los ya conocidos y practicados a lo largo del aprendizaje. Las preguntas que miden las competencias del grupo de reproducción se pueden describir mediante los siguientes descriptores: reproducir material practicado y realizar operaciones rutinarias.
Conexión
Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares en contextos, situaciones y maneras diferentes a las introducidas y practicadas a lo largo del aprendizaje.
Reflexión
Conocer y ser capaz de emplear soportes y herramientas familiares o inusuales en contextos, situaciones y formas diferentes a las ya introducidas y practicadas. Reconocer las limitaciones de tales soportes y herramientas.

En síntesis, la noción de competencia matemática expresa una forma especial de poseer el conocimiento matemático y de usarlo en la resolución de problemas que implican situaciones complejas procedentes de contextos diversos. El enfoque funcional del conocimiento matemático, asumido en el estudio PISA y que hemos adoptado en nuestra investigación, implica que la competencia matemática acentúe cuestiones sociales como la argumentación y la comunicación.

En un amplio sentido, existe una relación evidente entre el aprendizaje y uso de los conocimientos matemáticos y la noción de competencia matemática. Como ya se indicó en el aparatado 3.1.1 los conocimientos constituyen uno de los componentes estructurales de la noción de competencia. Recordamos que el principal supuesto que hemos asumido es que si se trabaja en beneficio de la mejora de los conocimientos matemáticos de los futuros maestros, esto es profundizando en los conceptos, sus propiedades, representaciones, desde una perspectiva funcional, es posible que la competencia matemática se vea también contribuida. Por lo que resulta pertinente abordar algunas cuestiones relativas al conocimiento profesional de los futuros maestros en el área de didáctica de la matemática con el fin de especificar y caracterizar cuál es el tipo de conocimiento que ha sido objeto de estudio en nuestra investigación.

3.2 El Conocimiento Profesional del Futuro Maestro de Primaria en el Área de Didáctica de la Matemática

Ponte y Oliveira (2002) indican que el *conocimiento profesional* es el conocimiento necesario para desempeñar con éxito una actividad profesional, que se debate con cuestiones bastante diferentes de las de la vida académica o de la vida cotidiana. Una actividad profesional involucra tanto procesos de rutina como una resolución de problemas concretos en un dominio delimitado de la práctica social. Las profesiones se caracterizan por el dominio de un conjunto de saberes específicos, socialmente valorados.

En el caso de los profesores, el conocimiento profesional involucra el conocimiento relativo a la práctica lectiva en el salón de clases y en otros papeles profesionales, tales como la tutoría a los alumnos, la participación en actividades y proyectos para el aula, la interacción con miembros de la comunidad y el trabajo en asociaciones profesionales. El conocimiento profesional se va construyendo desde la formación inicial y sigue desarrollándose durante toda la experiencia profesional del profesor (Climent y Carrillo, 2002). Nuestro interés se dirige al estudio del conocimiento que se desarrolla en el proceso formativo de los futuros maestros de educación primaria.

Una de las primeras alusiones, de corte genérico, al conocimiento profesional del profesor ha sido la propuesta por Lee Shulman (1987) quien introdujo y definió la noción de conocimiento didáctico del contenido (PCK[33]) como aquel que le permite al profesor hacer enseñable el contenido, éste considera "…las más poderosas formas de representación…, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones, o sea, las formas de representar y formular la materia para hacerla comprensible a otros… además la comprensión de qué hace que el aprendizaje de un tópico específico sea fácil o difícil" (Shulman, 1986, p. 9). El PCK representa "la mezcla del contenido y la pedagogía dentro de una comprensión de cómo temas particulares, problemas o situaciones son organizadas, representadas,…, adaptadas… para la enseñanza" (Shulman, 1987, p. 8).

Según Shulman (1987), el profesor tiene un conocimiento que puede describirse a través de siete categorías: el conocimiento del contenido, de lo didáctico general, conocimiento del currículo, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de los estudiantes y sus características, conocimiento del contexto educativo y conocimiento de los fines educativos. Posteriormente, estas categorías son redefinidas por Pamela Grossman (1990) en cuatro tipos, a saber: el conocimiento didáctico general, el conocimiento del contenido, el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento del contexto.

En el ámbito de la formación de profesores de matemáticas, Ponte y Oliveira (2002) indican que el conocimiento profesional del profesor se desarrolla en relación con diversas dimensiones de la labor docente, señalan: (1) el conocimiento en la acción, relativo a la práctica lectiva, (2) el conocimiento requerido para la práctica no lectiva y (3) el conocimiento que se construye en relación con la profesión, particularmente respecto a la identidad de los profesores. Según Ponte y Oliveira (2002) el conocimiento profesional llamado a intervenir directamente en la práctica lectiva (en la enseñanza de las matemáticas) puede ser designado por el término *conocimiento didáctico*, e incluye cuatro dominios:

- el conocimiento de las matemáticas,
- el conocimiento del currículo,
- el conocimiento del alumno y de sus procesos de aprendizaje

[33] Pedagogical Content Knowledge (PCK)

- el conocimiento del proceso instruccional.

En relación con la noción de conocimiento didáctico, Gómez (2007) afirma que:

> *El conocimiento didáctico de un grupo de futuros profesores es el conjunto de conocimientos y habilidades que los facultan para abordar el análisis de una estructura matemática con el propósito de producir y justificar una planificación. Desde esta perspectiva, el conocimiento didáctico de un grupo de futuros profesores se configura alrededor de un conjunto estructurado de capacidades que caracterizan su competencia de planificación.* (p. 122)

En el Informe *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*, Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) plantean que el conocimiento de las matemáticas para la enseñanza es:

> *El conocimiento de los hechos, conceptos y procedimientos matemáticos y las relaciones entre ellos, conocimiento de las formas en las que las ideas matemáticas pueden ser representadas, y el conocimiento de las matemáticas como una disciplina, en particular, cómo el conocimiento es producido, la naturaleza del discurso en matemáticas, las normas y estándares que dirigen los argumentos y demostraciones.* (p.313)

Una de las propuestas que ha centrado su interés en el conocimiento del profesor de matemáticas de educación primaria ha sido la generada en la Universidad de Michigan en el grupo de investigación dirigido por Deborah Ball y en el que participan investigadores como Heather C. Hill, Hyman Bass, Mark Thames, Stephen Schilling y Geoffrey Phelps, entre otros. Esta propuesta cimienta su desarrollo en la noción "Conocimiento Matemático para la Enseñanza" (**MKT**, *Mathematical Knowledge for Teaching*), la cual con el paso de los años ha ido reelaborándose y afinando (Ball y Bass, 2003; Hill, Schilling y Ball, 2004; Hill, Rowan, y Ball, 2005; Hill, Sleep, Lewis, y Ball, 2007; Hill, Ball, y Schilling, 2008).

Hill, Rowan, y Ball (2005) definen el conocimiento matemático para la enseñanza como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor para llevar a cabo la enseñanza de las matemáticas" (p. 373). Estos investigadores señalan que algunas de las acciones que contempla esta labor son: explicar conocimientos matemáticos a los estudiantes, interpretar y valorar las afirmaciones y resoluciones propuestas por los estudiantes a las tareas matemáticas, valorar el tratamiento que los libros de textos dan a los conceptos matemáticos, usar representaciones adecuadas de las nociones matemáticas, entre otras. El conocimiento matemático para la enseñanza no sólo incluye conocimiento didáctico del contenido sino que también considera el conocimiento del contenido matemático, tanto común como especializado (Delaney, Ball y Schilling, 2008).

Este grupo de investigadores se inspiran en el trabajo de Shulman (1987) quien describe el conocimiento del profesor en relación con distintas dimensiones, y caracterizan el conocimiento matemático para la enseñanza en términos de distintos componentes agrupados en dos bloques según se vinculen de manera más directa con el conocimiento del contenido o con el conocimiento didáctico del contenido (Figura 3.2).

Éstos son: (a) Conocimiento Común del Contenido (**CCK**), (b) Conocimiento en el Horizonte Matemático (**HCK**) y (c) Conocimiento Especializado del Contenido (**SCK**) que corresponden al dominio del conocimiento del contenido, y (d) Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (**KCS**), (e) Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (**KC**T), y (f) Conocimiento del Contenido y el Currículo (**KCC**), que configuran el conocimiento didáctico del contenido.

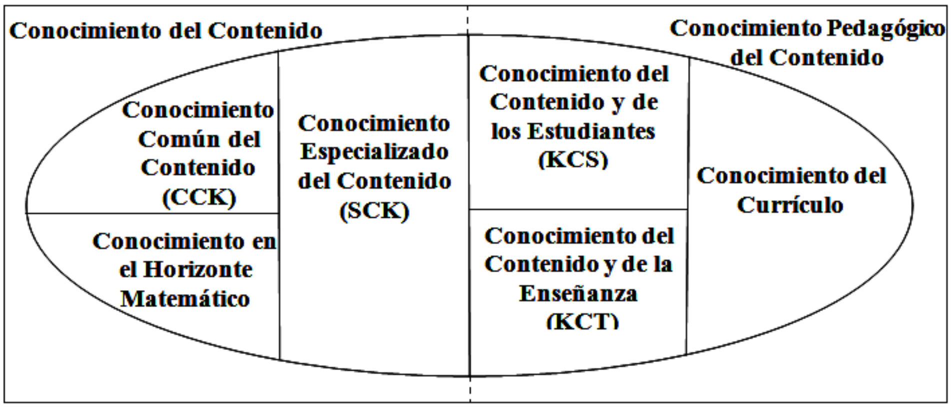


Figura 3.2. Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008)

A continuación recogemos una descripción general de cada uno de los componentes que se contemplan en el modelo sobre el conocimiento del profesor de matemáticas expuesto por Deborah Ball y sus colaboradores.

Conocimiento común del contenido: es el conocimiento matemático que muchos adultos educados tienen y posiblemente usan en una variedad de situaciones. Por ejemplo, conocimientos de cálculo con fracciones (Izsák, Orrill, Cohen y Brown, 2010). Según Hill, Ball y Schilling (2008) este tipo de conocimiento común es el análogo al conocimiento del contenido (subject matter knowledge) propuesto originalmente por Shulman.

Conocimiento especializado del contenido: es el conocimiento de las matemáticas que es usado específicamente en la enseñanza, le permite a los profesores participar en tareas de enseñanza, incluyendo formas de representar las ideas, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, aplicar modelos y comprender métodos de resolución de problemas. Esto exige del profesor un conocimiento más profundo de las matemáticas que se estudian en la escuela (Hill, Rowan y Ball, 2005). Estos investigadores señalan que este tipo de conocimiento contempla, por ejemplo, saber cómo representar cantidades tales como 1/4 o 0,65 usando diagramas, cómo proporcionar una explicación matemática cuidadosa de las reglas de divisibilidad, cómo valorar la validez matemática de métodos de resolución alternativos a cuestiones matemáticas.

Conocimiento del contenido y de los estudiantes: “conocimiento del contenido vinculado con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden un contenido particular” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 375). Es puesto de manifiesto en tareas de enseñanza que implican atender tanto el conocimiento matemático como alguna cuestión particular de los estudiantes. Por ejemplo, conocer cómo los estudiantes aprenden a sumar fracciones, qué tipo de errores cometen comúnmente los niños durante este proceso de aprendizaje. También implica la capacidad de valorar el aprendizaje de los estudiantes y la evolución del mismo. Según los investigadores citados el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) es uno de los componentes primarios de la noción conocimiento didáctico del contenido (PCK) expuesto por Shulman (1987), según el cual tal conocimiento implica comprender qué hace que un determinado concepto sea fácil o difícil.

Conocimiento del contenido y de la enseñanza: vincula el conocimiento del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza. Incluye, por ejemplo, conocer cómo abordar la enseñanza de modo tal que ésta permita a los estudiantes superar errores y concepciones inadecuadas. En este sentido, implica cuestiones relacionadas con la selección de tareas, técnicas de gestión de clase y de materiales o recursos para el tratamiento de cierto contenido (Hill, Ball, y Schilling, 2008). También contempla las ventajas instruccionales de utilizar diferentes representaciones de una noción (Delaney, Ball y Schilling, 2008).

Conocimiento del contenido y del currículo:

Se refiere al conocimiento sobre qué contenidos deben aprender los estudiantes y la orientación que deben tomar esos contenidos en el aprendizaje e incluye los materiales curriculares de los que hace uso el profesor (Sosa y Carrillo, 2010). El conocimiento de los contenidos y planes de estudios (Fernández y Figueiras, 2010).

Conocimiento en el horizonte matemático:

Para Ball, Thames y Phelps (2008) el conocimiento en el horizonte matemático (HCK) se refiere al conocimiento del profesor en relación con los contenidos matemáticos previos y futuros, presentes en el currículo de matemáticas. Fernández y Figueiras (2010) sugieren que el HCK requiere una visión global de la educación matemática de los estudiantes, de manera que pueda ser utilizada por el profesor al enseñar matemáticas en el aula. Por esta razón lo consideran como un conocimiento matemático más amplio que da forma al MKT desde un punto de vista de continuidad de la educación matemática.

3.2.1 Conocimiento Matemático[34] de los Futuros Maestros de Primaria

Aunque existe consenso en relación a la idea de que para llegar a ser profesor, los estudiantes en formación necesitan desarrollar diferentes componentes del conocimiento del profesor, tanto sobre el contenido matemático como sobre cuestiones didácticas específicas y generales, en nuestro estudio nos centramos en el conocimiento matemático y en las competencias matemáticas de estudiantes de magisterio.

[34] En nuestro estudio nos referimos al conocimiento común del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008) simplemente como conocimiento matemático o como conocimiento matemático común de los futuros maestros de educación primaria.

Nuestro interés en el conocimiento del contenido se suscitó por varios motivos: la suposición ampliamente aceptada de que la pericia en la enseñanza de un específico tópico matemático requiere que el profesor posea comprensión de ese tópico, en nuestra experiencia como formadoras de maestros hemos compartido numerosas experiencias anecdóticas que señalan al conocimiento del contenido como un factor influyente en la calidad de la enseñanza de las matemáticas, además existen numerosas investigaciones que exponen que este requisito no lo cumplen muchos profesores y maestros en activo y en formación inicial (Graeber y Tirosh, 1988; Post, Harel, Behr y Lesh, 1988; Simon, 1993; Ball, 1990).

Según Verschaffel, Janssens y Janssen (2005) el conocimiento del contenido incluye el dominio de hechos clave, conceptos, principios y marcos explicativos, procedimientos, técnicas y estrategias de resolución de problemas que se sitúan en las matemáticas escolares. Un aspecto crucial al respecto es el nivel de comprensión de los maestros sobre esas matemáticas escolares. Ma (1999) afirma que una profunda comprensión de las matemáticas se caracteriza por tener un conocimiento profundo, vasto y sólido de las ideas matemáticas. Esto quiere decir que la persona es capaz de establecer conexiones con conceptos matemáticos más generales y con otros conceptos con similar estado de complejidad, así como de ubicar una noción matemática como parte de un todo coherente, esto es una estructura conceptual.

El conocimiento del contenido matemático incluye la visión matemática del tema en relación con tres componentes del conocimiento sugeridos por Fischbein (citado en Ben Chaim, Keret e Ilany, 2012). Tales autores recogen una descripción de los mismos centrados en contenidos vinculados a la razón y proporción.

- Conocimiento formal: definiciones, reglas y propiedades de la proporción, sentido común en el uso del esquema proporcional, fundamento de las estrategias de resolución de los problemas.
- Conocimiento algorítmico: reglas de álgebra, resolución algebraica de ecuaciones, una cantidad estrategias de resolución de problemas proporcionales de diversos tipos.
- Conocimiento intuitivo: la habilidad de reconocer relaciones proporcionales directas e inversas, la habilidad de conectar el conocimiento intuitivo con un procedimiento apropiado según cada tipo de razón.
- Además es importante enfatizar que el conocimiento del contenido matemático de la razón y la proporción, debe ser conectado con la habilidad de interpretar resultados de forma cualitativa así como emitir juicios de valor fundamentados, esta habilidad es crucial para el desarrollo del razonamiento proporcional. (Ben Chaim, Keret e Ilany, 2012)

Existe evidencia empírica para sustentar la afirmación sobre la insuficiencia en el conocimiento del contenido matemático de los futuros maestros de educación primaria. En el Capítulo 2 hemos recogido algunos estudios que evidencian esta situación. Por ejemplo, en el contexto de las estructuras multiplicativas (Graeber y Tirosh, 1988) estudiaron el conocimiento y las habilidades de futuros maestros con respecto a la multiplicación y división con decimales mayores y menores que 1. Encontraron que una cantidad considerable de futuros maestros cometieron los mismos errores y mostraron las mismas ideas erróneas observadas en niños de 10 a 12 años. Resultados similares se reportaron en el estudio de Post, Harel, Behr y Lesh (1988). En otro estudio desarrollado por Simon (1993) enfocado en el conocimiento de futuros maestros sobre la división, específicamente sobre las conexiones entre los conocimientos implicados en la división, se reportó que los estudiantes para maestro poseían un conocimiento débil sobre las relaciones entre las cantidades implicadas y el papel que cada una juega en el algoritmo de esta operación.

La relevancia que el conocimiento matemático juega en el proceso formativo de los estudiantes de magisterio ha sido expresada por profesores e investigadores involucrados en el plan formativo, como a continuación se recoge:

> *La preparación de los futuros profesores de primaria en el área de Didáctica de la Matemática debe centrarse en los conocimientos profesionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas del nivel educativo correspondiente. Sin embargo, el estudio de los problemas didácticos no es posible sin un conocimiento suficiente del contenido disciplinar al que se refieren dichos conocimientos didácticos (...) Esto obliga a los futuros maestros a tener que estudiar también matemáticas.* (Godino, 2002, p. 3)

En nuestro estudio nos hemos centrado en el conocimiento matemático (conocimiento común del contenido, CCK) de futuros maestros de educación primaria en el dominio de la razón y la proporcionalidad. Estos contenidos matemáticos han sido objeto de un análisis didáctico que nos ha permitido organizar los distintos significados de estas nociones, las expectativas de aprendizaje y las tareas matemáticas implicadas en el experimento de enseñanza realizado. De modo que las tareas usadas en nuestra investigación consideran únicamente conocimientos de tipo matemático y es este tipo de conocimiento sobre el que centramos nuestra atención en el análisis de las actuaciones de los estudiantes de magisterio. Sin embargo, indicamos que para la puesta en común de las tareas matemáticas realizadas en la experimentación se planificaron conocimientos que la investigadora promovería durante la sesión, éstos no son únicamente de tipo común sino que también se consideran cuestiones de tipo especializado (Apartados 6.1.1.1, 6.2.1.1, 6.3.1.1 y 6.4.1.1, puntos referentes a la planificación de las puestas en común de cada tarea)

Sentadas las bases de las nociones de competencia, genéricamente y de la competencia matemática, así como de los constructos generados en el ámbito de la investigación para describir los tipos de conocimientos del profesor de matemática, describimos los conocimientos matemáticos y competencias que conforman el programa de la asignatura Matemáticas y su Didáctica, la cual ha sido el contexto en el que se ha desarrollado nuestra investigación.

3.2.2 La Asignatura Matemáticas y su Didáctica

La experimentación se ha desarrollado en el contexto de la asignatura Matemáticas y su Didáctica[35], del plan anterior al vigente, de la diplomatura en educación primaria, asignatura troncal de 9 créditos divididos de igual manera en créditos prácticos y teóricos. Ha dado lugar a la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria en el actual plan de formación del grado de maestro en educación primaria.

En el origen de la asignatura Matemáticas y su Didáctica, los profesores encargados de la misma decidieron orientar el enfoque de la asignatura hacia el estudio de los conocimientos de las matemáticas escolares (Flores, Segovia y Lupiáñez, 2008), entre las razones que motivaron esta orientación están: la preocupación el escaso conocimiento de las matemáticas que muestran los alumnos (indican que sólo a partir de un sólido conocimiento matemático es que se puede abordar el estudio de la Didáctica de la Matemática), y la distancia entre el primer curso de la diplomatura y la salida profesional. Así mismo se afirma que en esta asignatura se persigue "profundizar en las destrezas matemáticas que habían trabajado a lo largo de su escolaridad obligatoria, antes de introducir conceptos específicos de la Didáctica de la Matemática. El término que se viene utilizando para designar esta opción ha sido: *Matemáticas para maestros.*" (Flores, Segovia y Lupiáñez, 2008, p. 474). En relación con la denominación "matemáticas para maestros" señalan los autores citados que los contenidos de referencia son de carácter matemático, atendiendo a los conocimientos conceptuales y procedimentales, las representaciones, fenomenología, modelización e historia.

En la guía docente de la asignatura correspondiente al curso 2009-2010 se afirma que ésta se centra en el estudio de los contenidos matemáticas de la educación primaria haciendo al mismo tiempo consideraciones sobre su enseñanza desde la perspectiva de los propios contenidos, la fenomenología y el empleo de recursos didácticos. También se indica que los alumnos de magisterio deben dominar los conceptos, destrezas, algoritmos y estrategias básicas de las matemáticas de educación primaria y el primer ciclo de secundaria. Uno de los objetivos que se pretenden es que los estudiantes lleguen a conocer las matemáticas básicas que permitan desarrollar su futura labor profesional como docente en la educación primaria.

Los contenidos de la asignatura se organizan en seis temas, a saber: (1) el número natural (sistemas de numeración), (2) aritmética, (3) números racionales, (4) geometría, (5) magnitudes y su medida, y por último (6) introducción a la probabilidad y estadística.

La programación incluye una descripción de la metodología de los créditos prácticos y teóricos. En las clases de teoría el profesor es el encargado de presentar, orientar y sintetizar los temas, además es quien guía las reflexiones de los estudiantes, en estas sesiones se entrega a los alumnos unas guías de trabajo y hojas de actividades para cada tema. En las clases prácticas los estudiantes resuelven los cuadernos de prácticas trabajando en grupos utilizando además materiales concretos, bajo la supervisión del

[35] Ver Anexo A

profesor. En la programación de la asignatura se indica que el trabajo en los créditos prácticos priorizará la actuación de los alumnos, primero individual, y luego en grupos, sin embargo en la realidad los estudiantes trabajan únicamente en grupos.

En este documento se indican las expectativas de aprendizaje propuestas en la asignatura en términos de competencias transversales genéricas y competencias específicas. En la Tabla 3.12 mostramos las competencias, incluidas en el programa de la asignatura.

Tabla 3.12. *Competencias profesionales incluidas en el programa de la asignatura Matemáticas y su Didáctica del curso lectivo 2009-2010*

Competencias Transversales Genéricas	Capacidad de análisis y síntesis Capacidad de gestionar la información Conocimientos de informática relativa al ámbito de la enseñanza de las matemática Resolución de problemas matemáticos Trabajo en equipo Razonamiento crítico Aprendizaje autónomo Adaptación a nuevas situaciones
Competencias Específicas	Cognitivas (Saber) Adquirir los conocimientos básicos de las matemáticas que han de impartir en el ejercicio de su labor profesional y la capacidad de aplicarlos a la práctica. Capacidad crítica para analizar el Diseño Curricular en Matemáticas. Adquirir una visión globalizada e interdisciplinar de los contenidos en matemáticas Entender e interpretar problemas relevantes para la enseñanza de las matemáticas. Capacidad de aprender a aprender. Habilidad para el razonamiento lógico y la formulación de argumentos
	Procedimentales/Instrumentales (Saber hacer) Capacidad para ejercer como profesionales comprometidos en el cambio y mejora del proceso educativo y del entorno social en los contextos donde desarrollen su actuación así como de su mejora profesional, a través de la innovación y formación permanente. Capacidad de crítica y autocrítica en relación con el desarrollo de la profesión docente.
	Actitudinales (Ser) Capacidad para ejercer como maestro de manera crítica y reflexiva en una comunidad con diversidad cultural y con pluralidad de valores.

Tabla 3.12. *Competencias profesionales incluidas en el programa de la asignatura Matemáticas y su Didáctica del curso lectivo 2009-2010*

	Ser hábil para relacionarse con todos los colectivos implicados en la enseñanza y para el trabajo en equipos interdisciplinares. Adquirir actitudes y modelos de organización social que favorezcan la instauración en el aula de un compromiso ético y del derecho a la diferencia. Convencimiento de que su actitud en las relaciones con sus alumnos ha de ser de observación, escucha, apertura, tolerancia, flexibilidad y empatía.

Destacamos que en la guía docente de la asignatura Matemáticas y su Didáctica del curso 2009-2010 se expresan algunas competencias que vinculamos con el dominio de los contenidos matemáticos escolares. Estas competencias son:

- Resolución de problemas matemáticos.
- Adquirir los conocimientos básicos de las matemáticas que han de impartir en el ejercicio de su labor profesional y la capacidad de aplicarlos a la práctica.

Actualmente, la asignatura de corte similar se llama Bases Matemáticas para la Educación Primaria, sobre la misma destacamos que en la guía docente de la asignatura del curso 2010-2011 se ha modificado el listado de competencias correspondientes, algunas competencias no han variado y sobre otras se ha aportado una especificidad mayor. Subrayamos la inclusión de las competencias matemáticas como una de las expectativas de aprendizaje de la asignatura, a continuación las recogemos:

- Desarrollar competencias matemáticas básicas (pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones y emplear soportes y herramientas tecnológicas) sobre los bloques de contenido de las matemáticas escolares.
- Conocer las matemáticas de la educación primaria, su relación interdisciplinar con las demás áreas y los conocimientos didácticos referidos a su historia, fenomenología, sistemas de representación y modelización.
- Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas
- Plantear y resolver problemas de matemáticas vinculados con la vida cotidiana.

El desarrollo de las competencias matemáticas descritas requiere de procesos de enseñanza-aprendizaje que pongan el énfasis en la adquisición de las mismas. En la asignatura Matemáticas y su Didáctica se ha trabajado y continúa trabajando en este sentido. No obstante, consideramos que la cuestión del diseño de experiencias concretas elaboradas en al ámbito de una investigación y centradas en el desarrollo del conocimiento matemático desde una postura funcional así como de las competencias matemáticas, podría aportar conclusiones, reflexiones e incluso materiales en beneficio de la adquisición de la competencia matemática por parte de los futuros maestros. Sáenz

(2007) afirma que es difícil trabajar en el aula de magisterio desde una perspectiva constructivista en la línea del marco teórico que sustenta la propuesta del estudio PISA, pues no es fácil diseñar y gestionar en el aula de magisterio actividades poderosas de matematización y más difícil aún que los futuros maestros aprendan a diseñar y gestionar este tipo de actividades para su aula de primaria. Conscientes de esta realidad, decidimos abordar el proceso de planificación del diseño instruccional a través de un proceso sistemático de organización de los conocimientos matemáticos, objetivos, y selección de tareas matemáticas que constituirían la experimentación de nuestro estudio.

3.3 EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

La necesidad de realizar un proceso sistemático de planificación de las sesiones de la experimentación, nos llevó al análisis didáctico (Gómez, 2007) como una herramienta potente para realizar tal tarea. El análisis didáctico se ha utilizado para la preparación de las sesiones y a su vez ha aportado una serie de insumos que se han utilizado en el análisis de la información recogida.

La noción de análisis didáctico se ha empleado en Didáctica de la Matemática con diferentes sentidos. Para Puig (1997) el análisis didáctico de *las matemáticas* es "...el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos, tiene varios componentes…" (Puig, 1997, p. 61), uno de los cuales es el análisis fenomenológico sobre el que centra su atención, esta postura es amplia en tanto alude a la organización de los conocimientos de un área de conocimiento. Por otro lado, el análisis didáctico se ha tomado como un tipo de metodología de investigación empleada para sintetizar y organizar información, detectar regularidades, vacíos, y delimitar el problema de investigación (Gallardo y González, 2006). Un tercer sentido, que es el que hemos adoptado en nuestra investigación, hace referencia al análisis didáctico como un nivel del currículo de matemáticas, concretamente como un procedimiento para planificar unidades didácticas centradas en contenidos de las matemáticas escolares y consiste en cuatro tipos de análisis parciales: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación (Gómez, 2002; 2007; 2009).

Uso del Análisis Didáctico en el Ámbito de la Investigación

El significado que Gómez (2002, 2007, 2009) ha otorgado a esta expresión, ha surgido en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de educación secundaria, como un procedimiento "ideal" que permite guiar el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas. No obstante este investigador reconoce que el análisis didáctico es un análisis sistemático de las matemáticas escolares y, como tal, puede ser de utilidad más allá del entorno de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Señala que, por ejemplo, el análisis didáctico puede ser útil en aquellos estudios sobre la comprensión y el aprendizaje de temas matemáticos en los que es necesario diseñar pruebas y esquemas de análisis de las actuaciones de los sujetos cuando abordan esas pruebas.

Específicamente sugiere algunas ideas en relación con el uso que se le puede dar a los análisis a priori parciales que componen el análisis didáctico. De este modo Gómez (2007) sugiere que el análisis de contenido le puede permitir al investigador fundamentar conceptualmente el contenido matemático objeto de la investigación. El análisis cognitivo permite al investigador organizar de una manera sistemática las expectativas de aprendizaje vinculadas a ese contenido. Siguiendo las orientaciones sugeridas en el análisis de instrucción es posible diseñar y evaluar pruebas. En vista de la posibilidad de utilizar las herramientas y fundamentos considerados en la propuesta del análisis didáctico en el ámbito de la investigación, adelantamos que en nuestra investigación hemos desarrollado un análisis didáctico de los contenidos razón y proporcionalidad con el fin de organizar los contenidos, expectativas de aprendizaje y demás elementos de la planificación del trabajo de aula relativo a la fase de experimentación del estudio (Capítulo 4).

3.3.1 Descripción del Análisis Didáctico

El problema que aborda Gómez (2007), y que le conduce a la sistematización de la noción análisis didáctico, es una cuestión práctica que enfrentamos todos los profesores de matemáticas, ésta es la organización de la instrucción matemática. Este procedimiento lo puede seguir el profesor de matemáticas ante la tarea de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas concernientes a un contenido específico de las matemáticas escolares[36], por lo tanto el problema de planificación que se aborda se ubica en un nivel de planificación local, y no global como puede ser la planificación de una asignatura o nivel educativo.

El desarrollo teórico y componentes del análisis didáctico se fundamenta en las nociones de dimensiones y niveles del currículo, planteadas en los trabajos de Rico y sus colaboradores (Rico, 1997a, 1997b, 1997c) y en los trabajos de Simon vinculados con la noción de trayectoria hipotética del aprendizaje (Gómez, 2007).

Una de las ideas fundamentales que se derivan de los trabajos de Rico se refiere a los *organizadores del currículo* los cuales corresponden “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (1997c, p. 45). Los organizadores son herramientas que permiten acopiar, organizar y seleccionar información sobre los diferentes significados que adoptan los contenidos de las matemáticas escolares. Rico (1997a) afirma que la planificación de una unidad didáctica o de una hora de clase se debe fundamentar en la exploración y organización de los diversos significados de la estructura matemática objeto de esa planificación. Los organizadores que propone son los siguientes: aspectos históricos, fenomenología, sistemas de representación, errores y

[36] “El contenido matemático escolar está constituido por todo el acervo del conocimiento matemático que, a lo largo de la historia de las matemáticas escolares, se ha considerado como objeto de enseñanza en la educación básica. Incluye todas las parcelas del conocimiento matemático que desde diferentes grupos de especialistas en educación matemática y colectivos de profesores han sido consideradas, analizadas y organizadas para que formen parte de las matemáticas que se han enseñado en las aulas” (Lupiáñez, 2009; p. 38)

dificultades, materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas, expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje. Los organizadores, constituyen las unidades principales que han de desarrollarse en los análisis parciales que componen al análisis didáctico. Gómez (2007) señala que, por ejemplo, el procedimiento para realizar el análisis de contenido se basa en organizadores del currículo tales como los sistemas de representación, la estructura conceptual o la fenomenología; y que el análisis cognitivo se fundamenta en nociones como competencia, objetivo de aprendizaje, capacidad, dificultad y camino de aprendizaje. Es en el marco de la reflexión sobre los niveles y dimensiones del currículo de matemáticas donde surge el análisis didáctico. Esta herramienta de planificación que emerge como un nuevo nivel del currículo de matemáticas, uno en el que el profesor se preocupa por organizar los procesos de enseñanza que tendrán lugar en el salón de clase alrededor de un contenido matemático particular.

Otra de las nociones sobre las que se fundamentan los principios de la propuesta de análisis didáctico de Gómez (2007) es la de *trayectoria hipotética de aprendizaje* (THA) utilizada en los trabajos de Simon y colaboradores, entendida como una herramienta de planificación que considera los objetivos del aprendizaje de los estudiantes, las tareas que los promueven y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Gómez adapta esta noción y en su lugar se refiere al *camino de aprendizaje*, que en relación con una tarea corresponde a una secuencia de capacidades que los escolares pueden poner en juego para resolverla. Esta idea, entre otras, la utiliza para perfilar uno de los análisis parciales que forman parte del análisis didáctico.

En síntesis, Gómez (2007) define el análisis didáctico como "el procedimiento compuesto por estos cuatro análisis y en virtud del cual el profesor puede diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas" (p. 29). En relación con las cuatro dimensiones del currículo (conceptual, cognitiva, ética o política y social), propone cuatro componentes del análisis didáctico: el *análisis de contenido*, el *análisis cognitivo*, el *análisis de instrucción* y el *análisis de actuación*. Recogemos a continuación una breve descripción de cada uno, posteriormente los detallamos.

1. El análisis de contenido es el procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto.
2. El análisis cognitivo es el procedimiento a través del cual el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje.
3. El análisis de instrucción se centra en el diseño, análisis y selección de las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción.

4. El análisis de actuación está orientado a que el profesor determine las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento. (Gómez, 2009)

Una característica fundamental de este procedimiento de planificación es el carácter cíclico del mismo. La información que surge del análisis de contenido fundamenta el análisis cognitivo y estos dos a su vez aportan los criterios que permiten seleccionar o diseñar las tareas matemáticas en el análisis de instrucción. Recíprocamente el análisis de instrucción puede suscitar la necesidad de revisar y corregir los análisis previos (Gómez, 2009).

3.3.2 Procedimientos del Análisis Didáctico

Para efectos de nuestra investigación nos interesamos en describir las acciones a seguir en el desarrollo de cada uno de los análisis parciales que contempla el análisis didáctico, motivo por el cual no nos centramos en presentar cuestiones teóricas que sustentan esta propuesta.

Como punto de partida para el análisis didáctico se elige un tema matemático así como el nivel educativo en el que tendrá lugar la instrucción de ese tema, con el fin de recoger los documentos curriculares globales que marcarán muchas de las decisiones que guiarán el proceso de planificación. En los documentos curriculares globales se establecen los fines, expectativas de aprendizaje, extensión y profundidad de los contenidos, cuestiones metodológicas y de evaluación que, sin restringir el análisis didáctico, permiten establecer una delimitación en el procedimiento de planificación, de otro modo la persona que efectúa el análisis didáctico se vería inmersa en un proceso casi interminable. Con base en esta revisión es posible determinar cuáles contenidos son los centrales y por lo tanto en cuáles se ha de centrar la planificación.

En el caso de nuestra investigación y en relación a la elección del contenido nos interesamos por contenidos matemáticos o aspectos de los mismos que no se abordan necesariamente, por diferentes razones, en los programas o planes oficiales que estructuran un nivel educativo particular, siendo muchas veces el tiempo restringido o la limitada cantidad de horas que un curso tiene asignado el motivo por el cual no se incluye un contenido. Esta situación se da especialmente en el ámbito de la formación de maestros de educación primaria; en el caso de la Universidad de Granada se cuenta únicamente con dos asignaturas centradas en la formación didáctico-matemática de los futuros maestros.

La siguiente etapa del análisis didáctico es el análisis de contenido, mismo que sintetizamos a continuación.

3.3.2.1 Análisis de Contenido

El análisis de contenido es el procedimiento a través del cual el profesor identifica, organiza y selecciona los significados de un concepto o estructura matemática en el contexto de las matemáticas escolares (Gómez, 2007). El significado de un concepto matemático se aborda a través de tres dimensiones: sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología. Estas dimensiones ponen de manifiesto la multiplicidad de significados que es posible atribuir a los conceptos de las matemáticas escolares. Recogemos a continuación una descripción general de estas tres dimensiones.

Sistemas de representación

Como sostienen Castro y Castro (1997) "las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, especificas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes" (p. 96). La inclusión de este organizador, en el análisis de contenido, se justifica en el hecho de que un mismo concepto admite varias representaciones las cuales ponen de manifiesto u ocultan algunas propiedades del concepto. Esto motiva la exploración de diversas representaciones por parte del profesor, ya que la comprensión de un concepto matemático por parte de los estudiantes está relacionada directamente con la capacidad de interpretar y traducir entre diferentes representaciones. El contar con diferentes representaciones de un concepto también tiene una doble utilidad. Por un lado distintas representaciones atienden o enfatizan diferentes aspectos de la estructura del concepto lo cual posibilita una comprensión profunda de esa noción, y por otro lado es una forma de abordar las diferencias

Estructura conceptual

En términos generales, la estructura conceptual es la disposición y orden de los conocimientos, procedimientos, representaciones, entre otros, que comprenden los conceptos matemáticos. Entendemos que la estructura conceptual es como una red o sistema de conceptos enlazados de una forma coherente, cuyo objetivo es precisar las relaciones entre los elementos que caracterizan a ese concepto matemático.

Cada concepto configura una estructura matemática y forma parte de otras estructuras matemáticas (Gómez, 2007). Según este investigador abordar los significados de un concepto desde la perspectiva de su estructura conceptual consiste en identificar y organizar los elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas) y las relaciones (horizontales y verticales) correspondientes a ese concepto. Además, propone los mapas conceptuales como una herramienta para que el profesor recoja, organice, represente y comparta la información correspondiente a los significados de un concepto matemático.

Consideramos que representar la estructura conceptual de una noción es una tarea compleja, dado que las redes que sostienen el conocimiento matemático tienen muchas terminales, niveles, conexiones que no es posible expresar mediante un modelo sencillo. No obstante, es posible recoger una aproximación a esta estructura conceptual desde perspectivas delimitadas. En nuestra investigación hemos elaborado mapas conceptuales que reflejan las aproximaciones y relaciones que sobre los contenidos matemáticos de nuestro interés (razón y proporcionalidad) se exponen en el marco de referencia utilizado, el cual está centrado en cuestiones de la Didáctica de la Matemática o en la investigación de este campo.

Fenomenología

El término fenomenología y la expresión análisis fenomenológico están relacionados pero son cuestiones diferentes, como indican Segovia y Rico (2001) la fenomenología es una agrupación de fenómenos y el análisis fenomenológico se refiere a la descripción de esos fenómenos y su relación con el concepto.

En la propuesta del análisis didáctico se utiliza la noción *fenomenología*, como dimensión del significado de un concepto, para referirse a los fenómenos que dan sentido a dicho concepto. El análisis fenomenológico de una estructura matemática implica la identificación de tres cuestiones relevantes, a saber: (1) las subestructuras correspondientes a esa estructura, (2) los fenómenos organizados por cada una de ellas y (3) la relación entre subestructuras y fenómenos. El propósito final del análisis fenomenológico es identificar familias de fenómenos en diferentes contextos y describir cómo son modelizados por alguna subestructura de la estructura matemática original (Lupiáñez, 2009).

3.3.2.2 Análisis Cognitivo

A través del análisis cognitivo "el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje" (Gómez, 2007, p. 56).

Lupiáñez (2009) afirma que:

> *El profesor, a partir de la información obtenida en el análisis de contenido previo y del conocimiento sobre matemáticas escolares y sobre su aprendizaje, enuncia y organiza expectativas de aprendizaje sobre ese tema matemático. También analiza aquellas limitaciones que pueden interferir el aprendizaje y organiza la selección de tareas que les suministrará a los escolares las oportunidades de aprender.* (p. 36)

En este sentido son tres los organizadores del análisis cognitivo: (1) las expectativas de aprendizaje, que delimitan y organizan lo que el profesor espera que los escolares aprendan según diferentes niveles; (2) el análisis de limitaciones de aprendizaje, que se centran en los posibles errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje; y (3) las oportunidades de aprendizaje que el profesor brinda sus escolares, entre las cuales se destacan las tareas.

Para abordar el primero de los organizadores anteriores, Rico y Lupiáñez (2008) han desarrollado un procedimiento para organizar las expectativas de aprendizaje, concretamente los objetivos específicos y las competencias matemáticas descritas en el estudio PISA (OCDE, 2004), a saber: *pensar y razonar, comunicar, argumentar, representar, modelizar, plantear y resolver problemas, utilizar el lenguaje simbólico, formal, y técnico, y las operaciones, y emplear soportes y herramientas tecnológicas*. Se trata de relacionar ambos niveles de expectativas y describir en qué grado el trabajo sobre uno u otro objetivo contribuye al desarrollo de cierta competencia matemática. Para cada objetivo de aprendizaje, el profesor decide a qué competencias contribuye (Lupiáñez y Rico, 2008).

El segundo organizador del análisis cognitivo es el análisis de las limitaciones de aprendizaje relacionadas con el contenido matemático, se centra en la descripción de los posibles errores y dificultades que puedan surgir en el proceso de aprendizaje de ese contenido. Se entiende que las dificultades se expresan a través de los errores que manifiestan los estudiantes cuando resuelven las tareas (Lupiáñez, 2009). Como procedimiento de análisis de las limitaciones de aprendizaje este investigador sugiere que a partir de los objetivos específicos y de las dificultades que se recojan, en distintas fuentes de referencia y en relación con el contenido matemático, se debe establecer una relación entre las dificultades, los errores y los objetivos específicos. La información que se desprenda de este análisis será primordial para elegir las tareas que se realizarán durante el trabajo con los estudiantes.

El tercer organizador del análisis cognitivo corresponde a las oportunidades de aprendizaje (Lupiáñez, 2009), siendo la de mayor relevancia el diseño y selección de las tareas, sobre las que se centra el análisis de instrucción.

3.3.2.3 Análisis de Instrucción

Este análisis es "el procedimiento en virtud del cual el profesor puede analizar y seleccionar las tareas disponibles para el diseño de las actividades de enseñanza y aprendizaje" (Gómez, 2007, p. 76). Este análisis también considera la previsión de las posibles actuaciones de los estudiantes al resolver la tarea y de las secuencias de capacidades que se podrían poner de manifiesto al realizarlas. Esto es, describir los caminos de aprendizaje para esa tarea. Con base en las informaciones procedentes de los dos análisis previos, de contenido y cognitivo, es posible establecer los criterios que permitan analizar y seleccionar las tareas[37] que realizarán los estudiantes en el aula. En el mismo sentido, Lupiáñez (2009) indica que además del proceso de diseño, selección y secuenciación de las tareas, el análisis de instrucción contempla aspectos relativos a la gestión del aula como el empleo de materiales, de recursos, y la definición de criterios de evaluación.

Procedimiento para el Análisis de Instrucción

El análisis y selección de las tareas constituye el núcleo del análisis de instrucción (Gómez 2007), siendo de espacial relevancia el que los profesores cuenten con herramientas que les permitan evaluar la pertinencia de un conjunto de tareas para la enseñanza de un contenido particular. Se sugiere una serie de acciones encaminadas a guiar al profesor en la tarea de realizar el análisis de instrucción.

En la Tabla 3.13 presentamos una síntesis de las acciones sugeridas por los dos autores que venimos citando, destacamos que la numeración no responde a ningún tipo de correspondencia entre las acciones sugeridas en cada caso.

[37] Adoptamos la postura expuesta en Marín (n.d.) en relación con la noción de tarea, éste autor señala que una tarea es una propuesta para el alumno que implica una actividad de él en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como instrumento para el aprendizaje o la evaluación del aprendizaje.

Tabla 3.13. *Procedimientos para realizar el análisis de instrucción*

Según Gómez (2007, p. 84)	Según Lupiáñez (2009, p. 69)
1. Establecer el contexto en el que se va a realizar la tarea (nivel, marco curricular, normas sociales y sociomatemáticas del aula). 2. Seleccionar un objetivo de aprendizaje concreto para cuyo logro se seleccionarán las tareas. 3. Producir la tabla de capacidades-competencias para el objetivo de aprendizaje. 4. Caracterizar el objetivo de aprendizaje en términos de su contribución a las competencias y sus caminos de aprendizaje. 5. Seleccionar unas tareas que por lo general ya existen, la cuestión es evaluar la pertinencia de las mismas 6. Para cada tarea identificar las capacidades que se pueden poner en juego e identificar las competencias a las que se puede contribuir. 7. Construir el grafo de los caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando aborden cada tarea. 8. Establecer a qué competencias contribuye la tarea y en qué medida. 9. Evaluar la pertinencia de las tareas a partir de esta información. 10. Aceptar, rechazar o modificar las tareas y establecer una secuenciación.	1. Describir y clasificar tareas matemáticas, según contenidos y expectativas de aprendizaje, para detectar posibles errores. 2. Diseñar o seleccionar tareas sobre el contenido matemático, atendiendo a los criterios del punto 1 y con diferentes grados de complejidad (reproducción, conexión y reflexión). 3. Reformular el enunciado de algunas tareas para que promuevan el desarrollo de alguna competencia matemática específica (modelizar, plantear y resolver problemas). 4. Analizar críticamente secuencias didácticas presentadas en libros de texto y otros materiales curriculares, presentando propuestas de modificación. 5. Construir secuencias de tareas orientadas a promover la construcción de conocimientos nuevos, usar un material o recurso específico y (o) a guiar el logro de objetivos específicos y competencias matemáticas determinadas. 6. Elaborar criterios sobre el papel del profesor en el aula y de otros aspectos a considerar en la planificación de las sesiones de clase. 7. Analizar y seleccionar tareas orientadas a la evaluación del aprendizaje de un tema matemático. 8. Planificar los contenidos y expectativas de las clases relativas a la unidad didáctica considerando criterios de secuenciación y de gestión del aula.

Como se evidencia en la Tabla 3.13 la propuesta recogida en Lupiañez (2009) aporta elementos que no giran únicamente en torno al proceso y selección de las tareas sino que contemplan cuestiones relacionadas con el papel del profesor y la gestión de clase.

3.3.2.4 Análisis de Actuación

Con este análisis se cierra el ciclo del análisis didáctico y se da paso al inicio de un nuevo ciclo.

> *El análisis de actuación utiliza la información que surge de la puesta en práctica de las actividades de enseñanza y aprendizaje para producir información que permita determinar la comprensión de los escolares en ese momento, los contenidos a tratar en el aula y los objetivos de aprendizaje que se deben buscar en el nuevo ciclo.* (Gómez, 2007, p. 93-94)

Este análisis está relacionado con la dimensión de la evaluación pero no satisface exactamente los mismos propósitos pues no es objetivo del análisis de actuación asignar una calificación a los estudiantes sino más bien valorar el proceso de instrucción en conjunto, en este sentido entre los propósitos de este análisis están:

> *Establecer el seguimiento del progreso de los escolares al comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula; establecer los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula; caracterizar el aprendizaje de los escolares con motivo de la puesta en práctica de las actividades; y producir información relevante para la planificación en un nuevo ciclo del análisis didáctico*.(Gómez, 2007, p. 94)

Adicionalmente a las acciones descritas en relación con la valoración de las tareas y de la consecución de los objetivos de aprendizaje, en el análisis de actuación es preciso "establecer en qué medida el empleo de materiales y recursos optimizó el proceso de aprendizaje de los escolares; y valorar la conveniencia de los métodos e instrumentos de evaluación para extraer información del aprendizaje de los escolares de forma objetiva y clarificadora" (Lupiáñez, 2009, p. 71).

El análisis de actuación guarda una cercana relación con los otros análisis previamente desarrollados ya que el profesor puede usar la información recogida previamente para comparar lo previsto en la planificación y lo sucedido en el aula. En el caso de nuestra investigación los conocimientos acopiados y organizados en los análisis previos (contenido, cognitivo e instrucción) se utilizaron, como detallamos en el Capítulo 5, en otras fases del estudio ajenas a la planificación de la instrucción, principalmente en el análisis de las actuaciones de los participantes.

Uso del Análisis Didáctico en Nuestra Investigación

Como se ha descrito en el Capítulo 1, en nuestra investigación nos hemos interesado por estudiar cómo contribuye una secuencia de trabajo en el aula sobre la razón y la proporcionalidad, utilizando una metodología de trabajo colaborativo, en el proceso de desarrollo de la competencia matemática de futuros maestros de primaria. El diseño metodológico de la investigación corresponde a un experimento de enseñanza, mismo que describiremos con detalle en el Capítulo 5, el cual demandó la elaboración de un diseño instruccional. La necesidad de elaborar este diseño instruccional ha sido la que ha suscitado nuestro interés por utilizar el análisis didáctico. Subrayamos que han sido las investigadoras, responsables de esta investigación, quienes han utilizado el análisis didáctico y no los estudiantes de magisterio.

En nuestra investigación hemos utilizado el análisis didáctico como una herramienta de planificación y análisis en las distintas fases del experimento de enseñanza. Se ha elegido utilizar el análisis didáctico con el fin de elaborar una propuesta respaldada por un proceso de estudio y reflexión relativo a los diferentes significados de los contenidos matemáticos implicados: la razón y la proporcionalidad. La propuesta de trabajo en el aula debía contemplar los intereses investigadores a la vez que posibilitara promover las expectativas de aprendizaje relativas a las competencias matemáticas de los futuros maestros.

En el Capítulo 4 presentamos el análisis didáctico que hemos realizado para los contenidos matemáticos razón y proporcionalidad el cual responde a los intereses de nuestro estudio.

En el Capítulo 5 describimos el papel que ha jugado el análisis didáctico en cada una de las fases del experimento de enseñanza realizado.

Capítulo 4. Análisis Didáctico de la Razón y la Proporcionalidad

En este capítulo centramos nuestra atención en el análisis didáctico que sobre la razón y proporcionalidad hemos realizado. El análisis didáctico se ha utilizado con diferentes fines en las tres fases del experimento de enseñanza objeto de nuestra investigación; como herramienta de planificación de las sesiones de intervención, como fuente de recursos para guiar la toma de decisiones de la investigadora-docente *in situ* y como marco para el análisis de las producciones escritas y orales proporcionadas por los estudiantes. Hemos realizado un análisis didáctico de acuerdo a las necesidades de nuestro estudio, considerando las pautas teóricas que caracterizan los distintos análisis parciales contemplados en el análisis didáctico (Gómez, 2007, 2009; Lupiáñez, 2009).

Este Capítulo 4 se organiza en tres bloques: (1) análisis de contenido, (2) análisis cognitivo y (3) análisis de instrucción. El análisis de actuación se contempla en el Capítulo 7 "Análisis retrospectivo de las sesiones" y las pautas seguidas para efectuar este análisis se describen en el Capítulo 5 "Tipo de estudio y metodología".

4.1 ANÁLISIS DE CONTENIDO

Para nuestro experimento de enseñanza hemos realizado un análisis de contenido (Gómez, 2009) sobre la razón y la proporcionalidad con el fin de identificar y organizar la multiplicidad de significados asociados a estos conceptos, los cuales constituirán los cimientos sobre los cuales se elabora el diseño de la experiencia de aula de nuestra investigación. Con tal propósito, hemos explorado las tres dimensiones del significado de los conceptos matemáticos razón y proporcionalidad: la referencia formal dada por su estructura conceptual, los sistemas de representación que se utilizan en los mismos, y el sentido con que se usan estos conceptos o sea su fenomenología.

Previo a ello, delimitamos los conceptos a partir del tratamiento curricular que de los mismos se hace atendiendo a los estudiantes para los que va dirigida dicha materia. Lo hacemos desde los lineamientos establecidos en la guía docente de la asignatura, guiones de algunos temas y desde la revisión de textos de Didáctica de la Matemática, así como desde la revisión de estudios relevantes en el campo de la razón y la proporcionalidad (Anexo B). Algunos de dichos textos se incluyen en la bibliografía recomendada a los estudiantes para el trabajo de los temas 3 y 5 "Números Racionales" y "Magnitudes y su Medida" (ej. García y Bertrán, 1987; Godino, 2004; Llinares y Sánchez; 1988), y otros que, a partir de la experiencia de las investigadoras, son relevantes en el campo de la razón y la proporcionalidad (ej. Cai y Sun, 2002; A. Fernández, 2001; Freudenthal, 1983; Llinares, 2003b; Vergnaud, 1988). Esta delimitación nos ha permitido identificar distintos acercamientos a las definiciones de razón, proporción y proporcionalidad; detectar y clasificar conocimientos conceptuales y procedimentales relativos a los contenidos, identificar los focos prioritarios sobre los cuales se puede centrar el aprendizaje de tales nociones en el contexto de la formación de maestros, las representaciones mediante las cuales tales nociones se ponen de manifiesto y las situaciones en las cuales están implicadas.

4.1.1 Revisión de los Contenidos en los Documentos Curriculares

El desarrollo del análisis didáctico se ha realizado en el contexto de la asignatura Matemáticas y su Didáctica. Como punto de inicio del análisis de contenido nos acercamos a los documentos curriculares de la asignatura con el fin de conocer los contenidos y expectativas de aprendizaje definidas para la razón y la proporcionalidad. En vista del diseño de trabajo de aula esta observación no sólo nos permite justificar la pertinencia del mismo sino también delimitar los análisis de contenido y cognitivo.

Los documentos que se han tomado como referencia para esta revisión son:

- Guía docente de la asignatura Matemáticas y su Didáctica del curso académico 2009-2010[38].
- Guión del Tema 3 Números Racionales[39].
- Guión del Tema 5 Magnitudes y su Medida[40].

Observamos que en el programa de la asignatura no aparece explícitamente el tratamiento de los contenidos. No obstante, en algunos de los temas se incluyen aspectos relativos a estos tópicos. En el programa de la asignatura se incluyen contenidos relacionados con la noción de razón, específicamente en el tema 3 "Números Racionales", cuando se estudia el concepto de fracción y sus significados, entre los cuales la razón es uno de ellos. En el guión del tema Números Racionales se incluyen los objetivos:

- Conocer el concepto de fracción y número racional y relacionarlos.
- Manejar y relacionar la representación fraccionaria y decimal de los números racionales.
- Identificar algunos significados de fracción y cómo se caracteriza la equivalencia de fracciones en cada uno de ellos.
- Representar los problemas empleando diversos modelos para obtener el resultado de las operaciones.

En el guión del Tema 3 se incluyen los contenidos que a continuación se enlistan y que desde nuestra perspectiva están directamente relacionados con la razón y la proporcionalidad:

[38] Los documentos de la asignatura se recogen en el Anexo A.
39 Guión del tema Números Racionales del curso 2009-2010.
40 Guión del tema Magnitudes y su Medida del curso 2009-2010.

- Contextos y usos de las fracciones.
- Definición y significados del concepto de fracción: parte-todo, operador, razón, y cociente.
- Representaciones y modelos para las fracciones.
- Concepto de número racional. Fracciones equivalentes. Operaciones con números racionales en expresión fraccionaria. Propiedades.
- Razón y Proporción. Regla de tres. Porcentajes.

En el guión del tema Magnitudes y su Medida (Tema 5) no aparecen enunciados los objetivos específicos pero sí aparece un listado de los contenidos que se estudiarán, estos son: importancia social y cultural de la medida, aproximación al concepto de magnitud, tipos de magnitudes y ejemplos, situaciones y contextos asociados a las magnitudes, noción de cantidad, necesidad de la medida, soluciones históricas, concepto de medida, unidades de medida, el Sistema Internacional de Medida, medida directa de magnitudes (longitud, amplitud, superficie, volumen, masa, capacidad, tiempo), instrumentos de medida, medida indirecta de magnitudes, longitudes (circunferencia y arco, teorema de Pitágoras, Teorema de Thales), amplitud (ángulos centrales de un círculo), superficie (áreas de figuras planas, laterales y totales de cuerpos en el espacio), volumen (volúmenes de cuerpos en el espacio), estimación en medida, materiales y recursos. De los anteriores contenidos reconocemos que están directamente relacionados con la razón y la proporcionalidad:

- Tipos de magnitudes (directa e inversamente proporcionales).
- Medida indirecta de magnitudes. Proporcionalidad aritmética y geométrica.
- Teorema de Thales.

En las orientaciones para el trabajo del estudiante se expresa que en este tema se va a profundizar sobre qué significa medir, para lo cual se plantea necesario aclarar qué se mide, qué es magnitud, y cuáles son sus elementos y características. Además se expresa que se repasarán destrezas y fórmulas que se emplean para medir las magnitudes longitud, superficie, amplitud del ángulo, volumen y capacidad. Las orientaciones terminan indicando que se analizarán medidas indirectas y procedimientos basados en la proporcionalidad.

4.1.1.1 Presencia de los Contenidos en el Currículo de Educación Primaria

Esta revisión la hemos realizado tomando como referencia el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establece las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación primaria obligatoria en España. En este documento encontramos datos que nos permiten afirmar que durante la educación primaria los maestros deben enseñar a los niños algunos aspectos relativos a la razón y la proporcionalidad, motivo primordial por el cual los maestros en formación deben estar capacitados.

A continuación exponemos los contenidos propuestos en cada ciclo educativo que están directamente relacionados con las nociones. En la Tabla 4.1 hemos incluido el ciclo educativo, bloque y contenidos del Real Decreto 1513/2006, en los cuales aparecen contenidos relacionados con los significados de las fracciones, razón, proporción, magnitudes, unidades de medida, semejanza de figuras y razones especiales como π.

Tabla 4.1. *Presencia de los contenidos en el currículo escolar de educación primaria*

Bloque	Contenidos
	I Ciclo
2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes	Longitud, peso-masa y capacidad. Estimación de resultados de medidas (distancias, tamaños, pesos, capacidades...) en contextos familiares.
	II Ciclo
1. Números y operaciones	Números fraccionarios para expresar particiones y relaciones en contextos reales, utilización del vocabulario apropiado.
2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes	Longitud, peso-masa y capacidad Unidades de medida convencionales: múltiplos y submúltiplos de uso cotidiano, utilización en contextos reales. Estimación de medidas de objetos de la vida cotidiana.
3. Geometría	La circunferencia y el círculo.
	III Ciclo
1. Números y operaciones	Números fraccionarios. Obtención de fracciones equivalentes. Ordenación de números enteros, de decimales y de fracciones por comparación y representación gráfica. Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. Calculo de tantos por ciento básicos en situaciones reales.
2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes	Longitud, peso/masa, capacidad y superficie Equivalencias entre unidades de una misma magnitud. Estimación de longitudes, superficies, pesos y capacidades de objetos y espacios conocidos; elección de la unidad y de los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida. Unidades de medida del tiempo y sus relaciones. La precisión con los minutos y los segundos. Equivalencias y transformaciones entre horas, minutos y segundos, en situaciones reales.
3. Geometría	Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.
4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad	Estimación del grado de probabilidad de un suceso.

En el currículo escolar, las situaciones de proporcionalidad suelen plantearse en el tercer ciclo (y principalmente en 6º), aunque como plantea A. Fernández (2001) los alumnos de edades cada vez más tempranas pueden generar aproximaciones cualitativas a este tipo de situaciones. Según Llinares (2003b) es necesario considerar que:

> *Los alumnos de primaria necesitan desarrollar un "sentido de la noción de razón" entendido como el índice comparativo que proporciona información sobre una situación, y por tanto distinguir las situaciones en las que es posible aplicar este índice comparativo de las situaciones en las que no es posible. Esto implica reconocer que en una situación de proporcionalidad los cambios en una magnitud implican cambios en la otra, pero que el índice comparativo entre cantidades correspondiente es constante.*
>
> *Los alumnos deben desarrollar un lenguaje apropiado para pensar sobre, comunicar y explicarse en este tipo de situaciones. El desarrollo del vocabulario apropiado es por tanto un aspecto clave vinculado al desarrollo de la competencia matemática.*
>
> *Con el análisis de situaciones en las que se den relaciones de proporcionalidad y situaciones en las que no se den estas relaciones, los alumnos pueden desarrollar una intuición desde la que apoyan el "sentido de razón" y dotar de significado a los símbolos utilizados para expresar proporciones.* (p. 210)

En el currículo de primaria no sólo se expresan expectativas de aprendizaje relacionadas con los contenidos matemáticos sino que se describen una serie de capacidades que han de desarrollar los niños a lo largo de su proceso formativo, dentro del cual el maestro debe asumir un papel activo. Estas capacidades giran en torno a la resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias de cálculo mental y detección de relaciones entre los números, se espera que los niños sean capaces de explicar oralmente y por escrito el significado de los datos de los problemas, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas. También en el marco curricular de primaria se indica como expectativa de aprendizaje la capacidad para formular razonamientos y para argumentar sobre la validez de una solución identificando, en su caso, los errores, la colaboración activa y responsable en el trabajo en equipo, manifestando iniciativa para resolver problemas que implican la aplicación de los contenidos estudiados. El marco curricular de la educación matemática en primaria se basa en la noción de competencia matemática. Esta realidad impone al maestro el desafío de fomentar en sus estudiantes el desarrollo de la competencia matemática, motivo por el cual es razonable esperar que los maestros posean un nivel al menos aceptable de tales competencias.

4.1.2 Organizadores del Análisis de Contenido

Según Lupiáñez (2009) el análisis de contenido se sitúa en la dimensión cultural y conceptual del currículo. En esta fase del análisis didáctico se identifica, selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos del contenido matemático que será objeto de instrucción. De acuerdo con este autor los organizadores del currículo que conforman el análisis de contenido son: (a) la revisión y organización de los conceptos y procedimientos que conforman el tema (esto es la estructura conceptual del contenido matemático), (b) el modo en que esos conceptos y procedimientos pueden representarse, y (c) la organización de los fenómenos y situaciones en los que está implicado el contenido en cuestión.

4.1.2.1 Noción de Razón

La revisión de los textos y de estudios previos nos ha permitido recoger distintas aproximaciones de los conceptos básicos objeto de nuestro estudio: razón y proporcionalidad. Mostramos aquí una síntesis de aquellas relativas a la razón.

Respecto a la noción de razón, un planteamiento afirma que la razón entre dos cantidades de magnitud es el cociente de las medidas, en la misma unidad, de tales cantidades; tomando como dividendo la mayor de las medidas (F. Fernández, 2001; García y Bertran, 1987; Grupo Beta, 1990). Dos implicaciones de este posicionamiento se refieren a que las cantidades han de ser homogéneas, es decir pertenecer a la misma magnitud y que la razón, en este caso, corresponde a un número real mayor que 1. Este punto de vista guarda relación con la tradición geométrica de la antigüedad griega en la que sólo se permitía formulaciones de razones entre cantidades de la misma magnitud.

Otro enfoque, que considera la razón como un número real, define esta noción a partir de la consideración de una cortadura sobre los números racionales positivos, además de las implicaciones descritas en el párrafo anterior (se presenta en la propuesta de Fiol y Fortuny, 1990). Desde esta perspectiva se desprende que toda razón entre magnitudes determina una proporcionalidad entre las cantidades de la misma magnitud.

Las descripciones de la razón presentadas en los textos mencionados utilizan un lenguaje matemático simbólico para expresar la definición de tal noción. Desde nuestra perspectiva se hace uso de un nivel de formalismo matemático elevado, considerando la carencia de un conocimiento matemático profundo por parte de futuros maestros de primaria, la cual ha sido puesta de manifiesto en estudios nacionales e internacionales (Ball, 1990; Graeber, Tirosh, y Glover, 1989; Simon, 1993; Valverde, 2008).

Una aproximación a la noción de razón que puede utilizarse en el ámbito de la formación de maestros es la expuesta por Ben-Chaim, Keret e Ilany (2012) quienes sostienen "razón es la cuantificación de una relación multiplicativa que se puede calcular dividiendo (o multiplicando) una cantidad por otra. El cuantificador multiplicativo se determina dividiendo (o multiplicando) dos magnitudes". (p. 25)

Las razones pueden responder a comparaciones parte-parte en un conjunto, o comparaciones parte-todo. De acuerdo con Llinares (2003b) la interpretación parte-todo, del número racional, puede ser considerada un caso particular de las razones parte-todo. La generalidad de la interpretación como razón consiste en que permite comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte-todo en un contexto de medida sólo permite comparar cantidades del mismo tipo. Además de la distinción previa, Godino (2004) destaca rasgos relevantes que diferencian a una razón de una fracción entre los cuales se encuentran: a) uso de otros símbolos para representar la razón como los dos puntos o uso de flechas, b) las razones pueden tener un cero como segunda componente, c) las razones no son siempre números racionales, d) las operaciones con razones no tienen el mismo significado ni procedimiento que las operaciones con fracciones.

Otro acercamiento a esta noción surge a partir de la consideración de la razón como una de las posibles interpretaciones o significados del número racional (Bermejo, 2004; F. Fernández, 2001; Godino, 2004; Llinares, 2003b, Llinares y Sánchez, 1988). Tales autores plantean que en algunas ocasiones las fracciones son usadas como "índice comparativo" entre dos cantidades de igual o diferente magnitud. No obstante existen diferencias entre una fracción y una razón, que surgen del hecho de que las fracciones son cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero, mientras que una razón es un par ordenado de cantidades de magnitud, cada una de las cuales vienen expresadas mediante un número real y una unidad de medida (Godino, 2004).

Otra definición de la razón se refiere a ésta como una función o aplicación de un par ordenado de números o cantidades de magnitud (Freudenthal, 1983; F. Fernández, 2001; A. Fernández, 2001). Desde este punto de vista y de modo particular F. Fernández (2001) restringe los elementos del dominio de la función a cantidades de la misma magnitud y el ámbito de la función al conjunto $(1,+\infty)$ lo cual implica que los valores de la variable dependiente de tal función han de ser números mayores que 1.

Por su lado Freudenthal considera que la razón es una relación de equivalencia en el conjunto de pares ordenados de números (o valores de magnitud), indicada formalmente por $a:b=c:d$ si el par (a,b) es equivalente al par (c,d). La consideración de razón como "relación de equivalencia" conlleva, según Freudenthal, implicaciones relativas al estatuto lógico de tal noción pues afirma que "el significado propio de la razón es hablar sobre igualdad (o desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón, ser capaz de decir con sentido "*a* es a *b*" como "*c* es a *d*" sin anticipar que "*a* es a *b*" puede reducirse a un número o valor de magnitud que es el mismo al que puede reducirse "*c* es a *d*". Es evidente que tal perspectiva se opone a aquellas que consideran a la razón como un cociente, es decir como un número que se obtiene como resultado de hacer la división entre dos cantidades.

Según A. Fernández (2001), el estatuto lógico de la razón, desde el punto de vista fenomenológico, ha de escribirse entonces en términos de una relación de igualdad "*tener la misma razón*", señala que este punto de vista guarda relación con la visión de Euclides, ya que en el libro V de los Elementos lo que define no es "razón" sino "guardar razón" y cuando se refiere a cantidades proporcionales dice "tener una misma razón". Según este mismo investigador el estatuto lógico de la razón es pues, desde este punto de vista, de un nivel más elevado que el de número, fracciones, longitudes y otros conceptos con los que los alumnos han tropezado previamente en su escolaridad. El sentido en el que califican el nivel más elevado es el que le da el provenir de una relación de equivalencia pues lo que organiza es una propiedad intensiva[41] y no una

[41] Son las cualidades de la materia independientes de la cantidad que se trate, es decir no dependen de la masa, no son aditivas y, por lo general, resultan de la composición de dos propiedades extensivas. El ejemplo perfecto lo proporciona la densidad, que relaciona la masa con el volumen.

propiedad extensiva[42] de los objetos o conjuntos de objetos. De tal perspectiva se desprende la posibilidad de considerar las cantidades en la misma o en diferentes magnitudes.

En este trabajo consideraremos la razón como una relación de equivalencia en el conjunto de pares ordenados de números o valores de una magnitud, particularmente la tomamos como una función de un par ordenado (antecedente y consecuente) de números o valores de magnitud, es decir en este trabajo adoptamos la definición y acercamiento hacia la noción de razón propuesta por Freudenthal (1983) y que ha sido expuesta y descrita detalladamente por A. Fernández (2001).

Las posibilidades de considerar la razón en una o en dos magnitudes, la extensión de la razón a contextos más amplios que el de las relaciones en una magnitud y entre magnitudes a la vez que es posible establecer comparaciones del tipo parte-parte y parte-todo da lugar a diferentes tipos de fenómenos organizados por la razón. Por otro lado la variedad de situaciones se amplía al considerar los distintos tipos de razones que describimos brevemente en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2. *Tipos de razones*

Tipos	Descripción
Razones internas Razones externas	Si la relación se establece en una magnitud o entre dos magnitudes diferentes.
Exposiciones Composiciones Constructos	Si la razón se considera en un contexto más amplio que el de las relaciones en una magnitud y entre magnitudes, considerando otros tipos de conjuntos.
Razones enteras, no enteras, racionales e irracionales	Si el valor correspondiente a la razón es un número entero, racional o irracional.

La variedad de propiedades intensivas organizadas por la razón es cuantiosa, de modo que haremos referencia a dos grandes subdivisiones que han sido tratadas en el estudio de A. Fernández (2001). Una subdivisión surge al considerar la relación en una magnitud o entre magnitudes (razones externas e internas) que describimos en el siguiente apartado. La otra subdivisión surge al considerar la razón en un contexto más amplio que el de las magnitudes y la misma es un modo de organizar los fenómenos en los que están implicadas las nociones de razón y proporcionalidad, a saber: exposiciones, composiciones y constructos. En el apartado 4.1.5 "Análisis Fenomenológico" presentamos una síntesis de la propuesta de Freudenthal que ha sido cuidadosamente expuesta por A. Fernández (2001).

Razones Internas y Razones Externas

La razón puede ser una relación en una magnitud o entre magnitudes, A. Fernández (2001) ilustra esta división mediante el caso del movimiento uniforme. Representando

[42] Son las cualidades de la materia dependientes de la cantidad que se trate. Son aditivas y cambian cuando cambia la cantidad de materia, ej. el peso, la masa y el volumen.

la relación mediante un esquema (Figura 4.1), sintetiza las magnitudes implicadas. Con base en el mismo, el investigador describe la estructura que caracteriza a la razón.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Tiempo} & & \text{Espacio} \\
M_1 & \xrightarrow{\quad f \quad} & M_2 \\
t_1 & \longrightarrow & e_1 = f(t_1) = \alpha \cdot t_1 \\
t_2 & \longrightarrow & e_2 = f(t_2) = \alpha \cdot t_2
\end{array}
$$

Figura 4.1. Descripción funcional del movimiento uniforme

En el lenguaje cotidiano el movimiento uniforme se puede expresar mediante la generalización de la relación "en *n* veces el tiempo se recorre *n* veces el espacio". En A. Fernández (2001) se puede leer el proceso que permite extender la relación de N a Q y de Q a R, por lo que para cualquier real positivo α se tiene que "en α veces el tiempo se recorre α veces el espacio".

Si se toman dos tiempos t y t_0, tales que $e = f(t), e_0 = f(t_0)$, y escribimos $\alpha = \dfrac{t}{t_0}$, entonces: $e : e_0 = f(t) : f(t_0) = f(\alpha t_0) : f(t_0) = \alpha \cdot f(t_0) : f(t_0) = t : t_0$, y entonces se puede afirmar que los espacios recorridos son proporcionales a los tiempos empleados.

De la expresión anterior se puede concluir que $e = f(t) = \left[f(t_0) : t_0 \right] \cdot t$, lo cual quiere decir que el espacio es una función lineal del tiempo, y es equivalente a la expresión: $f(t) : t = \left[f(t_0 : t_0) \right] = k, k$ constante. Esta última es una expresión que pone de manifiesto que la velocidad en el movimiento uniforme es constante.

Siguiendo el ejemplo del movimiento uniforme A. Fernández (2001) señala que hay relaciones (razones) en las que los dos elementos pertenecen al mismo espacio de medida, es decir que se forman en el sistema, éstas reciben el nombre de razones internas, mientras que las razones que se forman entre los dos sistemas (magnitudes) se denominan razones externas. En la Figura 4.2 se describen las dos magnitudes y sus elementos.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Tiempo} & & \text{Espacio} \\
M_1 & \xrightarrow{\quad f \quad} & M_2 \\
t_1 & \longrightarrow & e_1 \\
t_2 & \longrightarrow & e_2
\end{array}
$$

Figura 4.2. Magnitudes implicadas en el movimiento uniforme

Se cumple entonces que las razones internas en una magnitud son iguales a las razones internas entre elementos correspondientes en la otra magnitud. Luego las razones externas entre elementos correspondientes son constantes.

Una proporción entre las dos magnitudes conlleva una función lineal entre las mismas, esto implica que las razones internas son invariantes bajo la función aunque éstas sean distintas en cada par de razones consideradas. Es decir $t_1 : t_2 :: f(t_1) : f(t_2)$, y que las razones externas entre elementos que la función relaciona son iguales, es decir siempre es la misma razón esto es $\alpha \cdot t_1 : t_1 :: \alpha \cdot t_2 : t_2$.

Como afirma A. Fernández (2001) si las razones se interpretan como un cociente entonces la razón interna es un número (escalar) y la razón externa es una magnitud (cantidad intensiva).

La consideración de la razón como una función satisface una serie de relaciones que A. Fernández (2009) sintetiza como a continuación en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3. *Síntesis de la descripción de la razón y la proporción*

Interpretación	Razones Internas	Razones Externas
f es una función lineal	Invarianza	Constancia
	$t_1 : t_2 :: f(t_1) : f(t_2)$	$\alpha \cdot t_1 : t_1 :: \alpha \cdot t_2 : t_2$
Linealidad	Implícita	Explícita
	$f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$	$f(t) = \alpha \cdot t$
Cociente	Número	Magnitud
	Cantidad extensiva	Cantidad intensiva
	Ej. Escalares	Ej. Rapidez, densidad,…

Nota: Fuente A. Fernández (2009)

Como se ha descrito anteriormente, Freudenthal (1983) clasificó una razón como interna[43] si sus elementos (antecedente y consecuente) comparten el mismo espacio de medida, o en terminología de Freudenthal si provienen del mismo "sistema". Similarmente, una razón externa está compuesta por elementos que no comparten el mismo espacio de medida. Sin embargo surge cierta confusión debido a que en las investigaciones que tuvieron origen en la tradición científica (Karplus, Pulos y Stage, 1983; Noelting 1980a, 1980b), se usó una definición alterna de "sistema", este término se utilizó para referirse a un conjunto de elementos u objetos que se relacionan.

De acuerdo con esta concepción alterna, el ejemplo muestra dos sistemas con personas y coches relacionándose.

[43] La tradición geométrica de la antigüedad griega sólo permitía formulaciones con razones *internas*; es decir sólo se permitían operaciones algebraicas en un marco geométrico complicado. Es un inconveniente de la geometría griega que, a causa de la falta de razones externas, intercambiar los términos medios en las proporciones no estaba permitido en general y había que resolver ese inconveniente mediante complicados procedimientos (Freudenthal, 1983).

$$\underbrace{4 \text{ personas: } 1 \text{ coche}}_{\text{Sistema A}} = \underbrace{20 \text{ personas: } 5 \text{ coches}}_{\text{Sistema B}}$$

La noción de los científicos respecto a la razón interna corresponde a una comparación de elementos en (o dentro de) un estado científico o sistema (correspondiente a la razón externa de Freudenthal). Para ellos una razón externa es aquella que implica elementos de dos sistemas diferentes. De este modo, según la definición de estos investigadores las siguientes proporciones corresponden a razones internas y externas respectivamente:

4 personas: 1coche → razón interna desde la tradición de la ciencia
20 personas: 4 personas → razón externa desde la tradición de la ciencia

Según Lamon (2007) la confusión es fácilmente eliminada usando la terminología "*en (within) o entre (between) sistemas*" o "*en (within) o entre (between) espacios de medida*". En el presente trabajo usamos la terminología de Freudenthal (1983) para referirnos a las razones externas e internas.

La razón también se puede considerar desde otra perspectiva, pues la relación multiplicativa puede ser "entera" o "no entera" (Freudenthal, 1983; Karplus et al., 1983; Tourniaire y Pulos, 1985)[44]. Por ejemplo, en un problema cuya resolución se plantee por medio de $\frac{2}{4}=\frac{12}{x}$, se observa que tanto dentro de la razón dada (2x2=4) como entre las razones (2x6=12) hay múltiplos enteros. Por otro lado una razón no es entera, cuando al menos una de las relaciones multiplicativas (dentro o entre las razones) no es un número entero. Por ejemplo, en un problema cuya resolución se plantee por medio de $\frac{8}{5}=\frac{48}{x}$ observamos que hay un múltiplo entero entre las dos razones (8x6=48) pero en la razón interna la relación no es entera ($8\times\frac{5}{8}=5$ o $5\times 1\frac{3}{5}=8$).

<u>*Conocimientos Procedimentales Vinculados a la Estructura de la Razón y la Proporcionalidad*</u>

Se ha definido la razón como una relación de equivalencia en el conjunto de pares ordenados de números o cantidades de magnitud, esto es: Si $a:b::c:d$ entonces el par (a,b) es equivalente al par (c,d).

Tomando una unidad u, la clase de equivalencia del par (a,b) se puede representar mediante un número o medida de una magnitud r de manera que: $a:b::r:u$ y la clase $(a,b)=$ clase (r,u). El par (r,u) se puede considerar como el representante canónico de la clase y el valor r como valor numérico de la razón, esto permite pasar del campo de las razones al campo de los números y escribir las razones en forma de fracciones $\frac{a}{b}$ (A. Fernández, 2001). Este investigador señala que para efectuar los procedimientos,

[44] Citados por Bjorg (2005).

técnicas y algoritmos se han de considerar las razones de forma operativa en el contexto de la aritmética de las fracciones y las propiedades de la razón operativamente como propiedades de las fracciones.

Esta forma de concebir las razones hace posible describir algunos principios de las aplicaciones que preservan la razón, mismas que enlistamos y describimos a continuación del esquema de la Figura 4.3.

$$
\begin{tikzcd}
\Omega_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\omega_1"'] & \Omega_2 \arrow[d, "\omega_2"] \\
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\omega_1(A) & \longrightarrow & \omega_2[\varphi(A)] \\
\omega_1(B) & \longrightarrow & \omega_2[\varphi(B)] \\
\omega_1(C) & \longrightarrow & \omega_2[\varphi(C)]
\end{array}
$$

Figura 4.3. Aplicación φ entre los conjuntos Ω_1 y Ω_2 que preserva la razón

La transitividad de la preservación de la razón.

- Si $\omega_1(A) : \omega_1(B) = \omega_2[\varphi(A)] : \omega_2[\varphi(B)]$ y $\omega_1(B) : \omega_1(C) = \omega_2[\varphi(B)] : \omega_2[\varphi(C)]$ entonces $\omega_1(A) : \omega_1(C) = \omega_2[\varphi(A)] : \omega_2[\varphi(C)]$
- A través de sencillas operaciones se puede observar que la constancia de razones externas es equivalente a la preservación de las razones internas.
- El comportamiento bajo la composición de aplicaciones.

  Sea φ una aplicación entre un conjunto Ω_1 y otro Ω_2 que preserva la razón y sea γ otra aplicación entre el conjunto Ω_2 y otro conjunto Ω_3 que también preserva la razón, entonces la aplicación compuesta $\gamma \circ \varphi$ también conserva la razón.

  A. Fernández (2001) también señala que si se trata de dos aplicaciones que mantienen constante la relación externa, por ejemplo la composición de dos semejanzas con factores de escala k_1 y k_2, la aplicación compuesta nos daría una nueva semejanza cuyo factor de escala es el producto de los factores de escala $k_2 \cdot k_2$.
- El morfismo en relación con la adición entre magnitudes y la linealidad de la función f entre magnitudes.
- Es decir se cumple que la aplicación f definida entre las magnitudes M_1 y M_2 por $f[\omega_1(A)] = \omega_2[\varphi(A)]$ es un morfismo respecto de la adición definida en las magnitudes, se cumple entonces que $f[\omega_1(A)] + f[\omega_1(B)] = f[\omega_1(A) + \omega_1(B)]$.

Una importante implicación didáctica que se deriva de la observación anterior, es que las aplicaciones que preservan la razón se pueden ilustrar algorítmicamente mediante tablas de proporcionalidad o fórmulas para las funciones lineales (A. Fernández, 2001). En el apartado 4.1.4 sobre las representaciones recogemos otras potencialidades de las representaciones tabulares de las relaciones de proporcionalidad.

Normalización de Razones

Una de las estrategias utilizadas frecuentemente para comparar razones y para visualizar aquellas que en principio son difíciles de percibir se denomina normalización (Freudenthal, 1983). Según A. Fernández (2001)

> *…para normalizar razones se puede proceder de dos maneras: una en la que se cambian los referentes mediante escalas de manera que las magnitudes o tamaños que se quieren comparar resulten normales o familiares y otra en la que se unifican los antecedentes o los consecuentes para favorecer la comparación.* (p. 52)

En relación con la primera manera de normalizar esto es el cambio de referentes mediante el uso de escalas, A. Fernández señala que la reducción o ampliación de los objetos o de representaciones de estos tiene como objetivo la visualización de las relaciones (razones) entre los objetos que se quieren comparar y la elección de la escala se hace de manera que los tamaños que resulten sean habituales o de fácil interpretación para las personas.

El segundo tipo de normalización implica la unificación (homogeneización) de los antecedentes o de los consecuentes para facilitar la comparación de razones. En este segundo tipo se consideran dos subtipos: normalizaciones ligadas a la unidad y normalizaciones ligadas al sistema de numeración.

En las normalizaciones ligadas a la unidad se reconocen dos esquemas: parte-todo y parte-parte.

Las normalizaciones ligadas al esquema parte-todo se pueden expresar usando los términos “uno de cada”, “dos de cada”, “x de cada y”, etc. Por ejemplo “Dos de cada tres personas practican deporte diariamente” o “Una de cada cuatro familias tiene más de dos hijos”. Las normalizaciones vinculadas al esquema parte-parte admiten expresiones de la forma “por cada….”. Por ejemplo “en el salón de clase por cada 3 chicos hay 2 chicas”, “poner 4 tazas de agua por cada 2 tazas de arroz”.

En las relaciones que no se ajustan a los esquemas parte-parte o parte-todo, es decir las relaciones funcionales entre dos conjuntos de elementos diferentes, también admiten las expresiones indicadas.

En las normalizaciones ligadas al sistema de numeración el consecuente de la razón es una potencia de 10, destaca el porcentaje como caso paradigmático de este tipo de normalizaciones. A. Fernández (2001) señala que:

> *Si se toma el 100 como referente, se normaliza el todo a 100 y la relación que se establece se representa –usualmente– mediante el esquema parte-todo, diagramas*

de sectores, o mediante barras. En este caso la relación se establece entre un número y cien, por lo que con la expresión simbólica "%" se evita, dentro de lo posible, tener que usar fracciones decimales. (p. 54)

El porcentaje es uno de los significados de la razón más frecuente, es un concepto importante, difícil de aprender y difícil de enseñar (Parker y Leinhardt, 1995). Las autoras sostienen su posición señalando la presencia de esta noción en los medios de comunicación, su uso en otras ciencias como la química y las ciencias sociales, la presencia frecuente de ítems relacionados con el porcentaje en pruebas nacionales e internacionales y su tratamiento constante a lo largo de los distintos niveles de la educación formal.

El porcentaje tiende un puente sobre dos mundos. Por un lado es una noción que aparece con distintas personalidades desde hace tiempo atrás en la geometría griega (con nociones de tipo relacional como lo es la fracción, proporción, razones y tasas). Por otro lado es una noción que ha surgido como una herramienta útil y práctica en el comercio y que en la actualidad es aplicada en múltiples situaciones. El porcentaje está presente en los periódicos, en revistas, en las noticias, y en el comercio diario. Está también presente en los libros de texto de primaria, secundaria y universidad. Los motivos expuestos nos invitan a presentar una revisión más detallada de algunos aspectos característicos del porcentaje.

4.1.2.2 El Porcentaje: Una Razón Especial

El énfasis actual en la educación de matemática incita a estudiantes y profesores a ver las conexiones entre los problemas matemáticos y los problemas de mundo real (OCDE, 2004). La suposición que subyace a este énfasis es que las situaciones cotidianas verdaderas desafían a los estudiantes y hacen que la matemática sea más significativa y auténtica para ellos. En este sentido el porcentaje es un tema útil precisamente porque está presente en el mundo real y porque es un tema relacionado con otros contenidos matemáticos. Oller (2012) indica, con base en una revisión de análisis de los significados de la proporcionalidad desde 1850 hasta la actualidad, que el estudio de los porcentajes ha ganado importancia con el paso del tiempo, pero se ha producido un abandono de su significado en pos de los métodos algorítmicos para su cálculo y resolviendo los problemas mediante proporciones.

Significados del Porcentaje

El porcentaje es un concepto que ha ido aumentando su complejidad con el paso del tiempo, se representa por la combinación de un numeral y un símbolo y comúnmente se transforma a notación decimal o a una expresión fraccionaria además es usado en situaciones comparativas de muchos tipos. Por ejemplo consideremos el 6%, puede representar 6 de 100 o 6 de cada 100 (como en una relación parte-todo); 6 cosas de un tipo por cada 100 cosas de otro tipo (como la razón del número de objetos de dos conjuntos diferentes, una medida de dos objetos diferentes, una tasa de interés); un operador para crear un nuevo número mediante la multiplicación por 0.06 o 6/100 (como en el cálculo de impuestos), una pendiente (la inclinación de una carretera), la probabilidad de un evento, entre otros. La variedad de significados del porcentaje conducen a una ambigüedad del mismo, esto ha causado debate acerca de cómo debe enseñarse, cómo debe definirse y cómo se debe denominar (Parker y Leinhardt, 1995).

Porcentaje como un número

Muchos autores definen el porciento como una simple traducción del símbolo %, es decir se refieren al por ciento como una cierta cantidad de 100, por cien, de cada 100 (Parker y Leinhardt, 1995). Este enfoque es uno de los más predominantes de los libros de texto, en este sentido Brown y Kinney (1973) indican que este enfoque es una "inexcusable identificación de la razón con el número", Parker y Leinhardt sugieren que este énfasis en la traducción del símbolo aunado con al énfasis de convertir porcentajes, fracciones y decimales es el origen del debate que cuestiona si el porcentaje es un número.

Definir el porcentaje con base en la traducción literal del símbolo % no motiva a los estudiantes a pensar en relaciones, los centímetros están compuestos de 100 unidades más simples, las centenas son conjuntos de 100 y son cantidades extensivas. Un por ciento dado (ej. 4%) es significativamente diferente de una centena o de un centímetro. Debido a que un decimal probablemente es más fácil de interpretar como una cantidad extensiva (ej. dinero) la conversión de porcentajes a decimales posiblemente provoca que los estudiantes pierdan de vista la naturaleza comparativa del numeral.

Usiskin y Bell (1983) le dan el estatus de número a las razones, Behr, Lesh, Post y Silver (1983) sugieren que un número escrito en forma de porcentaje se puede enseñar como un índice comparativo que se utiliza para describir una expresión estandarizada de la razón. Los porcentajes como números, pueden ser ordenados linealmente y ser sumados directamente si éstos representan diferentes porciones de un mismo todo (Brown y Kinney, 1973), por ejemplo si el 12% de la clase obtuvo un 9 en el examen y un 20% obtuvo un 8, entonces un 32% de la clase obtuvo una calificación mayor que 7. En otros casos en los cuales se calculan porcentajes sobre bases diferentes no es posible hallar el porcentaje de una cantidad combinada mediante la suma de los porcentajes de las cantidades individuales.

Los porcentajes se pueden transformar en números los cuales cumplen los axiomas de los números reales, sin embargo no se puede obviar el hecho de que este cambio de representación incide en el cambio de la unidad de referencia del porcentaje, de 100 a 1, esto hace posible que en los cálculos la expresión 50% se use en forma decimal a través de 0.5 o de la fracción $\frac{1}{2}$.

Porcentaje como una cantidad intensiva

El porcentaje es una manera particular de cuantificar relaciones multiplicativas. Una forma de pensar en las relaciones multiplicativas es considerar la distinción propuesta por Schwartz (1988) entre dos tipos de cantidades: extensivas (recuentos, medidas o valores) e intensivas cuya naturaleza es relacional.

Las cantidades intensivas pueden ser de dos tipos: (1) razones externas (relacionan cantidades de diferente tipo, ej. kilómetros por hora) y (2) razones internas (relacionan cantidades del mismo tipo, ej. euros por euros, cantidad de personas y cantidad de personas).

Las cantidades intensivas que son razones externas vienen acompañadas de una etiqueta referida a las cantidades comparadas, ej. Km/h, mientras que las cantidades intensivas que son razones internas pierden esa etiqueta (se cancela en el proceso de división). Las razones internas son escalares o números que no tienen referentes (Vergnaud, 1983).

Parker y Leinhardt (1995) afirman que una expresión tal como 5.6% es una cantidad intensiva, que específicamente cuantifica a una razón interna.

El sistema decimal permite una visualización natural de la relación de orden de las cantidades extensivas la cual se basa en el valor posicional (4.1, 4.6, 5, 25, 101). Sin embargo la relación de orden no se visualiza directamente cuando se trata de cantidades intensivas que son expresadas en forma fraccionaria (1/2, 2/5, 7/9). El potencial del sistema simbólico del porcentaje descansa en su capacidad para proporcionar un orden natural similar para algunas cantidades intensivas, aquellas que corresponden a razones internas.

En este sentido el porcentaje posibilita: (a) localizar en una escala de 0 a 100 el tamaño de una parte en relación con el todo, (b) localizar en una escala ilimitada la relación multiplicativa entre dos cantidades referentes y (c) comparar la magnitud de esa relación rápidamente con base en el orden natural del sistema decimal de numeración.

El sistema decimal de numeración por sí solo no es una representación apropiada de las relaciones intensivas. En ausencia de contexto, no es posible saber qué tipo de cantidad está siendo representada a través de un número decimal. Por ejemplo, al considerar solamente 0.34 podría estar haciéndose referencia a una cantidad extensiva como 0.34 metros, a una cantidad intensiva dada por una razón externa como 0.34 metros/segundo o a una cantidad intensiva dada por una razón interna, por ejemplo 17 chicas en una clase de 50 estudiantes en donde 0.34 de los estudiantes son chicas. Pero cuando la cuantificación se expresa a través de un porcentaje (34%) no hay duda de que el numeral es una expresión de una relación intensiva, específicamente no hay duda que éste representa una cuantificación de una razón interna.

Parker y Leinhardt (1995) sugieren que una característica crítica del porcentaje es la diferencia entre dos tipos de relaciones, la parte-parte y la parte-todo. La discusión que atañe a los significados del porcentaje proviene del análisis matemático y cognitivo del porcentaje que han desarrollado estas investigadoras, quienes han organizado los contextos del porcentaje en nueve tipos posibles de comparación, uno correspondiente a la relación parte-todo y ocho vinculados a la relación parte-parte.

Porcentaje como representación de la relación parte-todo (fracción)

En este caso el tamaño de un subconjunto se compara con el tamaño del conjunto del cual es parte, esta es la situación más frecuente en la que está implicada el porcentaje.

Parker y Leinhardt (1995) indican que es el significado preferido en los textos escolares, especialmente en la introducción al tema que se presenta en las primeras páginas dedicadas al estudio del mismo.

Los porcentajes mayores que 100 no se ajustan a este significado del porcentaje. Este significado del porcentaje incluye aplicaciones relativas a la probabilidad, en las cuales el número de resultados favorables se compara con el total de posibles resultados.

Adicionalmente, es posible representar la relación parte-todo usando porcentajes que se visualizan en diagramas circulares en los cuales el círculo representa el todo y cada sector circular corresponde a una de las partes.

Porcentaje como representación de la relación parte-parte (razón)

Una expresión porcentual proporciona una descripción de una comparación entre dos cantidades. Decimos que el porcentaje se usa como representación de la relación parte-parte cuando éste se usa para describir una comparación entre dos conjuntos diferentes, entre diferentes atributos de un mismo conjunto o para describir el cambio en un conjunto a lo largo del tiempo. La relación dada entre los conjuntos determina si la relación es de cambio o de comparación. En los contextos contemplados en este significado del porcentaje si tienen cabida los porcentajes mayores que 100.

Los problemas de cambio describen una situación en la cual el tamaño de un conjunto cambia después de un periodo de tiempo. (Figura 4.4 y 4.5)

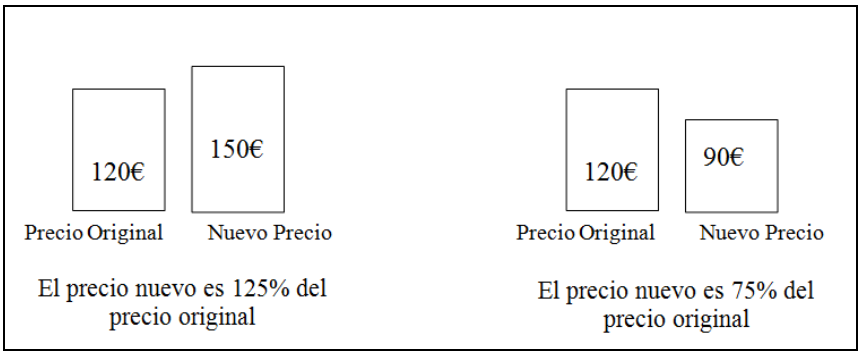


Figura 4.4. Ejemplos de cambio Tipo A: Cambio en la medida de un conjunto u objeto

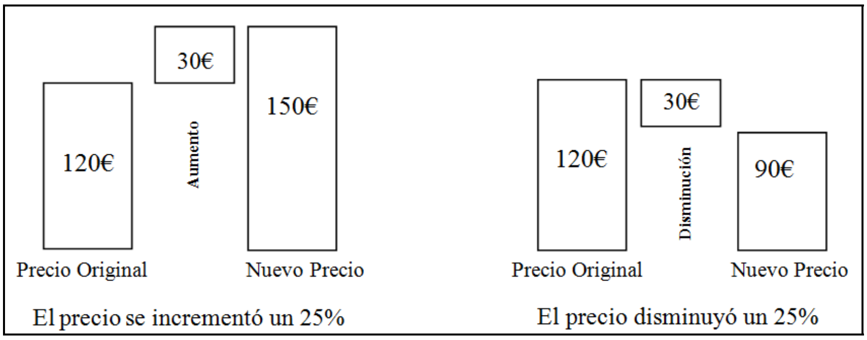


Figura 4.5. Ejemplos de cambio Tipo B: Cambio en la medida de un conjunto u objeto, el cambio se compara con la medida original

Los problemas de comparación implican una relación entre dos conjuntos diferentes en un momento dado (Figuras 4.6 y 4.7).

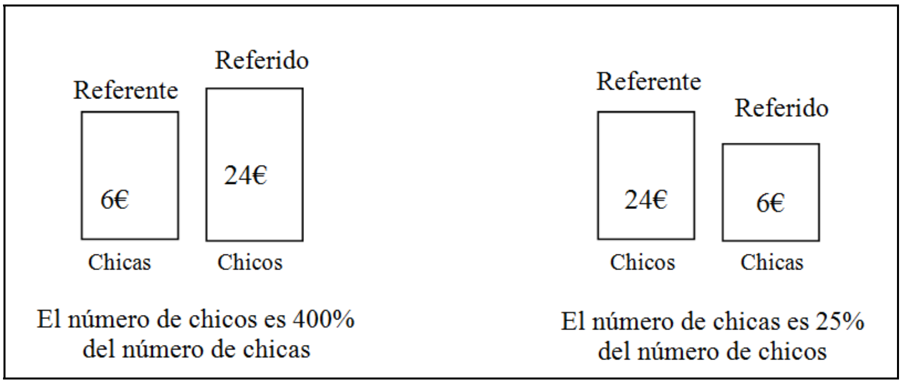


Figura 4.6. Ejemplo de comparación Tipo A: Comparación de la medida de dos conjuntos u objetos

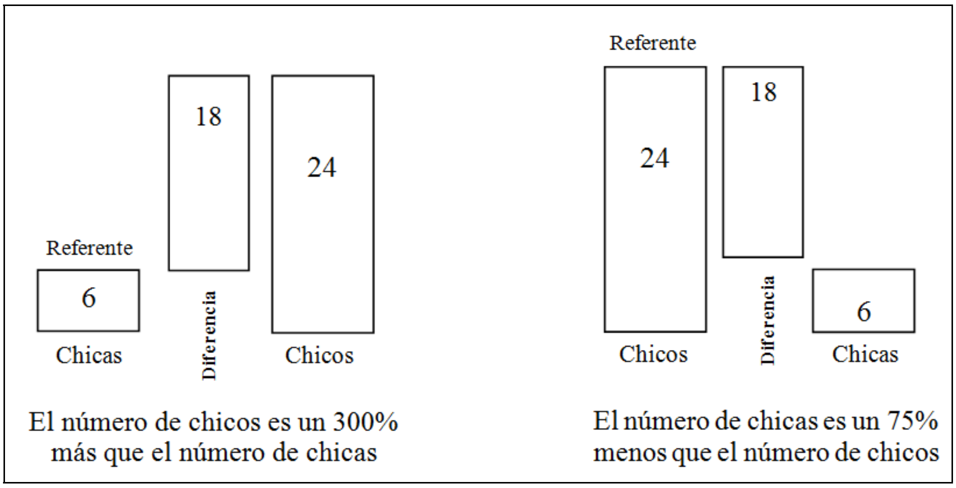


Figura 4.7. Ejemplo de comparación Tipo B: Comparación de la diferencia de la medida de dos conjuntos u objetos en relación con uno de ellos

En una situación particular el porcentaje puede describir la relación entre una parte y el todo o entre dos conjuntos u objetos distintos, esta distinción responde a lo que es el porcentaje.

La siguiente distinción se centra en cómo actúa el porcentaje en una situación, pues en situaciones del entorno se observa que el porcentaje sirve o funciona con diferentes propósitos dependiendo si se utilizan dos cantidades conocidas para hallar un porcentaje o si el porcentaje se usa para crear una nueva cantidad.

Porcentaje como un índice estadístico

En estos casos el porcentaje informa o representa la relación entre dos datos o cantidades conocidas. En múltiples situaciones del entorno el porcentaje es un descriptor estadístico de alguna relación entre cantidades las cuales, por lo general, son omitidas. Por ejemplo el porcentaje puede describir la comparación entre dos cantidades a través de una proporción específica como el 4.5% de la población activa está desempleada, o se puede referir a la comparación de dos índices estadísticos por ejemplo la tasa de desempleo en la región A en enero fue del 5% en relación con el 8% de todo el país. En ambos usos las cantidades originales no son evidentes y la interpretación de la situación se reduce a la interpretación del porcentaje. También es posible que las cantidades referentes usadas para generar un porcentaje como índice estadístico aparezcan, en todo caso éstas existen y la cuestión es que el porcentaje es usado para mostrar la relación entre esas dos cantidades.

Parker y Leinhardt (1995) señalan, con base en un análisis histórico del desarrollo de la noción de porcentaje, que el uso estadístico del porcentaje se originó en el siglo XVI en Italia bajo necesidades comerciales y después llegó a ser ampliamente usado en aplicaciones no comerciales en el siglo XIX.

Porcentaje como una función-operador

En estos casos el porcentaje funciona como un operador el cual permite calcular otras cantidades como el interés, descuentos o impuestos, beneficios, presupuestos; en términos generales el porcentaje es usado para establecer una tasa uniforme. En aplicaciones de este tipo el porcentaje es usado para cuantificar la magnitud de un operador funcional (el operador multiplicativo es la forma fraccionaria o decimal del porcentaje) (Davis, 1988). En estas situaciones la tasa porcentual viene dada inicialmente o es conocida a priori, el porcentaje después es usado para establecer una relación funcional entre la cantidad original (input) y la cantidad final (output). Davis (1988) sugiere que el uso funcional del porcentaje es el significado más importante del mismo. Históricamente el uso funcional del porcentaje fue anterior al uso estadístico descriptivo del mismo (Parker, y Leinhardt, 1995).

El uso funcional del porcentaje se operacionaliza en los ejercicios referentes al Caso 1, que a continuación se describen en el siguiente apartado.

Tipos de Tareas de Porcentaje

Además de los tipos de situaciones descritas en el apartado "*Porcentaje como representación de la relación parte-parte (razón)*" (p. 121), Parker y Leinhardt (1995) indican que las tareas de porcentaje pueden clasificarse según correspondan a una conversión, un ejercicio, una tarea de sombreado o a un problema.

Las conversiones requieren el cambio entre tres notaciones: porcentajes, decimales y fracciones. En este sentido una tarea común sería cambiar 12,5% a fracción o a decimal, cambiar 0,125 a porcentaje o fracción o transformar 1/8 a notación decimal o porcentual. Las tareas de sombreado requieren la interpretación de superficies en términos porcentuales o el sombreado de cierto porcentaje de una región. Los problemas generalmente se insertan en situaciones en las cuales se aplica el porcentaje y requieren que el estudiante extraiga información relevante, matematice esta información y después resuelva el problema.

Un ejercicio requiere encontrar una de las tres posibles incógnitas en una ecuación que involucra el porcentaje, en relación a lo cual se tienen tres casos (Figura 4.8).

Caso 1. Hallar un porcentaje de una cantidad.

Ej. 15% de 120 es_____.

Caso 2. Hallar el porcentaje que se ha aplicado a una cantidad para obtener otra.

Ej. ____% de 120 es 18.

Caso 3. Hallar la unidad de referencia o base sobre la que se ha calculado el porcentaje.

Ej. 15% de ____ es 18.

Figura 4.8. Tipos de ejercicios de porcentaje

Parker reseña una serie de procedimientos que históricamente se han utilizado para calcular el porcentaje. A continuación presentamos un resumen de las aportaciones de esta investigadora, quien señala que tradicionalmente se han empleado cinco métodos: (a) el método de los tres casos, (b) ecuación, (c) fórmula, (d) análisis unitario y (e) proporciones.

Método de los tres casos. Este método precisa un procedimiento específico para hallar cada uno de los tres componentes en un problema de porcentaje conociendo los otros dos componentes. Según el problema considere el Caso 1, 2 o 3, el resolutor realiza un procedimiento diferente. En el Caso 1 el ejercicio implica hallar un porcentaje, dada la base y el porciento, en este caso se debe expresar el porcentaje como un decimal y multiplicarlo por la base. En el Caso 2 el ejercicio implica hallar el porciento conociendo el porcentaje y la base, en este caso se divide el porcentaje entre la base y convertir el resultado decimal en porcentaje. En el Caso 3 el ejercicio implica hallar la base, conociendo el porciento y el porcentaje, esto se realiza dividiendo el porcentaje entre la forma decimal del porciento.

Los tres casos representan diferentes significados del porcentaje. El Caso 1 precede históricamente a los otros dos casos y representa el significado funcional o de operador del porciento. En el caso 2 el porcentaje representa una relación parte-parte (razón) o parte-todo (fracción), donde el porciento representa un índice comparativo que describe la relación entre dos partes de datos. Finalmente, el caso 3 parece ser una creación matemática diseñada para completar la triada (tres incógnitas entonces tres ecuaciones posibles), en el ejemplo del caso 3 el porciento dado describe un operador sobre una base desconocida (10/100 de la Base=25), podría utilizarse el operador inverso para crear el número de la base obteniendo así la cantidad buscada (100/10 de 25=Base). Aunque los tres casos son estructuralmente inseparables, éstos representan diferentes significados del porcentaje dado o buscado (Parker y Leinhardt, 1995)

Al usar este método se debe: (a) clasificar el problema en uno de los casos, (b) recordar la regla de cada caso, (c) identificar correctamente el porcentaje y la base, (d) convertir porcentajes y decimales de forma adecuada, (e) multiplicar o dividir correctamente para hallar la respuesta. El método es factible y está libre de notaciones algebraicas pero trata cada tipo de problema de forma aislada favoreciendo únicamente el aprendizaje de reglas.

El método de la ecuación. Los dos elementos conocidos de un ejercicio de porcentaje se pueden introducir en una ecuación de la forma (factor x factor = producto), posteriormente se aplican las reglas de resolución de ecuaciones. Por ejemplo la cuestión "25 es el 10% de____" se traduce a la forma de la ecuación como a continuación 25 = 0,10 ·x, luego se divide cada lado por 0,10 para hallar la solución, 250.

Este método es apropiado para resolver ejercicios de porcentajes desprovistos de contexto, siempre y cuando los resolutores sean capaces de transformar por cientos en decimales. Entre las ventajas de este método se reconoce su consistencia con el uso de afirmaciones matemáticas en los niveles de primaria (Smart, 1980), y su énfasis sobre la estructura multiplicativa subyacente a las cantidades implicadas en los problemas de porcentajes. Por otro lado, este método depende mucho de la aparición de las palabras "es" y "de" (Volpel, 1954; citado en Parker y Leinhardt, 1995) y requiere que los estudiantes comprendan que un producto no es necesariamente mayor que los factores.

El método de la fórmula. Este método se basa en el uso de la fórmula general Porcentaje = Base x Tasa, o P = BxT. La tasa se expresa como una fracción o como un decimal (Smart, 1980). La manipulación de las cantidades es igual que en el método de la ecuación, la única diferencia es que en este caso las cantidades tienen nombres específicos. En el mismo ejemplo "25 es el 10% de____", la tasa es el 10%, la base es la cantidad después de "de" la cual es desconocida y el porcentaje es 25. De modo que P=BxT se convierte en 25=Bx0.10, se divide cada lado por 0.10 para obtener B=250. Este método requiere de la correcta identificación de la tasa, el porcentaje y la base. Comparte las mismas desventajas que el método de ecuación.

El método de análisis unitario. En este método se considera un por ciento o porcentaje particular de una cantidad como una unidad por sí misma, a partir de la cual se pueden derivar u obtener otros por cientos. Este "por ciento" particular (unidad) puede ayudar a que los estudiantes observen las relaciones subyacentes que vinculan todas las cantidades del problema. Para resolver el mismo ejemplo "25 es el 10% de____" se razonaría como a continuación: si 10% de algo es 25 entonces 1% de ese algo es 2.5 (dividiendo cada uno por 10), consecuentemente 100% de ese algo es 250 (multiplicando por 100), la respuesta es 250.

Este razonamiento fundamenta otras estrategias relacionadas, por ejemplo para hallar el 15%, primero hallan el 10% después se busca la mitad de eso (5%) y después suman estos dos resultados. A menudo, estas estrategias son usadas por estudiantes que no han sido instruidos en técnicas formalizadas. El énfasis que se pone en el razonamiento proporcional hace que este procedimiento sea más cercano al significado funcional del porcentaje.

El método de la proporción. Según Hannon (citado en Parker y Leinhardt, 1995) la proporción ha sido "el verdadero significado del concepto de porcentaje" (p. 88), y éste ha sido rápidamente adoptado por la comunidad educativa (Lankford, 1959; Wendt, 1959; citado en Parker y Leinhardt, 1995). Desde hace mucho tiempo el método de la proporción se ha convertido en uno de los más populares para resolver problemas de porcentajes.

Parker y Leinhardt (1995) indican que una verdadera comprensión de la relación de proporcionalidad de los porcentajes podría revelar o poner al descubierto las cantidades referentes ocultas, sin embargo indican que actualmente este método se ha convertido en algo diferente, pues los estudiantes aprenden a insertar las cantidades en una proporción de modo mecánico. Por ejemplo para resolver "25 es el 10% de____", se colocan las cantidades en dos fracciones, en una de las cuales el porciento se debe poner sobre 100 y en la otra debe colocarse el porcentaje 25$\left(\frac{25}{x}=\frac{10}{100}\right)$. En este paso suele ocurrir que los estudiantes no saben cómo proceder y, a menudo, colocan la cantidad sin razonar, después aplican el producto cruzado $10x = 2500$ y luego dividen entre 10.

La ventaja de este método radica en que es aplicable a todos los problemas de porcentaje y en él se evitan las transformaciones entre por cientos y decimales. Sin embargo, este método requiere de la expresión del por ciento como una fracción e igualarla a otra fracción cuyos componentes se colocan a menudo de manera mecánica. Adicionalmente este método hace aparecer y desaparecer el signo del por ciento, lo cual provoca confusiones con el significado de esta noción.

La regla de tres. Este conocido procedimiento se aplica desde hace mucho tiempo en la resolución de problemas de porcentaje (Parker y Leinhardt, 1995), y puede considerase como un caso especial del método de la proporción. Se basa en la relación de proporcionalidad que se da entre la cantidad de referencia (base) y el porciento. Por ejemplo para resolver "25 es el 10% de____", el estudiante dispone los datos como a continuación $\begin{array}{l}25 \rightarrow x \\ 10 \rightarrow 100\end{array}$, después aplicado el producto cruzado y la división.

Representaciones del Porcentaje

Los modelos visuales y las representaciones de relaciones matemáticas pueden sustentar el aprendizaje de conceptos elementales, pero algunas representaciones expresan ciertas relaciones mejor que otras (Kaput, 1987). Para que una representación sea útil, los elementos del modelo deberían reflejar propiedades que simulan las propiedades correspondientes del concepto que representan (Greeno, 1991). Varios investigadores señalan que los modelos de las relaciones porcentuales pueden ser determinantes en el desarrollo de la comprensión de la noción de porcentaje (Benneett y Nelson, 1994; Dewar, 1984; Erickson, 1990; Haubner, 1992; Nelson, 1969, citados en Parker y Leinhardt, 1995).

Las representaciones visuales y modelos concretos han sido propuestos para expresar las relaciones entre las cuatro cantidades implicadas en un porcentaje, Parker y Leinhardt (1995) describen con detalle cuatro representaciones del porcentaje: modelos concretos, escalas de comparación, cuadrícula 10x10 y modelos de doble figura. Según estas investigadoras, la efectividad de la mayor parte de los modelos usados en la enseñanza del porcentaje no ha sido establecida a través de la investigación empírica. En la Figura 4.9 y 4.10 presentamos algunas representaciones del porcentaje.

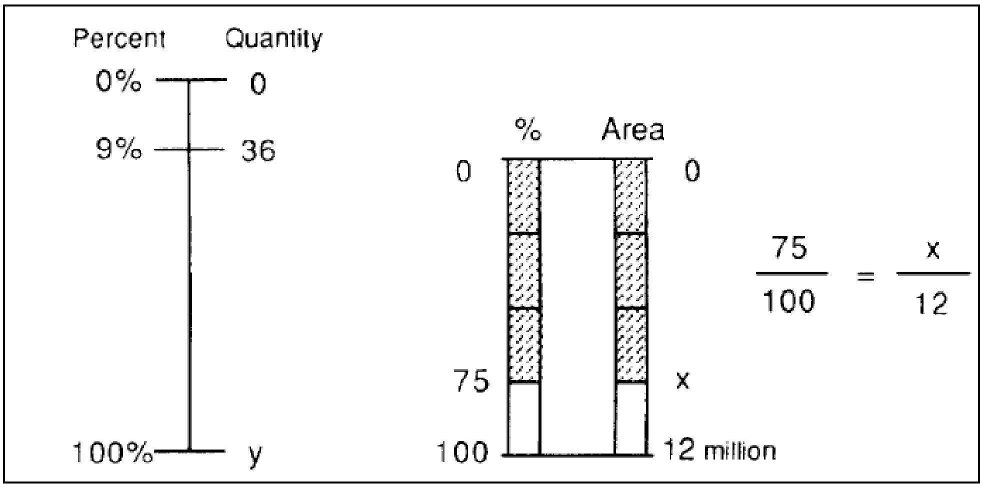


Figura 4.9. Escalas de comparación usadas para visualizar la proporcionalidad en problemas de porcentaje (Parker y Leinhardt, 1995)

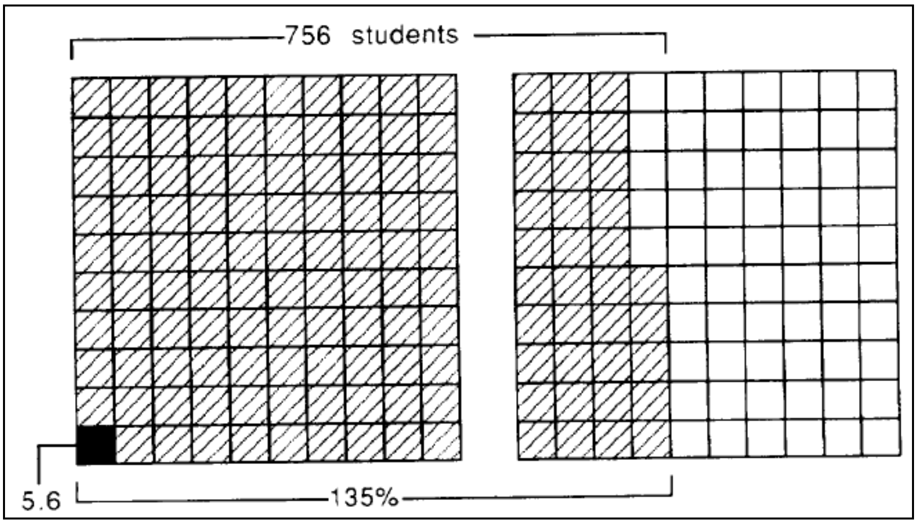


Figura 4.10. Cuadrículas 10x10 usadas para facilitar la interpretación y resolución de un problema de porcentaje (Parker y Leinhardt, 1995)

4.1.2.3 Noción de Proporción

El término proporción tiene múltiples acepciones y proviene del latín proportionem, contracción de *pro portione*, que significa *según la parte*. En los diccionarios de uso común[45] se encuentran distintas entradas para esta palabra: tamaño, importancia de algo, ocasión propicia para hacer algo, relación entre las dimensiones de una misma cosa o las de dos o más cosas, partido como persona considerada respecto a las ventajas de su situación; además los diccionarios consultados incluyen una definición matemática la cual designa a la proporción como una proposición referida a la igualdad de dos razones. Así mismo los diccionarios de filosofía remiten al término analogía como

[45] Por ejemplo los diccionarios: María Moliner, Nueva Enciclopedia Larousse, Océano.

referente de la proporción, desde esta disciplina la analogía es la correlación entre los términos de dos o varios sistemas u órdenes es decir, la existencia de una relación entre cada uno de los términos de un sistema y cada uno de los términos de otro. La analogía equivale entonces a la proporción, la cual puede ser entendida cuantitativa o cualitativamente. La primera perspectiva es la que nos interesa discutir en este apartado.

Desde la Didáctica de la Matemática, la proporción se define como la igualdad de dos razones (Llinares, 2003b; F. Fernández, 2001; García y Bertran, 1987; Grupo Beta, 1990), en cada caso se guarda coherencia con la postura que sobre la noción de razón se ha asumido. Por ejemplo según F. Fernández (2001) cuando dos razones son equivalentes, es decir cuando representan al mismo número abstracto, se pueden igualar los cocientes indicados por ellas y obtener una relación entre las medidas de cuatro o más cantidades homogéneas dos a dos. Simbólicamente lo enuncia diciendo que si $\frac{a}{b}=n$ y $\frac{c}{d}=n$ entonces se puede expresar la igualdad $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ e indica que esta igualdad recibe el nombre de proporción, la cual se define como la igualdad entre dos razones equivalentes. Además se hace referencia al nombre de los términos de la proporción, extremos y medios así como a la lectura y representación usual de la noción mediante la expresión $a:b::c:d$.

De forma más general Godino (2004) indica que dos series de números, igual cantidad de elementos, son proporcionales entre sí, si existe un número real fijo k llamado constante de proporcionalidad, que permite escribir cada valor de la segunda serie como el producto por k de los valores correspondientes de la primera serie y que cuando en una situación sólo intervienen dos pares de números que se corresponden se establece una proporción. Desde esta perspectiva la proporción es un caso particular de una función de proporcionalidad directa en la que sólo intervienen dos pares de cantidades.

Fiol y Fortuny (1990) aportan una definición en la que la noción de proporción se identifica con la de razón entre dos cantidades. La proporción se enuncia como el cociente de las medidas de tales cantidades, la definen como una aplicación que, a todo par de cantidades, asigna un número mayor o igual que 1. Para estos autores las palabras razón y proporción son sinónimos pues afirman "*podemos concluir que la proporción de dos magnitudes es la razón entre la mayor y la menor* (p. 40)". Desde esta perspectiva la proporción cumple las propiedades: simetría, semejanza, aditividad y continuidad, las cuales caracterizan la fórmula usual del cociente de la dimensión mayor por la menor.

Se señalan distintos elementos y características relativas a la noción de proporción. Así F. Fernández (2001) hace referencia a la propiedad fundamental de la proporción y aquella que se refiere a que la suma de antecedentes dividida por la suma de consecuentes de una proporción es igual a cualquiera de las razones de esa proporción, la cual se suele utilizar en los problemas de repartos proporcionales.

Razonamiento Proporcional

El razonamiento proporcional ha sido ampliamente estudiado a lo largo de los años e investigadores están de acuerdo de que éste es un concepto crucial para los estudiantes. En la escuela primaria, los estudiantes son introducidos en estrategias aditivas y multiplicativas que sientan las bases para el razonamiento proporcional formal. Behr et al. (1992) sugieren que existe evidencia que muestra que los estudiantes reconocen la similitud estructural en ambos lados de una proporción, sin embargo, tiempo después estos mismos estudiantes no aplican el razonamiento proporcional en sus producciones.

En la literatura de investigación aparecen numerosas definiciones de razonamiento proporcional. Karplus, Pulos y Stage (1983) se refieren al razonamiento proporcional como un término que denota el razonamiento en un sistema de dos variables entre las cuales existe una relación de función lineal. Esta función lineal permite que varias situaciones sean descritas en términos de una razón constante. Según Inhelder y Piaget (1958), el razonamiento proporcional es una relación de segundo orden que implica una relación de equivalencia entre dos razones. Por ejemplo, la afirmación "cuatro caramelos cuestan cinco dólares" describe una razón entre un cantidad de dinero y una cantidad de caramelos que pueden ser comprados con ese dinero. Ahora, el razonamiento proporcional es requerido para comprender de qué manera afecta el número de caramelos que se puede comprar, si se incrementa el dinero de cinco a quince dólares. Por ejemplo, consideremos el siguiente problema "*El grupo A tiene 4 pizzas y 6 chicas. El grupo B tiene 6 pizzas y 8 chicos ¿En cuál grupo se puede comer más pizza?*" (adaptado de Lamon, 1993). Para resolver este problema, algunos estudiantes pueden dibujar para llegar a entender que en el grupo A, cada miembro obtiene 2/3 de una pizza, mientras que en el grupo B, cada miembro obtiene 3/4 de una pizza. Ellos pueden comparar esas dos fracciones con las figuras o usar la notación decimal. Otros estudiantes pueden usar el razonamiento proporcional: "*Si agregamos 2 pizzas al grupo A, se necesitarían agregar también 3 personas. Así que el grupo A tendría 6 pizzas y 9 miembros, por lo tanto el grupo B es el que obtiene más pizza*". La habilidad de reconocer la similitud estructural y el sentido de covariación y de múltiples comparaciones ilustradas en el proceso de razonamiento constituyen el núcleo del álgebra y de matemáticas más avanzadas (Confrey y Smith, 1995)[46].

Muchos investigadores comparten la visión de que el razonamiento proporcional es un proceso de desarrollo cognitivo a largo plazo en el cual la comprensión a un nivel constituye la base para los niveles superiores (Hart, 1981; Inhelder y Piaget, 1958; Kieren, 1988, 1993; Post et al., 1988; Noelting, 1980a, 1980b). La habilidad de resolver problemas de comparación o de valor ausente son conocimientos asumidos en el currículo de secundaria (Post, 1986) y como el conocimiento de tópicos multiplicativos se profundiza a través del estudio del álgebra, geometría, trigonometría, estadística, éste llega a ser la base para la comprensión de campos de aplicación en el currículo de ciencias tales como la inflación, fuerza, densidad, la física de lentes o del sonido (Gray, 1979).

[46] Citado en Lo y Watanabe (1997)

Esta perspectiva sugiere que el razonamiento proporcional definido como la habilidad de comprender las relaciones estructurales en problemas de comparación o valor ausente, podría ser concebido como un requisito necesario pero no suficiente para comprender la proporcionalidad. La cuestión se convierte en uno de los lugares donde dibujar líneas (parámetros) en un proceso a largo plazo que no es fácilmente segmentado; por ejemplo algunos investigadores han hecho referencia a algunas etapas en el proceso del razonamiento tales como: razonamiento pre-proporcional (Inhelder y Piaget, 1958), razonamiento proto-ratio (Singer y Resnick, 1992), conocimiento etnomatemático (Kieren, 1988, 1993).

Algunos investigadores ven el razonamiento proporcional como el fundamento sobre el cual se construyen muchos conceptos de matemática más avanzada (Behr, Lesh, y Post, 1988). Muchos de los conceptos estudiados en Algebra, Geometría y Cálculo requieren que los estudiantes razonen proporcionalmente. Además, Karplus, Pulos y Stage (1983) enfatizan la importancia de un razonamiento proporcional efectivo en las ciencias. Razón de cambio, velocidad, densidad, kilometraje, composiciones químicas son algunos de los conceptos que implican el uso de razones y del razonamiento proporcional. Desde esta posición debemos de considerar que el razonamiento proporcional es un tipo de pensamiento que los estudiantes probablemente apliquen en su profesión y en situaciones de la cotidianeidad. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) afirma que "la necesidad de comprender y usar las matemáticas en la vida cotidiana y en el lugar de trabajo nunca ha sido tan importante y esta importancia continuará incrementándose". Algunos ejemplos son: trabajos con modelos a escala y razones unitarias, comparaciones de algo en las tiendas, diluir soluciones en un laboratorio, cálculo de medidas indirectas, comprensión de los índices de productividad o de natalidad en un país, etc. En resumen el razonamiento proporcional juega un importante papel en muchos escenarios del mundo real, así como también en muchos conceptos matemáticos avanzados.

Behr et al. (1988) consideran el razonamiento proporcional como una forma de razonamiento matemático que implica un sentido de covariación y de múltiples comparaciones, así como de la capacidad de almacenar mentalmente y procesar varias piezas de información y cuya principal característica es el reconocimiento de la similitud estructural e invarianza en un sistema matemático simple. Se refieren a la covariación como el cambio simultáneo entre dos variables que se produce por la existencia de una relación entre ellas (esta es la relación que Freudenthal denominó externa o funcional entre magnitudes), y a la invarianza como la igualdad entre la razón de dos valores de una variable en una magnitud y la razón de los valores correspondientes de la otra variable en otra magnitud (en términos de Freudenthal la preservación de la razón o la igualdad de las razones internas).

Según Norton (2005) el término razonamiento proporcional es usado para describir los conceptos y pensamiento requeridos para comprender las tasas, la razón y la proporcionalidad. Según Norton algunos autores han señalado que la esencia de tal pensamiento es principalmente multiplicativo (Ben-Chaim, Keret, Ilany, 2007; Lo y

Watanabe, 1997). La habilidad en tal pensamiento capacita al sujeto en la comprensión de porcentajes, la pendiente, función lineal, trigonometría, álgebra, etc.

Lamon (2007) propone que el razonamiento proporcional significa aportar razones que sustenten afirmaciones hechas sobre las relaciones estructurales entre cuatro cantidades (*a, b, c* y *d*) en un contexto que simultáneamente implica covarianza de cantidades e invarianza de razones o productos; esto podría consistir en la habilidad de identificar una relación multiplicativa entre dos cantidades así como en la habilidad de extender la misma relación a otros pares de cantidades. Según esta investigadora el razonamiento proporcional, en el caso de la relación directa, se refiere al reconocimiento de la razón constante entre elementos del mismo espacio de medida y el reconocimiento de la relación funcional entre espacios de medida; y en el caso de que la relación sea inversamente proporcional el reconocimiento de aspectos estructurales de la situación consiste en la comprensión de que hay dos operadores escalares, uno de los cuales es el inverso multiplicativo del otro, y que el producto de medidas correspondientes es constante.

Lamon (2007) plantea que una buena ilustración de estos constructos es ofrecida por el marco de Vergnaud para analizar las estructuras multiplicativas (Figura 4.11).

El siguiente ejemplo muestra una proporción simple directa entre dos espacios de medida. *Si María puede coser 5 camisetas de fútbol con* $7\frac{1}{2}$ *metros de tela, ¿cuántos metros de tela necesitará para hacer una camiseta para cada uno de los 15 chicos del equipo de fútbol?*

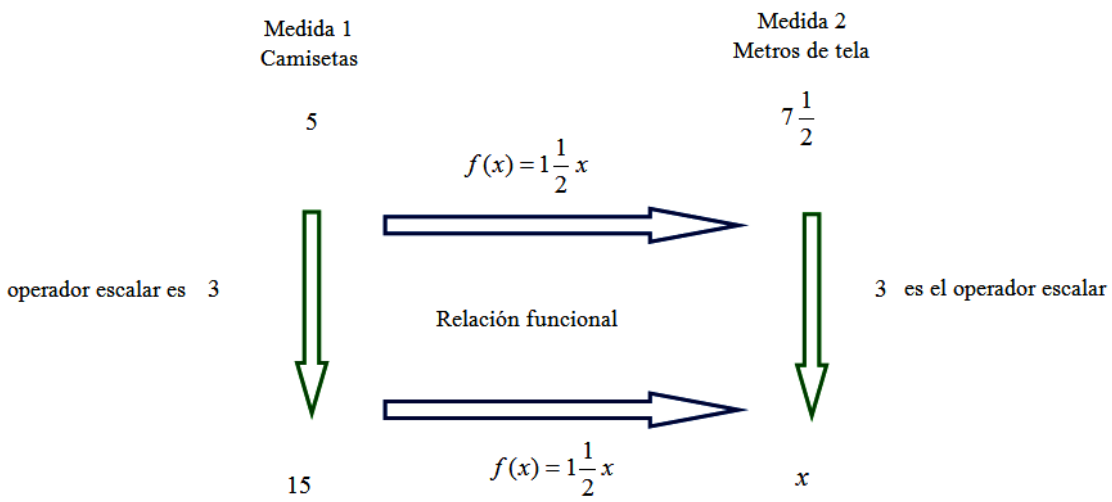


Figura 4.11. Relaciones estructurales en una proporción directa Lamon (2007)

De acuerdo con Lamon (2007) una relación funcional lineal existe entre elementos correspondientes de los espacios de medida, en este caso la función lineal cuyo criterio es $f(x)=1\frac{1}{2}x$ relaciona el número de camisetas y la cantidad de metros de tela; y desde esta perspectiva un operador escalar transforma cantidades del mismo tipo, en este ejemplo en el espacio de medida correspondiente al número de camisetas la relación entre 5 camisetas y 15 camisetas está dada por el operador escalar tres.

Lamon (2007) sugiere que dar respuestas correctas no es garantía de que el razonamiento proporcional esté presente. Esta investigadora señala que a menudo las proporciones pueden resolverse usando conocimiento mecánico sobre las fracciones equivalentes, usando relaciones numéricas o aplicando procedimientos (regla de producto cruzado) que omiten el uso de la constante de proporcionalidad.

Según esta investigadora en el razonamiento proporcional el término razonamiento consiste en el reconocimiento de la razón constante entre elementos del mismo espacio de medida y el reconocimiento de la relación escalar entre espacios de medida. En el caso de la relación inversamente proporcional el reconocimiento de aspectos estructurales de la situación consiste en comprender que hay dos operadores escalares, uno de los cuales es el inverso multiplicativo del otro y que el producto de medidas correspondientes es constante. Una situación inversamente proporcional típica es "*Si tres personas pueden cortar el césped de un terreno en 2 horas ¿Cuánto tiempo le tomará a 2 personas hacer el mismo trabajo?*", la estructura de ésta puede representarse como en la Figura 4.12.

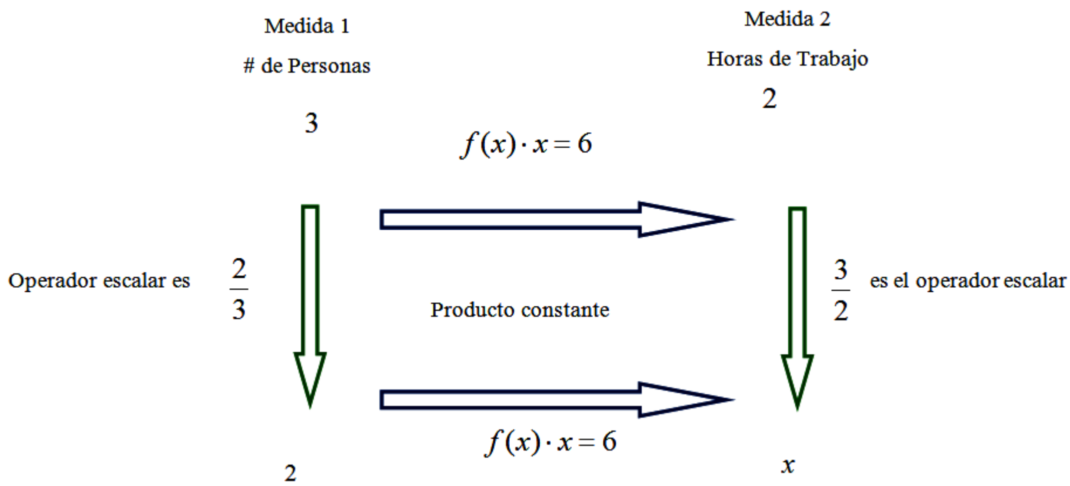


Figura 4.12. Relaciones estructurales en una proporción inversa Lamon (2007)

Los investigadores continuamente han percibido que el "*razonamiento proporcional*" es una consecuencia de la comprensión de la naturaleza de los números racionales. En la investigación (Lamon, 1993; Noelting, 1980; Tourniaire y Pulos, 1985) el dominio del razonamiento proporcional ha estado definido tradicionalmente en términos de dos tipos de problemas similares a los problemas de comparación y equivalencia de fracciones: problemas de comparación y de valor ausente. En un problema de comparación, se dan cuatro cantidades (*a, b, c* y *d*) y la meta es determinar la relación de orden entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Un problema de valor ausente proporciona tres de cuatro cantidades de una proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y el objetivo es encontrar la cuarta cantidad de modo que la igualdad sea verdadera. En este sentido, Llinares (2003b) describe el razonamiento proporcional como aquel que se desencadena al resolver situaciones que se pueden caracterizar mediante dos tipos de relaciones: (a) la funcional que vincula magnitudes diferentes y que refleja el sentido de la unidad de la razón y (b) la relación escalar que vincula cantidades de la misma magnitud; de modo que el razonar usando estas relaciones tanto de manera cualitativa como cuantitativa caracteriza el razonamiento proporcional, subrayan que no es una manifestación de razonamiento proporcional el solo uso de la técnica de la regla de tres o resolver expresiones como $\frac{a}{b}=\frac{x}{d}$ multiplicando en cruz.

A pesar de la definición implícita del dominio de la razón y la proporción en términos de esos dos tipos de problemas (valor ausente y comparación), los términos proporcionalidad y razonamiento proporcional a menudo se usan como sinónimos, por ejemplo en Karplus et al. (1983b). Como consecuencia, ambos términos han llegado a ser imprecisos y confusos refiriéndose a cualquier aspecto relacionado con la razón y la proporción. En los estándares de la NCTM (1989) se afirma que razonar proporcionalmente "*es de gran importancia, debe dedicarse esfuerzo y tiempo para asegurar su buen desarrollo*" (p. 82), y en el documento de la NCTM (2000) se afirma que la proporcionalidad "*es un importante hilo conductor que conecta muchos de los tópicos matemáticos estudiados en los grados 6-8*" (p. 217). Aunque no se ofrecen sugerencias para la enseñanza del razonamiento proporcional o de la proporcionalidad, esas afirmaciones expresan que la habilidad en este tipo de razonamiento es crucial para el pensamiento matemático y científico.

Incluso usando la definición básica que contempla la comprensión de las relaciones estructurales en problemas de comparación o de valor ausente, Lamon (2007) estima que más del 90% de los adultos no razona proporcionalmente- evidencia concluyente de que este tipo de razonamiento implica más que procesos de desarrollo y que la enseñanza debe jugar un papel activo en su impulso.

Un enfoque curricular es definir el razonamiento proporcional en términos de expectativas presentes para los estudiantes de final de la escuela primaria, teniendo en mente que el estudio de variables, funciones, ecuaciones lineales, vectores y otros tópicos estudiados en la secundaria continuarán ampliando y profundizando el conocimiento sobre las relaciones multiplicativas.

Tipos de Problemas Usados en el Estudio del Razonamiento Proporcional

Con el fin de caracterizar el razonamiento proporcional que aplican los sujetos, en la investigación se ha recurrido al planteamiento de distintos tipos de problemas, los cuales se diferencian en aspectos tales como el contexto, la estructura numérica o los tipos de razones involucradas.

Tourniaire y Pulos (1985) hacen una clasificación de los diferentes problemas que se han propuesto a los estudiantes en las distintas investigaciones llevadas a cabo hasta principios de los años 80.

Problemas de física. Son aquellos en los que se requiere el conocimiento o comprensión de algunos principios físicos además del conocimiento y comprensión de la razón y proporción. Han sido criticadas por Karplus, Pulos y Stage (1983) por el hecho de requerir para su resolución conocimientos de física, además de los ligados a la razón y a la proporción.

Problemas de tasa (rate). Son aquellos problemas verbales en los que se comparan razones entre objetos distintos. Entre los más conocidos está el de Mr. Short y Mr. Tall y el de consumo de gasolina por coche.

Problemas de mezclas. Son aquellos problemas verbales en los que se presenta una mezcla, tanto si son de comparación de razones como de valor ausente. Entre los más conocidos las comparaciones de sabor de refrescos de limonada o de naranja (Karplus et al., 1983; Noelting, 1980a).

Otra clasificación de los problemas utilizados (Cramer y Post, 1993; Post et al., 1988; Vergnaud, 1988; citados en A. Fernández, 2001) para estudiar el pensamiento proporcional de los estudiantes es la siguiente:

Problemas de valor ausente (missing value problems). Tres datos de una cuarta proporcional o de una proporción están dados y el otro es desconocido. El ejemplo paradigmático en este caso es el problema de Mr. Short y Mr. Tall (Karplus et al., 1974), desde la perspectiva de Tourniaire y Pulos (1985), este problema es del tipo de tasa (rate).

Problemas de comparación numérica. En este caso la información numérica de las dos razones está dada de forma completa, bien sea de forma implícita o explícita, sin embargo no es necesario dar una respuesta numérica. Un ejemplo de este tipo es el problema del zumo de naranja de Noelting (1980a), no obstante Tourniaire y Pulos (1985) llamaron a éstos, problemas de mezclas. En este caso se varía los números de manera que las relaciones que hay entre los datos resulten enteras y no enteras "en" y "entre" espacios de medida. Considera más difícil la situación en la que la relación no es entera (por ejemplo en la jarra A, tres vasos de agua y siete de jugo de naranja, y en la jarra B cuatro vasos de agua y nueve de jugo de naranja).

Problemas de comparación y predicción cualitativa. Este tipo de problemas de comparación cualitativa están construidos de manera que la comparación que han de hacer los estudiantes para resolver el problema no dependa de valores numéricos específicos ni de la información gráfica que se les proporciona. En contraste con los dos tipos anteriores, en los que algunas habilidades memorísticas o mecanizadas pueden ser usadas para su resolución, este tipo de problemas requiere la comprensión del significado de las proporciones.

Atendiendo a las características semánticas de los enunciados de los problemas Lamon (1993) hace una clasificación en la que caracteriza cuatro tipos de problemas:

Problemas bien compactados (well-chunked measures). En este tipo de problemas se implica la comparación de dos cantidades extensivas, produciendo una cantidad intensiva o tasa (rate) que es bien conocida. Por ejemplo kilómetros por hora (velocidad), pesetas por kilo (precio). Según A. Fernández (2001), Lamon toma la denominación "well chunked" de Kaput (1987), y se refiere de hecho a la tercera cantidad, pues en los problemas de tasa la cantidad intensiva no está bien definida. Los separa y caracteriza como sigue.

Conjuntos asociados. La relación entre dos elementos de dos conjuntos produce una cantidad intensiva que no es conocida o no está clara, al menos que esté bien definida en la situación del problema. Un ejemplo que usa Lamon (1993) es: *Si en un caso siete chicas disponen de tres pizzas y en otro 1 pizza se reparte entre tres chicos ¿Quién tendrá más pizza?* (2) *En un restaurante ponen para cada comensal 7 piezas de cubertería y 3 de vajilla, ¿cuántas piezas de vajilla pondrán si han puesto 35 cubiertos?*

En estos ejemplos las nuevas cantidades intensivas cantidad de pizza/persona y número de cubiertos/número de platos no son conocidas ni están bien compactas o estructuradas.

Parte-parte-todo. Una cantidad extensiva (la cardinalidad) de un subconjunto o parte de un todo es dada (relacionada) en términos de la cardinalidad con la de dos o más subconjuntos o partes de un mismo todo. Algunos ejemplos pueden ser: la razón en un aula de X chicos con Y chicas y la razón entre P respuestas correctas y Q respuestas incorrectas en un test.

Ampliadores y reductores. Son problemas de escalas, tales como la comparación de la razón de crecimiento de dos árboles pasado un período de tiempo, la determinación del factor de escala entre dos figuras semejantes, entre otros.

Descripción de las estrategias de resolución

Al margen de las variaciones y características particulares de los diferentes tipos de problemas, los investigadores (Alatorre y Figueras, 2005; Cramer y Post, 1993; A. Fernández, 2001; Karplus et al., 1983; Lamon, 1993; Modestou y Gagatsis, 2007; Noelting, 1980a; Noelting, 1980b; Rapetti, 2003; Tourniaire, 1986) se han interesado por analizar las actuaciones de los sujetos, orientándose hacia la identificación y caracterización de estrategias correctas e incorrectas, con el fin último de categorizar las actuaciones de los sujetos según el tipo de razonamiento proporcional.

De acuerdo con las investigaciones previas (Alatorre y Figueras, 2005; A. Fernández, 2001; Karplus, Pulos y Stage, 1983; Lamon, 1993; Lamon, 2007; Noelting, 1980a, 1980b; Rapetti, 2003; Ruiz y Valdemoros, 2006) las estrategias aplicadas por los futuros maestros, se pueden considerar enfocadas en dos aspectos:

- La forma en que establecen la razón, es decir observando cómo relacionan las cantidades.
- El uso de la unidad[47] en el problema.

47 Según Delgado et al. (n.d.) en procesos de resolución de problemas de proporcionalidad, se evidencia el uso de diferentes tipos de unidades por parte de los estudiantes, que pueden ser dos tipos: unidades simples (aquellas unidades que en si constituyen un todo o se componen de una sola "cosa") y unidades

Relación entre las cantidades

Con respecto al primer grupo de estrategias, dos tipos han sido mencionadas reiteradamente en las investigaciones previas: la estrategia "en" (**within**) y la estrategia "entre" (**between**), las cuales dada la distinción hecha en el apartado *Tipos de Razones* tendrán una doble acepción según se esté en el contexto de los "sistemas" o entre espacios de medida.

Freudenthal (1978, citado en Karplus et al., 1983) ha señalado que los problemas de comparación y de valor ausente pueden ser resueltos por medio de dos acercamientos, que son consistentes con la definición de razón interna y externa, y que difieren en las operaciones que se aplican a los datos. Estos dos enfoques se refieren a estrategias correctas que permiten comparar razones o resolver un problema de valor ausente. Para la explicación de las estrategias se consideran dos ejemplos:

Problema de valor ausente: Un coche recorre 175 km. en 3 horas. Si va a la misma velocidad, que tan lejos llegará en 12 horas.

Problema de comparación: El coche A recorre 180 km. en 3 horas. El coche B recorre 400 km. en 7 horas. ¿Cuál de los dos iba más rápido?

En relación a los anteriores problemas están las estrategias:

"En" (within). Se refiere a considerar la razón entre cantidades correspondientes, ya sea entre las distancias o entre los tiempos, y después aplicar esa razón para resolver el problema. Los sujetos relacionan multiplicativamente cantidades homogéneas en un espacio de medida, en este caso aplican la noción de razones internas (en el sentido que le da Freudenthal). Esta estrategia también la denominan "escalar" o "en".

Por ejemplo para el problema a, primero se halla la razón entre los tiempos $\frac{12}{3}=4$, y luego se usa el resultado para obtener la distancia así $175\cdot 4=700$ km.

"Entre" (between). Con respecto al ejemplo b, consiste en considerar la razón entre las cantidades extensivas kilómetros y horas, y posteriormente aplicar el resultado para resolver el problema. Las relaciones se establecen entre cantidades de distintos espacios de medida utilizan razones externas (en el sentido que le da Freudenthal). Esta estrategia también la denominan "funcional" o "entre". Por ejemplo, en el problema b se tendría que hallar primero la razón para el auto A $\frac{180\ \text{km}}{3\ \text{h}}$ y hallar la razón para el auto B $\frac{400\,\text{km}}{7\,\text{h}}$, luego con los resultados correspondientes a saber $\frac{60\,\text{km}}{1\,\text{h}}$ para el auto A y $57.1\frac{\text{km}}{\text{h}}$ para el auto B, resolver el problema.

Sin embargo, Noelting (1980a, 1980b) en su investigación referente a las actuaciones de los alumnos ante tareas de comparación de razones, bajo el contexto de las mezclas

compuestas (obtenidas al tomar la secuencia de ítems unitarios como una sola unidad que en si misma está compuesta de unidades).

(problema del refresco de naranja), presenta otra perspectiva en relación con las estrategias between y within, las cuales son consecuencia de la definición que utiliza para razones internas y externas. En este sentido para Noelting (1980a, 1980b) las estrategias “entre” son aquellas en las que los términos relacionados son los términos entre distintos sistemas, mientras que las estrategias “en” son aquellas en las que los términos son los términos de un mismo sistema.

En nuestro caso, siguiendo a A. Fernández (2001) y con el fin de evitar confusiones respecto a las estrategias “en” y “entre” planteadas por Noelting (1980a, 1980b) y Freudenthal (1983), decidimos que si los estudiantes relacionan las cantidades en un mismo espacio de medida, diremos que hacen uso de una estrategia escalar (relación escalar), y si relacionan entre espacios de medida diferentes diremos que hacen uno de una estrategia funcional (relación funcional).

Uso de la unidad

Otra manera de visualizar las estrategias aplicadas por los sujetos al resolver problemas de proporcionalidad directa, es considerar las estrategias empleadas por los sujetos en términos del uso que hacen de la unidad. En el caso de la resolución de problemas de valor ausente Lamon (1993) identifica tres estrategias correctas, dos de las cuales presentan un uso diferenciado de la unidad, y a las cuales haremos referencia después de considerar el siguiente ejemplo: *Si por 8 refrescos pago 4 euros ¿cuánto debo pagar por 24 refrescos?*

Estrategia de la Unidad Simple (single unit strategy). En este caso los sujetos hallan el valor de un refresco ($4 \div 8 = 0{,}5$) y el resultado lo obtienen mediante la operación $24 \cdot 0{,}5 = 12$ euros. Este tipo de estrategia también la reconocen Cramer y Post (1993) con el nombre de “razón unitaria” (unit-rate), también conocida ¿cuánto por uno?

Estrategia de la Unidad Compuesta (composite unit strategy). Los sujetos consideran que 24 refrescos es 3 veces la unidad compuesta (8 refrescos) y calculan el costo como 3 veces el costo de la unidad, en este caso el costo de la unidad 8 refrescos era 4 euros. Este tipo de estrategia también la reconocen Cramer y Post (1993) con el nombre de “factor de cambio” o “tantas veces como” (factor of change method or times as many), en ella el sujeto reconoce el factor multiplicativo asociado a las relación interna entre los datos en cada espacio de medida. Según A. Fernández (2001) esta estrategia es fácil de usar cuando el factor es entero, y además plantea que este factor de cambio puede referirse tanto a la relación externa como a la interna.

La estrategia de la normalización ya ha sido descrita en la p. 117, subrayamos que constituye una estrategia útil en la comparación de razones. Por ejemplo para el problema: *En una reunión hay 7 chicas y 3 chicos. Han comprado 4 pizzas y deciden repartirlas del siguiente modo: 3 pizzas para las chicas y 1 pizza para los chicos. Determina quiénes reciben más pizza las chicas o los chicos*.

En el marco de la “normalización”, este problema se abordaría mediante el uso de la razón equivalente, en la que la razón 1 pizza:3 chicos es equivalente a la razón 3 pizzas:9 chicos y la unidad compuesta de referencia (3 pizzas) es la misma. Luego para resolver el problema los alumnos han de comparar únicamente los consecuentes de las razones 3:9 y 3:7.

En este marco Lamon (2007) describe particularmente el uso de la razón como unidad (ratio as unit). Considerando el problema anterior (pizzas), en la resolución se toma la razón 3 chicos:1 pizza como una unidad y se reinterpreta la otra razón 7 chicas:3 pizzas en términos de esta unidad. Los alumnos utilizan esta estrategia mediante técnicas de emparejamiento de la siguiente forma: primero emparejan 3 chicas con 1 pizza (una razón unidad), después relacionan otra pizza con otras tres chicas (otra razón unidad), al final se quedan con 1 pizza para 1 chica, la cual comparan con 3 chicos:1 pizza, y concluyen que las chicas tienen más trozos de pizza.

Según Lamon (2007) la normalización no es un buen indicador del razonamiento proporcional ya que los estudiantes que a menudo la usan fallan en reconocer toda la relación estructural de una proporción.

Categorización del Razonamiento Proporcional

Varios investigadores (Karplus et al., 1983, Lamon 1993, Tourniaire y Pulos 1985) han analizado las actuaciones de los estudiantes, usando distintos indicadores, para describir el razonamiento proporcional que exhiben los sujetos en la resolución de tareas matemáticas en este dominio. Según A. Fernández (2001), en los trabajos, se hacen referencia a tres aspectos: las estrategias correctas, las estrategias incorrectas y la categorización de actuaciones de acuerdo con un mayor o menor uso del razonamiento proporcional.

Karplus, Pulos y Stage (1983), después de analizar las estrategias aplicadas por los alumnos en la resolución de un problema de comparación de razones basado en la tarea “Rompecabezas de la limonada”, agrupan las actuaciones de los estudiantes en 4 amplias categorías:

Categoría I (incompleta, ilógica) que incluye las actuaciones de los estudiantes que adivinan la respuesta por intuición y no dan explicaciones, o que utilizan los datos de manera ilógica o que utilizan operaciones cuantitativas no apropiadas.

Categoría Q (cualitativa), contiene las actuaciones de los estudiantes que justifican su respuesta usando los cuatro términos dados y comparándolos mediante expresiones de tipo cualitativo como “más”, “menos” o equivalentes.

Categoría A (aditiva), en la que se ubican las actuaciones de estudiantes que usando todos los datos obtienen la respuesta mediante la estrategia aditiva de la diferencia constante.

Categoría P (proporcional), en la que se incluyen los estudiantes que usan las relaciones proporcionales entre todos los datos para obtener la respuesta, aunque haya errores aritméticos. Esta categoría la dividen en tres subcategorías: Pb (between), si usan la relación externa o funcional; Pw (within), si usan la relación interna o escalar y Pu (unclassificable), si usan otro tipo de comparación.

En Lamon (1993) las resoluciones de los problemas propuestos fueron analizadas y codificadas a lo largo de las siguientes dimensiones matemáticas:

- Uso del pensamiento relativo o absoluto.

- Tipo de representación (verbal, pictórica, tabular).

- Estructura de la cantidad (unidad simple, unidad compuesta).

- Sofisticación de la estrategia (estrategia incorrecta, razonamiento pre-proporcional, razonamiento proporcional cualitativo, razonamiento proporcional cuantitativo).

Con respecto a la sofisticación de la estrategia la autora, para el análisis de las soluciones hechas por niños de 6º grado a problemas de razones y proporciones, establece dos tipos de estrategias, las constructivas y las no constructivas, y según estas estrategias, propone seis niveles, en relación con un mayor o menor razonamiento proporcional. Los niveles correspondientes a las estrategias no constructivas se denominan: evasiva, visual o aditiva, construcción de patrones. Los niveles que corresponden a las estrategias constructivas se denominan: razonamiento pre-proporcional, razonamiento proporcional cualitativo y razonamiento proporcional cuantitativo. Allain (2000) utiliza una escala para medir las actuaciones de los estudiantes, en esta escala se asigna a cada sujeto un número del 1 al 4, según algunos indicadores predeterminados por la investigadora. Su objetivo fue describir, a grandes rasgos, el razonamiento proporcional de los estudiantes que formaron parte de su estudio.

4.1.2.4 Noción de Proporcionalidad

Desde la Didáctica de la Matemática la noción de proporcionalidad directa se define como una función lineal f entre dos magnitudes M y N. Esta relación se modeliza mediante la función lineal $f(x) = kx$, siendo k una constante.

Definimos la proporcionalidad de magnitudes en general como se hace a continuación: Supongamos dos magnitudes escalares E y E'. Llamaremos $c_1, c_2, ..., c_i$ a las cantidades de E y $c'_1, c'_2, ..., c'_i$ a las cantidades de E'.

Sea r cualquier número real $r \in R^+$. Definimos una aplicación biyectiva $p: E \to E'$, de tal forma que $p(c_i) = c'_i$ ($c_i \in E$ y $c'_i \in E'$), tal y como se muestra en la Figura 4.13.

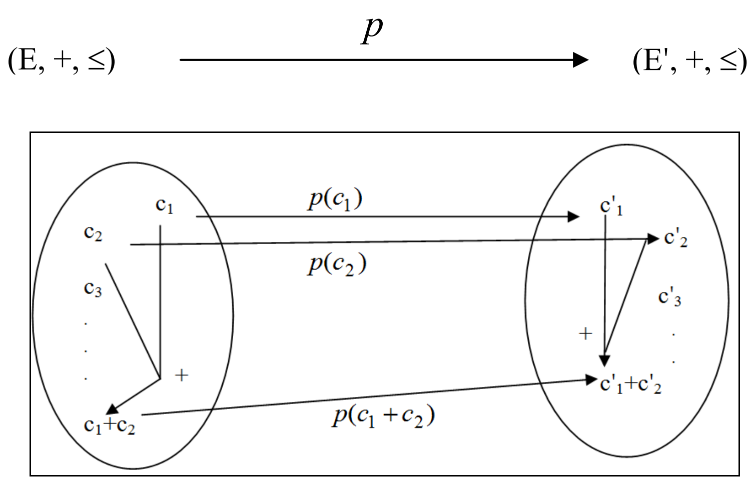


Figura 4.13. Diagrama de la aplicación de proporcionalidad $p : E \to E'$

Si la aplicación $p : E \to E'$ cumple las condiciones:

$$p(c_1 + c_2) = p(c_1) + p(c_2) = c_1' + c_2'$$
$$p(r * c_i) = r * p(c_i) = r * c_i'$$

A la aplicación p se la llama "aplicación de proporcionalidad" o simplemente "proporcionalidad" entre las magnitudes E y E'. De esta forma, si se puede definir p en las condiciones indicadas, se dice que las magnitudes E y E' son proporcionales.

Proporcionalidad y Medida

Consideremos dos magnitudes escalares proporcionales E y E'. Sea p una función de proporcionalidad definida entre ambas ($p : E \to E'$). Supongamos que establecemos una medida en cada una de esas magnitudes. Llamamos S y S′ a los subconjuntos de R^+ utilizados como conjuntos imágenes de las medidas m_u y $m_{u'}$, respectivamente (ver Figura 4.14). Podemos establecer una aplicación *f* de S en S′ que asocie al número real $m_u(c_i) \in S$ el número real $m_{u'}[p(c_i)]$.

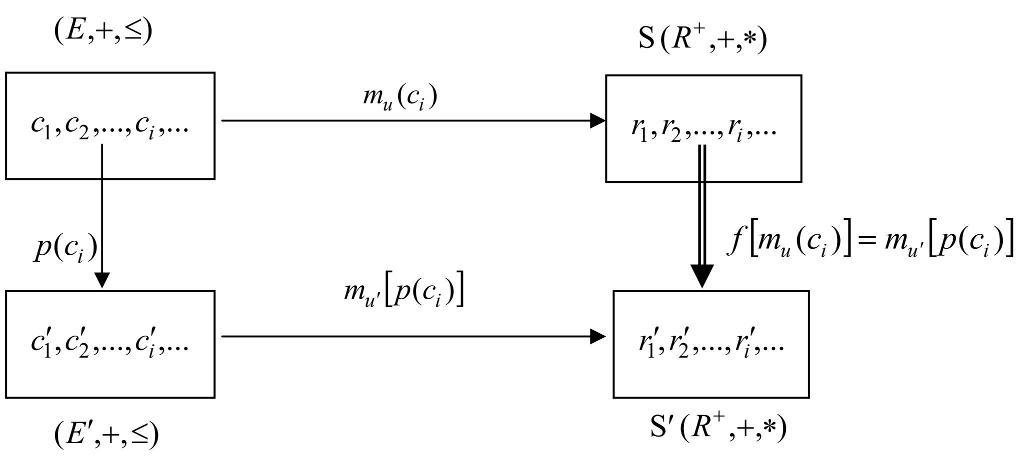


Figura 4.14. Aplicación de proporcionalidad *f* de S en S′

En realidad, la función de proporcionalidad inducida f resulta ser la biyección composición de las aplicaciones siguientes (donde $(m_u)^{-1}$ es la aplicación inversa de la biyectiva $m_u : S \to E$, ver Figura 4.15):

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "(m_u)^{-1}"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & E \arrow[r, "p"] & E' \arrow[r, "m_{u'}"] & S' \end{tikzcd}$$

Figura 4.15. Aplicación *f* de S en S´ como composición de otras aplicaciones

La función de proporcionalidad $f : S \to S'$ siempre toma la forma: $f(r_i) = k * r_i$ (siendo $r_i \in$ S) donde k es un número real llamado "constante de proporcionalidad". En efecto, nombremos: $m_u \cdot [p(u)] = k$ (1)

Sea c_i un elemento genérico de *E*, y $m_u(c_i) = r_i$ (ver Figura 4.16). De acuerdo con (1): $f(r_i) = m_{u'}[p(c_i)]$. Y, por lo tanto: $m_u(c_i) = r_i \Rightarrow c_i = r_i * u$.

Luego $f(r_i) = m_{u'}[p(r_i * u)] = m_{u'}[r_i * p(u)] = r_i * m_{u'}[p(u)]$ y de nuevo sustituyendo el valor de *k* en (1): $f(r_i) = k * r_i$.

Cuando dos magnitudes, *E* y *E′*, son proporcionales ($p : E \to E'$) se verifica que: "las medidas r_i y r_i' de cantidades correspondientes c_1 y c_1', con unidades correspondientes (mediante la misma proporcionalidad p) u y u', resultan ser iguales".

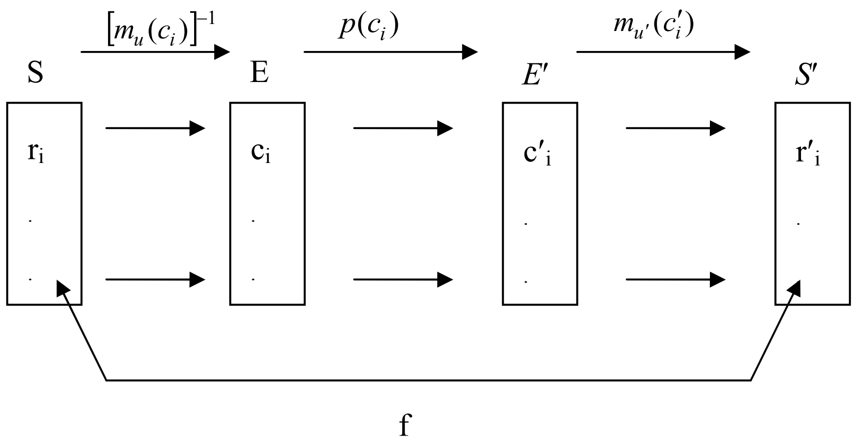


Figura 4.16. Relación entre las medidas correspondientes r_i y r_i' bajo la misma proporcionalidad

En efecto, la función de proporcionalidad *f* es de la forma $f(r_i) = k * r_i$. En el caso particular de la unidad $f(1) = k * 1 = 1 \Rightarrow k = 1$, por tanto, para todo elemento de *S*, r_i se verifica que $f(r_i) = k * r_i = r_i'$ y como $k = 1$ implica necesariamente que $r_i = r_i'$.

Los términos razón, proporción y proporcionalidad adquieren un significado unificado con la noción de función lineal, pues es un modelo que sintetiza diversos lenguajes, situaciones y representaciones. La función lineal puede considerarse como la matematización de las situaciones cotidianas que implican la idea de la proporcionalidad directa, esta función representa la estructura de la proporcionalidad y sirve para visualizar los diferentes estados de variación, es decir expresa su comportamiento cualitativo (Fiol y Fortuny, 1990).

De modo menos frecuente encontramos referencias a la proporcionalidad inversa o a la proporcionalidad compuesta[48]. Algunos autores (F. Fernández, 2001; Prada, 1990) hacen una breve reseña desde un punto de vista procedimental ejemplificando mediante la resolución de problemas del tipo “valor desconocido” (missing value problems) el uso de la regla de tres inversa y compuesta o mediante la manipulación de ciertas propiedades para transformar los problemas de regla de tres inversa a problemas de proporcionalidad compuesta.

La constante de proporcionalidad

La proporcionalidad es un constructo matemático referido a la condición o a la estructura subyacente a una situación en la cual existe una relación invariante especial (constante) entre dos magnitudes covariantes (las cantidades de ambas están relacionadas y cambian simultáneamente).

El modelo matemático para las relaciones directamente proporcionales es la función lineal de la forma $y = kx$, donde k se conoce como constante de proporcionalidad. De modo que y es un múltiplo de x. Equivalentemente, dos cantidades son proporcionales cuando éstas varían de forma tal que mantienen una razón constante $\frac{y}{x} = k$. La constante k juega un papel esencial en la comprensión de la proporcionalidad.

Pedagógicamente hablando, k es un ente camaleónico debido a que su apariencia cambia en cada contexto y representación de las situaciones proporcionales. Frecuentemente la constante no aparece explícitamente en el contexto en el cual está implicada, sin embargo es un elemento estructural que ha de ser descubierta a través de la interpretación de otras informaciones de la situación.

Simbólicamente k es una constante, en un gráfico es la pendiente. En una representación tabular como la presentada en la Figura 4.17 será la diferencia entre

48 Se denomina relación de proporcionalidad inversa a la que se establece entre una variable independiente x y una variable dependiente y, de tal forma que el producto de ambas es siempre igual a una constante k, es decir $x \cdot y = k$; y la proporcionalidad compuesta se establece cuando dos o más magnitudes están relacionadas a la vez, proporcionalmente, con otra magnitud.

cualquier celda y la siguiente o equivalentemente podría ser la razón entre una cantidad respecto a otra, en este caso la constante estaría expresada como una razón unitaria.

M_1	1	2	3	4	5	6	7	8
M_2	3	6	9	12	15	18	21	24

Figura 4.17. Representación tabular de magnitudes proporcionales

En general, en situaciones de tasas (razones externas), k es la tasa constante. En la lectura de mapas es la escala. En situaciones de ampliaciones o reducciones o en la semejanza de figuras la constante es el factor de escala. Podría ser un porcentaje si se está en una situación de impuesto de ventas o ser una probabilidad teórica si se están lanzando dados. Estos ejemplos sugieren que la interpretación de la constante de proporcionalidad es específica a la situación en la que está implicada. Lamon (2007) plantea que incluso cuando un estudiante razona proporcionalmente la tarea de interpretar la constante de proporcionalidad, en situaciones relativamente simples, puede ser un desafío.

4.1.3 Tipos de Conocimientos Relacionados con la Razón y la Proporcionalidad

La clasificación que hacen Hiebert y Lefevre (1986) entre tipos de conocimiento matemático escolar, la hemos aplicado a las nociones de razón y proporcionalidad (Ver Tabla 4.4). Estos autores establecen la clasificación del contenido de las matemáticas escolares en dos grandes bloques: conceptual y procedimental y dentro de estos dos bloques tres niveles de complejidad: hechos, conceptos y estructuras como los tres tipos de conocimientos que articulan el campo conceptual, y destrezas, razonamientos y estrategias, los correspondientes al campo procedimental.

Tabla 4.4. *Clasificación cognitiva de los contenidos razón y proporcionalidad*

Conocimiento Conceptual

<u>Términos</u>: Razón, relación, antecedente, consecuente, cociente, razón inversa, proporción, medios, extremos, equivalente, alícuota, tasa, índice, comparación, valor de la razón, porcentaje, escala, relativamente, semejante. Relación, función lineal, proporcionalidad directa, proporcionalidad inversa, constante, variable, magnitudes, hipérbola.

<u>Notaciones</u>: $a:b$, $\frac{a}{b}$, ${}^{a}\!/_{b}$, $a \to b$, x % $m_u(c_i)=r_i$, $med_e(a)=r$, $a=r\cdot e$,$r=\frac{a}{b}$, $r(a,b)=\frac{máx(s,t)}{mín(s,t)}$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $a:b::c:d$, $y=f(x)=kx$, $f(x)=\frac{k}{x}$.

<u>Convenios de lectura</u>: $a:b$ se lee "*a*" es a "*b*"; $a:b::c:d$ se lee "*a*" esa "*b*" como "*c*" es a "*d*". El valor de la razón es un número mayor que 1. En las escalas *a*:*b*, $a \leq b$. En la expresión verbal y simbólica de la razón se utiliza habitualmente los representantes menores de la relación, es decir a y b tales que el *mcd* (*a, b*) = 1.

<u>Resultados:</u> Propiedades de las razones y de las proporciones. Tipos de razones y

Tabla 4.4. *Clasificación cognitiva de los contenidos razón y proporcionalidad*

	proporciones. <u>Conceptos:</u> Razón como relación e índice comparativo. Equivalencia de razones, proporción. Magnitud, cantidad extensiva e intensiva, razón inversa, orden entre razones, proporción. Semejanza de figuras y objetos. Función lineal, función de proporcionalidad inversa constante de proporcionalidad, variable, covariación. <u>Estructuras</u>: Sistema multiplicativo de los números reales positivos, subestructura (R^+, x).
Conocimiento Procedimental	<u>Destrezas:</u> Aplicar procedimientos para obtener razones equivalentes. Multiplicación y división de números racionales. Uso de la razón unitaria. Regla de tres directa e inversa. Cálculo de porcentajes. Estrategias building-up. Relación entre cantidades, within (en) y between (entre). Normalización o tipificación de razones. Cálculo del valor de una razón por medio de la división del antecedente y consecuente. Estrategia "factor de cambio". Uso de distintas representaciones de la razón y la proporcionalidad. <u>Razonamientos</u> Inductivo: búsqueda de patrones en secuencias numéricas proporcionales, elaboración de conjeturas, construcción de las propiedades de las razones y las proporciones. Deductivo: aplicación de las propiedades de la razón o de las relaciones de proporcionalidad. Analógico: razonamientos en situaciones proporcionales particulares a partir de otros casos particulares. Argumentos para justificar propiedades de las razones, proporciones o relativas a las relaciones estructurales en una proporción. <u>Estrategias</u> Estrategias propias del razonamiento proporcional: reconocimiento de aspectos estructurales de las proporciones directas e inversas (relación funcional y escalar). Estrategia "suposición de razones equivalentes". Estrategias usadas en la comparación de razones distintas a la división. Estimación usando la noción de proporcionalidad.

4.1.4 Sistemas de Representación

Por representación entendemos cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación (Castro y Castro, 1997). Esos diferentes modos de representar comparten una estructura, y por ello se habla de sistemas de representación (Janvier, 1987). Los sistemas de representación son centrales en la caracterización del significado de las nociones matemáticas, y contribuyen a la comprensión de conceptos y procedimientos. Cada uno de ellos permite resaltar aspectos particulares de esos conceptos y de sus relaciones, y oculta otros (Rico, Lupiáñez, Marín, Gómez, 2007).

En el caso de la razón y la proporcionalidad identificamos siete tipos de representaciones: simbólica, verbal, algebraica-funcional, cartesiana, gráfica, tabular, íconos y diagramas.

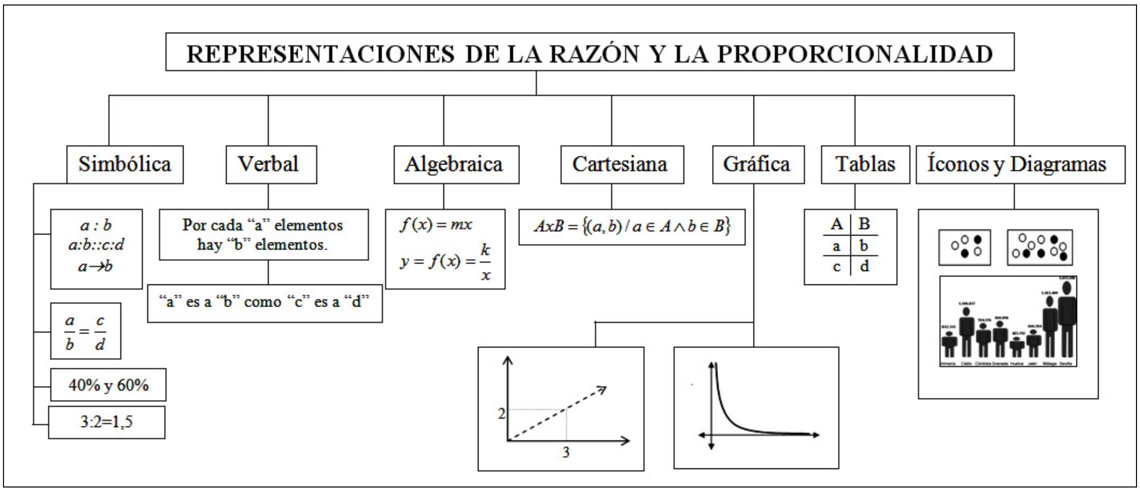


Figura 4.18. Representaciones de la razón y la proporcionalidad

Cada uno de los sistemas de representación permite resaltar aspectos particulares de esos conceptos y de sus relaciones, y oculta otros (Castro y Castro, 1997; Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez, 2008).

Las expresiones algebraicas explícitas de las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, $f(x) = kx$ y $f(x) = \frac{k}{x}$, permiten representar el procedimiento que permite generar pares de cantidades de las magnitudes proporcionales. Por otro lado manipulaciones algebraicas de tales expresiones permiten obtener algunos resultados referentes a las relaciones numéricas que cumplen las cantidades de las magnitudes, por ejemplo en el caso de la proporcionalidad directa al dividir ambos lados de la expresión por x se obtiene que el cociente de $f(x)$ y x ha de ser una constante, o en el caso de la proporcionalidad inversa, al hacer el mismo procedimiento, se obtiene que el producto de las cantidades ha de ser constante.

La relación de proporcionalidad entre las cantidades de dos magnitudes se puede representar en una tabla que incluya el nombre de las magnitudes y los valores correspondientes de los conjuntos. Este tipo de representación facilita la visualización de las relaciones funcional y escalar entre las cantidades.

La representación gráfica de la proporcionalidad directa permite visualizar el sentido de covariación de las magnitudes a través de la monotonía, es decir, para el caso de que la constante k sea mayor que cero se puede observar que conforme aumentan los valores de una magnitud también aumentan los valores de la otra. Sin embargo las características de la proporcionalidad que estas representaciones potencian son limitadas, por lo que es preciso durante la enseñanza acompañar estas representaciones gráficas de otras que permitan visualizar las propiedades estructurales de la relación de proporción que se da entre las magnitudes.

Representación simbólica

En esta modalidad se consideran las representaciones de carácter alfanumérico, es decir que utilizan símbolos del abecedario y símbolos matemáticos para expresar los distintos tipos de conocimiento conceptual o procedimental, asociados a la razón, la proporción y la proporcionalidad.

Una razón puede representarse en una variedad de formas. Por ejemplo, se puede describir la relación entre el número de bolas rojas y verdes en una caja mediante expresiones tales como $3 \text{ a } 2, 3:2$ o $\frac{3}{2}$. Aunque las tres expresiones hacen referencia a la misma situación, matemáticamente enfatizan cuestiones diferentes, a continuación recogemos los aspectos de los conceptos sobre los que cada representación pone énfasis.

La fraccionaria $\left(\frac{a}{b}\ ;\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)$

Según Lamon (2007) las fracciones son representaciones que comprenden dos símbolos, son una forma de escribir números en la forma $\frac{a}{b}$. En este sentido la palabra fracción hace referencia a un sistema de notación, un símbolo, dos enteros escritos con una línea entre ellos. Complementariamente, se acepta que las fracciones representan números racionales positivos, con lo que a y b son ambos negativos o ambos positivos y se restringe el valor de b indicado que debe ser distinto de cero ($b \neq 0$). Según esta investigadora se asocia el término "fracción" y la notación fraccionaria exclusivamente con uno de las interpretaciones del número racional, el significado parte-todo. Es importante subrayar que los términos fracciones y números racionales no son sinónimos y que es más adecuado pensar en las fracciones como un subconjunto de los números racionales y tener en cuenta las siguientes consideraciones:

(a) Todo número racional puede representarse en forma fraccionaria, en los siguientes ejemplos todos son fracciones y números racionales a la vez: $\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{4}}{2}$ se escriben normalmente como $\frac{2}{3}$, $\frac{2.1}{4.1}$ se expresa como $\frac{21}{41}$ o $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$ se expresa como $\frac{2}{1}$.

(b) No todos los números expresados en notación fraccionaria son números racionales, por ejemplo $\frac{\pi}{2}$ no es un número racional pero se expresa mediante notación fraccionaria.

(c) Cada fracción no corresponde a un número racional diferente, por ejemplo no existe un número racional distinto para cada una de las fracciones $\frac{2}{3}, \frac{6}{9}, \frac{10}{15}$.

El término “razón” no es sinónimo de “fracción” ni de “cociente”, hemos de considerar que la identificación de ambos conceptos puede acarrear dificultades de comprensión para los estudiantes, aunque la razón pueda representarse mediante una fracción y en ocasiones se calcule el valor de la misma a través de la división.

Los problemas de identificar razón y fracción surgen por la comprensión tradicional de la fracción como expresión de la relación parte-todo, es decir si se considera que una fracción es un par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero mientras que la razón es un par ordenado de cantidades de magnitud que son expresadas mediante un número real y una unidad.

Hoffer (citado en Godino, 2004) explica claramente estas distinciones, señala que el hecho de que las razones se refieran a pares de cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones:

- Las razones[49] comparan entre sí objetos heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 botellas de vino por 145 euros. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como “dos de tres partes”, lo que se indica con 2/3. Según esto la razón 3 botellas/145 euros no es una fracción.
- Es posible expresar la razón prescindiendo de la notación fraccionaria. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.
- Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 7 a 4 se puede escribir como 7:4, o 7 → 4.
- En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser 10:5, pero también se puede decir que puede ser 10:0, si es que todos son verdes (no se trata de hacer ninguna división por 0).
- Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia (C) a su diámetro (D), expresado fraccionariamente con $\frac{C}{D}$ es el número π, que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado ($\sqrt{2}$). Esta es una diferencia esencial entre “razón” y “fracción”, ya que como vimos las fracciones son tradicionalmente interpretadas como cociente de enteros.
- Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que las fracciones. Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos (2:5), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos (3:7) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas fracciones se puede definir una “suma” de razones del

[49] Nos referimos a “las razones” de forma plural, aludiendo a los posibles tipos de razón que es posible considerar (Ver Tabla 4.2).

siguiente modo 2:5 + 3:7 = 5:12. Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones.

En este caso la representación de la proporción como una igualdad de fracciones, permite identificarla con dos fracciones equivalentes, hecho que en múltiples ocasiones encubre el significado de la expresión. En las fracciones equivalentes, la cantidad representada es la misma pero expresada en otra forma. En una proporción las cantidades representadas pueden ser diferentes (distinta naturaleza) pero los razones son equivalentes (Van de Walle, 2005; citado en D. Loder, 2007). Cuando se representa una razón como fracción hay que ser cautelosos ya que el consecuente de la razón puede ser cero pero en una fracción el denominador cero no está definido.

La representación habitual ($a:b, a:b::c:d$)

Las razones y las proposiciones referidas a las proporciones se representan habitualmente utilizando dos puntos (:) en medio de los elementos, en el caso de las razones primero se escribe el antecedente y luego el consecuente. En el caso de una proporción escribimos cuatro puntos (::) entre las dos razones equivalentes. La razón $a:b$ se lee "a es a b" y la proporción $a:b::c:d$ se lee "a es a b como c es a d". La notación habitual pone énfasis en la correspondencia entre las cantidades que se comparan. En el caso de la razón únicamente se visualiza los elementos que se relacionan mientras que en el caso de la proporción se evidencia la equivalencia de las dos razones que la conforman.

Representación decimal

La característica principal de los sistemas posicionales de numeración es que el valor de una cifra depende del lugar que ésta ocupe en un número. Por otro lado, se emplea una cantidad finita de cifras diferentes para representar todos los números, y esa cantidad determina la base o principio de agrupamiento de ese sistema de numeración. De manera general, el valor total de un número en un sistema con una base determinada, será la suma de cada dígito multiplicado por la potencia de la base correspondiente a la posición que ocupa en el número. En el caso de la representación de la razón se utiliza el sistema de base diez cuando se toma la razón como cociente, la división del antecedente y consecuente permiten hallar un número racional asociado a la razón, cuyo orden es bien conocido por los sujetos, de modo que comparar dos razones se transforma en la acción de comparar dos números racionales. En la situación que hemos utilizado anteriormente tendríamos que la razón $(3:2)$ entre la cantidad de bolas rojas y verdes se puede representar con el número racional $1{,}5$.

Porcentajes

La notación de porcentajes y el razonamiento de proporcionalidad que se pone en juego cuando uno de los términos que intervienen en las proporciones toma el valor 100 se utiliza en una amplia variedad de situaciones de la vida diaria. La expresión "x%" es una manera alternativa de expresar la razón $x:100$, pero el concepto de porcentaje proviene de la necesidad de comparar dos números entre sí, no sólo de manera absoluta (cuál de los dos es mayor), sino de una manera relativa, es decir, se desea saber qué fracción o *proporción* de uno representa respecto del otro. En estas situaciones se suele utilizar el número 100, que es familiar, como referencia. Al situarlo como denominador de una fracción, su numerador indica qué porción de 100 representa.

Esta representación hace patente la consideración de fijar el todo en 100 con el fin de expresar las partes numéricamente, se utiliza el símbolo %, por ejemplo 20% se lee "veinte por ciento". En la situación "*En una caja hay 20 bolas, por cada 3 bolas rojas hay 2 bolas verdes*" la razón de bolas rojas y verdes es 3:2, para representar esta relación porcentualmente se fija un total de 100 bolas y se compara cada una de las partes con el todo (3 de 20 son rojas), es decir nos preguntamos por la relación de las bolas rojas con respecto a un total de 100 bolas, de donde se concluye que un 60 de las bolas son rojas y 40 son verdes. Esto se expresa simbólicamente así 60% son bolas rojas y el 40% son verdes. En el Apartado 4.1.2.2 hemos detallado el porcentaje.

Escala

La escala es la relación matemática que existe entre las dimensiones reales y las del dibujo que representa la realidad sobre un plano o un mapa. Las escalas se escriben en forma de razón donde el antecedente indica el valor del plano y el consecuente el valor de la realidad. Por ejemplo la escala 1:500, significa que 1 cm del plano equivale a 500 cm o 5 m en la realidad. Ejemplos: 1:1, 1:10, 1:500, 5:1, 50:1.

Representación algebraica

La representación funcional simbólica la hemos expuesto previamente en la propuesta de Fiol y Fortuny (1990), para la definición de proporcionalidad directa, y por Roanes (1969) para el caso de la proporcionalidad inversa.

Las expresiones algebraicas explícitas de las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, corresponden a $f(x) = kx$ y $f(x) = \frac{k}{x}$ y básicamente permiten representar la técnica-procedimiento u operación aritmética que permite generar pares de cantidades de las magnitudes proporcionales. Por otro lado manipulaciones algebraicas de tales expresiones permiten obtener algunos resultados referentes a las relaciones numéricas que cumplen las cantidades de las magnitudes, por ejemplo en el caso de la proporcionalidad directa al dividir ambos lados de la expresión por x se obtiene que el cociente de $f(x)$ y x ha de ser una constante, o en el caso de la proporcionalidad inversa, al hacer el mismo procedimiento, se obtiene que el producto de las cantidades ha de ser constante.

Otro caso de relación numérica que se evidencia al considerar la definición de proporcionalidad inversa $i(ks) = \frac{1}{k} i(s)$ es la que habitualmente se usa al hablar de este tipo de proporcionalidad. Por ejemplo al decir que si se toma el doble de una cantidad su valor correspondiente queda dividido por dos.

Representación cartesiana

Dado que la relación de proporcionalidad se modela mediante una función lineal o una hipérbola, cada par de cantidades de magnitud forman un par ordenado que se representa en el plano cartesiano, estos números satisfacen la ecuación de la función. Las parejas de números llamados coordenadas se forman con un valor para "x" y un valor para "y" (x, y), de modo que "x" es un elemento de una magnitud e "y" es el correspondiente de la otra magnitud, $AxB = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$.

En el ejemplo que venimos presentando "*En una caja hay 20 bolas, por cada 3 bolas rojas hay 2 bolas verdes*", si se mantiene la misma relación entre las cantidades y se aumenta el número de bolas rojas y verdes, esta relación se puede representar con la función $f(x) = \frac{2}{3}x$, y las coordenadas (3,2), (6,4), (9,6)… serían los pares ordenados que representan las relaciones correspondientes.

Representación verbal

Ligado al sistema de representación simbólico está el verbal, en el que convenios de lectura y del lenguaje determinan la expresión oral o escrita de la razón, la proporción y la proporcionalidad. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para indicar la relación entre cantidades. Según Ben Chaim, Keret e Ilany (2012), este tipo de representaciones no tienen necesariamente implicaciones o interpretaciones matemáticas. Por ejemplo:

- 3 a 2
- 10 litros por metro cuadrado
- Dos es a tres
- Dos es a tres como cuatro es a seis
- La razón es de 7 a 4
- dos de cada tres habitantes son mujeres
- por cada dos canicas azules hay tres canicas amarillas

Representación gráfica

Las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, se pueden representar a través de gráficas cartesianas. Los gráficos cartesianos ilustran el concepto de variación caracterizando el cambio proporcional. Este cambio proporcional es lineal en el sentido de que los puntos de la gráfica de la función de proporcionalidad están sobre la línea recta.

En efecto, al elegir dos medidas en las magnitudes proporcionales, la expresión de proporcionalidad es del tipo $y = kx$ siendo *k* la constante de proporcionalidad. Entonces la tabla de valores de las funciones $y = kx$ da pares de números (x, y) que representan puntos de las gráficas de estas funciones en un sistema de coordenadas cartesianas. Como el par de valores (0,0) aparece en todas ellas, las gráficas siempre pasan por el origen de coordenadas. (Figura 4.19).

x	r_1	r_2	r_3	$\cdots$	r_n	$\cdots$
y	r'_1	r'_2	r'_3	$\cdots$	r'_n	$\cdots$

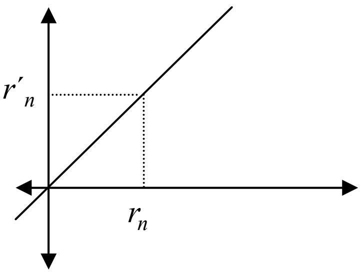


Figura 4.19. Representación gráfica de la función $y = kx$

El valor numérico de *y* es directamente proporcional al de *x*, la constante *k* es su constante de proporcionalidad y representa el valor de *y* correspondiente a la unidad de la variable *x*. La función lineal $y = kx$ es monótona; para valores positivos es monótona creciente y para valores negativos es decreciente. Geométricamente la constante k se puede interpretar como un gradiente (pendiente), es decir, determina el cociente entre la diferencia altura y la distancia horizontal para cada dos puntos de su gráfica (Figura 4.20).

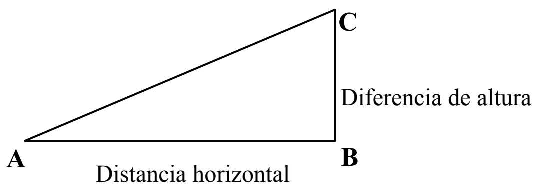


Figura 4.20. Visualización geométrica de la pendiente de una recta

Se suele indicar con una fracción o escala, por ejemplo 1:30, 3/150, o con un porcentaje, por ejemplo 10% = 0,1, 2% = 0,01. Por tanto indica el grado de pendiente de la línea, es decir lo que asciende la línea por unidad. La pendiente puede tomarse como medida del ángulo "α" que la línea hace con el eje horizontal. El gradiente o relación entre el incremento de altura *h* y la distancia horizontal *e*: *h/e* es una función del ángulo "α". Así puede considerarse que la función lineal constituye el modelo matemático de la proporcionalidad.

La representación gráfica de la proporcionalidad directa permite visualizar el sentido de covariación de las magnitudes a través de la monotonía, es decir para el caso de k > 0 se puede observar que conforme aumentan los valores de una magnitud también aumentan los valores de la otra.

En la Figura 4.21 se recoge la representación gráfica para el ejemplo que se viene presentando sobre la relación entre las bolas rojas y verdes, misma que se modeliza a través de la función $f(x) = \frac{2}{3}x$.

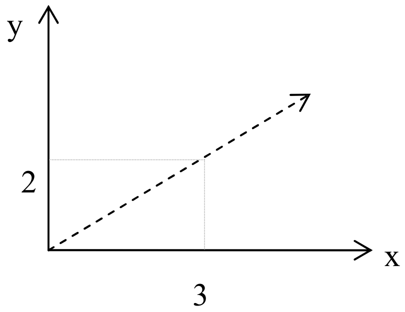


Figura 4.21. Representación gráfica de la relación 3:2 entre bolas rojas y verdes

Representación gráfica de la función de proporcionalidad inversa

La representación gráfica en el caso de la relación de proporcionalidad inversa es la hipérbola equilátera sobre la que se ha aplicado un giro de 45º.

Analizando la expresión *f(x) = k/x* de la función de proporcionalidad inversa, suponiendo que la constante $k > 0$, se advierte que la función no está definida para $x=0$, *p*ara valores de $x > 0$, la función es positiva, de manera que tiende a infinito para valores muy pequeños de x y se aproxima a cero conforme aumenta la variable independiente. Análogamente, cuando $x < 0$, la función toma valores negativos de manera que tiende a menos infinito cuando x tiende a cero y se aproxima a cero cuando x tiende a menos infinito. De todo ello se deduce que la función de proporcionalidad inversa, para $k > 0$, se representa a modo de una gráfica de dos ramas simétricas con respecto al origen y con respecto a la bisectriz del segundo y el cuarto cuadrantes del plano (Figura 4.22).

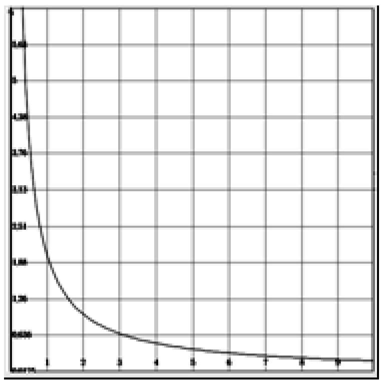


Figura 4.22. Gráfica de la función de proporcionalidad inversa para k>0 y x > 0

La representación gráfica de la proporcionalidad inversa permite visualizar el sentido de covariación de las magnitudes a través de la monotonía, es decir para el caso de $k > 0$ y valores positivos de x, se puede observar que conforme aumentan los valores de una magnitud disminuyen los valores de la otra magnitud. Por lo anterior, es preciso acompañar estas representaciones gráficas de otras representaciones que permitan visualizar las propiedades estructurales de la relación de proporcionalidad que se da entre las magnitudes.

Representaciones icónicas

Para representar la relación entre dos cantidades usualmente se recurre a la representación de las mismas por medio de un dibujo, cada ícono representa uno de los objetos, los cuales se ilustran con diferentes colores con el fin de resaltar la relación entre esas cantidades. En la Figura 4.23 representamos la relación entre bolas rojas y verdes en dos cajas con distinta cantidad total de bolas.

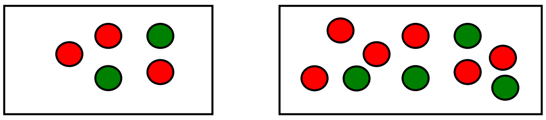


Figura 4.23. Representación icónica de la relación 3:2 entre bolas rojas y verdes

Recta numérica

La representación de una razón en la recta numérica está directamente asociada a la representación decimal de la misma. La razón $3:2$ cuya representación decimal (como número real) es 1,5, y en la recta numérica se expresa como el punto medio entre 1 y 2.

Tablas

La relación entre las cantidades de dos magnitudes se puede representar en una tabla que incluya el nombre de las magnitudes y los valores correspondientes de los conjuntos (Figura 4.24). Este tipo de representación permite visualizar la relación directa entre las cantidades, es decir que al aumentar el número de barras de pan también aumenta el precio que se paga. La representación tabular facilita la visualización de la relación funcional entre las cantidades. En el ejemplo se ve que el precio en euros corresponde a $\frac{1}{2}$ del número de barras de pan correspondiente. También facilita la visualización de la relación escalar entre cantidades correspondientes en cada una de las magnitudes. Se observa en la tabla de la figura x que si se dobla la cantidad de barras de pan también se dobla el precio que ha de pagarse por éstas.

Número de barras de pan	1	2	3	4	5	6	7
Precio en euros	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5

Figura 4.24. Ejemplo de representación tabular de la proporcionalidad directa entre medidas de dos magnitudes

Gráficos circulares y pictogramas

En los diagramas de sectores circulares el arco del círculo es proporcional a las frecuencias absolutas (o a las frecuencias relativas). Los pictogramas son gráficos con dibujos alusivos al carácter que se está estudiando y cuyo tamaño es proporcional a las frecuencias que representan (Figura 4.25).

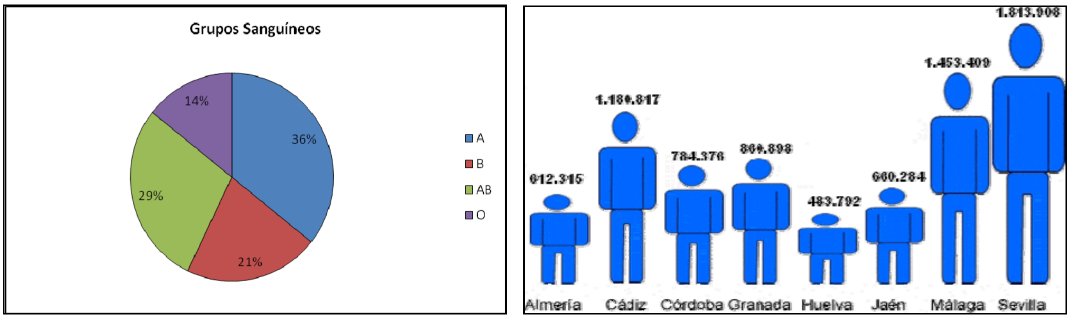


Figura 4.25. Presencia de la noción de proporcionalidad en gráficos circulares y pictogramas

4.1.5 Análisis Fenomenológico

En nuestro estudio hemos seguido la propuesta de análisis fenomenológico descrita por Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2008). En la misma se vincula la fenomenología con el planteamiento funcional de las matemáticas escolares.

Hemos detectado una variedad de situaciones en las cuales están implicadas las nociones de razón y proporcionalidad, éstas se han clasificado de acuerdo a la variable *tipo de situación* del estudio PISA (OCDE, 2004), cuyos valores son: personales, educativas o laborales, públicas y científicas. Ejemplos de situaciones personales corresponden al consumo del automóvil, uso de porcentajes o recetas de cocina. Entre las situaciones educativas o laborales se encuentra las relativas a la relación entre tiempo y número de personas que realizan cierto trabajo, cambio de unidades de medida, cambio de divisas. En el grupo de las situaciones públicas ubicamos por ejemplo la densidad de población, tasa de natalidad o mortalidad, descuentos. En las situaciones científicas se tiene por ejemplo ley de proporciones de la materia, densidad, mezclas, probabilidades, Leyes de Kepler, cambio de unidades de medida, semejanza en el plano y el espacio, entre otras. En nuestra investigación consideramos que la tipología de las situaciones del estudio PISA no tiene un carácter excluyente de modo que por ejemplo algunas situaciones, según las circunstancias, pueden ser a la vez públicas o laborales.

Con el propósito de delimitar los contextos de la razón y la proporcionalidad nos planteamos la pregunta ¿para qué sirven o se utilizan estas nociones en las diversas situaciones en las que están implicadas? Obtuvimos las cuestiones y respuestas presentadas en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5. *Contextos de la razón y proporcionalidad*

Preguntas que Contempla	Modo de Uso
Razón	
¿Cuántas veces? ¿Cuál situación es más favorable? ¿Qué tan probable es?	Índice comparativo
¿Por cada "**x**", cuántos "**y**" hay?	Relación: distribución de las cantidades
Proporcionalidad	
¿"**a**" es a "**b**" como "**c**" es a "**d**"?	Relación: entre índices comparativos
¿Qué tipo de relación hay entre dos magnitudes?	Relación: tipo de covariación de las cantidades
¿Cuántos hay aproximadamente?	Estimación
¿Qué cantidad corresponde a cada uno?	Relación: reparto, distribución de las cantidades
¿Tienen la misma forma?	Semejanza
¿Cuál es la medida?	Medición indirecta
¿Cuál es el porcentaje?	Índice comparativo estandarizado

Con el fin de describir la relación entre las estructuras matemáticas asociadas a la razón y la proporcionalidad y los fenómenos organizados por estas nociones, recogemos a continuación una síntesis de la fenomenología didáctica desarrollada por Freudenthal (1983).

4.1.5.1 Fenomenología Didáctica de Freudenthal

Para Freudenthal (1983) la razón debe considerarse en un contexto más amplio que el de las relaciones en una magnitud y entre magnitudes. Así en la fenomenología didáctica propuesta por este investigador y recogida en A. Fernández (2001) encontramos que los fenómenos asociados a la razón se organizan en tres grupos: exposiciones, composiciones y constructos. A continuación describimos cada uno de los grupos y las situaciones vinculadas a los mismos.

Exposiciones

Una exposición es una terna (Ω, M, ω) donde Ω es un conjunto de objetos a cada una de las cuales se le asocia una magnitud o una medida en M mediante una función ω.

Un ejemplo de exposición puede ser el formado por un conjunto de provincias Ω y sus superficies M, en este contexto particular la razón puede usarse para comparar las superficies de varias provincias: Sevilla es tantas veces más extensa que Granada. En este contexto las razones consideradas son internas.

Otros ejemplos de exposiciones son:

- Un conjunto de especies animales con sus pesos medios (u otra característica cuantitativa).

- Un conjunto de vuelos en avión con sus precios (o distancias).
- Un conjunto de países con sus poblaciones (o sus superficies).
- Un conjunto de artículos con sus precios (o pesos).

En las exposiciones, los elementos de Ω son objetos, y Ω se define por los rasgos comunes de sus elementos (especies de animales, vuelos en avión, países, artículos). La función ω describe propiedades internas de los elementos de Ω.

Parejas de exposiciones

Normalmente las exposiciones aparecen por parejas y muy a menudo se tiende a comparar dos exposiciones definidas sobre el mismo conjunto. Una *pareja de exposiciones* consiste en un conjunto Ω, con dos funciones ω_1, ω_2 definidas sobre el mismo conjunto.

Retomando el ejemplo Ω un conjunto de provincias, ω_1 la función que asigna a cada provincia su número de habitantes, ω_2 la función que asigna a cada provincia su área.

$\omega_1: \Omega \rightarrow M_1$ (Nº habitantes) y $\omega_2: \Omega \rightarrow M_2$ (Área). Entonces definida por $f: M_1 \rightarrow M_2, f \circ w_1 = w_2$, es equivalente a la expresión $f(w_1(x)) = w_2(x)$ y relaciona la cantidad de habitantes con la cantidad de superficie.

En la situación se compara la razón entre ω_1 y ω_2 de dos provincias, es decir entre la relación de la población y la superficie (densidad) de una provincia con la de otra.

En las situaciones en las que se presenta un par de exposiciones, las razones que se comparan habitualmente son razones externas y se pueden visualizar mediante histogramas, pictogramas, además las cantidades que se comparan son intensivas. (A. Fernández, 2001).

Composiciones

Una composición es una terna (Ω, M, ω), donde Ω es un conjunto de cosas, partes o clases de un universo a cada una de las cuales se le asocia una magnitud o una medida en M mediante una función ω. Aunque pudiera pensarse que las definiciones de exposiciones y composiciones son iguales, existe una diferencia entre ellas. En las exposiciones los elementos de Ω son objetos o cosas y en las composiciones los elementos de Ω son partes o clases de un universo. Un ejemplo de composición puede ser una mezcla de líquidos distintos que se unen para formar una nueva sustancia.

Freudenthal (1983) señala algunos ejemplos de composiciones que recogemos a continuación:

- El conjunto de componentes de una aleación con sus masas.
- El conjunto de las clases de edades de una población con sus números.

En este grupo la función ω describe el tamaño de la clase (no necesariamente un número entero). Las situaciones consideradas en este grupo se prestan para ser representadas por diagramas parte-todo (ej. diagramas circulares). En las composiciones las razones que se consideran son razones internas, por ejemplo se usan para comparar dos mezclas distintas formadas por los mismos ingredientes.

Parejas de composiciones

El caso de una pareja de *composiciones* consiste en particiones en clases de dos universos Ω_1 y Ω_2, obtenidas según el mismo principio e identificadas de forma natural una con otra, con dos funciones ω_1, ω_2 en ellas, cuyas razones —internas, en la mayor parte de los casos— se consideran y quizá se comparan.

Consideremos el ejemplo expuesto por A. Fernández (2001) en relación con las parejas de composiciones. En dos aleaciones de dos metales, los componentes de cada una de ellas forman dos conjuntos Ω_1 ={cobre, zinc} y Ω_2 = {cobre, zinc} y las funciones ω_1, ω_2 asocian a cada elemento de cada conjunto su masa. Como los conjuntos de componentes son iguales se puede considerar la función *j* entre Ω_1 y Ω_2, tal que a cada elemento de Ω_1 le hace corresponder el mismo en Ω_2. Se destaca que no es la función identidad pues lo que relaciona j no es "cobre con cobre" o "zinc con zinc" sino que permite asociar "masa de cobre en Ω_1 con masa de cobre en Ω_2" y "masa de zinc en Ω_1 con masa de zinc en Ω_2", de modo que la función j permanece inactiva mientras no actúe $w_1 \circ w_2$. Consideremos el caso en el que:

30 kg de la aleación Ω_1 (bronce) están formados por 20 kg de cobre y 10 kg de zinc,

65 kg de la aleación Ω_2 (bronce) están formados por 40 kg de cobre y 25 kg de zinc.

Si lo que se hace son comparaciones internas se dice en la aleación Ω_1 hay más, menos o igual cantidad de cobre que de zinc "en proporción" a la cantidad de cobre y zinc que hay en la otra aleación Ω_2 (Figura 4.26).

$$\begin{tikzcd}
\Omega_1 \arrow[r, "w_1"] \arrow[rrr, bend left, "j"] & M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 & \Omega_2 \arrow[l, "w_2"']
\end{tikzcd}$$

$$\text{cobre} — w_1 \to 20kg — f \to 40kg \leftarrow w_2 — \text{cobre}$$

$$\text{zinc} — w_1 \to 10kg — f \to 25kg \leftarrow w_2 — \text{zinc}$$

Figura 4.26. Estructura subyacente a las cantidades en una pareja de composiciones

En las dos aleaciones tenemos, correspondientemente:

$$\omega_1(\text{cobre}) = 20\text{ kg} \xrightarrow{f} \omega_2(\text{cobre}) = 40\text{ kg}, \quad \omega_1(\text{zinc}) = 10\text{ kg} \xrightarrow{f} \omega_2(\text{zinc}) = 25\text{ kg}$$

La proporcionalidad se dará si f preserva las razones internas es decir si f es lineal, en ese caso se puede afirmar que se trata de la misma aleación (misma composición).

En general para cualquier tipo de aleación la razón externa $w_1(x):w_2(x)$ puede variar, y si la razón $w_1(x):w_2(x)$ es constante, entonces se trata de la misma aleación, f es lineal y por ende preserva la razón.

Según A. Fernández (2001) la visualización de este tipo de situaciones, par de composiciones, puede hacerse a través de diagramas circulares dada la vinculación con la relación parte-todo, como en la Figura 4.27.

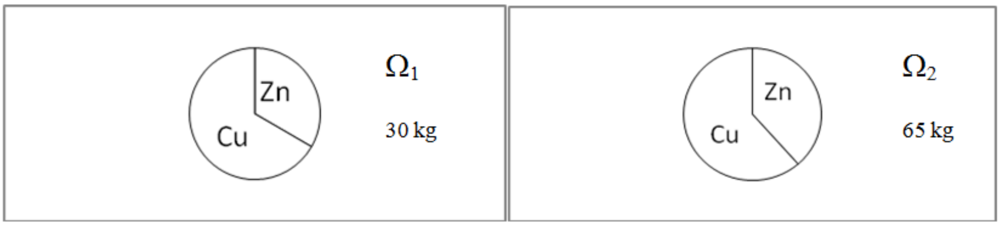


Figura 4.27. Representación gráfica de un par de composiciones

Constructos

A. Fernández (2001) expone este tipo de razones con base en ejemplos, en los cuales un conjunto de magnitudes se pone en correspondencia con otro mediante una ley (por ejemplo la semejanza), este investigador señala:

> *Consideremos un barco del que se ha hecho un modelo reducido, o un país y su mapa a una cierta escala, o una foto o un dibujo de los que se ha hecho una ampliación. En cada uno de estos casos, se obtiene la distancia entre dos puntos cualesquiera del segundo objeto (el modelo reducido, el mapa, la ampliación), multiplicando por un mismo operador la distancia entre dos puntos homólogos del objeto de salida. El operador en cuestión se llama "factor de escala" (del modelo reducido o del mapa o de la ampliación). En este tipo de situaciones es donde se ve cómo un operador funciona con parejas repetidas (parejas de puntos que tienen la misma distancia).* (p. 44)

Un constructo es un conjunto basado en una estructura matemática fuerte Σ (preferentemente geométrica) con una función ω de medida. Entonces al par (Ω, ω) lo denomina Σ-constructo, si Σ es la estructura en la que se basa. Por ejemplo Σ una figura plana como el plano completo; Ω, el conjunto de los pares de puntos; ω, la distancia.

Parejas de constructos

Los constructos también se presentan por parejas, (Ω_1, ω_1) y (Ω_2, ω_2), en las que puede suceder que $\Omega_1 = \Omega_2$ y $\omega_1 = \omega_2$.

A. Fernández (2001) describe las parejas de constructos de manera general y lo hace en particular para el caso de la semejanza entre dos figuras planas, dos triángulos. A continuación lo presentamos.

Si se toma como Σ_1 el conjunto de puntos del triángulo ABC y como Σ_2 el conjunto de puntos del triángulo A´B´C´, la visualización de una pareja de Σ–constructos puede hacerse mediante una homotecia de centro A que transforma un triángulo en el otro. En este caso Ω_1 es el conjunto de pares de puntos del triángulo ABC y Ω_2 el conjunto de pares de puntos del triángulo A´B´C´ (Figura 4.28).

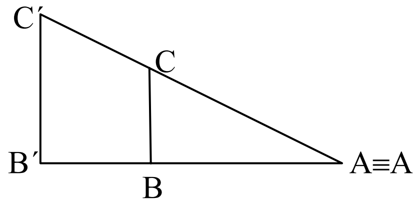


Figura 4.28. Visualización de una pareja de Σ-constructos

La función h es la homotecia de centro A y razón A´C´/AC. Al elemento $\alpha = (A,B)$ le corresponde $\hat{h}(\alpha) = (A',B')$, al elemento $\beta = (A,C)$ le corresponde $\hat{h}(\beta) = (A',C')$ y al elemento $\gamma = (C,B)$ le corresponde $\hat{h}(\gamma) = (C',B')$.

Las funciones distancia se expresan por:

$$\omega_1(\alpha) = d(A,B) \text{ y } \omega_1(\beta) = d(A,C)$$

$$\omega_2(\hat{h}(\alpha)) = d(A',B') \text{ y } \omega_2(\hat{h}(\beta)) = d(A',C')$$

La conservación de las razones internas en el Σ_1-constructo y en el Σ_2-constructo se expresarían por:

$$d(A,B) : d(A,C) :: d(A',B') : d(A',C')$$

Y la constancia de las razones externas entre el Σ_1-constructo y en el Σ_2-constructo se expresarían por:

$$w_2\left[\hat{h}(A,B)\right] : w_1(A,B) :: w_2\left[\hat{h}(A,C)\right] : w_1(A,C)$$
$$w_2(A',B') : w_1(A,B) :: w_2(A',C') : w_1(A,C)$$
$$d(A',B') : d(A,B) :: d(A',C') : d(A,C)$$

En la última expresión se comparan las razones entre las distancias entre pares de puntos que se corresponden por $\hat{h}$.

Si se introduce y define la función *f* de la siguiente manera $f = w_2 \circ \hat{h} \circ w_1^{-1}$, entonces se asocia las distancias entre pares de puntos que se corresponden por $\hat{h}$, de modo que: $f[w_1(A,B)] = w_2\left[\hat{h}(A,B)\right]$. Es decir que $f[w_1(A,B)] = w_2(A',B')$, o bien que $f[d(A,B) = d(A',B')]$.

Con lo que la preservación de las razones internas se escribe por medio de la expresión: $f[w_1(A,B)] : f[w_1(A,C)] :: w_1(A,B) : w_1(A,C)$. Es decir la razón entre las distancias entre dos pares de puntos es igual a la razón entre las distancias entre los correspondientes pares de puntos homólogos.

Y la constancia de las razones externas se escribe como: $f[w_1(A,B)]:w_1(A,B)::f[w_1(A,C)]:w_1(A,C)$. En consecuencia la razón entre la distancia de un par de puntos y su homólogo correspondiente es la misma que la razón entre las distancias de cualquier otro par y su homólogo correspondiente. Es decir que la función f así definida es lineal y se puede expresar simbólicamente como a continuación: $f[w_1(A,B)]=k\cdot w_1(A,B)$.

De los tres grupos descritos se desprenden unos esquemas asociados a las tareas de razón y proporción. A. Fernández (2001) afirma que con base en la complejidad de los mismos se puede suponer que las tareas que involucren la comparación de un par de exposiciones serán más sencillas que aquellas que impliquen contextos geométricos, motivo por el cual quizás existan pocos estudios, en los que participen niños, que consideren problemas en tales contextos.

4.1.6 Focos de Contenido

Delimitamos los conceptos prioritarios a partir del tratamiento curricular que de los mismos se hace, atendiendo a los estudiantes para los que va dirigida dicha materia. Lo hacemos desde los lineamientos establecidos en la guía docente de la asignatura, con base en la revisión de los textos de Didáctica de la Matemática y de estudios relevantes realizados en el campo de la razón y la proporcionalidad.

De acuerdo con los documentos curriculares de la asignatura, el análisis de contenido, los textos revisados y las descripciones aportadas sobre indicadores del razonamiento proporcional en investigaciones relevantes (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007, 2012; Freudenthal, 1983; Lamon, 2007; Vergnaud, 1988, entre otros), llegamos a distinguir cuatro prioridades o focos para el aprendizaje general de los contenidos razón y proporcionalidad en la formación de maestros de primaria:

1. Estudio de significados y aplicaciones de la razón.
2. Estudio de las relaciones de proporcionalidad directa e inversa.
3. Aplicación de los conocimientos asociados a la proporcionalidad directa en situaciones geométricas.
4. Interpretación y resolución de situaciones que impliquen la noción de porcentaje.

Tomando de base cada uno de los focos indicados procedimos a organizar los tipos de conocimientos considerados en la clasificación cognitiva (Apartado 4.1.3) según se dé su presencia en cada uno. Obtenemos de este modo un listado de contenidos, de los temas razón y proporcionalidad, organizados por focos. En la Tabla 4.6 mostramos esta relación usando los cuatro focos prioritarios elegidos, además indicamos la frecuencia de su tratamiento en los textos de Didáctica de la Matemática usados como principales fuentes de referencia (Anexo B).

Tabla 4.6. *Focos prioritarios para la enseñanza de la razón y la proporcionalidad*

Contenidos de cada Foco Conceptual Prioritario	Frecuencia
Foco 1. Razón: significados y usos	
La razón como uno de los significados del número racional (comparación parte-todo, razón, operador, cociente)	6
Significado de la razón como cociente	5
Significado de la razón como índice comparativo	6
Significado de la razón como función	2
Términos o elementos de una razón	2
Razón como relación parte-parte o parte-todo.	6
Razón entre los elementos de una magnitud o de dos magnitudes	7
Representación simbólica, gráfica, verbal de la razón	9
Tipos de razones (internas, externas, unitarias, enteras, no enteras, irracionales, constructos, exposiciones y composiciones).	2
Razones equivalentes, otras propiedades.	9
Relación de orden entre razones.	2
Normalización o tipificación de razones	2
Foco 2. Relación de proporcionalidad: caracterización y representaciones	
Significado de la proporción	10
Propiedades de las proporciones	5
Tipos de proporciones (directas, inversas, media proporcional)	5
Relaciones estructurales en una proporción (funcional y escalar)	3
La proporcionalidad como función (directa, inversa o compuesta)	10
La constante de proporcionalidad	7
Representación gráfica, simbólica, tabular y verbal de la proporcionalidad directa.	10
Representación gráfica, simbólica, tabular y verbal de la proporcionalidad inversa.	5
Foco 3. Proporcionalidad geométrica: semejanza y escalas	
Segmentos proporcionales, teorema de Thales	6
Figuras planas semejantes (cuadriláteros, triángulos), criterios de semejanza.	6
Factor de escala entre dos figuras semejantes	4
Medida indirecta de longitudes	3
Escalas	6
Relación entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes. Relación entre la razón de las aristas de cuerpos semejantes y la razón de los volúmenes correspondientes	1
Foco 4. Porcentajes: significados y usos	
Significados y cálculo del porcentaje.	6

Tabla 4.6. *Focos prioritarios para la enseñanza de la razón y la proporcionalidad*

Contenidos de cada Foco Conceptual Prioritario	Frecuencia
Relación entre la noción de razón y porcentaje.	5
Representaciones de los porcentajes.	3
Porcentajes especiales: interés, descuento.	1

Organizamos la información relativa a los focos de aprendizaje en mapas conceptuales con el objetivo de destacar las relaciones entre distintos significados de un concepto, elementos del mismo, representaciones y situaciones en las que está implicado. Cada mapa permite visualizar una red de conocimientos que posiblemente se requieran en la comprensión del concepto primordial del foco.

En las Figuras 4.29, 4.30, 4.31 y 4.32 se presentan los mapas conceptuales relativos a los cuatro focos de contenido. Los conceptos, palabras de enlace y relaciones establecidas en cada mapa conceptual procuran reflejar, de forma resumida, las principales ideas expuestas en el análisis de contenido recogido en las secciones y apartados precedentes.

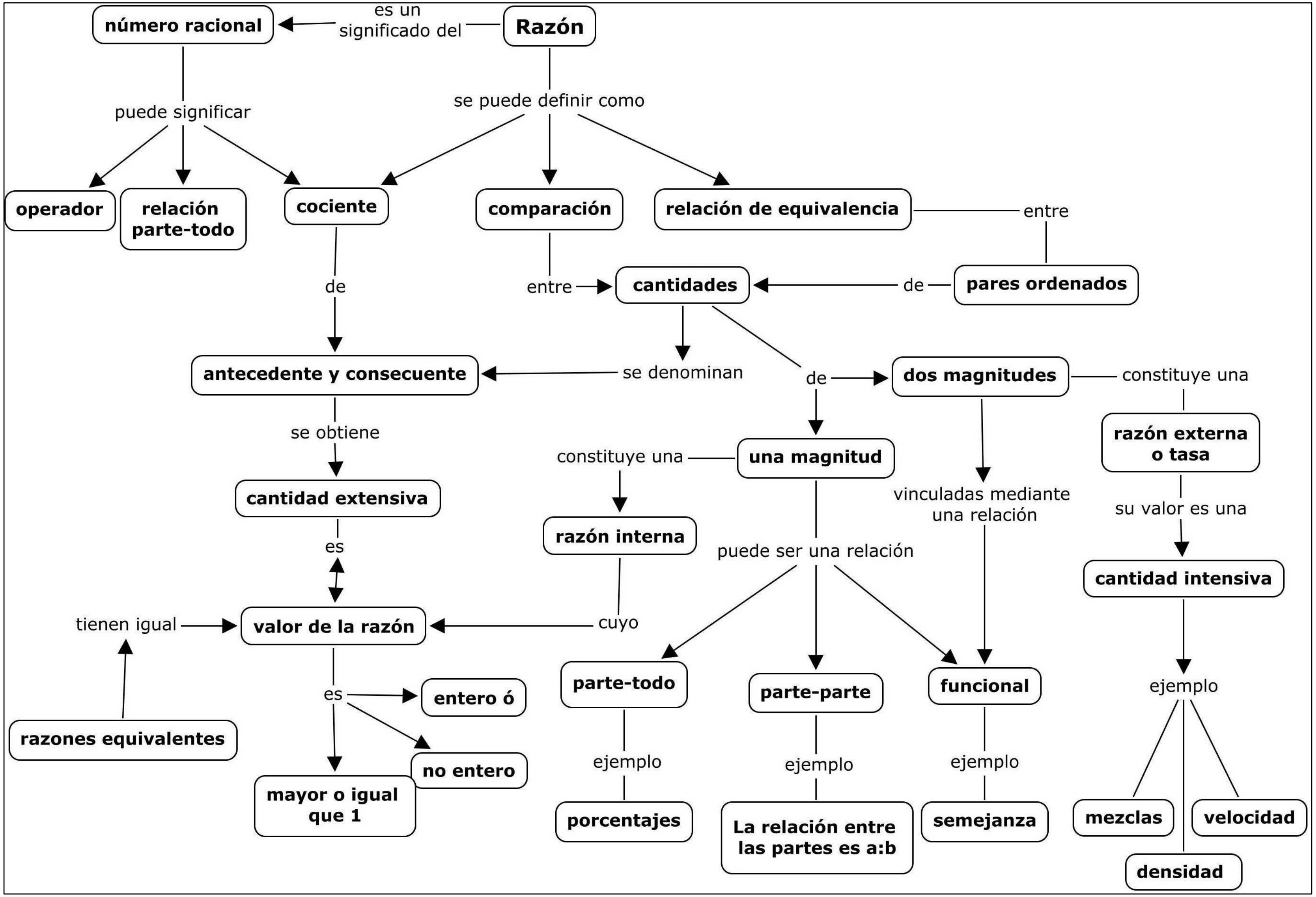


Figura 4.29. Mapa conceptual relativo al foco 1 “Razón: significados y usos”

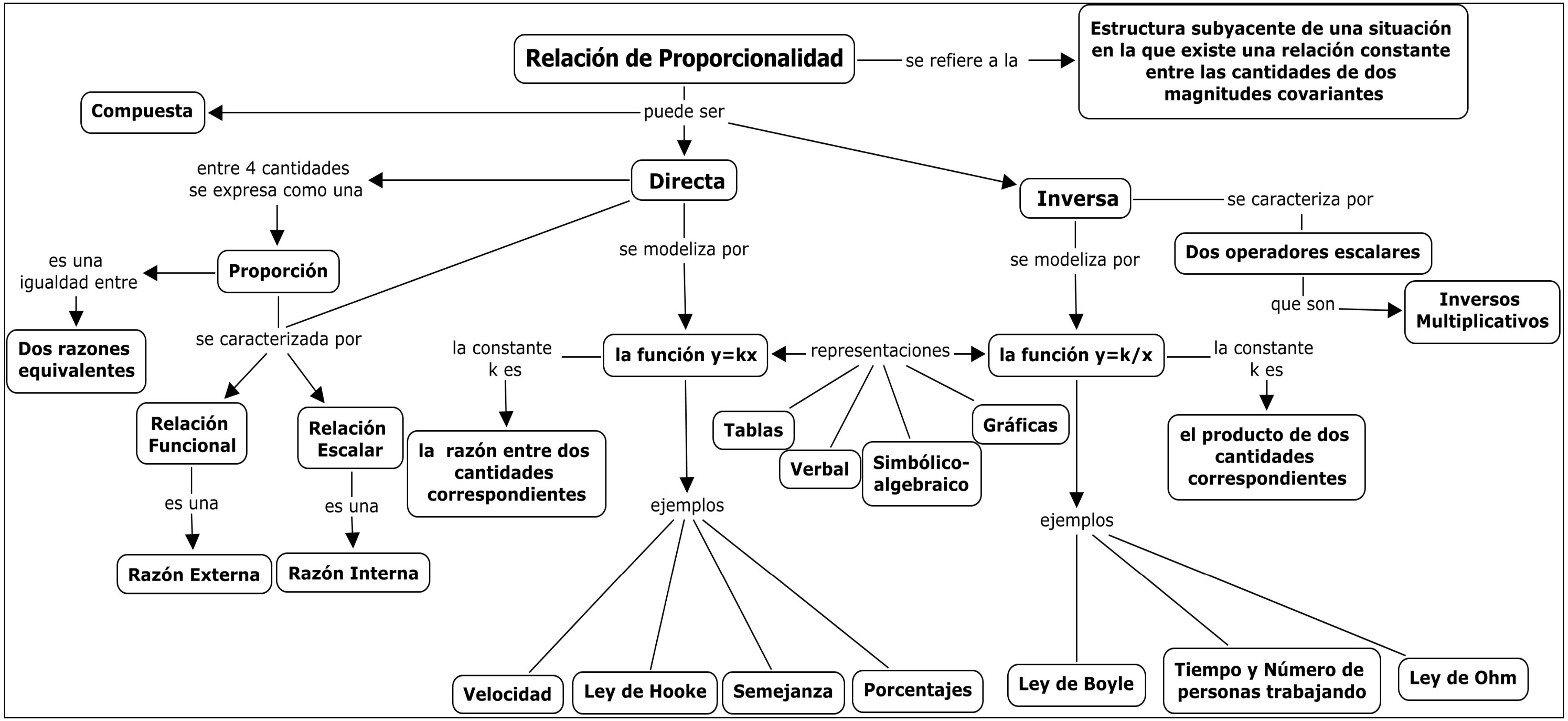


Figura 4.30. Mapa conceptual relativo al foco 2 “Relación de proporcionalidad: caracterización y representaciones”

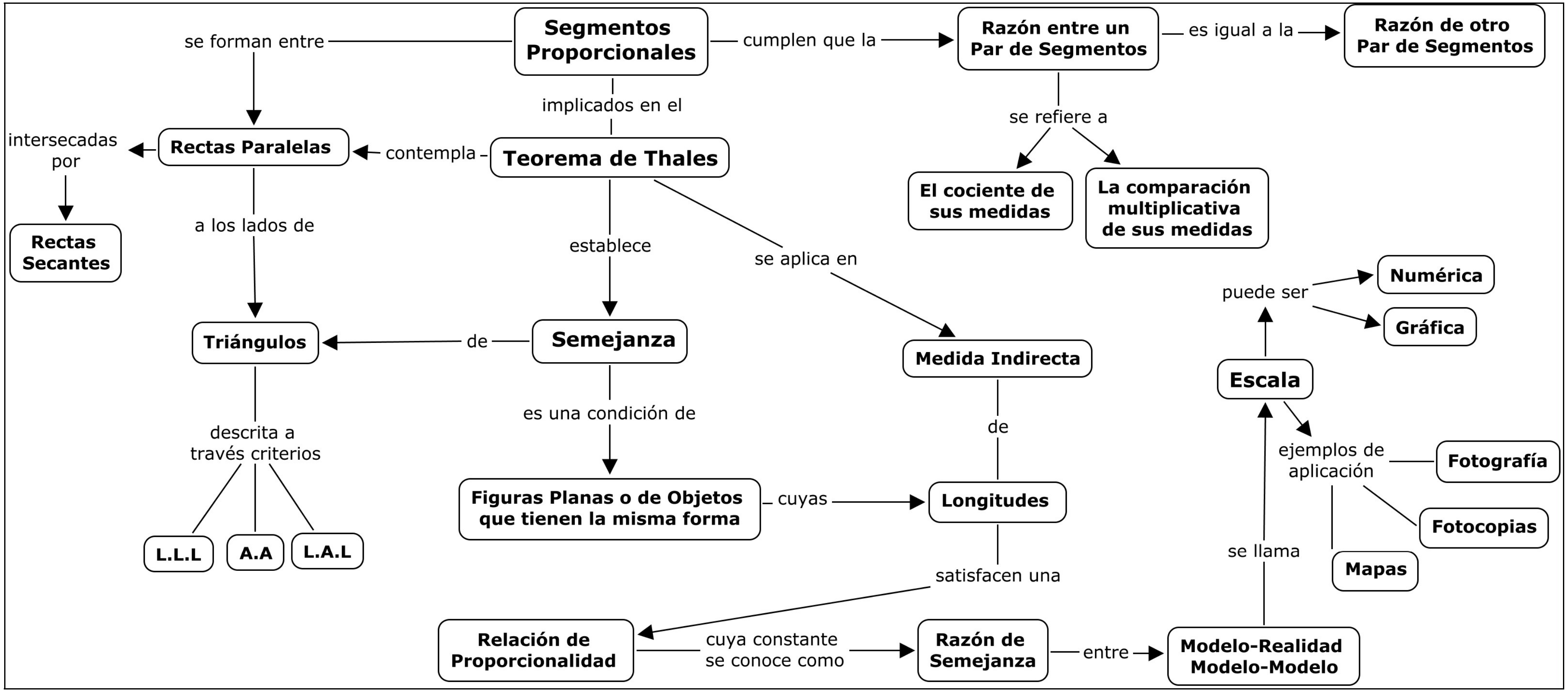


Figura 4.31. Mapa conceptual relativo al foco 3 “Proporcionalidad geométrica”

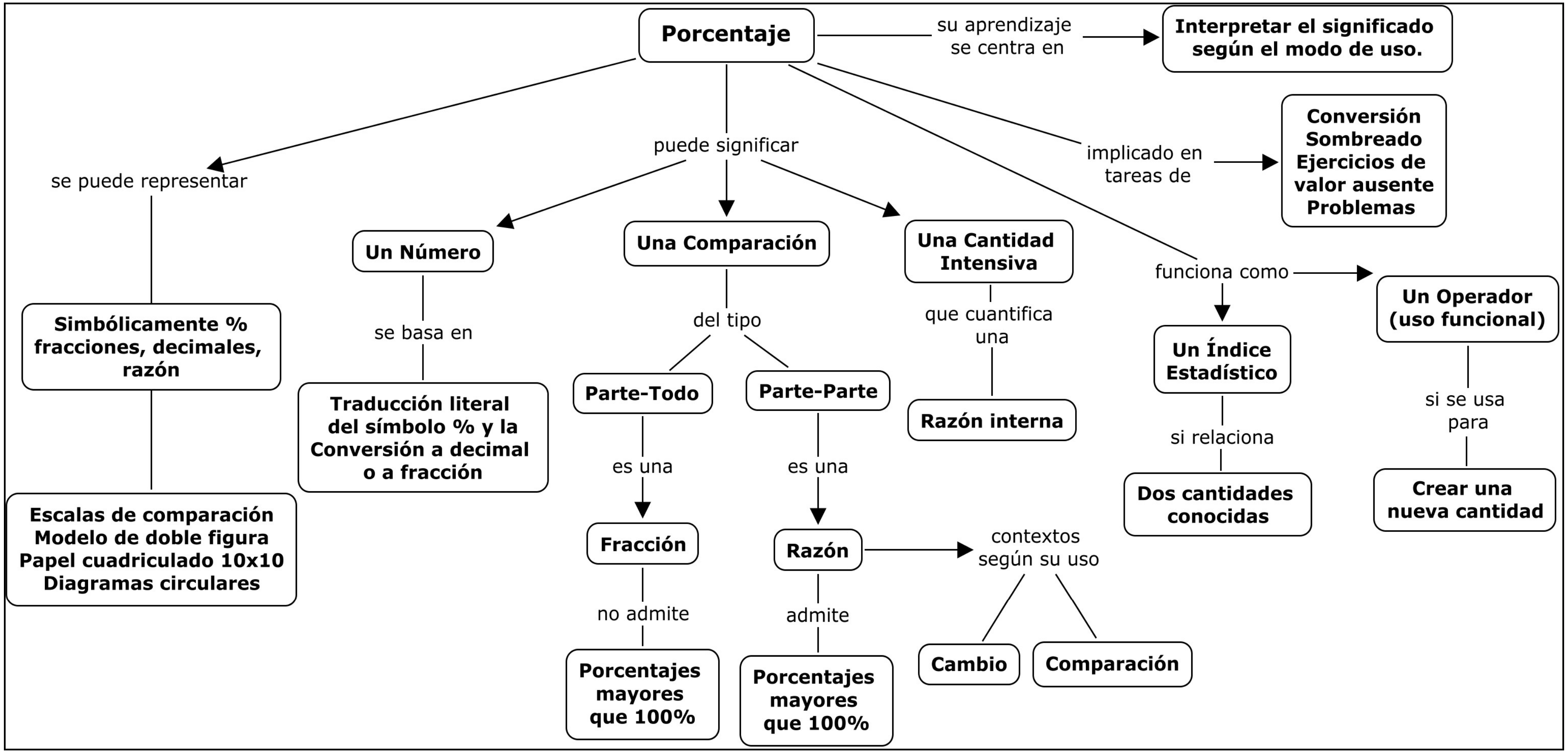


Figura 4.32. Mapa conceptual relativo al foco 4 “Porcentajes: significados y usos”

4.2 ANÁLISIS COGNITIVO

En el análisis cognitivo se recoge la descripción de los objetivos específicos relativos a los focos conceptuales procedentes del análisis de contenido, éstos objetivos constituyen posibles expectativas a promover en el contexto de la formación de maestros de primaria durante el estudio de la razón y la proporcionalidad. Así mismo se muestra la contribución de estos objetivos a las competencias matemáticas[50] (OCDE, 2004; Rico, 2007; Rico y Lupiáñez, 2008). Finalmente, como parte de este análisis, se presenta la descripción de posibles errores y dificultades asociadas al estudio de los contenidos en cuestión, tomando como referencia las limitaciones de aprendizaje expuestas en investigaciones previas.

En investigaciones previas se enuncian expectativas de aprendizaje que en términos generales expresan actuaciones de estudiantes que evidencian un alto nivel de razonamiento proporcional, o relativas a la comprensión de la proporcionalidad. Estos aportes han constituido un referente sustancial que hemos usado para enunciar las expectativas de aprendizaje sobre cada uno de los focos.

En este sentido Lamon (2007) plantea que la proporcionalidad directa o inversa son conceptos matemáticos muy amplios debido a que los modelos matemáticos son dos funciones cuyas representaciones simbólicas y gráficas aumentan la complejidad de esos entes matemático y por ende la comprensión de la proporcionalidad implica muchos aspectos relativos al uso del lenguaje, las representaciones y a la modelización matemática. Para esta autora comprender la proporcionalidad consiste en:

- Usar la proporcionalidad como un modelo matemático para organizar contextos apropiados en el mundo real.
- Distinguir situaciones en las cuales la proporcionalidad no es un modelo matemático apropiado de las situaciones en las cuales si es apropiado.
- Desarrollar y usar el lenguaje de la proporcionalidad, esto es el uso de términos usuales asociados a la proporcionalidad como razón, proporción, constante de proporcionalidad etc.
- Usar las funciones para expresar la covariación de dos cantidades.
- Explicar la diferencia entre funciones de la forma $y = mx$ y funciones de la forma $y = mx + b$. En esta última y no es proporcional a x, pero en su lugar, Δy es proporcional a Δx.
- Reconocer que la gráfica de una situación proporcional directa es una línea recta que pasa por el origen.
- Reconocer que la gráfica de $y = mx + b$ es una línea recta que interseca al eje de las ordenadas *b* unidades por encima del origen.

[50] En el apartado 5.2.3 exponemos los motivos por los que decidimos utilizar el marco teórico del estudio PISA para fundamentar el diseño instruccional objeto de nuestra investigación.

- Distinguir diferentes tipos de proporcionalidad y de asociar cada uno de ellos con situaciones apropiadas del mundo real en las cuales son aplicables: proporciones directas, proporciones inversas, proporcionalidades cuadradas $y = kx^2$, proporcionalidades cúbicas $y = kx^3$.
- Reconocer que en una situación de proporcionalidad directa k es la razón constante entre dos cantidades.
- Reconocer que una situación de proporcionalidad inversa k es el producto de cualquier par de cantidades correspondientes.
- Reconocer que la gráfica de una situación inversamente proporcional es una hipérbola.

De los planteamientos anteriores rescatamos la relevancia de recurrir a varias representaciones de la proporcionalidad como una manera de promover la comprensión de tal concepto. En el apartado del análisis fenomenológico haremos referencia a algunas de las situaciones en las que aparece implicada la noción de proporcionalidad directa e inversa. Según Lamon (2007) las proporciones se presentan en el estudio de los números racionales como una expresión natural de su equivalencia, surgen en el desarrollo del sentido del número racional a través de varias experiencias con las personalidades de los mismos, mediante las cuales se aprende a razonar proporcionalmente. Sin embargo, la comprensión del amplio concepto de la proporcionalidad viene después, a través de la interacción con sistemas científicos y matemáticos que implican la invarianza de una razón o de un producto. Así, concluye que la proporcionalidad es un constructo mucho más amplio y complejo que el razonamiento proporcional, punto de vista que compartimos con la investigadora.

Para describir qué significa razonar proporcionalmente Ben Chaim, Keret e Ilany (2012) se fundamentan en la propuesta de Fischbein (citado en Ben Chaim, Keret e Ilany, 2012) quien sostiene que el razonamiento matemático productivo se caracteriza por tres componentes: el intuitivo, el algorítmico y el formal. En esta línea, los autores citados consideran respecto a la proporción que el aspecto intuitivo tiene que ver con la habilidad de reconocer una relación proporcional, ya sea directa o indirecta, entre cantidades; el aspecto algorítmico se refiere a la habilidad de usar técnicas matemáticas, procedimientos para encontrar una solución matemática cuantitativa a un problema proporcional; y el componente formal relacionado con la proporción incluye la habilidad de expresar la relación multiplicativa a través de modelos matemáticos. Esta habilidad se refleja a través de la cuantificación de la primera relación mediante una razón y la comparación de ésta con una segunda razón, y después, según el tipo de proporción expuesta en la situación (directa o inversa), representar las cuatro variables proporcionales de forma adecuada en una proporción.

Adquirir y ser capaz de usar y combinar el conocimiento de esos tres componentes (intuitivo, algorítmico y formal) conduce a la conceptualización de la razón y la proporción y posibilita la resolución correcta de varios tipos de problemas: cuantitativos y cualitativos. Por otro lado, la incapacidad de combinar el conocimiento intuitivo y formal puede resultar, entre otras, en percepciones inadecuadas de los problemas, conflictos cognitivos y uso incorrecto de algoritmos (Ben Chaim, Keret e Ilany, 2012). Es importante destacar que la integración de esos tres componentes proporciona cierta flexibilidad mental y constituyen un marco amplio sobre la comprensión del aprendizaje en matemáticas, según Tirosh y Tsamir (2004) es importante que los maestros en formación inicial conozcan cómo sustentar procedimientos de cálculo habituales tanto desde un punto de vista formal como intuitivo. Consideramos que en relación con el contenido que compete a nuestra investigación la comprensión de la regla de tres ha de ser una de las principales expectativas de aprendizaje por alcanzar en el contexto de la formación de maestros de primaria.

4.2.1 Expectativas de Aprendizaje Sobre la Razón y Proporcionalidad

Para cada uno de los focos conceptuales prioritarios identificados en el análisis de contenido, enunciamos objetivos instruccionales específicos. Las tablas 4.7, 4.8, 4.9 y 4.10, recogen los objetivos que se han enunciado para cada foco. Las cuatro prioridades para el aprendizaje general de los contenidos razón y proporcionalidad en el contexto de formación inicial de maestros de primaria son:

1. Razón: significados y usos.
2. Relaciones de proporcionalidad: caracterización y representaciones.
3. Proporcionalidad geométrica: escala y semejanza.
4. Porcentaje: significados y usos.

Los objetivos específicos que se han enunciado no son exhaustivos de cara a la formación de maestros, en nuestro estudio se han considerado aspectos centrales de los contenidos con base en la información aportada por el estudio del tratamiento curricular de los mismos y en las descripciones aportadas por investigadores (Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007, 2012; A. Fernández, 2001; Lamon, 2007) en relación con el aprendizaje de la razón y la proporcionalidad.

Tabla 4.7. *Expectativas de aprendizaje para el foco 1 “Razón: significados y usos”*

1	Identificar conexiones entre los significados de las fracciones cuando éstas representan a un número racional (parte-todo, operador, cociente y razón).
2	Describir comparaciones parte-parte y parte-todo, utilizando los subconstructos y representaciones del número racional.
3	Interpretar y realizar comparaciones entre cantidades desde las perspectivas aditiva y multiplicativa.
4	Interpretar el significado de la razón, de sus elementos o del valor racional de la misma en distintas situaciones.
5	Hallar el valor racional de una razón.
6	Justificar la equivalencia de razones.
7	Emplear diferentes representaciones para expresar las razones.
8	Conocer razones notables utilizadas en distintas situaciones y contextos (razón aurea, π, velocidad, tangente, etc.)

Tabla 4.7. *Expectativas de aprendizaje para el foco 1 "Razón: significados y usos"*

9	Identificar distintos tipos de razones (tasas, internas, externas, unitarias, enteras, racionales, etc.)
10	Identificar y construir razones equivalentes utilizando diferentes estrategias.
11	Establecer la relación de orden entre dos razones cualesquiera.
12	Aplicar la noción de razón y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.

Tabla 4.8. *Expectativas de aprendizaje para el foco2 "Relación de proporcionalidad: caracterización y representaciones"*

13	Identificar y describir una proporción[51] entre cantidades.
14	Expresar una proporción mediante distintas representaciones.
15	Describir y justificar las propiedades de las proporciones.
16	Utilizar diferentes procedimientos para hallar un término desconocido en una proporción.
17	Justificar el uso de la regla de tres en la resolución de problemas.
18	Conocer proporciones especiales implicadas en distintas situaciones y contextos (divina proporción, proporción universal, la proporción cordobesa, etc.…).
19	Identificar y describir las relaciones estructurales de una proporción (escalar y funcional).
20	Describir las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, entre magnitudes mediante distintas representaciones.
21	Identificar e interpretar las constantes de proporcionalidad directa e inversa.
22	Justificar si dos magnitudes, en una situación concreta, se relacionan proporcionalmente (directa o inversamente) o si no se relacionan.
23	Aplicar la noción de proporcionalidad, directa o inversa, y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.

Tabla 4.9. *Expectativas de aprendizaje para el foco 3 "Proporcionalidad geométrica: semejanza y escala"*

24	Justificar la relación de semejanza entre figuras planas.
25	Hallar el factor de escala entre dos figuras semejantes.
26	Extraer información de modelos reducidos, mapas o dibujos a partir de la interpretación de la escala.
27	Establecer y calcular medidas indirectas aplicando la proporcionalidad entre magnitudes.
28	Aplicar el Teorema de Thales en la resolución de problemas.
29	Explorar la relación entre la razón de los lados[52] de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes.

[51] Proporción directa o inversa.
[52] Nos referimos a las medidas de los lados.

Tabla 4.9. *Expectativas de aprendizaje para el foco 3 "Proporcionalidad geométrica: semejanza y escala"*

30	Explorar la relación entre la razón de las aristas de cuerpos semejantes y la razón de los volúmenes correspondientes.
31	Aplicar la noción de semejanza para resolver problemas empleando diferentes estrategias.

Tabla 4.10. *Expectativas de aprendizaje para el foco 4 "Porcentajes: significados y usos"*

32	Describir la noción de porcentaje.
33	Interpretar el sentido de uso del porcentaje en distintas situaciones.
34	Calcular porcentajes de cantidades.
35	Identificar la relación entre las nociones de razón y porcentaje.
36	Expresar un porcentaje mediante distintas representaciones.
37	Describir porcentajes de uso común como el interés o el descuento.
38	Aplicar las propiedades de los porcentajes en la resolución de problemas.

De los objetivos expuestos en la Tabla 4.7 destacamos que los objetivos 1, 2, 3, 4, 7 y 12 se han considerado para el trabajo de la primera sesión de la experimentación. En la planificación de la segunda sesión se ha considerado el objetivo 3. Para la tercera sesión se han considerado los objetivos 3 y 11. En la cuarta sesión se atienden los objetivos 11 y 12.

De la Tabla 4.8 destacamos que los objetivos 16, 19, 20 y 23 se han considerado para el trabajo de la tercera sesión de la experimentación.

De los objetivos expuestos en la Tabla 4.9 destacamos que los objetivos 26, 29 y 30 se han considerado para el trabajo de la cuarta sesión de la experimentación.

De los objetivos de la Tabla 4.10 destacamos que los objetivos 33 y 37 se han considerado para el trabajo de la segunda sesión de la experimentación.

4.2.2 Relación Entre los Objetivos Específicos y las Competencias Matemáticas

Siguiendo la propuesta de organización y vinculación de expectativas descritas por Rico y Lupiáñez (2008, p. 309), relacionamos ambos niveles. De acuerdo con estos autores existen varios criterios para vincular un objetivo concreto con una competencia, de los descritos en esta propuesta se han considerado los siguientes:

- Cada una de las competencias tiene una definición y caracterización que expresa unos énfasis en determinadas actuaciones, indica unas demandas cognitivas prioritarias y esas características las vinculan con ciertos objetivos.
- En el diseño de la asignatura se expresan ciertos objetivos generales de aprendizaje relativos a los contenidos razón y proporcionalidad. Esos objetivos se pueden interpretar en términos de competencias. Tal información facilita la decisión

relativa a las competencias que interesa promover y en consecuencia cómo debe orientarse los objetivos específicos.

- Un tercer criterio tiene que ver con la información que aporta el análisis de contenido en el que se ha puesto de manifiesto la multitud de significados y relaciones entre los contenidos. Según los autores la cantidad y la fuerza de esos vínculos permiten concluir que, cuando se desarrollen ciertos objetivos específicos, se está contribuyendo especialmente a algunas competencias.
- Otro criterio tiene que ver con las decisiones que el profesor toma a la hora de planificar sus actividades de clase. Se pueden establecer preferencias sobre métodos de resolución, tipos de problemas, formas de razonamiento, metodologías de enseñanza o uso de recursos.

La contribución de cada objetivo específico de las tablas 4.7, 4.8, 4.9 y 4.10 a una de las competencias matemáticas se ha expresado poniendo un asterisco en la celda correspondiente a la intersección de las expectativas en cuestión, el grado de contribución se presenta usando un sistema de sombreado (Rico y Lupiáñez, 2008), se ha decidido asignar un nivel de gris según la frecuencia relativa de asteriscos (*fa*) presentes en cada columna respecto al total de celdas de la misma, se ha seguido el criterio que se muestra en la Figura 4.33.

$fa = 0\%$	$0\% < fa < 25\%$	$25\% \leq fa < 50\%$	$50\% \leq fa$

Figura 4.33. Sistema de sombreado para expresar la contribución de los objetivos específicos a las competencias

Destacamos que en nuestro estudio se eligió la resolución de problemas y una dinámica de trabajo colaborativo como los medios para promover el logro de las expectativas de aprendizaje, esta decisión incide sustancialmente en la posible estimulación de las competencias matemáticas *comunicar*, *plantear y resolver problemas* y argumentar-justificar, sin embargo tal contribución no se refleja en las Tablas 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14 debido a que la contribución viene dada por la dinámica de trabajo en el aula y no por los objetivos planteados, este aspecto se trata en la planificación de las sesiones (Capítulo 6).

Para la vinculación entre objetivos y competencias se ha considerado el nivel educativo en el que se enmarca la planificación. El desarrollo de la asignatura Matemáticas y su Didáctica, en el contexto de la formación de maestros hacia el que se dirige la intervención del trabajo, se ha observado detalladamente (Anexo D). A partir de este acercamiento y de un estudio previo con futuros maestros de primaria (Valverde, 2008) consideramos que las posibles tareas a proponer –relativas a actuaciones propias de los objetivos asociados a la competencia *pensar y razonar*– corresponden principalmente a un nivel de complejidad de reproducción o conexión (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 258).

Subrayamos este aspecto debido a que los objetivos específicos de los 4 focos contribuyen principalmente a la competencia *pensar y razonar*.

Tabla 4.11. *Relación de los objetivos específicos relativos al foco prioritario 1 con las competencias matemáticas*

Foco 1. Razón: significados y usos	**Competencias Matemáticas**						
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS
1. Identificar conexiones entre los significados de las fracciones como representantes del número racional (parte-todo, operador, cociente y razón).	*					*	
2. Describir comparaciones parte-parte y parte-todo, utilizando los subconstructos y representaciones del número racional.	*		*			*	
3. Interpretar y realizar comparaciones entre cantidades desde las perspectivas aditiva y multiplicativa.	*						*
4. Interpretar el significado de la razón, de sus elementos o del valor racional de la misma en distintas situaciones.				*		*	
5. Hallar el valor racional de una razón.							*
6. Justificar la equivalencia de razones.	*	*	*				
7. Emplear diferentes representaciones para expresar las razones.						*	
8. Conocer razones notables utilizadas en distintas situaciones y contextos (razón aurea, π, velocidad, tangente, etc.)	*			*			
9. Distinguir distintos tipos de razones (tasas, internas, externas, unitarias, enteras, racionales, etc.)	*						
10. Identificar y construir razones equivalentes utilizando diferentes procedimientos.						*	*
11. Establecer la relación de orden entre dos razones.	*						*
12. Aplicar la noción de razón y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.	*				*		*

Abreviaturas de las Competencias: Pensar y razonar (PR), argumentar y justificar (AJ), comunicar (C), modelizar (M), plantear y resolver problemas (RP), representar (R) y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico de las operaciones (LS).
Nota: No incluimos la competencia emplear soportes y herramientas tecnológicas debido a que el uso de tales dispositivos no formó parte de nuestro experimento de enseñanza.

La Tabla 4.11 pone de manifiesto que los objetivos específicos relativos al Foco 1 contribuyen primordialmente a la competencia *pensar y razonar*, y en segundo plano a las competencias *representar* y *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y uso de las operaciones*. Hemos tenido en cuenta la advertencia que hacen los autores (Rico y Lupiáñez, 2008, p.312) sobre que es fácil pensar que muchos de los objetivos pueden vincularse con ciertas competencias, principalmente con las de corte más transversal, como lo es *pensar y razonar*, en nuestro procedimiento de vinculación (Tabla anterior) además de los descriptores propuestos en el estudio PISA, se ha considerado que esta competencia está asociada a actuaciones en las cuales los estudiantes deben recurrir a la información conceptual, características o propiedades del objeto matemático para un fin específico. Por ejemplo, el objetivo 5 centrado en hallar el valor racional de una razón podría estar implícito en múltiples tareas, no obstante creemos que los estudiantes no recurren necesariamente a la noción o propiedades de la razón para realizar este cálculo, mismo que puede llevarse a cabo en ausencia de un proceso de razonamiento, por este motivo lo hemos relacionado con la competencia *utilizar el lenguaje simbólico y las operaciones*. En el caso del objetivo 1 centrado en identificar conexiones entre los significados de las fracciones como representantes del número racional (parte-todo, operador, cociente y razón), es necesario distinguir las cualidades que caracterizan a cada una de las interpretaciones, su representación, así como las características que comparten en una o en varias situación de comparación de cantidades, para esto es preciso, sin duda, poner en marcha un proceso de razonamiento.

El objetivo 2 relativo a la descripción de las comparaciones parte-parte y parte-todo usando los significados del número racional mediante distintas representaciones requiere de la comunicación oral o escrita de la comparación, es decir ésta debe de manifestarse explícitamente a través de las fracciones, decimales, porcentajes, razones, diagramas etc. En consecuencia, la competencia *representar* se podría ver favorecida. El uso apropiado de las representaciones y (o) descripciones de las comparaciones requiere de la distinción entre ambos tipos y de emplear razonamientos que permitan vislumbrar cómo expresar una parte en relación con otra que forman un todo o de una de las partes respecto al total, así que la competencia *pensar y razonar* también está vinculada a este objetivo.

El objetivo 3 se ha formulado considerando que razonar proporcionalmente implica ser capaz de diferenciar entre situaciones aditivas y multiplicativas, y aplicar la que es apropiada (Lamon, 2007). Según esta investigadora los procesos aditivos están asociados con situaciones que implican reunir, agrupar, sustraer, separar, acciones con las cuales los estudiantes desde la primaria están familiarizados debido a la experiencia con el conteo y las operaciones con números naturales. Por su lado, los procesos multiplicativos están asociados con situaciones de ampliaciones, reducciones, escalas, duplicaciones, exponenciales y repartos. En ambos casos es preciso analizar las relaciones cuantitativas entre las cantidades y razonar por qué las transformaciones aditivas o las multiplicativas no son aplicables en ciertas situaciones. Por este motivo hemos vinculado el objetivo 3 con la competencia *pensar y razonar*. Es muy posible que para llevar a cabo una comparación aditiva o multiplicativa los estudiantes apliquen las operaciones, en consecuencia tal objetivo también se relaciona con la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y uso de las operaciones*.

El objetivo 4 pretende que los futuros maestros sean capaces de interpretar el significado de la razón, de sus elementos o del valor racional de la misma en distintas situaciones. Por ejemplo, el valor de la razón k en situaciones de tasas (razones externas), es constante. En la lectura de mapas la escala es una razón. En situaciones de ampliaciones o reducciones o en la semejanza de figuras el factor de escala es el valor de la razón entre las longitudes correspondientes. Un porcentaje es un tipo particular de razón, en una situación de lanzamiento de dados la probabilidad teórica es una razón. Estos ejemplos sugieren que la interpretación de la razón es específica a la situación en la que está implicada. Esto exige un proceso de decodificación de la expresión de la razón y a partir de la información obtenida abordar las cuestiones que se le plantean, lo que nos motiva a vincular el objetivo 4 con la competencia *representar*. Las razones se presentan en múltiples escenarios de la realidad y éstas han de traducirse y relacionarse dentro de una estructura matemática, considerando las propiedades del concepto y sirviéndose de las mismas para tratar la situación del mundo real dentro de la cual está implícita esta noción. Por este motivo hemos vinculado este objetivo con la competencia *modelizar*.

El objetivo 6 se refiere a justificar la equivalencia de razones. Consideramos que esta expectativa de aprendizaje se relaciona con la competencia *comunicar* debido a que la justificación ha de expresarse explícitamente de manera oral o por escrito. Los futuros maestros han de explicar en qué consiste esta relación y en este sentido han de aportar argumentos matemáticos que fundamenten su postura de modo que la competencia *argumentar y justificar* podría verse favorecida. Es preciso además razonar cómo han de emplear el concepto de razón, cómo organizar la argumentación y de qué manera relacionar otros conocimientos matemáticos para formular la justificación de la equivalencia, por esto lo hemos vinculado con la competencia *pensar y razonar*.

Como se describió en el Apartado 4.1.4, la razón puede hacerse presente a través de distintas representaciones; en el objetivo 7 se ha propuesto como expectativa emplear diferentes representaciones para expresar esta noción, lo que también conlleva cambiar entre diferentes formas de representación. En vista de lo anterior el objetivo 7 se ha vinculado directamente con la competencia *representar*.

En el análisis fenomenológico (Apartado 4.1.5) se describen algunas situaciones del mundo en las que está implicada la noción de razón, sin embargo las mismas son solo una muestra de la gran cantidad de situaciones en las que aparece esta noción. En vista de que currículo de primaria (Real Decreto 1513/2006, p. 43095) hace énfasis en el desarrollo de la competencia matemática de los niños a través de la resolución de problemas y en la relevancia de mostrar la aplicación de la matemática en situaciones del entorno, se ha considerado que el objetivo 8 centrado en conocer razones notables utilizadas en distintas situaciones y contextos (razón aurea, π, velocidad, tangente, etc.) puede resultar un aprendizaje útil para los futuros maestros quienes en su labor docente tienen la tarea de acercar la matemática a la realidad y viceversa. Conocer estas razones especiales implica comprender el significado de cada una en una situación particular, cómo funciona o a qué da respuesta en esa situación; por lo que la competencia *pensar y razonar* necesariamente está relacionada con este objetivo, también lo vinculamos con la competencia *modelizar* porque se requiere de un proceso de traducción entre la estructura matemática subyacente y la realidad.

El objetivo 9 se refiere a la distinción de razones (tasas, internas, externas, unitarias, enteras, racionales, etc.) implica conocer las características de cada tipo, estar al tanto de las semejanzas y elementos distintivos de cada una para abordar adecuadamente las situaciones en las que aparecen, por esto la hemos relacionado con la competencia *pensar y razonar*.

En el objetivo 10 se ha propuesto identificar y construir razones equivalentes utilizando diferentes procedimientos, entre los cuales están: amplificación, simplificación o el producto cruzado así como otros propios de las fracciones como la homogeneización o división de los elementos para conocer la representación decimal de las razones, procedimiento que facilita la comprobación de la equivalencia. En este sentido el objetivo 10 promueve la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y el uso de operaciones*. Consideramos que la identificación y búsqueda de razones equivalentes requiere del dominio de la noción de razones equivalentes, es preciso conocer qué significa esta relación para poder identificarla o para activar alguna estrategia de construcción de razones equivalentes, debido a esto hemos vinculado el objetivo 10 con la competencia *pensar y razonar*.

El razonamiento proporcional ha estado descrito tradicionalmente en la investigación (Lamon, 1993; Noelting, 1980; Tourniaire y Pulos, 1985) en términos de dos tipos de problemas, uno de los cuales son los problemas de comparación en los que se dan cuatro cantidades (a, b, c y d) y hay que determinar la relación de orden entre las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, existen múltiples tareas que involucran situaciones que requieren de la comparación de razones. El objetivo 11 centrado en establecer esta relación contempla la aplicación de distintas estrategias multiplicativas y (o) procedimientos razón por la cual lo hemos vinculado con la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones*. Sin embargo, aunque se apliquen únicamente conocimientos procedimentales (operaciones) se hace necesario pensar y razonar acerca de cómo se emplea e interpreta el orden establecido, acciones fundamentales de las matemáticas.

El objetivo 12, centrado en aplicar la noción de razón y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias, se ha vinculado, por motivos evidentes, con las competencias *plantear y resolver problemas* y *pensar y razonar*. El empleo de distintas estrategias, procedimientos, algoritmos, entre otros, conlleva que este objetivo posiblemente contribuya a la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones*.

Tabla 4.12. *Relación de los objetivos específicos relativos al foco prioritario 2 con las competencias matemáticas*

Foco 2. Relación de proporcionalidad: caracterización y representaciones	**Competencias Matemáticas**						
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS
13. Identificar y describir una proporción[53] entre cantidades.	*		*				
14. Expresar una proporción mediante distintas representaciones.						*	

[53] Proporción directa o inversa.

Tabla 4.12. *Relación de los objetivos específicos relativos al foco prioritario 2 con las competencias matemáticas*

Foco 2. Relación de proporcionalidad: caracterización y representaciones	**Competencias Matemáticas**						
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS
15. Describir y justificar las propiedades de las proporciones.	*	*	*				
16. Utilizar diferentes procedimientos para hallar un término desconocido en una proporción.					*		*
17. Justificar el uso de la regla de tres en la resolución de problemas.	*	*			*		
18. Conocer proporciones especiales implicadas en distintas situaciones y contextos (divina proporción, proporción universal, la proporción cordobesa, entre otras).	*			*			
19. Identificar y describir las relaciones estructurales de una proporción (escalar y funcional).	*		*				
20. Describir las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, entre magnitudes mediante distintas representaciones.	*		*			*	
21. Identificar e interpretar las constantes de proporcionalidad directa e inversa.	*					*	
22. Justificar si dos magnitudes, en una situación concreta, se relacionan proporcionalmente (directa o inversamente) o si no se relacionan.	*	*		*			
23. Aplicar la noción de proporcionalidad, directa o inversa, y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.	*				*		*

La Tabla anterior refleja que los objetivos específicos enunciados para el Foco 2 contribuyen primordialmente a las competencias *pensar y razonar*, *comunicar*, y *plantear y resolver problemas*.

El objetivo 13 se refiere a identificar y describir una proporción, esto demanda la capacidad de establecer o reconocer una relación de igualdad entre cuatro cantidades, las cuales se relacionan multiplicativamente dos a dos mediante la razón, por lo anterior lo hemos vinculado a la competencia *pensar y razonar*. La descripción oral o escrita de una proporción requiere de la expresión e intercambio de ideas matemáticas asociadas a esta noción, por este motivo se relaciona con la competencia *comunicar*.

En el objetivo 14 se plantea la capacidad de expresar una proporción mediante distintas representaciones, esto precisa de la habilidad de trasladar expresiones verbales en representaciones simbólicas como la fraccionaria o la porcentual, la representación tabular permite visualizar la estructura de una proporción, tal proceso es requerido en la resolución de tareas. En vista de lo expuesto hemos vinculado este objetivo con la competencia *representar*.

La descripción y justificación de las propiedades de las proporciones (objetivo 15) son actuaciones primordiales que deberían desarrollar los futuros maestros en miras de fundamentar la aplicación de conocimientos procedimentales tales como la regla de tres, procedimiento que se sustenta en la propiedad fundamental de las proporciones. Justificar las propiedades de las proporciones significa aportar argumentos relativos a las relaciones numéricas entre las cantidades implicadas, tales propiedades han de expresarse clara y explícitamente. De modo que este objetivo se ha vinculado con las competencias: (a) *pensar y razonar*, (b) *argumentar y justificar*, y (c) *comunicar*.

El objetivo 16 corresponde a utilizar diferentes procedimientos para hallar un término desconocido en una proporción. Tradicionalmente los problemas de valor ausente se abordan mediante la aplicación de la regla de tres o producto cruzado, no obstante para hallar uno de los valores de una cuarta proporcional es posible elaborar y usar nuevas estrategias o técnicas de resolución basadas en la constante de proporcionalidad o en las relaciones estructurales de la proporción. La aplicación de nuevos procedimientos permitirá evaluar la eficacia y adecuación del uso de cada uno, también se pretende contribuir al desarrollo de la flexibilidad del conocimiento procedimental en al ámbito del razonamiento proporcional (Berk, Taber, Carrino y Poetzl, 2009). Debido a lo expuesto se ha vinculado este objetivo con las competencias: (a) *plantear y resolver problemas*, y (b) *utilizar lenguaje simbólico, formal, técnico, y las operaciones*.

El uso inapropiado y mecánico de la regla de tres en situaciones proporcionales, directas e inversas, ha sido expuesto por varios estudiosos del tema (Freudenthal, 1983; Lamon, 2007; Modestou y Gagatsis, 2007; Van Dooren et al., 2005) así mismo en un estudio previo (Valverde, 2008) corroboramos esta tendencia. En el objetivo 17 se propone la expectativa de justificar el uso de la regla de tres en la resolución de problemas con el fin de dotar de sentido la aplicación de este procedimiento usado por los estudiantes. Las actuaciones de los estudiantes han de reflejar argumentos sobre por qué es adecuado usar esta regla en la resolución de un problema, este proceso de reflexión contribuye a organizar la manera en la que se resuelve e interpreta un problema de proporcionalidad. En vista de estas razones hemos vinculado este objetivo con las competencias: (a) *pensar y razonar*, (b) *argumentar y justificar*, y (c) *plantear y resolver problemas*.

El objetivo 18, relativo a conocer proporciones especiales implicadas en distintas situaciones y contextos, constituye una pieza clave para establecer conexiones entre las matemáticas y el entorno. Este objetivo se refiere a un proceso inicial de matematización horizontal (Rico y Lupiáñez, p.236). Para desarrollar la competencia matemática es necesaria la capacidad de interpretar la información del entorno en términos matemáticos y viceversa. En este sentido las proporciones constituyen un contenido que ofrece la oportunidad de dotar de sentido el papel de las matemáticas, de modo que lo vinculamos con la competencia *modelizar* porque se requiere de un proceso de traducción entre la estructura matemática y la realidad. Conocer las proporciones enunciadas en este objetivo implica entender el significado de cada una en distintos espacios concretos y abstractos así como saber a qué da respuesta, por lo que la competencia *pensar y razonar* la relacionamos con este objetivo.

El objetivo 19 persigue que los futuros maestros identifiquen y describan oralmente, o por escrito, las relaciones entre las cantidades que conforman una proporción, esta actuación está relaciona con la competencia *comunicar*. En el caso de la proporcionalidad directa las relaciones estructurales son dos, la razón constante entre cantidades correspondientes (relación funcional) y la relación escalar entre cantidades del mismo tipo; en el caso de la relación inversamente proporcional hay dos operadores escalares, uno de los cuales es el inverso multiplicativo del otro y el producto de medidas correspondientes es constante. La descripción de estas relaciones requiere de la comprensión de la noción de razón y de la capacidad de percibir regularidades entre las cantidades de una proporción, por este motivo se ha asociado a la competencia *pensar y razonar*.

En relación con el objetivo 20 recordamos que un aspecto central que ha surgido del análisis de contenido es la riqueza de representaciones que se pueden utilizar para representar las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa (Apartado 4.1.4). Debido a que estas relaciones se ajustan respectivamente a las funciones lineal y racional, es posible recurrir a representaciones gráficas y simbólicas para ponerlas de manifiesto. Esta flexibilidad constituye una posibilidad para trabajar sobre la transformación entre distintas representaciones, contribuyendo entonces directamente a la competencia *representar*. La descripción de estas relaciones a otros compañeros ya sea de forma oral o escrita, en sus distintas representaciones, contribuye a la competencia *comunicar*. Y finalmente para poder codificar o decodificar las características de las relaciones de proporcionalidad, a partir de alguna de sus representaciones, es preciso poner en marcha un proceso de razonamiento. Debido a esto hemos vinculado el objetivo 20 con la competencia *pensar y razonar*.

Frecuentemente la constante no aparece explícitamente en el contexto en el cual está implicada, sin embargo es un elemento estructural en las relaciones de proporcionalidad, esto hace que los estudiantes deban recurrir a distintos conocimientos, razonamientos, estrategias etc. para develar ese valor, a partir de esto hemos decidido relacionar el objetivo 21 con la competencia *pensar y razonar*. La constante de proporcionalidad en el caso de las relaciones directas es el valor racional de la razón entre magnitudes y en el caso de las relaciones inversas esta constante es el producto de las medidas correspondientes. Tal y como se describió en el análisis de contenido la interpretación de la constante de proporcionalidad es específica a la situación en la que está implicada, es preciso un proceso de decodificación de la constante según sean las condiciones en las que está implícita, esto nos motiva a relacionar este objetivo con la competencia *representar*.

En el objetivo 22 se expresa la capacidad de los futuros maestros para detectar si dos magnitudes, por ejemplo masa y longitud, están relacionadas, o no, cuando ambas están implicadas en una situación del entorno. Esto plantea, pensar la situación real en términos de los conocimientos, aplicar las definiciones y propiedades de los conceptos matemáticos relacionados, por lo que se ha vinculado a la competencia *modelizar*. Es preciso estudiar el comportamiento de las cantidades tomando en consideración las condiciones de la situación. Por ejemplo, en problemas centrados en determinar la velocidad de un coche es preciso saber si en periodos iguales de tiempo se recorre la misma cantidad de longitud. En vista de esto se ha relacionado el objetivo con la competencia *pensar y razonar*. Indiscutiblemente para justificar la existencia de una relación proporcional entre dos magnitudes o la inexistencia de la misma se requiere aportar argumentos que sustenten las afirmaciones. De este modo este objetivo se vincula con la competencia *argumentar y justificar*.

El último objetivo del Foco 2 se centra en la aplicación de la noción de proporcionalidad, directa o inversa, y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias. Se ha vinculado con las competencias (a) *plantear y resolver problemas*, y (b) *pensar y razonar*. El empleo de distintos conocimientos procedimentales para abordar cuestiones de proporcionalidad posiblemente contribuya a la competencia *utilizar lenguaje simbólico, formal, técnico, y las operaciones*.

Tabla 4.13. *Relación de los objetivos específicos relativos al foco prioritario 3 con las competencias matemáticas*

Foco 3. Proporcionalidad geométrica: semejanza y escalas	**Competencias Matemáticas**						
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS
24. Justificar la relación de semejanza entre figuras planas.	*	*	*				
25. Hallar el factor de escala entre dos figuras semejantes.							*
26. Extraer información de modelos reducidos, mapas o dibujos a partir de la interpretación de la escala.				*		*	
27. Establecer y calcular medidas indirectas aplicando la proporcionalidad entre magnitudes.	*				*		*
28. Aplicar el teorema de Thales en la resolución de problemas.	*				*		
29. Explorar la relación entre la razón de los lados[54] de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes.	*	*					
30. Explorar la relación entre la razón de las aristas de cuerpos semejantes y la razón de los volúmenes correspondientes.	*	*					
31. Aplicar la noción de semejanza para resolver problemas empleando diferentes estrategias.	*				*		*

La vinculación entre objetivos y competencias en la Tabla anterior informa que las competencias relacionadas con los objetivos del Foco 3 que posiblemente se favorecen con mayor fuerza son: (a) *pensar y razonar*, (b) *argumentar y justificar*, (c) *plantear y resolver problemas*, y (d) *utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones.*

[54] Nos referimos a las medidas de los lados.

Este foco recoge los contenidos y expectativas de aprendizaje relativas a la proporcionalidad directa en situaciones geométricas en las cuales es preciso aplicar definiciones, propiedades, teoremas para abordar las cuestiones planteadas. El caso de la proporcionalidad geométrica no está exento de aplicaciones mecánicas de procedimientos o reglas, situación que invita al enunciado de expectativas centradas en la comprensión significativa de tales conocimientos procedimentales.

En este sentido el objetivo 24 persigue que los estudiantes para maestros justifiquen la relación de semejanza de figuras planas, lo cual precisa de argumentos matemáticos basados en las relaciones de congruencia de ángulos y de proporcionalidad de los lados correspondientes. Para establecer las relaciones adecuadas entre ángulos y lados homólogos es necesario poner en marcha el razonamiento. Tales argumentos han de manifestarse explícitamente en la resolución de distintas tareas ya sea oralmente o por escrito. Por lo anterior lo hemos relacionado con las competencias *argumentar y justificar*, *comunicar*, y *pensar y razonar*.

Hallar el factor de escala entre dos figuras semejantes, objetivo 25, requiere en la mayoría de las situaciones la aplicación directa de la división entre las longitudes correspondientes. Este procedimiento rutinario es fundamental para abordar otras tareas más complejas en las que intervienen procesos cognitivos de mayor complejidad. Por este motivo lo hemos relacionado únicamente con la competencia *utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones*.

El objetivo 26 se refiere a la capacidad de extraer información de modelos reducidos, mapas o dibujos a partir de la interpretación de la escala, constituye una tarea cotidiana para muchas personas en la que es preciso aplicar nociones matemáticas para interpretar los datos o informaciones que se pueden desprender lo cual requiere de un proceso de matematización y, en ocasiones, de descodificación. Este objetivo se ha vinculado con las competencias *modelizar* y *representar*.

Para establecer y calcular medidas indirectas aplicando la proporcionalidad entre magnitudes (objetivo 27) es necesario detectar relaciones de invarianza y covarianza entre cantidades de dos magnitudes, de aquí que lo relacionemos con la competencia *pensar y razonar*. Se necesita además manejar adecuadamente el lenguaje simbólico para establecer fórmulas que relacionen ambas magnitudes de forma general. Por ejemplo, la relación entre la medida de la longitud de la circunferencia y la medida del radio es de proporcionalidad directa. La medida indirecta de magnitudes está asociada al uso de fórmulas para hallar la superficie o del volumen en la resolución de problemas que requieren de la aplicación de distintas estrategias, por estas razones lo hemos vinculado con las competencias: (a) *utilizar lenguaje simbólico, formal, técnico, y uso de las operaciones*, y (b) *plantear y resolver problemas*.

En el objetivo 28 enunciamos la expectativa de aplicar el teorema de Thales en la resolución de problemas, se ha relacionado con la competencia *pensar y razonar* porque es preciso razonar si en el marco del problema se satisfacen las condiciones del teorema. La aplicación del teorema de Thales puede tener lugar en situaciones que varían ampliamente de un nivel de complejidad a otro, en consecuencia se han de activar distintas estrategias y procedimientos, así como la conexión con otros conocimientos para resolver los problemas asociados a este teorema. El objetivo 28 también se ha vinculado a la competencia *plantear y resolver problemas*.

Los objetivos 29 y 30 se orientan a movilizar las mismas capacidades. El estudio de las relaciones entre las longitudes y áreas de figuras semejantes o entre aristas y volumen de objetos semejantes demanda la búsqueda de relaciones y patrones entre cantidades, promoviéndose posiblemente la competencia *pensar y razonar*. Teniendo en cuenta la metodología de trabajo de aula y el tipo de tareas que se plantearán consideramos que la detección de tales relaciones ha de acompañarse de argumentos matemáticos que las sustenten. Hemos vinculado estos objetivos a la competencia *argumentar y justificar*.

El objetivo 31 está referido a la aplicación de la noción de semejanza para resolver problemas empleando diferentes estrategias, se ha vinculado a la competencia *pensar y razonar* porque es necesario estudiar las condiciones del problema, verificar que se cumplen para así aplicar la semejanza, es evidente que los estudiantes han de elaborar y seguir alguna estrategia para resolver el problema. Los problemas que involucran la noción de semejanza, a menudo requieren de la aplicación de operaciones, ecuaciones u otros procedimientos, motivo por el que hemos vinculado este objetivo con la competencia *usar el lenguaje simbólico, formal, técnico y uso de las operaciones*.

Tabla 4.14. *Relación de los objetivos específicos relativos al foco prioritario 4 con las competencias matemáticas*

Foco 4. Porcentajes: significados y usos	**Competencias Matemáticas**						
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS
32. Describir la noción de porcentaje.	*		*				
33. Interpretar el sentido de uso del porcentaje en distintas situaciones.	*			*		*	
34. Calcular porcentajes de cantidades.							*
35. Identificar la relación entre las nociones de razón y porcentaje.	*						
36. Expresar un porcentaje mediante distintas representaciones.						*	*
37. Aplicar las propiedades de los porcentajes en la resolución de problemas.	*				*		

En la Tabla 4.14 se observa que los objetivos relativos al Foco 4 contribuyen principalmente a las competencias: (a) *pensar y razonar*, (b) *representar*, y (c) *usar el lenguaje simbólico, formal, técnico y uso de las operaciones*. De aquí que el énfasis se pone en el razonamiento y dominio del concepto de porcentaje, el cálculo de éste, su relación con la razón, las representaciones, transformaciones entre una y otra representación, proceso que frecuentemente requiere de la aplicación de operaciones.

Específicamente el objetivo 32 se refiere a la capacidad para describir qué se entiende por porcentaje, a qué hace referencia esta noción. No es una cuestión sencilla porque el porcentaje puede considerarse como un tipo particular de representación de una relación parte-todo, como una razón especial con consecuente 100, como una fracción equivalente. A partir de esto hemos vinculado este objetivo con la competencia *pensar y razonar*. El interés en que los futuros maestros sean capaces de describir explícitamente esta noción, nos ha movido a relacionar el objetivo 32 con la competencia *comunicar*.

El porcentaje aparece en múltiples situaciones del entorno y tiene asociados múltiples significados. Por ejemplo el 6% que es una expresión con un número el 6 y un símbolo (%) juntos podrían representar 6 de 100 (como una relación parte-todo), podría referirse a que hay 6 de un tipo por cada 100 (como en una tasa de interés), un operador (como en el impuesto sobre las ventas), una pendiente (inclinación de una carretera), los variados usos del porcentaje han resultado en las diferentes interpretaciones de su significado. Esto requiere de un análisis de la situación cotidiana en términos matemáticos, interpretar la situación en función del significado que el porcentaje esté ejerciendo en la misma, lo cual precisa de un proceso de decodificación de la expresión porcentual o de la representación en la que ésta se presenta. Por estas razones se ha vinculado el objetivo 33 con las competencias *pensar y razonar*, *modelizar* y *representar*.

El objetivo 34 centrado en calcular porcentajes de cantidades tiene un carácter meramente procedimental, los estudiantes han de ser capaces de aplicar procedimientos tales como la regla de tres, ecuaciones, producto cruzado, relaciones escalares o funcionales para hallar un porcentaje de manera eficaz. Este dominio elemental es fundamental para abordar cuestiones más complejas. En vista de lo expuesto hemos relacionado este objetivo con la competencia *usar lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones*.

En el marco del experimento, centrado en las nociones de razón y proporcionalidad, es primordial desarrollar los contenidos relacionados entre sí, como parte de una misma red conceptual y no como elementos aislados. En este sentido se pretende que los futuros maestros sean capaces de identificar el porcentaje como un tipo particular de razón (objetivo 35), esta expectativa conlleva entender la noción de razón ampliamente. Sin una comprensión de ambas nociones no es posible establecer una conexión entre las mismas. Por esto se ha vinculado este objetivo con la competencia *pensar y razonar*.

El objetivo 36 se centra en expresar un porcentaje mediante distintas representaciones, este objetivo también contempla la transformación de una representación a otra, esto es de porcentaje a decimal, porcentaje a fraccionaria, porcentaje a razón, representación gráfica a cualquiera de sus formas y viceversa. Las transformaciones entre representaciones simbólicas se realizan mediante la aplicación de las operaciones u otros procedimientos que se constituyen en herramientas para otros razonamientos más complejos. De este modo se ha vinculado el objetivo 36 con las competencias *representar* y *usar lenguaje simbólico, formal, técnico, y uso de las operaciones*.

Finalmente el objetivo 37 se ha formulado poniendo énfasis en la resolución de problemas que impliquen la noción de porcentaje, los mismos requieren de la elaboración de estrategias de resolución y de la aplicación de propiedades de este tipo de razones. Por ejemplo, las relativas a los efectos de aumentos o disminuciones porcentuales sucesivas. Tal objetivo se ha vinculado con las competencias *pensar y razonar*, y *plantear y resolver problemas*.

4.2.3 Errores y Dificultades Asociadas al Estudio de la Razón y Proporcionalidad

La principal fuente de dificultades en la resolución de problemas de razón y proporción de niños, adolescentes y adultos es de naturaleza cognitiva (Ben Chaim, Keret e Ilany, 2012). Estos investigadores señalan cuatro tipos de dificultades cognitivas asociadas al aprendizaje de estas nociones, a continuación recogemos una síntesis de las mismas.

1. El esquema proporcional es un esquema operatorio de segundo orden, requiere realizar una operación cognitiva después de completar otra. Piaget enfatiza que esta dificultad se debe al hecho de que comprender la noción de proporción requiere la habilidad de comparar dos razones en las cuales las variables deben coordinarse inicialmente a través de una relación. Adicionalmente, es preciso reconocer si el problema implica una proporción directa o una inversa (Inhelder y Piaget, 1958).

2. Los problemas de razón y proporción se sitúan en el campo conceptual multiplicativo, el cual es más complicado que el aditivo (Vergnaud, 1994). El razonamiento aditivo se desarrolla en edades tempranas pero después puede ser un obstáculo en el paso al razonamiento multiplicativo. A través de ideas aditivas se pueden constituir modelos multiplicativos inadecuados (como multiplicar a través de sumas repetidas) que conducen a dificultades cuando el multiplicador no es un número natural (Greer, 1987). Los modelos de la división, cuotitiva y partitiva, pueden convencer a los estudiantes que el cociente siempre es menos que el dividendo, el dividendo siempre es mayor que el divisor y que el divisor siempre es un número natural. Lo cual conduce a confusión cuando los datos no se ajustan a estas condiciones. Según Tirosh y Tsamir (2004) el efecto de usar habitualmente esos modelos intuitivos puede explicar muchas de las dificultades que experimentan niños, adolescentes y futuros maestros en los problemas de razón y proporción.

3. Una tercera dificultad cognitiva se refiere a la naturaleza de la razón, cuando el valor de ésta es una cantidad intensiva que se forma como una nueva unidad, por ejemplo la velocidad, potencia, densidad, entre otras. Estas nuevas unidades requieren comprender leyes y propiedades relevantes en las mismas además de la comprensión de cuestiones matemáticas vinculadas a la noción de proporción. Muchas de esas leyes, principios o propiedades son comprendidas de manera intuitiva por los estudiantes como resultado de las experiencias vividas entes de la instrucción formal (Lamon, 2007). La dificultad surge debido a que además de comprender los principios que rigen esas unidades los estudiantes deben ser capaces de transformar e interpretar los resultados cuantitativos obtenidos en respuestas cualitativas, además de organizar las cantidades de la situación en una razón y posteriormente establecer la relación en un esquema de proporción.

4. La cuarta dificultad tiene que ver con la capacidad de comprender intuitivamente el tipo de problema de razón y proporción que ha de resolverse. Esta dificultad surge principalmente en el caso de la proporción inversa, la cual es más complicada tanto para niños como para adultos. Reconocer que un problema implica una relación proporcional pero no darse cuenta de qué tipo es conducirá indudablemente al estudiante a una solución errónea.

Desde una perspectiva más concreta, en la resolución de problemas, como consecuencia de errores conceptuales, los sujetos aplican estrategias que se consideran erróneas o no satisfactorias (Rico, 1997). A continuación describiremos algunas de las estrategias incorrectas y errores que reportan diferentes autores en investigaciones relacionadas con las actuaciones de los sujetos ante tareas de razón y proporcionalidad.

Karplus et al. (1983) plantea que una estrategia errónea frecuente en la resolución de problemas de razón y proporción es "ignorar parte de los datos del problema", en este caso los estudiantes intentan resolver el problema con una parte de los datos. Por ejemplo si el problema es de comparación de razones entonces intentan resolverlo comparando únicamente los antecedentes o los consecuentes y con base en eso toman la decisión. Si el problema es de valor ausente, operan con parte de los datos para obtener una respuesta numérica. Lamon (1993) denomina a esta estrategia operaciones al azar "random operations".

Según A. Fernández (2001), la estrategia errónea más documentada en las investigaciones corresponde a la "estrategia aditiva" o de "diferencia constante". En este caso los sujetos relacionan los términos de una razón aditivamente, la cuantifican por sustracción entre los términos y esta diferencia la aplican a la segunda razón.

Ricco (citado en A. Fernández, 2001), describe dos actuaciones que surgen cuando la estrategia de reducción a la unidad se aplica erróneamente, por ejemplo, en un caso usar un valor arbitrario como unidad para resolver el problema y en el otro usar el primer dato del problema como valor unitario. En el problema "*Si 3 lápices cuestan 12 euros ¿cuánto cuestan 5 lápices?*", en este caso los alumnos toman como valor unitario 3 (lo toman como valor de 1 lápiz) y resuelven la cuestión multiplicando 3x5= 15.

Ilusión de Linealidad

Se conoce como *ilusión de linealidad* a la tendencia a aplicar modelos lineales en situaciones no propicias para que éstos puedan ser aplicados. Constituye así una estrategia incorrecta para abordar situaciones problemáticas en donde las cantidades no mantienen una relación de proporcionalidad simple directa. Según algunos autores (De Bock, Verschaffel, y Janssens, 1998; Freudenthal, 1983) esta tendencia se debe principalmente a la importancia de la función lineal como una herramienta matemática para explicar fenómenos en diferentes campos de la actividad humana. Tanto la proporcionalidad como la preservación de la razón y la linealidad parecen ser considerados modelos universales, reforzándose esta consideración por el frecuente uso que se hace de las mismas.

La estructura lingüística básica de los problemas que implican proporcionalidad incluyen cuatro cantidades (*a, b, c y d*) y una implicación de esa misma relación multiplicativa enlaza a con b y c con d. De estas cuatro cantidades, en la mayoría de los casos, tres son conocidas y una desconocida. Cuando un problema encaja en ésta estructura general, la tendencia de evocar la proporcionalidad directa puede ser extremadamente fuerte, incluso si el problema no se ajusta a la proporcionalidad directa (Verschaffel, Creer, y De Corte, 2000)[55].

La investigación acerca de la tendencia de los estudiantes a aplicar el razonamiento proporcional en problemas en los cuales éste no tiene lugar ha proporcionado claros indicios de que éste fenómeno es parcialmente causado por las características de la formulación del problema con las cuales los estudiantes han aprendido a asociar el razonamiento proporcional a lo largo de su vida escolar (De Bock, Verschaffel, y Janssens, 2002; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel, 2005). En particular, Greer (1997) señala que las estructuras multiplicativas de valor ausente, notablemente aquellas que sobre una lectura superficial pueden crear una ilusión de proporcionalidad, aportan un ejemplo de invocación inapropiada de proporcionalidad, como un resultado de una reacción inconsciente a la forma lingüística. Adicionalmente Van Dooren et al. (2005) argumentan que la tendencia de los estudiantes a usar estrategias proporcionales en situaciones no proporcionales se incrementa considerablemente con el paso por los diferentes niveles del sistema escolar.

Sin embargo Modestou y Gagatsis (2007) sugieren que las líneas anteriores de interpretación no proporcionan un marco suficiente y coherente dentro del cual el fenómeno de la ilusión de la linealidad pueda ser analizado; éstos investigadores plantean una nueva forma de abordar éste fenómeno. Se preguntan y trabajan sobre la hipótesis de que la linealidad constituye un obstáculo epistemológico. Entre sus argumentos señalan que los errores no siempre son el efecto de la ignorancia, la incertidumbre o del azar, éstos pueden resultar de la aplicación de un objeto de conocimiento previo el cual fue interesante y exitoso, pero que en otro contexto es falso o simplemente inadaptado (Brousseau, 1997)[56]. Errores de éste tipo no son irregulares e inesperados, sino que son reproducibles y persistentes.

Para Modestou y Gagatsis (2007) un obstáculo epistemológico se caracteriza por su aparición tanto en la historia de las matemáticas como en la actividad matemática cotidiana. En su trabajo acerca de la búsqueda de las raíces de la linealidad incluyen una lista de condiciones necesarias para el uso del término obstáculo epistemológico y no "dificultad", tales características son:

- Un obstáculo es un elemento de conocimiento o una concepción, no una dificultad o una falta de conocimiento.

- Este elemento de conocimiento produce respuestas que son apropiadas dentro de un contexto particular.

---

[55] Citados en Van Dooren et al. (2006)

56 Citado en Modestou y Gagatsis (2007)

- Genera falsas respuestas fuera de éste contexto.

- Esta pieza de conocimiento se resiste tanto a contradicciones ocasionales como al establecimiento de un nuevo elemento de conocimiento. La necesidad de una nueva y mejor pieza de conocimiento no es suficiente para que la precedente desaparezca.

- Después de que ha sido reconocida ésta imprecisión, el elemento de conocimiento original continúa surgiendo de manera persistente.

Por ejemplo, en el caso de errores típicos tales como $6 \div \frac{1}{2} = 3$, el conocimiento de los números naturales y el cociente entre ellos llega a constituirse en un obstáculo para la comprensión de los números racionales (Gagatsis y Kyriakides, 2000).

En términos generales, para Modestou y Gagatsis (2007) los errores de pseudo-proporcionalidad son el resultado del obstáculo epistemológico de linealidad. Consideran que la linealidad es un conocimiento exitoso en un contexto particular y para un conjunto particular de situaciones. Sin embargo, su aplicación fuera de ese contexto da como resultado falsas respuestas que van acompañadas por una fuerte creencia y seguridad de que la respuesta está correcta. Estas respuestas son recurrentes y parecen ser universales y muy resistentes a una variedad de formas de apoyo orientadas a resolver el problema. Argumentan que la linealidad constituye un obstáculo epistemológico para la adquisición de funciones no lineales, y consecuentemente esos errores ocurren debido al obstáculo y no a las formulaciones lingüísticas estereotipadas.

Algunos casos de razonamiento lineal injustificado en geometría

En el dominio de la geometría, se ha informado sobre varios casos de exceso de dependencia de los estudiantes de los modelos lineales. Se sabe que frecuentemente se producen razonamientos lineales incorrectos en problemas sobre las relaciones entre los ángulos y los lados de las figuras geométricas (Bold, 1969; De Block-Docq, 1992; Rouche, 1992a)[57].

Van Dooren et al. (2006) señalan algunos ejemplos de la ilusión de linealidad en el dominio de la geometría que pueden encontrarse en el trabajo de De Bock- Docq (1992), el cual incluye varios procesos de razonamiento erróneos, todos basados en una aplicación inapropiada de la proporcionalidad directa (o inversa) entre cantidades no proporcionales, dos ejemplos son:

"El ángulo de un dodecágono regular puede obtenerse dividiendo el ángulo de un hexágono regular por 6 y multiplicando este resultado por 12".

"Para construir un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia, se debe tomar como lado del triángulo el diámetro de la circunferencia. Un dodecágono regular puede construirse tomando como lado la mitad del radio de la circunferencia".

Uno de los casos más conocidos y frecuentemente estudiados de uso indebido de la linealidad por parte de los estudiantes es el relacionado con los problemas sobre el efecto de agrandamiento o reducción de una figura sobre su área o su volumen. El

[57] Citados en Van Dooren et al. (2006)

principio que gobierna este tipo de problemas es muy conocido: un aumento o reducción de cualquier figura geométrica (cuadrado, círculo, cubo, figura irregular,…) por un factor r, multiplica las longitudes por un factor r, las áreas por un factor r^2 y los volúmenes por un factor r^3.

Como señalan varios autores (NCTM, 1989; De Bock, Verschaffel, y Janssens, 1998, 2002; Modestou y Gagatsis, 2007), alcanzar una intuición adecuada sobre las relaciones antes indicadas entre longitudes, áreas, y volúmenes de las figuras similares, suele ser lento y penoso. En el transcurso, los estudiantes a menudo resultan desorientados por la ilusión de la linealidad, pensando que si una figura se aumenta o se reduce r veces, el área y el volumen se hacen r veces mayores o menores también. Un ejemplo histórico de este fenómeno es el famoso diálogo de Platón "Menón", en el que se pide a un esclavo que dibuje un cuadrado que tuviera el doble de área que un cuadrado dado y el esclavo propone en primer lugar duplicar el lado del cuadrado (Van Dooren et al., 2006). En el mismo sentido, leemos en los estándares del NCTM que "… la mayoría de los estudiantes de 5.º de primaria a 2.º de secundaria creen incorrectamente que si los lados de una figura se duplican para producir una figura semejante, el área y el volumen también se duplicarán" (NCTM, 1989, p. 114). En otras palabras, los estudiantes tienden a ver las relaciones entre longitud y área o entre longitud y volumen como lineales en lugar de, respectivamente, como cuadráticas o cúbicas, y, en consecuencia, aplican el factor de escala lineal en lugar de su cuadrado o cubo para determinar el área o volumen de la figura ampliada o reducida.

En los últimos años ha sido ampliamente estudiada la idea, equivocada, de que el área y el volumen de una figura aumentan r veces cuando el lado de la figura aumenta r veces, (De Bock, Verschaffel, y Janssens, 1998, 2002; Modestou y Gagatsis, 2007). En una serie de estudios experimentales de De Bock y otros (1998, 2002), se administraron a grupos numerosos de estudiantes de 12 a 16 años, pruebas escritas con problemas verbales proporcionales y no proporcionales sobre longitudes, perímetros, áreas y volúmenes de distintos tipos de figuras.

Posteriormente con entrevistas en profundidad, De Bock et al. (2002) trataron de desvelar los procesos de resolución de problemas y los mecanismos subyacentes a los hallazgos de los estudios de papel y lápiz. Este estudio indicó que:

-La mayoría de los estudiantes utilizaron un modelo proporcional de forma espontánea, casi intuitiva no siendo conscientes de su elección de un modelo proporcional, mientras que otros estaban realmente convencidos de que las funciones lineales eran aplicables "en todas partes".

-Muchos estudiantes mostraron limitaciones en su conocimiento geométrico (por ej., la creencia errónea de que el concepto de área sólo se aplica a las figuras regulares, o que una figura aumentada en tamaño y semejante a otra, no aumenta necesariamente en la misma proporción en todas sus dimensiones).

-Muchos estudiantes tienen hábitos inadecuados, creencias y actitudes hacia la resolución de problemas aritméticos verbales en el contexto escolar (p. ej., la creencia de que los dibujos no sirven de ayuda, que la primera solución es siempre la mejor, etc.), que demostraron ser un abono fértil para un proceso de modelización superficial o deficiente. A menudo, esto impedía a los estudiantes desenmascarar por inadecuado su solución proporcional, y descubrir la solución correcta al problema.

Van Dooren, De Bock y Verschaffel (2006) han identificado tres categorías que incluyen los diferentes factores explicativos de de la ilusión de linealidad de los estudiantes, tales categorías son:

(1) elementos relacionados con la linealidad/proporcionalidad como tal, su carácter intuitivo, su simplicidad y presencia en la vida diaria,

(2) elementos relacionados con las experiencias de los estudiantes en el sistema escolar formal y,

(3) elementos relacionados con el dominio matemático o científico específico en el que el fenómeno se produce.

4.2.3.1 Errores en Relación con el Porcentaje

Según Parker y Leinhardt (1995) algunos estudios clásicos realizados en los años 20 y 30 centraron su atención en las dificultades que experimentan los estudiantes con el porcentaje. Tales estudios indicaron que los estudiantes tienden a ignorar el signo del porcentaje, omitiéndolo y después de los cálculos reinsertándolo en la solución del problema, no distinguieron entre expresiones tales como 1/2 y 1/2 %. Los análisis muestran que en el trabajo con porcentajes los estudiantes aplican los conocimientos procedimentales estudiados en las fracciones o en los decimales, por ejemplo, ante la cuestión “9/9 de N = x % de N” mostraron la respuesta x=1 o para el ejercicio “5 1/4% de N = x de N” respondieron con x=5,25 (Edwards, 1930).

Parker y Leinhardt (1995) denominan este tipo de errores como “ignorar el signo del porcentaje” y los caracteriza argumentando que las respuestas estarían correctas si el signo del porcentaje no hubiese estado presente. De acuerdo con estas investigadoras los estudios más recientes proporcionan evidencias de que no sólo los escolares cometen este tipo de errores sino que también futuros maestros continúan viendo el porcentaje como un signo que puede colocarse o eliminarse sin que esto afecte el significado de las operaciones realizadas.

Otro de los errores reportados por estas investigadoras se denomina “regla del numerador”. Un estudiante que aplica esta regla cree que el signo de porcentaje a la derecha del número puede ser reemplazado por un punto decimal a la izquierda del número. Este algoritmo puede conducir a la conversión correcta del 55% en 0,55, pero también conduce a conversiones incorrectas como por ejemplo del 110% a 0,110.

Una tercera clase de errores resultan del predominio de las tablas de multiplicar que conducen a establecer relaciones fácilmente memorizadas entre múltiplos y divisores. Indican que ante la cuestión “4 = x% de 8” muchos de los estudiantes responden que x = 2. Se refieren a este tipo de error como “random algorithm” (uso de un algoritmo al azar), indican que cuando los estudiantes no saben qué operación es la adecuada dividen y en el caso de que la división no es exacta entonces multiplican. En relación a este error Parker y Leinhardt (1995) plantean que la noción de "la mitad" asociada al porcentaje puede provocar mayor distracción que las relaciones establecidas en las tablas de multiplicar, ejemplifica esta situación con los resultado del estudio de Edwards (1930) en la que la mayor parte de los estudiantes respondieron 50 en el ejercicio "60 = x% de 30".

Parker y Leinhardt (1995) también indican que los estudiantes muestran dificultades cuando trabajan porcentajes mayores que 100, un error típico es señalar que 120% = 0,120 o 60 = 50% de 30, en relación a lo cual conjetura que es posible que tales errores se deban al poco tiempo que en la educación formal se dedica al estudio de los porcentajes mayores que 100. En síntesis esta investigadora plantea que cuando los estudiantes resuelven problemas con porcentajes éstos tienden a manipular los numerales mediante reglas, reales o inventadas, por encima de los razonamientos.

Cuando el significado del porcentaje está asociado al de operador las dificultades suelen surgir en la identificación del valor sobre el que operar y en que calcular un porcentaje de un valor dado es, en realidad, multiplicar una fracción decimal (de denominador 100) por un número (la mayoría de las veces entero). Suele ser también frecuente encontrar dificultades a la hora de saber qué porcentaje se ha aplicado cuando se conocen los valores inicial y final o cuál es el valor inicial, conocidos el porcentaje y el valor final, situaciones muy comunes en la vida cotidiana.

Cuando el significado del porcentaje es el de comparación de dos cantidades, la dificultad estriba en identificar el porcentaje con la fracción decimal equivalente (de denominador 100) a la establecida por la comparación, o expresar (como fracción decimal) el número decimal correspondiente obtenido al efectuar la división (que procede de comparar esas cantidades). Estas dificultades están vinculadas a la conversión de decimales a porcentajes y viceversa.

El investigador A. Fernández (2001) describe varios errores ligados a la normalización de razones, los cuales afectan y se evidencian particularmente en el trabajo con porcentajes, estos son:

- Tomar los datos normalizados como absolutos y manipularlos según las reglas de operaciones de los números. Una de las actuaciones que ejemplifican este error consiste en hallar la media de dos porcentajes sin tener en cuenta el referente sobre el cual procede cada uno.
- Olvidar los cambios en el referente cuando se hacen dos normalizaciones sucesivas, los aumentos o disminuciones porcentuales aplicadas sucesivamente producen resultados inesperados en muchas ocasiones.
- Hacer normalizaciones, o pedir que se hagan, en casos donde no importa hacerlas o donde hacerlas produce trastornos que no favorecen la comparación.
- Un aspecto que constituye una fuente de concepciones erróneas es la relación que se da entre los aumentos (o disminuciones) absolutos y los porcentuales. En la comparación aditiva de dos pares de cantidades, por ejemplo $c_1 - c_2 = a$ y

$c_3 - c_4 = b$, la mayor diferencia absoluta no implica necesariamente un cambio porcentual del mismo tipo e incluso una misma diferencia absoluta no implica que no se hayan dado cambios de otro tipo en las cantidades implicadas, todo depende de las cantidades de referencia sobre las cuales se calculan los porcentajes.

- Las comparaciones aditivas y multiplicativas (incluye las porcentuales) forman parte de los núcleos de contenido que conforman las tareas de la experimentación objeto de este estudio.

4.3 ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

Este es un aspecto crucial dentro del proceso de diseño del experimento de enseñanza, en tanto que el logro de los objetivos específicos asociados a un contenido se evidenciará en las actuaciones de los estudiantes en tareas que requieran la puesta en marcha de su conocimiento acerca de dicho contenido. Además, como proceso en cadena, el mayor o menor alcance de tales objetivos aporta información sobre aquellas competencias matemáticas que podrían verse estimuladas.

En el estudio PISA (OCDE, 2004, OCDE, INECSE, 2005) se sostiene que el desarrollo de la competencia matemática se logra a través de la resolución de problemas del mundo real, problemas que abarcan situaciones de distintos entornos de la vida de las personas. Ya se ha expuesto en el Capítulo 3 el énfasis que pone este estudio y las directrices curriculares actuales sobre el enfoque funcional del conocimiento matemático. La relevancia de combinar experiencias reales posibles en la vida de las personas con los problemas de razón y proporcionalidad y los efectos positivos que este tipo de problemas tiene sobre el desarrollo del razonamiento proporcional, ha sido expuesta en algunas investigaciones (Greer, 1993; Verschaffel, De Corte y Lasure, 1994).

Uno de los proyectos con mayor difusión en los últimos años centrados en el desarrollo de materiales para la enseñanza de la razón y la proporcionalidad, entre otros contenidos, desde un enfoque funcional ha sido el proyecto CMP[58] (Connected Mathematics Project), en el cual ha participado David Ben-Chaim uno de los investigadores que ha sido referente central de nuestro estudio. Implicado en este proyecto se centra en el desarrollo de "*actividades auténticas*", sobre las cuales señala las siguientes características:

- Son actividades que se sitúan en entornos de la vida real y que desde algún punto de vista resultan significativas para los estudiantes, además de la aplicación del conocimiento matemático requieren que el estudiante asuma posturas y emita juicios en relación a cuestiones implicadas en la actividad.

[58]Información más detallada del mismo puede consultarse en http://connectedmath.msu.edu/

- Las actividades son complejas y no están desprovistas de ambigüedad, están compuestas por distintas fases, y no tienen necesariamente una única respuesta correcta (Ben-Chaim, Ilany y Keret, 2008).

Según estos investigadores el uso de este tipo de tareas puede ser una manera efectiva de desarrollar el conocimiento a partir de los aprendizajes previos que han ido construyendo a través de la experiencia, trabajar colaborativamente y de llegar a conclusiones relevantes sobre las matemáticas implicadas en las tareas y sobre las cuales se está aprendiendo.

Los principios expuestos en los párrafos precedentes han guiado de forma global el proceso de selección y rediseño de tareas para la experimentación.

4.3.1 Selección de las Tareas

En la planificación de nuestro experimento de enseñanza se recogieron un total de 146 tareas procedentes de investigaciones previas (Alatorre y Figueras, 2005; Ben-Chaim, Keret e Ilany, 2007; A.Fernández, 2001; Karplus, Pulos y Stage, 1983; Lamon, 1993, 2007; Modestou y Gagatsis, 2007; Noelting, 1980a; Noelting, 1980b; Tourniaire y Pulos, 1985), de estudios como PISA (INECSE, 2005) o TIMSS (IEA, 2001), de los proyectos Hoffer (1976) y Connected Mathematics Project (Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel, y Phillips, n.d.), y de los textos indicados en el Anexo B. En el proceso de diseño y selección de las tareas hemos procurado seguir los criterios descritos por Rico y Lupiáñez (2008, p. 314).

Se realizó un proceso de selección inicial basándonos en el tipo de tarea, el formato de la misma (preferentemente de desarrollo), la situación implicada (de interés considerando la edad y características de los estudiantes) y procurando que las cuestiones que formaran parte de la tarea tuviesen potencial para promover la discusión. Aplicando los criterios anteriores elegimos 51 tareas las cuales fueron depuradas y traducidas, en algunos casos, para este efecto se utilizó una plantilla de descripción de las variables de tarea (Anexo B).

Aplicando las variables de tarea que a continuación se relacionan, la batería de tareas quedó reducida a 13. Las variables de tarea consideradas fueron:

a) Tipo de tarea: valor ausente, comparación de razones o tasas, porcentajes y escala.
b) Tipo de relación entre las cantidades: proporcionalidad directa o inversa.
c) Tipos de magnitudes: discreta o continua.
d) Representación de la razón o de la proporción: simbólica (convencional, funcional, fraccionaria, porcentaje), verbal, gráfica, icónica, tabular.
e) Situaciones: personales, laborales o educativas, científicas y públicas.
f) Cantidades de la misma o diferente magnitud.

Otro criterio que tomamos en cuenta para seleccionar las tareas se refiere al potencial de las mismas para abordar dificultades y errores que han sido expuestos en las investigaciones previas y que hemos recogido en el Apartado 4.2.3. En el Capítulo 6 describimos el error o dificultad que posiblemente suscite la resolución de cada tarea así como las medidas que se han tomado con el objetivo de tratarlas.

Finalmente, después de las decisiones tomadas tras los análisis realizados entre una y otra sesión, se aplicaron siete tareas en total (Ver Capítulo 6 Descripción de la planificación, desarrollo y análisis preliminar de las Sesiones), las cuales abarcan los cuatro focos prioritarios producto del análisis de contenido y distintos valores de las variables previamente mencionadas. En la Figura 4.34 se resumen las características de las tareas. Éstas se han separado en dos tablas debido a que las primeras dos tareas son de carácter introductorio y los ejercicios incluidos en las mismas no corresponden a ninguno de los tipos tradicionales de problemas de proporciones (valor ausente, comparación, escala o porcentaje) por lo que tampoco se considera la localización del valor ausente como una variable de las mismas, adicionalmente subrayamos que en ambas tareas las cantidades pertenecen a una magnitud discreta.

	Representación				Magnitudes		Tipo de Razón					Situación			
Tareas Introductorias	Simbólica	Gráfica	Verbal	Tabular	1	2	Unitaria	Equivalente	Ni unitaria ni equivalente	Parte-parte	Parte-todo	Personal	Laboral	Pública	Científica
1. Fracción, Razón y Porcentaje.		*			*				*	*	*			*	
2. Preferencia en el Refresco de Cola.			*		*			*		*				*	

	Tipo de Problema			Magnitud		Representación				Magnitudes		Loc. valor ausente a:b::c:d		Tipo de Razón			Situación			
Tareas	Valor Ausente	Comparación	Escala ó Porcentajes	Continua	Discreta	Simbólica	Gráfica	Verbal	Tabular	1	2	c	d	Unitaria	Equivalente	Ni unitaria ni equivalente	Personal	Laboral	Pública	Científica
3. Los niveles de CO_2	*		*	*		*	*			*			*		*					*
4.Crecimiento de Bacterias	*	*		*	*				*		*	*	*			*				*
5.Permanencia Activa de un Fármaco	*			*					*		*	*	*	*		*	*			*
6.Compartiendo Pizza		*		*	*		*	*			*					*	*			
7. El Palacio Real de la Alhambra			*	*		*			*		*		*	*	*			*	*	

Figura 4.34. Resumen de las variables que caracterizan las tareas de la experimentación

En el Capítulo 6 se presenta una descripción detallada de cada tarea. No obstante, adelantamos una caracterización general de las mismas.

En la Tarea 1 los datos aparecen representados gráficamente, las cantidades pertenecen a una magnitud discreta, se centra en comparaciones del tipo parte-parte, la razón incluida en uno de los ejercicios es entera e implica una situación pública. La Tarea 2 incluye una comparación del tipo parte-parte, el todo no se conoce, la razón se representa verbalmente, la situación es pública, las cantidades son de una misma magnitud discreta e incluye dos razones equivalentes.

En términos más generales la Tarea 3 es un problema de porcentajes cuya situación es de tipo científico. La Tarea 4 es de proporcionalidad directa, está orientada principalmente a caracterizar gráfica y simbólicamente la relación de proporcionalidad. La Tarea 5 está orientada al estudio de la proporcionalidad inversa. La Tarea 6 implica una situación personal, es un problema de comparación de razones que tienen la cualidad de que los términos se relacionan aditivamente de la misma manera. La Tarea 7 atiende ideas asociadas a los conceptos de escala y semejanza, las cantidades pertenecen a las distintas magnitudes (longitud, superficie, volumen).

Otro elemento descriptor de las tareas ha sido el tipo de razón que incluyen, de acuerdo con el marco del análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal. En este sentido las tareas 1 y 2 incluyen razones clasificables como composiciones, las tareas 3 y 6 consideran razones que son exposiciones y las razones de las tareas 4,5 y 7 son constructos.

Marín (n.d.), establece una serie de criterios que permiten estudiar la coherencia de las tareas elegidas con los análisis previos realizados, este investigador plantea que una tarea matemática se adecua a la planificación previa de los contenidos si tras el análisis de la misma se pueden describir los siguientes elementos que están presentes en ella, que corresponden con los seleccionados para la unidad didáctica:

- Aparecen los sistemas de representación seleccionados en el análisis de contenido y se promueve establecer relaciones entre ellos.
- Se sitúan las tareas en contextos que recogen los establecidos y seleccionados en el análisis fenomenológico.
- Se afronta el aprendizaje de los contenidos conceptuales y procedimentales establecidos en la estructura conceptual del contenido.
- Las tareas están encaminadas al logro de los objetivos de aprendizaje y de las competencias seleccionadas.
- Se han tomado en cuenta las limitaciones de aprendizaje en la formulación de las tareas, de manera que su funcionamiento tratará de superarlas, en el grado de dificultad que se ha previsto en la enseñanza.

En el Capítulo 6 “Planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones” se describe con detalle cada una de las tareas, en esta descripción se aprecia que las mismas satisfacen los criterios señalados por Marín (n.d.)

4.3.2 Gestión de la Clase

Partimos de una postura respaldada desde varios frentes que defienden la resolución de problemas de la vida cotidiana como una idea clave que persigue el aprendizaje de las matemáticas y mediante la cual los estudiantes le encuentren sentido al estudio de las mismas (NCTM, 2000; OCDE, 2004). Como metodología de trabajo elegimos la resolución de problemas[59] desarrollada en un ambiente de aprendizaje colaborativo.

Como se detallará mejor en el Capítulo 5 “Metodología del Estudio”, nuestro experimento de enseñanza se sitúa en el marco curricular basado en la noción de competencia matemática propuesta en el estudio PISA (OCDE, 2004). Adoptamos el modelo funcional sobre el aprendizaje de las matemáticas que sugiere dicho estudio, lo que ha originado que la propuesta de enseñanza diseñada esté basada en problemas de situaciones cotidianas, en los que el conocimiento matemático puesto en funcionamiento se presenta en una variedad de contextos, y potencie medios reflexivos correspondientes a diferentes procesos cognitivos de aprendizaje. Parafraseando la definición de alfabetización o competencia matemática del proyecto PISA y centrándola en los contenidos razón y proporcionalidad, el objetivo instruccional del experimento de enseñanza realizado es fomentar, en el trabajo en el aula sobre razón y proporcionalidad, las capacidades de pensar y razonar, argumentar, comunicar, resolver problemas, representar ideas sobre razón y proporcionalidad, utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones sobre dichas nociones.

La intencionalidad de fomentar las capacidades señaladas exigió una metodología adecuada de trabajo en el aula. Optamos por una adaptación de la metodología ACODESA[60] la cual está basada en el aprendizaje colaborativo, el debate científico y la auto-reflexión y ha sido aplicada en diversos estudios (Hitt, 2007; Hitt, Morasse y González, 2008; Hitt y Morasse, 2009; Hitt y Cortés, 2009; Passaro, 2007; Páez, 2004) en los que ha participado y dirigido el investigador Fernando Hitt de la Universidad de Quebec.

Las investigaciones de Hitt se centran principalmente en el desarrollo de conceptos matemáticos avanzados como el de función o límite, la visualización y el papel de las representaciones, tanto internas como externas, en ambientes de trabajo con uso de tecnología. Aunque los estudios conducidos por este investigador difieren en relación con el contenido matemático central de cada investigación todos abordan una problemática común que es el aprendizaje de los conceptos matemáticos y consideran formas alternativas de promover la comprensión de tales nociones ya sea a través de la resolución de problemas y (o) del uso de la tecnología. Se interesa por formas que permitan a los estudiantes avanzar en su aprendizaje de modo que puedan superar ideas erróneas y obstáculos epistemológicos (Artigue, 1990, citada en Hitt, 2007). En este marco y con el interés de promover la superación de obstáculos cognitivos, desarrolló la metodología de enseñanza ACODESA, la cual se ha aplicado en los estudios señalados en el párrafo anterior.

Una de las nociones empleadas en los estudios conducidos por este investigador se refiere a las concepciones de los estudiantes. Plantea que “una concepción es un conocimiento que ha sido construido por un individuo, o sea de manera personal, esté

[59] Resolución de problemas como un medio para estudiar conocimientos conceptuales y procedimentales asociados a la proporcionalidad y no como un contenido por sí mismo.
[60] Siglas referentes a Apprentissage Collaboratif, Débat Scientifique y Auto-réflexion

en interacción con pares, y que no es "equivalente" al conocimiento reconocido por una comunidad académica” (Hitt, 2007, p. 69). Hitt sugiere que las concepciones se explicitan o se evidencian a través de las representaciones externas que produce el estudiante en la resolución de un problema. Desde esta perspectiva indica que una concepción puede ser: un obstáculo epistemológico; una construcción parcial de un concepto que funciona en algunos contextos y no en otros, pero que no es necesariamente un obstáculo epistemológico; una construcción parcial de un concepto, construcción coherente de algunos representaciones internas y su articulación (identificadas por expertos en caso de una actividad); una construcción parcial de un concepto (representaciones funcionales internas) expresada por una mezcla coherente de representaciones externas (no definidas por expertos en una actividad).

Nos interesamos en particular en la noción de concepción sugerida por Hitt (2007) pues en nuestra investigación uno de los focos de interés se orienta hacia la descripción de las concepciones que los futuros maestros de primaria manifiestan durante la resolución de problemas en un ambiente de trabajo colaborativo. De modo que para efectos de nuestro estudio asumimos la postura propuesta por Hitt en relación con este término.

4.3.2.1 Principios de la Metodología ACODESA

De modo general esta metodología de trabajo tiene un enfoque de tipo socio-constructivista (Hitt, 2007), donde el debate tiene por objetivo integrar a los estudiantes en un planteamiento activo de cuestionamiento de los conceptos y de construcción crítica de sus propios conocimientos, incitándoles a proponer sus propias conjeturas, propuestas y demostraciones. La auto-reflexión intenta promover una reconstrucción individual de lo que se ha efectuado en las dos primeras etapas. El trabajo se realiza sobre tareas abiertas, complejas o no tradicionales que favorecen la reflexión y el debate, lo cual responde a nuestro interés por estudiar cómo se reelabora un concepto a partir de la experiencia colaborativa.

Hitt (2007) plantea que esta metodología se fundamenta en los principios de aprendizaje colaborativo propuestos por Baker y Quignard, la metodología del debate científico expuesta por Legrand y en los fundamentos de la auto-reflexión planteados por Hadamard.

Para los estudios de Hitt, se adaptaron las características de la metodología del debate científico al aprendizaje colaborativo, es decir, inicialmente, los estudiantes trabajan en equipo para pasar a continuación a un debate general en el cual se pretende desencadenar un debate científico. La auto-reflexión, que intenta promover una reconstrucción individual de lo que se ha efectuado en las dos primeras etapas, es puesta de relieve por Hadamard (citado en Hitt, 2007). Éste concede una gran importancia a los procesos de reflexión, conscientes e inconscientes, de los matemáticos en la resolución de un problema ("incubación de ideas"). La metodología ACODESA intenta estimular estos procesos conscientes e inconscientes suscitando en los estudiantes una reconstrucción individual de lo que se ha trabajado en las dos primeras etapas (trabajo equipo y debate científico).

Fases de la Metodología ACODESA

En Hitt (2007) se describen las fases a seguir en el desarrollo de la metodología ACODESA en el marco de una investigación que implicaba el uso de tecnología, a continuación recogemos las pautas indicadas:

1. Construcción de un cuestionario preliminar para identificar comportamientos y perfiles de estudiantes (comportamientos intuitivos[61], formales[62] o contradictorios[63]).
2. Formación de equipos de tres estudiantes que tienen comportamientos diferentes según el punto anterior.
3. Elaboración de actividades, tareas matemáticas, con la intención de provocar un desequilibrio cognitivo en los estudiantes. En el caso del estudio de Hitt (2007) las tareas se resolvieron con la ayuda de una calculadora simbólica.
4. Distribución de hojas para el trabajo en equipo. En esta fase cada estudiante tiene asignado un papel, de modo que durante la resolución de un problema, un estudiante utiliza la calculadora, otro toma nota de los resultados y debates mientras que el último tiene la responsabilidad de exponer los resultados. En cada actividad, los estudiantes deben cambiar de papel. El autor recomienda utilizar una única calculadora por equipo, debido a que esto permite una mejor comunicación entre los miembros.
5. Posible paso al debate (debate científico) al final de las actividades. La idea principal es que, para la construcción de un concepto, o para la superación de un obstáculo epistemológico, los estudiantes deben hacer frente a situaciones didácticas susceptibles de causar un desequilibrio cognitivo.
6. Recogida de los proyectos por el profesor-investigador al final del debate.
7. Resolución individual del problema. Bajo el supuesto de que el debate y (o) trabajo en equipos probablemente causa cambios en el razonamiento de los estudiantes, la actividad deberá reanudarse de manera individual para causar una reflexión (la auto-reflexión) sobre los ejemplos, contraejemplos, demostraciones, etc., que tuvieron lugar. Un aspecto importante de esta reflexión personal es que si ellos quieren hacer uso de los argumentos discutidos en la clase tienen que hacer, necesariamente, una recuperación de los hechos, ya que de acuerdo a nuestra metodología se les recoge todo el material elaborado en la clase con el fin de que esta reconstrucción sea mucho más profunda. Aquí es fundamental señalar que al estar tratando con conceptos que son difíciles de aprehender, no es una simple repetición lo que se les exige a los estudiantes cuando se les solicita que vuelvan a desarrollar la actividad. Puesto que el transformar una concepción o incluso superar un obstáculo cognitivo requiere de una reflexión profunda que implica un rechazo consciente a su

61 Los expresados con ideas intuitivas.
62 Los expresados usando definiciones sin apelar a ideas intuitivas.
63 Los que producen contradicciones lógicas.

concepción u obstáculo y, a su vez, a una nueva concepción o construcción del concepto en cuestión.

8. Corrección del trabajo individual para permitir al profesor-investigador comprobar a posteriori si de verdad hay una transformación de las concepciones de cada estudiante. Según Thompson (2002, citado en Hitt, 2007) es muy probable que cuando los estudiantes discuten y llegan a un "consenso", algún tiempo después, varios de ellos vuelven de nuevo a su posición inicial.

4.3.2.2 Adaptación de la Metodología ACODESA en Nuestra Investigación

Las adaptaciones que se han realizado a la propuesta original obedecen al interés por desarrollar la investigación en un entorno natural de formación de maestros de educación primaria. En relación con la conformación de los equipos de trabajo colaborativo se respetó la organización de equipos que ya estaba establecida en cada grupo dado que los estudiantes ya estaban familiarizados con sus compañeros de equipo no deseamos imponer una nueva manera de agruparse con el fin de no situarlos en una posición que requiriese de cierto tiempo de ajuste y habituación.

La misma tarea se resolvió en cuatro fases claramente diferenciadas (Figura 4.35). Después de la figura describimos en qué consiste cada una, aunque señalamos que a lo largo de las sesiones de la intervención estas fases sufrieron algunas leves modificaciones, éstas se describen en el Capítulo 6 “Planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones”.

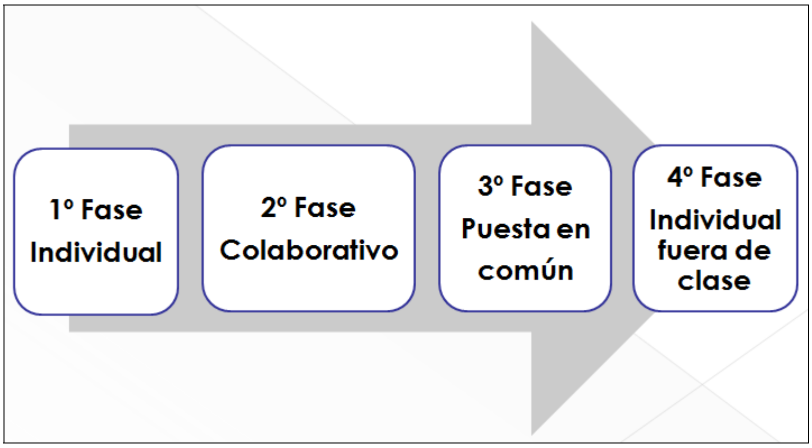


Figura 4.35. Fases de la metodología de trabajo elegida para gestionar la experimentación

Fase I: Trabajo Individual

En el inicio de cada intervención se les entrega a los estudiantes una hoja de trabajo individual con la tarea, en este material escrito han de poner su nombre. Cada estudiante resuelve individualmente la tarea-problema durante un tiempo definido por la investigadora.

Cuando finaliza le da vuelta a la página y en el momento en que todos los estudiantes del grupo han terminado la investigadora recoge esas resoluciones.

Consideramos que una primera reflexión en el trabajo individual tiene un doble propósito, por un lado conocer las concepciones con las que llegan los estudiantes y por otro lado suscitar razonamientos e ideas que posiblemente aportarán al trabajo colaborativo en la fase II.

Fase II: Trabajo Colaborativo

Los estudiantes se sientan y agrupan con los mismos compañeros de las prácticas de la asignatura.

Se les entregará una nueva hoja con el mismo problema En ella deben escribir la que crean es la "mejor solución posible" a partir de las contribuciones de *todos* los miembros del grupo. Cada equipo tiene una grabadora de voz que activan desde el momento en que inicia el trabajo. Para este trabajo se dará un tiempo limitado por la investigadora.

Durante el trabajo de grupo, la profesora-investigadora va de un equipo a otro observando su progreso, suministrando asistencia, preguntándoles para aclarar un punto, discutiendo la estrategia de solución al problema, clarificando alguna notación y respondiendo preguntas.

El análisis de la resolución grupal escrita, así como la grabación nos permitirá estudiar cómo a partir de la discusión conjunta se construye o mejoran las ideas que, individualmente y de manera previa, habían manifestado los estudiantes durante la fase I, qué modos activan los estudiantes para ponerse de acuerdo, profundizar en la comprensión que sobre la razón y la proporcionalidad ponen de manifiesto los estudiantes de magisterio en tareas abiertas situadas en ambientes de la vida cotidiana.

Fase III: Puesta en Común

Cuando todos los equipos han acabado el trabajo de la fase II se pasará a la puesta en común de la resolución de la tarea. Estará a cargo de uno de los miembros del equipo y la investigadora aportará ideas, cuestionará los procesos y atenderá otros aportes de los estudiantes, su papel es el de dirigir esta puesta en común.

Para la puesta en común de las resoluciones uno de los miembros del equipo pasará a la pizarra y explicará a los demás compañeros cómo y por qué han procedido de esa manera. Durante ese momento quienes quieran hacer correcciones a su trabajo o ampliar sus respuestas podrán hacerlo usando siempre otro color de bolígrafo o lápiz facilitado por la investigadora (color morado).

Se pretende facilitar un intercambio de ideas relacionadas con los conceptos, propiedades, procedimientos, estrategias y argumentos implicados en la resolución de la tarea o problema. Este intercambio persigue favorecer la comprensión que sobre las nociones de razón y proporcionalidad, así como la interpretación de estos conceptos en situaciones del entorno, poseen los estudiantes. Se espera que durante este momento o fase se institucionalice el conocimiento matemático contemplado en las tareas y el conocimiento común y especializado que ha sido planificado para ser expuesto durante la puesta en común.

Después de la puesta en común, cada equipo entrega a la investigadora la hoja de trabajo con la resolución hecha colaborativamente así como con las correcciones o anotaciones hechas durante esta fase.

Fase IV: Trabajo Individual Fuera de Clase (Reconstrucción de la Tarea)

Al finalizar la sesión la investigadora da una copia de las tareas trabajadas en la sesión para que cada estudiante la resuelva fuera de clase, el objetivo que se persigue con esto es indagar sobre la evolución de ese alumno en la resolución de la tarea, o sea ver qué elementos de su reflexión inicial se modificaron y cuáles se mantuvieron desde la I fase hasta la resolución de la tarea fuera de clase.

Capítulo 5. Tipo de Estudio y Metodología de la Investigación

El estudio realizado se enmarca en el paradigma de la investigación de diseño, específicamente corresponde a un experimento sobre el desarrollo del conocimiento del profesor (*Teacher Development Experiment, TDE*), un tipo de experimento de enseñanza.

El capítulo contempla dos secciones. En la primera parte del capítulo nos centramos en la descripción de las características de la Investigación de Diseño, propósitos y elementos centrales de la misma, así como en la descripción de los fundamentos del tipo de experimento que ha guiado el desarrollo de nuestro estudio.

La segunda parte del capítulo comprende los aspectos metodológicos de la recogida y análisis de la información de esta investigación, detallamos las características de las tres fases del experimento de enseñanza realizado: planificación, implementación y análisis retrospectivo, especificando las acciones realizadas en cada fase. En la Figura 5.1 presentamos un esquema de los elementos centrales de este capítulo, mismos que configuran la metodología seguida en la investigación.

5.1 La Investigación de Diseño

En los últimos quince años se ha escrito ampliamente acerca de la investigación basada en diseño, sus principios, características, objetivos y prácticas que supone (Brown, 1992; Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003; Collins, 1992; Collins, Josep y Bielaczyc, 2004; Design-Based Research Collective, 2003; Molina, 2007; Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Aunque las descripciones aportadas por los investigadores varíen en algunos aspectos, debido a la variedad de estudios que contempla, es posible sintetizar las características básicas que perfilan este tipo de investigación.

En la literatura encontramos que los autores se refieren a este tipo de investigación mediante diversos términos: investigación (estudio) de diseño, investigación (estudio) basada en diseño, experimento de diseño o basados en diseño. Tal y como lo señala Molina (2007) la mayoría de autores indican que el término “experimentos de diseño” fue introducido en 1992 en artículos de Ann Brown y Allan Collins. Según Collins, Josep y Bielaczyc (2004) la investigación de diseño se desarrolló por la necesidad de enfoques para estudiar el fenómeno del aprendizaje en entornos cotidianos en lugar de estudiarlo en ambientes con condiciones artificiales.

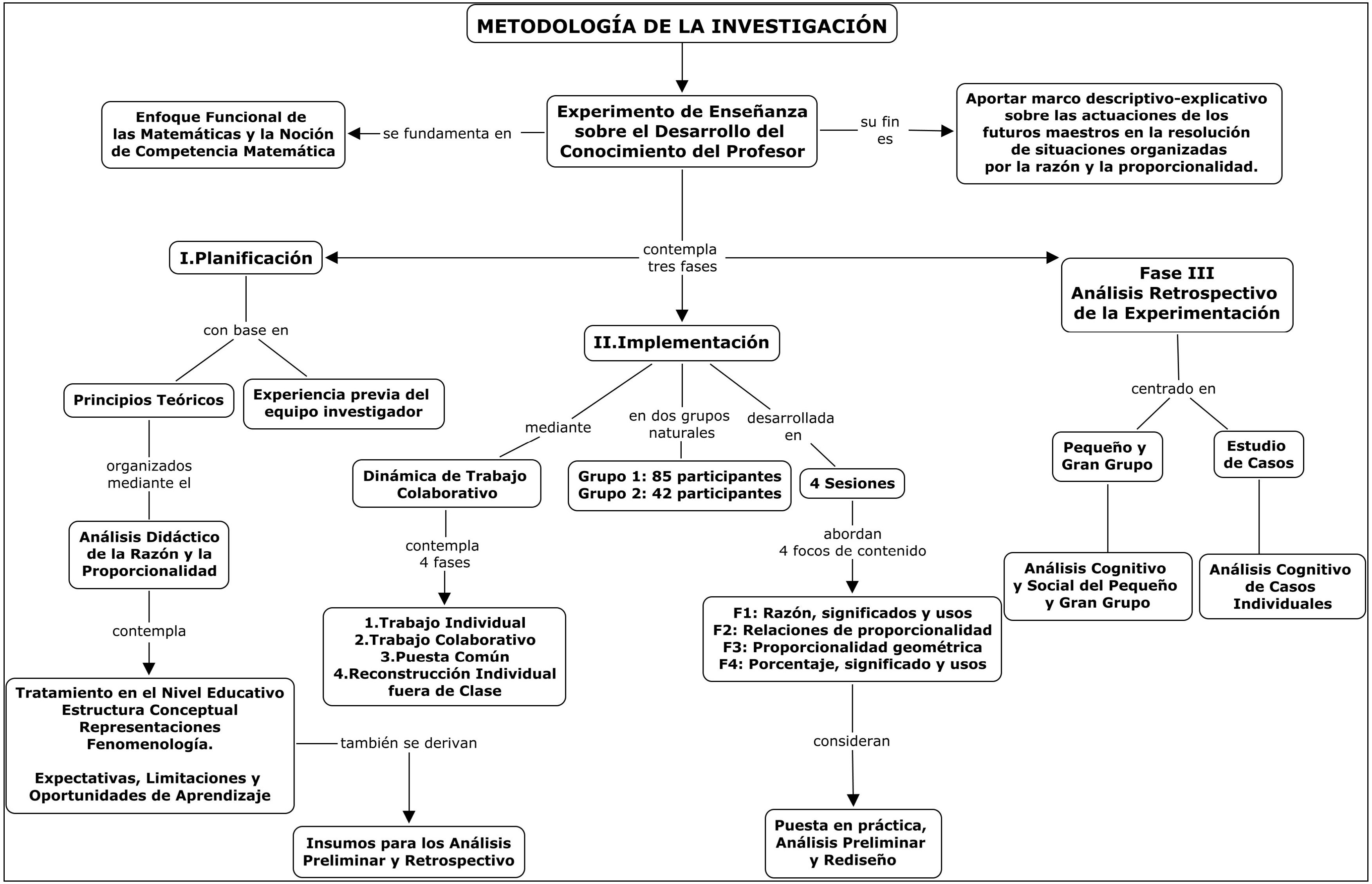


*Figura 5.1.*Esquema de la metodología de la investigación

De acuerdo con Molina et al. (2011) la investigación de diseño es un tipo de metodología de investigación, de naturaleza cualitativa que ha sido desarrollada en el campo de las "*Ciencias del aprendizaje*". Estos investigadores sintetizan algunas de las definiciones aportadas por los propulsores de esta metodología (Confrey, 2006; diSessa y Cobb, 2004; Shavelson y Towne, 2002).

La investigación de diseño "persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico" (Molina et al., 2011, p. 75). De acuerdo con estos investigadores su objetivo es:

> *Analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación*. (p. 76)

Razones que permiten considerar la investigación de diseño como un paradigma metodológico eficaz en la investigación del aprendizaje y la enseñanza.

Los experimentos de diseño aparecen como un dialecto emergente que intenta apoyar argumentos construidos alrededor de los resultados de la intervención, la innovación activa en contextos educativos. Está dirigida principalmente a comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje en los que el propio investigador se halla implicado.

Aunque cada autor sugiere algunos matices distintos, adoptamos la postura propuesta por Confrey (citado en Molina et al., 2011) quien los define como extensas investigaciones de prácticas educativas, provocadas por el uso de un conjunto de tareas curriculares noveles, cuidadosamente secuenciadas que estudian cómo algún campo conceptual o conjunto de habilidades son aprendidas mediante la interacción de los alumnos, bajo la guía del profesor. Este investigador sostiene que la investigación de diseño pretende documentar los recursos y conocimientos que manifiestan los alumnos en la resolución de las tareas, las interacciones entre los estudiantes y profesores, la evolución de las concepciones y en general cómo se realiza la enseñanza a lo largo de la experimentación.

Tabak (2004) sostiene que la investigación de diseño es apta para el estudio de la enseñanza y el aprendizaje en contextos naturales de formación, esta investigadora sustenta su postura basándose en una extensa revisión de literatura realizada por Turner y Meyer (2000), quienes identificaron un conjunto de componentes esenciales que son necesarios para estudiar contextos naturales de aula. Según Tabak (2004) la investigación basada en diseño satisface tales componentes y lo argumenta indicando que:

- El estudio del contexto de clase requiere de la investigación de más de una variable a la vez. Los investigadores implicados en la investigación de diseño comparten la idea de que el aprendizaje es un fenómeno que se desarrolla en medio de la coacción de múltiples factores e interacciones. Uno de los propósitos de la investigación de diseño es estudiar cómo distintas condiciones de la clase apoyan el aprendizaje.

- El contexto del aula requiere que el programa de investigación incorpore un componente cualitativo. El conocimiento producido a través del componente empírico de los métodos de la investigación de diseño incluyen normalmente una descripción de cómo se desarrolla el aprendizaje día a día a través de las interacciones del aula. Este proceso implica métodos cualitativos de recolección de datos que permitan elaborar una descripción de la trayectoria que se ha seguido para conducir el aprendizaje de los individuos y del grupo.
- Un estudio sobre el contexto cotidiano del aula debería intentar responder a las cuestiones ¿cómo sucede? y ¿por qué sucede algo? además del ¿qué sucede? La investigación de diseño acopia información acerca del aprendizaje y los medios a través de los cuales el aprendizaje se generó.
- El estudio del contexto del aula requiere que el investigador esté presente en el aula. Uno de los distintivos de la investigación basada en diseño es la colaboración entre los participantes del entorno educativo dentro del cual se desarrolla el estudio.

Este paradigma metodológico está siendo ampliamente aplicado en la investigación educativa, particularmente en el campo de la Didáctica de la Matemática (Molina, 2007), esta investigadora sustenta esta afirmación indicando la difusión de los estudios de diseño en diversas publicaciones y colectivos de investigadores como lo es el grupo Design-Based Research Collective.

Los participantes, el espacio a observar, la duración del experimento, entre otras condiciones, conducen a establecer variaciones entre los estudios que se enmarcan en la investigación de diseño. Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble (2003) indican que existen distintos tipos de experimentos de diseño, entre los cuales destacan:

- Experimentos de diseño "uno a uno", en los cuales un equipo de investigación conduce una serie de sesiones de enseñanza con un pequeño número de estudiantes, el objetivo es crear a pequeña escala la ecología del aprendizaje en el aula ordinaria, de modo que ésta pueda ser estudiada con mayor profundidad y detalle (Cobb y Steffe, 1983; Steffe y Thompson, 2000).
- Experimentos con el grupo, en el cual un equipo de investigación colabora con un profesor (quien puede ser uno de los miembros), el equipo asume la responsabilidad de la enseñanza (Cobb, 2000; Confrey y Lachance, 2000; Gravemeijer, 1994).
- Experimentos sobre el desarrollo del conocimiento de profesores en formación, en los cuales un equipo de investigación ayuda, organiza y estudia la formación del los futuros docentes (Simon, 2000).
- Experimentos sobre el desarrollo del conocimiento de profesores en activo en los cuales los investigadores colaboran con los profesores para apoyar el desarrollo de una comunidad profesional (Stein, Silver y Smith, 1998).

5.1.1 Características de la Investigación de Diseño

Los experimentos de diseño fueron desarrollados como una manera de realizar investigación para evaluar y refinar diseños educativos basados en principios teóricos derivados de investigaciones previas (Collins et al., 2004). Según Molina et al. (2011) los experimentos de diseño se pueden caracterizar como se indica a continuación:

- La investigación de diseño se realiza en contextos naturales de enseñanza y aprendizaje, la complejidad de estos entornos se traduce en la implicación de múltiples variables muchas de las cuales no se pueden controlar.
- Combina dos propósitos: el diseño de situaciones o ambientes de aprendizaje y enseñanza, y el desarrollo de teorías, o como afirma el Colectivo de Investigación Basada en Diseño (Design-Based Research Collective, 2003), “proto-teorías”. Este adjetivo se refiere a que las teorías desarrolladas son específicas a un dominio de aprendizaje y son explicativas de la actividad del diseño. Como señala Molina et al. (2011) estas teorías basadas en hechos empíricos son esenciales para la mejora de la educación debido a que son útiles para detectar regularidades o patrones en los complejos contextos en los que tienen lugar.
- La investigación y el desarrollo configuran un ciclo continuo de diseño de intervención-puesta en práctica-análisis-rediseño. Según Kelly (citado en Molina et al., 2011) en la toma de decisiones sobre el diseño el aprendizaje de los alumnos no es el único factor delimitante ya que se pueden considerar otros factores de carácter práctico, participativos, políticos entre otros. Cuando algunos aspectos del diseño no funcionan como se ha planificado, el equipo investigador debe considerar diferentes opciones para mejorar la puesta en práctica del diseño y tomar decisiones sobre cambios al mismo, tantas veces como sea necesario. Una consecuencia de este carácter cíclico se refiere a que este tipo de estudios implican dos niveles de análisis, un análisis preliminar de los datos que se recogen sesión tras sesión y el análisis final de toda la información recabada el cual se realiza al acabar todo el proceso de implementación.
- La investigación debe dar cuenta (explicar) cómo y por qué funcionan los diseños educativos en contextos reales. No debe limitarse a documentar su éxito o fracaso, propio de la evaluación del producto. La investigación de diseño, afirman Cobb, Confrey, DiSessa, Lehrer, y Schauble (2003), pretende explicar por qué funcionan los diseños y sugerir cómo pueden adaptarse a nuevas circunstancias.
- El desarrollo de la investigación debe apoyarse en métodos que permitan constatar (y dar cuenta de) las conexiones de los procesos de puesta en operación con resultados de interés.
- Una de las limitaciones fundamentales en la investigación de diseño se refiere a la gran cantidad de datos que se recogen, la mayoría procede de grabaciones de audio y (o) video de las intervenciones y del trabajo de los estudiantes, mismas que se acopian para comprender con detalle qué es lo que sucede. Este factor incide en la dificultad de llevar a cabo las investigaciones de diseño.

En síntesis este enfoque de investigación va más allá del mero diseño y prueba de intervenciones particulares. Las intervenciones incluyen determinados supuestos y exigencias específicas teóricas sobre la enseñanza y el aprendizaje, reflejan un compromiso para comprender las relaciones entre teoría, plan de acción diseñado y práctica, al mismo tiempo que el análisis previsto de cada intervención específica puede contribuir a elaborar "teorías humildes" sobre la enseñanza y aprendizaje de un contenido específico.

5.1.2 Metodología de la Investigación de Diseño

Collins et al. (2004) proponen una guía orientativa para desarrollar investigaciones de diseño, sin embargo indica que no todas las investigaciones han de ajustarse completamente a ella. La Tabla 5.1 recoge las orientaciones aportadas por estos investigadores y posterior a ésta se describe cada una de las mismas.

Tabla 5.1. *Guía orientativa para desarrollar una investigación de diseño*

Implementación del diseño
Identificar los elementos cruciales del diseño y describir cómo estos interactúan
Caracterizar cómo cada elemento del diseño será tratado en la práctica
Modificación del diseño
Si los elementos del diseño no funcionan, modificar el diseño
Cada modificación implica una nueva fase
Describir las razones que justifican los cambios realizados
Dimensiones de análisis del diseño
Cognitiva
Recursos
Relaciones Interpersonales
Grupos de la clase
Escuela u otra institución
Variables dependientes
Variables del entorno
Variables del aprendizaje
Variables del sistema
Variables independientes
Entorno.
Características de los aprendices
Soportes técnicos
Financiamiento
Desarrollo profesional
Trayectoria de la implementación
Publicación de reportes sobre investigaciones de diseño
Objetivos y elementos del diseño
Contextos en los que se implementó
Descripción de cada fase
Resultados
Aprendizajes

Nota: Tabla adaptada de (Collins et al., 2004).

Implementación de diseño

Cada implementación de una investigación de diseño es distinta. No obstante, es importante identificar los elementos centrales del diseño y describir cómo se articulan. Para evaluar cualquier implementación, se necesita analizar cada caso particular en términos de esos elementos clave y de sus interacciones. Algunos elementos serán implementados más o menos como fueron planificados por los investigadores y algunos no serán siquiera llevados a la práctica.

Modificación del diseño

Un propósito de la investigación es mejorar la manera en la que funciona el diseño. El profesor o los investigadores pueden observar que algún elemento de la propuesta no funciona en el curso de la experimentación. Es importante, por lo tanto, analizar por qué éste no funciona, recoger información sobre esta cuestión y describir los fallos encontrados así como las decisiones tomadas al respecto.

Dimensiones de análisis del diseño

Rogoff (citado en Collins et al., 2004), propuso a los analistas de ambientes de aprendizaje atender tres aspectos centrales de los mismos: la experiencia del individuo, las interacciones interpersonales y el colectivo. En el contexto de los experimentos de diseño los investigadores deben, adicionalmente, atender las interacciones entre aprendices y elementos del entorno. Según estos investigadores algunos aspectos que son relevantes para el análisis de los diseños educativos son:

Nivel cognitivo: ¿qué conocen los estudiantes antes de entrar en un ambiente específico de aprendizaje?, ¿cómo esto cambia a lo largo del tiempo? Algunas de las herramientas para el análisis en este nivel incluyen análisis cognitivos con base en las explicaciones y representaciones mostradas por los estudiantes. A través de descripciones verbales y visuales de las ideas, los investigadores estudian el pensamiento de los estudiantes.

Nivel interpersonal: esta perspectiva se refiere a la interacción entre profesores y estudiantes, algunas de las preguntas que sugiere son ¿hay intercambio de conocimientos?, ¿se ayudan los estudiantes unos a otros? Los investigadores utilizan técnicas etnográficas para observar ese tipo de interacciones.

Nivel del grupo: En este nivel se tratan aspectos relacionados con la estructura de participación, identidad del grupo y relaciones de autoridad, ¿todos participan?, ¿existe un sentido de identidad en el grupo?, de nuevo la etnografía es un enfoque efectivo para este tipo de análisis.

Nivel de recursos: este nivel tiene que ver con los recursos que en el diseño están disponibles para los estudiantes y con la facilidad de comprender o usar éstos. ¿Los recursos son accesibles?, ¿Qué tan bien están integrados los recursos en las actividades?

Nivel escolar o institucional: contempla cuestiones procedentes de la comunicación con las partes externas, por ejemplo ¿los padres de familia están satisfechos con el diseño?, ¿la administración apoya el desarrollo del diseño?, ¿cuáles micro-políticas impactan al diseño?

Variables dependientes

El éxito o fracaso de una innovación no puede ser evaluada simplemente en términos de que tanto aprenden los estudiantes. Para estudiar distintas variables es preciso usar varias técnicas de análisis, incluyendo test, encuestas, entrevistas, observaciones de clase. Los análisis cualitativos y cuantitativos son parte esencial de la metodología de las investigaciones de diseño. Collins et al. (2004) señala que es relevante analizar al menos tres tipos de variables dependientes:

- Variables del entorno tales como el compromiso de los estudiantes para con su aprendizaje, la cooperación entre los estudiantes en la clase.
- Variables del aprendizaje tales como conocimiento de contenidos, habilidades, disposiciones, estrategias metacognitivas, estrategias de aprendizaje.
- Variables estructurales, tales como la sostenibilidad al pasar los años, difusión de las ideas hacia otros profesores y estudiantes, facilidad de adopción dentro del currículo y costos.

Variables independientes

Collins et al. (2004) plantean que existe una gran cantidad de variables independientes que pueden afectar el éxito del diseño en la práctica. Según estos investigadores no es sencillo determinar qué aspectos de la situación de implementación pueden afectar el éxito del diseño, sin embargo indican algunas de estas variables:

- Entorno o contexto de aplicación por ejemplo hogares, lugares de trabajo, museos, escuelas, institutos, universidad, distintos niveles educativos, públicos y privados, urbanos, rurales, entre otros.
- Características de los estudiantes por ejemplo edad, nivel socioeconómico, tasa de asistencia; pues ciertos diseños pueden funcionar bien con algunos grupos de estudiantes y ser todo un fracaso en otros.
- Recursos y apoyo para la implementación entre los que se incluyen materiales, soporte técnico, apoyo administrativo y de los padres.
- Desarrollo profesional. A menudo el éxito de una investigación de diseño supone la formación de los profesores que han de aplicarlo, esto implica el desarrollo de seminarios, grupos de trabajo, cursos, videos explicativos, entre otros. Según estos investigadores es importante identificar lo que los profesores necesitan para implementar el diseño exitosamente.
- Financiamiento, por ejemplo costo de los equipos, costos de los servicios o uso de instalaciones, costos del desarrollo profesional.
- Trayectoria de la implementación. Este término cubre las variables implicadas en la implementación del diseño, cómo se introduce la puesta en práctica, cuánto tiempo se ha dedicado.

Reportes de las investigaciones de diseño

Collins et al. (2004) indican que los reportes sobre estudios de diseño han de incluir al menos cuatro elementos: descripción del problema, método experimental, resultados y discusión. La descripción del método ha de hacer referencia a los objetivos y elementos del diseño, contexto en el que se aplicó, descripción de cada fase, resultados y aprendizajes derivados de la aplicación de este diseño, por ejemplo, cómo se podría adaptar el diseño a otras circunstancias.

Por su propia naturaleza, el estudio de fenómenos tan complejos como el aprendizaje en contextos singulares (ecologías de aprendizaje) exige una completa y minuciosa especificación de todo lo que acontece. Es esencial, por tanto, distinguir en las especificaciones del diseño entre los elementos que constituyen el objetivo específico de la investigación de aquellos que pueden ser instrumentales o asumidos como condiciones.

En síntesis, la perspectiva de investigación que presentamos supone el compromiso de utilizar diseños derivados y guiados por marcos teóricos para generar intervenciones complejas que pueden ser mejoradas a través del estudio empírico y que pueden contribuir a una comprensión más profunda de las propias teorías subyacentes. Esto implica que los estudios de diseño, como ocurre en otras metodologías, deben ser rigurosos ensayos para la generación y prueba de teorías humildes. Ello enfrenta a este enfoque con desafíos altamente significativos. Especialistas en didáctica de las matemáticas afirman que este enfoque está aportando conocimiento, basado en evidencia empírica (Molina et al., 2011), a cuestiones complejas sobre la estructura y los resultados de determinados ambientes de aprendizaje.

Aunque la investigación de diseño resulta ser una herramienta útil para tratar estas cuestiones también es cierto que estos estudios se enfrentan a una serie de desafíos:

- Dificultades procedentes de la complejidad de situaciones de aprendizaje reales en la que están implicadas múltiples variables que pueden afectar el éxito del diseño en la práctica.

- Gran cantidad de información procedente de la necesidad de combinar técnicas de recogida y análisis tanto cualitativos como cuantitativos. Los estudios de diseño concretamente generan una representación compresiva del proceso de diseño e intervención. Esta documentación implica extensos registros en video y otros medios de la actividad de alumnos y maestros, complementados con otros materiales textuales, entrevistas y cuestionarios. Esta documentación sirve de base para el análisis retrospectivo de lo que sucedió durante el estudio. El desafío central de este análisis retrospectivo es proceder a través de ese extenso conjunto de datos longitudinales, para comunicar y llegar a conclusiones rigurosas y empíricamente basadas

- La dificultad de delimitar el origen del conocimiento que los investigadores adquieren a lo largo del proceso de investigación, debido al diálogo continuo que se suscita entre la teoría y la práctica (Molina et al., 2011).

Estos desafíos suponen la necesidad de especificar todos los procesos que se han seguido para elaborar, poner en marcha y analizar la experimentación, con el fin de aportar interpretaciones y conclusiones fiables.

5.1.3 Criterios de Evaluación de los Estudios de Diseño

La validez y la fiabilidad, entre otras, son condiciones necesarias de toda investigación; sin embargo, como afirman Barab y Kirshner (2001), en los experimentos de diseño, estas cualidades se tratan de forma notoriamente diferente a como se hace en la investigación experimental. Molina et al. (2011) señalan que autores tales como Cobb, Gravemeijer o Confrey han abordado cuestiones relacionadas con la evaluación de la calidad de los estudios de diseño entre las cuales están la fiabilidad, replicabilidad, capacidad de generalización y utilidad.

En los estudios de diseño la fiabilidad se evalúa con base en la medida en la que el análisis ha sido sistemático, los criterios asumidos en el análisis son explícitos, las argumentaciones o conclusiones finales proceden de razones que se han ido construyendo a lo largo del estudio y si el análisis ha sido criticado por otros investigadores (Molina et al., 2011). Las condiciones indicadas fundamentan la generación de interpretaciones y conclusiones consistentes en relación con la información recogida sobre el objeto de estudio en la experimentación.

La replicabilidad se refiere a la posibilidad de repetir una investigación original, si se produce un resultado positivo, es decir, similar al encontrado inicialmente se incrementa la confianza depositada en la investigación original; por el contrario si se produce un resultado negativo, sugiere o bien que los resultados iniciales se produjeron por azar (efecto del azar) o bien ha habido una falta de control de variables que han contaminado el trabajo original (efecto del control).

De acuerdo con Molina et al. (2011) en la investigación de diseño la replicabilidad consiste en:

> *Los aspectos del proceso de aprendizaje estudiado que pueden repetirse potencialmente en otros contextos o situaciones. Realizando estudios posteriores que utilicen el modelo obtenido como material conceptual a ser reorganizado, el modelo elaborado será sustituido por otro más avanzado.* (p. 79)

Este proceso contribuye a la comprobación de los resultados del experimento de diseño realizado inicialmente y al desarrollo del modelo teórico, mismo que podría ser aplicado en otras circunstancias, incidiendo en un aumento de la validez externa del estudio, es decir en la capacidad de generalización del mismo.

La validez externa o capacidad de generalización de una investigación se refiere a la extensión y forma en que los resultados de un experimento pueden ser generalizados a diferentes sujetos, poblaciones, lugares, experimentadores. Sin embargo en la investigación de diseño:

> *La capacidad de generalización no está condicionada por la representatividad de la muestra, sino íntimamente relacionada con la replicabilidad e implica que otros*

> *serán capaces de usar los productos que deriven de él para promover aprendizaje en otros contextos.* (Molina et al., 2011, p. 79)

Finalmente otro criterio relacionado con la evaluación de este tipo de estudios que ha sido considerado por los investigadores y reseñado por los investigadores citados se refiere a la utilidad. En consecuencia, es fundamentar explicitar las aportaciones e implicaciones de la investigación en la enseñanza. Este aspecto incide indudablemente en la capacidad de estos estudios para acercar la teoría y la práctica.

5.1.4 Experimentos del Desarrollo del Conocimiento del Profesor[64] (Teacher Development Experiment, TDE)

La metodología TDE es una adaptación y extensión de la metodología de los experimentos de enseñanza y de los experimentos con "todo el grupo". Sin embargo esta metodología, a diferencia de las otras dos, considera la posibilidad de estudiar distintos tipos de conocimientos, no sólo el de las matemáticas.

Según Simon (2000) el término *teacher development experiment* (TDE) es un intento de distinguirlo de los experimentos de enseñanza aunque reconoce que estos últimos son un elemento central de los estudios TDE. Estudian el desarrollo del conocimiento del profesor en formación o en servicio y se fundamenta en los principios de los experimentos de enseñanza (Cobb y Steffe, 1983; Steffe y Thompson, 2000), esto significa que un equipo de investigadores estudia el desarrollo del conocimiento a la vez que lo promueve como parte de un ciclo continuo de análisis e intervención. Las investigaciones TDE también contemplan el estudio de casos.

El profesor-investigador promueve el desarrollo del conocimiento a través de actividades preparadas para el grupo. En todas las sesiones es preciso recoger la información mediante grabaciones de audio y (o) video. Después de las intervenciones el profesor-investigador se encuentra con otros investigadores para analizar la sesión previa, generar y modificar modelos del desarrollo del conocimiento del profesor y planear las siguientes intervenciones de enseñanza.

Mientras que, de modo general, los experimentos de enseñanza se han centrado en el desarrollo del conocimiento matemático, la metodología TDE ha sido usada para generar modelos tanto del desarrollo del conocimiento didáctico como matemático, pues se reconoce que ambos tipos de conocimiento están interrelacionados. Así que los experimentos de enseñanza TDE utilizan la estructura de sus predecesores (*teaching experiments y whole-class experiments*) pero amplían y modifican las áreas de concentración. Incluso en los cursos de matemáticas para profesores, la concentración es más amplia que en los experimentos de enseñanza con "todo el grupo" realizados por Cobb.

[64] *Desarrollo del Profesor* (Teacher Development) se refiere a los cambios en los conocimientos, creencias, disposiciones y habilidades de los profesores en activo o en formación que sustentan la capacidad de implementar exitosamente los principios de la Educación Matemática (Simon, 2000). En nuestro estudio hemos adaptado el término y nos referimos a él como *Desarrollo del Conocimiento del Profesor*.

En síntesis, la metodología TDE es una adaptación y extensión de dos tipos de estudios: los experimentos de enseñanza (*teaching experiments*) y los experimentos de enseñanza de "todo el grupo" (*whole-class teaching experiments*). A continuación se detallan las contribuciones de cada uno a la metodología TDE.

5.1.4.1 Contribuciones de los Experimentos de Enseñanza

La metodología de los experimentos de enseñanza se ha originado con la intención de comprender el desarrollo de los conceptos en los niños, en áreas particulares de la matemática (Simon, 2000). De forma general, un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000, citados en Molina et al., 2011). A continuación presentamos las características centrales de los experimentos de enseñanza, mismas que también están implicadas en los experimentos sobre el desarrollo del conocimiento del profesor.

El profesor-investigador: Los experimentos de enseñanza han resultado ser una alternativa a los paradigmas de investigación en los cuales los investigadores son observadores o cuantificadores de situaciones "naturales" o "experimentales". El doble papel de investigador y profesor proporciona una oportunidad para que el investigador desarrolle conocimiento a través de múltiples iteraciones de un ciclo de reflexión-interacción. Esta ruptura de la diferenciación entre docente e investigador está motivada por el propósito de los investigadores de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos (Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000)

Como parte del ciclo de reflexión-interacción el investigador aplica a las interacciones con los estudiantes su conocimiento personal, el conocimiento compartido por la comunidad de investigación incluyendo conjeturas actuales sobre el fenómeno estudiado. La intuición y patrones de acción del investigador, los cuales no son parte de su conocimiento explícito también contribuyen a la interacción. La interpretación de las interacciones por parte del investigador respalda algunos aspectos de su conocimiento y desafía otros, dando como resultado la modificación de ese conocimiento. De modo que este ciclo es esencial en los experimentos de enseñanza pues permite a los investigadores mejorar su conocimiento acerca de cómo aprenden los estudiantes. En general, se espera que todos los participantes del experimento construyan conocimiento (Molina et al., 2011).

Análisis continuos y retrospectivos: Los experimentos de enseñanza implican dos niveles de análisis de datos, los análisis continuos que ocurren durante y entre las sesiones con los estudiantes, y el análisis retrospectivo que se enfoca en el conjunto total de las sesiones. Cada nivel de análisis sirve al investigador de forma particular.

Los análisis continuos son la base de las decisiones que se toman en la planificación y desarrollo de cada sesión con los estudiantes, permiten probar las hipótesis y promover el desarrollo. Un aspecto clave de estos análisis es la generación y modificación, por parte del investigador, de los modelos relativos al conocimiento, acciones y disposiciones de los estudiantes. El análisis retrospectivo implica una reexaminación de un gran cuerpo de información. Éste implica una revisión estructurada de las grabaciones del experimento de enseñanza, el propósito es desarrollar modelos explicativos acerca del desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes.

Construcción del modelo: El propósito del experimento de enseñanza es la elaboración de un modelo explicativo del desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes. Estos modelos explicativos empiezan a ser esbozados durante los análisis continuos, sin embargo es durante el análisis retrospectivo cuando son articulados con más detalle. De acuerdo con Molina et al. (2011) el objetivo último del experimento de enseñanza es:

> *Elaborar un modelo del aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos, en relación con un contenido específico, entendiendo este aprendizaje como resultado de la manera de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente.* (p.79)

Generación y prueba de hipótesis: El experimento de enseñanza conlleva ciclos continuados de generación y prueba de hipótesis. Las conjeturas actuales de los investigadores guían sus interacciones con los estudiantes. Tales interacciones proporcionan información que respalda o genera modificaciones de esas suposiciones y también promueve la elaboración de nuevas conjeturas. Las hipótesis iniciales del equipo investigador guían el desarrollo del plan inicial de investigación.

Grabación: La grabación de las sesiones con los estudiantes usualmente se complementa con la videograbación. La transcripción de las grabaciones en audio y video son esenciales en el análisis posterior. Frecuentemente, las grabaciones se escuchan o se miran en medio de las sesiones con el objetivo de apoyar los análisis continuados y la toma de decisiones.

5.1.4.2 Fases de los Experimentos de Enseñanza

Cobb y Gravemeijer (citados en Molina et al., 2011) distinguen tres fases en el desarrollo de los experimentos de enseñanza: preparación del experimento, la experimentación y el análisis retrospectivo de los datos. En la Tabla 5.2 presentamos las acciones implicadas en cada una de las fases de los experimentos de enseñanza que han sido recogidas por Molina et al. (2011).

Tabla 5.2. *Acciones contempladas en cada fase de los experimentos de enseñanza*

Fase I. Preparación de la Experimentación
A partir de una completa búsqueda bibliográfica y la experiencia de los investigadores: - Definir el problema de investigación - Justificar el interés y la necesidad de realizar este estudio - Elegir, justificar la elección y describir a los sujetos participantes en el estudio - Diseñar, en líneas generales, en que va a consistir la secuencia de intervenciones en el aula y justificar dicho diseño - Identificar metodologías de enseñanza adecuadas para el contenido a abordar en el aula según los objetivos de investigación planteados

Tabla 5.2. *Acciones contempladas en cada fase de los experimentos de enseñanza*

- Elaborar hipótesis de investigación, relativas al problema en estudio, que puedan ser contrastadas a partir de las intervenciones en el aula - Identificar los objetivos concretos de la intervención a realizar - Diseñar la siguiente intervención teniendo en cuenta: el análisis de los datos ya recogidos, la búsqueda bibliográfica realizada, los conocimientos previos de los alumnos y el trabajo realizado en el aula fuera de las sesiones de recogida de datos del estudio - Justificar el diseño y la temporalización de la intervención, en especial las decisiones tomadas a partir del análisis de los datos ya recogidos - Elaborar hipótesis sobre los resultados a obtener en la intervención a realizar. Intentar prever las posibles reacciones de los alumnos y las dificultades que pueden presentarse
II Fase. Experimentación y Análisis Preliminar
- Realizar una recogida de datos exhaustiva mediante grabaciones en video o en audio, recogida de las hojas de trabajo de los alumnos, toma de notas por un observador, etc. - Modificar de forma justificada el diseño de la intervención si se considera conveniente de acuerdo con los objetivos concretos de la intervención - El investigador-docente, si lo considera necesario, tomará notas sobre la intervención que complementen y ayuden a comprender los datos recogidos - Analizar los datos recogidos en el aula - Contrastar los resultados con las hipótesis previamente elaboradas sobre esa intervención y, en su caso, reformular alguna de las hipótesis a tener en cuenta en futuras intervenciones.
III Fase. Análisis retrospectivo de las sesiones
- Realizar la trascripción de las grabaciones realizadas - Organizar los datos recogidos - Analizar todos los datos recogidos de forma conjunta (utilizar la información obtenida en la búsqueda bibliográfica previamente realizada para guiar dicho análisis) - Dar respuesta, si es posible, a los objetivos del estudio - Contrastar los resultados con los obtenidos en otros estudios - Elaborar un modelo que describa el aprendizaje o desarrollo de los alumnos, de los docentes o de las tareas realizadas, de los cambios que son considerados aprendizaje o desarrollo de los alumnos a lo largo del experimento de enseñanza, entendiendo éstos como ocasionados por las maneras de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente - Si es necesario se ampliará la búsqueda bibliográfica realizada

5.1.4.3 Contribuciones de los Experimentos de Enseñanza de "Todo el Grupo"

En los trabajos de Cobb (2000), Cobb y Yackel (1996) se ha propuesto una metodología, basada en los experimentos de enseñanza, para estudiar el aprendizaje de las matemáticas en las aulas. A continuación se presentan algunas características de la metodología de los experimentos de enseñanza de "todo el grupo" que son incorporadas a los experimentos TDE.

Perspectiva emergente: Esta perspectiva social y cognitiva proporciona los fundamentos teóricos de cada aspecto de la metodología TDE (Cobb, 2000). Desde este enfoque el aprendizaje puede visualizarse como un proceso cognitivo del individuo y como un proceso social de un grupo. La relación básica, entre las actividades constructivas de los estudiantes y el proceso social en el cual ellos participan, es reflexiva y no se atribuye algún tipo de preferencia entre ambos procesos. En esta perspectiva se considera que cuando los estudiantes reorganizan las actividades matemáticas individualmente contribuyen al desarrollo de las prácticas matemáticas de la clase. A la inversa, las formas en las cuales hacen esas reorganizaciones están determinadas por su participación en el desarrollo de las prácticas de clase (Cobb, 2000)

De este modo, esta perspectiva evita el debate sobre si el aprendizaje es principalmente individual o social. En su lugar, se afirma la utilidad de coordinar el análisis que resulta al considerar cada uno de estos aspectos.

Marco para el análisis: Cobb (2000) ha desarrollado un marco interpretativo para analizar la actividad individual y colectiva en el aula. El marco enfatiza la complementariedad de un foco sobre las normas y prácticas de la clase con un foco sobre los individuos, en relación con los roles de éstos (profesor-estudiantes) y las concepciones que tienen sobre el contenido matemático. Tal investigación implica poner atención a la actividad individual, de pequeños equipos, de todo el grupo, sobre el contenido y sobre las conversaciones explícitas de los participantes en relación con el aprendizaje.

Enmarcar casos: Cobb sugiere una forma útil de pensar en relación con los productos de un experimento de "todo el grupo". Uno de los propósitos principales de este análisis es ubicar los eventos de la clase en un contexto teórico más amplio, enmarcándolos como casos particulares de un fenómeno más global. Esta perspectiva sugiere una posible vía para contrastar el análisis retrospectivo con el análisis "entre sesiones".

Según Simon (2000) la idea de "enmarcar casos" es un constructo frecuentemente usado en muchos tipos de investigaciones cualitativas. Se sugiere que los investigadores examinan la situación particular que han documentado para identificar situaciones en las cuales desarrollar una explicación teórica que pueda orientar cuestiones relevantes en la investigación en educación matemática y (o) en las comunidades de enseñanza.

5.1.4.4 Análisis de los Experimentos de Enseñanza TDE

Como consecuencia del carácter cíclico de los estudios de diseño se hacen necesarios dos tipos de análisis de datos: análisis continuados que se realizan después de cada sesión y un análisis final retrospectivo de todos los datos recogidos en el proceso de investigación. Las cuestiones a las que da respuesta el "análisis entre sesiones" son típicamente de carácter práctico y están directamente relacionadas con el objetivo de promover el aprendizaje de los estudiantes participantes. Al finalizar la experimentación se lleva a cabo el análisis retrospectivo de la intervención de enseñanza (Molina et al., 2011). Simon (2000) sostiene que las cuestiones que emergen como significativas en los análisis continuos que se realizan después de cada sesión llegan a constituirse en focos del análisis retrospectivo.

La metodología TDE se inclina por proporcionar una perspectiva dual sobre el desarrollo del conocimiento del profesor coordinando análisis sobre el conocimiento individual y grupal. Delimita inicialmente este marco en términos muy generales, sugiriendo que el análisis del desarrollo del conocimiento grupal se realiza con base en la información recogida durante la experiencia colectiva, análisis que supone estudiar las concepciones de los estudiantes en relación con el contenido matemático así como también el desarrollo de las prácticas sociales. El análisis del conocimiento individual se lleva a cabo mediante el estudio de casos, el cual ha de considerar el contexto social dentro del cual ocurre ha tenido lugar el desarrollo del conocimiento individual.

Las aportaciones iniciales de este investigador, en relación con la elaboración de un marco de referencia para el análisis de la información del experimento de enseñanza, han sufrido modificaciones que han incidido en el progreso de su propuesta. En los orígenes del experimento de enseñanza sobre el desarrollo del conocimiento del profesor Simon consideró la perspectiva emergente (Cobb, 2000) como marco de referencia para el análisis de la información.

La perspectiva emergente (Cobb y Yackel, 1996) se basa en la coordinación de las perspectivas social y cognitiva. Ésta fue desarrollada para caracterizar el aprendizaje de las matemáticas en el aula. En el caso de las teorías social y cognitiva, los investigadores han señalado la complementariedad de las mismas y arguyen que cada una tiene sus fortalezas y limitaciones que las hace útil en algunos trabajos y menos útil en otros (Simon, 2012). Una perspectiva social es utilizada para caracterizar el aprendizaje cuando la unidad de análisis es la clase (incluyendo al profesor). Una perspectiva cognitiva es utilizada cuando la unidad de análisis son estudiantes individuales. El uso de diferentes herramientas teóricas para analizar esas distintas unidades de análisis proporciona a la teoría una cierta elegancia y claridad (Simon, 2012). El análisis de observaciones de clases se concentra en la búsqueda de normas emergentes –sociales y sociomatemáticas– y la identificación de una secuencia de prácticas matemáticas desarrolladas a lo largo del tiempo. Esos análisis son coordinados con análisis de datos procedentes de entrevistas a estudiantes individuales. Los datos de la entrevista son analizados usando una perspectiva constructivista, identificando las concepciones de los estudiantes en relación con diferentes aspectos del experimento de diseño realizado (Cobb, 2003).

Sin embargo con el propósito de obtener descripciones más finas sobre los conocimientos matemáticos puestos de manifiesto por los futuros profesores Simon (2012) y sus colaboradores han trazado una nueva manera de visualizar el análisis de la información procedente de los experimentos de enseñanza TDE.

Movidos por el interés en comprender el proceso que tiene lugar cuando los futuros profesores de matemáticas van de una práctica matemática a otra se han planteado ¿qué herramientas teóricas pueden ser utilizadas para este propósito? Considerando esta cuestión ha empezado por tomar en cuenta teorías que permitan abordar la siguiente distinción: lo que se usa para mirar (*el lente teórico*) y lo que se mira (*un individuo o un grupo*). Esta distinción les ha permitido ir más allá en el uso tradicional de teorías sociales para estudiar datos de colectivos (grupos) y teorías cognitivas para estudiar datos individuales. Estos investigadores han descrito su propuesta de análisis en una matriz 2x2 (Tabla 5.3).

Tabla 5.3. *Propuesta de análisis según sujeto y naturaleza del mismo*

Análisis Cognitivo		Análisis Social
	Individual	
Análisis cognitivo individual		Análisis social del individuo
	Grupal	
Análisis cognitivo del grupo		Análisis social del grupo

Nota: Tabla adaptada de Simon (2012).

De acuerdo con Simon (2012) el análisis cognitivo de un individuo (cuadrante superior izquierdo) y el análisis social del grupo (cuadrante inferior derecho) requieren de poca elaboración, ya que es común para los investigadores realizar análisis cognitivos del pensamiento matemático de los individuos (ej. Constructivismo) y análisis sociales de la comunicación matemática dada en la discusión en pequeños grupos o en todo el grupo (ej. Teoría sociocultural, Interaccionismo simbólico). Sin embargo los otros dos análisis: análisis social de un individuo (cuadrante superior derecho) y análisis cognitivo del grupo (cuadrante inferior izquierdo) ameritan cierta discusión.

Análisis social de un individuo: En los análisis caracterizados por este cuadrante, el investigador considera que la actividad de un estudiante trabajando por si solo es influenciado por las normas y prácticas de su clase de matemáticas, el lenguaje que utiliza, las prácticas culturales de su familia, etc. Tales explicaciones sociales pueden ser útiles para comprender aspectos de la actividad y aprendizaje del individuo.

Análisis cognitivo de un grupo: El argumento para el análisis cognitivo de la actividad grupal es paralelo al planteado para el análisis social de la acción individual; el análisis cognitivo usa conocimientos y constructos útiles para ampliar lo que se informa y para generar explicaciones útiles relacionados con los datos. Mientras que, desde una perspectiva social, una conversación podría ser vista como una negociación de significados o como un aumento de la participación en las prácticas del grupo, ésta ha resultado ser ventajosa para ver cómo dos o más estudiantes con diferentes concepciones intentan comprender las ideas de otros.

Según Simon en el contexto de las teorías orientadas cognitivamente, existe una extensa base de conocimiento sobre distinciones de las concepciones de los estudiantes; él y sus colaboradores han utilizado análisis cognitivos para comprender el proceso de aprendizaje del grupo, haciendo uso de resultados empíricos obtenidos en trabajos previos en relación con las concepciones de los individuos sobre contenidos y procesos matemáticos (Simon y Blume, 1996; Simon, Tzur, Heinz, Kinzel y Smith, 2000).

5.2 Descripción del Estudio

Nuestro estudio es un experimento sobre el desarrollo del conocimiento del profesor Simon (2000) "*Teacher Development Experiment*", los principios del mismo se han descrito en el Apartado 5.1.4 de este capítulo. Consideramos que el estudio tiene un carácter exploratorio dado que aunque la razón y la proporción se ha estudiado ampliamente desde hace varias décadas, tales investigaciones se han centrado en las actuaciones de niños o estudiantes de secundaria y no en maestros en formación, en este sentido compartimos la postura de Lobato, Orrill, Druken, y Jacobson (2011) quienes en relación con los maestros en formación señalan "se conoce muy poco acerca del conocimiento especializado, del conocimiento común del contenido y del conocimiento del contenido y los estudiantes en el dominio del razonamiento proporcional" (p. 4). El estudio es descriptivo debido a nuestro interés por describir e interpretar lo que ha sucedido en todo el proceso del experimento (Cohen y Manion, 2002).

Los objetivos de nuestro experimento de enseñanza han sido recoger información, en un contexto natural de formación, relativa a las actuaciones que manifiestan futuros maestros de primaria en relación con distintos componentes de la razón y la proporcionalidad, cuando resuelven tareas matemáticas que implican situaciones del entorno en un ambiente de trabajo colaborativo. Este propósito subyace al fin último del experimento que es elaborar un modelo descriptivo y explicativo del conocimiento matemático puesto de manifiesto por estos estudiantes en relación con los contenidos matemáticos indicados. El experimento se ha diseñado con el propósito de promover la comprensión de tales nociones y estimular el desarrollo de la competencia matemática de los futuros maestros de primaria.

5.2.1 Participantes

En este estudio han participado estudiantes de magisterio de dos grupos naturales, grupo 1 y grupo 2, que de ahora en adelante denominamos como G1 y G2, que cursaron la asignatura Matemáticas y su Didáctica de la Diplomatura en Educación Primaria de la Universidad de Granada, durante el curso académico 2009-2010. Se contó en total con la participación de 85 estudiantes del G1 y con 42 estudiantes del G2, no todos los estudiantes estuvieron presentes en las cuatro sesiones (Tabla 5.4).

Se decidió trabajar con dos grupos debido a que el experimento de enseñanza requiere de un proceso de puesta en práctica, análisis y rediseño, de modo que sea posible detectar cuestiones que contribuyan a la mejora del mismo. En este ciclo no sólo se tomaron decisiones entre sesión y sesión, sino que se tomaron decisiones en un mismo día entre la puesta en práctica con el G1 y la experimentación con el G2. Subrayamos que la decisión de trabajar con dos grupos no obedece a un interés de realizar un estudio comparativo entre ambos grupos, ni de utilizar un grupo control como se hace en la perspectiva de investigación experimental tradicional, sino de obtener la mayor cantidad de información.

Cada uno de los estudiantes se identificó mediante una etiqueta formada por una de las letras (A, B, C, D ó F) acompañada de un número del 1 hasta el 26 para los estudiantes del G1, mientras que los números asociados a los estudiantes del G2 van del 1 al 14 (Anexo J).

A partir de la primera intervención los equipos se formaron bajo la consigna de agruparse con los mismos compañeros de las clases prácticas de la asignatura, no obstante las irregularidades en la asistencia de estos estudiantes es una circunstancia del entorno en que se ha investigado que no es posible controlar. Debido a lo anterior en las sesiones se formaron distinta cantidad de equipos de trabajo colaborativo.

Los estudiantes que participaron en los equipos conformados en las cuatro sesiones no fueron, en todos los casos, los mismos. No obstante, hubo cierto grado de permanencia a partir del cual se identificó a los equipos, éstos han sido designados mediante la letra E y un número. En el G1 los códigos van del E1 hasta el E20, y en el G2 van del E1 hasta el E12. En el Anexo J se muestran los equipos e integrantes, de cada grupo, que participaron en las sesiones. En la Tabla 5.4 se presenta el número de estudiantes y número de equipos que participó en cada sesión.

Tabla 5.4. *Número de estudiantes y equipos participantes en cada sesión*

	Sesión 1		**Sesión 2**		**Sesión 3**		**Sesión 4**	
	G1	G2	G1	G2	G1	G2	G1	G2
Número de Estudiantes	47	27	21	25	60	28	65	39
Número de Equipos	13	8	5	6	15	7	16	9

5.2.2 Contexto del Estudio

La experimentación se ha desarrollado en el contexto de la asignatura Matemáticas y su Didáctica[65] del plan antiguo de la diplomatura en educación primaria, era una asignatura troncal de 9 créditos divididos de igual manera en créditos prácticos y teóricos. Ha dado lugar a la asignatura “Bases Matemáticas para la Educación Primaria” en el actual plan de formación del grado de maestro en educación primaria.

En la guía docente de la asignatura correspondiente al curso 2009-2010 se afirma que ésta se centra en el estudio de los contenidos matemáticas de la educación primaria haciendo al mismo tiempo consideraciones sobre su enseñanza desde la perspectiva de los propios contenidos, la fenomenología y el empleo recursos didácticos. Una de las competencias específicas contempladas indica que los estudiantes de magisterio deben dominar los conceptos, destrezas, algoritmos y estrategias básicas de las matemáticas de educación primaria y el primer ciclo de secundaria. Se pretende que los estudiantes lleguen a conocer las matemáticas básicas que permitan desarrollar su futura labor profesional como docente en la educación primaria.

Los contenidos de la asignatura se organizan en seis temas, a saber: (1) el número natural (sistemas de numeración), (2) aritmética, (3) números racionales, (4) geometría, (5) magnitudes y su medida, y por último (6) introducción a la probabilidad y estadística.

[65] Ver Anexo A

La programación incluye una descripción de la metodología de los créditos prácticos y teóricos. En las clases de teoría el profesor es el encargado de presentar, orientar y sintetizar los temas, además es quien guía las reflexiones de los estudiantes, en estas sesiones se entrega a los alumnos unas guías de trabajo y hojas de actividades para cada tema. En las clases prácticas los estudiantes resuelven los cuadernos de prácticas trabajando en grupos utilizando además materiales concretos, bajo la supervisión del profesor. En la programación de la asignatura se indica que el trabajo en los créditos prácticos priorizará la actuación de los alumnos, primero individual, y luego en grupos, sin embargo en la realidad los estudiantes trabajan únicamente en grupos.

5.2.3 Principios que Fundamentan el Experimento

La elaboración y puesta en práctica del experimento se basan en dos principios teóricos generales los cuales sustentan la elección de las tareas matemáticas y la toma de decisiones en relación con el tipo de metodología de trabajo en el aula, a saber: (1) el enfoque funcional del currículo de matemáticas ligado a la noción de competencia matemática, y (2) los principios del aprendizaje desde una perspectiva socio constructivista.

El enfoque funcional del currículo de matemáticas postula que el conocimiento de las matemáticas permite modelizar situaciones reales y está orientado a la resolución de cuestiones y problemas en diferentes contextos (Rico y Lupiáñez, 2008).

Desde este enfoque los conocimientos matemáticos sirven para dar respuesta a problemas situados en distintos entornos de la vida de las personas. El énfasis de este enfoque se pone en cómo los estudiantes usan los conocimientos matemáticos en esas situaciones. Según los autores citados el modelo funcional sobre el aprendizaje de las matemáticas supone: (a) unas tareas que implican situaciones del entorno, (b) unos conocimientos matemáticos, y (c) una persona que actúa sobre tales situaciones usando sus conocimientos matemáticos.

En nuestro estudio hemos adoptado la noción de competencia matemática expuesta en Rico y Lupiáñez (2008) quienes sugieren que:

> *Las competencias matemáticas expresan expectativas de aprendizaje relativas al conocimiento matemático en acción, ésta consiste en utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible, consiste en un saber hacer en la práctica mediante herramientas matemáticas, hace énfasis especial en aspectos sociales como la comunicación y la argumentación, se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen a una amplia variedad de situaciones provenientes de otros campos y de la vida.* (p. 214)

Los autores citados consideran que esta definición se ajusta a la orientación funcional del currículo señalando que cuando los estudiantes en la resolución de las tareas aplican sus conocimientos matemáticos ponen de manifiesto su competencia. Desde este punto de vista la resolución de problemas abiertos y situados en el entorno constituye el medio idóneo a través del cual fomentar el desarrollo de la competencia matemática. La actividad matemática que el estudio PISA promueve se basa en la matematización, proceso que se identifica con la resolución de problemas (Rico y Lupiáñez, 2008).

Parafraseando la definición de alfabetización o competencia matemática del proyecto PISA y centrándola en los contenidos razón y proporcionalidad, el objetivo instruccional del experimento de enseñanza realizado es fomentar, en el trabajo en el aula sobre razón y proporcionalidad, las capacidades de pensar y razonar, argumentar, comunicar, resolver problemas, representar ideas sobre razón y proporcionalidad, utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones sobre dichas nociones.

El diseño de nuestro experimento se sitúa en el marco curricular basado en la noción de competencia matemática propuesto en el estudio PISA (OCDE, 2003, 2005; Rico y Lupiáñez, 2008). Se ha utilizado el marco de este estudio debido a:

- La conexión que guarda con el planteamiento funcional del currículo de matemáticas lo cual responde a nuestro interés de elaborar una propuesta de trabajo en el aula que estimulara el desarrollo de la competencia matemática.
- Esta decisión obedece a la limitada descripción de la competencia matemática que se desprende de los documentos curriculares revisados correspondientes al nivel y asignatura en la que tendrá lugar el desarrollo del experimento. Y el marco del estudio ofrece una descripción de la competencia matemática y sus componentes.
- El impacto de la noción de competencia planteada por el estudio PISA en la revisión y reorganización de los currículos de matemáticas escolares en la mayoría de países de la OCDE (Rico y Lupiáñez, 2008).

Esta perspectiva sobre el aprendizaje de las matemáticas nos ha conducido a seleccionar tareas matemáticas abiertas en las cuales las situaciones del entorno consideradas en las mismas impliquen las nociones de razón y proporcionalidad. El adjetivo “abierta” no sólo hace referencia a que sean de desarrollo sino que éstas han de promover la discusión y aplicación de conceptos, procedimientos y representaciones vinculadas a la razón y la proporcionalidad.

La intencionalidad de fomentar las competencias matemáticas señaladas exigió una metodología de trabajo en el aula adecuada a este fin. Optamos por una adaptación de la metodología ACODESA la cual está basada en el aprendizaje colaborativo, el debate científico y la auto-reflexión. Tiene un enfoque de tipo socio-constructivista (Hitt, 2007). El trabajo se realiza sobre tareas abiertas, complejas o no tradicionales que favorecen la reflexión y el debate, lo cual responde a nuestro interés por estudiar cómo se reelabora un concepto a partir de la experiencia colaborativa. En el Capítulo 4, apartado 4.3.2, detallamos esta metodología de trabajo en el aula.

5.2.4 Fases del Experimento Realizado

En la ejecución de los experimentos de enseñanza hemos seguido las tres fases propuestas por Cobb y Gravemeijer (2008). Las dos primeras son la *preparación* del experimento y la *experimentación*, ambas fases están inmersas en una serie de ciclos iterativos de puesta en práctica, análisis, rediseño y reformulación de conjeturas, luego la tercera fase corresponde a la ejecución del *análisis* retrospectivo del conjunto de los datos.

Preparación del Experimento

La primera fase del experimento comprende todos los elementos de la investigación necesarios previa a la intervención en el aula, desde la definición del problema y de los objetivos de investigación al diseño concreto de cada una de las sesiones. En esta fase se realizaron distintas acciones, entre las que están: (a) una aproximación al análisis de contenido, cognitivo y de instrucción de la razón y la proporcionalidad (Gómez, 2009; Lupiáñez y Rico, 2008), (b) concreción escrita del diseño, de la secuencia de intervenciones en el aula y de su temporalización, (c) negociación con los profesores de la asignatura y, (d) el registro de las decisiones tomadas en el proceso anterior y su justificación. La planificación de cómo se llevaría a cabo el análisis de las actuaciones de los estudiantes se describe en el apartado relativo a la III Fase del experimento referente al análisis retrospectivo del mismo.

En el Capítulo 4 "*Análisis didáctico de la razón y la proporcionalidad*" presentamos la revisión que hemos realizado sobre las tres dimensiones del significado de las nociones matemáticas en cuestión: la referencia formal dada por la estructura conceptual, los sistemas de representación que se utilizan, y el sentido con que se usan los diversos conceptos o fenomenología. Esta delimitación nos ha permitido identificar distintos acercamientos a las definiciones de razón, proporción y proporcionalidad; detectar y clasificar conocimientos conceptuales y procedimentales relativos a los contenidos, identificar los focos prioritarios sobre los cuales se centra el aprendizaje objeto de la experimentación, las representaciones mediante las cuales tales nociones se ponen de manifiesto y las situaciones en las cuales están implicadas.

En el Capítulo 6 describimos con detalle la planificación de cada una de las sesiones. Sin embargo, adelantamos que la programación de las mismas se describió en términos de: objetivos de investigación para la sesión, expectativas de aprendizaje del estudiante, contenidos instruccionales y un análisis detallado de las tareas que se complementó con el enunciado de conjeturas relativas al posible desempeño de los estudiantes en la resolución de las mismas así como de errores potenciales asociados a la tarea.

Experimentación

La experimentación se realizó durante cuatro sesiones de clase del curso académico 2009-2010 de dos grupos naturales de formación inicial de maestros de educación primaria (G1 y G2). La recogida de datos se realizó la asignatura Matemáticas y su Didáctica. En la Tabla 5.5 presentamos la distribución temporal y duración de cada una de las sesiones, la cantidad de estudiantes que participaron, las tareas desarrolladas y los focos de contenido contemplados en las tareas. Los profesores de la asignatura estuvieron presentes en todas las sesiones.

En el Capítulo 6 se describe el desarrollo de cada sesión en los dos grupos así como las observaciones derivadas del análisis preliminar de los datos y las decisiones que se tomaron después de cada sesión.

Tabla 5.5. *Características generales de la experimentación*

	G1	G2	Tareas	Foco Prioritario
1ª Sesión 25-01-10 (2 h)	48	27	Fracción, razón y porcentaje Preferencia en el refresco de cola	F1. Razón: significados y usos
2ª Sesión 28-01-10 (1h)	21	25	Los niveles de CO_2	F4. Porcentajes: significados y usos
3ª Sesión 19-04-10 (2h)	62	28	Crecimiento de bacterias Permanencia activa de un fármaco	F2. Relación de proporcionalidad: caracterización y representaciones
4ª Sesión 17-05-10 (2h)	67	39	Compartiendo pizza El palacio real de la Alhambra	F1. Razón: significados y usos F3. Proporcionalidad geométrica

Como se ha descrito en el análisis de instrucción del Capítulo 4, en la experimentación aplicamos una adaptación de la metodología ACODESA (Hitt, 2007; Hitt, Morasse y González, 2008, Hitt y Morasse, 2009; Hitt y Cortés, 2009; Páez, 2004; Passaro, 2007). Esta metodología se basa en el aprendizaje colaborativo, el debate científico y la auto-reflexión. Tiene un enfoque de tipo socio-constructivista. Entre las características de esta metodología que han respaldado nuestra elección por la misma están: la inclusión de tareas abiertas, complejas o no tradicionales que promuevan la reflexión y el debate, el interés por estudiar la evolución en la resolución de la tarea y en general cómo se reelabora un concepto a partir de la experiencia colaborativa. La adaptación de la metodología se ajusta a la posibilidad temporal de desarrollo de la experimentación, los estudiantes de magisterio tendrían la oportunidad de observar una metodología de enseñanza adicional, ampliándose las metodologías de aula observadas en su formación.

Análisis entre Sesiones

Como consecuencia del carácter cíclico de los estudios de diseño se hacen necesarios dos tipos de análisis de datos: análisis continuados que se realizan después de cada sesión y un análisis final retrospectivo de todos los datos recogidos en el proceso de investigación. Las cuestiones a las que da respuesta el "análisis entre sesiones" son típicamente de carácter práctico y están directamente relacionadas con el objetivo de promover el aprendizaje de los estudiantes participantes. El análisis de los datos recogidos en cada una de las sesiones se hizo según las acciones descritas en la Figura

5.2. A partir de la información obtenida se derivaron una serie de decisiones orientadas a la reelaboración del diseño y la mejora de la siguiente sesión.

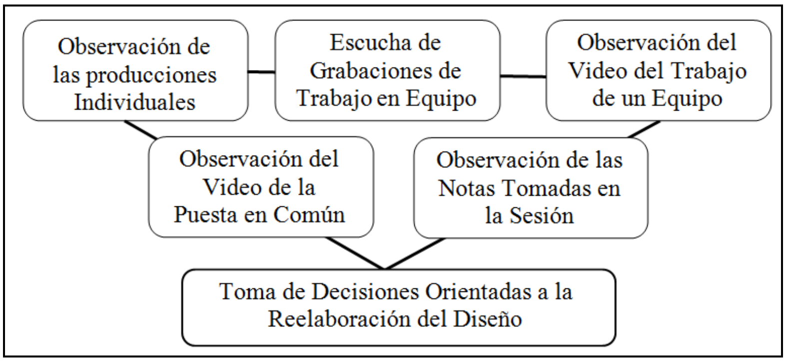


Figura 5.2. Acciones seguidas en el análisis entre sesiones

Después de la experimentación con el G1 se tomaron decisiones para llevar a cabo la puesta en práctica, horas después, con el G2. Tales decisiones estuvieron orientadas a mejorar el desarrollo de la intervención, optimizar el tiempo dedicado a cada fase de resolución de la tarea y se hicieron cambios en las pautas de trabajo. Las decisiones tomadas y su justificación se han descrito en el Capítulo 6 "*Planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones*".

Análisis Retrospectivo

Al finalizar la experimentación se lleva a cabo el análisis de la intervención de enseñanza. Esta labor se inició con la trascripción de las grabaciones realizadas y la organización de los datos recogidos. Este análisis es cualitativo de corte interpretativo y siguiendo las pautas de los experimentos TDE (Simon, 2000, 2011) considera dos tipos de análisis: análisis retrospectivo de las sesiones y un estudio de casos. Cada uno de estos análisis persigue objetivos diferentes por lo que han precisado de acciones y técnicas distintas las cuales detallamos en el apartado 5.2.8 "*Aspectos metodológicos del análisis de la información*".

5.2.5 Papel del Análisis Didáctico en Nuestra Investigación

En nuestro estudio hemos adoptado el significado de la expresión "análisis didáctico" propuesto por Gómez (2002, 2007, 2009). Ésta se refiere a una visión ideal de cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje.

Debido a que elegimos los experimentos de enseñanza como metodología de investigación nos tuvimos que enfrentar al reto de diseñar una propuesta de trabajo en el aula que contemplara los intereses investigativos a la vez que promoviera las expectativas de aprendizaje relativas a las competencias, matemáticas y transversales. Por lo expuesto anteriormente utilizamos el análisis didáctico como una herramienta en la fase de planificación de la intervención de enseñanza, con el objetivo de elaborar una propuesta respaldada por un proceso de análisis y reflexión relativa a los diferentes significados de los contenidos matemáticos implicados: la razón y la proporcionalidad.

Recalcamos que el análisis didáctico ha sido utilizado por las investigadoras para la elaboración del diseño y no por los futuros maestros participantes del estudio.

Aunque inicialmente elegimos el análisis didáctico como herramienta de planificación de las matemáticas que serían objeto de la experimentación destacamos que en diferentes momentos del experimento se ha utilizado el análisis didáctico como herramienta que ha permitido realizar ciertas acciones de manera organizada y justificada. En los siguientes apartados centramos nuestra atención en el papel que ha jugado el análisis didáctico en la investigación atendiendo a cada una de las fases del experimento de enseñanza.

En la Fase de Preparación del Experimento

La revisión curricular[66] nos permitió detectar los contenidos y expectativas de aprendizaje relacionados con la razón y la proporcionalidad contemplados en la formación de maestros. Una búsqueda en documentos de Didáctica de la Matemática, dirigidos a maestros, hizo posible la identificación de distintos significados vinculados a las mismas. Esta revisión nos proporcionó un marco general el cual hizo posible delimitar la profundidad y extensión del tratamiento en el aula de las nociones contempladas en nuestro experimento. Como parte del mismo estudio delimitamos los tipos de conocimientos conceptuales y procedimentales relacionados con la razón y la proporcionalidad, establecimos las relaciones y prioridades de enseñanza entre conceptos y procedimientos asociados a la razón y proporcionalidad, y decidimos cuales abordar en el experimento de enseñanza.

El estudio de las representaciones asociadas a la razón y la proporcionalidad permitió clarificar las potencialidades de cada uno de los sistemas de representación para estas nociones, es decir, se logró identificar las características de las nociones que se evidenciaban con más fuerza en cada representación. Este aspecto llegó a constituirse en una de las variables que contribuirían a seleccionar las tareas que se aplicarían en la fase de experimentación en el aula.

La aproximación al análisis fenomenológico permitió detectar situaciones donde se usan la razón y la proporcionalidad, las cuales, siguiendo el marco del estudio PISA, se clasificaron en personales, educativas o laborales, públicas y científicas. El tipo de situación fue otra de las variables de las tareas seleccionadas, compartiendo la visión expuesta en tal estudio que afirma que los problemas con situaciones extra-matemáticas son preferibles como instrumentos para evaluar la alfabetización matemática ya que es más probable encontrar problemas de este tipo en la vida cotidiana (OCDE, 2004).

El catálogo de errores elaborado en el análisis cognitivo nos ha servido de base para planificar las tareas matemáticas a implementar en el aula, procurando que las mismas permitan trabajar sobre alguna dificultad. Ha permitido, a su vez vincular los objetivos específicos y las competencias mediante el instrumento propuesto por Rico y Lupiáñez (2008) y relacionar la planificación del trabajo concreto de aula con las expectativas

[66] Guía docente de la titulación de Diplomado en Maestro de Educación Primaria, programación y guiones de temas de la asignatura Matemáticas y su Didáctica del curso 2009-2010 (Anexo A).

globales descritas en la programación de la asignatura. En resumen, el procedimiento sienta las bases para el diseño y selección posterior de las tareas, al considerar tanto los objetivos específicos como las competencias matemáticas que se ponen en juego al resolver una tarea.

El análisis de instrucción lo utilizamos en el proceso de diseño y selección de las tareas que se aplicarían en la experimentación. Elegimos las tareas siguiendo distintos criterios. En primer lugar éstas debían de centrarse en los temas expuestos en los focos conceptuales prioritarios, resultado del análisis de contenido. Debido a que contábamos con 4 sesiones de trabajo y que llegamos a definir 4 focos prioritarios, decidimos seleccionar tareas que abarcaran los distintos focos, esta decisión obedeció a nuestro objetivo investigador referente a recoger información sobre las actuaciones de los futuros maestros en relación con distintos aspectos de la razón y la proporcionalidad.

Con el objetivo de promover las competencias, tomamos en cuenta algunas consideraciones generales que debían de cumplir las mismas; una de las cuales se refirió al formato de presentación, en relación a éste decidimos que las tareas debían ser de "desarrollo", al mismo tiempo que los ejercicios o preguntas que formaran parte de la tarea tuviesen potencial para promover la discusión en los momentos de trabajo colaborativo y puesta en común.

La selección final de tareas se realizó con base en variables más específicas las cuales surgieron como resultado del análisis de contenido, así por ejemplo, tomamos en cuenta la representación mediante la cual se expresaba una noción, el tipo de situación y tratamiento de dificultades, entre otras. Por otro lado las tareas también debían de ajustarse a la consecución de los objetivos específicos y competencias definidas en el análisis cognitivo.

En síntesis los tres análisis realizados nos aportaron los conocimientos que nos permitieron llegar a la concreción escrita de la programación de las sesiones, la cual posteriormente fue presentada a los profesores encargados de la asignatura con el objeto de negociar la aplicación y de recibir sugerencias. Las aportaciones de los profesores fueron tenidas en cuenta para perfilar el diseño de las sesiones.

En la Fase de Experimentación

Tanto el análisis de contenido y como el análisis cognitivo permitieron recoger una serie de aspectos relativos a los contenidos matemáticos y al aprendizaje de los mismos. La información procedente de tales análisis se ha utilizado en esta fase del experimento como referente a partir del cual interpretamos las actuaciones de los estudiantes durante la sesión, además nos aportó una marco sobre el cual actuar ante determinadas reacciones de los estudiantes.

Por ejemplo durante la primera sesión con el G1 nos encontramos con que los estudiantes no lograron establecer el tipo de comparación esperada (parte-parte), además mostraron desconocimiento de la noción de razón, este tipo de situaciones obliga al investigador a modificar en cierta medida la planificación y recurrir a otros recursos para solventar las deficiencias mostradas e intentar llevar a los estudiantes al logro del objetivo propuesto inicialmente. La revisión y reflexión hecha durante el proceso de planificación a través de las herramientas propuestas en el análisis didáctico, enriquece la red de conocimientos que el profesor o en este caso el investigador posee, lo que contribuye, desde nuestra perspectiva, a una mayor flexibilidad en la acción.

Después de cada sesión y antes de la puesta en práctica de la siguiente se realizó un proceso de observación de la información recogida (Figura 5.2), y aunque debido a razones de tiempo y de propósitos el análisis que se realiza en este momento no es tan profundo como al final de toda la experimentación, se tomaron decisiones basadas en informaciones suministradas en el análisis de contenido o cognitivo con el objetivo de rediseñar la siguiente sesión.

Por ejemplo después de la 1ª sesión con el G1 constatamos que los estudiantes no mostraron comprensión sobre aspectos básicos de la noción de razón y aunque para la siguiente sesión ya teníamos planificado trabajar sobre el porcentaje decidimos, con base en el análisis de contenido, definirlo como un tipo especial de razón, así desde esta perspectiva podríamos retomar y recalcar algunas características de la razón y vincular directamente las dos nociones.

También nos encontramos con actuaciones de los estudiantes que no logramos interpretar a partir de la información proveniente de los análisis cognitivo o de contenido. Por ejemplo, después de la 1ª sesión con el mismo grupo detectamos una concepción muy generalizada que consiste en usar la razón para determinar el total de elementos comparados. Sin embargo los análisis de contenido, cognitivo o de instrucción no nos habían aportado información referente a esta concepción, consideramos que esto no se debe a posibles limitaciones de las herramientas usadas sino al hecho de que las investigaciones previas de referencia relativas al razonamiento proporcional han tratado principalmente con niños o estudiantes de secundaria y las tareas que hemos usado poseen elementos diferenciadores en relación con las tareas usadas en los estudios previos más relevantes; en síntesis el carácter exploratorio de nuestro estudio nos ha enfrentado con la tarea de interpretar otro tipo de actuaciones no previstas.

En la Fase de Análisis Retrospectivo

El análisis retrospectivo de la experimentación se centra en las sesiones y estudios de casos de estudiantes. Los aportes teóricos derivados del análisis de contenido, cognitivo y de instrucción los utilizamos, al igual que en la fase de experimentación, para enmarcar e interpretar las actuaciones de los estudiantes. Sin embargo, destacamos que el análisis retrospectivo de las sesiones no se limita a estudiar el aprendizaje de los estudiantes o la evolución de sus conocimientos, sino que en éste también se analizan cuestiones sobre la dinámica de trabajo en el aula, sobre las debilidades o fortalezas de las tareas y sobre el papel del investigador como promotor del aprendizaje. Debido a lo anterior consideramos que el análisis de actuación constituye una parte del análisis retrospectivo.

A modo de ejemplo en el análisis retrospectivo de las sesiones, detallado más adelante, estudiamos el alcance de los objetivos de investigación, uno de los cuales ha sido conocer las concepciones que muestran los estudiantes en relación a distintos contenidos, en el estudio del alcance de este objetivo tenemos que las actuaciones sobre uno de los ejercicios de la Tarea 2 posibilita conocer las concepciones de los estudiantes en relación con las representaciones de la razón, las manifestaciones mostradas son contrastadas con las representaciones que recogimos en el análisis de contenido.

Tenemos previsto utilizar los objetivos específicos y competencias asociadas a cada tarea, que han sido producto del análisis cognitivo, como criterios de análisis de la información. En esta ocasión revisaremos las producciones, con el fin de observar el alcance de los mismos y determinar en consecuencia si la experimentación ha promovido o estimulado las competencias matemáticas; con esto esperamos tener las argumentaciones suficientes para concluir sobre el logro del segundo objetivo general de la investigación.

5.2.6 Papel de la Investigadora

Como se indica en los experimentos de enseñanza TDE (Simon, 2000) la investigadora asume el papel de profesora en las sesiones de la experimentación, durante las cuales dirige todo el proceso con la colaboración de los profesores de la asignatura. En el doble papel de investigadora-docente, diseña y aplica el experimento de enseñanza objeto de la investigación.

En el marco de la dinámica de trabajo elegida para desarrollar la experimentación, la investigadora es responsable de distintas actuaciones dado que la metodología de trabajo contempla cuatro fases: trabajo individual en clase, dinámica de trabajo colaborativo, puesta en común de la resolución de la tarea y trabajo individual fuera de la clase.

En el inicio de cada sesión explica la dinámica de trabajo, tiempo y recursos que pueden usar en la resolución de las tareas, durante esta fase atiende dudas que los estudiantes plantean en relación con las demandas de la tarea, además vigila que la resolución de los problemas se realice de manera individual.

Durante el trabajo colaborativo la investigadora-docente orienta a los estudiantes en la traducción del problema de la vida real al mundo matemático, planteándoles preguntas en lugar de respuestas. Las intervenciones de la investigadora-docente durante el trabajo en equipos de los estudiantes están guiadas por el objetivo de ayudarles a: identificar las matemáticas que pueden ser relevantes para abordar la tarea, comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal, encontrar regularidades, relaciones y patrones, utilizar herramientas y recursos adecuados. Los profesores de la asignatura colaboran durante esta fase atendiendo las preguntas de los estudiantes. Durante esta fase la investigadora-docente se encarga de promover la comprensión de conocimientos matemáticos comunes y especializados (Hill, Ball y Schilling, 2008), éstos se describen con detalle en el Capítulo 6 centrado en la planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones.

La puesta en común implica reflexionar sobre el proceso de resolución de la tarea y sus resultados. Durante esta fase la investigadora-docente pide la participación de los estudiantes y guía el proceso de institucionalización de los conceptos y procedimientos sugeridos por ellos, complementa las respuestas aportadas, cuestiona las intervenciones de los estudiantes y valida los intercambios surgidos.

La investigadora-docente se encarga de poner en macha los mecanismos necesarios para recoger las resoluciones individuales posteriores, que los estudiantes realizan fuera de clase, con ayuda de los profesores colaboradores quienes a través del "tablón de docencia" informan sobre la entrega o faltas de tales producciones.

Debido al doble papel investigadora-docente se han tomado en cuenta algunas consideraciones con el objetivo de apoyar la validez y fiabilidad del estudio, cuestión sobre la que profundizaremos más adelante. Las pautas relacionadas con el papel de la investigadora son:

- La permanencia constante en el contexto de la investigación, la investigadora-docente asistió como observadora participante desde el primer día del curso académico en la asignatura Matemáticas y su Didáctica.
- La triangulación de los datos mediante el empleo de distintos registros de información: producciones escritas individuales y colaborativas, grabación en audio de los trabajos en equipo, grabación en video de la puesta en común, grabación en video del trabajo en equipo.
- La observación de las informaciones recogidas y toma de decisiones han sido compartidas con la directora de esta investigación, y con los profesores de la asignatura quienes aportaron sugerencias para el desarrollo de la experimentación.
- Usar descriptores de bajo nivel inferencial, la transcripción literal de los intercambios dados en los equipos de trabajo y de la puesta en común constituyen la principal fuente de evidencias para que los lectores acepten o rechacen las interpretaciones y conclusiones que se deriven del estudio.

5.2.7 Recogida de la Información

Como es propio de la investigación de diseño se ha recogido una cantidad extensa de información con el objetivo de disponer de información lo más fiable posible de las actuaciones de los estudiantes. Se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes, se grabaron en audio las conversaciones que se desarrollaron en los pequeños grupos, y se grabaron en video las puestas en común y el trabajo de algunos pequeños grupos. Se recogió información en audio y toma de notas en todas las lecciones desarrolladas por los profesores de la asignatura, antes y después de las sesiones. Los datos recogidos informan sobre: (1) los conocimientos y capacidades matemáticas que el alumnado pone en juego y algún posible cambio en las mismas a lo largo de las sesiones, en relación con distintos componentes de la razón y la proporcionalidad, (2) sobre el papel de la investigadora en la institucionalización de los conocimientos, (3) las fortalezas y debilidades de la dinámica de trabajo, y (4) las fortalezas y debilidades de las tareas matemáticas aplicadas.

En la Tabla 5.6 describimos las técnicas e instrumentos de recogida de la información antes de la experimentación, durante la experimentación y después de la misma, así como los propósitos de cada uno.

Tabla 5.6. *Propósitos de las técnicas e instrumentos de recogida de información*

Técnica o Instrumento	Propósito
	Antes y entre las sesiones
Observación participante Grabación en audio y toma de notas	Familiarizar a los estudiantes de ambos grupos con la investigadora. Conocer la dinámica que se sigue en el desarrollo de la asignatura, con el fin de obtener datos para la elaboración del diseño y para caracterizar cómo se aborda ésta en cada grupo. Obtener evidencias acerca de los conocimientos previos estudiados por los participantes para tomar conciencia de posibles influencias a considerar en el diseño de las sesiones y en la interpretación de los datos.
	Durante las sesiones
Hoja de trabajo individual	Identificar los conocimientos y las capacidades matemáticas que muestran los estudiantes individualmente. Promover una reflexión preliminar que después será revisada y compartida en la fase de equipos.
Hoja de trabajo en equipo	Identificar los conocimientos y las capacidades matemáticas que logran mostrar los estudiantes al trabajar en equipo. Promover un proceso de reflexión compartida y un espacio en el que pudieran reconsiderar, debatir, cambiar su conocimiento inicial.
Grabaciones en audio de todos los trabajos en equipo Grabación en video del trabajo de un equipo por sesión Grabación en video de la puesta en común.	Respaldar los datos obtenidos en las hojas de trabajo escrito, con el fin de profundizar en los procesos que los condujeron a una u otra respuesta. Obtener datos que permitan describir con precisión: las interacciones ocurridas en los equipos y en el aula, la actuación y evolución de los alumnos, y las reflexiones así como las decisiones tomadas por la investigadora durante la experimentación.

Tabla 5.6. *Propósitos de las técnicas e instrumentos de recogida de información*

Técnica o Instrumento	Propósito
	Después de las Sesiones
Hoja de trabajo individual fuera de clase	Causar una reflexión (auto-reflexión) sobre los ejemplos, contraejemplos, estrategias, etc., que tuvieron lugar durante el trabajo compartido y en la puesta en común. Obtener información acerca de la evolución en la resolución de la tarea desde la fase del trabajo individual hasta una nueva confrontación con la tarea fuera del trabajo en clase. Obtener información para comprobar si a posteriori hubo una transformación en las concepciones individuales de los estudiantes.

5.2.7.1 Información Recogida entre las Sesiones de Experimentación

A partir del día 28 de setiembre del año 2009 y hasta el 31 de mayo de 2010 la investigadora se incorporó como observadora en las lecciones de la asignatura Matemáticas y su Didáctica. Las observaciones se realizaron con los objetivos de: (a) familiarizar a los estudiantes de ambos grupos con la investigadora, (b) conocer la dinámica que se sigue en el desarrollo de la asignatura, con el fin de obtener datos para la elaboración del diseño y para caracterizar cómo se aborda ésta en cada grupo y (c) obtener evidencias acerca de los conocimientos previos estudiados por los participantes para considerarlos en el (re)diseño de las sesiones y en la interpretación de los datos. En el Anexo D aparece la descripción detallada del trabajo realizado entre las sesiones de la experimentación en ambos grupos.

En el G1 se realizó un total de 26 observaciones participantes[67], en la Tabla 5.7 se presenta la distribución temporal del trabajo realizado en la asignatura en clases previas a la experimentación y en las clases desarrolladas entre las sesiones de la investigación. Se recogió la grabación en audio de 18 de estas sesiones de trabajo y se tomaron notas de campo en las 26 observaciones.

Tabla 5.7. *Distribución temporal de las sesiones de clase y las sesiones de la investigación en el G1*

Sesión de Clase	Fecha	Breve descripción del trabajo realizado
1	L 28-09-2009	Introducción a la asignatura, Inicio del Tema 1: El número natural. Sistemas de numeración.
2	J1-10-2009	Introducción a la asignatura, evaluación, contenidos, entre otros.

[67] "El observador se compromete en las mismas actividades que empieza a observar. A menudo su 'encubrimiento' es tan completo que, por lo que respecta a otros participantes, simplemente es uno más del grupo". (Cohen y Manion, 2002, p. 164)

Tabla 5.7. *Distribución temporal de las sesiones de clase y las sesiones de la investigación en el G1*

Sesión de Clase	Fecha	Breve descripción del trabajo realizado
3	L5-10-2009	Clase de teoría del Tema 1.
4	J8-10-2009	Actividades prácticas Tema 1.
5	J15-10-2009	Ejercicios de bases de numeración del Tema 1.
6	L19-10-2009	Prácticas Tema 1.
7	J 22-10-2009	Trabajo grupal del cuaderno de prácticas del Tema 1.
8	L26-10-2009	Prácticas Tema 1.
9	J 29-10-2009	Trabajo grupal del cuaderno de prácticas del Tema 1.
10	J 5-11-2009	Trabajo grupal del cuaderno de prácticas del Tema 1.
11	L9-11-1009	Clase de teoría del Tema 2: Aritmética. Estructuras aditiva y multiplicativa.
12	J12-11-2009	Prueba corta del Tema 1. Continuación Tema 2.
13	L16-11-2009	Prácticas del Tema 2 con ábaco y bloques multibase.
14	J19-11-2009	Dudas Temas 1 y 2.
15	L23-11-2009	Prácticas del Tema 2 con ábaco y bloques multibase.
16	L30-11-2009	Resolución ejercicios del Tema 2. Inicio Tema 3. Números Racionales
17	J3-12-2009	Resolución ejercicios del guión del Tema 2 y Tema 3.
18	L14-12-2009	Prácticas del Tema 3. Prueba corta Tema 2.
19	L21-12-2009	Prácticas del Tema 3.
20	L11-01-2009	Operaciones con números racionales. Expresión decimal, operaciones con números decimales.
21	J14-01-2009	Resolución de ejercicios Temas 1, 2 y 3. Repaso de examen.
22	L18-01-2009	Nociones de proporcionalidad. Resolución de ejercicios Temas 1, 2 y 3. Repaso de examen.
23	J21-01-2009	Resolución de ejercicios Temas 1, 2 y 3. Repaso de examen.
24 I Sesión	**L25-01-2010**	Razón: concepto, caracterización y usos.
25 II Sesión	**J28-01-2010**	Porcentaje: significados y usos.
26	L22-02-2010	Clase de teoría Tema 4. Geometría plana.

Tabla 5.7. *Distribución temporal de las sesiones de clase y las sesiones de la investigación en el G1*

Sesión de Clase	Fecha	Breve descripción del trabajo realizado
27	J04-03-2010	Retoma Tema 4. Geometría plana.
28	L08-03-2010	Tema 4. Geometría del espacio.
29	J11-03-2010	Retoma Tema 4. Transformaciones geométricas.
30	L15-03-2010	Prácticas Tema 4.
31	L22-03-2010	Prácticas Tema 4.
32	J8-04-2010	Prácticas Tema 4. II Parte
33	L12-04-2010	Clase de teoría Tema 5. Magnitudes y su medida.
34	J15-04-2010	Prácticas Tema 4. II Parte
35		
III Sesión	**L19-04-2010**	Relaciones de proporcionalidad: caracterización y representaciones.
36	L26-04-2010	Clase de teoría Tema 5. Medición indirecta.
37	L03-05-2010	Prácticas Tema 5.
38	L10-05-2010	Prácticas Tema 5.
39		Razón: concepto, caracterización y usos.
IV Sesión	**L17-05-2010**	Proporcionalidad geométrica.
40	L24-05-2010	Clase teoría Tema 6. Introducción a la estadística y probabilidad
41	L31-05-2010	Prácticas Tema 6.

En el G2 se realizó un total de 20 observaciones participantes, en la Tabla 5.8 se presenta la distribución temporal del trabajo realizado en la asignatura. Se recogió la grabación en audio de 18 de estas sesiones de trabajo y se tomaron notas de campo en las 20 observaciones.

Tabla 5.8. *Distribución temporal de las sesiones de clase y las sesiones de la investigación en el G2*

Sesión de Clase	Fecha	Breve descripción del trabajo realizado
1	L28-09-2009	Introducción a la asignatura, Inicia el Tema 1: El número natural. Sistemas de numeración.
2	J1-10-2009	Resolución ejercicios del Guión del Tema 1
3	L5-10-2009	Clase de teoría del Tema 1.
4	J8-10-2009	Comenta aspectos generales de la asignatura con seis estudiantes.
5	J15-10-2009	Actividades Tema 1.

Tabla 5.8. *Distribución temporal de las sesiones de clase y las sesiones de la investigación en el G2*

Sesión de Clase	Fecha	Breve descripción del trabajo realizado
6	L19-10-2009	Trabajo grupal del cuadernillo del Tema 1.
7	J 22-10-2009	Trabajo grupal del cuadernillo del Tema 1.
8	L26-10-2009	Practicas Tema 1, Aula de Informática.
9	J 29-10-2009	Supervisión con el profesor de prácticas.
10	J 5-11-2009	Resolución ejercicios Guión Tema 1
11	L9-11-1009	Prueba corta Tema 1. Clase de teoría del Tema 2
12	J12-11-2009	Resolución ejercicios Guión Tema 2
13	L16-11-2009	Prácticas grupales del Tema 2.
14	J19-11-2009	Prácticas individuales del Tema 2.
15	L23-11-2009	Prácticas del Tema 2.
16	L30-11-2009	Prueba corta Tema 2. Inicio Tema 3.
17	J3-12-2009	Resolución ejercicios del guión del Tema 3.
18	L14-12-2009	Prácticas del Tema 3.
19	L21-12-2009	Prácticas del Tema 3.
20	L11-01-2009	Operaciones con números racionales.
21	J14-01-2009	Ejercicios y dudas Tema 3.
22	L18-01-2009	Continuación del Tema 3.
23	J21-01-2009	No hubo clase.
24 **I Sesión**	**L25-01-2010**	Razón: concepto, caracterización y usos.
25 **II Sesión**	**J28-01-2010**	Porcentaje: significados y usos.
26	L22-02-2010	Clase de teoría Tema 4. Geometría plana.
27	J04-03-2010	Resolución ejercicios del guión del Tema 4.
28	L08-03-2010	Clase de teoría Tema 4. Geometría del espacio.
29	J11-03-2010	Retoma Tema 4. Transformaciones geométricas.
30	L15-03-2010	Prácticas Tema 4.
31	L22-03-2010	Prácticas Tema 4.
32	J8-04-2010	Prácticas Tema 4. II Parte
33	L12-04-2010	Clase de teoría Tema 5. Magnitudes y su medida.
34	J15-04-2010	Prácticas Tema 4. II Parte

Tabla 5.8. *Distribución temporal de las sesiones de clase y las sesiones de la investigación en el G2*

Sesión de Clase	Fecha	Breve descripción del trabajo realizado
35 **III Sesión**	**L19-04-2010**	Relaciones de proporcionalidad: caracterización y representaciones.
36	L26-04-2010	Clase de teoría Tema 5. Medición indirecta.
37	L03-05-2010	Prácticas Tema 5.
38	L10-05-2010	Prácticas Tema 5.
39		Razón: concepto, caracterización y usos.
IV Sesión	**L17-05-2010**	Proporcionalidad geométrica.
40	L24-05-2010	Clase teoría Tema 6. Introducción a la estadística y probabilidad
41	L31-05-2010	Resolución ejercicios del guión del Tema 6.

5.2.7.2 Información Recogida en las Sesiones de Experimentación

En las Tablas 5.9 y 5.10 se presenta un balance cuantitativo de los datos recogidos en cada grupo. La diferencia en la cantidad de producciones orales y escritas de los equipos se explica por una manipulación inadecuada de la grabadora de voz por parte de los estudiantes quienes olvidaron presionar el botón de grabación o que por error borraron la grabación realizada. Sin embargo, se recogió el registro escrito de todos los equipos. La diferencia en el número de producciones individuales entregadas en una misma sesión se explica por la llegada tarde de algún estudiante o por la salida anticipada de alguno de ellos. En el desarrollo de la tercera sesión el tiempo fue insuficiente para desarrollar la fase colaborativa de la Tarea 5, esto justifica que no se haya recogido ninguna grabación en audio del trabajo en equipos ni tampoco producciones colaborativas escritas sobre la misma.

Tabla 5.9. *Información recogida en el G1*

	1ª Sesión		2ª Sesión	3ª Sesión		4ª Sesión	
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
Producción individual en clase.	47	48	21	60	62	65	67
Producción escrita en equipos.	13	13	5	15	0	16	16
Producción individual fuera de clase.	32	30	14	25	24	36	37
Grabaciones en audio del trabajo en equipos.	13	12	5	15	0	14	14
Grabación en video de trabajo en equipo.	1	1	1	1	0	1	0

Tabla 5.10. *Información recogida en el G2*

	1ª Sesión		2ª Sesión	3ª Sesión		4ª Sesión	
	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
Producción individual en clase.	27	27	25	28	28	39	39
Producción escrita en equipos.	8	8	6	7	0	9	8
Producción individual fuera de clase.	26	25	25	23	23	19	19
Grabaciones en audio del trabajo en equipos.	8	8	6	7	0	10	6
Grabación en video de trabajo en equipo.	1	0	1	1	0	1	0

En nuestro estudio la información recogida constituye el material de base sobre el cual se espera que aparezcan regularidades en las actuaciones manifestadas al resolver las tareas contextualizadas que implican las nociones de razón y proporcionalidad.

Es evidente que la construcción de los resultados producto del análisis e interpretación de las informaciones descritas en las tablas anteriores requieren de un sistema de categorización que posibilite la codificación y enumeración de tales actuaciones. En nuestro estudio hemos aplicado un análisis de contenido (Bardin, 1996; Cabrera, 2009) y en el Apartado 5.2.8.3 lo detallamos. Sin embargo, de modo general indicamos que este análisis ha sido mixto (inductivo y deductivo), pues algunas las categorías e indicadores de las mismas han surgido de las producciones orales y escritas de los estudiantes, de las notas tomadas, y de las transcripciones de la puesta en común de las sesiones, mientras que otras categorías e indicadores han sido establecidos previamente al análisis.

5.2.8 Aspectos Metodológicos del Análisis de la Información

Dado que las investigaciones de diseño se caracterizan por un refinamiento progresivo, la intervención didáctica elaborada es constantemente revisada a partir de la experiencia (Collins et al., 2004). El proceso de investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de diseño, puesta en práctica, análisis y rediseño. Como consecuencia de dicha carácter cíclico, estos estudios implican dos tipos de análisis de datos: análisis continuados que se realizan durante los diferentes ciclos del proceso de investigación y un análisis final retrospectivo de todos los datos recogidos en el proceso de investigación (Figura 5.3).

El análisis preliminar de los datos recogidos se ha efectuado a partir de la observación de las producciones individuales, de las grabaciones de audio y de video así como de la revisión de las notas tomadas durante la sesión. En cada uno de los grupos se derivaron una serie de decisiones orientadas a la reelaboración del diseño. Las decisiones tomadas son de carácter práctico y con éstas se buscó promover el aprendizaje de los estudiantes.

En el Capítulo 6 "*Planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones*" describimos el análisis previo de cada una de las intervenciones así como las decisiones que se tomaron a raíz de las primeras observaciones realizadas a la información recogida.

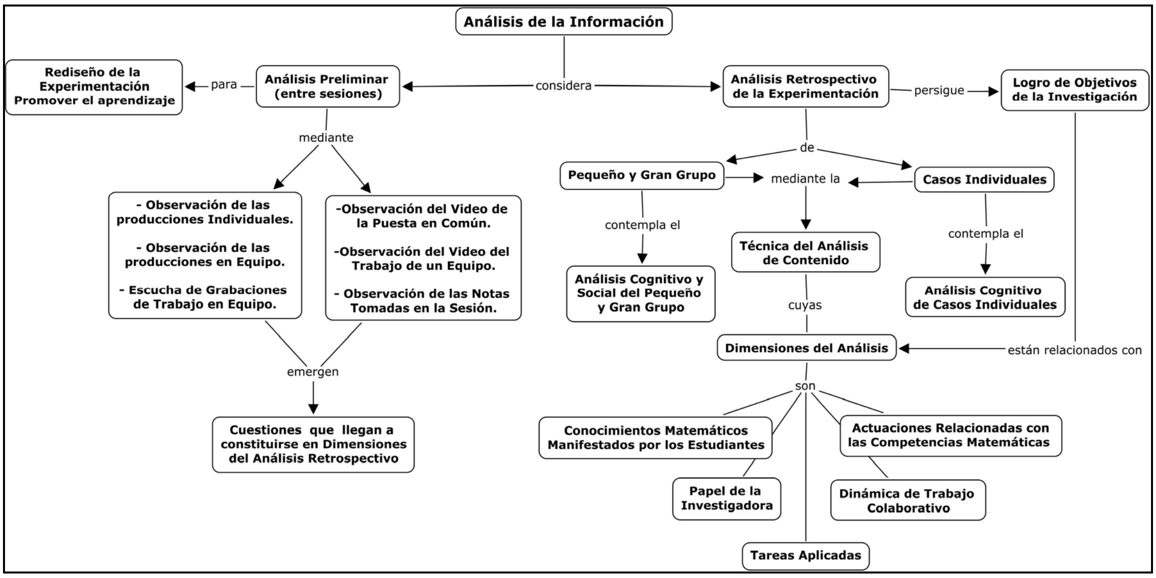


Figura 5.3. Tipos de análisis realizados en el estudio

Hemos estructurado la presentación del análisis de la información atendiendo los detalles y aspectos metodológicos del análisis retrospectivo el cual requiere de una mayor descripción dado que es el que se centra en los objetivos de la investigación.

5.2.8.1 Aspectos Metodológicos del Análisis Retrospectivo de la Experimentación

El análisis retrospectivo de la experimentación se focaliza en tres unidades de estudio: gran grupo (análisis de las puestas en común grabadas en video y transcritas), pequeños grupos (trabajo mostrado por los equipos de alumnos en sus grabaciones y protocolos) y casos individuales de estudiantes (trabajo mostrado en las hojas de trabajo individual del alumnado). En todos los casos se trata de un análisis cualitativo de corte interpretativo. Este análisis se estructura en dos partes, una referida al análisis del gran y pequeño grupo (análisis retrospectivo de las sesiones) y otra que considera el estudio de casos individuales. En la Figura 5.4 se esquematiza los componentes de los dos análisis que conforman el análisis retrospectivo de la experimentación.

Propósitos del Análisis Retrospectivo de las Sesiones (Pequeño y Gran Grupo)

El objetivo del análisis retrospectivo del gran y pequeño grupo es profundizar en la situación ocurrida durante la intervención en el aula, aportando marcos explicativos para las actuaciones de los estudiantes y supuestos sobre posibles formas de abordar las dificultades detectadas en nuevas circunstancias. Con ello se busca aportar "conocimiento" que amplíe los resultados recogidos en el campo de investigación relativo al proceso de enseñanza-aprendizaje de la razón y proporcionalidad, específicamente en el contexto de la formación de maestros de primaria. Destacamos que el análisis retrospectivo del gran grupo persigue además detectar las debilidades y fortalezas de la dinámica de aula y de las tareas aplicadas, así como estudiar el papel de la investigadora durante la experimentación.

El análisis retrospectivo de cada sesión (gran y pequeño grupo) pretende dar información sobre el grado en que se han logrado los objetivos de investigación en cada sesión, hacer una revisión de los supuestos planteados para la misma, así como determinar el grado de consecución de las expectativas de aprendizaje propuestas en términos de los objetivos específicos y de las competencias matemáticas asociadas. Consideramos que el estudio de las actuaciones de los futuros maestros ante las tareas permitirá observar el grado de consecución de los objetivos específicos de instrucción, lo cual aporta información para valorar el nivel de estímulo o de contribución a la competencia matemática.

Propósito del Estudio de Casos

El objetivo del análisis retrospectivo de casos individuales se interesa por estudiar las modificaciones o invariancias manifestadas en las resoluciones individuales de la tarea. Como parte de la metodología de trabajo seguida, los estudiantes debían resolver individualmente la tarea en la fase inicial de la sesión y posteriormente debían de realizar una reconstrucción de la misma tarea fuera de clase.

En síntesis, con este análisis se pretende determinar si hubo modificaciones en la posterior resolución de la tarea, en ese caso cuántas modificaciones hubo y en qué sentido se manifestaron (positivas o negativas), para tales propósitos elaboramos una serie de criterios con los que caracterizar el sentido de estas modificaciones.

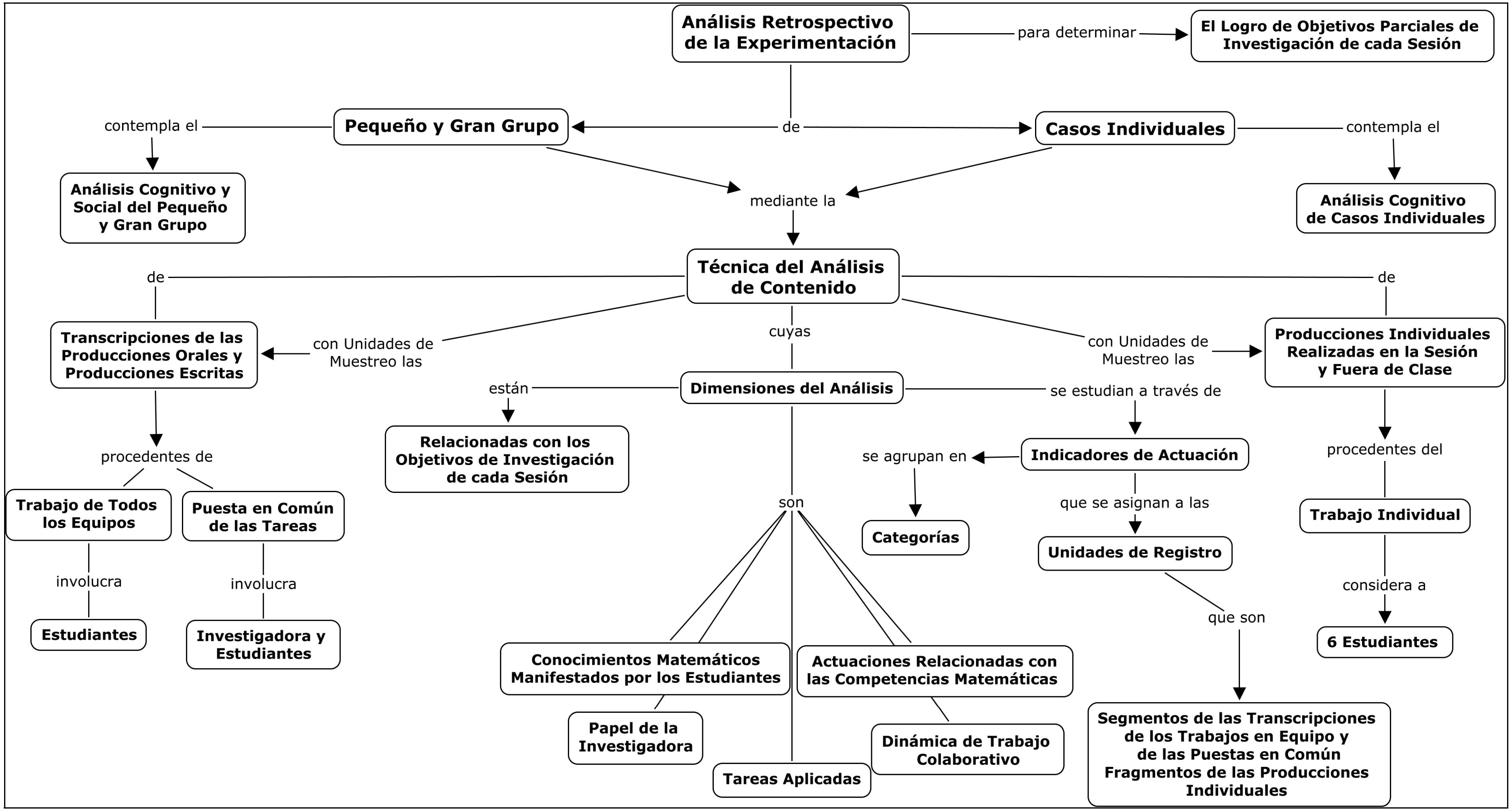


Figura 5.4. Esquema del análisis retrospectivo de la experimentación

A continuación presentamos los detalles metodológicos del análisis retrospectivo de las sesiones, centrado en el pequeño y gran grupo. Posteriormente describimos los aspectos metodológicos del estudio de casos.

5.2.8.2 Aspectos Metodológicos del Análisis Retrospectivo de las Sesiones (Pequeño y Gran Grupo)

En el análisis de cada sesión se ha utilizado como lente de observación los objetivos parciales de investigación enunciados para la misma; se ha buscado evidencias del logro de éstos en dos momentos particulares de la sesión que son: el trabajo colaborativo y la puesta en común de la resolución de la tarea. Los objetivos parciales de la investigación (Tabla 5.11) son concreciones de los dos objetivos generales de la investigación y están relacionados con cinco dimensiones de análisis: (1) conocimiento matemático manifestado por los estudiantes en la resolución de las tareas, (2) balance de las tareas realizadas, (3) logro de las expectativas de aprendizaje supuestas en la planificación de las tareas, (4) papel de la investigadora en la institucionalización de los conocimientos, y (5) metodología de trabajo en el aula.

Tabla 5.11. *Relación entre las dimensiones de análisis y los objetivos parciales del estudio*

Dimensión del análisis	Objetivos parciales del estudio
Conocimiento matemático	OP1.2. Describir el conocimiento matemático puesto de manifiesto por los estudiantes en la resolución de las tareas durante el trabajo colaborativo, y en las dos fases de trabajo individual de algunos estudiantes.
Papel de la investigadora	OP1.3. Describir el papel de la investigadora como promotora del desarrollo del conocimiento matemático durante la fase de institucionalización.
Metodología de trabajo	OP1.4. Identificar fortalezas y debilidades de la dinámica de trabajo colaborativo puesto en práctica con respecto al desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes de magisterio.
Tareas realizadas	OP1.5. Identificar fortalezas y debilidades de las tareas matemáticas realizadas en relación con el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes.
Logro de las expectativas de aprendizaje	OP2.1. Describir las actuaciones de los estudiantes en términos de las expectativas de aprendizaje específicas y de las competencias matemáticas consideradas en cada sesión.

Los objetivos parciales OP1.2 y OP1.3 descritos en la tabla anterior se desglosaron en otros objetivos más concretos debido a las particularidades de los contenidos matemáticos implicados en las tareas de cada sesión, esto se hizo con el propósito de hacer operativa la observación de evidencias sobre la consecución de los mismos. Estas concreciones se describen en la planificación de las sesiones (Apartados 6.1, 6.2, 6.3 y 6.4)

Destacamos que el análisis de cada una de las sesiones (gran y pequeño grupo), se ha basado en la información procedente de varias fuentes: a) transcripciones del trabajo en equipo, b) trascripciones de la puesta en común de las tareas, c) producciones escritas de los equipos, y d) notas tomadas a partir de las observaciones de la investigadora durante el desarrollo de la sesión.

Los objetivos parciales OP1.2, OP1.3, OP1.4, OP1.5 y parte del objetivo OP2.1, se abordaron mediante la técnica de análisis de contenido[68] (Bardin, 1996; Cabrera, 2009) de las transcripciones del trabajo en equipo y de las transcripciones de la puesta en común de las tareas. En este cometido las producciones escritas y las notas tomadas se han utilizado como soporte de las informaciones procedentes de las transcripciones. El análisis de contenido realizado es de tipo cualitativo y se ha efectuado con ayuda del ordenador mediante el programa MAXQDA10, el uso del mismo lo detallamos en el primer punto del apartado 5.2.8.3.

En la Tabla 5.12 resumimos las características centrales del análisis de contenido correspondiente a cada dimensión, en la misma se observa que el logro de las expectativas de aprendizaje se ha abordado de una manera diferente, en relación con el resto de dimensiones de análisis, debido a que únicamente se utilizó el análisis de contenido de las transcripciones del trabajo en equipo para estudiar la competencia *argumentar-justificar*. A continuación de la misma detallamos el proceso seguido, la información y documentos utilizados en cada caso.

Tabla 5.12. *Elementos centrales del análisis de contenido de cada dimensión*

Información Analizada	Tipo de Categorización	Marco de Interpretación
	Conocimiento Matemático	
Producciones escritas de los equipos. Transcripciones orales de los trabajos colaborativos.	Categorización inductiva y deductiva (mixta).	Análisis didáctico sobre la razón y la proporcionalidad (Capítulo 4). Elaboración de criterios emergentes durante la observación de las transcripciones.
	Papel de la Investigadora	
Transcripciones de la puesta en común.	Categorización deductiva.	Caracterización del conocimiento matemático común y especializado (Hill,

[68] La técnica de análisis de contenido se refiere a un conjunto de procedimientos para el análisis de los contenidos de datos escritos, una técnica de investigación para la descripción objetiva, sistemática y cuantitativa del contenido manifiesto de las comunicaciones con el fin de interpretarlas (Cáceres, 2003).

Tabla 5.12. *Elementos centrales del análisis de contenido de cada dimensión*

Información Analizada	Tipo de Categorización	Marco de Interpretación
		Ball y Schilling, 2008) Identificación de otros tipos de conocimientos según el mismo marco.
	Metodología de Trabajo en el Aula	
Transcripciones orales de los trabajos colaborativos. Transcripciones de la puesta en común.	Categorización deductiva e inductiva.	Elaboración de criterios previos para la observación de las transcripciones, inspirados en aportaciones consideradas en los estudios de Hitt y colaboradores.
	Tareas Matemáticas	
Transcripciones orales de los trabajos colaborativos.	Categorización inductiva.	Elaboración de criterios emergentes durante la observación de las transcripciones.
	Logro de las Expectativas de Aprendizaje: Competencia Argumentar-Justificar	
Transcripciones orales de los trabajos colaborativos.	Categorización deductiva.	Adaptación de la propuesta de Rigo (2009), Rigo et al. (2011) para el análisis de las justificaciones.

Para estructurar la presentación de este análisis, a continuación nos centramos en las fases del análisis de contenido realizado. Posteriormente nos centramos en la descripción del proceso de análisis empleado en el tratamiento del objetivo parcial OP2.1 relativo al logro de las expectativas de aprendizaje.

5.2.8.3 Análisis de Contenido de las Transcripciones

Laurence Bardin (1996) conceptualiza el análisis de contenido como:

> *El conjunto de técnicas de análisis de las comunicaciones tendentes a obtener indicadores (cuantitativos o no) por procedimientos sistemáticos y objetivos de descripción del contenido de los mensajes permitiendo la inferencia de conocimientos relativos a las condiciones de producción/recepción (contexto social) de estos mensajes.* (p. 32)

Según este autor, en general, puede analizarse con detalle y profundidad el contenido de cualquier comunicación: en código lingüístico oral, icónico, gestual, gestual signado, etc. y sea cual fuere el número de personas implicadas en la comunicación (una persona, diálogo, grupo restringido, comunicación de masas).

El análisis de contenido supone un conjunto de procedimientos sistemáticos para el análisis de los contenidos de datos escritos, se puede llevar a cabo con cualquier tipo de material escrito, se utiliza frecuentemente para analizar un número considerable de textos, está gobernado por reglas, permite utilizar el análisis asistido por ordenador y utiliza la categorización como rasgo esencial (Rico, 2012).

Por su lado, Krippendorff (1990) define el *análisis de contenido* como "una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto" (p. 28). El elemento que añade esta definición es el "contexto" como marco de referencia donde se desarrollan los mensajes y los significados. Con lo cual cualquier análisis de contenido debe realizarse en relación con el contexto de los datos y justificarse en función de éste.

En la Figura 5.5 se presenta un esquema de las fases que conforman el análisis de contenido, el mismo ha sido propuesto por Cabrera (2009) y con base en éste describimos posteriormente el análisis de contenido de las transcripciones de las producciones en equipo y de la puesta en común de nuestro estudio.

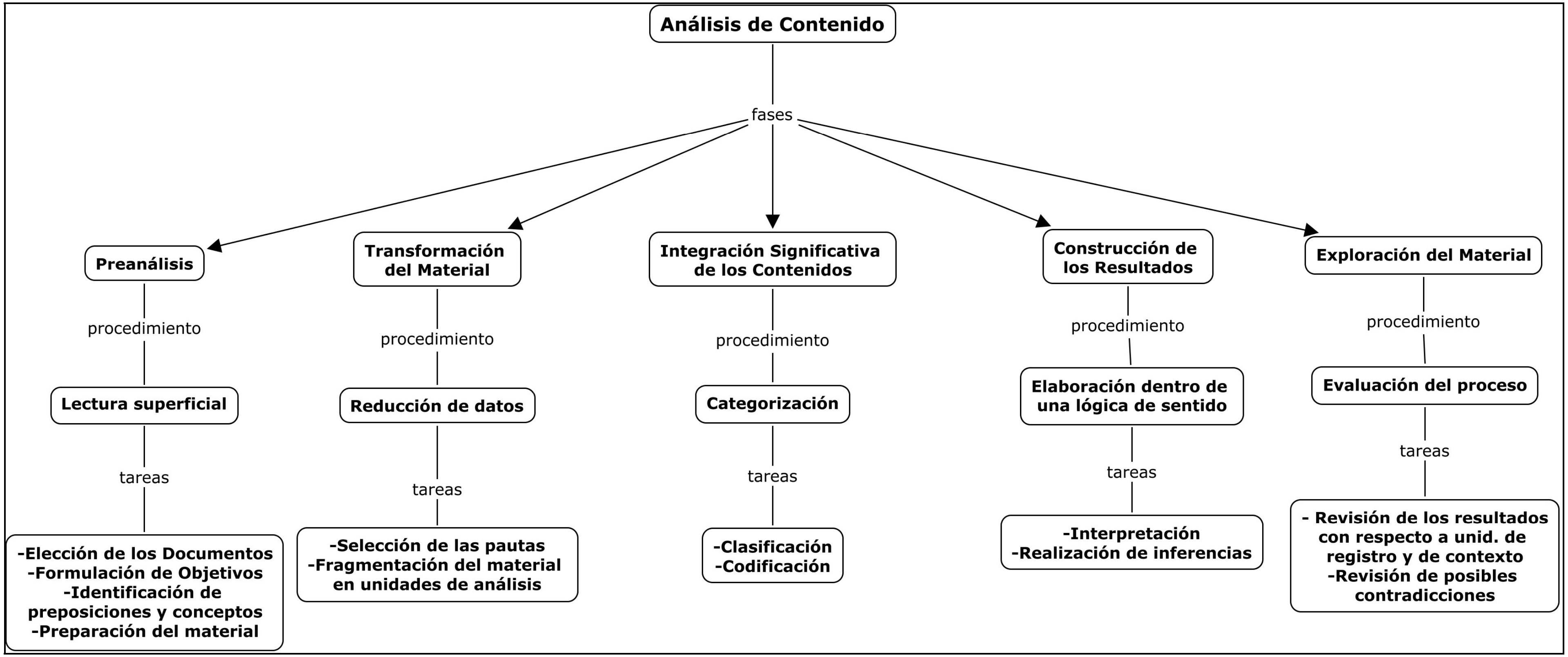


Figura 5.5. Análisis de contenido: Etapas, procedimientos y tareas (Cabrera, 2009)

I. Decisiones sobre el Análisis de Contenido Realizado

Como punto de partida del análisis de contenido realizamos distintas acciones que se engloban en las fases denominadas por Cabrera (2009) como pre-análisis y transformación del material.

Este proceso contempla la organización del material, a partir de la lectura superficial de los documentos recogidos en la investigación. Como plantea Bardin (1996), se trata de una fase que "corresponde a un período de intuiciones. Pero tiene como objetivo la operacionalización y la sistematización de las ideas de partida para poder llegar a un plan de análisis". (p. 71)

En la fase inicial del análisis nos dedicamos a transcribir las producciones orales recogidas, en esta tarea se asignó un código de voz a cada estudiante, cada uno se identificó mediante una etiqueta formada por una de las letras (A, B, C, D ó F) acompañada de un número del 1 hasta el 26 para los estudiantes del G1, mientras que los números asociados a los estudiantes del G2 van del 1 al 14 (Anexo J). La permanencia de la investigadora en el aula desde el primer día de clase y el hecho de que los estudiantes dijeran su nombre al inicio de la grabación certifican la etiquetación y reconocimiento de las voces de los estudiantes.

En nuestro estudio los documentos sometidos al análisis de contenido son las 118 transcripciones de los trabajos colaborativos de los equipos de los dos grupos (73 del G1 y 45 del G2) y las ocho transcripciones de la puesta en común de las tareas de cada sesión. Las 124 producciones escritas (78 del G1, 46 del G2) se han utilizado principalmente como material de respaldo de las producciones orales, no obstante el análisis de las actuaciones en actividades puntuales, centradas en representaciones gráficas, requirió necesariamente del análisis de esas producciones escritas.

Esta primera fase contempla la formulación de los objetivos del análisis de contenido, esto es, especificar qué se pretende analizar. En nuestra investigación este análisis se ha perfilado y guiado según los objetivos de investigación parciales enunciados en la Tabla 5.11 (OP1.2, OP1.3, OP1.4, OP1.5 y parte del OP2.1) así como las concreciones particulares de los objetivos OP1.2 y OP1.3. Se han buscado evidencias del logro de éstos en dos momentos particulares de la sesión que son: el trabajo colaborativo y la puesta en común de la resolución de la tarea, esto justifica la elección de los documentos, como detallamos a continuación.

Secuencia de Análisis de las Transcripciones de los Trabajos Colaborativos

La búsqueda de evidencias sobre el logro de los objetivos de investigación, descritos en la Tabla 5.11, se realizó por sesión y por tarea, a través del análisis de contenido de las transcripciones de los trabajos en equipo y de las transcripciones de la puesta en común.

En la Figura 5.6 se ejemplifica el procedimiento seguido, se esquematiza cómo se ha realizado la búsqueda de evidencias sobre el logro del objetivo parcial OPi.j en la sesión. Se siguió el mismo proceso para determinar el logro de los demás objetivos parciales.

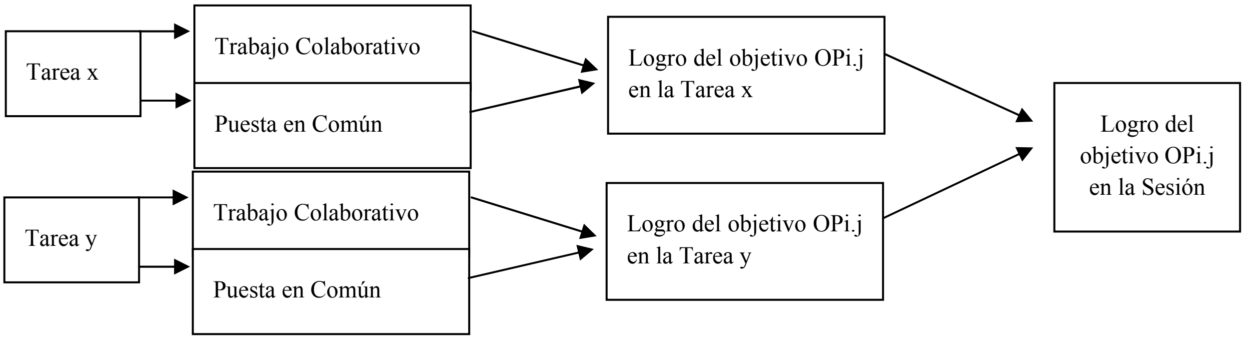


Figura 5.6. Búsqueda de evidencias del logro de los objetivos parciales de investigación

Uso del Programa de Análisis de Datos Cualitativos MAXQDA10

El análisis de contenido de las transcripciones de los trabajos en equipo y de las puestas en común se ha realizado con ayuda del programa de análisis de datos MAXQDA10. Es un programa que no sólo facilita el manejo mecánico de los datos, sino que también favorece el proceso de análisis e interpretación de los mismos. Hemos elegido utilizarlo debido a la extensa cantidad de información que precisábamos analizar, como ya hemos indicado 118 transcripciones de los trabajos colaborativos y ocho transcripciones de la puesta en común de las tareas. El uso del mismo facilitó la manipulación de los documentos y el resumen cuantitativo de las codificaciones realizadas.

Este programa permite ir codificando las transcripciones línea a línea, entre muchas funciones que tiene, hace posible visualizar la presencia y frecuencia de los códigos en una misma transcripción o en un conjunto, así como relaciones entre códigos. Permite resumir estos recuentos en la hoja de cálculo. En la Figura 5.7 mostramos la pantalla de trabajo, se observa la transcripción del trabajo de los estudiantes sobre la cual se van asignando los códigos de actuación considerados, posteriormente detallamos cómo se han elaborado los códigos y cómo se han construido las categorías.

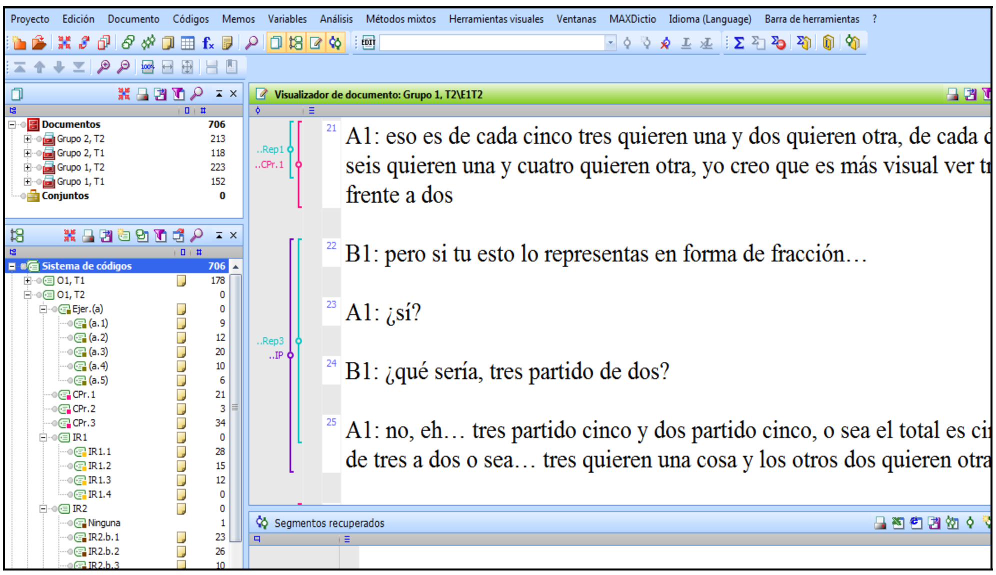


Figura 5.7. Pantalla principal del programa MAXQDA10

Uno de los aspectos centrales que se han de decidir al iniciar el análisis de contenido se refiere a la definición de las unidades de registro, y a la separación de las mismas. En este sentido el programa de análisis ha resultado ser una herramienta eficaz pues automáticamente divide los fragmentos a analizar, como describimos en seguida.

Definición de las Unidades de Registro

En términos de Hernández (1994), las unidades de registro representan los segmentos del contenido de los mensajes que son caracterizados e individualizados para posteriormente categorizarlos, relacionarlos y establecer inferencias a partir de ellos. Es la unidad de contenido significativo dentro del documento que servirá para extraer resultados.

En nuestro estudio y para efectos del análisis de contenido de las transcripciones de los trabajos en equipo hemos elegido como unidad de registro cada una de las intervenciones orales de los estudiantes trabajando en equipo, en las transcripciones éstas se separan y reconocen por la asignación del código de voz. Estas unidades a su vez se insertan en unidades de contexto que corresponden a diálogos entre los estudiantes, los cuales sirven para comprender por qué se ha codificado una unidad de registro bajo uno u otro indicador.

El programa de análisis de datos MAXQDA10 divide la transcripción en segmentos y reconoce automáticamente las intervenciones de los estudiantes como unidades de registro pues las enumera al lado izquierdo de la página. Por ejemplo, en la Figura 5.8 presentamos un segmento de una transcripción, los números a la izquierda (4, 5 y 7) de las intervenciones de los estudiantes distinguen unidades de registro, las tres aportaciones de las estudiantes en conjunto constituyen una unidad de contexto, en este caso hace referencia a la resolución del ejercicio (a) de la Tarea 4.

1 ***Tarea 4: Crecimiento de Bacterias, Grupo 1***
2 ***Equipo: E4***
3 ***Estudiantes: C10, A10, C11***

4 C11: bueno, nosotras una de las relaciones es que si dividimos el número de bacterias entre el número de días siempre da 13, sea el número que sea…

5 A10: también hemos encontrado otra relación de que cuando aumenta el tiempo también aumenta el número de bacterias o sea que es… que aumenta (C11 y C10: decreciente… creciente)

6 Hay un silencio mientras leen el enunciado del ejercicio (b) de la tarea

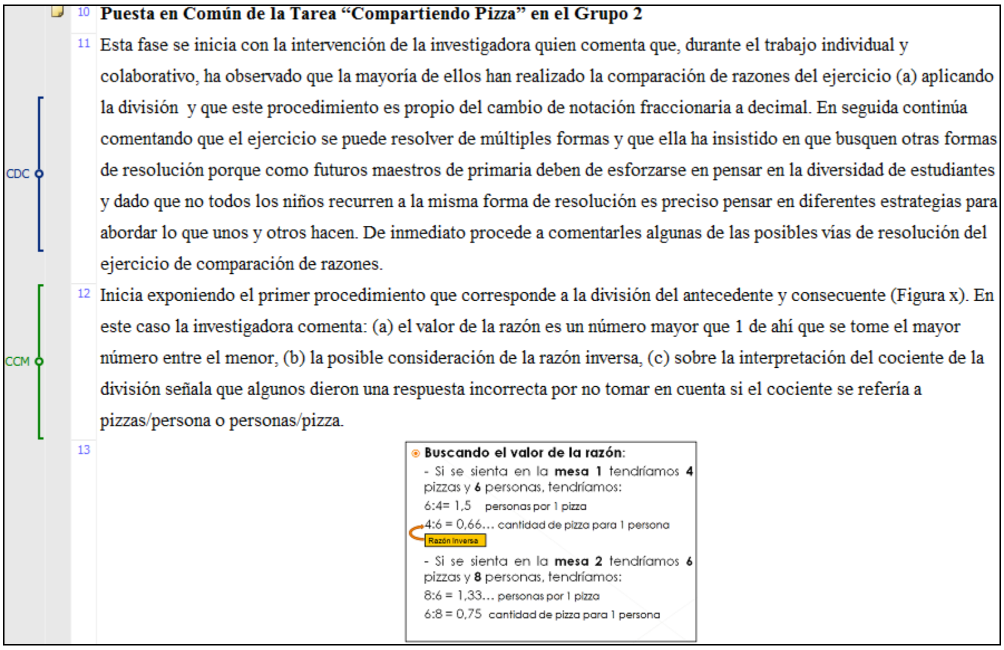
7 C11: yo aquí lo que hecho ha sido que he dividido 650 entre "x" que sería el número de días y el resultado es 13, entonces haces 650 entre 13 y te da el número de días que han transcurrido, es lo que yo…

Figura 5.8. Ejemplo de las unidades de registro y de contexto en las transcripciones del trabajo colaborativo

En los Anexos E y F presentamos las transcripciones codificadas de los trabajos colaborativos de los equipos de ambos grupos, en cada una de las tareas.

En relación con las transcripciones originales de la puesta en común destacamos que inicialmente se sometieron a un proceso de depuración y síntesis, con el fin de condensar en un nuevo documento los aspectos más relevantes de la puesta en común, esta descripción resumida es la que se ha incluido en el Capítulo 6 "*Descripción de la planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones*" en los apartados correspondientes a la puesta en común. Este nuevo documento de resumen ha sido el que se sometió al análisis de contenido, en el mismo las unidades de registro corresponden a la descripción de acciones realizadas por la investigadora y a las intervenciones naturales aportadas por ésta, mismas que se han recogida en forma de citas textuales. En el Anexo I presentamos las transcripciones originales y en los Anexos G y H presentamos la síntesis de las puestas en común analizadas.

En la Figura 5.9 ejemplificamos un segmento de los documentos de síntesis de la puesta en común sometidos al análisis de contenido.


10 **Puesta en Común de la Tarea "Compartiendo Pizza" en el Grupo 2**

11 Esta fase se inicia con la intervención de la investigadora quien comenta que, durante el trabajo individual y colaborativo, ha observado que la mayoría de ellos han realizado la comparación de razones del ejercicio (a) aplicando la división y que este procedimiento es propio del cambio de notación fraccionaria a decimal. En seguida continúa comentando que el ejercicio se puede resolver de múltiples formas y que ella ha insistido en que busquen otras formas de resolución porque como futuros maestros de primaria deben de esforzarse en pensar en la diversidad de estudiantes y dado que no todos los niños recurren a la misma forma de resolución es preciso pensar en diferentes estrategias para abordar lo que unos y otros hacen. De inmediato procede a comentarles algunas de las posibles vías de resolución del ejercicio de comparación de razones.

12 Inicia exponiendo el primer procedimiento que corresponde a la división del antecedente y consecuente (Figura x). En este caso la investigadora comenta: (a) el valor de la razón es un número mayor que 1 de ahí que se tome el mayor número entre el menor, (b) la posible consideración de la razón inversa, (c) sobre la interpretación del cociente de la división señala que algunos dieron una respuesta incorrecta por no tomar en cuenta si el cociente se refería a pizzas/persona o personas/pizza.

13

Figura 5.9. Ejemplo de las unidades de registro en las síntesis de las transcripciones de la puesta en común

II. Proceso de Codificación y Categorización de los Datos

Ambas acciones se consideran en la fase denominada por Cabrera (2009) como integración significativa de los contenidos (Figura 5.5).

La codificación corresponde a una transformación –efectuada según reglas precisas– de los datos de las transcripciones. Transformación que por descomposición, agregación y enumeración permite desembocar en una representación del contenido, o de su expresión, susceptible de ilustrar al analista sobre las características del texto que pueden servir de índices. En síntesis la codificación es el proceso por el que los datos son transformados sistemáticamente y agregados en unidades (categorías de análisis) que permiten una descripción precisa de las características pertinentes del contenido (Cáceres, 2003).

La categorización es una operación de clasificación de elementos constitutivos de un conjunto por diferenciación, tras la agrupación por género (analogía), a partir de criterios definidos. Las categorías son secciones o clases que reúnen un grupo de elementos (unidades de registro) bajo un título genérico, reunión efectuada en razón de los caracteres comunes de estos elementos (Cabrera, 2009).

Los procesos de codificación y categorización se hicieron inicialmente con todos los documentos del G1 y posteriormente con los documentos del G2 con el objetivo de evaluar la validez de los indicadores y categorizaciones elaboradas.

En los dos grupos de documentos (transcripciones de los trabajos en equipo y de las puestas en común) se han analizado aspectos diferentes que responden a las cinco dimensiones de análisis consideradas en nuestra investigación. En consecuencia se han requerido diferentes procesos de codificación de las transcripciones de los trabajos colaborativos pues en estos documentos se han buscado evidencias sobre: el conocimiento matemático manifestado, fortalezas y debilidades de las tareas y de la dinámica de trabajo colaborativo, así como evidencias del logro de las expectativas de aprendizaje, particularmente sobre la competencia *argumentar-justificar*; con esto deseamos subrayar que cada transcripción se observó al menos cinco veces. En las transcripciones de la puesta en común el análisis de contenido atendió a las dimensiones descritas en el párrafo anterior, pero se centró en las aportaciones de la investigadora con el fin de estudiar el papel de la misma durante la institucionalización de los conocimientos.

Debido a lo expuesto decidimos describir el proceso de codificación, categorización e interpretación de resultados utilizado para el estudio de las cinco dimensiones de análisis en las transcripciones de equipos y de las puestas en común.

Conocimiento Matemático Manifestado

El análisis del conocimiento matemático[69] manifestado se ha realizado con base en las informaciones procedentes del trabajo colaborativo de los equipos, esto es las transcripciones de los trabajos colaborativos y las producciones escritas de los mismos, el contenido de estos documentos se refiere a la resolución de las tareas.

Se ha realizado un análisis cognitivo de los grupos (Simon, 2012) dado que las interpretaciones que hacemos se fundamentan en los aportes y marcos de referencia procedentes de estudios que se han dedicado a describir las concepciones de los individuos en el campo de la razón y la proporcionalidad (Capítulo 2, apartado 2.3). Adicionalmente utilizamos los aportes teóricos derivados del análisis de contenido y cognitivo para enmarcar e interpretar las actuaciones de los estudiantes. Hemos considerado que debido a que durante el trabajo colaborativo los estudiantes debían describir lo que habían realizado en la faceta individual entonces el análisis de las producciones en equipo aportaría información sobre las resoluciones individuales.

[69] Este es conocimiento común del contenido (Hill, Ball y Schilling, 2008), conocimiento de las matemáticas escolares (Rico y Lupiáñez, 2008).

Como se indicó anteriormente hemos realizado un análisis de contenido cuyo sistema de codificación ha sido mixto. Inductivo porque los indicadores de actuación asociados a cada categoría de análisis han surgido de la observación de las producciones orales y escritas de los equipos, y deductivo porque también hemos usado las actuaciones descritas en estudios previos para enmarcar las manifestadas por los estudiantes de magisterio. Detallamos este proceso en el apartado "Categorías de análisis del conocimiento matemático e indicadores de actuación".

Los documentos sometidos a este análisis de contenido son las 118 transcripciones de los trabajos colaborativos de los equipos de los dos grupos (73 del G1, 45 del G2); las 124 producciones escritas (78 del G1, 46 del G2) se han utilizado principalmente como material de respaldo de las producciones orales.

El proceso de elaboración del sistema de categorías e indicadores de las mismas se construyó inicialmente con base en las informaciones del G1 y posteriormente éste se aplicó a las informaciones del G2, esto permitió poner a prueba el sistema de categorización generado y con esto validar el mismo por saturación[70].

Categorías de Análisis del Conocimiento Matemático e Indicadores de Actuación

Las concreciones del objetivo parcial OP1.2. "Describir el conocimiento matemático puesto de manifiesto por los estudiantes" son especificaciones del mismo que responden a las peculiaridades de las tareas trabajadas en cada sesión, estas especificaciones se describen en la planificación de cada sesión en el capítulo 6 "Planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones". Con la idea de ilustrar el proceso de codificación y categorización indicamos que en la planificación de la primera sesión el objetivo parcial OP1.2 se concretó a través de dos objetivos OP1.2.1 "*Conocer las concepciones que muestran los estudiantes en torno a la razón, fracción y porcentaje así como sobre la relación entre éstas*" y OP1.2.2 "*Identificar procedimientos aplicados en la resolución de situaciones que involucran la noción de razón*".

Las concreciones del objetivo parcial OP1.2 en cada sesión promovieron la consideración de varios focos sobre los cuales centramos nuestra atención al observar los trabajos de los equipos, estos focos se transformaron posteriormente en categorías de análisis conformadas por un conjunto de indicadores de actuación asociados a las mismas. Por ejemplo, en el caso de la sesión 1 y en relación con la Tarea 1 nos planteamos observar las actuaciones de los estudiantes respecto al porcentaje, esta noción constituyó un foco sobre el que centramos la atención.

El proceso de construcción de las categorías de nuestro estudio se inició con la codificación de las respuestas aportadas en cada equipo a las actividades de la tarea. Inicialmente dirigimos la atención hacia la resolución de un ejercicio particular, por

[70] "La saturación señala una tarea de control metodológico, interna al proceso de investigación con prácticas cualitativas, siendo principalmente caracterizada como el punto a partir del cual puede darse por finalizado una parte o el conjunto del trabajo empírico de investigación (…) aquel momento en el que toda o parte de la investigación aparece bajo control porque no aparece nada nuevo en la misma" (Bertaux 1993, p. 28).

ejemplo el ejercicio (b) de la Tarea 1, empezamos a observar analogías, semejanzas y discrepancias en las respuestas aportadas por los estudiantes de los diferentes equipos, las actuaciones manifestadas se agruparon y designaron con unas etiquetas, éstos son los códigos de los indicadores de actuación. Las reglas de estos indicadores de actuación se fueron construyendo conforme se avanzaba en el proceso de análisis de las transcripciones, estuvieron abiertas a la modificación en la medida en que se procesaba el material, como afirma Rodríguez (1996) la retroalimentación es constante, desde los datos hacia la formulación de criterios o reglas de codificación y viceversa, es primordial y permanente.

Subrayamos que la distinción entre una actuación u otra estuvo determinada por distintos elementos según fueran las demandas de la actividad matemática en cuestión, algunos elementos implicados en la distinción de las actuaciones y en consecuencia en la delimitación de las reglas usadas para codificar una actuación han sido: uso de términos vinculados a la razón, aplicación de procedimientos o propiedades vinculadas a la razón o a la relación de proporcionalidad, interpretaciones de las nociones en las situaciones de las tareas, tipos de representaciones manifestadas, éxito en la resolución, entre otros. En general todas las actuaciones detectadas se han considerado como concepciones de los estudiantes (Hitt, 2007) y en ocasiones nos referimos a éstas como acercamientos o aproximaciones respecto a una noción matemática.

En el caso de la resolución al ejercicio (b) de la Tarea 1 observamos tres tipos de actuaciones particulares: usar la regla de tres para hallar el porcentaje (NP1), usar técnicas diferentes a la regla de tres para hallar el porcentaje (NP2) y actuaciones que evidenciaban la identificación de la cantidad absoluta y la relativa (NP3). Estos tres tipos de actuación llegaron a configurar la categoría que denominamos “Acercamientos al Porcentaje”.

Siguiendo el mismo procedimiento con las respuestas aportadas a las otras dos actividades de la Tarea 1 llegamos a considerar finalmente cuatro categorías de análisis de las actuaciones: (1) acercamientos sobre la razón, (2) acercamientos sobre el porcentaje, (3) tipo de relación descrita en la comparación, y (4) relaciones entre las tres nociones.

En resumen, en nuestra investigación las categorías corresponden a distintas facetas −conceptual, procedimental, representacional− del contenido matemático que se ha trabajado. Los indicadores de estas categorías se refieren a los modos de actuación que manifiestan los estudiantes sobre los contenidos de razón y proporcionalidad contemplados en las tareas.

El análisis de las actuaciones en las 26 actividades que conforman las siete tareas desarrolladas en la experimentación condujo a considerar las categorías e indicadores de actuación resumidos en las Figuras 7.53, 7.54, 7.55 y 7.56 del Capítulo 7 “*Análisis retrospectivo de las sesiones*”, el cual se ocupa de la descripción detallada de cada una. La descripción de las actuaciones correspondientes a cada indicador se detalla en el mismo capítulo.

Cuantificando las categorías de análisis del conocimiento matemático que se han desarrollado en la investigación se obtienen un total de 27, las cuales contemplan un total de 107 indicadores de actuación.

Es relevante destacar que no existe necesariamente una relación unívoca entre las categorías consideradas y los ejercicios o actividades de cada tarea, algunas categorías surgieron a partir de observaciones transversales aplicadas a la resolución completa de la tarea. Por ejemplo, la búsqueda de evidencias sobre la aplicación de las propiedades de la razón o concepciones sobre este contenido se hizo a lo largo de las respuestas aportadas en todas las actividades de la Tarea 2 dado que no había un ejercicio particular que preguntara directamente sobre este aspecto.

Tampoco es unívoca la relación entre una actuación y un indicador, con esto señalamos que una misma unidad de registro pueda estar codificada con varios indicadores referentes a distintas categorías y que no todas las unidades de registro están asociadas a un indicador de actuación. En este sentido nos apoyamos en la postura de Rodríguez, Gil y García (citados en Cabrera, 2009) quienes en relación con la aplicación del análisis de contenido en la investigación educativa afirman que:

- No todas las unidades de registro deben estar enmarcadas en las categorías, pues existe información que puede no ser relevante con respecto a los objetivos de la información.
- Una unidad de análisis puede participar simultáneamente en más de una categoría; en el caso de la realidad educativa convergen diversos procesos que suelen participar en distintos fenómenos.
- Una misma unidad de análisis puede ser codificada bajo diversos códigos, ya que se aproxima al contenido desde diferentes dimensiones.

Criterio de Enumeración de los Indicadores de Actuación

Las reglas de enumeración se refieren a la manera de contar las unidades de registro codificadas. Realizado el trabajo de codificación de todos los datos y separados los datos pertenecientes a las distintas categorías, procedimos a cuantificar los resultados con ayuda del programa de análisis MAXQDA10, este programa despliega la frecuencia de las codificaciones señaladas en las transcripciones de cada equipo. En el Anexo M.1 presentamos las tablas de frecuencias relativas a las categorías e indicadores de actuación detectados. Sin embargo, en nuestro estudio hemos decidido considerar la presencia o ausencia de los indicadores de actuación en las producciones de los equipos debido a que una frecuencia numérica, por ejemplo 5, podría proceder de unidades de registro de un único estudiante o de varios, circunstancia que fácilmente conducen a interpretaciones y conclusiones que no reflejan la realidad estudiada.

En síntesis, en el Capítulo 7 "Análisis retrospectivo de las sesiones" nos hemos decantado por resumir en tablas los resultados de la categorización y sus indicadores de actuación, indicando únicamente la presencia o ausencia de los mismos en cada equipo participante. En la Figura 5.10 ejemplificamos la manera en la que se resume los resultados del análisis. En la tabla de dicha figura se presenta la síntesis de las actuaciones manifestadas en los equipos en la resolución del ejercicio (b) de la Tarea 1.

Tabla 7.2. *Acercamientos sobre la noción de porcentaje*

G1

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
NP1							*	*					
NP2	*	*	*	*		*	*	*				*	
NP3					*				*				*
NP4										*	*		

G2

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
NP1		*	*					*
NP2	*			*				*
NP3					*		*	
NP4						*		

Acercamientos

NP1: Uso de la regla de tres para hallar el porcentaje
NP2: Uso de otras técnicas para hallar el porcentaje
NP3: Identifican la unidad absoluta con la relativa
NP4: Ninguna

Figura 5.10. Ejemplo de las tablas de resultados del análisis del conocimiento matemático

Marco de Interpretación: Construcción de los Resultados

La interpretación de los resultados producto del análisis de contenidos de las transcripciones, el desarrollo de inferencias y explicaciones constituye otra de las fases centrales del análisis de contenido (Figura 5.5).

En el Capítulo 7 "Análisis retrospectivo de las sesiones" discutimos los resultados evidenciados en las tablas, como la mostrada en la Figura 5.10, a la luz de los datos obtenidos en otros estudios como los recogidos en el Capítulo 2 "Antecedentes de la Investigación". Además recurrimos a marcos analíticos más generales, dentro de los que cobran sentido los datos estudiados, específicamente usamos los conocimientos recogidos en la aproximación a los análisis de contenido y cognitivo descritos en el Capítulo 4 "Análisis didáctico de la razón y la proporcionalidad".

De esta manera se ha intentado integrar los hallazgos obtenidos dentro de campos más amplios de investigación como lo son los relativos al razonamiento proporcional o al campo del aprendizaje de los subconstructos de los números racionales.

En esta fase interpretativa procuramos aportar posibles explicaciones de las actuaciones manifestadas por los estudiantes en términos de alguna (s) de las variables de tarea, basándonos en los aportes de las investigaciones previas o en los recursos procedentes de las aproximaciones a los análisis de contenido y cognitivo efectuados. Sin embargo, indicamos que también nos encontramos con actuaciones que no se ajustan a los marcos de referencia de interpretación, en cuyos casos fue necesario construir por completo las posibles explicaciones. Este proceso es el que evidencia que se ha consolidado el logro del objetivo del experimento de enseñanza en relación con la elaboración de aportes teóricos humildes sobre el aprendizaje y (o) desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes para maestro participantes de esta investigación en relación con la razón y la proporcionalidad.

Papel de la Investigadora en la Institucionalización de los Conocimientos

El análisis de esta dimensión se ha efectuado con base en la información procedente de las ocho transcripciones de la puesta en común de las tareas, cuatro de cada grupo. Esta dimensión está vinculada al objetivo parcial de investigación OP1.3 centrado en describir el papel de la investigadora en la institucionalización de los conocimientos matemáticos.

La descripción del papel de la investigadora en relación con la institucionalización de los conocimientos matemáticos se realiza a través de la observación de la consecución de objetivos que se describieron en la planificación de cada sesión. Estas especificaciones contemplan propósitos relacionados con la actuación de la investigadora para la puesta en común de cada sesión, tales objetivos describen las acciones que la investigadora debía de ejecutar (ver abajo, Tabla 5.13). Por ejemplo en la planificación de la primera sesión se propuso como tarea de la investigadora promover la comprensión de la unidad de referencia en una comparación (OP1.3.1) y promover la comprensión de la razón y sus propiedades (OP1.3.2).

Describimos las intervenciones de la misma a la luz de los propósitos, que se habían establecido en la planificación de las sesiones, en relación con los conocimientos del contenido que ésta debía de procurar promover durante la experimentación, en este sentido llegamos a establecer ocho indicadores de actuación vinculados a la acción de la investigadora.

El análisis de la actuación de la investigadora-docente se centra en el estudio de las intervenciones de la misma durante la revisión de las tareas, la descripción de los conocimientos matemáticos y recursos empleados por ésta para promover en los estudiantes la comprensión de las nociones implicadas en las tareas.

Categorías de Análisis de las Aportaciones de la Investigadora

Los indicadores se asignan a las intervenciones de la investigadora manifestadas durante la puesta en común de las tareas. Las intervenciones han de hacer referencia a las categorías de análisis. En estas intervenciones se aborda explícitamente la explicación de alguna de las categorías de análisis indicadas en la segunda columna de la Tabla 5.13. Tales intervenciones se manifiestan también a través del planteamiento de cuestionamientos, preguntas orientadas a la reflexión por parte de los estudiantes sobre alguna de las categorías de estudio.

Tabla 5.13. *Descripción de los objetivos parciales centrados en el papel de la investigadora*

Concreciones del Objetivo Parcial OP1.3	**Categoría**	**Indicador**
OP1.3.1. Promover la comprensión de la unidad de referencia en una comparación.	Unidad de referencia en una comparación	Pr.Uni
OP1.3.2. Promover la comprensión de la razón y sus propiedades.	Noción de Razón	Pr.Ra
OP1.3.3. Promover la comprensión de la noción de razón y su relación con el porcentaje.	Noción de Razón-Porcentaje	Pr.RaPo
OP1.3.4. Introducir la noción de proporcionalidad directa.	Noción de Proporcionalidad Directa	Pr.Pro
OP1.3.5. Promover la comprensión de la noción de razón y de las relaciones de proporcionalidad.	Noción de Razón-Proporcionalidad	Pr.RaPro
OP1.3.6. Promover el uso de la relación funcional y el operador escalar en lugar de la regla de tres en tareas de "valor faltante", y suscitar la comprensión de la "regla de tres" directa.	Estructura de una Proporción Regla de Tres	Pr.Rel. Fu-Es
OP1.3.7. Suscitar el uso de estrategias de comparación de razones diferentes de la búsqueda del valor racional de la razón.	Comparación de Razones	Pr.CoRa
OP1.3.8. Promover la búsqueda de relaciones entre cantidades así como las capacidades implicadas en la expresión de conjeturas sobre tales relaciones.	Relaciones entre razones de longitudes, área o volumen de cuerpos o figuras semejantes.	Pr.Rel

Marco de Interpretación: Construcción de los Resultados

También se ha realizado un análisis de contenido "más grueso" de las transcripciones de la puesta en común identificando los segmentos en los cuales se evidencia que se aportó conocimiento del contenido matemático, las unidades de registro se codificaron con el código **(CCM)** abreviación de conocimiento del contenido matemático, se utilizó como marco de referencia la descripción propuesta por Hill, Ball y Schilling (2008) para este tipo de conocimiento, aunque conscientes de que se aportaron conocimientos comunes y especializados del contenido no nos centramos en la distinción de estos dos subtipos.

Como describimos en el Capítulo 7 de análisis de las sesiones, en el proceso de identificación de las aportaciones de corte matemático reconocimos otro tipo de conocimientos que surgieron espontáneamente durante la puesta en común de las tareas, pues no se habían contemplado en la planificación de las puestas en común, utilizando el mismo marco de referencia reconocimos que tales intervenciones se refieren al conocimiento didáctico del contenido, estas intervenciones se codificaron con el código **(CDC)**. En el Capítulo 7 (Apartado 7.9) resumimos los aportes de la investigadora en cada sesión.

Tareas Realizadas

Esta dimensión de análisis está vincula al objetivo parcial de investigación OP1.5, centrado en identificar fortalezas y debilidades de las tareas matemáticas aplicadas.

Este análisis se realiza con base en la información procedente de las transcripciones de los trabajos en equipo y de las notas de la investigadora. Identificamos en las trascripciones de los trabajos colaborativos segmentos o unidades de registro que evidencien fortalezas o debilidades de las mismas en función de las actuaciones suscitadas en los estudiantes. La caracterización de los códigos se construyó conforme se avanzaba en el análisis de las producciones de los equipos del G1.

Se asignó el código **For.Ta** (Fortaleza de la Tarea) a las unidades de contexto en las que se evidencia que el trabajo sobre la tarea estaba estimulando la discusión y el convencimiento entre ellos o que el trabajo sobre la tarea estaba promoviendo el uso e intercambio de distintas estrategias de resolución o de procedimientos, es decir segmentos de la transcripción en donde se evidenciara que se estaba promoviendo la flexibilidad[71].

Se asignó el código **Deb.Ta** (Debilidad de la Tarea) a las unidades de contexto en las que se evidencia que la tarea ha resultado muy difícil para todos los miembros del equipo ya sea porque lo expresan de forma explícita o porque ninguno manifiesta una posible solución de la actividad en cuestión, también se asignó a los segmentos en los cuales se evidencia que el enunciado o alguna representación incluida en la tarea los ha inducido a una interpretación errónea o les ha provocado confusión.

En el Capítulo 7 “Análisis retrospectivo de las sesiones” presentamos un balance de las tareas en términos de los criterios descritos anteriormente.

Metodología de Trabajo

Esta dimensión de análisis responde al objetivo parcial de la investigación OP1.4 centrado en identificar fortalezas y debilidades de la fase colaborativa puesta en práctica. En relación a este objetivo nos interesamos también en describir cómo ha sido el proceso de habituación a la metodología de trabajo.

[71] Según Berk, Taber, Carrino y Poetzl (2009) ésta consiste en la habilidad de emplear múltiples métodos de resolución en un campo de problemas, resolver el mismo problema usando varios métodos y elegir estratégicamente un método de resolución.

Para describir el proceso de habituación a la dinámica de trabajo recurrimos a las notas tomadas y a la transcripción de la puesta en común, identificando los momentos relacionados con la explicación de las fases de trabajo o en los que los estudiantes manifestaron dudas relacionadas con la forma de proceder en cada fase. En el Capítulo 7 "Análisis Retrospectivo de las Sesiones" presentamos una descripción de cómo ha sido el proceso de familiarización con la dinámica de trabajo en cada sesión.

Para identificar fortalezas y debilidades de la fase de trabajo colaborativo analizamos las transcripciones de los trabajos en equipo.

En relación con las fortalezas construimos previamente, con base en aportes de otros investigadores (Hitt, 2007; Pérez y Hitt, 2004) que han realizado estudios que implican el trabajo colaborativo, un constructo que denominamos *intercambios productivos*, éstos se han caracterizado como aquellos en los cuales:

- dos o más integrantes del equipo intervienen para elaborar una respuesta,
- algún miembro corrige una idea errónea o inadecuada aportada por otro compañero,
- se evidencian distintos puntos de vista en relación con la resolución de algún ejercicio (distintos procedimientos o estrategias adecuadas).

Asignamos el código **IP** (Intercambio Productivo) a las unidades de contexto en las cuales se evidencia la presencia de alguno de los tres descriptores que caracterizan a este tipo de intercambios.

Las debilidades de la fase colaborativa se señalaron con el código **Deb.Di** (Debilidad de la dinámica colaborativa), éste se asignó a las unidades de contexto en las que se refleja que la conformación del equipo no ha contribuido al desarrollo de conocimiento de sus miembros, es decir cuando todos manejan concepciones inadecuadas. También se asignó a las unidades de contexto en las que se refleja que no han seguido la dinámica de trabajo, o sea cuando sólo un estudiante construye y expone la resolución de la tarea pues no se evidencia la participación de los demás miembros del equipo. La caracterización de este código se construyó conforme se avanzaba en el análisis de las producciones de los equipos del G1.

Logro de las Expectativas de Aprendizaje: Competencia Argumentar-Justificar

La competencia *argumentar-justificar* se ha analizado de manera más detallada mediante un análisis de contenido de las transcripciones de los trabajos colaborativos debido a que observamos mecanismos y formas de convencimiento entre los futuros maestros que requerían una atención especial. Las categorías utilizadas están definidas y caracterizadas previamente a la codificación, éstas proceden del marco interpretativo propuesto en Rigo (2009) y Rigo et al. (2011) en relación a los tipos de justificaciones.

Nuestro objetivo es describir las justificaciones que aportaron los estudiantes para maestro en el contexto de la resolución de las tareas matemáticas que se plantearon en la experimentación. Consideramos que las justificaciones pueden proceder de un solo estudiante o pueden elaborarse a partir de los argumento de distintos miembros de un equipo, desde esta perspectiva aceptamos y compartimos la postura de Krummheuer en relación con la *argumentación colectiva* (Krummheuer, 1995).

Para describir los tipos de justificaciones mostradas por los estudiantes de los grupos G1 y G2 en la resolución colaborativa de las tareas desarrolladas en la experimentación, utilizamos una adaptación del marco interpretativo propuesto por Rigo (2009) en relación a los tipos de justificaciones. Es una adaptación porque no hemos considerado las subcategorías (cartesiana y retórica) correspondientes al patrón basado en razones, esto se debe a que no nos hemos interesado en estudiar si las razones matemáticas aportadas son suficientes y necesarias, en su lugar hemos considerado una distinción entre las argumentaciones basadas en razones matemáticas según la validez de las mismas, de modo que distinguimos entre argumentaciones basadas en argumentos matemáticos y argumentaciones basadas en argumentos matemáticos no válidos. Nos hemos interesado en conocer si las justificaciones dadas se basan en razones matemáticas, en fuentes supraracionales o en conocimientos procedimentales como los algoritmos u operaciones básicas. Pretendemos describir a grosso modo las justificaciones aportadas por los estudiantes de nuestro experimento de enseñanza. La descripción con mayor detalle de las justificaciones, aportadas tanto por los estudiantes como por la profesora-investigadora, es una perspectiva de futuro de nuestra investigación. A continuación describimos los descriptores correspondientes a los distintos tipos de justificaciones estudiadas en las producciones de los equipos.

Just1: Justificaciones basadas en argumentos matemáticos

Son aquellas que están sustentadas en razones matemáticas, ya sean de las que se derivan verdades necesarias ó razones matemáticas que no son concluyentes de las que sólo se pueden desprender verdades probables. Cumplen con el objetivo de aseverar, explicar o fundamentar una verdad matemática y de que el interlocutor consiga algún aprendizaje, así como un estado de convicción, convencimiento o persuasión hacia la verdad en ciernes (Rigo, 2009).

No obstante, somos conscientes de que en las aulas ordinarias de formación de maestros de primaria en las que hemos desarrollado nuestra investigación difícilmente se da el razonamiento matemático explícito. También indicamos que en este contexto no se evidencian justificaciones matemáticas con una estructura lógico-deductiva formal.

En nuestro estudio consideramos las justificaciones que están sustentadas en razones de tipo matemático que son particulares, o empíricas, o concretas y prácticas (y de las que eventualmente se deriva sólo verisimilitud o presunción, y no necesidad), en todo caso son razones plausibles. Estas ‘razones’ pueden ser incompletas. En este tipo de justificaciones consideramos las que se basan en razones matemáticas válidas.

Just1.1. Justificaciones basadas en argumentos matemáticos que no son válidos

Son argumentaciones basadas en razones que contienen elementos matemáticos, un término, una representación e incluso se manifiesta la aplicación de una definición o propiedad que el estudiante considera verdadera, sin embargo ésta no lo es desde las matemáticas. Son justificaciones que están sustentadas en razones de tipo matemático que **no** son válidas.

Just2: Justificaciones basadas en fuentes extra-racionales

Están basadas en motivos personales de quien arguye. En este caso la justificación no obedece a una lógica racional, sino al propósito de conseguir alguna ganancia de tipo práctico o algún bienestar personal de aquel que arguye, lo cual no significa que este tipo de argumentación este alejada de la verdad. Cubren sólo el objetivo de promover un grado de convencimiento en el oyente. Incluye argumentos por autoridad, por habituación, basados en razones prácticas y argumentos basados en la retórica.

Por autoridad: consisten en sostener la verdad de un enunciado matemático, una fórmula, un algoritmo o una resolución de un ejercicio, tomando como respaldo la autoridad de las matemáticas, la del libro de texto o la del docente. Según Rigo la autoridad es un mecanismo para generar credibilidad en uno mismo o en otros que es muy frecuentemente utilizada dentro y fuera del salón de clase.

Por habituación: se da credibilidad y se llega a justificar una afirmación o un hecho (normalmente en forma implícita) por la circunstancia de que éstos resultan familiares y conocidos. Se trata de otro tipo de justificación por motivos, porque no giran en torno al objeto matemático de la justificación, sino que descansan en la experiencia de seguridad que para el oyente tiene lo familiar y lo ya visto. Más recientemente Rigo (2009) afirma que cuando en una comunidad alguna creencia es sistemáticamente repetida muchas personas terminan creyendo en ella, plantea que la habituación como una fuente de credibilidad también puede estar presente en las clases de matemáticas. Afirma que es muy probable que después de que los estudiantes aplican reiteradamente una fórmula o de que la escuchen de su maestro, empiecen a creen en esta fórmula y la consideran válida porque ésta parece natural y conocida.

Basados en razones prácticas: Cuando se justifica el estudio o uso de cierto contenido conceptual o procedimental basándose en la idea de que al aprender esto les será más fácil el trabajo. O en ideas de corte pragmático, según Rigo (2009) en muchas escuelas se ha promovido una sub-cultura a través del currículo, libros de texto y evaluaciones, integradas en una serie de creencias y opiniones sobre las tareas matemáticas. Entre esas creencias está la idea de que tienen solo una solución, que las soluciones son exactas y que las mismas se pueden encontrar a través de operaciones o estrategias enseñadas. Los agentes participantes de las clases orientan usualmente sus soluciones apelando a esas razones prácticas.

Basados en la retórica: En las clases, profesores y estudiantes comunican y justifican resultados matemáticos a través de acciones del habla que pueden desencadenar o aumentar la credibilidad a favor de lo que se ha dicho. Una persona puede acabar creyendo en cierto resultado matemático gracias a los recursos retóricos utilizados (consciente o inconscientemente) por quien expone la idea.

Just3: Justificaciones basadas en las operaciones y algoritmos

En las argumentaciones operatorias, la verdad de los enunciados con contenido matemático se sustenta en la confianza que se le concede a las fórmulas y algoritmos matemáticos, bajo la premisa de que su validez es permanente e incuestionable y que los mismos son suficientes para justificar. Ahora bien, esta seguridad puede estar basada en razones cartesianas como las pruebas de las propiedades de un algoritmo o estar basadas en motivos como la fe en las matemáticas. Siguiendo a Rigo (2009) el uso de un algoritmo cualquiera siempre lleva aparejada una justificación, aunque sea en forma virtual, lo cual no significa que sea suficiente o de carácter matemático. La aplicación de una fórmula, una regla o un procedimiento matemático debe estar respaldada en algún tipo de justificación, consciente o inconsciente, sin embargo dado que no siempre se conoce el contexto en el que se aplica el procedimiento y el marco referencial del alumno que lleva a cabo la actividad, no resulta pertinente tipificarla. En la dinámica del salón de clases es difícil determinar cuál es la lógica implícita que lleva al estudiante a sustentar el uso frecuente de un algoritmo y su confianza en él. En vista de lo anterior en nuestro estudio nos limitamos a detectar argumentaciones basadas en las operaciones o algoritmos y no nos interesamos en estudiar de qué manera el estudiante respalda o justifica el uso de los mismos.

En el Capítulo 7 “Análisis retrospectivo de las sesiones” presentamos los resultados del análisis de las justificaciones en gráficos que resumen la frecuencia con que se mostró cada uno de los tipos de justificaciones en la resolución de las siete tareas en ambos grupos.

III. Observaciones sobre la Validez del Análisis de Contenido Realizado

La fase denominada por Cabrera (2009) como exploración del material (Figura 5.5) se centra en evaluar el sistema de codificación y categorización considerado, este investigador sugiere en términos generales la revisión de los resultados producidos con respecto a las unidades de registro y contexto documentadas, se trata de asegurarse de que se ha captado e interpretado el significado aportado por los participantes.

En nuestro estudio el análisis de contenido se ha aplicado para analizar diferentes cuestiones de las dimensiones de análisis descritas en los apartados precedentes. La validez del análisis de contenido se consigue a partir del uso de triangulación, saturación y por consulta de resultados a informantes y coinvestigadores (Pérez, 1994).

A continuación describimos las pautas que consideramos respaldan la validez del análisis de contenido realizado:

- Elaboración del sistema de categorización de las distintas dimensiones de análisis con base en la información del G1 y posterior aplicación del mismo sistema a los datos del G2. Se comprobó que el sistema elaborado resultó adecuado en tanto las categorías utilizadas en el G1 se ajustaron para realizar el análisis de los datos del G2. Es decir la validez del sistema de codificación se asegura por el criterio de saturación.

- El procedimiento seguido en la asignación de códigos se hizo transversalmente en las transcripciones de todos los equipos, esto obligó a repasar numerosas veces el mismo documento, esta revisión incidió en la rectificación de las codificaciones y en la determinación de las reglas usadas para asignar un código a una unidad de registro.
- La codificación y agrupación en categorías ha sido supervisada y discutida con la directora de la investigación, con la que se contrastaron percepciones y dificultades en la interpretación de algunas actuaciones y su correspondiente codificación.
- Triangulación de la información entre los registros escritos y orales, el registro escrito ha servido de apoyo, sustento y fuente para confirmar las actuaciones detectadas en las producciones orales de los equipos.
- Las categorías son homogéneas en tanto todas se refieren a facetas del contenido matemático que se ha trabajado, y todos los indicadores asociados a cada categoría corresponden a actuaciones de los estudiantes que reflejan concepciones o acercamientos relativos a los contenidos matemáticos implicados en las tareas, son pertinentes porque se adaptan a los documentos analizados y ha sido una categorización rica en tanto se han identificado una extensa cantidad de actuaciones, las cuales ofrecen una visión amplia del conocimiento matemático manifestado por los futuros maestros.

5.2.8.4 Análisis de la Dimensión "Logro de las Expectativas de Aprendizaje"

Esta dimensión de análisis está vinculada al objetivo parcial de investigación OE2.1 centrado en describir las actuaciones de los estudiantes en términos de las expectativas de aprendizaje específicas y de las competencias matemáticas consideradas en cada sesión.

El análisis del logro de las expectativas de aprendizaje se ha realizado con base en las informaciones procedentes del trabajo colaborativo de los equipos. El análisis de esta dimensión se centra en la búsqueda de evidencias sobre el logro de las expectativas de aprendizaje específicas vinculadas a cada tarea, este análisis constituye la base sobre la cual interpretamos la posible contribución a las competencias matemáticas de los participantes.

No estudiamos el logro individual de las expectativas de aprendizaje ni concluimos acerca de la competencia como capacidad manifestada por un alumno particular. En este análisis procuramos recuperar las actuaciones manifestadas en el trabajo colaborativo que evidencian el logro del objetivo, sin afirmar que todos los estudiantes del equipo mostraron esa capacidad y que en consecuencia se estimuló o promovió alguna de las competencias matemáticas en todos los miembros del equipo. En su lugar, con este análisis pretendemos aportar una panorámica del porcentaje de los equipos en los que se mostraron actuaciones que evidencian el logro de las expectativas de aprendizaje planificadas. Con base en la observación del tipo de actuación, usando como marco de referencia los descriptores del estudio PISA para los grupos de competencia[72] (OCDE, 2004; Rico y Lupiáñez, 2008), llegamos a concluir sobre el nivel con que se ha trabajado una u otra competencia.

El estudio del logro de los objetivos específicos de aprendizaje aporta información acerca de la contribución a las competencias matemáticas, como afirman Rico y Lupiáñez (2008) "*a las competencias se llega por medio de objetivos, es decir, por medio de capacidades concretas, que hay que organizar*" (p. 215).

El estudio de la contribución de la experimentación a las competencias matemáticas se ha realizado y se organiza en dos partes, atendiendo a los dos objetivos parciales OP2.1 y OP2.2. Primero se hace referencia al logro de las expectativas de aprendizaje con base en las actuaciones manifestadas por los estudiantes como respuesta a las demandas cognitivas de las tareas. Posteriormente se analiza y describe en otro apartado la contribución de la dinámica de trabajo colaborativo y de la metodología de resolución de problemas, esto es la gestión de la clase, al estímulo de las competencias matemáticas.

En la primera parte, el análisis realizado sobre la dimensión cognitiva considerada en los epígrafes del Capítulo 7 titulados "Conocimientos manifestados en la resolución colaborativa"[73], constituye la principal fuente de evidencias sobre el logro de las expectativas de aprendizaje pues debido al interés investigador por conocer las concepciones que sobre los contenidos manifestaban los futuros maestros recogimos acercamientos que evidencian el logro o fracaso de las expectativas de aprendizaje. El interés de este análisis radica en que se contrastan las suposiciones planteadas en la planificación de las tareas y las actuaciones manifestadas en la realidad por los estudiantes lo que nos informa acerca de la contribución de la experimentación al desarrollo de competencias matemáticas de los futuros maestros. Esto quiere decir que aunque se haya previsto que la tarea se relacionaba con ciertos objetivos específicos e indirectamente promoviera el desarrollo de ciertas competencias matemáticas, la realidad pudo ser otra ya que existía la posibilidad de que los estudiantes hayan abordado la tarea desde otra vía no contemplada o que no lograran resolverla. En síntesis, el fracaso o éxito del logro de las expectativas de aprendizaje permiten extraer información acerca de la contribución de la experimentación al desarrollo de las competencias matemáticas.

En la segunda parte del análisis de esta dimensión se justifica la manera en la que la dinámica de trabajo colaborativo y la elección de estudiar los contenidos a través de la resolución de problemas y no desde una metodología expositiva, contribuyen a la estimulación de las competencias matemáticas plantear y resolver problemas, comunicar, y argumentar-justificar. Con el objetivo de sustentar las razones por las cuales consideramos que la dinámica de trabajo ha estimulado tales competencias se han utilizado los descriptores que propone el estudio PISA para las competencias *plantear y resolver problemas* y *comunicar*, y como se describió en el Apartado 5.2.8.4 se usaron

[72] Reproducción, conexión y reflexión.
[73] Que se ha analizado en los apartados 7.1.1, 7.2.1, 7.3.1, 7.4.1, 7.5.1, 7.6.1, y 7.7.1 del Capítulo 7.

otros descriptores procedentes de la investigación desarrollada por Rigo (2009) para la competencia *argumentar-justificar*.

5.2.8.5 Aspectos Metodológicos del Estudio de Casos

El estudio de casos que presentamos en el Capítulo 8 se centra en el análisis de las modificaciones en los conocimientos matemáticos mostradas por los estudiantes en las dos fases de trabajo individual, el realizado al inicio de cada sesión y el trabajo individual realizado sobre la misma tarea fuera de clase (Ver Figura 5.11). Considerando este objetivo indicamos que el estudio de casos que realizamos es un análisis cognitivo del individuo[74] Simon (2012).

El desarrollo de este estudio de casos se justifica en dos de los pilares de esta investigación: la metodología de trabajo en el aula elegida y las expectativas de análisis de la información requeridas en los experimentos sobre el desarrollo del conocimiento del profesor expuestas por Simon (2000, 2012). Uno de los intereses que motivaron la adopción de la metodología de trabajo en cuatro fases, ha sido conocer de qué manera los estudiantes re-elaboran individualmente la resolución de la tarea después de la experiencia que ha tenido lugar en el salón de clase, consideramos que esta doble faceta de trabajo individual permitiría conocer las modificaciones en los conocimientos matemáticos expuestos originalmente por los estudiantes. Por otro lado Simon (2000) afirma que la metodología de investigación TDE proporciona una perspectiva dual sobre el desarrollo del conocimiento del profesor coordinando análisis sobre el desarrollo del conocimiento individual y grupal. El análisis del conocimiento manifestado en los equipos se muestra en el Capítulo 7. El análisis del desarrollo del conocimiento individual se realiza mediante el estudio de casos el cual es objeto del Capítulo 8.

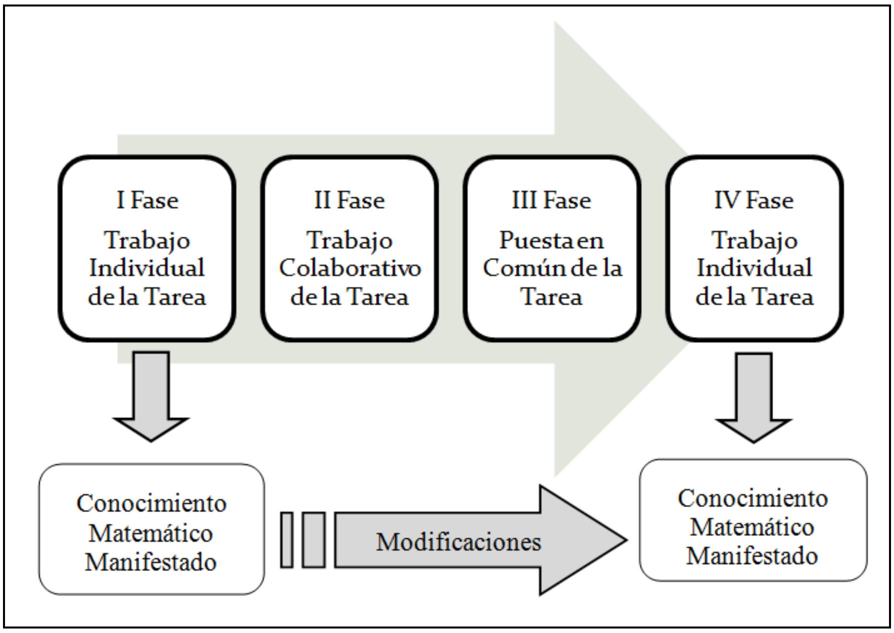


Figura 5.11. Fases de la metodología de trabajo implicadas en el estudio de casos

[74] Ver Tabla 5.3 del Capítulo 5.

El conocimiento matemático manifestado por los estudiantes se ha descrito mediante las categorías e indicadores de actuaciones detallados en el Capítulo 7. Recordamos que las categorías de análisis del conocimiento matemático, manifestado en la resolución de las tareas, organizan agrupaciones de actuaciones en relación con algún conocimiento conceptual o procedimental concerniente a la razón o a la proporcionalidad. Por ejemplo, una de las categorías de análisis de los conocimientos expuestos en la resolución de la Tarea 2 ha sido la *Representación de la Razón* en relación a la cual se han identificado actuaciones que responden a distintas representaciones, éstas se han asumido en nuestro estudio como indicadores de esta categoría y se han codificado mediante las abreviaturas Rep1, Rep2, Rep3, Rep4, Rep5, Rep6.

Reconocemos que los indicadores asignados a las actuaciones expuestas por los estudiantes admiten múltiples clasificaciones. Sin embargo, para efectos del estudio de casos hemos considerado una amplia subdivisión de los indicadores de actuación según dos tipos:

- Indicadores Tipo A: Contemplan concepciones[75] "adecuadas" en relación con el conocimiento matemático de referencia (el compartido por la comunidad académica), específicamente en relación con conocimientos conceptuales y procedimentales concernientes a la razón y a la proporcionalidad.
- Indicadores Tipo B: Consideran concepciones "inadecuadas" en relación con el conocimiento matemático compartido por la comunidad académica. Se han asignado a las actuaciones que reflejan errores relacionados con dificultades u obstáculos asociados a la razón y la proporcionalidad (NP3, Rel.3, (a.1), (a.3), CPr.3, IR1.3, (b.3), (c.3), CoAdMu2, InPo2, InPo3, Error en RT, Rep4(D), Error en CoR, Error en RPr, IR5, IE3, C5).

Esta subdivisión se ha realizado con el fin de caracterizar el tipo de modificación que el estudiante muestra en su trabajo posterior. La modificación expuesta en el trabajo posterior se valorará como positiva, negativa u "otras" (incluye ausencia de modificaciones) según haya sido el tipo de indicador (A ó B) expuesto en la primera entrega del trabajo.

Postura en Relación con el Término "Modificaciones"

Para efectos del estudio de casos asumimos que una modificación es cualquier transformación o cambio en el conocimiento matemático expuesto en la segunda entrega del trabajo individual tomando como referencia el conocimiento matemático expuesto en la primera entrega individual de la misma tarea[76]. Es la variación de alguno(s) o todos los elementos que caracterizan el conocimiento matemático manifestado en el primer trabajo individual.

[75] Como se ha indicado en otros sitios de este documento entendemos el término "concepción" desde la perspectiva expuesta en Hitt (2007).

[76] Consideramos también los casos en los que éste conocimiento matemático estuvo ausente, es decir aquellos ejercicios que el estudiante no resolvió en la primera fase de trabajo individual pero que sí resolvió posteriormente.

Aunque no es posible aseverar con total certeza que tales modificaciones se deban al trabajo realizado colaborativamente o a la puesta en común de la tarea, consideramos que es posible que esos cambios se hayan visto influenciados por la dinámica e intercambios sucedidos en esos dos momentos. A pesar de que contamos con los datos para contrastar las modificaciones individuales con la información del trabajo realizado en el equipo y la puesta en común (análisis social del individuo), no abordamos esta cuestión debido a la necesidad de delimitar el trabajo de nuestra investigación, este análisis es una línea que queda abierta como perspectiva para un estudio posterior.

Descripción de los Tipos de Modificaciones

De acuerdo con el tipo de indicador manifestado en el primer trabajo individual y según la diferencia en las frecuencias con que éste se ha presentado en los dos trabajos individuales reconocemos tres posibilidades: modificaciones positivas, modificaciones negativas y ausencia de modificaciones.

La diferencia en el número de veces que se ha detectado un indicador es muestra de una modificación. Si el número de indicadores se mantiene, tal y como se aborda en la última columna de la Tabla 5.14, no significa necesariamente que no se hayan dado modificaciones, pues los indicadores manifestados inicialmente podrían mostrase en otro lugar de la tarea.

En la Tabla 5.14 sintetizamos las modificaciones contempladas en el estudio de casos según las consideraciones previas, después de la misma describimos estas posibilidades.

Tabla 5.14. *Tipos de modificaciones contempladas en el estudio de casos*

	Aumento $a < b, a \neq 0$		Disminución $a < b, a \neq 0$		Igual Cantidad $a = b$	
	0→a	a→b	a→0	b→a	Mismo ejercicio	Diferente ejercicio
Indicador Tipo A	+	+	–	–	*	+
Indicador Tipo B	*	–	+	*		–

* Otras: No hubo modificación o representan cambios que no aportan información sobre el conocimiento matemático manifestado.
Las letras *a* y *b* representan la cantidad de veces que se ha asignado el indicador a la resolución del estudiante.

Modificaciones Positivas (+)

Se considera que una modificación es positiva en los siguientes casos:

- Si en el trabajo fuera de clase se presenta un aumento en la frecuencia de aparición de un indicador Tipo A (que no corresponde a una concepción inadecuada). Considera los casos de aumento 0→a y a→b correspondientes a la fila del indicador Tipo A.

- Si la modificación corresponde a un cambio en un indicador Tipo B (referido a una concepción inadecuada) mostrada en el trabajo individual en clase y superado en el trabajo después de clase. Considera el caso de disminución a→0 correspondiente a la fila del indicador Tipo B.
- Si el indicador aparece el mismo número de veces pero en lugares diferentes de la tarea consideramos que sí se ha dado una modificación y ésta es positiva si este indicador es del Tipo A.

Modificaciones Negativas (-)

La modificación se considera negativa:

- Si en el trabajo posterior se muestra cualquier tipo de disminución en el número de indicadores correspondientes a una concepción adecuada mostrada en el trabajo inicial. Considera los casos de disminución a→0 y b→a correspondientes a la fila del indicador Tipo A.
- Si se muestra un aumento en la cantidad de indicadores correspondientes a una concepción inadecuada, indicador Tipo B. Considera el caso de aumento a→b correspondiente a la fila del indicador Tipo B.
- Si el indicador aparece el mismo número de veces pero en lugares diferentes de la tarea consideramos que sí se ha dado una modificación y ésta es negativa si el indicador es del Tipo B.

Otras (∗)

Se han dado algunos cambios en las resoluciones individuales posteriores sobre las que no hemos centrado nuestra atención debido a que no nos aportaban información valiosa acerca de los conocimientos matemáticos aplicados en las tareas. Esta situación se da en dos casos, a saber:

- En el trabajo inicial el estudiante no resolvió el ejercicio, y en el trabajo posterior manifestó una actuación catalogada con un indicador Tipo B (referido a una concepción inadecuada). Considera el caso de aumento 0→a correspondiente a la fila del indicador Tipo B.
- En el trabajo posterior se muestra una disminución en la frecuencia de aparición de un indicador Tipo B, correspondiente a una concepción inadecuada mostrada en el trabajo inicial. Es una disminución pero sigue estando presente. Considera el caso de disminución b→a correspondiente a la fila del indicador Tipo B.

Consideramos que no se ha dado una modificación si un indicador, tipo A o B, aparece el mismo número de veces en el mismo lugar de la tarea.

La síntesis de las modificaciones detectadas se presenta en tablas como se ejemplifica en la Figura 5.12. La primera columna se refiere a los tipos de indicadores (A ó B) que se han asignado a las actuaciones manifestadas por los estudiantes. En la segunda y tercera columna indicamos la cantidad de veces que se ha asignado el indicador en cuestión a las actuaciones mostradas en cada uno de los dos trabajos individuales (trabajo en clase y trabajo fuera de clase). En la última columna indicamos el tipo de modificación que se ha detectado según sea positiva (+) o negativa (–) y en el caso de que no se haya dado ninguna modificación lo indicamos con un asterisco (*). En la última fila presentamos el total de modificaciones de cada tipo.

Tabla x. Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B2, Tarea 1

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Comp. P-P	1	2	+
Comp. P-T	2	3	+
NP1	0	1	+
NR2	1	1	*
Total de Modificaciones			+3

Figura 5.12. Ejemplo de la tabla de síntesis de las modificaciones identificadas

Criterios de Selección de Casos

En relación con los criterios de selección de los estudios de casos Stake (1995) señala que "el primer criterio debería ser maximizar lo que podemos aprender" (p. 4). Esto no quiere decir otra cosa que lo más trascendental es elegir el caso que ofrezca las mejores y mayores oportunidades de aprendizaje, con el que podamos aprender en profundidad sobre la problemática seleccionada, o del que, simplemente, más podamos aprender y comprender. Debería preocuparnos, como señala Stake (1995), seleccionar aquel caso que ofrezca las mejores y mayores oportunidades de aprendizaje con respecto a la problemática u objeto de estudio. En relación con nuestra investigación ya hemos indicado que nuestro interés se centra en analizar las modificaciones en los conocimientos matemáticos mostradas por los estudiantes en las dos fases de trabajo individual. Por lo tanto, un aspecto primordial en la elección de los casos es contar con resoluciones lo más completas posibles, con el menor número de tareas o ejercicios sin resolver. Para cumplir este propósito hemos considerado tres criterios que describimos a continuación y que nos condujeron a la elección de 6 casos.

El criterio inicial que hemos considerado para elegir los estudios de caso ha sido seleccionar aquellos estudiantes que asistieron a todas las sesiones de la experimentación y que realizaron las tres fases de resolución de las 7 tareas, esto es el trabajo individual en clase, el trabajo colaborativo y el trabajo individual después de clase. Con base en este criterio obtuvimos 12 posibles casos, seis estudiantes de cada grupo.

G1: B2, D6, A3, C2, C10, B7.

G2: D1, C3, C1, B14, A14, A1.

El segundo criterio que aplicamos para elegir los casos se refiere a que las resoluciones individuales de las tareas se hayan realizado de manera completa. Esto quiere decir que hemos eliminado los casos de estudiantes que han dejado sin resolver completamente alguna de las resoluciones individuales. Encontramos que el estudiante A3 ha entregado la resolución posterior de la Tarea 3 sin realizar, motivo por el cual no formará parte del estudio de casos. De igual forma las estudiantes A1 y D1 del G2 han entregado el trabajo individual inicial sobre la Tarea 3 sin resolver. Después de aplicar este criterio obtuvimos como posibles casos los estudiantes B2, C2, C10, B7 y D6 del G1, y los estudiantes B14, A14, C1 y C3 del G2.

Observamos que en el G1 los estudiantes B2 y C2 han trabajado durante las dos primeras sesiones en el mismo equipo, lo mismo sucede con los estudiantes C10 y B7 que han compartido equipo en la segunda sesión. En el G2 los estudiantes B14 y A14 han trabajado en el mismo equipo en todas las sesiones. Con el objetivo de delimitar el estudio de casos decidimos elegir solamente uno de los dos estudiantes que han trabajado en el mismo equipo. Para decidir cuál de los dos estudiantes formarían parte del estudio de casos realizamos una observación preliminar de sus trabajos con el fin de detectar cuál ha mostrado el mínimo número de ejercicios sin resolver, con base en este criterio obtuvimos los seis casos finales: los estudiantes B2, D6 y B7 del G1 y los estudiantes C1, B14 y C3 del G2.

Por lo tanto los estudiantes seleccionados cumplen los siguientes criterios:

1. Asistencia a todas las sesiones de la experimentación y entrega de las tres resoluciones de las 7 tareas (individual en clase-colaborativa-individual fuera de clase).
2. No han dejado, al completo, tareas sin resolver.

Como ya se describió el tercer criterio se aplicó a las parejas de estudiantes que en alguna o en varias sesiones compartieron trabajo en equipo, esto con el fin de delimitar el estudio de casos, este criterio selecciona a los estudiantes que han mostrado la mínima cantidad de ejercicios sin resolver.

En el Capítulo 8 discutimos las modificaciones manifestadas por estos seis estudiantes aportando interpretaciones de los cambios en el conocimiento matemático expuesto por ellos en las dos resoluciones individuales.

5.2.9 Fiabilidad y Validez del Estudio

Como se indicó en el apartado “Criterios de evaluación de los estudios de diseño” (Apartado 5.1.3), los investigadores han abordado cuestiones relacionadas con la evaluación de la calidad de los estudios de diseño entre las cuales están la fiabilidad, replicabilidad, capacidad de generalización y utilidad.

En relación con la fiabilidad indicamos que en nuestro estudio se sustenta mediante la descripción detallada de todo el proceso de planificación, puesta en práctica y análisis de la experimentación. En estas descripciones se atienden las decisiones tomadas en cada fase el experimento así como la justificación de las mismas. En este capítulo se describe el proceso de análisis de la información según las cinco dimensiones consideradas y en el Capítulo 6 se describe paso a paso la planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones.

Otro elemento que contribuye a la fiabilidad es el hecho de hacer explícito el marco de interpretación usado en el análisis de cada dimensión considerada, éste contribuye a garantizar la objetividad de las interpretaciones resultantes en la investigación (Tabla 5.12).

En los Anexos E y F se exhiben las transcripciones de los trabajos colaborativos codificadas, las trascripciones de las síntesis de las puestas en común codificadas (Anexos G y H), los trabajos escritos de los equipos, y los trabajos individuales de todos los participantes (Anexos K y L). Esta exhibición pública constituye la evidencia empírica principal para que los evaluadores y lectores de esta investigación acepten, rechacen o sugieran modificaciones en relación con las interpretaciones y conclusiones que se derivan del estudio.

En el caso de la investigación de diseño, como ya se dijo, no es posible la replicabilidad en el sentido estricto del término. Sin embargo consideramos que las decisiones orientadas a la mejora del mismo, producto de los análisis preliminares, derivan en el perfeccionamiento del diseño, este proceso contribuye a que el diseño se ajuste o adapte a nuevas circunstancias propias de otros escenarios en los cuales éste se use. La descripción detallada del experimento constituye un elemento necesario para que otros investigadores puedan usar los productos que deriven del mismo con el fin de promover el aprendizaje y (o) las actuaciones detectadas en otras circunstancias, con este aspecto se contribuye a la capacidad de generalización del estudio.

La validez interna se sustenta en la convivencia con los participantes en las sesiones de la asignatura desde el primer y hasta el último día de clases. Esta convivencia permitió conocer a los participantes y familiarizarlos con la investigadora, quien trabajó con ellos en las sesiones prácticas como una participante más del grupo.

El desarrollo de la experimentación se ha llevado a cabo en un escenario natural de formación de maestros de primaria, lo cual ha permitido recoger y reflejar las actuaciones de los estudiantes tal y como se han mostrado. Lo obtención de la información se ha obtenido a través de fuentes diversas: registros escritos individuales, colectivos, grabaciones en audio y video. Esto ha permitido la triangulación de información, específicamente los registros escritos de los equipos han sido utilizados para confirmar o rechazar interpretaciones de las actuaciones manifestadas en las producciones orales.

En relación con la utilidad de este estudio señalamos que el diseño instruccional elaborado es uno de los principales aportes que se derivan. Consideramos que tanto la metodología de trabajo seguida en el aula como las tareas matemáticas elegidas constituyen un material que puede utilizarse en otros contextos de formación de maestros. La descripción y categorización de las actuaciones que recogemos en el Capítulo 7 constituye un material de referencia que pueden utilizar investigadores como formadores de maestros para enmarcar las actuaciones de otros estudiantes que resuelvan las mismas tareas u otras que contemplen las mismas variables.

El proceso de desarrollo de esta investigación se ha presentado en diversos ámbitos de intercambio entre investigadores y especialistas de Didáctica de la Matemática, en los cuales se has expuesto distintos elementos y avances de la investigación. En el Anexo O recogemos los espacios en los cuales se compartió el proceso de investigación con otros investigadores quienes aportaron sugerencias para el desarrollo de la misma, así como las publicaciones en las que se han expuesto avances o elementos particulares de diversas partes del estudio.

Capítulo 6. Descripción de la Planificación, Desarrollo y Análisis Preliminar de las Sesiones

Como se indica en el título del capítulo, éste está dedicado a describir la planificación, desarrollo y análisis preliminar de las sesiones en las que aplicamos nuestro diseño. La descripción de cada una de las sesiones de trabajo, llevadas a cabo en el aula, la vamos a realizar, siguiendo la pauta de los experimentos de diseño, a través de tres apartados: planificación, desarrollo y análisis de lo ocurrido en cada sesión, como recogemos a continuación.

I. *Planificación de la sesión*, se incluyen objetivos tanto de investigación como de instrucción de la sesión, contenidos de la instrucción, competencias matemáticas posibles de promover y las tareas a realizar en el aula (puede suceder que se trate de una o más de una tarea), todo ello se resume en una tabla. Se describe, así mismo, en este apartado se presenta la preparación de la puesta en común a realizar después del trabajo individual de los alumnos (para cada una de las tareas programadas); se tiene en cuenta la metodología, si bien no se hace mención a ella ya que en todas las sesiones se sigue la misma metodología de trabajo colaborativo que ya quedó descrita con detalle en el Apartado 4.3.2 y no consideramos conveniente duplicar informaciones. Incluimos una descripción detallada de las tareas que se aplicarán considerando las variables que las caracterizan así como de la relación entre cada una de éstas y las expectativas de aprendizaje: objetivos específicos y competencias matemáticas.

II. *Desarrollo de la sesión*, se trata de describir cómo han discurrido las fases de trabajo individual, colaborativo y puesta en común de cada una de las tareas realizadas, en los dos grupos con los que se ha trabajado. En todos los casos seguiremos el mismo patrón de presentación al hacer dicha descripción.

III. *Análisis preliminar de la sesión* en los dos grupos con los que se ha trabajado y toma de decisiones.

6.1 PRIMERA SESIÓN

6.1.1 Planificación de la 1ª Sesión

En la Tabla 6.1 se recoge la planificación preparada para esta sesión. Tuvo como objetivos de investigación: conocer las concepciones iniciales que mostraban los estudiantes en torno a la noción de razón y a las relaciones con los conceptos de fracción (parte-todo) y porcentaje, identificar estrategias y razonamientos usados en la resolución de situaciones que involucran la noción de razón, explorar y analizar las dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver este tipo de tareas, habituarlos con la investigadora y con la dinámica del trabajo colaborativo programada para ésta sesión y para el resto de las sesiones, y detectar las dificultades que enfrentan durante este tipo de actividad.

Para trabajar los contenidos y objetivos instruccionales correspondientes a esta sesión se planificaron dos tareas, "Fracción, razón y porcentaje" y "Preferencia en el refresco de cola", las cuales se analizarán con detalle en el apartado siguiente. A través del desarrollo de estas tareas los estudiantes van a trabajar algunos contenidos del Foco 1, centrado en los significados y usos de la razón, a través las pautas de la metodología de trabajo colaborativo elegida para la gestión de la dinámica de clase.

Tabla 6.1. *Planificación de la primera sesión*

Objetivos de la Investigación para la Primera Sesión	OP1.2.1. Conocer las concepciones que muestran los estudiantes en torno a la razón, fracción y porcentaje así como sobre la relación entre éstas. OP1.2.2. Identificar procedimientos aplicados en la resolución de situaciones que involucran la noción de razón. OP1.3.1. Promover la comprensión de la unidad de referencia en una comparación. OP1.3.2. Promover la comprensión de la razón y sus propiedades. OP1.4 Identificar fortalezas y debilidades de la dinámica de trabajo colaborativo puesto en práctica. OP1.5 Identificar fortalezas y debilidades de las tareas matemáticas aplicadas. OP2.1 Describir las actuaciones de los estudiantes en términos de las expectativas de aprendizaje: objetivos específicos y competencias matemáticas consideradas.
Contenidos Instruccionales del Foco 1	La razón como uno de los significados del número racional (comparación parte-todo, razón, operador, cociente). Razón como comparación parte-parte o parte-todo. Significado de la razón como índice comparativo Representación simbólica, gráfica, verbal de la razón. Razones equivalentes.

Tabla 6.1. *Planificación de la primera sesión*

Objetivos Específicos Instruccionales	1. Identificar conexiones entre los significados de las fracciones como representantes del número racional (parte-todo, operador, cociente y razón). 2. Describir comparaciones parte-parte y parte-todo, utilizando los subconstructos y representaciones del número racional. 3. Interpretar y realizar comparaciones entre cantidades desde las perspectivas aditiva y multiplicativa. 4. Interpretar el significado de la razón, de sus elementos o del valor racional de la misma en distintas situaciones. 7. Emplear diferentes representaciones para expresar las razones. 12. Aplicar la noción de razón y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.
Competencias Matemáticas	Pensar y Razonar Representar Argumentar y Justificar Comunicar Plantear y Resolver Problemas
Tareas	"Fracción, Razón y Porcentaje" "Preferencia en el Refresco de Cola"

6.1.1.1 Planificación de las Tareas de la 1ª Sesión

Como hemos comentado anteriormente, para estudiar el logro de los objetivos de la sesión y los objetivos de contenido se propuso a los estudiantes dos tareas: "Fracción, razón y porcentaje" y "Preferencia en el refresco de cola". A continuación describimos cada una de ellas.

Tarea 1: Fracción, Razón y Porcentaje

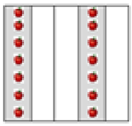
Se ha elegido esta tarea como la primera a aplicar en la intervención ya que permite enlazar el estudio de la razón con los contenidos que se venían estudiando previamente (Ver Anexo D, *Descripción del trabajo realizado en la asignatura antes y entre las sesiones*). En el contexto del desarrollo de la asignatura, la primera sesión de la experimentación cierra el estudio del Tema 3 "Números Racionales".

Esta tarea proviene del *Connected Mathematics Project* (Lappan, Fey, Fitzgerald, Friel y Phillips, n.d.) de la Universidad Estatal de Michigan, la hemos traducido y adaptado, incluyendo frutas conocidas para los participantes (Figura 6.1). Es una tarea orientada a que los estudiantes describan mediante palabras y (o) símbolos una misma situación, ésta se refiere a parcelas de cultivo de manzanas, naranjas y cerezas. La resolución de la tarea se centra en la descripción de la comparación entre dos partes de un todo aplicando las nociones de fracción, razón y porcentaje. Esta tarea es introductoria y se ha elegido, entre otras razones, porque permite vincular el trabajo que se viene realizando en la asignatura con los contenidos que se abordan en la experimentación.

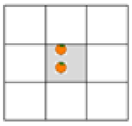
Fracción, Razón y Porcentaje

Las figuras de abajo representan tres campos de cultivos, de manzanas, naranjas y cerezas respectivamente. Cada campo se ha dividido en regiones cultivadas (partes con figuras) y regiones no cultivadas (partes en blanco).

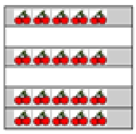
1. Para cada situación, escribe afirmaciones comparando las regiones cultivadas y las no cultivadas. En el caso (a) para expresar la comparación usa el significado de fracción, en el caso (b) usa la idea de porcentaje y en caso (c) usa la noción de razón.



a. ______________________________



b. ______________________________



c. ______________________________

Figura 6.1. Tarea 1 "Fracción, razón y porcentaje"

De acuerdo con las variables de tarea se ha incluido la representación gráfica debido a que entendemos que el carácter concreto y visual, puede favorecer la expresión de las comparaciones mediante otras representaciones. Las cantidades de esta tarea son números naturales, conjunto que se puede considerar como una magnitud discreta.

La tarea demanda de la expresión de una comparación del tipo parte-parte, no obstante es posible que los estudiantes también manifiesten la comparación entre una de las partes y el todo. En particular, la razón en el ejercicio (c) ha de ser del tipo parte-parte. Desde el punto de vista del análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal (1983) la razón implicada en el ejercicio (c) es una composición. Considerando el tipo de situación, la Tarea 1 es pública.

Según el nivel de complejidad (Rico y Lupiáñez, 2008) la Tarea 1 es de conexión, tal y como se muestra en la Tabla 6.2. Este grado de complejidad viene dado principalmente por el requerimiento de establecer una relación del tipo parte-parte, lo cual no es una demanda habitual para los estudiantes de nuestro estudio.

Tabla 6.2. *Descripción de la Tarea 1 según nivel de complejidad*

		Tarea 1
Reproducción	Contextos familiares	
	Conocimientos ya practicados	
	Aplicación de algoritmos estándar	X
	Realización de operaciones sencillas	
	Uso de fórmulas elementales	
Conexión	Contextos menos familiares	X
	Interpretar y explicar	
	Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación	X
	Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios	
Reflexión	Tareas que requieren comprensión y reflexión	
	Creatividad	
	Ejemplificación y uso de conceptos	
	Relacionar conocimientos para resolver problemas más complejos	
	Generalizar y justificar resultados obtenidos	

Relación de la Tarea 1, los Objetivos y las Competencias Matemáticas

La expresión de las comparaciones entre regiones cultivadas y no cultivadas aplicando las nociones fracción, razón y porcentaje, exige conocer cada una de éstas y emplearlas adecuadamente en la descripción de las comparaciones. Ha de razonarse cómo ajustar cada una de las nociones a una misma situación para lo cual es preciso establecer elementos distintivos de cada noción (ej. lenguaje asociado a cada una) así como similitudes. Esta actuación ejemplifica el tipo de actuaciones consideradas en el objetivo específico 1, identificar conexiones entre los significados de las fracciones como representantes del número racional (parte-todo, operador, cociente y razón), mismo que en el marco de la tarea posiblemente contribuya a la competencia *pensar y razonar*.

Consideramos que con esta situación los estudiantes podrían movilizar el lenguaje y representaciones asociadas a cada uno de las nociones y aunque se espera que manifiesten representaciones verbales, también es posible que la tarea les lleve a utilizar otras representaciones de tipo simbólico. Además podrían reflexionar en el significado (parte-todo, razón) o representación (fracción, porcentaje, simbólica de la razón) que mejor describe la situación. De modo que la Tarea 1 ejemplifica, de modo concreto, el tipo de desempeño contemplado en el objetivo específico 2 (Describir comparaciones parte-parte y parte-todo, utilizando los subconstructos y representaciones del número racional). El logro de este objetivo requiere de actuaciones en las que las competencias *pensar y razonar*, *comunicar y representar*, juegan un papel notable.

En síntesis, desde el punto de vista de los contenidos matemáticos y expectativas de aprendizaje promovidas en la resolución de la Tarea 1, se tiene que el trabajo sobre la misma posiblemente contribuya a las competencias: (a) *pensar y razonar*, (b) *comunicar,* y (c) *representar*.

Competencias matemáticas que posiblemente se promuevan en todas las sesiones

No obstante, destacamos que si se considera que la dinámica de trabajo en el aula se basa en la colaboración e intercambio de respuestas relativas a la resolución de la tarea consideramos que posiblemente en todas las sesiones se favorezca el desarrollo de la competencia matemática *comunicar*.

En nuestro trabajo se ha aceptado que una justificación es una razón o conjunto de razones, expresadas verbalmente, gestualmente o por escrito, que se dan en clases de matemáticas para sustentar enunciados con contenido matemático y para promover un grado de adhesión y convencimiento hacia él (Rigo, 2009). También se ha compartido la visión de Krummheuer (1995), Yackel y Cobb (1996) quienes consideran que una argumentación puede ser la explicación intencional del razonamiento de una resolución y que este proceso es un fenómeno social. Desde esta perspectiva, se ha considerado que la dinámica de trabajo colaborativo puede favorecer la manifestación de justificaciones durante el trabajo de los equipos, de modo que es posible que la experimentación desarrollada en todas las sesiones contribuya al desarrollo de la competencia *argumentar y justificar*.

Por otro lado se ha decidido que la gestión de la clase se lleve a cabo a través de la resolución de problemas (Ver Análisis de Instrucción, Apartado 4.3.1), éstos son de desarrollo y están situados en entornos de la vida cotidiana. Respecto a la aplicación de los mismos recalcamos que intencionalmente se tomó la decisión de no desarrollar previamente un proceso formal de instrucción debido a que se pretende estudiar el desarrollo de los contenidos a través de la resolución de los problemas. En vista de esta circunstancia consideramos que posiblemente en todas las sesiones se contribuya al desarrollo de la competencia *resolver problemas*.

Planificación de la Puesta en Común de la Tarea 1

Para la puesta en común se ha preparado una presentación de diapositivas cuyo fin es servir de guía en el desarrollo de esta fase. En las primeras diapositivas se incluyó la información referente al rol de la investigadora y al de los estudiantes, posteriormente se incluyeron otras con la descripción de la dinámica de aula que se seguiría y la descripción del tiempo que podían dedicar en las fases, individual y colaborativa.

Se preparan diapositivas con posibles afirmaciones relativas a la resolución de la Tarea 1. En éstas se concretó parcialmente la suposición que enunciamos previo a la puesta en práctica de la tarea, pues de antemano pensamos algunas de las posibles afirmaciones que los estudiantes podrían aportar. En la Figura 6.2 mostramos la diapositiva preparada en relación con el ejercicio (a) de la tarea.

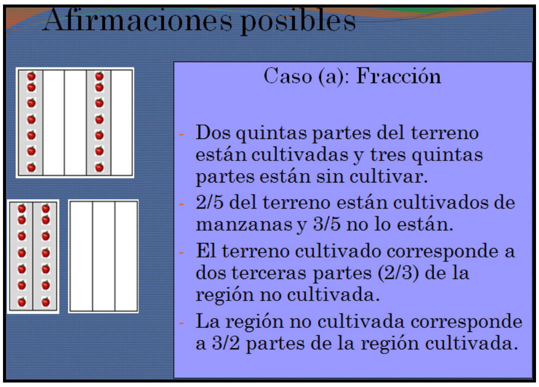


Figura 6.2. Posibles afirmaciones en la resolución del ejercicio (a) de la Tarea 1

Como indicamos en la conjetura planteada, consideramos que es posible que los estudiantes relacionen las partes cultivadas o no cultivadas con el total de campos cultivados (parte-todo) y creemos que es viable que algunos estudiantes establezcan la relación entre las dos partes (parte-parte). Además es posible que usen tanto expresiones verbales como simbólicas de la fracción.

Para el caso de la expresión porcentual de la relación entre las partes hemos considerado que es posible que apliquen, al igual que en el caso anterior, la relación parte-todo y la parte-parte. Creemos que es posible que surjan expresiones tales como las que se muestran en la Figura 6.3.

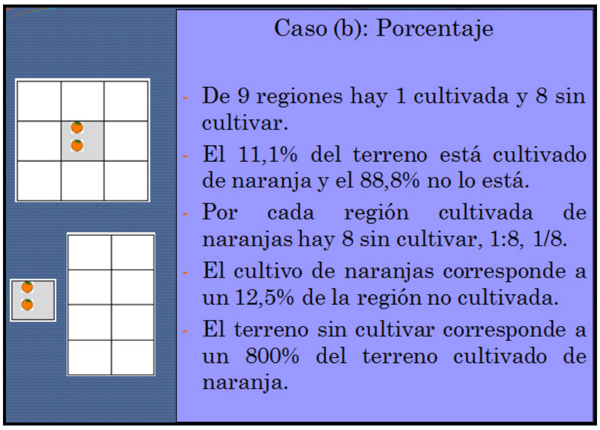


Figura 6.3. Posibles afirmaciones en la resolución del ejercicio (b) de la Tarea 1

Aunque no contamos con suficiente información, procedente de investigaciones previas, en relación con la expresión de afirmaciones relativas a la razón, hemos considerado la posibilidad que establezcan la relación entre alguna de las partes y el todo, o bien que no lo hagan y consideren la relación entre lo cultivado y no cultivado. Sin embargo, con respecto a la noción de razón y, debido a la ausencia de datos de otros estudios, nos interesa conocer las ideas iniciales que puedan mostrar los estudiantes. En la Figura 6.4 mostramos algunas afirmaciones posibles que entendemos que los estudiantes pueden enunciar en relación con la noción de razón.

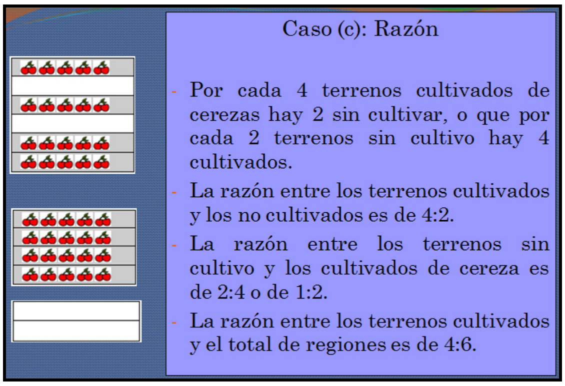


Figura 6.4. Posibles afirmaciones en la resolución del ejercicio (c) de la Tarea 1

Por otro lado esperamos que, a partir de la puesta en común, conozcan conexiones entre estas tres nociones ya que fracciones, porcentajes, decimales y razones son diferentes descripciones o representaciones de algo que, en cierto sentido, se puede considerar como lo mismo[77] dado que todas permiten representar la relación parte-todo. Fracciones, porcentajes y razones tienen en común que representan una comparación, entre lo que está siendo descrito y una "unidad" de referencia.

En situaciones del contexto cotidiano cambiamos rápidamente y casi sin notarlo entre las notaciones y formas propias de las fracciones, porcentajes, decimales o razones, de ahí la relevancia de que los maestros en formación sean conscientes de esta situación y promuevan durante su labor docente experiencias a los niños que estén orientadas al desarrollo de esta red de relaciones. La comprensión de las relaciones entre fracciones, porcentajes, decimales y razones, permiten cambiar fácilmente de una forma de representación a otra.

Con base en los argumentos descritos, para la puesta en común se planifica realizar alguna reflexión sobre algunas ideas relativas a estas nociones matemáticas, las presentamos en la Figura 6.5.

[77] Por ejemplo en las situaciones: Pepe se comió 3/5 de una barra de chocolate, 3 de cada 5 conductores diariamente están en atascos de tráfico, esta comida está compuesta por un 60% de agua, falta 0.6 Km para llegar hasta el campamento, tres partes de arena por cada dos de cemento, la fracción 3/5 representando un número racional.

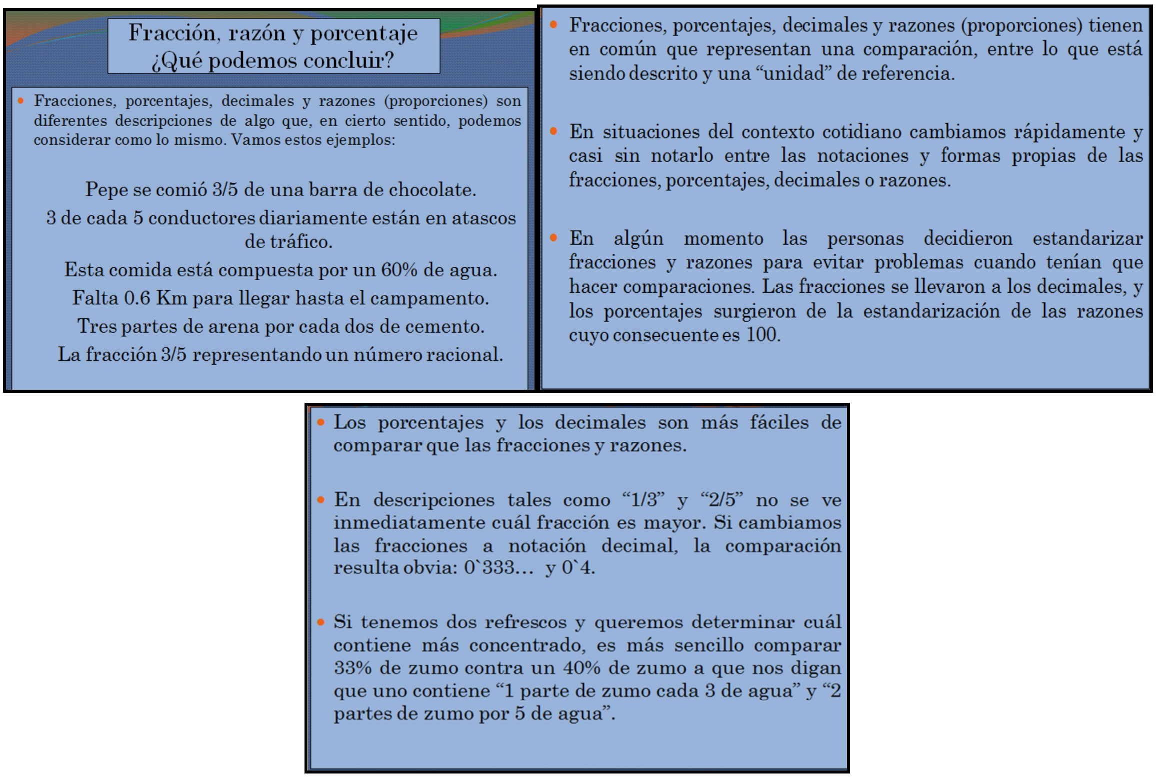


Figura 6.5. Reflexiones sobre las nociones de fracción, razón, decimales, porcentajes

Posteriormente hemos considerado mostrar el esquema de la Figura 6.6 y luego ejemplificar cada una de las relaciones con los ejemplos descritos después de la figura.

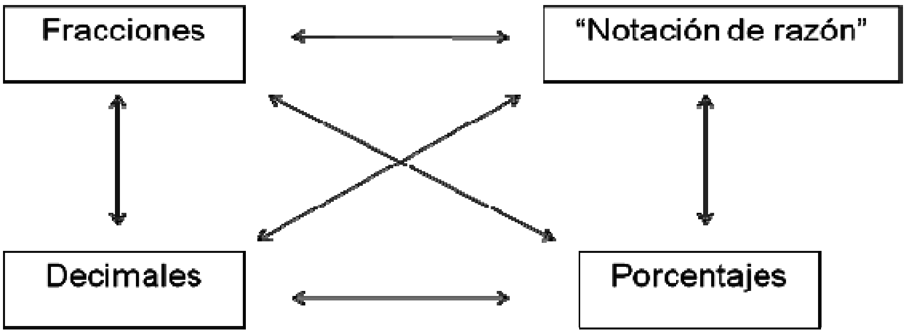


Figura 6.6. Algunas relaciones entre representaciones de los números racionales

Porcentaje a decimal: para calcular el x% de una cantidad "b" (x% de b) se puede hacer dividiendo x entre 100 y multiplicar el resultado obtenido por la cantidad "b". Por ejemplo, para calcular el 2% de 500 se divide 2 entre 100, se obtiene 0,02 y este resultado se multiplica por 500, de este modo se calcula que el 2% de 500 es 10.

Fracción a decimal: si se tiene una fracción a/b se puede calcular la expresión equivalente en notación decimal a través de la división de "a" entre "b". Mediante este procedimiento es posible transformar sumas de fracciones en sumas de números decimales; por ejemplo, para sumar 1/2 + 4/5 se puede cambiar a notación decimal y sumar 0,5 + 0,8 = 1,3.

Porcentaje a fracción: El x% es una manera simplificada y convencional de escribir la expresión x/100. El x% se puede leer como "x de cada 100". El porcentaje denota una relación parte-todo y este tipo de relaciones también se expresan mediante una fracción. Entonces para transformar un porcentaje x% en notación fraccionaria basta con colocar en el numerador 100 y en el numerador x. Por ejemplo, el 75% de un todo quiere decir 75 de cada 100 que forman el todo, lo que puede representarse mediante la fracción 75/100 que es equivalente por simplificación a 3/7. Para este caso recordamos que el porcentaje actúa como un operador así que para hallar el 75% de una cantidad basta con hallar las 3/4 partes de la misma. Por lo que para calcular el 75% de 80 se puede dividir éste entre por 4 y multiplicar el resultado por 3, así el 75% de 80 es igual a 60.

Decimal a fracción: Cualquier número racional expresado en notación decimal puede transformarse en una fracción, de acuerdo con el tipo de expansión decimal (finita, periódica pura-mixta) se pueden aplicar diversos procedimientos para hallar la fracción generatriz correspondiente. El caso más común es el de la expansión decimal finita, en el número racional x expresado en notación decimal es de la forma $x = a, a_1 a_2 ... a_n$, en él se distinguen la parte entera que es a y la expansión decimal $a_1 a_2 ... a_n$, así para expresarlo mediante una fracción se procede a colocar en el numerador la parte entera seguida de la expansión sin coma, y en denominador se coloca una potencia de 10 con exponente igual a la cantidad de decimales que componen la expansión $\frac{aa_1 a_2 ... a_n}{10^n}$, si es posible se simplifica la fracción para operar con mayor facilidad. Por ejemplo, para calcular 0,5+0,25 se puede representar y calcular mediante la suma de fracciones conocidas 1/2 + 1/4 = 3/7.

Razón a porcentaje: Cuando las razones $a : b$ representan relaciones del tipo parte todo éstas se interpretan como "a de cada b", con a < b. Si se toma el 100 como referente, se normaliza el todo a 100 y la relación se establece entre el número "b" y 100. En términos generales un porcentaje es una razón particular del tipo parte-todo en el que el todo se ha normalizado tomando a 100 como referente. Por ejemplo, 3 de cada 5 personas tienen menos de 10 años es equivalente a decir que 60 de cada 100 personas son menores de 10 años, lo cual se puede expresar diciendo que un 60% de población infantil.

Fracción a razón: la fracción con significado parte-todo puede ser considerado un caso particular de las razones parte-todo. La generalidad de la interpretación como razón consiste en que permite comparar cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte-todo en un contexto de medida sólo nos permite comparar cantidades del mismo tipo. Por ejemplo, 2/3 de 75 personas, es 2 de cada 3 ó 10 de cada 15 ó 50 de cada 75.

Supuestos Sobre Posibles Actuaciones en la Resolución de la Tarea 1

La literatura de investigaciones relacionadas con nuestro problema, los conocimientos adquiridos en el trabajo de fin de máster y el trabajo previo que se hizo con los maestros de Chile[78] constituyen las fuentes de las suposiciones previas acerca de las posibles estrategias, razonamientos e incluso errores que pueden cometer los estudiantes al resolver cada una de las tareas incluidas en el diseño.

En esta tarea los estudiantes expresarán sin dificultad la comparación de cada una de las partes con el todo pero expresarán con menor frecuencia la comparación entre las dos partes, consideramos que no lo hacen porque el significado de la fracción que ha prevalecido o al que se le da mayor importancia es el significado parte-todo.

De las tres nociones (fracción, razón y porcentaje) los estudiantes mostrarán mayor dificultad para expresar afirmaciones relativas a la razón sin embargo esto no ocurre con la fracción o el porcentaje. La base de esta suposición está en el trabajo previo que han hecho en la asignatura pues casi todo el peso cae sobre la fracción como relación parte-todo y por otro lado la noción de porcentaje es de mayor uso cotidiano.

A partir del trabajo con esta tarea los estudiantes, mediante una guía adecuada, podrán observar algunas de las relaciones entre las distintos subconstructos de los números racionales (fracción, razón, porcentaje, decimales), al menos desde el punto de vista del conocimiento procedimental.

Tarea 2: Preferencia en el Refresco de Cola

Reconocemos que las matemáticas aparecen en múltiples situaciones cotidianas, las encuestas y su divulgación en medios de comunicación no son una excepción. Los periódicos, las noticias, publicidad, programas de televisión, radio, entre otros, están llenos de referencias matemáticas, ya sea en forma de estadísticas, porcentajes, números, diagramas, datos. Conscientes del papel que juega las matemáticas en estas situaciones cotidianas se decidió proponer la Tarea 2 en la primera sesión (Figura 6.7).

Esta tarea proviene de la investigación llevada a cabo por Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007, 2012)[79], en ella se plantean tres afirmaciones relativas a posibles resultados de una encuesta acerca de la preferencia entre dos refrescos de cola. Las dos primeras afirmaciones incluyen la razón para expresar la preferencia sobre una u otra bebida, la tercera corresponde a una relación aditiva. Sobre este enunciado se proponen cuatro preguntas para cuyas respuestas se requiere: en la primera aplicar algunas propiedades de las razones para así determinar, si existe una relación entre las afirmaciones del enunciado, en la segunda y tercera pregunta se espera que los estudiantes observen la aplicación de esta noción para expresar una comparación entre dos cantidades, que interpreten cada proposición y discutan sobre las posibilidades de las mismas. En la última pregunta, se les solicita otras formas de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola, se espera que usen expresiones propias de las fracciones o de los porcentajes y así fortalezcan las relaciones entre los tres conceptos.

[78] Grupo de profesores chilenos que en el curso 2009-2010 hicieron una estancia de formación en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y que realizaron las tareas planificadas para nuestro experimento de enseñanza.

[79] Traducimos y adaptamos la versión original propuesta por tales investigadores.

Tarea 2: Preferencia en el Refresco de Cola

¿BOLA-COLA
O
COLA-NOLA?

Las siguientes afirmaciones podrían ser parte de los resultados de una encuesta de preferencia entre la Bola Cola y la Cola Nola:

- La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2.

- El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426.

- 5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola.

a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

b. Elije la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.

c. Si necesitaras divulgar los resultados en un anuncio publicitario, ¿cuál afirmación podría ser más efectiva? ¿Por qué?

d. Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola.

Figura 6.7. Tarea 2 “Preferencia en el refresco de cola”

La 1ª y la 2ª afirmación pueden referirse a la misma encuesta dado que las razones “3 a 2” y “17139 a 11426” son equivalentes, así que sin importar el tamaño del conjunto son dos formas de describir la misma relación entre cantidad de personas que prefieren uno u otro refresco. Ahora bien, la 3ª proposición puede o no referirse a la misma encuesta, esto depende del total de personas que habían sido encuestadas y *este dato no es parte de la tarea*, sólo si el total de encuestados fuese de 28565 personas se puede afirmar que las tres afirmaciones describen resultados de la misma encuesta.

Según las variables de tarea usadas en la investigación, tenemos que la Tarea 2 contempla una comparación del tipo parte-parte, el todo no se conoce, las cantidades son de una misma magnitud discreta e involucra dos razones equivalentes. Desde el punto de vista del análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal (1983) el tipo de razón implicada en la tarea se considera una composición.

A partir del análisis de contenido de la noción de razón se detectaron distintas representaciones simbólicas, gráficas y verbales (Apartado 4.1.4). En el diseño de la intervención se han considerado tareas en las que la representación de la razón juega un papel determinante. En la Tarea 2 se incluye una representación verbal, entendiendo que ésta puede ser más conocida o natural para los estudiantes y uno de nuestros objetivos es conocer de qué manera la interpretan.

En el estudio fenomenológico asociado a la noción de razón (Apartado 4.1.5) se identificaron múltiples situaciones cotidianas que permiten dotar de significado a este objeto matemático. En la Tarea 2 se considera los resultados de una encuesta como escenario en el que se aplica la razón, ésta la tomamos como una situación pública, que puede resultar familiar para los estudiantes.

De acuerdo con los indicadores expuestos por Rico y Lupiáñez (2008) para caracterizar el nivel de complejidad de las tareas se tiene que los ejercicios (a), (b) y (c) de la Tarea 2 se ubican en el nivel de reflexión, mientras que el ejercicio (d) se sitúa en el nivel de conexión (Tabla 6.3).

Tabla 6.3. *Descripción de la Tarea 2 según nivel de complejidad*

		Tarea 2			
		(a)	(b)	(c)	(d)
Reproducción	Contextos familiares.				
	Conocimientos ya practicados.				
	Aplicación de algoritmos estándar.				
	Realización de operaciones sencillas.				
	Uso de fórmulas elementales				
Conexión	Contextos menos familiares		X	X	
	Interpretar y explicar	X	X	X	
	Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación				X
	Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.				
Reflexión	Tareas que requieren comprensión y reflexión.	X	X	X	
	Creatividad				
	Ejemplificación y uso de conceptos.				
	Relacionar conocimientos para resolver problemas más complejos.	X	X	X	
	Generalizar y justificar resultados obtenidos.				

Relación de la Tarea 2, los Objetivos y las Competencias Matemáticas

Para abordar las cuestiones (a), (b) y (c) es necesario interpretar las afirmaciones expuestas en el enunciado, las dos primeras involucran la razón y la tercera afirmación describe una relación aditiva entre las cantidades. Dos aspectos cruciales a tener en cuenta en la resolución de los mismos se refieren a la propiedad de la equivalencia de razones y la distinción entre las comparaciones aditivas y las multiplicativas. Si bien es cierto que los estudiantes no tienen que establecer ninguna comparación, es preciso discernir qué tipo es más adecuada para expresar los resultados de la encuesta y cuál sería más eficaz en un anuncio publicitario. Por la tanto la resolución de estos ejercicios reflejarán actuaciones que responden a los objetivos específicos: (3) Interpretar y realizar comparaciones entre cantidades desde las perspectivas aditiva y multiplicativa, (4) interpretar el significado de la razón, de sus elementos o del valor racional de la misma en distintas situaciones, y (12) aplicar la noción de razón y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.

La situación de la Tarea 2 es pública y considera los resultados de una encuesta de preferencia entre dos tipos de refrescos, ésta situación la encontramos frecuentemente en los medios de comunicación, noticieros y publicidad. Una persona que movilice y aplique los conocimientos matemáticos para interpretar los resultados de una encuesta podrá tomar decisiones informadas, opinar o aplicar tales resultados de forma conveniente. Por lo anterior y las razones expuestas en el análisis cognitivo (Apartado 4.2.2) vinculamos el objetivo (4) con la competencia *modelizar*, pues es necesario un proceso de matematización de la situación expuesta. Traducir las afirmaciones de la tarea en estructuras matemáticas permite visualizar que en esta situación la razón se usa para describir de qué manera se distribuyen las cantidades de personas. Sin importar el total de personas que han participado la interpretación de la razón permite inferir, entre otras ideas, que hay más personas que prefieren Bola Cola y que esta cantidad de personas es 1,5 veces la cantidad de personas que prefieren Cola Nola. La traducción de la 3ª afirmación de la situación al lenguaje del mundo matemático conduce a reflexionar que este enunciado es el que menos información aporta dado que se desconoce el total de elementos que han sido comparados aditivamente.

Con base en las demandas cognitivas de las primeras tres cuestiones de la tarea y en la vinculación establecida entre los objetivos y las competencias matemáticas es posible que a través del trabajo en la Tarea 2 se estimulen las competencias: (a) *pensar y razonar* y (b) *modelizar* (c) *resolver problemas*.

La resolución los ejercicios (a), (b) y (c) requieren de la explicación de los razonamientos aplicados, los estudiantes han de aportar argumentos que respalden sus respuestas. Con base en esta consideración es posible que también se estimule la competencia *argumentar y justificar*.

Por su lado en la resolución del ejercicio (d) los estudiantes deben aportar sugerencias acerca de otras maneras de presentar los resultados de la encuesta. En términos matemáticos esta cuestión está relacionada con la expresión de la razón 3:2 mediante otras representaciones. De modo que este ejercicio ejemplifica actuaciones propias del objetivo específico (7) emplear diferentes representaciones para expresar las razones. La resolución del ejercicio (d) supone no sólo transformar una representación en otra sino que requiere de la re-interpretación de la misma situación en términos de otras relaciones, por ejemplo visualizando la parte-todo en lugar de la comparación entre las partes. En consecuencia consideramos que es posible que el trabajo sobre el mismo contribuya al desarrollo de la competencia matemática *representar*.

Planificación de la Puesta en Común de la Tarea 2

Al igual que en el caso de la Tarea 1, se han planificado unas diapositivas en las cuales se refleja parcialmente las suposiciones de las investigadoras previas a la aplicación del diseño en relación a la Tarea 2.

Consideramos que el análisis de la 1ª cuestión "*Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta*" no es algo que a simple vista se pueda decidir, pues se deben de considerar algunas ideas relacionadas con las propiedades de la razón, por ello conjeturamos que las cuestiones planteadas en la Tarea 2 pueden crear dificultades a los estudiantes y planificamos algunas diapositivas tomando en cuenta dicha conjetura. Se planifica una tabla que incluye los datos de distintas encuestas en las cuales la razón entre quienes prefieren uno u otro refresco sea 3:2 pero en las que varíe el total de personas encuestas (Figura 6.8).

	A	B	C	D
Total Participantes	5	250	28565	57130
Bola Cola	3	150	17139	34278
Cola Nola	2	100	11426	22852
Razón	3:2	150:100 24:16 3:2	17139:11426 591:394 3:2	34278:22852 **17139:11426** **3:2**
¿Cuántos más?	1	50	5713	11426

Figura 6.8. Posibles encuestas que satisfacen las afirmaciones de la Tarea 2

Por otro lado consideramos que en el tratamiento de la última cuestión cuyo enunciado dice "*Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola*" los estudiantes van a expresar, con mayor frecuencia, las fracciones (relación parte-todo) o los porcentajes, sobre otras representaciones (como pueden ser las gráficas) y usarán en menor medida relaciones aditivas, por lo cual se planifica mostrar otras posibles representaciones de la relación con el objetivo de promover la comprensión de la expresión de razón y de las relaciones de ésta con otras nociones (Figura 6.9).

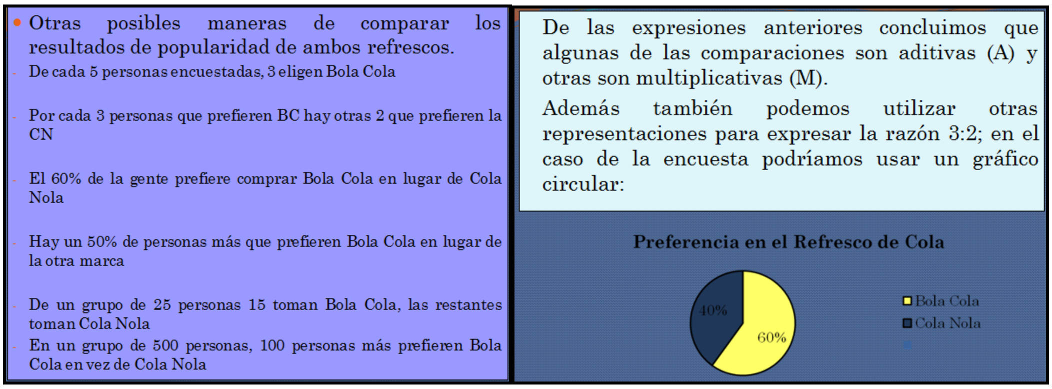


Figura 6.9. Posibles formas de expresar "la razón es de 3 a 2"

Se planifica cerrar la puesta en común señalando que una razón entre elementos de un conjunto no permite, en todos los casos, determinar la cardinalidad del mismo, además se prevé indicar algunas situaciones del entorno en las cuales se aplica la noción de razón, por ejemplo:

- 3 de cada 5 personas viaja en coche a su trabajo.
- Por cada taza de arroz pones dos de agua.
- El interés del préstamo es de un 15%.
- La posibilidad de que ocurra un terremoto en la ciudad de Shizuoka es de dos a tres.
- Viajamos a 100 km/h.

Supuestos Sobre Posibles Actuaciones en la Resolución de la Tarea 2

Prevemos que los estudiantes tendrán dificultades para analizar correctamente el primer ejercicio de esta tarea, en el mismo se indica que analicen tres afirmaciones y determinen si hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Consideramos que el predomino del conocimiento procedimental podría anteponerse a un razonamiento más amplio que considere otras opciones en las que se cumplan o no esas afirmaciones.

De antemano consideramos que en la expresión de los resultados mediante otras representaciones (ejercicio d) los estudiantes aplicarán mayormente las fracciones (relación parte-todo) o los porcentajes sobre otras representaciones por ejemplo gráficas y usarán en menor medida relaciones aditivas.

6.1.2 Desarrollo de la 1ª Sesión en Ambos Grupos

En ambos grupos la sesión se inicia con la presentación de la investigadora, por parte de los profesores de la asignatura. Destacamos que éste no es el primer encuentro de la investigadora y los estudiantes ya que desde el primer día de clase la investigadora ha estado presente y observado el desarrollo de la asignatura, razón por la cual ha tenido la oportunidad de conocer con mayor profundidad y trabajar con algunos de los equipos durante la realización de las sesiones prácticas.

6.1.2.1 Desarrollo de la 1ª Sesión en el G1

En esta sesión participaron 48 de los 134 estudiantes inscritos en la asignatura. A pesar de que a primera vista pareciera una asistencia baja recalcamos que, habitualmente, desde la primera clase hasta la fecha de aplicación de la 1ª sesión asisten en promedio 58 estudiantes a la clase de los lunes y 35 a la de los jueves, que es de supervisión. También resaltamos que la semana de aplicación de la 1ª sesión era tiempo de preparación para los exámenes de las asignaturas del 1er cuatrimestre y de aquellas asignaturas anuales cuyos profesores consideran oportuno hacer una prueba de los primeros temas como es el caso de la asignatura Matemáticas y su Didáctica. Consideramos que posiblemente sea esta la razón de la asistencia de un menor número de estudiantes. La sesión tuvo una duración de 2 horas.

Al inicio de la sesión la investigadora le pide a una de las estudiantes que la ayude a repartir y recoger las hojas de trabajo, ésta accede.

La investigadora explica la dinámica de trabajo paso a paso, es decir les dice que van a ocuparse de manera individual en la hoja de trabajo durante 15 minutos.

Durante el desarrollo de esta fase individual los estudiantes manifiestan dudas relacionadas con el enunciado, por ejemplo preguntan *¿qué quiere decir afirmaciones o comparación?*, o si deben usar las tres nociones en los tres casos o si deben aplicar una noción distinta en cada caso, además preguntaron si tenían que usar palabras o símbolos matemáticos.

Algunos estudiantes intentan resolver la situación con ayuda de otro compañero, es decir manifiestan inseguridad al tener que hacer solos el trabajo, la investigadora les dice que ya tendrán la oportunidad de hablarlo con otros y que en ese momento es mejor que hagan un mayor esfuerzo por hacerlo individualmente, además les recalca que no pasa nada si se equivocan o incluso si no saben cómo abordar la tarea pues la idea es que ellos puedan mejorar lo que saben.

Cuando los alumnos terminan la primera fase (unos 15 minutos después), se recoger las hojas de trabajo y se procede a la segunda fase de trabajo colaborativo. Se les pide que se sienten con sus compañeros de las prácticas de la asignatura (las mesas están organizadas en equipos de cinco) no obstante en este primer momento observamos que hay equipos en los que solamente está presente una persona razón por la cual la investigadora decide que si el resto de sus compañeros no han asistido se sienten o se ubiquen con otros compañeros, se formaron 13 equipos de trabajo.

Se les da las instrucciones: a) deben escribir en la nueva hoja la "***mejor solución posible***" con los aportes de todos los miembros del equipo, b) si uno de los miembros no comprende, los demás deben explicarle y, c) no se pasaría de pregunta hasta que lleguen a un acuerdo.

Dicho lo anterior, la investigadora va de un grupo a otro observando su trabajo, resolviendo dudas, discutiendo la estrategia de solución al problema, clarificando alguna notación y respondiendo preguntas; dichas preguntas están relacionadas principalmente con las representaciones. Preguntan si deben considerar el número de frutas insertadas en cada una de las regiones cultivadas; si en el caso de la razón debían poner atención al espacio vacío al final de cada fila. De manera general los estudiantes piden la aprobación sobre lo que han hecho preguntando *¿está bien así?*, la investigadora responde que durante la puesta en común ya revisarán sus ideas. A primera vista se observa que hay equipos que siguen la dinámica de un modo más eficaz que otros.

Cuando la mayoría de los equipos llegan a un 'acuerdo' o cuando el tiempo predeterminado acaba, la investigadora solicita a uno de los equipos presentar su respuesta (o respuesta parcial) como base para la discusión general. Pasándose en ese momento a la puesta en común que recogemos en el apartado siguiente.

Se inició el trabajo sobre la Tarea 2 “Preferencia en el Refresco de Cola”. Al igual que en la primera tarea se procede a entregarles una hoja a cada estudiante con la situación, y se les da la consigna correspondiente sobre que deben hacerlo de forma individual durante unos 15 minutos. Durante esta segunda parte los estudiantes siguen de mejor manera la instrucción de “hacer la tarea individualmente”, la investigadora vuelve a recordar que no deben de preocuparse si desconocen cómo hacer la tarea correctamente pero que deben hacer el máximo esfuerzo por resolverla sin mirar lo que hace su compañero de al lado. Posteriormente siguieron con el trabajo colaborativo, durante este tiempo plantearon a la investigadora dudas como por ejemplo *¿en las partes (b) y (c) se puede dar la misma respuesta?* o dicen que ninguna de las afirmaciones es válida. También buscan la aprobación de las respuestas que habían elaborado. De nuevo la investigadora les dice que durante la puesta en común revisarán el trabajo realizado.

En el Anexo I aparece la transcripción original de las intervenciones de la investigadora y estudiantes durante la puesta en común de la resolución de todas tareas en ambos grupos.

Puesta en Común de la Tarea "Fracción, Razón y Porcentaje" (T1; G 1)

Para la revisión de la Tarea 1 la estudiante B5 pasa al frente e inicia la explicación de las respuestas que habían discutido en su equipo de trabajo B2-1.

Mientras la estudiante va comentando las respuestas la investigadora toma nota en la pizarra, después hace un resumen de lo dicho por la estudiante y pregunta al resto del grupo *¿lo hicieron todos igual?, ¿quién lo hizo diferente y por qué?*

En seguida el estudiante A9 dice *“Una preguntilla sólo, esto por ejemplo ya lo anotamos, ¿esto que se ha puesto en la pizarra lo anotamos como respuesta?”*, la investigadora responde que durante esta fase estudiarán algunas de las respuestas dadas, pero que no necesariamente son todas correctas de modo que ella al final realizará un cierre que contemple la respuesta correcta.

El mismo estudiante, A9, plantea que a partir de lo expuesto por la estudiante B5 han cometido un error, dice: “*vale, nosotros en el (b) hemos hecho, creemos, después de haber visto el once coma once que bueno… hemos cometido el error de poner que, creemos que era el diez por cien del total*”.

B5: es que no tiene sentido, si fuesen diez, pero como son nueve
A9: ya… ahora, hemos considerado que el cien por cien eran nueve partes, entonces hemos dicho si es una… pues el diez por cien…
B5: si fuesen diez daría el diez por ciento

La investigadora continúa solicitando otras posibles respuestas a la tarea. El estudiante A8 participa diciendo “hemos observado las partes no cultivables, serían dos quintos cultivables y tres quintos sin cultivar… y el (b) un ochenta y nueve coma nueve por ciento sin cultivar”. Ante el aporte anterior la investigadora indica que A8 ha señalado la distinción entre lo cultivado y lo no cultivado pero en relación con el total.

Después pide las contribuciones de los estudiantes en relación con la parte (c), referida a la noción de razón. El alumno A1 participa diciendo “*pues nosotros hemos dicho cuatro* *de cada seis partes que representa el sesenta y seis coma seis por ciento y hemos sacado el ratio uno partido sesenta y seis coma seis*", ante esta idea y con el afán de recoger otros acercamientos, la investigadora comete el descuido de no explorar lo dicho por el estudiante. Por otro lado el estudiante A9 expresa "*hemos puesto en razón que hay cuatro cultivables de seis totales, lo mismo que ella, que son cuatro sextos de seis sextos, hay cuatro sextos cultivables de seis sextos*".

Al llegar a este punto, la investigadora percibe que ninguno de los estudiantes ha expresado la relación entre las dos partes.

Debido a lo expuesto anteriormente, la investigadora se dedica a promover la comprensión de la unidad de referencia al hacer comparaciones entre las partes de un todo. Inicia destacando que las respuestas aportadas por ellos no son incorrectas, si no que lo que ha ocurrido es que no han interpretado acertadamente las instrucciones de la tarea, en éstas se solicitaba comparar las regiones cultivadas y las no cultivadas.

Les señala que ellos han expresado la comparación considerando cada parte en relación con el todo. En su intervención, dice "*relación parte-todo… en este caso la unidad sería el terreno completo, observo qué parte de ese total se ha tomado o cultivado que serían dos partes de un total de cinco y decimos dos quintas partes del terreno están cultivadas. Pero esta misma idea la podemos aplicar para comparar la región cultivada y la no cultivada, es decir una relación parte-parte (escribe en la pizarra), si tomamos una de las partes como el todo,… si consideramos que el todo son las tres partes que están sin cultivar la pregunta es ¿qué tanto es la región cultivada en relación con la no cultivada? (señala en la diapositiva ambas regiones)...dos tercios, ¿lo pueden ver? … es diferente y estoy usando otra fracción… la región cultivada corresponde a dos terceras partes de la región sin cultivar*". Al mismo tiempo muestra la diapositiva de la Figura 6.2.

La investigadora aprovecha la situación para retomar las ideas expuestas por el profesor de la asignatura en relación con los significados de las fracciones, comenta y ejemplifica cada uno: relación parte-todo, cociente, razón y operador.

Continúa revisando la segunda cuestión de la tarea, relativa a la expresión porcentual de la comparación entre las regiones del terreno. Indica que desde la perspectiva parte-todo la región cultivada corresponde a un 11,1% del terreno completo, pero que si se considera lo no cultivado como el todo el resultado cambia. Pregunta a los estudiantes por la manera en que se expresaría la cuestión (b). El estudiante A9 vuelve a participar diciendo "*es un octavo*". La investigadora especifica que A9 ha utilizado una fracción y no un porcentaje, como se pide en el ejercicio, luego a partir de lo anterior justifica por qué la expresión porcentual que relaciona a 1 campo cultivado en relación con 8 campos no cultivados es el 12,5%, para lo cual muestra la diapositiva de la Figura 6.3 y dice "*…doce con cinco y doce con cinco serían, ¿cuánto?, (alumnos responden veinticinco), veinticinco y veinticinco cincuenta, y veinticinco setenta y cinco, y veinticinco cien, ahí tengo el cien por cien, entonces una de ellas es el doce coma cinco por ciento, entonces yo puedo decir que la región cultivada es un doce coma cinco por ciento de la región* *no cultivada…*”. Además agrega que si se considera la relación inversa, es decir al comparar las 8 regiones no cultivadas en relación con la región cultivada, se puede afirmar que lo no cultivado es un 800% de lo cultivado.

Continua con la revisión del ejercicio (c) el cual pide expresar la comparación de las cantidades aplicando la noción de razón. Inicia comentando que esta noción es uno de los posibles significados de las fracciones, luego destaca que mediante la razón se puede expresar la relación multiplicativa que hay entre dos cantidades, ejemplifica lo dicho con la expresión “1 de cada 3 españoles hacen ejercicio” y agrega que esta idea se puede expresar de distintas formas: $\frac{1}{3}, 1:3$, uno de cada tres o decir uno es a tres. Luego introduce la idea de equivalencia de razones diciendo “*podría decirse que uno de cada tres… o dos de cada seis, o tres de cada nueve…*”, pregunta a los estudiantes por la relación multiplicativa que hay entre cada par de cantidades a lo que el estudiante A9 dice “*que tres, el numerador multiplicado por tres siempre da el denominador*”. La investigadora aprueba lo dicho por A9 y complementa la idea diciendo que hay dos grupos de personas que se han comparado y que se puede observar que un número es el triple del otro, añade que sin embargo no en todos los casos es tan sencillo ver la relación multiplicativa entre las cantidades, escribe y comenta el ejemplo “*dos de cada 5 especies de aves están en peligro de extinción*”, luego anota expresiones equivalentes como en el caso de la razón entre 1 y 3.

A partir de observar cierta deficiencia en el conocimiento relativo a la noción de razón, la investigadora se plantea clarificar algunas cuestiones generales que distinguen a una fracción de una razón. Primero pregunta a los estudiantes “*¿es lo mismo una razón que una fracción*?”, el estudiante A9 responde “*en cuanto que las dos son relaciones, sí, las dos significan relaciones o por ahí*”, luego la estudiante B5 añade “*la razón es una forma de aplicar la fracción*”.

Ante las respuestas de los estudiantes la investigadora decide aportar algunas ideas: (a) al expresar una razón es admisible utilizar números no enteros, lo cual no se admite en la expresión de fracciones, pone el ejemplo $\frac{0{,}5}{2}$ o lo que es lo mismo $0{,}5:2$; (b) indica que en el caso de las razones ya no se utilizan los términos numerador o denominador sino antecedente y consecuente; (c) las razones admiten al cero como consecuente.

Debido a que se ha consumido más tiempo que el planificado la investigadora cierra la resolución de la Tarea 1 diciendo que, tal y como se ha estudiado con el profesor de la asignatura, la razón es uno de los posibles significados de la fracción, agrega que esta noción matemática se utiliza en múltiples situaciones cotidianas pero que lamentablemente en la enseñanza primaria se ha dejado de lado prevaleciendo la fracción parte-todo. Incita a los estudiantes a profundizar en la idea de razón con el propósito de mejorar la comprensión que de esta noción matemática poseen y en consecuencia enseñarlo adecuadamente a los niños. Insiste en la relevancia de no limitar la enseñanza de las fracciones al significado parte-todo.

Puesta en Común de la Tarea "Preferencia en el Refresco de Cola" (T2; G1)

El estudiante A8 pasa al frente a exponer el trabajo realizado en su equipo, comenta algunas de las relaciones numéricas detectadas y agrega que no saben a qué se deben tales relaciones.

De inmediato la investigadora interviene diciendo que va a referirse a esta cuestión. Inicia preguntando *¿qué significa tres a dos*?, A8 responde diciendo "*de cinco personas, tres prefieren Bola Cola y dos prefieren Cola Nola*", la investigadora repite lo dicho por A8 y representa gráficamente así ●●● X X.

En seguida pregunta *¿siempre habrá cinco personas*?, *¿puedo expresarlo de otra forma*?, los estudiantes no responden de modo que ella sigue comentando que se podría decir o que es equivalente decir que la razón entre quienes prefieren un refresco u otro es de seis a cuatro (escribe 6:4) y que esto es equivalente a decir tres es a dos. Luego pregunta *¿por qué*?, el estudiante A9 dice "*porque se duplica…el numerador y el deno…*". La investigadora indica el uso de los términos antecedente y consecuente para denominar los elementos de la razón. Luego hace referencia a la amplificación multiplicativa de ambos términos para obtener expresiones equivalentes, con esto persigue llevar a los estudiantes a que se percaten de que las razones 3:2 y 17139:11426 son equivalentes.

Después surge un intercambio entre la investigadora y el estudiante A9 relativos a los números utilizados en la amplificación de la razón, a continuación lo mostramos:

A9: …tengo una pregunta, ¿la relación la estamos duplicando siempre?...
I: por dos, por cuatro, por tres, por el número que quieras…
A9: ah… por ocho, por siete…
I: por siete, aquí puse unos ejemplos…
A9: ¡ah vale! pero que sea el mismo para divisor y denominador, antecedente y consecuente, ¿decimal también podría ser?...
I: exactamente, podría ser decimal, ¿por qué no?
A9: ah vale, vale, que no tiene que ser la relación de duplicar, triplicar, cuatri o… vale, vale…

A continuación la investigadora se dedica a comentar algunas ideas relativas a la equivalencia de razones, a saber: el uso del valor de la razón para comprobar la equivalencia, las razones equivalentes como formas distintas de expresar la misma relación, el convenio de usar la razón más sencilla para expresar la comparación y finalmente insiste en la idea de que la razón por sí sola no permite conocer el tamaño de los conjunto comparados. El resto de la sesión lo dedica a promover la comprensión de la noción anterior.

En su intervención dice "*la razón no necesariamente me dice o me permite afirmar cuántos elementos en total están siendo comparados, vean que aquí digo tres es a dos es la relación entre quienes prefieren Bola Cola, las bolitas, y quienes prefieren Cola Nola, las equis, puedo establecerlo así como tres es a dos pero a partir de esta razón ¿yo puedo decir que hay cinco elementos?, pensemos en esto (alumnos en silencio) les replanteo la pregunta, la razón es una afirmación mediante la cual comparamos dos* *cantidades, una cantidad "a" y una cantidad "b" de elementos, ahora a partir de la razón ¿podemos saber cuántos elementos en total hay, o se están comparando*?**"**

El estudiante A9 responde correctamente sin embargo su argumento es poco concreto, él dice "*no porque, no porque ya estamos diciendo que podemos hacer la equivalencia, que cambiará dependiendo de la equivalencia que le demos, habrá una cantidad total u otra, o sea el número total no lo podemos saber…*".

La investigadora insiste en la misma idea mediante otro ejemplo, les plantea la afirmación "*en España la relación entre quienes consumen comida sana y los que no, es de tres a dos personas*", luego indica que si no se conoce el total de personas consideradas no es posible conocer con exactitud cuántas personas consumen comida sana, recalca que la razón es una "relación", que es posible saber cómo se distribuyen los elementos comparados pero no el total. En la misma línea la investigadora muestra la diapositiva de la Figura 6.8, preparada previamente con el objetivo de evidenciar que en distintas encuestas se pueden cumplir las primeras dos afirmaciones de la tarea, relativas a los resultados de preferencia de refresco.

En seguida comenta cada uno de los casos A, B, C y D, destacando que la relación entre las cantidades de personas que prefieren un refresco u otro en cada caso es la misma, debido a que las razones son equivalentes. Luego retoma la pregunta de la tarea diciendo *"…entonces podemos tener diferentes encuestas, diferentes situaciones en donde la razón puede ser la misma pero la diferencia entre quienes prefieren uno y otro no es la misma, de acuerdo, entonces en el problema cuando nos preguntaban si las tres afirmaciones eran resultados de la misma encuesta, qué podemos decir, ¿sí o que no?*".

El estudiante A9 responde de inmediato "*sí, sí… puede ser*", ella le dice "*puede ser, ¿pero siempre*?", el estudiante señala que en el caso de la columna C sí podrían ser las tres. La investigadora afirma que en ese caso se cumplen las tres afirmaciones pero que hay otras encuestas con otras poblaciones en donde la razón de preferencia es la misma por lo que no se puede generalizar la respuesta. Cierra la revisión del ejercicio y la sesión reiterando que la razón no permite afirmar cuántos elementos han sido comparados. No hubo tiempo de revisar las cuestiones (b), (c) y (d) de la tarea.

Rediseño de la Planificación para el G2

En ambos grupos se desarrolla la asignatura los días lunes y jueves, el G1 en horario de mañana y el G2 en horario de tarde. Esta situación hace posible detectar algunas fortalezas y limitaciones del diseño, a partir de la puesta en práctica de la intervención en el G1 y hacer modificaciones para el G2. En esta primera sesión, en el G1 no se esperaba la resolución de la tarea únicamente en términos de la relación parte-todo, este hecho provocó que la investigadora dedicara más tiempo que el predefinido a este aspecto. Para el grupo G2 considerando que esta situación podría darse de nuevo se decidió promover sutilmente la relación entre las partes antes de iniciar la resolución de la Tarea 1. Otra decisión fue que la puesta en común sería más concreta, con el objetivo de que a los estudiantes se les clarificase las dos comparaciones: parte-parte y parte-todo.

Dado que con el G1 no hubo tiempo de revisar todas las preguntas de la Tarea 2 no se contó con mayor información que posibilitara tomar decisiones en beneficio del aprendizaje de los estudiantes.

En relación con la formación de los equipos de trabajo se esperaba que no asistieran todos los miembros, de modo que al igual que en el G1 se diría que si no estaban todos se agruparan con otros compañeros.

6.1.2.2 Desarrollo de la 1ª Sesión en el G2

En la 1ª sesión del G2, participaron 27 de los 74 estudiantes inscritos en la asignatura. Normalmente, desde la primera clase hasta la fecha de aplicación de la 1ª sesión, asisten un promedio de 32 estudiantes a la clase de los lunes y 25 estudiantes a la de los jueves, que es de supervisión. Recordamos que la semana de aplicación de la 1ª sesión era tiempo de preparación para los exámenes, no obstante a diferencia del G1 no se observó una baja considerable en el número de asistentes. Se formaron 8 equipos de trabajo. La sesión tuvo una duración de 2 horas.

La investigadora inicia la explicación de la dinámica de trabajo, al igual que en el G1 les dice que van a ocuparse de manera individual en la hoja de trabajo durante 15 minutos.

Durante esta fase algunos estudiantes manifiestan, al igual que en el G1, la duda de que si han de aplicar las tres nociones en los tres casos o si deben aplicar una noción distinta en cada caso, también preguntaron cómo debían escribirlo. Durante la supervisión del trabajo colaborativo y tras observar que en sus resoluciones predomina la relación parte-todo la investigadora indica que también observen la relación entre las dos partes.

Al igual que en el G1, durante la fase individual se observó la intención de algunos alumnos por resolver la situación con ayuda de otro compañero. No obstante con la colaboración de la profesora de la asignatura se les transmite la importancia de hacer el trabajo individualmente.

Cuando los alumnos terminan la primera fase (unos 15 minutos después), se recogen las hojas y se procede a la segunda fase: el trabajo colaborativo. La investigadora da las mismas instrucciones, que en el G1, para esta segunda fase de trabajo en equipo. La investigadora y la profesora de la asignatura van de un grupo a otro observando el trabajo, suministrando asistencia, preguntando para aclarar dudas, discutiendo la estrategia de solución al problema, clarificando alguna notación y respondiendo preguntas relacionadas principalmente con las representaciones incluidas en la tarea (número de frutas del dibujo).

A primera vista se observa que muchos de los equipos del G2 siguen la dinámica de un modo más eficaz que lo visto en el G1.

Concluida la fase colaborativa se pasa a la puesta en común. Una vez concluida la puesta en común, se inició el trabajo individual sobre la segunda tarea "Preferencia en el Refresco de Cola". Al igual que en la primera tarea se procedió a entregarles una hoja a cada estudiante con la situación, y se les dio la consigna de que debían hacerlo de forma individual durante unos 15 minutos. Durante esta segunda parte los estudiantes trabajan individualmente, la investigadora vuelve a recordarles que es importante plasmar con detalle lo que ellos piensan. Posteriormente pasan a la fase colaborativa a la que dedican más tiempo que el definido previamente, dado que las discusiones que mantienen se centran en la resolución de la tarea, la investigadora decide darles un poco más de tiempo.

Siguiendo la dinámica de trabajo de aula, la investigadora solicitó a uno de los equipos presentar su respuesta (o respuesta parcial) como base para la discusión general.

Durante la puesta en común, y en relación con el G1, se observó una mayor participación de los estudiantes del G2, consideramos que este hecho obedece a la dinámica previa definida por la profesora de la asignatura quien otorga la palabra y pide la participación de los estudiantes en cada una de sus clases.

Llega el momento de la puesta en común y el estudiante C14 pasa al frente y expone las ideas discutidas en su equipo de trabajo, posteriormente la investigadora interviene. En el caso del G2 hubo tiempo de revisar todas las cuestiones de la tarea.

En el Anexo E aparece la transcripción de las intervenciones de la investigadora y estudiantes durante la puesta en común de la resolución de las tareas 1 y 2, en el G2.

Puesta en Común de la Tarea "Fracción, Razón y Porcentaje" (T1; G 2)

La estudiante B12 pasa al frente y comenta lo que han realizado en su equipo, señala que como en el primer ejercicio dice fracciones, han puesto que se han cultivado dos quintos del campo. La investigadora pregunta al grupo si están de acuerdo con B12, muchos responden afirmativamente, por lo que la investigadora se percata que, al igual que en el G1, estos estudiantes han resuelto la tarea desde la perspectiva parte-todo, de modo que decide ser más puntual en su intervención y abordar principalmente las relaciones entre las nociones fracción, razón y porcentaje.

Retoma lo dicho por B12 y pregunta *¿estamos comparando la región cultivada y la no cultivada?, ¿en esta expresión qué estamos comparando?* (señala la fracción), *¿la región cultivada y el…?* Ellos responden "*el total*". La investigadora les indica que lo dicho por B12 no es incorrecto, sino que lo ha resuelto tomando la relación entre lo cultivado y el total, pero que es posible considerar otra relación para comparar lo cultivado y lo no cultivado. La estudiante B12 dice "*tres quintos*", la investigadora apunta "*bueno… podría ser, pero estaríamos comparando…", la alumna A7 interviene completando lo dicho por la investigadora "lo no cultivado y el total" y agrega "dos tercios*".

La investigadora pregunta *¿por qué dos tercios*?, A7 responde "*porque hay dos partes cultivadas y tres es el resto que quedan*". Insatisfecha por la respuesta dada, la investigadora interviene indicando que si se considera otro "todo", en este caso las regiones no cultivadas, la fracción corresponde a dos tercios, agrega "*la parte cultivada corresponde a dos terceras partes de las no cultivadas*".

La estudiante C10 señala que entonces no se ha comparado con el todo. La investigadora indica que no se han detenido a leer la instrucción de la tarea en donde se pedía comparar lo cultivado y lo no cultivado, no obstante recalca que lo hecho por B12 no es incorrecto, resume puntualizando que lo importante es estar al tanto de cuál es la unidad de referencia que se está considerando para establecer la comparación.

Dado que C10 vuelve al tema y dice "*pues el todo, entonces sería el todo, ¿no?*", la investigadora le responde diciendo que en el caso de dos quintos el todo sería 5 que son las regiones totales, luego muestra la diapositiva de la Figura 6.2, pregunta por la relación que hay entre las dos partes cultivadas y las tres partes no cultivadas, luego pregunta por la relación si se considera como todo las dos regiones cultivadas : "*¿a cuánto corresponde la región no cultivada en relación con lo cultivado*?", la alumna A7 dice "*a tres medios*", otro alumno dice "*un tercio*", la investigadora justifica por qué diciendo "*…a tres medios, vean que ya esto (señala dos partes de las tres no cultivadas) me completaría una unidad y me sobraría una que sería la mitad de esta, uno y un medio que sería tres medios…*"

Se continúa con la revisión del ejercicio (b), la estudiante B12 dice "en la segunda parte hemos puesto que la región no cultivada corresponde aproximadamente al once coma cero uno por ciento del total". La investigadora pregunta al resto del grupo por otro resultado o forma de expresarlo y la estudiante A7 responde "si consideramos que el campo es el noventa por ciento, el diez por ciento de ese noventa sería lo cultivado".

La investigadora retoma la idea de que el aporte de B12 no es incorrecto sino que está hecho considerando como "todo" las 9 regiones del terreno, pero que es posible comparar las dos partes, 1 región cultivada en relación con 8 regiones no cultivadas, pregunta*"¿a cuánto corresponde, en porcentaje, una de éstas en relación al total ocho?*", un estudiante dice "*un octavo*", la investigadora de nuevo dice "*si esto es el cien por ciento chicos, ¿cuánto vale cada cuadrito?*", los estudiantes dan varias respuestas: diez, un octavo, dos. Ante lo dicho por los estudiantes decide exponer que cada cuadrito representa un 12,5% y lo justifica así "*…la mitad es cincuenta por ciento, luego veinticinco, entonces ¿cada uno?, (escribe 12,5% al lado de uno de los cuadritos), doce con cinco y doce con cinco, veinticinco, y otro veinticinco cincuenta y otro cincuenta, el cien por cien…*", pregunta a los estudiantes si lo entienden, la mayoría dicen que sí.

En seguida pasa a la revisión del ejercicio (c), B12 señala "*en la última hemos puesto que cuatro de cada seis regiones de campo están cultivadas*", la investigadora valora el uso de la expresión "de cada" para referirse a la razón, no obstante indica que de nuevo se ha comparado una parte en relación con el todo y pregunta "*si consideramos las dos partes ¿cómo diríamos*?", el estudiante A12 responde "por cada cuatro partes cultivadas hay dos partes sin cultivar", la investigadora aprueba y señala la diferencia entre lo dicho por los estudiantes B12 y A12.

La investigadora muestra la Figura 6.5, y señala a modo de resumen que "…en situaciones de la vida cotidiana fracciones, porcentajes, decimales y razones (proporciones) son diferentes descripciones de algo que, en cierto sentido, podemos considerar como lo mismo. Por ejemplo: Pepe se comió 3/5 de una barra de chocolate, 3 de cada 5 conductores diariamente están en atascos de tráfico, esta comida está compuesta por un 60% de agua, falta 0.6 Km para llegar hasta el campamento, tres partes de arena por cada dos de cemento, la fracción 3/5 representando un número racional"

Después agrega *"…fracciones, porcentajes, decimales y razones (proporciones) tienen en común que representan una comparación, entre lo que está siendo descrito y una "unidad" de referencia y en situaciones del contexto cotidiano cambiamos rápidamente y casi sin notarlo entre las notaciones y formas propias de las fracciones, porcentajes, decimales o razones, de ahí la importancia de trabajarlos de forma conjunta cuando se enseñan a los niños estableciendo las conexiones entre unos y otros, ya que no podemos esperar que las desarrollen de manera espontánea*".

La investigadora cierra la información mostrando el esquema de la Figura 6.6 y aportando algunos ejemplos concretos de cómo pasar de una noción a otra.

Puesta en Común de la Tarea "Preferencia en el Refresco de Cola" (T2; G2)

El estudiante C14 comenta lo que ha hecho su equipo de trabajo, en relación el primer ejercicio dice "…decide si las tres afirmaciones hacen referencia a resultados de la misma encuesta, explica. Hemos puesto que sí porque tienen el mismo resultado, por ejemplo la segunda si hacemos la diferencia nos sale la tercera, ¿no? el cinco mil setecientos trece, y el de tres a dos y ese… pues no sale el mismo, y el porcentaje". La investigadora le pide que sea un poco más explícito, le pregunta a qué se refiere cuando nombra al porcentaje, él le responde que se refiere a la relación que hay, a lo que ella vuelve a preguntarle "la relación que hay, ¿con respecto a qué?", el estudiante dice que se refiere a lo que más se bebe, a la preferencia en el refresco.

La investigadora le cuestiona al estudiante por el total, le pregunta cuál es el cien por cien que permitiría hallar ese porcentaje, él le responde que esa cantidad depende de la cantidad de personas que hayan participado en la encuesta y le indica que ese sería el total. En este momento participan otros estudiantes, mostramos sus aportes:

B12: *nosotros lo que hemos hecho en el primero ha sido dividir diecisiete mil ciento treinta y nueve entre tres y da cinco mil setecientos trece y once mil cuatrocientos veintiséis entre dos y también da cinco mil setecientos trece, por eso hemos deducido que tienen relación las tres.*
***C12**: yo, cuando hemos estado trabajando individual yo lo que hecho ha sido la regla de tres, pero yo he cogido y he dicho si tres son diecisiete mil ciento treinta y nueve, diez son equis, y entonces me ha salido que era cincuenta y siete mil ciento treinta (57130) y luego lo hecho con el dos y me salía también lo mismo… (Un compañero de otro grupo le dice tres de cinco)*
***C12**: pues yo decía tres de cada diez personas, de cada diez que podía haber dicho de cada cinco*
***I**: la compañera se ha preguntado si hubiese… otra población, si hubiese diez personas*

***C12**: sí*

La investigadora interviene exponiendo algunas nociones concretas, indica que la razón informa acerca de la manera en que se distribuyen esos dos grupos de personas, por cada tres personas que eligieron Bola Cola había otras dos personas que eligieron Cola Nola, agrega *la razón es una expresión que nos permite comparar multiplicativamente dos conjuntos, establezco una relación multiplicativa entre ellos, por cada tres hay dos, eh…*, retoma lo dicho por C14 en relación con la razón de la segunda afirmación y le vuelve a pedir que explique a qué se refiere cuando él dice que "*da el mismo resultado*", el estudiante no responde y ríe un poco nervioso. La investigadora prefiere no insistir y dice al grupo que poco a poco van a construir la idea de razón. Interviene el estudiante A12 diciendo *la relación es la misma ¿no?*, la investigadora le pregunta *¿qué significa que la relación sea la misma?* y el estudiante agrega *pues um… que la proporción de personas que beben una con respecto a la otra es la misma*.

En relación con el aporte anterior la investigadora señala que lo dicho por A12 se acerca mucho a la idea de razón. Después escribe en la pizarra la razón 3:2 y les pregunta si es posible saber cuántas personas fueron encuestados, varios estudiantes responden que sí es posible y la estudiante C10 indica *en el segundo dice el número de personas…*, la investigadora les plantea que si ambas afirmaciones son equivalentes, como ya han dicho, por qué ellos consideran que a partir de la segunda expresión se puede extraer el total de personas mientras que no es posible hacerlo a partir de la 1ª afirmación.

La estudiante C12 interviene y dice *de las dos, yo creo que de las dos, yo he dicho que la población es diez y también lo he sacado y serían cincuenta y siete mil ciento treinta*, a lo que C10 le objeta *lo estás haciendo con diez pero…*. Durante este momento la investigadora le pregunta si es posible variar la cantidad "supuesta" de diez personas, C12 dice que cinco, con esto la investigadora buscaba explorar si la estudiante había elegido un total de 10 personas como una cantidad fija o como un caso particular entre muchos otros posibles. En vista del aporte de la estudiante C12 la investigadora indica que podrían considerar que hay 150 personas que eligen un refresco y 100 que eligen el otro, con la idea de recalcar que la razón no permite inferir el total de personas encuestadas. Se da un corto intercambio provocado por la intervención de la estudiante B12 quien señala que no se han tomado en cuenta las personas que no eligen alguno de los dos refrescos.

La investigadora retoma el hilo de la revisión de la tarea, le dice al grupo que ellos han ido observando relaciones numéricas entre las cantidades y pregunta si creen que tales relaciones se dan por casualidad, algunos estudiantes responden que no lo es. Ella agrega que cuando se tiene una razón ésta se puede expresar de manera equivalente usando otros números. En este momento el estudiante A9 levanta la mano y desea participar con su aporte y dice "*nosotros hicimos justo eso, dividimos tres entre dos dio uno con cinco, luego la dos dio uno con cinco, es una proporción, a lo mejor sería ciento cincuenta por cada cien, sería como porcentaje, se puede expresar así también y para saber los participantes totales, abajo dice que hay cinco mil setecientos trece, arriba no te lo explica abajo sí, eso por tres en un lado y por dos en el otro te da* *justamente los números de arriba entonces si tu sumas eso te da el total…*" La investigadora señala que el alumno ha dado pistas que responden a lo planteado.

Después la investigadora explica la idea de razones equivalentes. Si dividen el antecedente y el consecuente lo que encuentran es el valor racional de la razón y que como en las dos primeras afirmaciones este valor coincide pues las razones son equivalentes. Posteriormente muestra la tabla de la Figura 6.8 con cuatro posibles encuestas en las que la razón es la misma pero el total de la población no, a partir de esto les indica que las tres afirmaciones podrían o no extraerse de la misma encuesta.

Rápidamente, el estudiante C14 comenta las respuestas de las siguientes partes de la tarea. De la puesta en común de los ejercicios anteriores surge la respuesta de la cuestión (d) acerca de posibles formas de expresar la comparación entre los dos refrescos, la investigadora cierra mostrando la diapositiva de la Figura 6.9 en la que ha incluido algunas expresiones consideradas previamente en el diseño de la sesión y que los alumnos mostraron en sus comentarios.

6.1.3 Análisis Preliminar de la 1ª Sesión en Ambos Grupos

Destacamos que durante la fase individual, colaborativa y la puesta en común de ambos grupos se evidenció el predominio de la relación parte-todo al abordar la Tarea 1, los estudiantes establecieron la relación entre la región cultivada o no cultivada respecto al total de parcelas en las que estaba dividido cada terreno. Durante la puesta en común la investigadora promovió, comentando las diapositivas preparadas, la idea de que según como se considere la unidad de referencia se obtendría una u otra expresión para fracción, el porcentaje o la razón.

En relación con la Tarea 2, durante la puesta en común se observó que los estudiantes fueron capaces de detectar múltiples relaciones numéricas entre las proposiciones dadas, aplicaron operaciones entre las cantidades y a partir de "resultados coincidentes" se decantaron por afirmar que las tres afirmaciones hacían referencia a resultados de la misma encuesta. Además, los estudiantes manifestaron creer que la razón permite determinar el tamaño del conjunto sobre el cual se ha aplicado la relación, es preciso estudiar esta cuestión con más detalle en el análisis posterior de la sesión. Durante esta fase la investigadora fue cuestionando los aportes de los estudiantes e indicando las posibles contradicciones que se derivaban de sus razonamientos, para esto utilizó la tabla con la información de cuatro encuestas con distinta cantidad de participantes pero en las que la razón de preferencia era la misma (3:2).

En la Tabla 6.4 mostramos las decisiones tomadas para la reelaboración del diseño de la 2ª sesión, justificando la toma de dichas decisiones.

Tabla 6.4. *Toma de decisiones para la 2ª sesión*

	Decisiones
Sobre la Dinámica	Debido a que la asistencia a la asignatura es irregular se les indicara que se ubiquen en un grupo compuesto por alumnos de otros equipos tratando de mantener al máximo la composición de los equipos de la 1ª sesión. Se insistirá en que el trabajo de la primera fase sea individual. Pedir que se detallen al máximo las respuestas dadas.
Sobre las Tareas	Como se observó que el desarrollo de esta metodología de trabajo implica la inversión de un mayor tiempo que el previamente estimado, se decidió no trabajar la tarea "La venta de un coche" y solamente desarrollar la tarea "Los niveles de CO2" pues la segunda sesión del jueves 28 de enero durará una hora. Hacer una nueva revisión de la tarea en función del tiempo que requiere su resolución.
Sobre el Contenido	La presencia de la regla de tres, en el cálculo de los porcentajes de la tarea 1, ha incidido en la selección de la tarea "Los niveles de CO2" sobre la tarea "La venta de un coche". Dado que, en términos generales, los estudiantes han mostrado desconocimiento de la noción de razón, con la idea de reforzar este contenido, decidimos que durante la puesta en común se definirá el porcentaje como un tipo particular de razón, cuyo antecedente es 100. El trabajo en la tarea "Los niveles de CO2" posibilitará justificar el uso de la regla de tres en la búsqueda de porcentajes. Dado que se ha definido la razón como una expresión que indica la relación multiplicativa entre dos cantidades, en la siguiente sesión se iniciará el estudio de la distinción entre comparaciones aditivas y multiplicativas. Es preciso profundizar en la noción de razón y sus propiedades en las siguientes sesiones.

6.2 SEGUNDA SESIÓN

6.2.1 Planificación de la 2ª Sesión

Después de la toma de decisiones basada en el análisis preliminar de lo acontecido en el 1ª sesión, entre las que se encontraba trabajar únicamente una de las dos tareas relativas a los porcentajes que habían sido dispuestas originalmente para esta 2ª sesión. Entre las dos posibles tareas preparadas se eligió "Los niveles de CO_2" porque con ésta se podía continuar fomentando en los estudiantes la comprensión de noción de la razón pues el porcentaje podía tratarse como una razón "especial" cuyo consecuente es cien, y a partir de esta idea se establecía otra relación entre tales conceptos, la toma de esta decisión estuvo justificada en la deficiente comprensión de la razón mostrada por los estudiantes de ambos grupos en la 1ª sesión.

Otro de los aspectos que se observó en la 1ª sesión fue la dificultad de los estudiantes para expresar ideas matemáticas y en general para ofrecer justificaciones razonadas de las ideas expuestas en sus producciones, en este sentido la tarea "Los niveles de CO_2" requiere que los estudiantes justifiquen tanto procedimientos rutinarios, por ejemplo el cálculo de un porcentaje, como razonamientos o argumentos que precisan de una mayor reflexión de la situación.

Se seguirá la misma metodología de aula. No obstante, se ha de reiterar la relevancia del trabajo completamente individual en la 1ª fase, además se les indicará que durante el trabajo colaborativo todos deben de aportar sus ideas y principalmente no deben obviar algún error o desacuerdo con los compañeros de equipo. Se insistirá en la expresión de las ideas, es decir, que en cada fase de trabajo deben de escribir todos los procesos o razonamientos que justifiquen la respuesta.

La 2º sesión quedó planificada como se recoge en la Tabla 6.5. Tanto los objetivos de investigación como los de instrucción giran alrededor de la noción de porcentaje.

Tabla 6.5. *Planificación de la segunda sesión para ambos grupos*

Objetivos de la Investigación para la 2ª sesión	OP1.2.3. Conocer las concepciones que muestran los estudiantes en torno a la noción de porcentaje. OP1.2.7. Identificar procedimientos expuestos en la resolución de situaciones que involucran la noción de porcentaje. OP1.3.3. Promover la comprensión de la noción de razón y su relación con el porcentaje. OP1.3.7. Introducir la noción de proporcionalidad directa. OP1.4 Identificar fortalezas y debilidades de la dinámica de trabajo colaborativo puesto en práctica. OP1.5 Identificar fortalezas y debilidades de las tareas matemáticas aplicadas. OP2.1 Describir las actuaciones de los estudiantes en términos de las expectativas de aprendizaje: objetivos específicos y competencias matemáticas consideradas.
Contenidos Instruccionales	Significados y cálculo del porcentaje (Foco 4) Significado de la razón como índice comparativo (Foco 1)
Objetivos Específicos Instruccionales	33. Interpretar el sentido de uso del porcentaje en distintas situaciones. 37. Calcular porcentajes de cantidades. 3. Interpretar y realizar comparaciones entre cantidades desde las perspectivas aditiva y multiplicativa.
Competencias	Pensar y Razonar

Tabla 6.5. *Planificación de la segunda sesión para ambos grupos*

Matemáticas	Usar lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones Modelizar Representar Comunicar Plantear y Resolver Problemas
Tarea	"Los niveles de CO_2"

6.2.1.1 Planificación de la Tarea de la 2ª Sesión

Dado que esta segunda sesión tiene una duración de una sola hora, frente a las dos horas de la 1ª sesión se ha programado una sola tarea, Los niveles de CO_2 que por el orden que le corresponde denominamos con T3. Describimos a continuación su planificación.

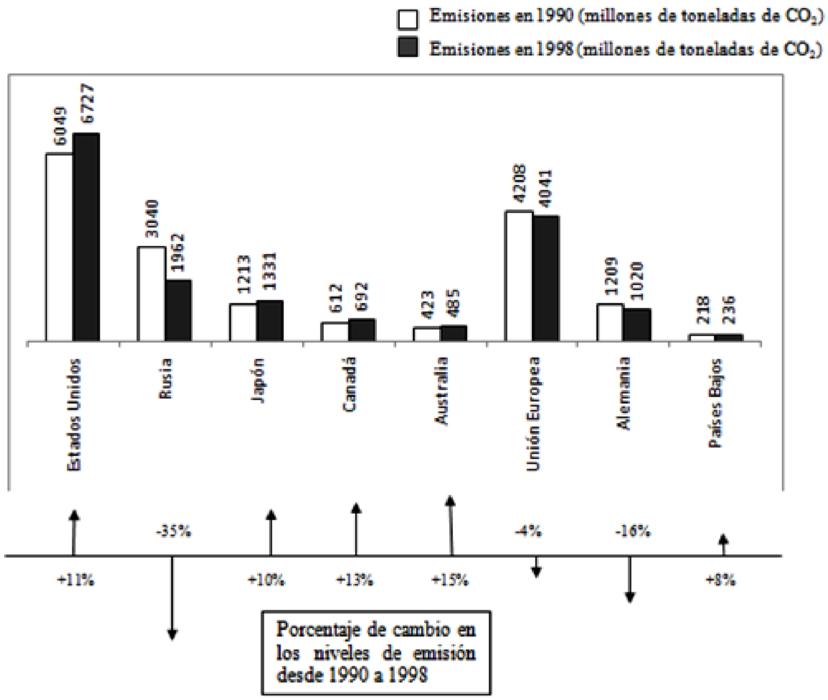
Tarea 3: Los Niveles de CO2

Esta tarea ha sido concebida en el seno del proyecto PISA (INECSE; 2005). Está compuesta por tres preguntas relativas a un gráfico de barras de las cuales las dos primeras cuestiones se mantuvieron exactas. La tercera cuestión cuyo enunciado original es: *Luisa y Antonio discuten sobre qué país (o región) tuvo el mayor aumento en emisiones de CO_2. Cada uno llega a conclusiones diferentes basándose en el diagrama. Da dos posibles respuestas "correctas" a esta pregunta y explica cómo se puede obtener cada una de estas respuestas.* La hemos modificado dejándola como aparece en la Figura 6.10.

Este cambio se hace con la intención de dirigir las respuestas de los estudiantes hacia la cuestión que se deseaba examinar, esto es, ver si muestran capacidad para justificar que ninguno (Luisa y Antonio) estaba equivocado sino que eran las dos posibles aproximaciones a la situación (absoluta y relativa). El cambio también obedece a nuestro interés por optimizar el tiempo empleado en la resolución y puesta en común ya que en la versión original primero se debe de buscar cuáles son los dos países (o regiones) que tienen el mayor número de emisiones de CO_2. También consideramos que los estudiantes podían escribir los procedimientos o algoritmos (operaciones) para determinar esas dos respuestas sin expresar por qué cada persona da una opción diferente y ese era precisamente el objetivo que se buscaba, la justificación.

Los niveles de CO_2

Muchos científicos temen que el aumento del nivel de gas CO_2 en nuestra atmósfera esté causando un cambio climático.
El diagrama siguiente muestra los niveles de CO_2 en 1990 (las barras claras) de varios países (o regiones), los niveles de emisión en 1998 (las barras oscuras), y el porcentaje de cambio en los niveles de emisión entre 1990 y 1998 (las flechas con porcentajes).



a) En el diagrama se puede leer que el aumento de emisiones de CO_2 en Estados Unidos entre 1990 y 1998 fue del 11%. Escribe los cálculos para demostrar cómo se obtiene este 11%.
b) Luisa analizó el diagrama y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) es mayor que el descenso del porcentaje de la emisión en toda la Unión Europea (4%). Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea" ¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique la respuesta.
c) Luisa y Antonio discuten sobre qué país (o región) tuvo el mayor aumento en emisiones de CO_2. Cada uno llega a una respuesta diferente, Luisa dice que Estados Unidos mientras que Antonio dice que Australia. Explica por qué cada uno da una respuesta diferente.

Figura 6.10. Tarea 3 "Los Niveles de CO_2"

El cálculo del porcentaje de la primera cuestión se puede considerar como un problema típico de valor ausente, si se plantea primero la relación entre 6049 y 100 entonces el valor buscado se localiza en el consecuente, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{l} 6049 \rightarrow 100\% \\ 678 \rightarrow x\% \end{array} \quad \text{o equivalentemente} \quad \frac{6049}{100} = \frac{678}{x}$$

En esta cuestión está implicada una magnitud de tipo continua, es la cantidad de emisiones de CO_2. La razón aparece representada simbólicamente a través del porcentaje, sin embargo en la tarea también se presentan las cantidades en un gráfico de barras. Desde el punto de vista del análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal (1983) el tipo de razón implicada en la Tarea 3 se considera una exposición.

De acuerdo con los indicadores de los niveles de complejidad de las tareas expuestos por Rico y Lupiáñez (2008) se tiene que los ejercicios (a) y (b) son de conexión mientras que el ejercicio (c) corresponde al nivel de reflexión. El estudio PISA (OCDE, 2004) señala los mismos niveles de complejidad para esta tarea. La complejidad de la pregunta (a) se explica principalmente por el tipo de situación implicada en la tarea, que constituye un contexto no tan familiar para los estudiantes a quienes tradicionalmente se les ha pedido que calculen porcentajes y no que muestren cómo se obtiene un porcentaje conocido o dado.

Tabla 6.6. *Descripción de la Tarea 3 según nivel de complejidad*

		Tarea 3		
		(a)	(b)	(c)
Reproducción	Contextos familiares.			
	Conocimientos ya practicados.	X		
	Aplicación de algoritmos estándar.	X		
	Realización de operaciones sencillas.			
	Uso de fórmulas elementales			
Conexión	Contextos menos familiares	X	X	X
	Interpretar y explicar		X	X
	Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación			
	Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.			
Reflexión	Tareas que requieren comprensión y reflexión.			X
	Creatividad			
	Ejemplificación y uso de conceptos.			
	Relacionar conocimientos para resolver problemas más complejos.			X
	Generalizar y justificar resultados obtenidos.			

Relación de la Tarea 3, los Objetivos y las Competencias Matemáticas

La Tarea 3 se centra en el porcentaje, específicamente el ejercicio (a) requiere de la aplicación de algún conocimiento procedimental que permita encontrar un porcentaje dado. Este ejercicio es un ejemplo de las actuaciones a las que se refiere el objetivo específico 34, por su carácter instrumental éste se ha relacionado con la competencia *usar lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones*, misma que posiblemente se promoverá en el tratamiento de esta cuestión.

En la segunda cuestión es preciso interpretar adecuadamente el porcentaje en la situación, éste representa el cambio en las emisiones de dióxido de carbono en distintos países o regiones, con base en la medición hecha en dos momentos 1990 y 1998. Una mirada superficial de la situación podría contribuir a la consideración del porcentaje de emisiones de la Unión Europea como la media de los porcentajes de los países que la componen, esto sería creer que se puede operar con los porcentajes de la misma manera en la que se opera con las cantidades absolutas, lo cual en términos generales es falso. El porcentaje de la Unión Europea tiene como unidad de referencia la cantidad total de emisiones o la cantidad promedio de emisiones de los países integrantes (este dato se desconoce), sin embargo en ambos casos este porcentaje no es el resultado de calcular la media de los porcentajes de los países integrantes. Lo mostramos en las Figura 6.11 en la que se ha supuesto que la Unión Europea está formada por 5 países (A, B, C, D y E). En la primera tabla se ha asumido que la unidad de referencia del porcentaje de la UE es la suma de las cantidades de emisiones de los 5 países, y en la segunda tabla se ha asumido que la unidad de referencia es la media de las cantidades de emisión de los 5 países.

	1990	**1998**	**Dif. Absoluta**	**Dif. Relativa**
A	1209	1020	-189	-16%
B	218	236	18	8%
C	1081	1100	19	2%
D	700	785	85	12%
E	1000	900	-100	-10%
				“Media = -1%”
Unión Europea	4208	4041	-167	-4%
	1990	**1998**	**Dif. Absoluta**	**Dif. Relativa**
A	6045	5100	-945	-15,63%
B	1090	1180	90	8,25%
C	5405	5500	95	1,75%
D	3500	3925	425	12,14%
E	5000	4500	-500	-10%
				“Media= -0,69%”
Unión Europea	4208	4041	-167	-3,96%

Figura 6.11. Verificación de que el porcentaje de emisiones de la UE no es la media de los porcentajes de cambio en las emisiones de los países integrantes

En consecuencia, la resolución de esta cuestión requiere de la interpretación de la situación en términos matemáticos, después de traducirla a estructuras matemáticas es preciso volver a la misma para dar una respuesta fundamentada, además es necesario extraer e interpretar la información que aparece representada gráfica y simbólicamente en el enunciado. Con base en lo expuesto consideramos que la cuestión (b) es una tarea que permite suscitar actuaciones relacionadas con el objetivo específico 33 centrado en interpretar el sentido de uso del porcentaje en distintas situaciones. En el marco de esta cuestión es posible que se contribuya al desarrollo de las competencias: *pensar y razonar, modelizar y representar*, esta última de forma incipiente.

La última cuestión de la Tarea 3 está relacionada con el objetivo específico 3 centrado en interpretar y realizar comparaciones entre cantidades desde las perspectivas aditiva y multiplicativa. Para la resolución de la misma es necesario estudiar las respuestas mostradas por los dos sujetos de la situación, cada una de las cuales corresponde a un tipo de comparación (aditiva y multiplicativa), así como explicar por qué se da esta situación, de modo que es posible que la competencia *pensar y razonar* se vea implicada en el tratamiento de esta pregunta. En esta situación es preciso extraer información que aparece representada en el gráfico de barras con el fin de asegurar que aunque se tenga una mayor diferencia en las emisiones no necesariamente se tiene un mayor porcentaje en las emisiones, esta acción está relacionada con la competencia *representar*.

Finalmente ambas cuestiones (b y c) demandan de la exposición de argumentos que justifiquen las respuestas aportadas, por lo que posiblemente también se promueva la competencia *argumentar y justificar*.

Planificación de la Puesta en Común de la Tarea 3

A partir de las consideraciones previas, preparamos unas diapositivas orientadas a promover la comprensión de la regla de tres. Se ve la pertinencia de explicar el uso de este procedimiento argumentando la relación de proporcionalidad directa que existe entre la cantidad de emisiones de CO_2 y la expresión porcentual (Figura 6.12).

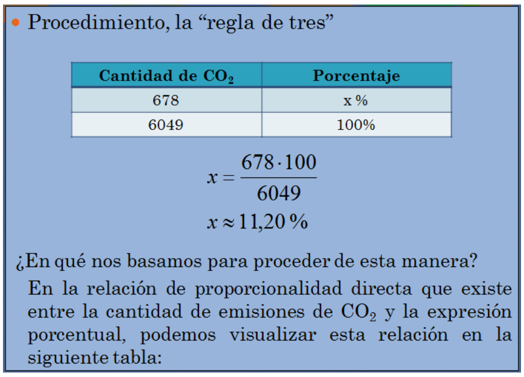


Figura 6.12. Justificación del uso de la regla de tres en el cálculo de porcentajes

Se planifica presentar a los estudiantes otras estrategias que permiten obtener el porcentaje del ejercicio (a), esto con el objetivo de promover el uso de otros procedimientos que podrían ser utilizados con mayor sentido que el aplicar la regla de tres (Figuras 6.13, 6.14 y 6.15)

• ¿Qué porcentaje es 678 de 6049?

Porcentaje	100 %	50%	25%	12,5%		10%
Cantidad de CO_2	6049	3024,5	1512,25	756,125	678	604,9

Figura 6.13. Mediante la estimación

÷2 → ÷ 6049 → x 100

Razón	678 / 6049	339 / 3024,5	0,1120 / 1	11,20 / 100
Valor aproximado de la Razón	0,1120	0,1120	0,1120	0,1120

Figura 6.14. Mediante equivalencia de razones

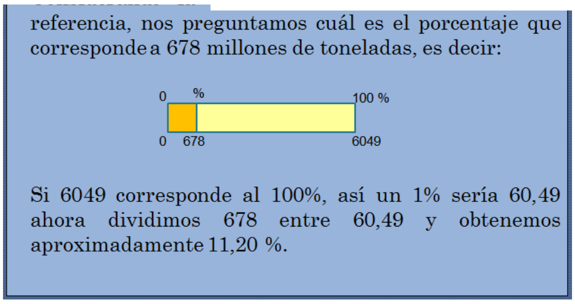


Figura 6.15. Mediante modelo lineal del porcentaje

Se planifican además otras diapositivas con posibles respuestas a las preguntas de los ejercicios (b) y (c) (Anexo C).

Supuestos Sobre Posibles Actuaciones en la Resolución de la Tarea 3

En el primer punto de esta tarea los estudiantes aplicarán, mayoritariamente, la regla de tres como procedimiento para justificar la obtención del porcentaje. A partir de la puesta en común de esta tarea los estudiantes podrán conocer cómo justificar el uso de la regla de tres en la obtención de porcentajes, a partir de la fase colaborativa y puesta en común podrán conocer otras estrategias que conducen a la obtención de un porcentaje. Los estudiantes mostrarán dificultades para argumentar los fundamentos subyacentes a las comparaciones aditiva y multiplicativa.

6.2.2 Desarrollo de la 2ª Sesión en Ambos Grupos

Esta sesión se desarrolla en la misma semana que la primera sesión, el jueves 28 de enero de 2010, corresponde a la clase de supervisión de la asignatura por lo que la duración de la misma es de 1 hora. En el inicio de la sesión la investigadora recuerda las pautas de la dinámica de trabajo: primero individual, luego colaborativamente y que posteriormente se pasaría a la puesta en común de la resolución de la tarea.

6.2.2.1 Desarrollo de la 2ª Sesión en el G1

A esta sesión asistieron 21 estudiantes, debido a que es jueves, día de supervisión, habitualmente la asistencia es baja. Se formaron 5 equipos de trabajo. La duración total de la sesión es de 1 hora.

Resaltamos que durante esta 2ª sesión los estudiantes se ajustan de mejor forma al trabajo individual de la 1ª fase y al tiempo establecido para cada uno de los momentos. Las inseguridades o dudas, en la mayoría de los casos, las comunican primero a la investigadora antes que a otro de sus compañeros. Durante la fase individual varios estudiantes le dicen a la investigadora que no saben cómo calcular ese porcentaje o cómo responder a las preguntas siguientes, ante lo que la investigadora les dice que intenten hacer el máximo esfuerzo posible y escribir lo que piensan aunque esto, en última instancia, implique escribir que no saben cómo resolverlo o cómo explicar lo que piensan.

Algunas de las preguntas están relacionadas con la interpretación del gráfico de barras usado en la presentación de la información, por ejemplo; el significado de cada uno de los colores de las barras o cuál de las dos correspondía a cada año, ante las preguntas la investigadora les señaló que al lado del gráfico aparecía la información para su interpretación, esto a pesar de que al inicio, cuando les entregó la hoja de trabajo les señaló puntualmente que leyeran con cuidado el enunciado completo de la tarea.

Después del trabajo individual, la investigadora les dice que se ubiquen en un equipo, como en la sesión anterior, tratando de mantener al máximo los formados el lunes. El trabajo colaborativo se desarrolla sin incidentes, la investigadora se dedicó a cuestionar los procedimientos o respuestas que observaba en el trabajo de cada equipo. Como ejemplo mostramos un intercambio dado durante esta 2ª fase entre la investigadora (I) y las estudiantes del equipo E7.

C9: *esto es el 100%, ¿no?...*
I: *bueno de eso se trata esto, de comprender qué es el 100%, ¿qué significa el 100%?*
C9 y B6: el todo…
A13: *o sea que esto es el todo (señala barras claras) y esto es el todo más el añadido, ¿no?, este es el porcentaje que aumentó entonces esto es el 100% y esto es el 111%*
I: *es una forma de analizarlo, hay muchas formas de analizar eso y poder demostrar que lo que creció fue un 11%, a ver lo que ella dice… hay una referencia que es lo que consideramos como el todo, 100% significa 100 de cada 100, o sea todos, ahora también se trabaja el tanto por mil, pero en situaciones cotidianas se usa el 100% para poder representar partes de un todo, el todo puede ser ustedes 4, 4 puede ser el 100%, cada una representa un 25%, o sea el todo el 100% no tienen que ser 100 unidades…*
B6: *sí, sí, pero entonces por ejemplo, acá se ha dicho, lo que ha dicho ella 6049 es el 100%, para averiguarlo hay que hacer una regla de tres ¿no?...*
I: *es un procedimiento para justificar eso, que es lo que les pido aquí, uno puede ser la regla de tres pero hay muchos más, ahora vamos a ver al menos unas tres formas, la regla de tres es la más común, la cuestión es saber por qué usamos una regla de tres, por qué es propicio usar una regla de tres, vale…*

Puesta en común de la Tarea "Los Niveles de CO_2" (T3; G1)

Destacamos que en el G1 se revisaron todas las partes del problema. La puesta en común se inicia con la lectura, por parte de la investigadora, del enunciado de la tarea, mientras ella lo lee el estudiante A9 quien quiso participar va escribiendo unos cálculos en la pizarra.

El estudiante A9 expresa oralmente por qué han planteado la regla de tres de la forma en la que la han hecho, en resumen explica que han asumido que la cantidad inicial de emisiones (en 1990) corresponde a un 100% mientras que la cantidad de emisiones de 1998 corresponde a "x", que es la incógnita que quieren averiguar, sin embargo pone en la pizarra el procedimiento $x = \frac{6727 \times 100}{6049} = 11\%$, lo cual es incorrecto pues en ese caso $x = 111{,}20\%$.

La investigadora aprovecha este error pidiendo al resto de estudiantes que observen lo que ha hecho A9 y que le digan en qué se ha equivocado, a partir de esto le señalan que no ha hecho la diferencia, que ha puesto directamente el 11% y que en su regla de tres la "x" representaba algo más del 100% pues las cantidades de emisión de 1998 eran mayores que las de 1990, que ya eran del 100%.

A continuación, la investigadora pide a otro de los equipos que indiquen de qué forma han expresado esa regla de tres. El estudiante F1 del equipo E1 le dice "*seis mil cuarenta y nueve es a cien y la diferencia que sería seis cientos setenta y ocho es a equis*", es decir $\begin{matrix} 6049 \to 100 \\ 678 \to x \end{matrix}$. La investigadora pregunta al resto de equipos de qué manera han formulado la regla de tres, resultando que dos equipos lo han hecho como el estudiante A9 y tres lo han hecho como el estudiante F1. En este momento dedica un corto tiempo a analizar la equivalencia entre ambos procedimientos, dado que 678 corresponde a la diferencia entre las emisiones de 1998 y 1990. Posteriormente concluye que la pregunta matemática que está detrás de esta cuestión es ¿qué porcentaje es 678 de 6049?, la cual se puede abordar desde distintas perspectivas y que la regla de tres es sólo una de ellas.

Expone tres formas de abordar la cuestión anterior, en la primera forma usa la estimación mediante una tabla de valores (Figura 6.13) para llegar a concluir que 678 es aproximadamente un 11% de 6049, además en este caso aprovecha para introducir la idea de proporcionalidad directa indicando la relación escalar entre porcentajes y cantidades de CO_2, luego indica la relación funcional (razón constante) entre cantidades. Usando la información mostrada en la Figura 6.13 dice:

***I**:…en el porcentaje tengo cien y la relación con cincuenta, entre cien y cincuenta, es que una es la mitad de la otra, ¿de acuerdo?, y luego cincuenta con veinticinco es la mitad, si me voy a la fila de abajo, seis mil cuarenta y nueve, la mitad es tres mil veinticuatro con cinco, es decir voy disminuyendo en la misma cantidad de veces, cuando hacemos… o sea observo por lo menos esas relaciones en los tres primeros valores en donde fácilmente se puede reconocer que uno es la mitad de otro, en las tres primeras…, luego si hacemos el cociente de cien entre seis mil cuarenta y nueve, de* *cincuenta entre tres mil veinticuatro…, si seguimos haciendo esos cocientes obtenemos el mismo valor…*

Aunque no llega a un valor exacto, sigue aplicando el mismo razonamiento de "mitades" y concluye que podría decirse que el porcentaje que corresponde a 678 ha de estar entre un 10% y un 12%. Sin embargo en este momento la investigadora se percata de que la tabla mostrada no le ha funcionado completamente pues como va razonando por "mitades" al llegar a 12 se da cuenta que hubiese puesto mejor 12,5% que es la mitad de 25, de esta forma el razonamiento aplicado en los otros casos se mantiene mientras que con el 12% no era directo ver la cantidad de CO2 correspondiente. El uso del 10%, para acotar por la derecha, fue bastante útil pues la relación de éste con el 100% se observa directamente, es la décima parte.

Posteriormente muestra otra manera de hallar el porcentaje de 6049 que corresponde a 678, en esta estrategia usa de nuevo una tabla en la que aparece la razón entre la diferencia de emisiones que son 678 y el total de emisiones que son 6049. Mediante divisiones convenientes va obteniendo las razones equivalentes: 339:3024,5 luego 0,1120:1, a esta última la amplifica por 100 y finalmente obtiene 11,20:100. Es decir mediante razones equivalentes llega a mostrarles que $\frac{678}{6049} = \frac{11{,}20}{100}$ e indicando que la expresión quiere decir que 678 corresponde a un 11,20% de 6049 (Figura 6.14).

En esta estrategia, algunos estudiantes preguntan a la investigadora cómo se le ha ocurrido dividir o multiplicar por cierta cantidad, la investigadora recurre a la estrategia de la unidad simple o de "cuánto por uno" para explicar que el interés es ver qué porcentaje corresponde a un millón de toneladas de CO_2. Al decir esto el estudiante A9 interrumpe y completa diciendo que sólo bastaría multiplicar eso por 100. En este momento la investigadora recuerda la noción de razones equivalentes, diciendo que al multiplicar o dividir ambos términos de la razón por un mismo número se obtienen razones equivalentes.

Finalmente muestra una representación gráfica de la relación entre el porcentaje y la cantidad de CO_2 del año 1990 (Figura 6.15). En esta estrategia les explica el significado que tiene multiplicar o dividir al calcular un porcentaje.

Después de presentar las tres maneras de obtener el porcentaje de la 1ª cuestión de la tarea procede a resumir las ideas que han motivado la planificación de esta sesión, diciéndoles que ha mostrado estas tres estrategias con el objetivo de que ellos conozcan alternativas a la regla de tres e indica que "el problema" en sí no es la regla sino el uso sin sentido de la misma. Complementa la idea anterior diciendo que el porcentaje es una forma estandarizada de expresar una razón, esta idea ya la había introducido. Mostramos a modo de ejemplo el fragmento correspondiente a este aporte:

***I**: … qué es un porcentaje, a modo de resumen, va ser una forma estandarizada de representar una razón, como lo dije hace un rato, es una razón en donde el consecuente es cien, en donde tengo un todo de referencia el cual hago corresponder con el cien por ciento, por ejemplo en una bolsa dos de cada cinco bolas son rojas, eso es una razón, dos de cada cinco bolas son rojas, una forma de escribirlo es así (escribe 2:5) esto es*

equivalente a decir también que cuarenta de cada cien son rojas porque cuarenta es a cien es una razón equivalente a dos es a cinco, ¿sí o no?, ¿todos de acuerdo?, ¿por qué?...
***A9**: por veinte…*

Luego procede a la revisión de los otros dos puntos de la tarea, en la parte (b) el estudiante A9 y otros miembros de su equipo señalan que el error de Luisa ha sido el no considerar que el porcentaje de la Unión Europea es la media de sus países integrantes, los estudiantes de este equipo dan ejemplos y le explican al equipo E7, quienes durante la fase colaborativa manifestaron no saber cómo abordar esa cuestión.

En relación con la última cuestión, ninguno de los estudiantes aportó una respuesta completa ante esto y en vista de que el tiempo había acabado la investigadora decide explicar la situación planteada en esa pregunta, diciendo:

***I**: …las dos personas dan respuestas diferentes simplemente porque lo hacen desde dos perspectivas distintas, ¿cuál tuvo mayor aumento?... pues Luisa lo que ve es un aumento absoluto, nada más restó las cantidades mientras que Antonio lo que observa es un aumento relativo o porcentual, es diferente, entonces cuando tenemos que analizar en dos situaciones cuál ha crecido más o cuál es el mayor aumento, es importante saber que podemos analizarlo desde dos puntos de vista, una es la situación absoluta, que es sólo haciendo la resta y otra es un cálculo o un análisis relativo que es considerando cuánto había inicialmente en relación con esa diferencia…*

La investigadora cierra la sesión agradeciendo la atención y asistencia, también señala que más adelante habrá dos sesiones para trabajar más a fondo esas ideas. Finalmente les da las hojas de trabajo en casa, con el objetivo de que intenten recuperar las ideas expuestas en la sesión y que mejoren la producción que han hecho individualmente.

Rediseño de la Planificación para el G2

Para el trabajo de la 2ª sesión con el G2, de la tarde, se decidió cambiar los valores de las cantidades incluidas en la resolución del problema, de modo que la Figura 6.13 se sustituyó por la tabla que mostramos en la Figura 6.16. El objetivo es llegar a concluir que 678 corresponde a un 11% aproximadamente, pero al razonar mediante mitades de los porcentajes y de las cantidades de CO_2 el 12% de la 1ª tabla no era la mitad del dato anterior 25%, por eso se decide cambiaría el 12% por el 12,5% para el trabajo de la tarde.

Porcentaje	100 %	50%	25%	12,5%		10%
Cantidad de CO_2	6049	3024,5	1512,25	756,125	678	604,9

Figura 6.16. Relaciones entre cantidades de CO_2 y el porcentaje

6.2.2.2 Desarrollo de la 2ª Sesión en el G2

Al igual que en el G1 esta sesión tuvo lugar el día jueves 28 de enero de 2010, tres días después de la 1ª sesión. Asistieron 25 estudiantes, no hubo mucha diferencia en relación con la asistencia a la 1ª sesión. Se formaron 6 equipos. La intervención se inició casi 10 minutos después de la hora debido a que la mayor parte de los estudiantes llegaron tarde a la clase, esta situación limitó el desarrollo de lo que estaba planificado, la duración total de la sesión fue de unos 50 minutos.

Durante la fase individual, al igual que en el G1, algunos de los estudiantes manifiestan dudas relacionadas con el gráfico de barras, estas se debieron principalmente a que no leyeron con atención la información que aparecía en el enunciado de la tarea. En ese momento los estudiantes resolvieron la tarea de forma individual, y no mostraron interés por observar lo que hacía el (la) compañero(a) de al lado.

Antes de iniciar la fase de trabajo colaborativo se les indica que deben intentar mantener al máximo los equipos formados el lunes y que si alguno no estuvo presente ese día, se incorpore a un equipo que no tenga muchos miembros. A partir de este momento la investigadora se dedicó a observar el desarrollo del trabajo en los equipos, iba de uno a otro observando de qué forma estaban abordando las cuestiones con el objetivo de optimizar las aportaciones que ella o los estudiantes proporcionaran durante la puesta en común. Los equipos no le manifestaron dudas relacionadas con la tarea, sin embargo indicamos que en un par de ellos se tomaron más tiempo en la discusión de las cuestiones, tardaron en total unos 25 minutos en esta fase.

Puesta en común de la Tarea "Los Niveles de CO2" (T3; G2)

Para esta fase la investigadora pide a una de las estudiantes del equipo E9 que exponga al resto del grupo lo que han hecho durante el trabajo colaborativo. Este equipo fue grabado en video durante la fase colaborativa.

La estudiante lee el enunciado de la tarea y expone que han aplicado una regla de tres relacionando las cantidades como a continuación se indica $\begin{matrix} 6049 \rightarrow 100\% \\ x \rightarrow 11\% \end{matrix}$, explica que han tomado los 6049 como el 100% porque es la primera cantidad en la situación y agrega que el resultado es el once por ciento de esta cantidad (señala 6049) que es… seis ciento sesenta y cinco. La investigadora cuestiona el aporte de la estudiante debido a que esperaba como respuesta la diferencia entre emisiones de ambos años, esto es 678, no obstante la investigadora no consideró que el 11% que aparece en el gráfico ha sido un redondeo del 11,20%. Ante lo que parecía ser un error de cálculo, la investigadora revisa el procedimiento hecho por la estudiante, luego otra estudiante le indicó que no era un 11% exacto. Mostramos el fragmento correspondiente:

I*: tampoco estoy segura de esto porque debería ser la diferencia… (Alguien dice en el fondo seiscientos setenta y ocho)*
I*: debería ser seiscientos setenta y ocho…*
F3*: es que eso no es el once por ciento exacto, eso es el once con algo…*

Posteriormente a esto, la investigadora preguntó por otras formas de plantear la relación, a lo que la estudiante F3 dice:

***F3**: …seis mil setecientos veintisiete menos seis mil cuarenta y nueve todo eso dividido entre seis mil cuarenta y nueve (I escribe* $\frac{6727-6049}{6049}$ *) te da seis cientos setenta y ocho y eso entre seis mil cuarenta y nueve, luego multiplicas por cien…*

Después de este aporte la investigadora se dispone a resumir lo que han hecho las dos estudiantes con la idea de observar la relación de ambos procedimientos, y de indicarles otra posibilidad, dice así:

***I**: …voy hacer aquí un resumen de esto, son diferentes maneras de plantear, bueno aquí no están haciendo la regla de tres directamente sino lo que calcularon primero fue la diferencia entre las toneladas de* CO_2 *en el 90 y en el 98, y luego sacan la razón, la relación entre 678 y 6049, para luego calcular el porcentaje (señala lo propuesto por Cristina), luego esta forma y esta otra se parecen bastante (señalando las reglas de tres) la única diferencia es que aquí buscamos el equis por ciento y aquí buscamos la cantidad, había todavía otra manera de hacerlo que sería seis mil cuarenta y nueve es al cien por ciento y luego me pregunto seis cientos setenta y ocho, que es la diferencia, qué porcentaje es, ¿hubo un equipo que lo haya hecho así?*

Esta última pregunta se queda sin tratamiento, al igual que la revisión del resto de cuestiones, pues la profesora de la asignatura le señala a la investigadora que la hora ha terminado y que los estudiantes deben irse pronto porque van a otra asignatura en la que la profesora no abre la puerta si llegan tarde. En el cierre de la sesión la investigadora les dice que ha faltado mucho por revisar y que deben traer el trabajo individual (4ª fase) en día del examen de la asignatura. Les señala que para esa reflexión piensen qué es un porcentaje, el por qué se puede aplicar la regla de tres en esa situación ya que ha observado que lo que han hecho es “automático” y que intenten hacerlo de la manera más explícita o completa posible, además les agradece la asistencia y participación.

6.2.3 Análisis Preliminar de la 2ª Sesión en Ambos Grupos

Como aparece descrito en el Apartado 5.2.4 el análisis preliminar de las sesiones se realizó a partir de la información proveniente de la observación de las producciones individuales, de las grabaciones de audio y de video así como de la revisión de las notas tomadas durante la sesión. Con base a esta información se derivaron una serie de decisiones orientadas a la reelaboración de la planificación de la 3ª sesión.

Destacamos que en ambos grupos y durante las tres primeras fases de la dinámica de aula predominó el uso de la regla de tres como procedimiento en el cálculo de porcentajes. Esta situación confirma la suposición planteada antes de la intervención, en relación con la primera cuestión de la tarea “Los niveles de CO_2”. Este hecho nos permite afirmar que los estudiantes no conocían otras estrategias que permitan estimar o averiguar el porcentaje de forma significativa y no mecánica. Aunque solo en el G1 se logró desarrollar la puesta en común de toda la tarea, consideramos que los aportes proporcionados por la investigadora, en relación con las estrategias para hallar el porcentaje, motivaron el interés de los estudiantes quienes no manifestaron conocer otras formas de calcularlo. A partir de lo anterior consideramos que el trabajo sobre la tarea ha sido positivo y ha contribuido al crecimiento del conocimiento matemático de estos estudiantes. Sin embargo, la confirmación de esta condición requiere de un estudio más profundo, que se realizará en el análisis retrospectivo de la intervención.

Nuestra percepción a partir de la observación inicial de la información es que los estudiantes tienen dificultades para establecer la equivalencia entre distintas formas de plantear una regla de tres adecuada en la 1ª cuestión de la tarea, esta dificultad tiene que ver con un insuficiente reconocimiento de la unidad de referencia en las relaciones que han establecido. Esperamos que el análisis posterior de la sesión permita desvelar evidencias que permitan sustentar o rechazar esta percepción.

Las siguientes cuestiones de la tarea ofrecieron la posibilidad de observar las capacidades relativas a la justificación y comunicación de ideas matemáticas. A partir de las consideraciones generales previas realizadas a la información de la 2ª sesión se observa que en las preguntas (b) y (c) los estudiantes aportan justificaciones basadas en opiniones personales más que en hechos matemáticos y que manifiestan dificultades para comunicar eficazmente las ideas. En el caso particular de la tercera cuestión se observó que estudiantes de ambos grupos intentaron dar la razón a una de las personas ficticias del enunciado, no siendo esto una demanda de la tarea. Para explicar que Antonio o Luisa tenían razón recurrieron con frecuencia a argumentos relacionados con la representación, uno de ellos se fijaba en los porcentajes y otro en las barras, sin embargo, no profundizaron en la causa que lleva a que cada uno aporte una respuesta diferente a la pregunta ¿qué país (o región) tuvo el mayor aumento en emisiones de CO_2?

La limitación de tiempo en el G2, debido a la llegada tarde del grupo y del uso de una mayor cantidad de tiempo durante la fase colaborativa, no permitió obtener información de la puesta en común. Sin embargo, en las grabaciones de audio se ha observado que la mayor parte de los equipos asumieron con responsabilidad la resolución de la tarea discutiendo las cuestiones y ayudando a los demás integrantes del equipo para que comprendieran las respuestas aportadas.

En la Tabla 6.7 mostramos las decisiones tomadas para la reelaboración del diseño de la 3ª sesión y se justifica la toma de tales decisiones.

Tabla 6.7. *Toma de decisiones para la 3ª sesión*

	Decisiones
Sobre la Dinámica	Pedir a los estudiantes que mantengan los grupos de prácticas de la asignatura en la mayor medida posible. Con el fin de favorecer el cierre de la tarea y la institucionalización de los contenidos, la investigadora se hará cargo de llevar la puesta en común si bien pedirá opiniones a los estudiantes y resolverá dudas que surjan en ese momento. Esto se debe a que el tiempo para la puesta en común es limitado y cuando en esta fase los estudiantes asumen más responsabilidad, se ha observado una mayor inversión de tiempo, en consecuencia no se revisan todas las cuestiones de la tarea ni se incluyen

Tabla 6.7. *Toma de decisiones para la 3ª sesión*

	Decisiones
	aportes teóricos adicionales preparados para este momento. A partir del análisis y revisión de las sesión 2, la investigadora se plantea ser más puntual en su discurso de la puesta en común. Con el fin de facilitar el análisis de los datos se les pedirá a los estudiantes que antes de iniciar el trabajo colaborativo digan en voz audible su nombre completo para que quede registrado en la grabación, esto facilitará la identificación de sujetos. Pedirles que intenten o que pongan el máximo esfuerzo en hablar de uno en uno ya que al calor de la discusión se dificulta identificar el aporte de cada miembro del equipo.
Sobre las Tareas	A partir de las dudas de los estudiantes durante el desarrollo de las primeras dos sesiones consideramos que es necesario hacer una nueva revisión de los enunciados de las tareas de la 3ª y 4ª sesión. De la revisión de los enunciados, consideramos que en la 4ª sesión que se han programado dos tareas de comparación sustituirlas por la de escalas, dado que en ese tiempo se estará en el tema de magnitudes y su medida, la tarea de escala se ajustaría mejor a lo planificado dentro de la asignatura.
Sobre el Contenido	Consideramos que el uso mecánico de la regla de tres, mostrado por los estudiantes de ambos grupos, constituye una limitación en el intento por desarrollar el conocimiento matemático asociado a la razón y la proporcionalidad, por lo que es preciso fomentar el uso de otras estrategias distintas a la regla de tres. En este sentido la Tarea 4 incluye un ejercicio típico de “valor ausente” en el que se promueve el uso de estrategias distintas a esta regla. Dado que los estudiantes han mostrado dificultad para reconocer la diferencia entre una comparación aditiva y otra multiplicativa consideramos necesario incluir en alguna tarea de la siguiente sesión un ejercicio relacionado a este objetivo, con el propósito de promover una nueva reflexión en torno a esto.

Nota: en términos generales consideramos que el porcentaje por sí solo tiene asociadas una serie de dificultades propias y que promover la comprensión del mismo requiere del diseño de una intervención orientada específicamente a este cometido. En nuestra intervención hemos considerado el estudio del porcentaje en esta 2ª sesión pues además de ser un contexto de la razón y la proporcionalidad está implicado en múltiples situaciones cotidianas, no obstante, el interés del experimento de enseñanza no radica únicamente en promover el aprendizaje sino en estudiar el conocimiento y capacidades manifestadas por los estudiantes en relación con diferentes contenidos relativos a la razón y la proporcionalidad. Por lo anterior, decidimos que las siguientes sesiones se centrarán en estudiar otros contextos y situaciones asociadas a ambos contenidos, como lo son la relación de proporcionalidad directa e inversa, la comparación de razones y las escalas.

6.3 TERCERA SESIÓN

6.3.1 Planificación de la 3ª Sesión

La tercera sesión está centrada en el estudio de conocimientos relacionados con las relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Para ello se han preparado dos tareas que hacen referencia a situaciones de la vida diaria.

Al igual que en las primeras dos sesiones la resolución de las tareas se realizará siguiendo algunas de las pautas de la metodología de trabajo colaborativo, ésta es una adaptación de la metodología ACODESA (Apartado 4.3.2).

La Tabla 6.8 resume las características principales que describen la planificación de la tercera sesión con los estudiantes de los grupos G1 y G2.

Tabla 6.8. *Planificación de la tercera sesión para ambos grupos*

Objetivos de la Investigación para la Tercera Sesión	OP1.2.5. Conocer las concepciones que muestran los estudiantes en torno a las relaciones de proporcionalidad. OP1.2.6. Identificar procedimientos expuestos en la resolución de situaciones que involucran las relaciones de proporcionalidad directa e inversa. OP1.3.5. Promover la comprensión de la noción de razón y de las relaciones de proporcionalidad. OP1.3.6. Promover el uso de la relación funcional (constante de proporcionalidad) y el operador escalar en lugar de la regla de tres en tareas de "valor faltante", así como promover la comprensión de la "regla de tres" directa. OP1.4 Identificar fortalezas y debilidades de la dinámica de trabajo colaborativo puesto en práctica. OP1.5 Identificar fortalezas y debilidades de las tareas matemáticas aplicadas. OP2.1 Describir las actuaciones de los estudiantes en términos de las expectativas de aprendizaje: objetivos específicos y competencias matemáticas consideradas.
Contenidos Instruccionales	Representación gráfica, simbólica, tabular y verbal de las relaciones de proporcionalidad: directa e inversa. (Foco 2) La constante de proporcionalidad. (Foco 2) Relaciones estructurales en una proporción (funcional y escalar). (Foco 2) Propiedades de las proporciones. (Foco 2) Significado de la razón como índice comparativo. (Foco 1)

Tabla 6.8. *Planificación de la tercera sesión para ambos grupos*

	Relación de orden entre razones. (Foco 1)
Objetivos Instruccionales	16. Utilizar diferentes procedimientos para hallar un término desconocido en una proporción. 19. Identificar y describir las relaciones estructurales de una proporción (escalar y funcional). 20. Describir las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, entre magnitudes mediante distintas representaciones. 3. Interpretar y realizar comparaciones entre cantidades desde las perspectivas aditiva y multiplicativa 11. Establecer la relación de orden entre dos razones cualesquiera. 23. Aplicar la noción de proporcionalidad, directa o inversa, y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.
Competencias Matemáticas	Pensar y razonar Usar lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones Representar Comunicar Plantear y resolver problemas
Tareas	"Crecimiento de bacterias" "Permanencia activa de un fármaco"

6.3.1.1 Planificación de las Tareas de la 3ª Sesión

Las dos tareas que se han elegido para trabajar las nociones de razón y proporcionalidad han sido elaboradas por las investigadoras, ambas corresponden a situaciones científicas. Se intenta que los datos incluidos en cada una fuesen lo más cercanas a la realidad, de modo que durante la preparación se consultó información sobre proliferación de bacterias cuyo crecimiento se ajustara a un modelo directamente proporcional y sobre tipos de medicamentos cuya permanencia en el cuerpo siguieran un modelo inversamente proporcional. En ambos casos, desde el punto de vista del análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal (1983) el tipo de razón implicada en las Tarea 4 y 5 se considera un constructo.

Tarea 4: Crecimiento de Bacterias

Es una tarea asociada con la proporcionalidad directa, está formada por dos fases. La primera está compuesta por cuatro ejercicios orientados principalmente a los objetivos específicos: describir las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, mediante distintas representaciones, y utilizar diferentes procedimientos para hallar un término desconocido en una proporción. La segunda fase está orientada a estudiar la comparación aditiva y multiplicativa de cantidades así como a la comparación de razones, de modo que esta fase está relacionada con los objetivos específicos 3 y 11. En la Figura 6.17 mostramos la Tarea 7.

Crecimiento de Bacterias

Unos científicos están investigando el comportamiento de una bacteria con el fin de controlar la proliferación de la misma. Se interesan especialmente por el día en que la población sea de 650, porque es cuando deben iniciar una nueva técnica de control de la reproducción.

A partir del tercer día el crecimiento de la población se comporta de manera particular, algunas de las primeras observaciones se recogen en la tabla:

Tiempo (días)	3	5	6	8	10	12	15	16
Número de bacterias	39	65	78	104	130	156	195	208

I Fase

a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.

b) Intenta utilizar estrategias o técnicas diferentes a la "regla de tres" para averiguar:

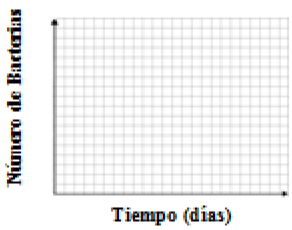
b.1) El número de días que han transcurrido hasta que el número de bacterias sea de 650.

b.2) El número de bacterias después de 25 días.

Explica tu razonamiento en los dos casos anteriores.

c) Escribe una expresión o fórmula que permita hallar el número de bacterias después de un número cualquiera de días (*n* días).

d) Representa en el eje de coordenadas la relación entre las dos magnitudes (tiempo y número de bacterias).



II Fase

a) Hace cinco días se midió el largo de dos bacterias. La bacteria A tenía 0,05 mm de longitud y la bacteria B tenía 0,04 mm. Hoy de nuevo se midieron las bacterias y la bacteria A mide 0,11 mm y la bacteria B mide 0,1 mm.

En los últimos cinco días: ¿Alguna de las dos bacterias ha crecido más en relación con la longitud inicial? Explica tu razonamiento.

Figura 6.17. Tarea 4 "Crecimiento de Bacterias"

En la primera versión del diseño se habían incluido únicamente cantidades pares de tiempo y en consecuencia las cantidades correspondientes de bacterias también serían pares, a partir de la revisión de la planificación de esta tercera sesión se decidió introducir algunas cantidades impares; tal decisión se tomó con el fin de evitar que cuando los estudiantes resuelvan el primer ejercicio centren la atención en esta característica de las cantidades y no en la búsqueda de relaciones.

A partir de nuevas revisiones a la tarea se decidió poner como primer par de cantidades en la tabla 3 y 39 en lugar de 4 y 52, este cambió se hizo porque dado que la constante de proporcionalidad es 13 y los múltiplos de este número no son tan familiares, pensamos que el par 4 y 52 podría provocar que los estudiantes no avanzaran en la tarea con la rapidez esperada, es decir consideramos que una manera de ayudarles a deducir que la constante es 13 sería iniciar los pares en la tabla a partir de una cantidad menor. La constante 13 se eligió porque consideramos que los múltiplos de este número no son muy comunes o memorizados en comparación con los múltiplos de los números menores que 10.

Se hizo otro cambio en el enunciado de la tarea, el segundo párrafo del enunciado original se enunció así: "*El crecimiento de la población se puede medir siguiendo la evolución, a lo largo del tiempo, del número de bacterias por unidad de volumen, algunas de las primeras observaciones se recogen en la tabla*"; decidimos cambiarlo por: "*A partir del tercer día el crecimiento de la población se comporta de manera particular, algunas de las primeras observaciones se recogen en la tabla*".

Esta decisión se tomó con el objetivo de simplificar el enunciado e incluimos el dato inicial referente al "tercer día" con el fin de controlar un posible desvío de la atención de los estudiantes hacia lo que sucedía con el crecimiento de las bacterias en los primeros días.

Se ha considerado que los estudiantes podrían tener dudas acerca del término "relación" en el ejercicio (a), así que previamente a la sesión se decidió decirles que las relaciones se pueden establecer entre cantidades o números y entre conjuntos de cantidades, por ejemplo entre 3 y 12 podemos establecer distintas relaciones:

- 3 es menor que 12, $3 < 12$.
- 12 es múltiplo de 3.
- 3 es 9 unidades menos que 12.
- 3 es divisor de 12.
- La razón entre 12 y 3 es 12:3 y su valor es 4.
- 12 es cuatro veces 3.

Se ha decidido subdividir el ejercicio (b), en dos subejercicios como respuesta a una de las variables de tarea de nuestra investigación, este criterio se refiere a la localización del valor desconocido en la cuarta proporcional. En los ejercicios (b.1), (b.2) los estudiantes deben hallar una de las cantidades de tiempo o de bacterias. Si se expresa la relación mediante la igualdad $f(x) = 13x$, $x \geq 3$ y $f(x)$ representando la cantidad de bacterias después de x días transcurridas, entonces los dos ejercicios de valor ausente están caracterizados por la variable "localización del valor ausente", de modo tal que en (b.1) el dato desconocido es "x" y en (b.2) el dato desconocido es la cantidad de bacterias $f(x)$.

Se ha elegido presentar la información de la Tarea 4 tabularmente dado que este tipo de representación, a diferencia de la simbólica o la gráfica, permite identificar más fácilmente, y a la vez, la relación funcional y la escalar entre las cantidades. Uno de los objetivos de investigación para esta sesión se refiere a que a partir de la puesta en común la investigadora promueva algunas de las diferentes representaciones de la relación de proporcionalidad ya que aunque los estudiantes trabajen cada ejercicio separadamente no se espera que ellos por sí solos conecten esas ideas.

Consideramos que es posible, durante la puesta en común, hacer referencia a la relación entre la representación gráfica y el tipo de función correspondiente. Se les interrogará sobre las funciones lineales. Si los aportes de los estudiantes son productivos se comentará específicamente que la función lineal que modeliza la situación descrita en la tarea es $y = f(x) = 13x$, expresión que ya han mostrado en el ejercicio anterior, no obstante se les recordará que la definición de una función requiere de un conjunto de salida (dominio) y un conjunto de llegada (codominio), que en el caso que nos ocupa serían $\{x \in Q^+, x \geq 3/13x \in N\} \rightarrow N$, el ámbito estaría formado por los números naturales mayores o iguales que 39.

Según los niveles de complejidad de las tareas (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 258) se tiene que los ejercicios (a), (b), (c) y (d) son de conexión, mientras que el ejercicio (a) de la II fase es del nivel de reflexión.

Tabla 6.9. *Descripción de la Tarea 4 según nivel de complejidad*

		Tarea 4				
		(a)	(b)	(c)	(d)	II(a)
Reproducción	Contextos familiares.					
	Conocimientos ya practicados.					
	Aplicación de algoritmos estándar.					
	Realización de operaciones sencillas.		X			X
	Uso de fórmulas elementales		X			
Conexión	Contextos menos familiares	X				
	Interpretar y explicar					
	Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación			X	X	
	Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.	X	X			X
Reflexión	Tareas que requieren comprensión y reflexión.					X
	Creatividad					
	Ejemplificación y uso de conceptos.					
	Relacionar conocimientos para resolver problemas más complejos.					
	Generalizar y justificar resultados obtenidos.					

Relación de la Tarea 4, los Objetivos y las Competencias Matemáticas

En el primer ejercicio de la 1ª fase de la tarea los estudiantes han de buscar relaciones entre las cantidades expuestas en la tabla de valores, a partir de las relaciones halladas y las que aporte la investigadora se busca caracterizar la proporcionalidad directa en términos de la relación funcional (constante de proporcionalidad) y el operador escalar que relaciona las cantidades. Tales actuaciones se contemplan en el objetivo específico 19 centrado en identificar y describir las relaciones estructurales de una proporción (escalar y funcional). Entendemos que la búsqueda y descripción de relaciones entre cantidades promueve el desarrollo de las competencias *pensar y razonar*, y *comunicar*.

El segundo corresponde a un ejercicio típico de “valor faltante o ausente” (missing value problems) con la particularidad de que éste demanda la aplicación de otras estrategias distintas a la regla de tres para hallar las cantidades solicitadas. También es preciso explicar los razonamientos aplicados. Está relacionado con el objetivo específico 16. Consideramos que en el marco de este ejercicio, el logro del objetivo posiblemente promueva las competencias *pensar y razonar, y usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones*.

Las partes (c) y (d) requieren que el estudiante represente simbólica y gráficamente la relación entre las cantidades, estas actuaciones se relacionan directamente con el objetivo específico 20 orientado a describir las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, entre magnitudes mediante distintas representaciones, el mismo se ha vinculado con la competencia *representar*, la cual se verá posiblemente estimulada.

Es posible que la resolución de los ejercicios de la I Fase de la tarea se realice a través de la aplicación de las propiedades de las proporciones, o características de la relación de proporcionalidad directa, en este sentido las actuaciones reflejarían capacidades propias del objetivo específico 23 (Aplicar la noción de proporcionalidad, directa o inversa, y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias) asumiendo que los ejercicios de la tarea son problemas cortos y sencillos. El empleo de estas nociones en la resolución de los ejercicios estimularía la competencia *pensar y razonar*.

El ejercicio de la segunda fase de la Tarea 4 se refiere a actuaciones propias de los objetivos específicos: (3) interpretar y realizar comparaciones entre cantidades desde las perspectivas aditiva y multiplicativa, y (11) establecer la relación de orden entre dos razones. Desde la perspectiva relativa ha de realizarse una comparación de las razones que no son equivalentes ni unitarias, las cantidades no son enteras, variables que aumentan la dificultad. En este sentido se espera que utilicen estrategias de comparación de razones que no impliquen conocer el valor racional de la razón, y de este modo posiblemente se contribuya a las competencias *pensar y razonar, y usar las operaciones, y resolver problemas*.

Planificación de la Puesta en Común de la Tarea 4

Para la puesta en común la investigadora ha preparado de antemano algunas posibles soluciones a las tareas propuestas, además de las conclusiones teóricas referentes al tipo de relación de proporcionalidad, ejemplificadas mediante las tareas realizadas. El objetivo de esta planificación es llevar un material que contribuya a promover la comprensión y a complementar las respuestas que los estudiantes aporten.

Para la tarea "Crecimiento de Bacterias" se ha considerado previamente algunas de las relaciones que se pueden observar entre las cantidades: relación funcional (cantidades de tiempo y de bacterias), relación escalar (entre cantidades del mismo tipo y sus correspondientes), razón constante entre cantidades correspondientes de distinto tipo, producto cruzado invariable entre pares correspondientes (Figura 6.18).

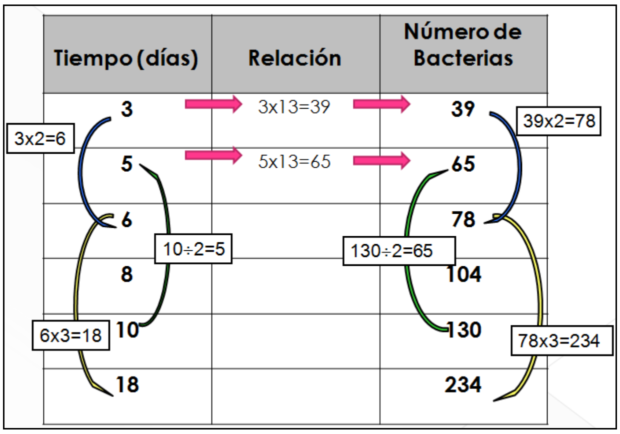


Figura 6.18. Posibles relaciones entre las cantidades de la Tarea 4

A partir de las relaciones que los estudiantes detecten y de las que complemente la investigadora, se procederá a recordarles que la razón entre dos cantidades es una relación multiplicativa entre dos cantidades y dado que están buscando relaciones se puede observar lo que sucede en la tarea (Figura 6.19). El propósito es presentar la razón como un elemento matemático que permite caracterizar la relación de proporcionalidad directa.

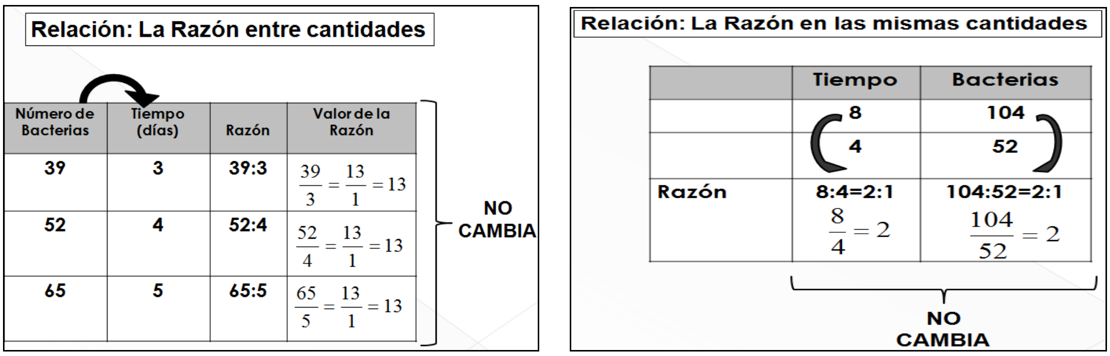


Figura 6.19. La razón como relación entre las cantidades de la Tarea 4

Como conclusión del primer ejercicio la investigadora preguntará si algún estudiante sabe el tipo de relación que existe entre las dos magnitudes de la tarea en cuestión. La investigadora resumirá las relaciones de proporcionalidad directa basándose en las relaciones detectadas, aunque desde el punto de vista matemático no todas las condiciones son necesarias, se decidió incluir la caracterización mediante razones ya que uno de los objetivos de la investigación para esta sesión es promover la comprensión de los estudiantes en torno a la razón, también como una manera de conectar las sesiones anteriores con esta tercera. Por otro lado, esta decisión se debe al hecho de que los estudiantes en general se basan en la monotonía, es decir, si las cantidades de dos magnitudes crecen o decrecen simultáneamente afirman la proporcionalidad, y no consideran las relaciones multiplicativas para afirmar si dos magnitudes son o no directamente proporcionales

En resumen, se les planteará que la relación entre tiempo y número de bacterias es de proporcionalidad directa porque:

- Cuando se multiplica o divide una cantidad de tiempo por un número, la cantidad de bacterias que le corresponde queda multiplicada o dividida por el mismo número.
- Existe un único número que al multiplicarlo por el número de días me da el número de bacterias (13).
- La razón entre cantidades correspondientes de bacterias y tiempo es constante, no cambia.
- La razón de dos cantidades de tiempo y la razón de sus correspondientes cantidades de bacterias es la misma, no cambia.

Para el ejercicio (b.1) en el que hay que hallar la cantidad de días transcurridos hasta que el número de bacterias sea de 650 se ha considerado que entre las posibles estrategias que podrían aplicarse, diferentes a la regla de tres, están:

- Reconociendo que la constante de proporcionalidad es 13, basta con hacer la división $650 \div 13 = 50$.
- Plantearse la cuestión en términos de una ecuación sencilla $650 \div x = 13 \Rightarrow 650 = 13x \Rightarrow \dfrac{650}{13} = x \Rightarrow 50 = x$.
- Usando un par de cantidades correspondientes como 10 y 130, a partir de estas cantidades sumar hasta completar las 650 bacterias. Esta estrategia se conoce como Building-up strategy.

$$130 + 130 + 130 + 130 + 130 = 650$$

- $10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 50$

- A partir de la relación entre dos cantidades de la misma magnitud, aplicar a otro par de cantidades, por ejemplo se toma el par (5,65) y como entre 65 y 650 hay una relación multiplicativa de 10 veces, entonces basta con multiplicar el 5 por 10 para obtener la cantidad que le corresponde a 650, que es 50.

Para el ejercicio (b.2), que pide hallar la cantidad de bacterias que habrá después de 25 días, también se han considerado algunas posibilidades:

- Como la constante de proporcionalidad es 13, basta con multiplicar $25 \times 13 = 325$.
- Utilizar el resultado del ejercicio anterior (50 días, 650 bacterias) y como 25 es la mitad de 50 pues la cantidad que se busca debe ser la mitad de 650 o sea 325.

- Descomponer 25 como 10+10+5 y sumar los valores correspondientes que serían 130+130+65=325.

Para el ejercicio (c), en el que se trata de escribir la relación mediante una fórmula se ha considerado que es un ejercicio que no admite muchas posibilidades distintas de expresión, lo que podría variar son los literales que elijan.

Para la revisión de la gráfica, en el ejercicio (d), la investigadora ha preparado previamente unos carteles con los ejes y la cuadrícula (Figura 6.20), el objetivo es aprovechar al máximo el tiempo de la puesta en común y que los estudiantes no se distraigan, de modo que se pueda discutir con ellos lo que interesa, esto es, observar que la relación de proporcionalidad directa se representa gráficamente mediante una línea recta que pasa por el origen, en este caso discontinua por la naturaleza discreta de la magnitud número de bacterias.

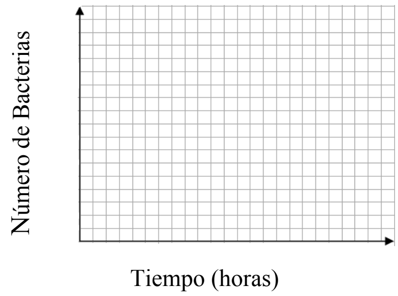


Figura 6.20. Carteles para la puesta en común del ejercicio (d)

En relación con la II fase de la tarea y si los estudiantes en su mayoría responden aditivamente a la cuestión se presentará una tabla con los aumentos absolutos y relativos entre las longitudes de las bacterias.

Bacteria	Hace 5 días	Hoy	Aumento Absoluto	Aumento Relativo
A	0,05 mm	0,11 mm	0,06 mm	120%
B	0,04 mm	0,1 mm	0,06 mm	150%

La investigadora ha considerado previamente distintas formas de hallar el aumento relativo:

- Mediante el valor de la razón entre el aumento absoluto y la medida de cada bacteria hace 5 días: $\frac{0{,}06}{0{,}05} = 1{,}2$ $\frac{0{,}06}{0{,}04} = 1{,}5$.
- Descomponiendo la longitud actual de cada bacteria, considerando la medida inicial como el 100% y después estableciendo la relación de los sumando con porcentajes. Por ejemplo, para el caso de la bacteria A tenemos que $0{,}11 = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}01$ entonces el aumento corresponde a un 120% para la bacteria A.
- Mediante la búsqueda del porcentaje usando la regla de tres.

Supuestos Sobre Posibles Actuaciones en la Resolución de la Tarea 4

Consideramos que en el ejercicio (a) los estudiantes expresarán, con mayor frecuencia y número, relaciones entre las cantidades de las dos magnitudes y menos relaciones entre las cantidades de la misma magnitud, además expresarán características de las cantidades por ejemplo que las cantidades del medicamento son múltiplos de 26 o de 13. Posiblemente los estudiantes expresarán relaciones aditivas entre las cantidades.

Los estudiantes tendrán dificultades para distinguir la regla de tres de otros procedimientos o estrategias, o sea que es posible que usen esta regla y consideren que están aplicando otro procedimiento.

Mostrarán errores en la construcción de la representación gráfica debidos a la naturaleza discreta de la magnitud "número de bacterias", principalmente el error de trazar la gráfica continua.

Hemos conjeturado, con base en el análisis de la 2ª sesión y de un estudio previo (Valverde, 2008), que en el ejercicio de la segunda fase prevalecerá el pensamiento aditivo sobre el multiplicativo al considerar el crecimiento de las dos bacterias en un periodo de tiempo.

Consideramos que los estudiantes no mostrarán dificultades en la expresión simbólica de la relación de proporcionalidad directa.

Conjeturamos que el trabajo colaborativo y la puesta en común de la tarea posibilitarán la discusión de las anteriores dificultades y, mediante el intercambio entre investigadora y estudiantes, se promoverá el aprendizaje de los mismos.

Tarea 5: Permanencia Activa de un Fármaco

Es una tarea asociada esencialmente con la proporcionalidad inversa, involucra cantidades de dos magnitudes continuas (tiempo y capacidad). Está compuesta por cinco ejercicios (Figura 6.21).

Permanencia Activa de un Fármaco

A una mujer ingresada en un hospital con una grave infección le ponen una inyección de benzetacil que es una penicilina de depósito.
A partir de la primera hora su cuerpo va eliminando gradualmente el fármaco de acuerdo con la información de la siguiente tabla en la que se muestra la cantidad de penicilina que permanece activa en su cuerpo después de algún tiempo.

Tiempo Transcurrido **(horas)**	1	2	3	4	5	6
Cantidad de Penicilina Activa **(mililitros)**	120	60	40	30	24	20

a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.
b) Averigua:

b.1) La cantidad del fármaco activo después de 24 horas.
b.2) El tiempo que debe transcurrir para que en el cuerpo de la mujer permanezca activo sólo 0,5 mililitros del fármaco.

Explica tu razonamiento en los casos anteriores.
c) Determina la cantidad de penicilina activa después de **1,5** horas.

d) Escribe una expresión o fórmula que permita hallar la cantidad del medicamento presente en el cuerpo de la mujer después de un número cualquiera de horas (*x* ***horas***).
e) Representa en el eje de coordenadas la relación entre las dos magnitudes (el tiempo transcurrido y la cantidad de penicilina de la situación anterior).

Figura 6.21. Tarea 5 “Permanencia activa de un fármaco”

Para la elección de la constante de proporcionalidad inversa (120) nos basamos en el criterio de incluir datos lo más cercanos a la realidad. Obtuvimos información acerca de las dosis de penicilina que se le pueden administrar a una persona de acuerdo con el tipo de infección que padece, tal información la obtuvimos de diferentes foros y páginas disponibles en la red. Desde el punto de vista matemático tenemos que 120 es una cantidad con 16 divisores por este motivo se tiene la posibilidad de poner varios pares de cantidades diferentes cuyo producto es 120 y de este modo se podría ofrecer a los estudiantes más casos particulares (con números enteros) que permitieran obtener las relaciones generales que caracterizan a la proporcionalidad inversa.

A diferencia de la Tarea 4 “Crecimiento de bacterias”, en la Tarea 5 “Permanencia activa de un fármaco” decidimos colocar cantidades enteras consecutivas en la primera fila con el objetivo de promover una rápida visualización de las mismas. Se decidió iniciar la relación en 1 porque como es bien conocido la función $f(x)=\frac{120}{x}$, con $x \in R$ $x \neq 0$, toma valores muy grandes cuando la variable independiente x se acerca a cero, a partir de 1 obtenemos valores que se ajustan a la situación real, así para esta tarea el dominio de la función es el conjunto [1,∞[y el ámbito sería]0,120].

Según los niveles de complejidad de las tareas (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 258) todos los ejercicios de la Tarea 5 son de conexión.

Tabla 6.10. *Descripción de la Tarea 5 según nivel de complejidad*

		Tarea 5				
		(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
Reproducción	Contextos familiares.					
	Conocimientos ya practicados.					
	Aplicación de algoritmos estándar.					
	Realización de operaciones sencillas.		X	X		
	Uso de fórmulas elementales		X	X		
Conexión	Contextos menos familiares	X				
	Interpretar y explicar					
	Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación				X	X
	Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.	X	X			
Reflexión	Tareas que requieren comprensión y reflexión.					
	Creatividad					
	Ejemplificación y uso de conceptos.					
	Relacionar conocimientos para resolver problemas más complejos.					
	Generalizar y justificar resultados obtenidos.					

Relación de la Tarea 5, los Objetivos y las Competencias Matemáticas

Siguiendo el mismo esquema que en la tarea anterior, en el primer ejercicio los estudiantes han de buscar relaciones entre las cantidades expuestas en la tabla de valores tal actuación responde al objetivo específico 19 identificar y describir las relaciones estructurales de una proporción (escalar y funcional). Aunque no necesariamente detecten las relaciones estructurales proporcionales es posible que intenten describir otras relaciones usando las operaciones o cualidades de las cantidades como la paridad. Este proceso de búsqueda puede favorecer la competencia *pensar y razonar*, y dado que han de describir por escrito y oralmente tales relaciones es posible que se esté contribuyendo a la competencia *comunicar*. A partir de las relaciones que hallen y las que aporte la investigadora se pretende caracterizar la relación de proporcionalidad inversa en términos de la relación constante dada por el producto de cualquier par de cantidades (constante de proporcionalidad inversa) y de los operadores escalares que describen la relación entre pares de cantidades correspondientes (inversos multiplicativos). En el caso de la proporcionalidad inversa la razón entre las cantidades correspondientes de cada magnitud no es constante, esto es una condición que los estudiantes podrían mencionar para describir las relaciones inversamente proporcionales.

Los ejercicios (b.1), (b.2) y (c) son del tipo "valor ausente", en estos los estudiantes deben hallar una de las cantidades de tiempo o de fármaco. En los tres ejercicios mencionados se ha variado la localización del valor ausente y el tipo de cantidad involucrada. En la parte (c), a diferencia del ejercicio (b), la cantidad no es entera. Con esto se pretende que los estudiantes reconozcan que las dos magnitudes consideradas son continuas y que apliquen esta característica en la construcción de la representación gráfica. Si se expresa la relación mediante la igualdad $f(x)=\frac{120}{x}$, con $f(x)$ representando la cantidad de medicamento presente en el cuerpo de la mujer después de x horas transcurridas, entonces los tres ejercicios de valor ausente están caracterizados por las variables que mostramos en la Tabla 6.11.

Tabla 6.11. *Variables de los ejercicios de valor ausente de la Tarea 5*

Ejercicio	Dato conocido, tipo de cantidad	Dato desconocido
(b.1)	x horas, x número entero	$f(x)$
(b.2)	$f(x)$, $f(x)$ número entero	x horas
(c)	x horas, x número racional no entero	$f(x)$

Como se describió en la planificación de la sesión omitimos incluir un ejercicio análogo al (b.2) cuyo dato conocido fuese un número racional no entero debido a nuestro interés por controlar la longitud de la tarea.

La resolución de los tres ejercicios de valor ausente supone la aplicación de conocimientos procedimentales que permitan determinar la cantidad faltante. Esta actuación es una concreción del objetivo 16 centrado en utilizar diferentes procedimientos para hallar un término desconocido en una proporción, mismo que se ha vinculado con la competencia *usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones*.

Las partes (d) y (e) requieren que se represente simbólica y gráficamente la relación entre las cantidades. Al igual que en la tarea "Crecimiento de bacterias" se ha elegido presentar la relación de forma tabular. Esperamos que a partir del trabajo individual, colaborativo y la puesta en común de esta tarea, los estudiantes lleguen a identificar la conexión entre algunas de las representaciones de la relación de proporcionalidad inversa. Estos ejercicios ejemplifican actuaciones típicas contempladas en el objetivo específico 20 relativo a describir las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, entre magnitudes mediante distintas representaciones, el mismo contribuye directamente a la competencia *representar*. Para representar la relación de forma simbólica es preciso reconocer y generalizar la relación entre las dos magnitudes, así mismo la construcción de la gráfica supone, entre otras capacidades, considerar la naturaleza continua de las magnitudes. En vista de lo expuesto, es posible que también se trabaje sobre la competencia *pensar y razonar*.

En ambas tareas se decidió colocar las etiquetas a los ejes de las gráficas y de señalar algunos puntos sobre los ejes con el fin de facilitar la construcción de las mismas, con lo que se pretende minimizar la distracción del estudiante a causa de sus posibles dificultades en la construcción de gráficas. Hemos tomado esta decisión con base a tres argumentos: (a) el objetivo que se persigue con estos ejercicios es que los estudiantes puedan observar diferentes representaciones de las relaciones de proporcionalidad, (b) para esta investigación no es de interés principal observar la pericia de los estudiantes construyendo gráficas, y (c) el tiempo destinado para el desarrollo de las tareas es limitado.

Planificación de la Puesta en Común de la Tarea 5

Para el ejercicio (a) de la Tarea 5 se ha considerado que es posible determinar relaciones tales como las descritas en la Figura 6.22, entre las cuales están: el producto constante de las cantidades de distinta magnitud, el valor de la razón de dos cantidades de tiempo es el inverso multiplicativo del valor de la razón de sus cantidades correspondientes de medicamento, la razón entre cantidades correspondientes de tiempo y de medicamento varía, no es la misma.

Tiempo transcurrido (horas)	Relación	Cantidad activa del medicamento (mililitros)
1	1x120=120	120
2	2x60=120	60
3	3x40=120	40
4	4x30=120	30
5	5x24=120	24

Otra Relación: La Razón en las mismas cantidades

	Tiempo	Medicamento
	2	60
	4	30
Razón	2:4 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	60:30 $\frac{60}{30}=2$

2x2=4
4 es el doble de 2

60÷2=30
30 es la mitad de 60

El valor de una razón es el inverso multiplicativo del valor de la razón correspondiente pues al multiplicar ½ x 2= 1.

Relación: La Razón entre cantidades

Cantidad activa del medicamento (mililitros)	Tiempo transcurrido (horas)	Razón entre cantidades	Valor de la razón
120	1	120:1	120
60	2	60:2	30
40	3	40:3	13,33…
30	4	30:4	7,5
24	5	24:5	4,8

Sí CAMBIA

Figura 6.22. Posibles relaciones entre las cantidades de la Tarea 5

La investigadora resumirá la relación de proporcionalidad inversa basándose en las relaciones que han surgido a partir de la resolución del primer ejercicio de la tarea. Aunque desde la perspectiva matemática no todas las condiciones son necesarias, se decidió incluir la caracterización mediante la razón ya que uno de los objetivos de la investigación para esta sesión es promover la comprensión de los estudiantes en torno a la razón, la proporcionalidad y como una manera de conectar las sesiones anteriores con esta tercera. Al igual que en la tarea anterior se pretende que para caracterizar las situaciones inversamente proporcionales se hará énfasis en las relaciones multiplicativas por encima del incremento y disminución simultánea de las cantidades de las magnitudes involucradas (a más… menos…). En resumen, se les planteará que la relación entre tiempo y cantidad de fármaco activa es de proporcionalidad inversa porque:

- Al multiplicar una cantidad de tiempo por un número, la cantidad correspondiente de medicamento queda dividida por ese mismo número (y viceversa).
- El producto de la cantidad de tiempo y de medicamento es constante (120).
- El valor de la razón de dos cantidades de tiempo es el inverso multiplicativo del valor de la razón de sus cantidades correspondientes de medicamento.
- La razón entre cantidades correspondientes de tiempo y de medicamento varía, no es la misma.

Hemos considerado que algunas formas de resolver los ejercicios (b.1) y (b.2) de esta tarea podrían ser:

- Para hallar la cantidad de fármaco activo después de 24 horas recurrir a la constante de proporcionalidad, bastaría así con realizar la división $120 \div 24 = 5$ viendo que después de un día permanece activo 5 ml del fármaco.
- En el mismo caso (b.1), recurrir a la relación que existe entre los valores de las razones de cantidades de la misma magnitud (inversos multiplicativos), tomar por ejemplo el par (2,60) y observar que la razón entre las cantidades de tiempo 24 y 2 es 12, por lo que la razón inversa entre las cantidades correspondientes de medicamento debe ser 1/12, de donde la doceava parte de 60 es 5.
- De manera análoga, para hallar la cantidad de tiempo correspondiente a 0,5 ml de penicilina, tomar un par, por ejemplo (6,20) y ver que la operación que relaciona a 20 y 0,5 equivale a dividir 20 por 40 $(20 \div 40 = 0{,}5)$, por lo tanto para hallar el tiempo correspondiente se multiplica 6 por 40 y se obtiene 240, que son las horas que deben transcurrir para que permanezca activo solo 0,5 ml.

Al igual que en la tarea anterior, para la revisión de la gráfica, la investigadora ha preparado previamente unos carteles con los ejes y la cuadrícula.

Después de la puesta en común, cada equipo entrega a la investigadora la hoja de trabajo con la resolución hecha colaborativamente así como con las correcciones o anotaciones plasmadas durante la puesta en común. Al finalizar la sesión la investigadora da una copia de cada uno de los problemas trabajados para que cada estudiante la resuelva fuera de clase.

Supuestos Sobre Posibles Actuaciones en la Resolución de la Tarea 5

Los estudiantes identificarán predominantemente la relación funcional entre las cantidades y en menor medida identificarán la relación que existe entre los operadores escalares (inversos multiplicativos). También es posible que intenten observar relaciones aditivas entre las cantidades.

Prevemos que los estudiantes tendrán dificultades para distinguir la regla de tres de otros procedimientos o estrategias, o sea, que es posible que usen la regla y consideren que están aplicando otra técnica distinta. Consideramos que los estudiantes no mostrarán dificultades en la expresión simbólica de la relación de proporcionalidad inversa.

6.3.2 Desarrollo de la 3ª Sesión en Ambos Grupos

Esta sesión se desarrolla aproximadamente un mes y medio después de la segunda sesión, en este caso se cuenta con dos horas para el desarrollo de la intervención. En ambos grupos los profesores encargados señalan la relevancia del trabajo en esta sesión argumentando que los contenidos a tratar están contemplados en la asignatura y serán objeto de evaluación en el siguiente examen.

6.3.2.1 Desarrollo de la 3ª Sesión en el G1

La sesión se inicia 15 minutos después de la hora prevista debido a que en este día el profesor de la asignatura aplicó una prueba corta del tema anterior, geometría. Han asistido 61 estudiantes y se formaron 15 equipos de trabajo.

El inicio de la sesión está a cargo del profesor quien les señala la importancia de implicarse en las tareas que van a realizar con la investigadora ya que el trabajo se refiere al tema actual de estudio “Magnitudes y su Medida” también les dice que la única diferencia es que es la investigadora quien guiará la clase, finaliza su intervención señalándoles que es un tema que será evaluado en el próximo parcial.

La investigadora saluda y luego recuerda a los estudiantes que en la clase anterior el profesor explicó nociones importantes relativas a las magnitudes, los tipos de magnitudes, cantidad, unidad, medida, instrumentos de medida y que también se habló de dos maneras distintas de realizar las mediciones, una la medida directa en la que se usan instrumentos y un referente o unidad, y la otra era la medida indirecta en la que se aplican fórmulas o relaciones entre las magnitudes para calcular medidas que en muchos casos no son accesibles. En ese momento les dice que la proporcionalidad constituye una herramienta para poder calcular medidas indirectamente por ejemplo para saber la altura de un edificio o de un árbol. Añade que en la sesión van a trabajar en dos tareas mediante las cuales estudiarán dos tipos de relaciones entre magnitudes que cambian simultáneamente, les dice que se ocuparán de caracterizar las relaciones de proporcionalidad directa e inversa. De inmediato les pasa a la diapositiva de la dinámica de trabajo y les recuerda las pautas que deben seguir en cada fase.

Luego la investigadora entrega las hojas de trabajo individual en clase y cuando todos los estudiantes la tienen les pregunta si tienen claro lo que se pregunta en el ejercicio (a) que dice *busca relaciones entre estos números y descríbelas*, varios expresan que no saben qué deben buscar así que la investigadora les expone las relaciones entre 3 y 12 consideradas en la preparación de esta sesión (Apartado 6.3.1).

Después de esta aclaración todos los estudiantes trabajan de forma individual y en silencio, durante unos 15 minutos que dura esta fase. No manifiestan dudas relacionadas con los enunciados o con lo que se les encomienda en cada ejercicio.

Pasado este tiempo la investigadora recoge las tareas con ayuda del profesor, les dice que ahora continuarán con la segunda fase de trabajo colaborativo y que para esta fase deben seguir las indicaciones:

- reunirse con los mismos compañeros de las prácticas, si sólo están presentes una o dos personas deben reunirse con otras dos de otro grupo, pero que los grupos no excedan las 5 personas,
- trabajar colaborativamente significa ayudarse unos a otros, les dijo que la idea es que varias personas puedan elaborar una resolución más completa que la que pueda hacer una persona solo, también indicó que en las sesiones anteriores algunas personas dejaron que todo el trabajo recayera sobre pocos y que de eso no se trata,
- hablar solo una persona y respetar las opiniones de los compañeros. La investigadora agregó que si alguna opinión les parece ilógica deben de darle buenos argumentos a los compañeros en lugar de imponerse u ofender y finalmente,
- no olvidar decir el nombre completo en la grabadora para así poder identificarlos de una manera más eficiente.

Dado que se formaron 15 equipos el salón de clase se hizo pequeño para albergar la discusión de tantas personas, no obstante conforme fueron avanzando en la resolución de la tarea el ruido fue disminuyendo, la investigadora les señaló la importancia de que hablara una sola persona y de que moderaran el volumen de la voz en sus intervenciones. Durante esta fase la investigadora se acercaba a diferentes equipos para observar cómo trabajaban, también les cuestionaba las respuestas que estaban elaborando, además les pedía que fueran más explícitos y amplios en sus resoluciones.

Puesta en Común de la Tarea "Crecimiento de Bacterias", (T4; G1)

La puesta en común es dirigida por la investigadora quien pide la participación de los estudiantes y a lo largo de sus aportaciones va planteándoles preguntas. En el Anexo I aparece la transcripción de esta puesta en común.

La investigadora inicia esta fase diciendo que hay conjuntos, como el de las bacterias, que se comportan como una magnitud y que el propósito del primer ejercicio es observar las relaciones que hay entre las cantidades de la tarea, pide la participación de los estudiantes.

El alumno C3 indica que si se divide el número de bacterias entre el número de días se obtiene una constante. La investigadora aprueba lo dicho y señala que es lo mismo decir que si se toma el número de días y se multiplica por trece se obtiene el número de bacterias, indica que esto se cumple en todos los casos, luego pide otras relaciones.

El estudiante B14 dice que el número de bacterias dividido por 13 da los días. La investigadora le señala que es equivalente a lo que se ha dicho. Una aportación de la estudiante B6 hace referencia a que al multiplicar en cruz el resultado que se obtiene es el mismo, este aporte le permite a la investigadora poner un ejemplo de esa observación con los pares (3,39) y (5,65) y de preguntar si alguien sabe ¿por qué se cumple esta condición?, varios estudiantes (C3, C18 y A15) participan indicando que son equivalentes, C18 argumenta que son equivalentes por la regla de tres mientras que A15 indica que "*…es como una fracción que la doblas y otra que sea igual la multiplicas por el mismo número pero en los dos casos se ha multiplicado por el mismo número"*.

La investigadora aprovecha estas intervenciones para decir que esta es la propiedad fundamental de las proporciones, que luego hablará con detalle de las mismas, cuando comente la relación de esto con la razón, pero que antes es preciso observar otra relación, se refiere a la relación escalar entre cantidades de la misma magnitud y sus correspondientes, ella se las muestra mediante ejemplos de la tabla.

Procede entonces a resumir las dos relaciones que se han detectado hasta ese momento, dice: *"…tomo una cantidad la multiplico por 13 y me da el número de bacterias, segunda relación, si tomo una cantidad de tiempo cualquiera la multiplico por un número cualquiera entonces las cantidades correspondientes también se multiplican o se dividen por ese mismo número, ¿estamos de acuerdo?..."*

Posteriormente continúa retomando la noción de razón, recuerda que la razón es una comparación multiplicativa entre dos cantidades, luego muestra las diapositivas preparadas para que observen lo que sucede con la razón entre las cantidades correspondientes de las dos magnitudes y lo que sucede al considerar la razón entre dos cantidades que son de la misma magnitud y sus correspondientes. En relación con esta última consideración señala que en la enseñanza de la matemática no se le presta suficiente atención a esta relación y que ella la considera muy útil en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. Agrega que estas dos ideas relacionadas con la razón son otra forma de reescribir las primeras relaciones que detectaron.

La investigadora comenta que con lo visto ya podrían responder a la pregunta ¿cómo se caracteriza una relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes?, e indica que esto es un ejercicio que aparece en el guión del tema. Recurre además a un contraejemplo, la relación estatura-peso, diciendo que no es cierto que al doblarse la edad se doble el peso también, añade que quizás conforme una aumenta la otra aumenta también pero no de una forma directamente proporcional.

Resume todo lo anterior diciendo que para afirmar que una relación es de proporcionalidad directa deben de verificarse o cumplirse ciertas condiciones. En el caso de las bacterias se cumple: 1º que cuando se multiplica o divide una cantidad, de tiempo en este caso, por un número cualquiera, la cantidad de bacterias que le corresponde queda multiplicada o dividida por el mismo número, 2º que existe un único número que al multiplicarlo por los días permite obtener el número de bacterias, pregunta ¿cómo se llama ese número? El estudiante C3 responde diciendo que es una constante, ella completa diciendo "de proporcionalidad". Finaliza este resumen agregando la caracterización de la relación en función de las razones "entre" y "en la misma magnitud". Aporta una idea sobre la razón, indica que el valor de la razón por convención es mayor que 1 pero que se puede considerar el inverso de esa razón o hablar de la razón inversa, pregunta cuál es ese valor en la tarea y el estudiante A15 responde que un treceavo.

A continuación retoma la idea de equivalencia de razones, indica que son aquellas que tienen el mismo valor numérico y presenta un ejemplo de la tarea, luego calcula el producto en cruz diciendo que esta es otra manera de comprobar la equivalencia. Durante esta intervención explica que la "regla de tres" se basa en dicha propiedad.

Cuando se pasa a la revisión del ejercicio (b) varios estudiantes participan. El estudiante C3 dice que para hallar ese valor se puede dividir por 13 porque es la constante, luego el estudiante C18 agrega diciendo que se puede calcular por tanteo al multiplicar por 13 o extrapolando (seguir una serie hasta llegar al número de 650 bacterias), dice además que otra forma es ir sumando bacterias poco a poco. Aunque los estudiantes participan animadamente la investigadora advierte que ninguno aporta una estrategia basada en las relaciones observadas en el ejercicio (a) por lo que decide orientarles mostrando las cantidades de la Figura 6.23.

Días	5	¿?
Bacterias	65	650

$65 \times 10 = 650$

Figura 6.23. Representación tabular de la relación escalar entre las cantidades de la misma magnitud

Pregunta acerca de cómo se pueden usar los datos, pues si en cinco días hay sesenta y cinco bacterias, la pregunta es ¿en cuántos días hay seis cientos cincuenta bacterias? Dibuja una flecha que relaciona las cantidades en la misma magnitud, luego mediante una serie de preguntas conduce a los estudiantes a que ese operador (el 10) puede usarse para hallar la cantidad que le corresponde a 5, esto es 50 bacterias. En este momento el estudiante C18 dice que eso es la regla de tres, por esta razón la investigadora se ocupa de mostrar la diferencia que hay en el fondo de ambos procedimientos. El estudiante indica que se ve igual, la investigadora infiere que se refiere a la disposición de las cantidades, después de atender este asunto se dedica a reflexionar sobre el propósito de pensar en otras estrategias distintas a la regla de tres, a continuación mostramos un fragmento de la exposición:

I*: …lo que quiero decir es que razonen esto, en la regla de tres qué hacemos, en general qué se hace con los niños, éste por éste entre éste (señala los números 5, 650 y 65)… ¿por qué éste por éste entre éste?… mientras que si yo razono con los estudiantes y reconocemos que en las relaciones de proporcionalidad directa cuando una cantidad* *se aumenta un número de veces y la correspondiente también, tiene sentido que aquí yo diga ¡claro! aquí va 50 porque tengo que aumentar diez veces el número de días, muchas veces la regla de tres cuando se trabaja está desprovista de una justificación o de algún razonamiento, lo que quiero es ir a esto, que la usamos indiscriminadamente sin verificar si la relación es de proporcionalidad directa o no, esta es una de las cuestiones que al salir de aquí pues quisiera que piensen…*

Durante la revisión del ejercicio (c), referente a la expresión simbólica algebraica de la relación de proporcionalidad directa, participaron los estudiantes y se llegó a concluir que la expresión podría escribirse así $B = 13 \cdot n$ con "n" número de días y "B" número de bacterias. La investigadora aprovecha este momento para establecer la conexión de esta representación con la noción de función lineal, después de esto hace un resumen relativo a las formas de representar la relación de proporcionalidad directa. Indica que hasta el momento se ha visto la representación verbal y en esta parte han visto la representación simbólica algebraica, agrega diciendo que en el siguiente ejercicio la representarán gráficamente.

Durante la revisión de la representación gráfica surgió un importante intercambio de ideas entre algunos estudiantes y la investigadora en relación con la definición del dominio de la función y sobre la naturaleza discreta de la magnitud "número de bacterias" lo cual derivó en una gráfica discontinua de puntos.

En este intercambio de ideas, observamos que el resto de alumnos se desconcentraron y muchos de ellos no se implicaron en lo que se estaba discutiendo, la investigadora se dedicó a responder a los alumnos participantes, no obstante el interés puesto en las cuestiones más profundas es sólo de unos pocos, razón por la cual decidió zanjar el tema diciendo: *"…no quiero que se confundan con esto porque esto no es una clase de funciones, podríamos pasar mucho rato hablando sobre conjuntos de salida o de llegada pero bueno ese no es el interés hoy, aquí lo importante es saber que la gráfica en este caso no es una gráfica continua porque lo que tengo aquí es discreto, … ¿de acuerdo?, que esto puedo afinarlo más o menos pero lo que no tiene sentido es decir que después de cierta cantidad de días hay 52 y media bacterias…"*

La investigadora retoma la revisión de la segunda fase de la tarea recordando que la idea de fondo en esta situación se trabajó en la sesión anterior con el problema de los "Niveles de CO_2", escribe en la pizarra una tabla con los datos (Figura 6.24) y la completa con las aportaciones de los estudiantes, quienes dicen que ambas han crecido 0,06 mm.

	Hace 5 días	**Hoy**	**Aumento Absoluto**	**Aumento Relativo**
Bacteria A	0,05	0,11	0,06	
Bacteria B	0,04	0,1	0,06	

Figura 6.24. Organización de los datos de la segunda fase de la Tarea 4

Retoma la pregunta ¿alguna de las dos ha crecido más en relación con la medida inicial? y de acuerdo con las respuestas dadas dice que desde la perspectiva absoluta las dos han crecido lo mismo, en este momento el estudiante A15 señala que se debe de tomar en cuenta que al inicio una es más grande que la otra. A partir de la intervención de A15 la investigadora dice que esta situación se puede abordar desde otra perspectiva, la relativa, aporta varias estrategias para justificar por qué la bacteria A creció un 120% mientras que la B creció un 150%.

Después de esto se procedió a hacer la tarea "Permanencia activa de un fármaco" de forma individual, dado que no daba tiempo de realizar la tarea por equipos, la investigadora decidió recoger el trabajo individual y hacer un breve resumen acerca de la resolución de la misma. Ella se ubica en medio del salón de clase y pregunta a los estudiantes por las relaciones observadas, éstos señalan únicamente la invarianza del producto de cantidades correspondientes, luego hace un resumen sobre las respuestas de los otros ejercicios enfatizando que para la proporcionalidad inversa también hay una descripción verbal, una descripción algebraica o simbólica y una descripción gráfica que es diferente a la de la proporcionalidad directa.

Finaliza la puesta en común indicándoles que si en el guión del tema, el examen o cuando estén trabajando con los niños tienen que verificar qué tipo de relación hay entre dos magnitudes, directa o inversa, deben de pensar en todas las pautas trabajadas en la sesión y no guiarse por la idea de que "conforme una aumenta la otra también o que si una disminuye la otra también". Se despide, agradece la participación y da indicaciones para el trabajo en casa.

6.3.2.2 Desarrollo de la 3ª Sesión en el G2

La sesión se inicia a su hora. Asisten 28 estudiantes y se forman 7 equipos de trabajo. La profesora introduce la sesión indicando que el trabajo que se realizará será evaluado para la asignatura.

Dado que en el desarrollo de la sesión con el G1, por la mañana, no dio tiempo de realizar todas las fases de la dinámica de aula se decidió ser más puntual durante la puesta en común y al explicar las instrucciones para la dinámica de trabajo. Recuerda que en la clase anterior, con la profesora de la asignatura, se estudiaron algunas nociones sobre las que se basa el trabajo que se va a realizar, entre las que están: cantidad, medida, magnitud, unidad. Añade que en la sesión van a trabajar en dos tareas mediante las cuales estudiarán dos tipos de relaciones entre magnitudes y que se ocuparán de caracterizar las relaciones de proporcionalidad directa e inversa. De inmediato les presenta la diapositiva de la dinámica de trabajo y les recuerda las pautas que deben seguir en cada fase.

Al igual que con el G1 explicó previamente el término "relación" en el contexto de la tarea, se les dijo que las relaciones se pueden establecer entre dos cantidades o entre dos conjuntos de cantidades como en este caso (se refiere a la tarea), se aportó el ejemplo de las posibles relaciones entre los números 3 y 12.

Durante la fase de trabajo individual, los estudiantes muestran dificultades para reconocer las relaciones entre las cantidades. Durante la fase del trabajo colaborativo manifiestan dificultades para explicar de qué manera han determinado las relaciones.

En el G2 y a partir de esta sesión, se decidió que la profesora de la asignatura asumiera un papel de mayor colaboración durante la aplicación del experimento, quien se dedicó a pasar por cada equipo cuestionando los razonamientos de los estudiantes, pidiendo que ampliaran las respuestas o aclarando las dudas que ellos manifestaron.

A pesar de que se intentó ser más puntual en la puesta en común de la tarea "Crecimiento de bacterias" los estudiantes de este grupo requirieron más tiempo en el desarrollo individual y colaborativo que los estudiantes del G1. Debido a lo anterior tampoco se logró desarrollar la fase colaborativa de la segunda tarea de esta sesión "Permanencia activa de un fármaco".

Puesta en Común de la Tarea "Crecimiento de Bacterias", (T4; G2)

La investigadora inicia la puesta en común diciendo que en la tarea "Crecimiento de Bacterias" el objetivo general es estudiar la relación que hay entre las dos magnitudes, y que esa relación recibe el nombre de proporcionalidad directa, señala que los estudiantes de primaria, de secundaria e inclusive universitarios se limitan a dar descripciones mínimas que no la caracteriza correctamente.

Señala que es frecuente encontrar respuestas de estudiantes que basan la relación de proporcionalidad directa en que los valores de dos magnitudes crecen o decrecen simultáneamente, comenta que esta es una característica evidente que cumplen las cantidades en la tabla de la tarea. Expone el contraejemplo relativo al peso y la edad.

A continuación inicia la revisión del primer ejercicio, muestra las relaciones que se pueden detectar entre las cantidades que se han planificado (Figura 6.18), en este grupo no pide la participación de los estudiantes durante la revisión de este ejercicio con el fin de agilizar el proceso de la puesta en común. Sin embargo mientras expone cada relación señala puntualmente lo que ha visto durante el trabajo de los equipos.

Seguidamente conecta las relaciones detectadas con la noción de razón, diciéndoles que estas relaciones se pueden describir también en términos de las razones, recuerda que una razón es una comparación multiplicativa entre dos cantidades. Muestra las diapositivas en las que se consideran las razones entre magnitudes y en la misma magnitud (Figura 6.19) y resume lo observado indicando que en las relaciones de proporcionalidad directa la razón entre las cantidades es constante, el valor de esa razón se llama constante de proporcionalidad, además indica que el valor de la razón entre cantidades de la misma magnitud y el valor de la razón de las cantidades correspondientes es el mismo número.

Posteriormente cuestiona al grupo entero preguntando ¿para afirmar que la relación entre el tiempo y el número de bacterias es de proporcionalidad directa es suficiente decir que conforme una aumenta la otra también lo hace? Los estudiantes responden que no, la investigadora agrega diciendo que han de verificar las condiciones siguientes: cuando se multiplica o divide una cantidad de una de las magnitudes, en este caso las bacterias o el tiempo, pues la cantidad correspondiente se obtiene al multiplicar o dividir por el mismo número, si se dobla el tiempo el número de las bacterias se doblan, si se triplican igual, si se busca la quinta parte las bacterias también se obtienen dividiendo por cinco. En resumen, existe un único número que al multiplicarlo por la cantidad de días permite obtener la cantidad de bacterias, en la tarea ese número es 13 y se llama constante de proporcionalidad, agrega la caracterización de la proporcionalidad en función de la razón entre las cantidades de magnitudes distintas y la razón en la misma magnitud. En este momento puntualiza que el valor de la razón es un número mayor que 1, de ahí que se tome en el antecedente la cantidad mayor, pero que sin embargo es común y útil utilizar la razón inversa.

La investigadora enlaza la caracterización de la relación de proporcionalidad directa con el uso y significado de la "regla de tres", señala que ésta ha de aplicarse únicamente si se ha verificado que la relación entre las cantidades es de proporcionalidad directa, e indica que es un procedimiento que se ha mecanizado pero que se basa en la propiedad de la equivalencia de razones, escribe dos formas comunes mediante las que se suele expresar la regla de tres:

$$\frac{39}{3}=\frac{65}{x} \qquad \begin{array}{l} 39 \to 3 \\ 65 \to x \end{array}$$

La investigadora comenta que cuando se plantean estas expresiones lo que se está diciendo es que la relación multiplicativa entre 39 y 3, que es 13, es la misma que hay entre 65 y el número que se desea averiguar, insiste en que al aplicar las condiciones que describen la proporcionalidad directa es posible llegar a conceder el significado a lo que se hace en la regla de tres.

Durante la revisión del siguiente ejercicio (b1) pide la participación de los estudiantes. La estudiante B12 participa diciendo que una forma de averiguar ese dato es aplicar una ecuación, luego el estudiante A12 dice que otra forma es utilizar la relación que hay entre las cantidades, ya que como se sabe que es 13 pues basta con dividir entre 13. Luego la estudiante A4 aporta otra estrategia más elaborada, la investigadora la interpreta y explica al resto del grupo diciendo: "*… ella vio… la diferencia que hay de las 208 hasta las 650 y lo ha dividido por 13 porque sabe que cada día hay 13, entonces ahí dan los días que han transcurrido y eso lo sumo a los que ya habían pasado y lo obtenemos"*. La estudiante C12 manifiesta que no ha comprendido ese procedimiento y la investigadora le dice que ya se lo aclarará individualmente.

Como ninguno de los estudiantes aporta otro método, la investigadora decide comentar una estrategia basada en la relación escalar entre cantidades homogéneas, mediante la representación tabular de la misma (Figura 6.23). Indica que si se considera la relación entre las cantidades del mismo tipo (relación escalar) es posible averiguar el dato que corresponde a 5 sin necesidad de usar la regla de tres. Señala que ha decidido usar el par (5, 65) y la cantidad de bacterias de 650 porque entre 65 y 650 hay una relación evidente, que es "por 10", por lo que la cantidad de días buscada se hallará multiplicando 5 por 10. Cuando pasa a la revisión del siguiente ejercicio (b.2) dice que en ese caso también es posible aplicar la misma estrategia. Plantea ¿si en 50 días hay 650 bacterias, en 25 días cuántas habrá?, de inmediato la estudiante A4 dice "*la mitad, porque 25 es la mitad de 50, pues si hay 650 bacterias la mitad sería 325*".

En la revisión del ejercicio (c) participa la estudiante A12 quien aporta una respuesta correcta, 13 por "n" es igual a "b", el resto de los compañeros está de acuerdo.

Siguiendo con la revisión de la representación gráfica, la investigadora hace una introducción en la que resume algunas de las ideas que en el G1 surgieron a través del intercambio con los estudiantes. Sin embargo, con el afán de agilizar la revisión y poder realizar la 2ª tarea decide comentar, intuitivamente, que la magnitud tiempo es continua y que el conjunto de las bacterias es discreto y que si a esa descripción simbólica algebraica se le definen los conjuntos de salida y llegada se obtendría una función lineal. Justifica que ha introducido estas ideas para construir la gráfica.

Después de comentar la elección de la escala en cada eje pregunta por los valores correspondientes, los estudiantes van diciendo la secuencia de múltiplos de 13 lo cual es un indicio claro de que han considera sólo números naturales como posibles valores de la variable independiente (n: cantidad de días). Mientras une los pares correspondientes señalando un punto en el plano comenta el por qué se construye la gráfica a partir del tercer día, luego pregunta ¿unimos los puntos? y la mayoría de los estudiantes dicen que sí, en ese momento la estudiante C12 dice que ella no los uniría pero que no sabe por qué. A partir de esto la investigadora, basándose en las ideas que comentó previamente acerca de los posibles valores que admiten las cantidades de tiempo y de bacterias, preguntó *¿las bacterias podrían ser, asumir cualquier valor*?, ellos responden que no, la investigadora fue construyendo la gráfica explicando por qué algunos valores de tiempo sí se tomaban en cuenta y por qué otros no (Figura 6.25).

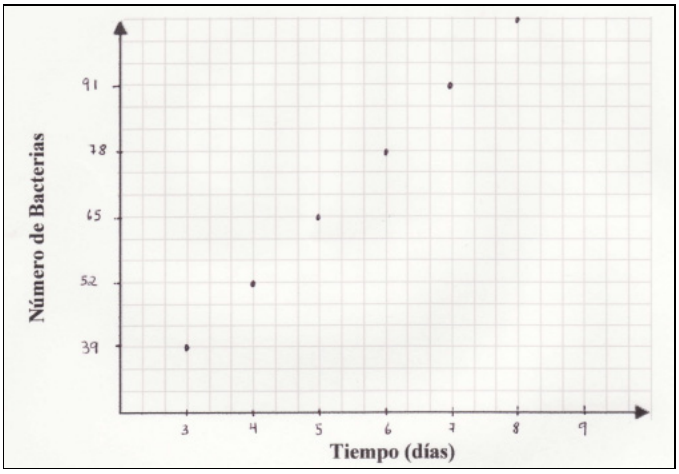


Figura 6.25. Representación gráfica de la relación entre las magnitudes de la Tarea 4

Para finalizar la revisión de todos los ejercicios de la 1ª fase se resumen las ideas principales asociadas a cada representación de la relación de proporcionalidad directa: verbal, simbólica o mediante una fórmula y gráfica mediante una línea recta.

Se inicia en seguida la revisión de la 2ª fase de la tarea. La investigadora señala que el objetivo de la misma es hablarles de dos tipos de aumento, de dos formas de analizar dos cantidades, escribe en la pizarra la tabla de la Figura 6.24. Completa la columna de aumento absoluto con los aportes de los estudiantes y después de preguntarles ¿alguna de las dos creció más?, a lo que ellos dijeron que no, les cuestiona acerca del procedimiento que aplicaron para llegar a esa conclusión, muchos responden que restando. La investigadora comenta que desde un razonamiento aditivo (o absoluto) se considera la diferencia que hay entre ellas, que desde esa perspectiva es correcto decir que ninguna creció más que la otra, las dos crecieron 0´06 milímetros. Luego pregunta acerca de qué otra información se puede tomar en cuenta al comparar la longitud de las dos bacterias, la estudiante A4 dice que en el inicio una era más pequeña que la otra. En seguida el estudiante B7 participa diciendo: *"…teniendo en cuenta que las dos bacterias crecieron el doble de su peso inicial podemos ver la diferencia entre el doble de su peso (I: longitud) y el peso final… si restamos eso, es decir dos A de 0´11 y nos queda 0´01, y dos veces B le restamos del 0´1 y nos queda 0´02, por lo tanto la diferencia es menor y podemos deducir por lo tanto que crece más A que B*". Ante este aporte la investigadora asiente y aprueba lo dicho por B7, en ese momento cree que el estudiante ha hecho referencia a una de las estrategias que ella ha planificado pues en ambas estrategias se toma como referencia el doble de la longitud de cada bacteria. Ella interpreta el aporte del estudiante de la siguiente forma:

I: "… cero coma cero once (0`11) que fue lo que creció A es igual que cero coma cero cinco (0`05) más cero coma cero cinco (0`05) más cero coma cero uno (0`01) (escribe 0`11 = 0`05+0`05+0`01), ¿sí o no?, 0`05 más 0`05 más 0`01 nos da 0`11, esto fue efectivamente lo que creció (señala con una llave 0`05+0`01), si sumo estas dos me da 0`06, pero entonces estoy viendo que la bacteria A creció un 100%, duplicó, como dice Román, su longitud y un poquito más, qué tanto poquito más es esto de lo inicial (señalando el 0`01), 0`01 de esto (señala 0`05) es una quinta parte, si hablamos en términos de porcentaje la quinta parte sería el 20%, ¿de acuerdo?, entonces esto es un 20% y aquí un 100% (escribe debajo de 0`05+0`01), o sea que creció un 120%..."

Aplicando el mismo razonamiento concluye que la bacteria B creció un 150%, cierra la revisión de ejercicio indicando la importancia de abordar ambos tipos de comparaciones en la formación de los niños.

Se recogen las hojas de trabajo colaborativo y se procede a entregarles la hoja de trabajo individual de la 2ª tarea "Permanencia activa de un fármaco", la profesora y la investigadora señalan que es más corta, pues sólo quedan 30 minutos de clase y que realizarán solo la fase individual. Después de trabajar unos 15 minutos en la tarea, éstas se recogen mientras la investigadora señala los aspectos más relevantes de la resolución.

En el resumen final la investigadora plantea que la relación de proporcionalidad inversa se caracteriza por un resultado constante, el resultado de la multiplicación es constante entre las dos cantidades, si se multiplica una cantidad por un número la correspondiente queda dividida por el mismo número y que la razón entre cantidades correspondiente no es constante va a variar. Agrega que para afirmar que dos magnitudes son inversamente proporcionales han de verificar tales condiciones. Mientras expone estas ideas les muestra la diapositiva de la Figura 6.26.

La relación entre el Tiempo y la Cantidad de Medicamento es de Proporcionalidad Inversa porque:

- **Cuando multiplicamos una cantidad de tiempo por un número, la cantidad correspondiente de medicamento queda dividida por ese mismo número (y viceversa).**
- **El producto de la cantidad de tiempo y de medicamento es constante (120).**
- **El valor de la razón de dos cantidades de tiempo es el inverso multiplicativo del valor de la razón de sus cantidades correspondientes de medicamento.**
- **La razón entre cantidades correspondientes de tiempo y de medicamento varía, no es la misma.**

Figura 6.26. Descripción de la relación de proporcionalidad inversa

Pregunta por la fórmula y algunos estudiantes le dicen que sería $x \cdot y = 120$, ella dice que es equivalente a $y = \frac{120}{x}$, la investigadora les señala la diferencia que hay entre esta descripción algebraica y la correspondiente a la relación de proporcionalidad directa $y = 13 \cdot x$, dice: "*difieren en la forma, esto va a ser… una fracción y la variable está en el denominador, mientras que aquí la variable acompaña a la constante…*"

En relación con la representación gráfica expresa que la gráfica no es una línea recta como en el caso de la proporcionalidad directa, indica que ahora la gráfica es una hipérbola y hace un esbozo de la misma.

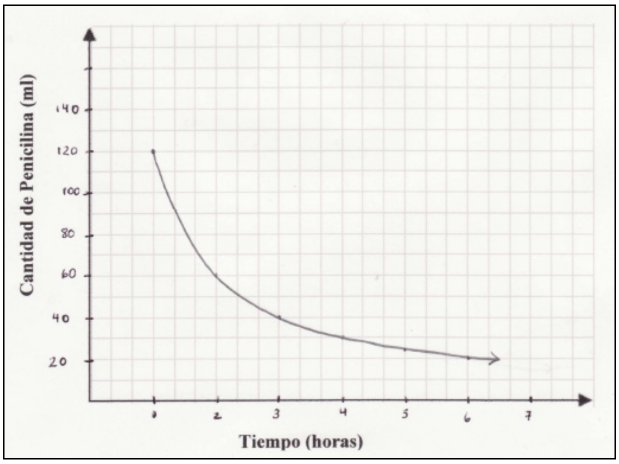


Figura 6.27. Representación gráfica de la relación entre las magnitudes de la Tarea 5

La investigadora cierra la sesión, agradeciendo el trabajo y da instrucciones para el trabajo en casa.

6.3.3 Análisis Preliminar de la 3ª Sesión en Ambos Grupos

Destacamos el papel de la intervención de ambos profesores en el inicio de la sesión, en los dos grupos indicaron que el trabajo que se iba a realizar formaba parte del tema que se estaba estudiando. En el G1 además, se les señaló que los contenidos que se trabajaran en la sesión serían evaluados en el siguiente examen parcial. Consideramos que el respaldo brindado por los profesores de la asignatura contribuyó en la implicación y compromiso de los estudiantes para con el desarrollo de la sesión y del trabajo posterior fuera de clase.

En relación con la dinámica de aula observamos que en ambos grupos, durante la fase individual, no se mostró interés por mirar el trabajo del compañero de al lado. Sin embargo, durante la fase colaborativa en el G1 fue un tanto difícil controlar el volumen de las voces de los estudiantes, con 15 equipos de trabajo se hace necesario un salón de clase más amplio, de modo que los equipos mantengan una cierta distancia entre sí.

A partir de esta sesión surgió una diferencia marcada entre los roles de los profesores de la asignatura, en el G1 el profesor siguió colaborando como desde el inicio, sin embargo en el G2 la profesora ayudó a la investigadora en la aclaración de dudas, cuestionó a los estudiantes en su trabajo individual y colaborativo, les pidió que ampliaran las respuestas dadas y justificaran en cada caso lo hecho, además durante la puesta en común sugirió la participación de algunos estudiantes cuyo razonamiento destacaba. Consideramos que es posible que esta ayuda haya incidido positivamente en los resultados y razonamientos mostrados por los estudiantes del G2, sin embargo confirmaremos o rechazaremos esta idea después de realizar el análisis posterior de la sesión.

Destacamos que durante la puesta en común, los estudiantes de ambos grupos participaron aportando sus ideas con igual implicación. Subrayamos el papel relevante de la puesta en común como un momento en el que se evidencian las dudas, razonamientos y nivel de profundidad con que los estudiantes han abordado la resolución de la tarea. Mediante el intercambio de ideas que tiene lugar en ese momento la investigadora vuelve a modificar su diseño pues ha de concentrarse en uno u otro aspecto de la tarea. Además, en esa fase surgen conflictos que limitan el desarrollo o revisión de otras ideas que se han preparado previamente. Por ejemplo, en el G1 surgió un intercambio de ideas relacionadas con la definición de la función lineal, el dominio y codominio, la naturaleza continua o discreta de las magnitudes, este intercambio posiblemente provocó la desconcentración en la mayor parte de los estudiantes, sin embargo, aunque pocos estudiantes se implicaron en esta discusión, la investigadora consideró que era una oportunidad para profundizar en ideas relativas a la proporcionalidad directa.

En relación con la resolución de la tarea “Crecimiento de bacterias” observamos que, los estudiantes de ambos grupos, para averiguar el valor desconocido de la cuarta proporcional, aplicaron con mayor frecuencia estrategias basadas en la relación funcional entre las cantidades. Sin embargo, se debe analizar los datos con mayor detalle para confirmarlo. De modo general no mostraron dificultades en expresar la relación mediante una fórmula o expresión algebraica.

En ambos grupos se observó que los estudiantes intentaron construir la gráfica de la relación lineal sin tomar en cuenta el primer valor para el cual estaba definida la relación ni la naturaleza de las magnitudes.

En relación con la segunda fase de la tarea observamos que en ambos grupos prevaleció el pensamiento aditivo para comparar el crecimiento de las dos bacterias. Durante la puesta en común pocos estudiantes aportaron una perspectiva multiplicativa de la comparación. En ninguno de los grupos se realizó la fase de trabajo colaborativo referente a la 2ª tarea "Permanencia activa de un fármaco", en el G1 se contó con menos tiempo debido a la prueba corta que debía aplicar el profesor de la asignatura y en el G2 los estudiantes dedicaron más tiempo en la fase de trabajo colaborativo.

En la Tabla 6.12 mostramos las decisiones que se han tomado con la intención de reelaborar el diseño de la 4ª sesión y se justifica la toma de tales decisiones.

Tabla 6.12. *Toma de decisiones para la 4ª sesión*

	Decisiones
Sobre la Dinámica	Durante el trabajo en equipo la investigadora insistirá en que sean más explícitos en sus resoluciones, que detallen más las justificaciones sobre lo que hacen. La investigadora se propone prestar más atención a los aportes de los estudiantes, profundizar en estos aportes debido a que una interpretación incorrecta de los mismos, durante la puesta en común, puede implicar la aprobación e institucionalización de cuestiones incorrectas. Es preciso ajustar el tiempo dedicado a cada una de las fases de acuerdo con el tiempo que se ha planificado para el desarrollo de las mismas.
Sobre las Tareas	Es necesario reducir la cantidad de apartados de cada tarea, los estudiantes han empleado más tiempo que el esperado y la investigadora se ha extendido más de lo previsto principalmente durante la puesta en común del G1. Con el objetivo de recoger información referente a otros aspectos asociados a la razón y la proporcionalidad se trabajará una tarea de comparación de razones y otra de escala, originalmente se había propuesto trabajar en dos tareas de comparación y una de escala. Será preciso revisar la tarea de escala pues la versión original estaba compuesta por muchos apartados, además cambiar las cantidades por números naturales. Es preciso concretar los objetivos específicos en menos tareas.

Tabla 6.12. *Toma de decisiones para la 4ª sesión*

	Decisiones
Sobre el Contenido	Es necesario retomar algunas ideas básicas relativas a la definición de razón o a la equivalencia de razones. Las dificultades mostradas por los estudiantes en relación con la proporcionalidad acentúan la relevancia de realizar otras sesiones dedicadas a promover una mayor comprensión del contenido; no obstante, las intervenciones en el experimento de enseñanza están determinadas por los objetivos de investigación que prevalecen por encima de lo que podría ser favorable para el aprendizaje de los estudiantes. Debido a lo anterior, la limitación de tiempo y guiados por el interés en explorar otras ideas asociadas a la razón y la proporcionalidad en la siguiente sesión no se retomará la caracterización de las relaciones de proporcionalidad directa e inversa.

6.4 CUARTA SESIÓN

6.4.1 Planificación de la 4ª Sesión

La Tabla 6.13 resume las características principales que describen la planificación de la cuarta sesión con los estudiantes de los grupos G1 y G2.

Tabla 6.13. *Planificación de la cuarta sesión para ambos grupos*

Objetivos de la Investigación para la Cuarta Sesión	OP1.2.7. Describir las estrategias que aplican los estudiantes en la comparación de razones e identificar indicadores del razonamiento proporcional en las mismas. OP1.2.8. Conocer las estrategias que utilizan los estudiantes en una situación de reparto proporcional. OP1.2.9. Conocer las interpretaciones de la razón manifestadas por los estudiantes. OP1.2.10. Conocer las concepciones que muestran los estudiantes en relación con las escalas así como detectar si los estudiantes incurren en la “ilusión de la linealidad” en situaciones de semejanza que requieran la interpretación de una escala. OP1.2.11. Describir y analizar las conjeturas que sobre las relaciones entre razones logren mostrar los estudiantes. OP1.3.2. Promover la comprensión de la razón y sus propiedades. OP1.3.7. Suscitar el uso de estrategias de comparación de razones diferentes de la búsqueda del valor racional de la razón.

Tabla 6.13. *Planificación de la cuarta sesión para ambos grupos*

	OP1.3.8. Promover la búsqueda de relaciones entre cantidades así como las capacidades implicadas en la expresión de conjeturas sobre tales relaciones. OP1.4 Identificar fortalezas y debilidades de la dinámica de trabajo colaborativo puesto en práctica. OP1.5 Identificar fortalezas y debilidades de las tareas matemáticas aplicadas. OP2.1 Describir las actuaciones de los estudiantes en términos de las expectativas de aprendizaje: objetivos específicos y competencias matemáticas consideradas.
Contenidos Instruccionales	Relación de orden entre razones. (Foco 1) Significado de la razón como índice comparativo. (Foco 1) Escala. (Foco 3) Relación entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes. Relación entre la razón de las aristas de cuerpos semejantes y la razón de los volúmenes correspondientes. (Foco 3)
Objetivos Instruccionales	11. Establecer la relación de orden entre dos razones. 12. Aplicar la noción de razón y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias. 26. Extraer información de modelos reducidos, mapas o dibujos a partir de la interpretación de la escala. 29. Explorar la relación entre la razón de los lados[80] de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes. 30. Explorar la relación entre la razón de las aristas de cuerpos semejantes y la razón de los volúmenes correspondientes.
Competencias Matemáticas	Pensar y razonar Usar lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones Argumentar y Justificar Comunicar Modelizar Plantear y resolver problemas
Tareas	"Compartiendo Pizza" "El Palacio Real de la Alhambra"

A partir del análisis de las sesiones previas y de las sugerencias dadas por la profesora del G2 decidimos planificar la recapitulación de algunas ideas generales en torno a la

[80] Nos referimos a las medidas de los lados.

noción de razón, consideramos que se podría favorecer la interpretación de las tareas por parte de los estudiantes. Una parte de este repaso se llevará a cabo antes de la tarea "Compartiendo pizza" y la otra antes de iniciar la segunda tarea de la sesión "El Palacio Real de la Alhambra".

La investigadora iniciará recordando que una razón es una expresión mediante la cual comparamos multiplicativamente dos cantidades. Utilizará como ejemplo la siguiente situación "*En un colegio hay 16 estudiantes de sexto grado, 12 de ellos son aficionados del baloncesto, el resto no lo son. ¿Cómo podríamos describir la relación que hay entre los estudiantes que gustan del baloncesto y aquellos que no?*"[81] (Figura 6.28).

Posteriormente explicará que esa descripción podría hacerse de dos maneras:

Aditivamente, es decir buscando la diferencia entre los que gustan del baloncesto y aquellos que no gustan del baloncesto. Así desde esta perspectiva y mediante la resta **12–4=8** se puede decir que hay **8** estudiantes más que gustan del baloncesto en relación con los que no son aficionados.

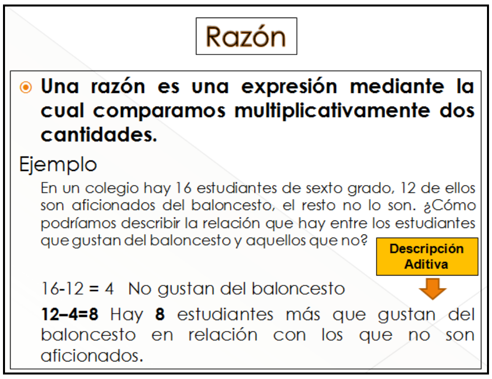


Figura 6.28. Recapitulación de ideas sobre la noción de razón (a)

En seguida se les explicará que otra forma de describir la relación que hay entre esas dos cantidades es aplicando una relación multiplicativa, para eso se les presentará la diapositiva de la Figura 6.29. En este caso se les señalará la relación que hay entre la razón, la división y el valor de la razón, en sesiones anteriores se ha insistido en distinguir la razón del valor racional de esa razón. La división es la operación mediante la cual se halla el valor de la razón, esta división se representa como a÷b o mediante la notación de fracción $\frac{a}{b}$; la razón es una descripción de la relación multiplicativa entre dos cantidades o sea informa el número de veces que una cantidad es en relación a la otra.

[81] Tomada de Cai y Sun (2002)

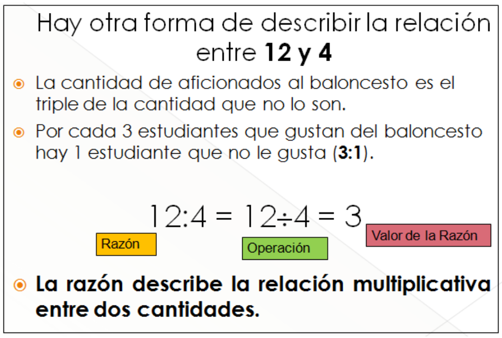


Figura 6.29. Recapitulación de ideas sobre la noción de razón (b)

Otra de las ideas que retomará corresponde a la equivalencia de razones, para esto se presentará el ejemplo de dos conjuntos de bolas, rojas y verdes, que satisfacen la razón de 3:2, se ha decidido comparar estas dos cantidades dado que el valor de esta razón no es un número entero como en caso anterior, además se aprovechará este ejemplo para recordar que el valor de la razón es un número mayor o igual que uno de ahí que como antecedente se tome la cantidad mayor y la menor como consecuente. Estas ideas se resumirán mostrando y comentando las diapositivas de la Figura 6.30.

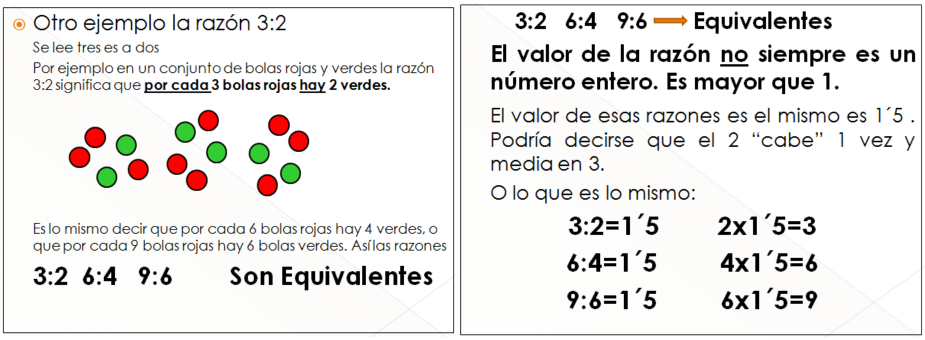


Figura 6.30. Recapitulación de ideas sobre la equivalencia de razones

Después de la resolución de la tarea "Compartiendo pizza" en sus distintas fases y antes de iniciar el trabajo sobre la segunda tarea "El Palacio Real de la Alhambra" se pretende recordar las nociones de figuras planas semejantes y escala, luego se procederá a explicarles intuitivamente en qué consiste una conjetura. Hemos decidido incluir previamente una breve explicación de estos términos con el objetivo de que su actuación en esta tarea no se vea limitada por la incomprensión de esos términos.

En relación con la noción de semejanza se les dirá que dos figuras planas son semejantes si tienen la misma forma aunque no necesariamente el mismo tamaño. En el caso de los rectángulos la semejanza está determinada por la proporcionalidad entre los lados correspondientes mientras que en el caso de los triángulos la forma depende de la medida de los ángulos. De manera general, cuando dos figuras planas son semejantes se cumple que los lados correspondientes son proporcionales, esto significa que la razón entre los lados correspondientes es constante. Para este fin se ha preparado la diapositiva de la Figura 6.31.

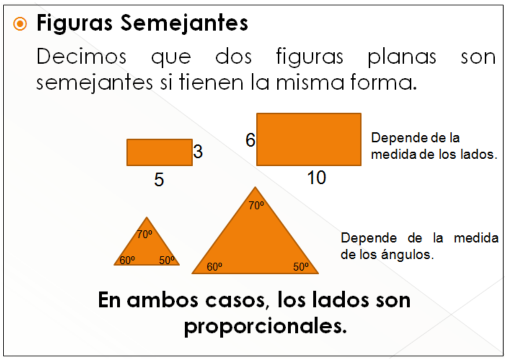


Figura 6.31. Resumen de ideas sobre la semejanza de figuras planas

A partir de la idea anterior se les señalará la utilidad de la semejanza en la elaboración de mapas, planos y otros modelos, luego se les definirá la escala como aparece en la diapositiva que se ha preparado para este fin (Figura 6.32).

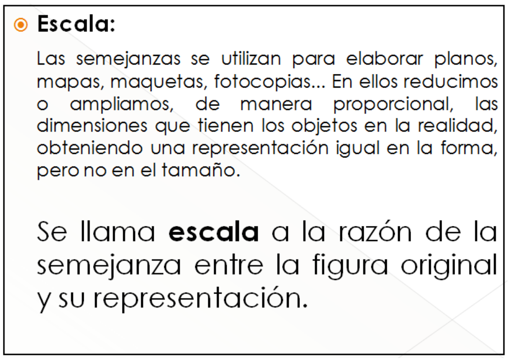


Figura 6.32. Resumen de ideas sobre la noción de escala

A sabiendas de que los estudiantes no tienen mucha experiencia en la expresión de conjeturas decidimos comentarles, en el caso de que ellos lo requieran, qué es una conjetura y ejemplificarla, para este fin decidimos mostrarles la conjetura de Goldbach sobre la descomposición de cualquier par mayor que 2 como suma de números primos, esperamos que al mostrarles las sumas y mediante la guía de la investigadora ellos enuncien oralmente esta conjetura.

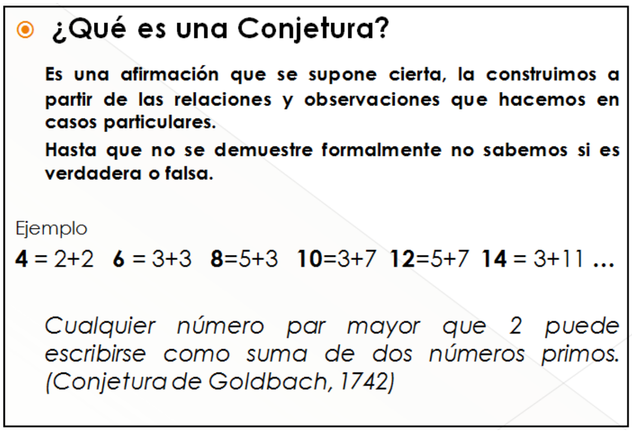


Figura 6.33. Breve introducción a la idea de conjetura

6.4.1.1 Planificación de las Tareas de la 4ª Sesión

Se han planificado dos tareas centradas en distintos focos de contenido (Tabla 6.13).

Tarea 6: Compartiendo Pizza

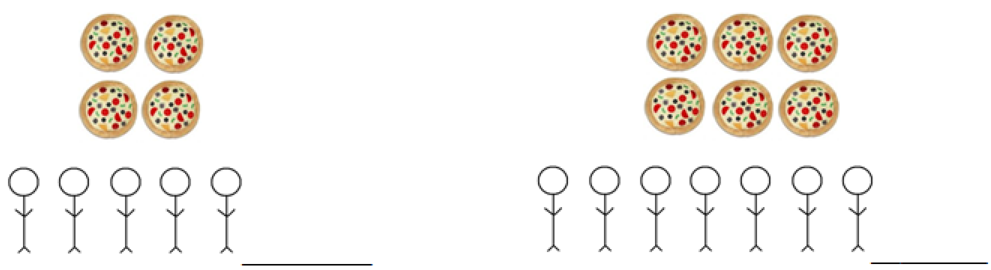
Esta tarea proviene de la investigación de Ben-Chaim, Keret e Ilany (2002, 2003, 2004, 2007), en este estudio se crearon, implementaron y evaluaron el impacto de "*auténticas tareas investigativas de razonamiento proporcional*" sobre el conocimiento matemático, didáctico y sobre las actitudes de maestros de matemática de primaria y secundaria en formación. Se debe de discernir qué situación ofrece más ventaja para comer pizza si en una mesa hay 5 personas y 4 pizzas o en otra mesa hay 7 personas y 6 pizzas.

Está compuesta la tarea por dos ejercicios, el (a) requiere que los estudiantes apliquen alguna estrategia de comparación de razones para poder elegir cuál es la mejor opción, en este caso decidir en cuál de las dos mesas cada persona puede comer más. Resaltamos que las razones que se han de comparar no son ni unitarias ni equivalentes y tienen la cualidad de que los términos se relacionan aditivamente de la misma manera (6-4=2 y 8-6=2). Desde el punto de vista del análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal (1983) el tipo de razón implicada en la Tarea 6 se considera una exposición.

Compartiendo pizza

Cada mes Daniel y sus amigos se encuentran en un restaurante para cenar pizza. Habitualmente Daniel llega tarde, pero sus amigos lo aprecian mucho y le esperan. Le reservan un sitio en cada una de las dos mesas que ocupan. Daniel llega con mucho apetito y tiene que decidir dónde sentarse de forma que le corresponda la mayor cantidad de pizza. En la mesa 1 hay 4 pizzas grandes y 5 personas, en la mesa 2 hay 6 pizzas grandes y 7 personas.

Mesa 1 Mesa 2



a. ¿Cuál de las dos mesas le sugieres a Daniel que elija para sentarse? Explica tu razonamiento.

b. La razón entre las mesas grandes (mesa 2 con 8 sitios) y las mesas pequeñas (mesa 1 con 6 sitios) del restaurante es de 7 a 4. Hay sitio exactamente para 240 personas. Realiza los cálculos necesarios para saber cuántas mesas de cada tipo hay en el restaurante.

Figura 6.34. Tarea 6 "Compartiendo Pizza"

Además de la traducción hemos realizado dos cambios a la tarea original, uno ha sido el cambio de las razones que se van a comparar, en principio eran 4:10 y 3:8 y las hemos sustituido por las razones 4:6 y 6:8, este cambio se debe a las posibilidades que cada par ofrece en relación con las estrategias que se podrían utilizar, por ejemplo dividir en tercios y comparar es más sencillo que dividir en quintos, también buscamos que la relación aditiva entre las cantidades fuese la misma con el fin de estudiar si después de la 3ª sesión los estudiantes seguían incurriendo en razonamientos meramente aditivos. El otro cambio se refiere a la representación gráfica de la situación pues consideramos que al colocar las pizzas circulares y debajo las personas, eliminado la mesa, tenedores, platos etc., de la versión original, se puede favorecer alguna estrategia gráfica de reparto o de interpretación de la situación en términos de alguna unidad de referencia elegida por el estudiante.

El ejercicio (b) es de reparto proporcional, se conoce el número de personas que se sientan en las mesas grandes y las personas que caben en las mesas pequeñas, que la razón entre los dos tipos de mesas (7:4) y que hay sitio para 240 personas exactamente, y se quiere conocer el número de mesas que hay de cada tipo. Hemos considerado que este ejercicio puede aportar información acerca de las estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de repartos proporcionales. No contamos con antecedentes en la literatura o en nuestra investigación previa que nos describa cómo proceden los estudiantes en este tipo de ejercicios, creemos que el uso de la regla de tres no es un proceso adecuado pero que podrían intentar utilizarla y pretendemos obtener información al respecto.

Tabla 6.14. *Descripción de la Tarea 6 según nivel de complejidad*

		Tarea 6 (a)	Tarea 6 (b)
Reproducción	Contextos familiares.	X	X
	Conocimientos ya practicados.		
	Aplicación de algoritmos estándar.		
	Realización de operaciones sencillas.	X	X
	Uso de fórmulas elementales		
Conexión	Contextos menos familiares		
	Interpretar y explicar	X	X
	Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación		
	Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.	X	X
Reflexión	Tareas que requieren comprensión y reflexión.		
	Creatividad		
	Ejemplificación y uso de conceptos.		
	Relacionar conocimientos para resolver problemas más complejos.		
	Generalizar y justificar resultados obtenidos.		

Relación de la Tarea 6, los Objetivos y las Competencias Matemáticas

El ejercicio (a) de la Tarea 6 es una comparación de razones. Se han facilitado las cuatro cantidades de las dos razones a saber, 4 pizzas:6 personas y 6 pizzas:8 personas. De modo que el estudiante ha de emplear alguna estrategia de comparación, e interpretar adecuadamente la relación de orden establecida considerando las condiciones de la situación. Esta actuación ilustra de manera explícita aquellos desempeños contemplados en el objetivo 11, establecer la relación de orden entre dos razones. El mismo se ha vinculado con la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones*. Sin embargo es preciso *pensar y razonar* acerca de cómo se interpreta el orden establecido, una acción fundamental del trabajo en matemáticas y que caracteriza a esta competencia.

El ejercicio (b) de la Tarea 6 se centra en el reparto de 240 personas en mesas de dos tipos (1 y 2), las cuales están distribuidas según la razón 7:4, la resolución ejemplifica las acciones que se contemplan en el objetivo 12 centrado en aplicar la noción de razón y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias. El ejercicio demanda hallar la cantidad de de mesas de cada tipo de modo que se puedan sentar todas las personas, para lo cual es preciso interpretar la razón 7:4 como una relación que determina la distribución de la cantidad de mesas de cada tipo, tal interpretación ejemplifica la *competencia pensar y razonar*. Debido a que el problema se puede abordar desde distintas vías consideramos que es posible que se trabaje la competencia *resolver problemas*. Es evidente que la resolución del ejercicio precisa poner en marcha alguna estrategia así como usar operaciones dotando de sentido a las acciones que se realicen, por lo que es posible que se promueva la competencia *utilizar las operaciones*.

Planificación de la Puesta en Común de la Tarea 6 "Compartiendo Pizza"

En relación con el ejercicio (a) se han considerado previamente algunas posibles estrategias para comparar las razones 4 pizzas:6 personas y 6 pizzas:8 personas. A continuación describimos cada una de éstas e indicamos que algunas de las estrategias han de llevarse preparadas en la presentación de diapositivas que guiarán la revisión de las tareas.

- Buscando el valor racional de las razones mediante una división, así como $4 \div 6 = 0,\overline{6}$ y $6 \div 8 = 0,75$, fácilmente eligen la mesa 2 pues basta con comparar las expresiones decimales. De igual manera si se plantean las razones 6:4 y 8:6. Este método es análogo al de reducción a la unidad.

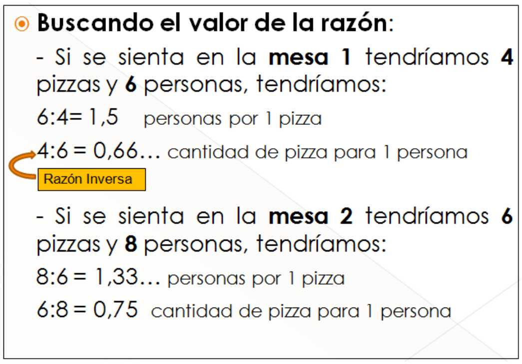


Figura 6.35. Resolución de la Tarea 6 buscando el valor de la razón

- Buscando razones equivalentes a las dadas de modo que las resultantes tengan el mismo antecedente o el mismo consecuente. Esto se puede lograr multiplicando ambos términos de una razón por un número o bien sumando razones, por ejemplo: $\frac{4}{6}\times\frac{4}{4}=\frac{16}{24}$ y $\frac{6}{8}\times\frac{3}{3}=\frac{18}{24}$ de ahí que con el mismo número de personas se pueda comer más en la mesa 2 que tendría 18 pizzas. Esta estrategia es un tipo particular de normalización (A. Fernández, 2001).

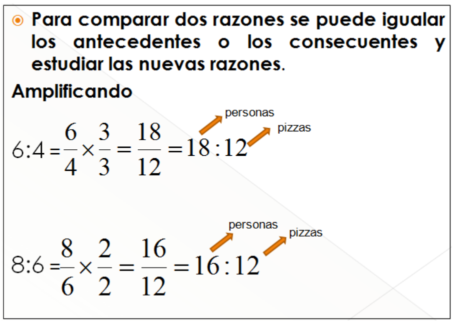


Figura 6.36. Resolución de la tarea igualando antecedentes o consecuentes

- Hemos dicho que el estudiante podría ir sumando razones, en este caso se requiere una mayor comprensión de la noción de razón y en consecuencia se mostraría un pensamiento proporcional de mayor nivel. Por ejemplo el estudiante debe reconocer que si en la mesa 1 se agregan 2 pizzas entonces también se deberían agregar 3 personas y comprender que en el caso de las razones la suma $\frac{4}{6}+\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ no presenta errores. Pero en un contexto de fracción como parte-todo, esta suma no sería correcta. Después la comparación entre 6:9 y 6:8 es muy simple pues tienen el mismo antecedente o cantidad de pizzas en este caso particular. Este procedimiento constituye otra manera de normalizar las razones.

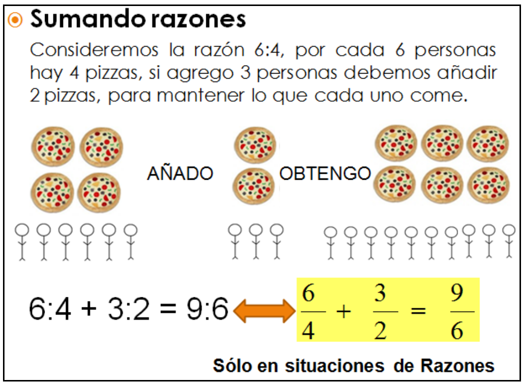


Figura 6.37. Resolución de la tarea mediante la suma de razones

- Mediante una suposición de equivalencia de razones el estudiante puede pensar que si la razón en la mesa 1 es de 4:6 entonces busca el número de personas que comerían la misma cantidad en la mesa 2 en la que hay 6 pizzas, planteando una supuesta equivalencia de razones y procediendo como en una regla de tres $\begin{matrix}4\to 6\\ 6\to x\end{matrix}$, de donde se obtiene que deberían ser 9 personas y como hay 8 personas pues en la mesa 2 se puede comer más.

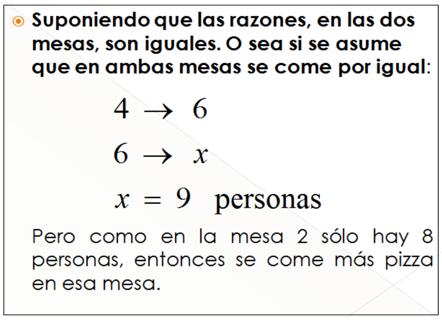


Figura 6.38. Resolución de la tarea aplicando la suposición de equivalencia

- Podrían dividir las pizzas en un número de porciones elegido por ellos, habitualmente 8 o 12 partes, y luego dividiendo las porciones entre las personas, este reparto pueden hacerlo también gráficamente.

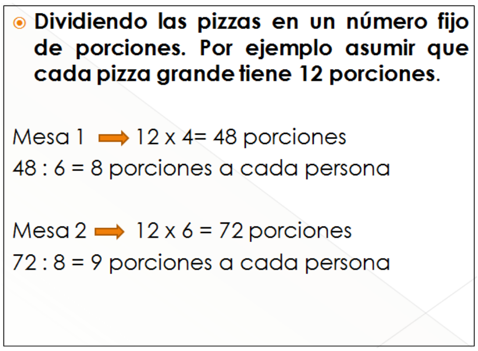


Figura 6.39. Resolución de la tarea aplicando la división en porciones

- Usando una razón como referencia por ejemplo 2:3 (en la mesa 1) e interpretar la otra mesa en términos de esa razón. También podría usarse una fracción, por ejemplo en la mesa 1 cada persona come 2/3 de pizza e interpretar lo que come cada persona en la otra mesa.

- Tomando las razones como fracciones y aplicando el mecanismo del producto cruzado, así 4/6 < 6/8 pues 32 < 36.
- También es posible simplificar cada razón e intentar comparar 3:4 y 2:3 aplicando alguno de los procedimientos anteriores.

En la puesta en común la investigadora señalará, si le es posible, la diferencia que hay entre $\frac{2}{3}$ como fracción (parte-todo) y $\frac{2}{3}$ como representación de la razón 2:3. En el primer caso se refiere a que cada persona de la mesa 1 consume dos terceras partes de una pizza y en el segundo se refiere a la relación entre cantidades de pizza y personas en la mesa 1, es decir que por cada dos pizzas en la mesa 1 hay 3 personas.

En relación con el ejercicio (b) subrayamos que en el enunciado se da a conocer la razón **7** mesas tipo 1**:4** mesas tipo 2, se conoce la cantidad de personas que cabe en cada tipo de mesa, esto es **8** personas en mesas tipo 1 y **6** personas en mesas tipo 2.

Para abordar la tarea se puede considerar que en una unidad compuesta de 11 mesas (7:4 mesas) se ubican 80 personas y entre este subtotal de personas y el total de las mismas (240 personas) existe una relación escalar igual a 3. En consecuencia es necesario extender tal relación para conocer que las mesas requeridas han de ser el triple de las consideradas de ahí que se busque la razón equivalente a 7:4 multiplicando ambos elementos por 3, $(7:4)\times 3 = 21:12$ (Figura 6.40).

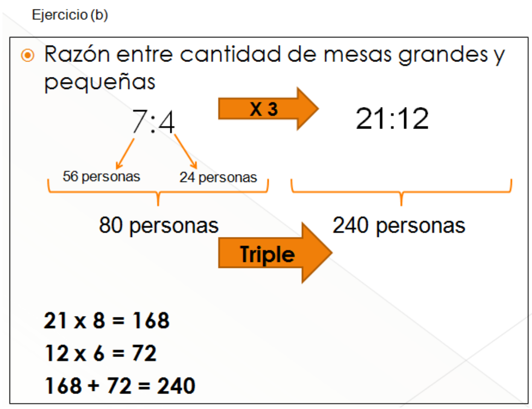


Figura 6.40. Resolución de la parte (b) de la Tarea 6

El problema se caracteriza por dos repartos proporcionales, uno del total de 240 personas según la razón 7:3 y otro del total de 33 mesas según la razón 7:7.

Otra forma de abordar la resolución es aplicar la propiedad de las proporciones que rige los repartos proporcionales. Ésta propiedad establece que *cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, a la suma de cantidades de una magnitud le corresponde la suma de las cantidades homólogas de la otra magnitud.*

En el caso de la tarea, si consideramos que en un grupo de 7 mesas grandes y 4 mesas pequeñas las personas se distribuyen según la razón 56:28 equivalente a 7:3, y sabiendo que en total hay sitio para 240 personas, entonces para determinar las personas totales de cada conjunto, se tendría:

$$\frac{a}{7}=\frac{b}{3}=\frac{a+b}{7+3}=\frac{240}{10}=24\Rightarrow a=168\ \ b=72$$

Y para averiguar la cantidad de mesas, sería preciso conocer primero que el total de mesas en el restaurante es de 33, y aplicar la misma propiedad usando la razón 7:4 que relaciona las mesas de los dos tipos:

$$\frac{a}{7}=\frac{b}{4}=\frac{a+b}{7+4}=\frac{33}{11}=3\Rightarrow a=21\ \ b=12$$

Supuestos Sobre Posibles Actuaciones en la Resolución de la Tarea 6

Con base en resultados de nuestro trabajo final de máster (Valverde, 2008), en el cual estudiamos una tarea similar a la propuesta, creemos que los estudiantes que usen la división como método para comparar las razones del ejercicio (a) mostrarán errores en la elección de la mesa debidos a la incorrecta interpretación del cociente de la división, pues debido al uso de procedimientos sin razonamiento confunden el cociente referido a pizzas por persona o personas por pizza. Consideramos que en el ejercicio (b) relativo a un reparto proporcional simple los estudiantes posiblemente intenten aplicar una regla de tres entre las razones 7:4 (mesas grandes:mesas pequeñas) y 8:6 (cantidad personas que se sientan mesas grandes:cantidad personas que se sientan en las mesas pequeñas) que no son equivalentes.

Tarea 7: El Palacio Real de la Alhambra

Esta tarea atiende ideas asociadas a los conceptos de escala y semejanza, de acuerdo con Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007) este tipo de tareas es considerado como uno de los más difíciles pues en ellas se deben relacionar varios tópicos tales como la medida, visualización espacial, figuras y objetos en dos y tres dimensiones, escala lineal, cuadrática y cúbica, conversión de unidades, perímetro, área, volumen y en algunos casos cálculos complicados. Desde el punto de vista del análisis fenomenológico propuesto por Freudenthal (1983) el tipo de razón implicada en la Tarea 7 se considera un constructo.

Los autores señalados usaron en su estudio una tarea que hemos utilizado como referencia para la elaboración de la nuestra. Esa tarea se llama “El Templo de Bet-Shean (BST)” en ésta los estudiantes debían visualizar un plano del templo e identificar el vestíbulo principal y otras partes del mismo, a partir de una medición directa de las dimensiones en el plano (que en ningún caso eran números enteros) tenían que decidir y discutir cómo calcular el área de un cuadrilátero que no era rectángulo. A continuación se interroga sobre razones entre longitudes, perímetros o áreas del vestíbulo en el plano y en la realidad. Los investigadores señalan que en el caso de la razón entre las áreas la mayor parte de los estudiantes determinan que entre ellas existe la misma relación que entre los lados, es decir incurren en una aplicación inapropiada del modelo lineal o lo que se conoce como “ilusión de la linealidad” (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006). En la segunda parte de la tarea se debe calcular el volumen de un pozo representado en una maqueta y el volumen del mismo en la realidad, al igual que en la primera sección se pretende estudiar cómo interpretan los estudiantes los efectos que tienen las ampliaciones o reducciones sobre las magnitudes longitud, superficie y volumen.

Para la primera versión[82] de nuestro diseño elaboramos una tarea que denominamos "El Palacio Real de la Alhambra" siguiendo las mismas pautas que en la tarea de Ben-Chaim, Keret e Ilany, en la Figura 6.41 mostramos el encabezado de la tarea. En otras palabras la variación más importante que realizamos inicialmente fue el cambio del plano del Templo Bet-Shean por un plano de la Alhambra, la secuencia de los ejercicios eran los mismos excepto por el hecho de que la figura seleccionada es rectangular y se les proporciona las medidas del mismo en el plano. Los pequeños cambios considerados en la elaboración de la 1ª versión de esta tarea obedecieron a que disponemos de un tiempo limitado para el desarrollo de la sesión.

El Palacio Real de la Alhambra

Se trata de un rico complejo palaciego y fortaleza que alojaba al monarca y a la corte del Reino de Granada Nazarí en el siglo XIV. Uno de sus atractivos, como en otras obras musulmanas de la época, son los interiores, cuya decoración está entre las cumbres del arte andalusí. Presentamos un antiguo plano del Palacio Real de la Alhambra. Este bosquejo está dibujado a una escala de 1:500.

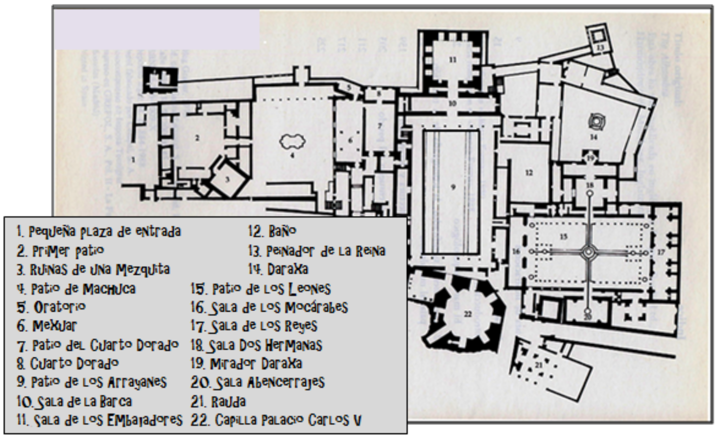


Figura 6.41. Versión original de la tarea El Palacio Real de la Alhambra

A partir del análisis preliminar de la 3ª sesión y de la aplicación de la 1ª versión de la tarea "El Palacio Real de la Alhambra" a un grupo de maestros chilenos, observamos que los estudiantes requerían más tiempo que el estimado en la resolución de las tareas previas y que esto exigía de la investigadora mayor dedicación de tiempo en la puesta en común. Concluimos así que era necesario concretar en pocos ejercicios los objetivos que la investigación pretende perseguir en esta cuarta sesión. Por otro lado a partir de la revisión de la literatura (De Bock, Verschaffel y Janssens, 2002; De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2002; Van Dooren et al., 2005; Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006) consideramos que la tarea debe poseer un carácter más abierto y

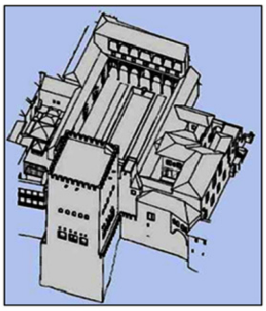
[82] Versión original de la tarea diseñada antes de la puesta en práctica de la intervención.

englobar en menos ejercicios la idea de promover el estudio o análisis de los efectos de las ampliaciones o reducciones sobre el perímetro, área o volumen. Por lo tanto reelaboramos la tarea “El Palacio Real de la Alhambra” (Figura 6.42), realizando los cambios que se describen inmediatamente después de esa figura.

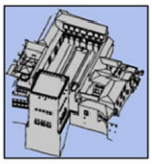
El Palacio Real de la Alhambra

Es un rico complejo palaciego que alojaba al monarca y a la corte del Reino de Granada Nazarí en el siglo XIV. A partir de una maqueta de la Alhambra, elaborada hace unos años (maqueta A), se va a construir otra (maqueta B) para un nuevo museo aplicando una escala de 1:5.

B



A



I Fase

Uno de los atractivos, como en otras obras musulmanas de la época son los interiores, entre los que destaca el Patio de los Arrayanes que es de forma rectangular y la Torre de Comares cuya terraza superior es de forma cuadrangular.

En la tabla aparecen las dimensiones del Patio de los Arrayanes y de la terraza superior de la Torre de Comares en la maqueta A, completa la información que se te pide:

		Largo	Ancho	Perímetro	Área
Patio de los Arrayanes	Maqueta A	15 cm	5 cm	40 cm	75 cm²
	Maqueta B				
Terraza Torre de Comares	Maqueta A	6 cm	6 cm	24 cm	36 cm²
	Maqueta B				

Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

II Fase

En el Patio de los Arrayanes hay un estanque de almacenamiento de agua con forma de prisma rectangular, éste divide al patio longitudinalmente.
En la tabla aparecen las dimensiones del estanque en la maqueta A, completa la información que se te pide:

	Largo	Ancho	Profundidad	Volumen
Maqueta A	12 cm	3 cm	2 cm	72 cm³
Maqueta B				

Enuncia una conjetura sobre la razón entre los volúmenes de dos prismas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivas aristas. Explica con detalle cómo has razonado.

Figura 6.42. Tarea 7 “El Palacio Real de la Alhambra”

Se decidió que la situación de ampliación no se establecería entre un plano y la realidad sino entre dos maquetas, este cambio obedece al hecho de que las cantidades que surgen de una escala y la realidad por ejemplo 1:500 o 1:300 son grandes lo que dificulta la búsqueda de relaciones entre las razones de áreas o volúmenes y la escala dada. Una escala de 1:5 entre las dos maquetas genera unas cantidades cuyo cuadrado o cubo son más fáciles de reconocer y por lo tanto creemos que las relaciones se identifican más rápidamente.Todas las cantidades que se dan como datos y aquellas que surgen en la resolución son números enteros menores que 10000.

En lugar de plantear ejercicios consecutivos que guiaran la inducción de los estudiantes decidimos colocar las dimensiones de la región rectangular y del estanque de la maqueta A en tablas, con el objetivo de facilitar la observación de relaciones (funcional o uso escala) entre dimensiones correspondientes, además de tener las dos áreas o los dos volúmenes juntos y así hallar la razón entre ambos.

Decidimos colocar todos los datos de la maqueta A porque creemos que, si se pone únicamente el largo y el ancho, por ejemplo, los estudiantes pueden recurrir a la estrategia multiplicativa para hallar ambas áreas, pero si disponen del área de la región rectangular de la maqueta A podemos estudiar si los alumnos aplican la misma escala en la búsqueda de esa medida en la otra maqueta.

La figura que incluimos en el enunciado funciona únicamente como ilustración de la situación pero no tiene función alguna en el proceso de resolución. Con esto deseamos observar si los estudiantes recurren a algún tipo de representación gráfica para colocar los datos y proceder.

Después de una revisión posterior, decidimos colocar otro caso de semejanza de figuras, elegimos una región cuadrangular, este cambio obedece a que consideramos que para llegar a una conjetura se requiere la observación de más de un caso, nuestro deseo era poder incluir al menos 3 casos (Cañadas, 2007) pero debido al tiempo limitado que tenemos para el desarrollo de las tareas decidimos poner sólo 2 casos y durante la puesta en común la investigadora aportará otro caso más. Para la segunda fase de la tarea decidimos dejar sólo un caso pues consideramos que los estudiantes pueden razonar por analogía observando la similitud con el ejercicio de la 1ª fase.

En la tercera sesión uno de los ejercicios estuvo orientado hacia la búsqueda de relaciones entre cantidades y observamos no solo dificultad en la búsqueda de las relaciones sino en la descripción de las mismas. Por lo anterior consideramos que en esta nueva tarea teníamos la oportunidad de volver a estudiar esta capacidad y de promover un nivel más allá de la búsqueda de relaciones, nos referimos a la escritura o expresión de una conjetura acerca de las relaciones detectadas. De antemano creemos que no tienen suficiente experiencia en la expresión de conjeturas pero que ésta ha de ser una capacidad básica en la formación matemática de los estudiantes de cualquier nivel educativo, de modo que se les explicará, si se considera necesario porque ellos lo demanden, qué es una conjetura y se les darán unos ejemplos.

De acuerdo con los indicadores de los niveles de complejidad de las tareas expuestos por Rico y Lupiáñez (2008) se tiene la parte (a) es de reproducción mientras que la parte (b) corresponde al nivel de reflexión.

Tabla 6.15. *Descripción de la Tarea 7 según nivel de complejidad*

		Tarea 7	
		Parte (a) I y II Fase	Parte (b) I y II Fase
Reproducción	Contextos familiares.		
	Conocimientos ya practicados.	X	
	Aplicación de algoritmos estándar.		
	Realización de operaciones sencillas.	X	
	Uso de fórmulas elementales	X	
Conexión	Contextos menos familiares		
	Interpretar y explicar		
	Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación		
	Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.		
Reflexión	Tareas que requieren comprensión y reflexión.		X
	Creatividad		
	Ejemplificación y uso de conceptos.		
	Relacionar conocimientos para resolver problemas más complejos.		X
	Generalizar y justificar resultados obtenidos.		X

Relación de la Tarea 7, los Objetivos y las Competencias Matemáticas

La parte (a) de las dos fases de la tarea supone la interpretación de la escala 1:5 para determinar la medida de longitudes, superficie y volumen. Estos ejercicios contemplan actuaciones consideradas en el objetivo específico 26 orientado a extraer información de modelos reducidos, mapas o dibujos a partir de la interpretación de la escala, el logro del mismo pone en juego la competencia *pensar y razonar*, además el estudiante debe percibir que la escala 1:5 no es apropiada para determinar la medida de la superficie o del volumen. Tal y como se describió en el análisis cognitivo, el objetivo 26 se ha vinculado a la competencias *modelizar* debido a que este objetivo apunta directamente a una actividad cotidiana la que es preciso estructurar y analizar aplicando el significado de escala.

Así mismo, en el marco de la Tarea 7, para calcular esas medidas se ha de recurrir a las fórmulas correspondientes de área y volumen, con lo que posiblemente la competencia *usar lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones* se vea favorecida.

Por otro lado la parte (b), de ambas fases, requieren de la cuidadosa observación de las tablas construidas, de la búsqueda de relaciones entre las razones implicadas, de un proceso de generalización de lo observado y de la escritura de la conjetura. Tales actuaciones ejemplifican las consideradas en los objetivos específicos 29 y 30, centrados respectivamente en explorar la relación entre la razón de los lados[83] de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes, y en explorar la relación entre la razón de las aristas de cuerpos semejantes y la razón de los volúmenes correspondientes. En consecuencia, esta búsqueda de relaciones entre las razones posiblemente estimule la competencia *pensar y razonar*, y la expresión de la conjetura contribuirá al desarrollo de la competencia *comunicar*. El ejercicio demanda de la explicación de los razonamientos aplicados por lo que posiblemente se trabaje la competencia *argumentar y justificar*.

Planificación de la Puesta en Común de la Tarea 7

Tanto la conjetura, como algunas verificaciones visuales de la misma, han sido preparadas para guiar la revisión general de la tarea. Por ejemplo:

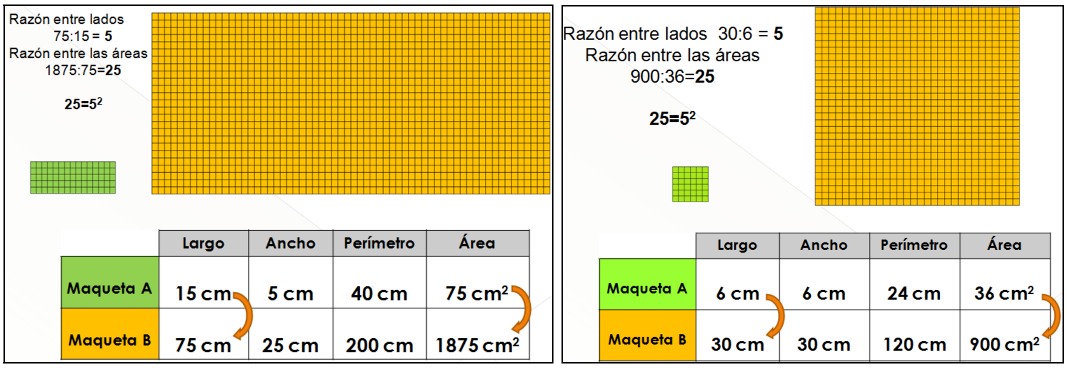


Figura 6.43. Planificación de la Puesta en Común de la Tarea 7

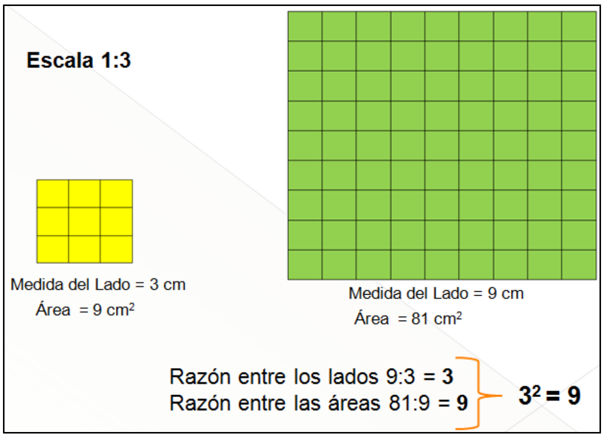


Figura 6.44. Caso externo a la situación para guiar la expresión de la conjetura

[83] Nos referimos a las medidas de los lados.

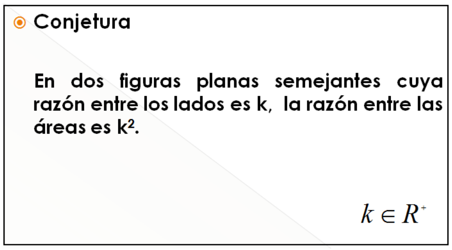


Figura 6.45. Conjetura relativa a las razones de las longitudes y el área

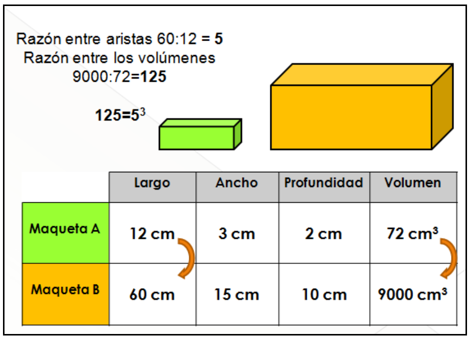


Figura 6.46. Caso de objetos semejantes para guiar la expresión de la conjetura

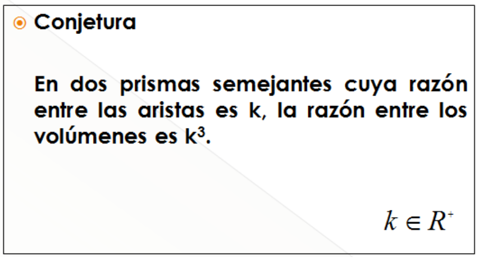


Figura 6.47. Conjetura relativa a las razones de las aristas y de los volúmenes

Supuestos Sobre Posibles Actuaciones en la Resolución de la Tarea 7

Basándonos en la literatura de investigación relacionada con el fenómeno didáctico-matemático llamado “ilusión de linealidad” y los resultados obtenidos en nuestro estudio previo (Valverde, 2008) creemos que es posible que los estudiantes utilicen la escala 1:5 para obtener el área y volumen de interés en la tarea. También consideramos que posiblemente detecten la relación aditiva entre las dimensiones largo y ancho de la maqueta A y extiendan esa misma relación a las dimensiones de la maqueta B.

Aunque no esperamos que expresen la conjetura como lo haría un experto pensamos que las cuatro fases que han de experimentar (individual, equipos, puesta en común, individual) ofrecen una oportunidad para mejorar los primeros intentos que manifiesten.

6.4.2 Desarrollo de la 4ª Sesión en Ambos Grupos

En ambos grupos la sesión empieza con un saludo y recordando las diferentes fases de trabajo en las que los estudiantes participarán, se les insiste en la importancia de trabajar solos durante la 1ª fase y de ajustarse al tiempo establecido por la investigadora para el desarrollo de cada tarea, ésta les comenta de modo general de qué va cada tarea diciendo que así cómo es posible comparar cantidades mediante una razón, también es posible comparar razones y ese el objetivo principal de la tarea "Compartiendo Pizza", por otro lado señala que en la tarea "El Palacio Real de la Alhambra" trabajarán sobre la idea de escala que es una de las aplicaciones más frecuentes de la razón.

Se siguieron las recomendaciones dadas por la profesora del grupo en relación con la posibilidad de repasar algunas ideas generales en torno a la razón. Antes de empezar a trabajar individualmente en la tarea "Compartiendo Pizza" la investigadora dice a los estudiantes que retomará algunas de las ideas vistas en otras sesiones con el objetivo de que la mayoría de ellos resuelva las tareas.

Inicia el repaso diciendo que una razón es una expresión mediante la cual se comparan multiplicativamente dos cantidades y además pone el ejemplo "*En un colegio hay 16 estudiantes de sexto grado, 12 de ellos son aficionados del baloncesto, el resto no lo son. ¿Cómo podríamos describir la relación que hay entre los estudiantes que gustan del baloncesto y aquellos que no?*" (Figura 6.28). Comenta dos posibles relaciones (aditiva y multiplicativa) entre la cantidad de estudiantes que gustan de ese deporte y aquellos que no les gusta (Figura 6.29). Tal y como estaba previsto en la planificación de esta sesión la investigadora vuelve a indicar la distinción entre la razón, el valor de la razón y el papel de la división como operación que permite conocer ese valor.

6.4.2.1 Desarrollo de la 4ª Sesión en el G1

En el G1, después de comentar las diapositivas descritas anteriormente la investigadora procede a mostrar otro ejemplo (Figura 6.30), el de la razón 3:2 entre unas bolas rojas y verdes, retoma la idea de equivalencia, señala que el valor de la razón no siempre es un número entero pero que sí es mayor que 1, dado que se toma en el antecedente el mayor valor.

Después de esta introducción los estudiantes trabajan de manera individual en la primera tarea, durante esta fase se observa que han interpretado correctamente la situación pero la mayoría la aborda mediante la división de enteros, lo hacen igual durante el trabajo en equipos.

Después de la puesta en común de la tarea 1, descrita más abajo, la investigadora continúa con la segunda parte del repaso de ideas previas necesarias para la interpretación de los ejercicios de la siguiente tarea "El Palacio Real de la Alhambra". Explica qué son figuras planas semejantes, lo ejemplifica con rectángulos y triángulos, haciendo énfasis en las condiciones que determinan la semejanza en cada caso. En relación con los rectángulos es necesario que los lados sean proporcionales y en el caso de los triángulos debe cumplirse la igualdad entre la medida de los ángulos de ambos triángulos. Se les presentó la diapositiva preparada para este fin.

Seguidamente la investigadora comenta que la idea de semejanza está detrás de la elaboración de mapas, planos, maquetas e inclusive en la ampliación o reducción de fotocopias. A partir de esto define la escala como la razón de semejanza entre la figura original y su representación.

Siguiendo la planificación de la sesión, la investigadora dice que para que conocer cómo realizar esta tarea es necesario saber qué es una conjetura. Les expresa que una conjetura es una afirmación que se supone cierta, ésta se construye a partir de las relaciones y observaciones que se hace en casos particulares y que hasta que no se demuestre formalmente no se sabe si es verdadera o falsa. La investigadora les propone enunciar verbalmente una conjetura acerca de las sumas **4** = 2+2 **6** = 3+3 **8**=5+3 **10**=3+7 **12**=5+7 **14** = 3+11…, ante esta petición los estudiantes dan algunas ideas incompletas por ejemplo que los número pares son iguales a la suma de dos números impares, la investigadora les pregunta ¿todos los pares?, ¿desde cuál número empieza?, ¿el 2 es impar?, a lo que se va delimitando o excluyendo ideas hasta llegar al enunciado más refinado "*Cualquier número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos." (Conjetura de Goldbach, 1742)*, la investigadora les comenta que Goldbach fue un matemático prusiano que trabajó con Euler y que esta conjetura ha sido verificada hasta un trillón, aproximadamente, pero que aún no ha sido demostrada formalmente.

Después de estos aportes se les entrega la hoja de trabajo individual, durante esta fase los estudiantes ponen de manifiesto una clara incomodidad con la asignación de escribir una conjetura, preguntan si deben expresarla con palabras o si deben usar álgebra, además se observa cómo muchos de ellos aplican la misma escala para hallar el área y enuncian la conjetura considerando esta observación. Durante la fase de trabajo colaborativo se observa un pequeño avance ya que algunos estudiantes calculan el área de las figuras aplicando la fórmula conocida, en algunos casos la investigadora se lo sugiere, esto les provoca un conflicto que les obliga a repensar la conjetura. Posteriormente se hizo la revisión general de la tarea, momento que aprovecharon los estudiantes para complementar o modificar las respuestas aportadas durante el trabajo en equipo.

Puesta en Común de la Tarea "Compartiendo Pizza" (T6; G1)

La investigadora inicia la puesta en común señalando que ha pensado en cuatro propuestas para resolver la tarea, indica que como futuros maestros de primaria han de ser conscientes de que los niños piensan de muy diversas maneras y que como docentes no pueden limitarse a una única forma de resolver un problema, la investigadora destaca la importancia de desarrollar la capacidad de abordar una misma tarea matemática desde diferentes perspectivas.

Continúa mostrando cada una de las posibles resoluciones para lo cual utiliza las diapositivas que se han preparado previamente. La investigadora dice que a lo largo del trabajo individual y colaborativo muchos de ellos han buscado el valor de la razón, dividiendo antecedente entre consecuente o viceversa (muestra la diapositiva de la Figura 6.35)

En este momento la investigadora explica las dos posibilidades que se podían considerar al buscar el valor de la razón, una es considerar la razón 6:4 cuyo valor es 1,5 el cual representa la cantidad de personas que comen de una pizza, no obstante subraya que en la realidad no hay 1,5 personas, que esta cantidad ha de interpretarse en el conjunto de las personas y en relación con una pizza diciendo que existe una relación de 1,5 personas por pizza. Señala que la otra opción es considerar la razón inversa que es tomar el valor menor como antecedente y el mayor como consecuente, o sea 4:6. Para este caso insiste de nuevo en el significado del valor de esa razón que es 0,6… lo cual representa la cantidad de pizza por persona. A continuación comenta el mismo procedimiento con las cantidades de la mesa 2, luego razona que si para la misma cantidad de pizza hay menos personas pues se infiere que es posible consumir más cantidad de pizza.

Dado que durante las fases previas se observó que algunos estudiantes aplicaron el procedimiento anterior sin interpretar correctamente el valor de la razón, la investigadora procedió a especificarles que cuando se dividen cantidades de distinto tipo, en este caso pizzas y personas, lo que se obtiene no son ni pizzas ni personas sino que se obtiene un "nuevo tipo de cantidad" (cantidades intensivas), pizza por persona o viceversa según se realice la división. Pregunta ¿cuántos han resuelto el problema de esta manera? y la mayoría de los estudiantes levanta la mano.

Con el objetivo de introducir otra manera de resolver la tarea la investigadora comenta que este tipo de problemas se han trabajado con niños de primaria de 9 o 10 años y se ha constatado que, por lo general, el dominio de las operaciones fundamentales, como la división, no se ha afianzado aún. Agrega que debido a lo anterior los niños utilizan otras estrategias para comparar las razones, y sucede que los adultos tienen las operaciones asumidas lo que influye en querer aplicarlas como primera opción, no obstante, para la comparación de razones hay estrategias distintas a la división.

La investigadora indica que una alternativa a la división es la amplificación de las razones (Figura 6.36). Utiliza como ejemplo la razón 6:4 de la mesa 1 e indica que al triplicar las cantidades se obtiene la razón 18:12 que es equivalente a la anterior. Por otro lado considera la razón 8:6 y comenta que al duplicar las cantidades se obtiene una razón equivalente que es 16:12. Explica a qué obedece la decisión de duplicar o triplicar, esto es para igualar los antecedentes o consecuentes con el fin de facilitar la comparación de las razones. Una estudiante interviene y pregunta *¿por qué lo hiciste por 3 y por 2?* , la investigadora le responde basándose en la noción de múltiplos comunes, en este caso 12 es el mínimo múltiplo común de 6 y 4 pero que no es el único pues podría intentarse que los dos consecuentes fuesen 24 y que en ese caso debían de amplificar una razón 6 veces y la otra 4 veces, la investigadora insistió en que el objetivo de este procedimiento es igualar los consecuentes o los antecedentes de las razones con la idea de facilitar la comparación.

En seguida continúa con el siguiente procedimiento, la suma de razones. La investigadora dice que la suma de razones se puede identificar con la amplificación sólo que en lugar de multiplicar ambas cantidades por un mismo número se van añadiendo cantidades de los dos tipos. Indica que la suma de razones se hace de distinta forma que la suma de fracciones, usa como ejemplo la razón 6:4 de la mesa 1 (Figura 6.37), dice que por cada 6 personas hay 4 pizzas entonces que si se unen 3 personas habría que añadir 2 pizzas más, pregunta a los estudiantes *¿por qué?*, uno de los estudiantes le responde diciendo: "*para que se mantenga lo que comen, para que se mantenga la equivalencia…*", la investigadora aprueba este aporte y agrega que la suma se expresa simbólicamente de la siguiente forma 6:4 + 3:2 = 9:6. Posteriormente les comenta que debido a que las razones también se expresan de forma fraccionaria la suma podría reescribirse como $\frac{6}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$ indicando, a la vez, la posible confusión que esto puede generar porque en la suma de fracciones no se procede de la misma forma, subraya que únicamente en el contexto de las razones es válida la expresión anterior de la suma. Cierra la resolución de la tarea comparando la razón obtenida, 9:6 de la mesa 1, con la razón 8:6 de la mesa 2.

A continuación la investigadora presenta otra manera de resolver la tarea, se refiere a la estrategia de suposición de razones equivalentes (Valverde, 2008). Explica en qué consiste diciendo que si se asume que en ambas mesas se come por igual se puede plantear la regla de tres que aparece en la Figura 6.38. Concluye diciendo que para que en la mesa 1 y en la mesa 2 se coma por igual, en la mesa 2 debería de haber 9 personas y como sólo hay 8 pues se deduce que se come más en la mesa 2.

En seguida dice que otra forma de abordar la tarea es dividir cada pizza en un número fijo de porciones y repartir el total de porciones entre el número de personas que se ha sentado en cada mesa. Presenta el resultado que surge al asumir que cada pizza tiene 12 porciones (Figura 6.39). Resume lo visto diciendo que las formas vistas son alternativas a la división y reiterando la idea de que una de las tareas del maestro es pensar de cuántas y qué formas se puede resolver un problema con el objetivo, entre otros, de no calificar inadecuadamente el trabajo de los niños.

En seguida continúa con la revisión de la parte (b) de la tarea (Figura 6.40), indica el significado de la razón 7:4 en la situación dada, a partir de esto busca los datos relevantes para la resolución de la tarea esto es llegar a ver que en un grupo de 7 y 4 que son 11 mesas caben 80 personas, pregunta a los estudiantes por la relación multiplicativa que hay entre 80 y 240 que son las personas totales que caben en el sitio. Uno de los estudiantes responde que 240 es el triple de 80 y por esto se requiere del triple de mesas, otro estudiante pregunta por los cálculos que aparecen al final de la diapositiva y la investigadora le señala que es la comprobación de que esas son las cantidades de mesas que se requieren.

Al finalizar la revisión de la Tarea 1 la investigadora procede a introducir algunas ideas relativas a las escalas y a la semejanza de figuras planas. Inicia la recapitulación de ideas retomando el trabajo que realizaron con el profesor de la asignatura en relación con el Teorema de Thales, luego plantea la diferencia que hay entre figuras planas y objetos tridimensionales. La investigadora define la semejanza de figuras planas diciendo que "*…las figuras planas son semejantes si tienen la misma forma aunque no necesariamente el mismo tamaño…*", ejemplifica lo dicho con el caso de los rectángulos y de los triángulos, luego comenta las condiciones suficientes de semejanza en cada caso. En el repaso de ideas pide la participación de los estudiantes preguntándoles por las relaciones multiplicativas entre las medidas de los lados de las figuras mostradas en la diapositiva (Figura 6.31). Continúa diciendo que "*lo importante es recordar que en ambos casos sean triángulos, rectángulos, cuadrados; en general en las figuras semejantes se cumple que los lados son proporcionales"*, y les pregunta "*¿qué significa que los lados sean proporcionales?, alguien me lo puede decir…*", un estudiante responde diciendo "*por ejemplo en el caso de los rectángulos que la segunda figura sea el doble, o sea justo el doble de la primera, de las dimensiones o del tamaño…*", la investigadora complementa la idea del estudiante señalando que lo que se dobla o triplica son las medidas de los lados. Finaliza este repaso exponiendo que la noción de escala se aplica en la elaboración de mapas, de maquetas y en las fotocopias, porque lo que hace la fotocopiadora sacar la misma figura ampliada o reducida, un cierto número de veces, aplicando cierta escala de un 100%, 200% o 50%; define la escala como la razón de semejanza entre la figura original y su representación.

A continuación la investigadora lee el enunciado de la tarea y pregunta *¿qué es una conjetura?*, los estudiantes dicen que no saben y hacen gestos que lo confirman, por lo que decidió mostrarles la diapositiva planificada en la que se resume qué es una conjetura y lo ejemplifica mediante la Conjetura de Goldbach (Figura 6.33). Ella les pregunta por las relaciones y regularidades que se pueden observar entre las sumas y las cantidades, algunos estudiantes aportan ideas incompletas pero que con la ayuda de las preguntas propuestas por la investigadora llegan a delimitar. Uno de los estudiantes llega a decir que "*los números pares se pueden poner como la suma de números primos*", la investigadora complementa diciendo que los números pares han de ser mayores que 2 y que la suma es de dos números primos.

Puesta en Común de la Tarea "El Palacio Real de la Alhambra" (T6; G1)

La investigadora comienza la puesta en común leyendo el enunciado y señalando la demanda de la tarea. Recuerda cómo se obtiene el perímetro de una figura y reprende debido a que durante las fases previas observó que muchos desconocían cómo obtener el área de un rectángulo. Al mostrar los datos de la tabla dice que la escala de 1 a 5 significa que cada centímetro en la maqueta A son cinco centímetros en la maqueta B, los estudiantes manifiestan acuerdo con los datos de los lados y el perímetro. En seguida la investigadora expone la situación relativa al área, comenta que durante el trabajo previo muchos habían consignado que el área también crecía 5 veces y que esta conclusión no es cierta. La investigadora recurre a los ejemplos planificados y a las representaciones gráficas de los mismos para guiar la expresión de la conjetura (Figura 6.43). Les pregunta por la relación entre las áreas, les sugiere que sobrepongan la figura pequeña sola grande y que digan si es cierto que cabe 5 veces, los estudiantes lo niegan. La investigadora les señala que la razón entre lados es 5 y entre perímetros también es 5 pero que al buscar la razón entre las áreas se obtiene 25, en este momento un estudiante interviene diciendo "*cinco al cuadrado, claro porque hay largo y ancho, son dos medidas…"*.

La investigadora aprueba el aporte del estudiante y complementa señalando que la razón entre las áreas es 25 y que precisamente 25 es igual a 5 elevado al cuadrado. Sigue con otro caso, la terraza de la Torre de Comares y tras un estudio similar al anterior dice "*de* *nuevo lo mismo o sea otro caso particular que me permite afirmar que la razón entre las áreas, 25, es el cuadrado de la razón entre los lados…"*

Posteriormente la investigadora muestra otro caso externo a la situación de la tarea, dos cuadrados que se relacionan bajo la escala 1:3 (Figura 6.44). Dado que ambas figuras están compuestas por pocas unidades cuadradas procede a contarlas rápidamente con el objetivo de verificar la relación entre la razón de los lados y la razón de las áreas, luego dice "*¿cuál es la relación entre 3 y 9?... que 3 elevado al cuadrado es 9, tengo otro caso particular para sustentar mi conjetura…"*

Después de haber comentado los tres casos particulares, y debido a que quedaba poco tiempo para cerrar la sesión, la investigadora procedió a enunciar la conjetura de la siguiente manera: *"...en dos figuras planas semejantes, pude haber dicho en dos cuadrados, pude haber dicho en dos rectángulos, en general en dos figuras planas semejantes cuya razón entre los lados es k, la razón entre las áreas es k cuadrado…"* En ese momento dice que la conjetura es verdadera y que se puede demostrar matemáticamente pero que en esta ocasión no la harán, puntualiza que "k", el valor de la razón, es un número positivo.

Se continúa con la revisión de la segunda parte de la tarea. Con el objetivo de enunciar la conjetura relativa a la relación entre la razón de las longitudes y la razón de los volúmenes procede a retomar los elementos básicos del ejercicio (tipo de objeto, dimensiones, situación). Recuerda cómo se calcula el volumen de un prisma y con ayuda de la diapositiva de la Figura 6.46 muestra que la razón entre los volúmenes es 125 y les pregunta *¿cómo podemos enunciar aquí la conjetura?,… ¿qué está pasando con la razón entre los volúmenes en relación con la razón entre las aristas?…* El estudiante A9 dice: "*que sería lado por lado por lado"*. Ante la respuesta del estudiante y por la falta de tiempo la investigadora encauzó la cuestión planteada diciendo: "*sí... pero es más simple a ver… cuál es la razón entre las aristas, es 5, y la razón entre los volúmenes 5 a la…*" Algunos estudiantes respondieron a la vez diciendo: "*a la tres*".

La investigadora aprueba el aporte de los estudiantes y lo complementa retomado que en el caso de las áreas la razón es "*k al cuadrado*" y que en el caso del volumen éste aumenta "*k al cubo*" veces. Luego enuncia la conjetura diciendo: "*en dos primas semejantes cuya razón entre las aristas es k, en este caso es 5, la razón entre los volúmenes es k al cubo o k elevado a la 3*", muestra a la vez la diapositiva de la Figura 6.47.

Después de enunciar la conjetura la investigadora les motiva a seguir ejercitando las capacidades relativas a la observación de relaciones numéricas e indica la relevancia de fomentarlas en los niños de primaria. Añade que cuando las fórmulas, leyes o propiedades matemáticas se exponen, en ausencia de un proceso de construcción o verificación de las mismas, podrían olvidarse fácilmente y peor aún, no llegar a ser comprendidas por los alumnos. La investigadora se despide del grupo agradeciéndoles la participación y entusiasmo puesto es la resolución de las tareas y recordando las instrucciones del trabajo fuera de clase.

6.4.2.2 Desarrollo de la 4ª Sesión en el G2

Dado que la profesora de la asignatura aplicó una prueba individual que tardó unos 15 minutos la investigadora decidió no mostrarles el segundo ejemplo con mucho detalle (razón 3:2 entre bolas rojas y verdes), únicamente les señaló que las razones no siempre tienen un valor entero pero lo que se cumple es que ese número es mayor que 1.

Durante la fase del trabajo individual se observó que los estudiantes mostraron dificultades para interpretar la tarea de las pizzas, la mayoría empieza hacer los cálculos sin tomar en cuenta a Daniel; no interpretaron, como esperábamos, el sitio vacío de la figura.

En el trabajo individual la profesora de la asignatura y la investigadora observaron que la mayoría de estudiantes estaban resolviendo el ejercicio (a) de la 1ª tarea mediante la división de números enteros, al igual que en el G1. Esta situación motivó a la investigadora a decidir que durante el trabajo en equipo se les pediría resolver el ejercicio de distintas maneras, o sea tendrían que usar al menos dos estrategias diferentes para resolverlo. Luego se procedió con la puesta en común, estuvo a cargo de la investigadora con aportes de los estudiantes.

Seguidamente la investigadora continúa con la segunda parte del repaso de ideas previas necesarias para la interpretación de los ejercicios de la siguiente tarea “El Palacio Real de la Alhambra”. La investigadora sigue la planificación de la sesión relativa a la recapitulación de ideas sobre la noción de figuras planas semejantes, la aplicación de la semejanza en la elaboración de mapas, planos, maquetas e inclusive en la ampliación o reducción de fotocopias.

Después de una corta reflexión, motivada por el trabajo hecho en la mañana con el G1, la investigadora decidió modificar la definición de escala que se les mostraría a los estudiantes del G2. En el G1 se definió así: *la escala es la razón de semejanza entre la figura original y su representación*. En el G2 la investigadora expuso que la escala es la razón de semejanza entre ***las longitudes*** de la figura original y su representación. Insistió en la idea de las longitudes pues después de observar el trabajo realizado en el G1 y tras una reflexión sobre la experiencia de la mañana consideró que era posible que la definición inicial de escala incitara a los estudiantes del grupo1 a aplicar la misma relación multiplicativa en la búsqueda del área y volumen.

Siguiendo la planificación de la sesión, la investigadora expone que para realizar esta tarea es necesario conocer qué es una conjetura. Utiliza la misma definición y el ejemplo de la Conjetura de Goldbach expuesto en el G1.

Después de los aportes comentados anteriormente se les entrega la hoja de trabajo individual, durante esta fase manifiestan menos dificultades, que el G1, en relación con la asignación de escribir la conjetura. Por razones de tiempo se decidió que hicieran únicamente la primera parte de la Tarea 7, con el objetivo de que lograran trabajarla tanto individual como colaborativamente. No obstante durante la puesta en común la investigadora hace referencia a la segunda parte de la misma.

Durante la fase de trabajo colaborativo la investigadora y la profesora de la asignatura les preguntan *¿cómo se halla el área del rectángulo y, del cuadrado*?, ante la pregunta algunos de ellos reaccionan y se dan cuenta de que no es posible que aplicando la misma escala obtengan iguales resultados, este planteamiento constituyó un conflicto para ellos, que les obligó a repensar el enunciado de la conjetura. Además para enunciar la conjetura se les señaló que tenían que buscar las razones y observar qué pasaba. Posteriormente se hizo la revisión general de la tarea, momento que aprovecharon los estudiantes para complementar o modificar las respuestas dadas en equipo.

Puesta en Común de la Tarea 6 "Compartiendo Pizza" en el G2

Esta fase se inicia con la intervención de la investigadora quien comenta que, durante el trabajo individual y colaborativo, ha observado que la mayoría de ellos han realizado la comparación de razones del ejercicio (a) aplicando la división y que este procedimiento es propio del cambio de notación fraccionaria a decimal. En seguida continúa comentando que el ejercicio se puede resolver de múltiples formas y que ella ha insistido en que busquen otras formas de resolución porque como futuros maestros de primaria deben de esforzarse en pensar en la diversidad de estudiantes y dado que no todos los niños recurren a la misma forma de resolución, es preciso pensar en diferentes estrategias para abordar lo que unos y otros hacen. De inmediato procede a comentarles algunas de las posibles vías de resolución del ejercicio de comparación de razones.

Inicia exponiendo el primer procedimiento que corresponde a la división del antecedente y consecuente (Figura 6.35). En este caso la investigadora comenta: (a) el valor de la razón es un número mayor que 1 de ahí que se tome el mayor número entre el menor, (b) la posible consideración de la razón inversa, (c) sobre la interpretación del cociente de la división señala que algunos dieron una respuesta incorrecta por no tomar en cuenta si el cociente se refería a pizzas/persona o personas/pizza.

Después de las observaciones previas la investigadora les pregunta "*¿cuál de las dos mesas tenemos que elegir?...*" Varios estudiantes responden "*la segunda, la dos…*", la investigadora les cuestiona "*¿por qué?*", el estudiante A12 dice "*porque hay menos personas"*. La investigadora aprueba la respuesta dada y recalca que algunos de ellos se equivocaron porque como 1,5 es mayor que 1,3 pues eligieron la mesa 1, indica que no se debe dejar de lado que representan estos valores (personas/1 pizza).

Continúa con el segundo procedimiento, este corresponde a la búsqueda de igualdad entre antecedentes o consecuentes (Figura 6.36). La investigadora introduce el procedimiento indicando que si ambas mesas tuviesen la misma cantidad de personas o de pizzas la comparación de razones sería más sencilla de realizar. Luego comenta que una forma de obtener antecedentes o consecuentes iguales en ambas razones es "amplificando", esto es multiplicando ambos términos por un mismo número. Señala que dado que se multiplica la cantidad de personas y de pizza por el mismo número no se está alterando lo que cada persona consume. Durante la presentación del procedimiento pregunta y pide la participación de los estudiantes, por ejemplo al triplicar la primera razón (6:4) obtiene 18:12, indica que son equivalentes y procede a duplicar la segunda razón (8:6) preguntando a los estudiantes *"¿por qué duplico?..."*, ninguno aporta una respuesta, por lo que ella misma responde "*porque si acá tengo 12 pizzas y acá tengo 6, tengo que duplicar para obtener 12, entonces obtengo 16 es a 12 (16:12) ahora en lugar de comparar estas dos razones (6:4 y 8:6) comparamos estas dos (18:12 y 16:12) es más sencillo porque ya tengo la misma cantidad de pizzas, y obviamente como en esta mesa hay menos personas pues comerán más ahí*".

En seguida la investigadora expresa que otra forma de igualar antecedentes y consecuentes consiste en sumar razones y procede a comentar en qué consiste la suma de razones. Utiliza el caso de la razón 6:4 de la mesa 1, señala que en esa mesa hay una razón de 3 personas cada 2 pizzas, en ese mismo momento recuerda que en la mesa 2 se tiene una razón de 8 personas:6 pizzas, por lo tanto para igualar las pizzas es preciso añadir 2 pizzas en la mesa 1, indica que esto obliga a añadir 3 personas en esa misma mesa, con el objetivo de no alterar la cantidad de pizza que cada uno consume (Figura 6.37).

La investigadora comenta que en la mesa 1 se obtiene que por cada 6 pizzas hay 9 personas, añade que la suma realizada se expresa simbólicamente como a continuación 6:4+3:2 = 9:6, no obstante, indica que dado que las razones se pueden escribir mediante la notación fraccionaria esa suma puede reescribirse así $\frac{6}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$, y que esto podría provocar cierta confusión dado que en la suma de fracciones no se procede a sumar horizontalmente, en esta ocasión les pregunta a los estudiantes "*¿cuándo sumamos fracciones se hace así este con este y este con este*? (señala 6 y 3 luego 4 y 2)", una estudiante responde "*no, no… mínimo común múltiplo, en cruz….*". La investigadora aprueba y comenta el aporte de la estudiante, luego insiste en el hecho de que únicamente en las situaciones de razón es válido sumar horizontalmente. Cierra la presentación del procedimiento comparando las razones 9 personas: 6 pizzas de la primera mesa y 8 personas:6 pizzas de la mesa 2.

En seguida comenta el siguiente procedimiento, éste corresponde a la estrategia denominada "*suposición de razones equivalentes*" (Valverde, 2008). La estrategia consiste en asumir que en ambas mesas se consume la misma cantidad de pizza, es decir se asume que existe una relación de proporcionalidad directa entre las 4 cantidades involucradas, después a partir de una "regla de 3" se determina la condición numérica que verifica la relación de proporcionalidad, en el caso del ejercicio (a) para que en ambas mesas se coma por igual es preciso que en la mesa 2 hayan 9 personas, sin embargo como sólo hay 8 se concluye que se come más cantidad de pizza en esa mesa (Figura 6.38).

Cierra la revisión del ejercicio (a) comentando otro de los procedimientos observados durante las fases previas de trabajo individual y colaborativo (Figura 6.39). Este procedimiento consiste en suponer que las pizzas están divididas en un número fijo de porciones, luego el total de porciones se divide entre las personas de cada mesa.

Llegado a este punto la investigadora considera que queda el tiempo justo para la resolución de la segunda tarea de la sesión, por lo anterior decide exponer la resolución del ejercicio (b) de la primera tarea asumiendo la responsabilidad completa de la presentación. En relación con este ejercicio, destacamos que los estudiantes manifestaron dificultades al resolverlo porque no se plantearon el significado de uno de los datos, se trata de la información referente a que la razón entre mesas grandes y pequeñas es de 7:7. Indica que la razón significa que por cada 7 mesas grandes hay 4 pequeñas y que la cuestión básica es observar cuántos grupos de 7 y 4 son necesarios para albergar a 240 personas. La investigadora expone paso a paso la resolución del ejercicio (Figura 6.40), destacando la relación multiplicativa clave entre el total de personas y la cantidad que se sentaba en 7 mesas grandes y 4 pequeñas (el triple).

Puesta en Común de la Tarea 7 "El Palacio Real de la Alhambra" con el G2

La investigadora inicia esta fase recordando que deben utilizar un bolígrafo de otro color para escribir las anotaciones o correcciones al trabajo realizado en el equipo. En seguida la investigadora empieza a revisar la primera parte de la tarea, indica que la escala 1 a 5 significa que cada centímetro en la maqueta A corresponde a 5 centímetros en la maqueta B, reitera la idea de que la escala proporciona la relación entre las longitudes de ambas maquetas y destaca que la magnitudes longitud y superficie son diferentes, con esto busca reforzar la idea de que la escala permite hallar longitudes correspondientes. En este momento interviene la profesora de la asignatura, dirigiéndose al grupo dice: "*mirad eso bien, porque muchos metieron ahí la pata*".

La investigadora continúa mostrando la tabla con las longitudes y áreas en ambas maquetas, para el caso de los lados y el perímetro señala brevemente cómo se obtuvo cada medida aplicando la escala 1:5. Luego, detenidamente, hace referencia al área, indica que muchos de ellos aplicaron la misma escala en la búsqueda del área de la maqueta B y que debido a eso ella y la profesora les cuestionaron, equipo por equipo, cómo se obtiene el área de un rectángulo. Les recuerda que el área de un rectángulo se obtiene multiplicando las dos dimensiones. Basándose en los datos de la tabla (Figura 6.43) comenta que la razón entre los lados y en general entre las longitudes es 5, mientras que la razón entre las áreas es 25, agrega que a partir de la figura se puede observar que el área del rectángulo no ha crecido 5 veces. Luego pregunta "*¿Qué podemos decir de esos dos números, 5 y 25?*" El estudiante A12 responde "*que 5 al cuadrado es 25*".

La investigadora aprueba el aporte del estudiante y reitera que 25, que es la razón entre las áreas, es el cuadrado de 5, que es la razón entre los lados. En seguida comenta el segundo ejercicio relativo a la Terraza de Comares, al igual que en el caso anterior comenta cómo se obtiene las longitudes y el área en la maqueta B, contando rápidamente las unidades cuadradas señala que el área no ha crecido 5 veces, sino 25 veces (Figura 6.43).

Con el objetivo de inducir la expresión de la conjetura la investigadora continúa ilustrando una situación ajena a la tarea, muestra la Figura 6.44 en la que aparecen dos cuadrados semejantes relacionados mediante una nueva escala, a saber 1:3. Para este caso la investigadora reitera, paso a paso, cómo se obtiene la medida del lado del cuadrado color verde y cómo se obtiene el área, además indica cómo hallar la razón entre los lados y la razón entre las áreas. Finalmente subraya que 9 es el cuadrado de 3.

De inmediato la investigadora comenta que en los tres casos se cumple lo mismo, y que la observación de esa regularidad permite enunciar la conjetura de la siguiente manera *"…en dos figuras planas semejantes cuya razón entre los lados es k, la razón entre las áreas es k cuadrado…"*, muestra la diapositiva de la Figura 6.45.

Aunque no trabajaron la segunda parte de la tarea, relativa a la relación entre la razón de las aristas y la razón de los volúmenes, la investigadora procede a mostrar la tabla con los datos correspondientes, tapando la relación entre 125 y 5, les cuestiona: "*a ver… de forma sencilla cuál de ustedes me dice la relación…*" Muchos de los estudiantes dicen a la vez "*…al cubo, k al cubo*"

La investigadora aprueba el aporte de los estudiantes y resume la conjetura diciendo que "*en dos prismas semejantes si "k" es la razón entre las aristas, la razón entre los volúmenes va ser "k" al cubo*", muestra la diapositiva de la Figura 6.47. En el cierre de la sesión la investigadora da indicaciones para el trabajo fuera de clase, agradece la participación de los estudiantes y se despide de ellos.

6.4.3 Análisis Preliminar de la 4ª Sesión en Ambos Grupos

Observamos que en ambos grupos la dinámica de trabajo de aula se consolidó. El tiempo dedicado en el desarrollo de cada fase se ajustó de mejor manera al tiempo estimado en la planificación. En los dos grupos, durante la fase individual cada estudiante mostró su esfuerzo personal en la resolución de la tarea, sin embargo destacamos que en el trabajo colaborativo los estudiantes del G2 mostraron un mayor compromiso y responsabilidad por aportar razonamientos justificados, por aportar ideas o por discutir los aportes de sus compañeros. En este sentido consideramos que la dinámica de aula se siguió más adecuadamente en el G2 que en el G1, creemos que el número de estudiantes participantes, la experiencia previa en la asignatura y el papel del docente colaborador contribuyeron positivamente en esta situación.

Creemos que la limitación de tiempo para el desarrollo de la intervención derivó en un deterioro de la calidad de la puesta en común. En esta sesión la investigadora asumió una mayor responsabilidad en la revisión de las tareas así que la participación de los estudiantes fue escasa.

En relación con la resolución de la tarea "Compartiendo pizza", consideramos que la experiencia vivida con el G1 constituyó una base importante en la toma de decisiones para el desarrollo de la misma en el G2. Dado que en el G1 se observó una predilección por comparar las razones buscando el valor racional de las mismas mediante la división, en el G2 y durante la fase colaborativa, se les pidió que utilizaran al menos dos estrategias distintas para comparar esas razones. Esta decisión podría haber influido en el logro del objetivo de investigación orientado a suscitar el uso de estrategias de comparación de razones diferentes a la búsqueda del valor racional de la razón, sin embargo la confirmación requiere de un análisis más detallado de las producciones de los estudiantes, este estudio se realizará en el análisis retrospectivo de las sesiones. Debido a que en el G1 no se les pidió que resolvieran el ejercicio de distintas maneras creemos que es posible que los estudiantes subestimaron la dificultad de la tarea y por el contrario es posible que los estudiantes del G2 reconocieran la relevancia de estudiar distintas formas de abordar la resolución de un problema.

En relación con la segunda parte de la tarea "Compartiendo pizza" observamos que los estudiantes del G2 manifestaron más dudas que los del G1. En este sentido apuntamos que una posible explicación radica en que la revisión de ideas conceptuales realizada al inicio de la sesión fue más detallada en el G1 que en el G2. En este último grupo se aplicó una prueba individual de la asignatura, ajena a la experimentación, en la resolución de la misma los estudiantes dedicaron más de 10 minutos, esto motivó a la investigadora a resumir la recapitulación de ideas. Previamente consideramos que el análisis retrospectivo de la 4ª sesión, en particular del ejercicio (b), permitirá conocer la manera en la que los estudiantes interpretaron la expresión "la razón es de 7:4" y creemos que será posible comparar tales interpretaciones con los aportes dados en la tarea "Preferencia en el refresco de cola" de la 2ª sesión, en la que aparece la expresión "la razón es de 3 a 2".

En ambos equipos no se manifestaron inquietudes o dudas relacionadas con la idea de semejanza de figuras planas, cuando la investigadora recapituló tales contenidos los estudiantes se manifestaron receptivos. No obstante en relación con el término "conjetura" expresaron no saber de qué se trataba esto motivó a la investigadora a presentar el ejemplo referente a la "*Conjetura de Goldbach*", las manifestaciones de los estudiantes confirmaron la escasa experiencia de los mismos en la expresión de conjeturas, no obstante recalcamos que en el desarrollo de las prácticas de la asignatura de distintos teman han experimentado la observación de relaciones, patrones y regularidades.

En relación con la tarea "El palacio real de la Alhambra" observamos que en el G1 varios de los equipos exhibieron el fenómeno de la ilusión de la linealidad, esto significa que aplicaron la misma relación multiplicativa para hallar las medidas de las longitudes, superficies y volúmenes. Esto era esperado, sin embargo durante la fase colaborativa persistieron en su razonamiento a pesar de que la investigadora les planteara la posibilidad de usar la fórmula del área del rectángulo con el objetivo de provocarles un conflicto. Consideramos que es necesario analizar con más detalle los trabajos hechos en el aula y más aún estudiar las producciones posteriores de los estudiantes para observar si tales razonamientos permanecieron a pesar de la discusión en equipos y de la puesta en común.

En el G2 observamos menos dificultades en la expresión de la conjetura, aunque la expresión de la misma no fuera del todo correcta. A diferencia del G1, cuando se les sugirió usar la fórmula del área llegaron a ver que no era posible tener resultados distintos e intentaron determinar el error. Sin embargo destacamos que, durante el trabajo individual y colaborativo, varios estudiantes y equipos incurrieron en la ilusión de la linealidad.

Tras la aplicación de la tarea "El Palacio Real de la Alhambra" y en términos generales creemos que el estudio de la ilusión de la linealidad amerita realizar un experimento de enseñanza, exclusivamente dedicado a estudiarlo y a promover su erradicación. La observación inicial de las actuaciones de las estudiantes, relativas a la expresión de conjeturas, nos motiva a estudiar con mayor profundidad las competencias matemáticas de comunicación y argumentación de estos grupos; esperamos que el análisis retrospectivo nos permita describir con detalle el nivel de competencia mostrado en cada fase de la experimentación. En la Tabla 6.16 mostramos algunas consideraciones que han surgido a partir de la observación inicial de la información, se han anotado con la idea de orientar una futura aplicación del diseño de la 4ª sesión en otro contexto, no obstante esperamos que a partir del análisis retrospectivo surjan otras contribuciones orientadas a la mejora del diseño.

Tabla 6.16. *Consideraciones para una futura aplicación del diseño de la 4ª sesión*

	Consideraciones
Sobre las Tareas	Para el desarrollo de la tarea "Compartiendo pizza" consideramos que podría ser más provechoso pedir a los estudiantes que exploren y utilicen distintas estrategias para comparar las razones desde la 1ª fase de la dinámica de aula. Consideramos que la recapitulación previa a la tarea "El Palacio Real de la Alhambra" relacionada con el término "conjetura", podría extenderse de modo que en otra sesión o momento previo se trabaje la expresión de conjeturas sencillas. El ejercicio relativo a la expresión de la conjetura podría guiarse con la inclusión de otro ejercicio previo en el que induzca la observación de la relación entre las razones de longitudes y superficies o volúmenes.
Sobre el Contenido	A partir de lo observado en el desarrollo de la tarea "Compartiendo pizza" consideramos que el significado de la expresión "la razón es de a:b" aún no ha sido comprendida por la totalidad de los estudiantes. Llegado a este punto de la experimentación hemos observado que para promover la comprensión de estos alumnos, en relación con la razón y la proporcionalidad, es preciso trabajar en más de 4 sesiones. Consideramos que para el tratamiento de la relación entre la razón de longitudes y la razón de áreas o volúmenes es preciso dedicarles más de una sesión debido a que por un lado este contenido matemático requiere la recapitulación o estudio previo de la semejanza de figuras, y por otro lado los estudiantes de este estudio confirman la persistencia del fenómeno de la ilusión de linealidad, el cual no es sencillo de suprimir. Una posibilidad es dividir los contenidos en dos o tres sesiones, una dedicada a las relaciones lineales entre longitudes de figuras u objetos semejantes y otra sesión que atienda la relación entre las razones de las longitudes, las superficies y los volúmenes. También creemos que el exponerles en qué consiste tal fenómeno, compartir algún artículo de investigación relacionado o ejemplificarlo con otras situaciones podría resultar beneficioso para los futuros maestros.

Capítulo 7. Análisis Retrospectivo de las Sesiones

En este capítulo se aborda el análisis retrospectivo de las sesiones que junto con el estudio de casos, que se presenta en el Capítulo 8, conforman el análisis retrospectivo de la experimentación. La metodología de estos análisis se ha descrito en el Capítulo 5.

El análisis retrospectivo de las sesiones se ha estructurado tomando en consideración las cinco dimensiones de análisis: (1) conocimiento matemático manifestado por los estudiantes en la resolución de las tareas, (2) balance de las tareas aplicadas, (3) logro de las expectativas de aprendizaje supuestas en la planificación de las tareas, (4) papel de la investigadora en la institucionalización de los conocimientos, y (5) metodología de trabajo en el aula.

Presentamos el análisis de las dimensiones (1), (2) y (3) en la sección de análisis correspondiente a cada tarea. Los hallazgos encontrados en relación con estas dimensiones se presentan y organizan de acuerdo con las categorías e indicadores de cada dimensión del análisis.

En cada una de las tareas se han puesto de manifiesto distintos conocimientos asociados a los focos de contenidos implicados en las mismas, estos conocimientos constituyen la principal dimensión de análisis de nuestro estudio. El análisis del conocimiento matemático se ha hecho sobre las producciones orales y escritas de los equipos, no obstante las actuaciones estudiadas corresponden a concepciones manifestadas por los individuos, quienes están participando en un proceso social de resolución de problemas. Nos hemos interesado en detectar la presencia o ausencia de tales concepciones en cada uno de los equipos participantes de la fase colaborativa.

7.1 TAREA 1

7.1.1 Conocimientos Manifestados en la Resolución Colaborativa

Nuestro interés por conocer las concepciones que muestran los estudiantes, en ese momento inicial, en torno a la razón, la fracción, el porcentaje, y las relaciones entre esas nociones, condujo a la detección de distintas aproximaciones, hemos separado las observaciones según estos cuatro focos. En cada caso ejemplificamos las actuaciones con fragmentos de los trabajos en equipos de ambos grupos (G1 y G2), éstos proceden de las transcripciones orales y de las producciones escritas. Destacamos que en los ejemplos tomados de las producciones escritas de los equipos aparecen anotaciones en color morado, éstas no forman parte de la resolución de la tarea construida en el equipo sino que fueron tomadas por uno o varios miembros durante la puesta en común.

7.1.1.1 Acercamientos en Relación con la Noción de Razón

En ambos grupos de estudiantes, en relación con la noción de razón, se manifestó alguno de los siguientes acercamientos:

- Razón como descripción cuantitativa de las partes.
- Como una descripción de la parte con el todo usando términos “de cada”, “por cada”, “x es a y”, “x” a “y”.
- Razón como relación aditiva entre las cantidades.
- Razón como una descripción verbal de la fracción.
- Identificación de la razón con la regla de tres.
- Desconocimiento del contenido.
- Otros.

En la Tabla 7.1 se recogen los equipos que expresan cada acercamiento y a continuación se dan ejemplos de dichas manifestaciones.

Tabla 7.1. *Acercamientos sobre la noción de razón mostrados en cada equipo*

G1													
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
NR1				*	*		*	*		*		*	*
NR2	*	*	*		*	*							*
NR3										*			
NR4		*					*						
NR5					*						*		
NR6		*			*				*		*		*
NR7	*												

G2								
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
NR1							*	*
NR2	*	*	*	*		*		*
NR3								
NR4		*	*	*	*	*		
NR5								
NR6			*			*		
NR7					*			

Acercamientos

NR1: Razón como descripción cuantitativa de las partes.
NR2: Como una descripción de la parte con el todo usando términos “de cada”, “por cada”.
NR3: Razón como relación aditiva entre las cantidades.
NR4: Razón como una descripción verbal de la fracción.
NR5: Identificación de la razón con la regla de tres.
NR6: Desconocimiento del contenido.
NR7: Otros

NR1. Razón como descripción cuantitativa de las partes

En el G1 una de las ideas mostrada con mayor frecuencia por los estudiantes es que al aplicar la noción de razón, se refieren cuantitativamente a las partes que han de comparar, dicen cuánto hay de una parte y cuánto hay de la otra, ya sea considerando las dos partes (regiones cultivadas y no cultivadas) o una parte y el todo (regiones cultivadas y el total de regiones). *No utilizan frases o términos asociados a la razón tales como "por cada" o "de cada"*. En este caso, aunque la descripción no es incorrecta, consideramos que no se ajusta a la naturaleza multiplicativa de la razón en el sentido de que no hay muestras de una inferencia acerca de la relación multiplicativa entre las cantidades, ni tampoco se muestra un uso de términos o lenguaje asociado a la razón. De los trece equipos participantes en la 1ª sesión del G1 observamos que en seis de ellos se muestra esa idea. Presentamos como ejemplo un párrafo que corresponde al estudiante A12 del equipo E10:

A12: … podemos decir que en el primer… tenemos dos partes cultivadas y tres partes sin cultivar, en el segundo campo… de nueve parcelas que contiene… solamente una está cultivada y las ocho restantes sin cultivar y el tercer campo de seis porciones en las que está dividido ese campo cuatro de ellas están cultivadas y dos de ellas están sin cultivar…

En el G2 únicamente dos de los ocho equipos mostraron evidencias de este acercamiento, en el que también se han incluido actuaciones en las que para describir la razón se recurre a la relación parte-todo, en ausencia de términos tales como *"por cada" o "de cada"*. Ejemplo de esto se presentó en el equipo E7:

D7: la de abajo sería, cuatro partes de seis están cultivadas
C7: sí

NR2. Como una descripción de la parte con el todo o entre las partes usando términos "de cada", "por cada"

En el G1 otro de los acercamientos más frecuentes fue aplicar la razón en la comparación de las cantidades de campos que hay de cada tipo: cultivados, sin cultivar o el total. La distinción con el acercamiento descrito anteriormente es que en este caso utilizaron términos como "*de cada*", "*por cada*", "*x es a y*", "*x*" a "*y*". Consideramos que el uso de estos términos implica un reconocimiento, aunque superficial, del lenguaje asociado a este concepto. Reconocemos que esta es una expresión verbal de una normalización de la razón ligada a la unidad (A. Fernández, 2001). Observamos que en seis de los trece equipos se muestra esta idea. En la Figura 7.1 presentamos un ejemplo, procedente de la producción escrita del equipo E3 del G1.

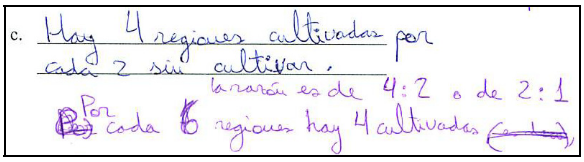

c. Hay 4 regiones cultivadas por cada 2 sin cultivar.
la razón es de 4:2 o de 2:1
~~Por~~ Por cada 6 regiones hay 4 cultivadas

Figura 7.1. Acercamiento NR2 manifestado en el equipo E3 del G1

En el G2, el acercamiento más frecuente fue *NR2,* se presentó en seis de los ocho equipos. Consideramos que el uso de los términos “de cada” o “por cada” marca una diferencia entre el reconocimiento de la razón como una relación dinámica o como una relación estática, cuando se dice “de cada” o “por cada” implícitamente se considera la posibilidad de que haya otros pares de cantidades que cumplen la relación, es decir cada vez que haya seis regiones habrá cuatro cultivadas. Por ejemplo mostramos un fragmento del equipo E8.

C11: tú que entendías, la noción de razón era…
A11: era lo de cuatro…
C11: de cada seis regiones, hay cuatro cultivadas
A11: eso, ¿no?
B11: pues de cada seis regiones hay cuatro cultivadas

<u>NR3. Razón como relación aditiva entre las cantidades</u>

Se manifiesta sólo en el equipo E10 del G1, observamos que aunque los estudiantes consideran las dos partes establecen un razonamiento aditivo. En el G2 ninguno de los equipos manifestó tal acercamiento.

B12: cada dos sin cultivar
A12: no, porque tú tienes cuatro que tienes que meter en dos espacios vacíos, te sobran dos, por tanto hay una relación de cada dos cultivados…
B12: sobran dos
A12: hay cero sin cultivar, esa sería la relación en este caso…

<u>NR4. Razón como una descripción verbal de la fracción</u>

En el G1 algunos estudiantes identifican razón y fracción, desde alguna perspectiva, por ejemplo consideran que la razón es una descripción verbal o descripción con palabras de una fracción con significado parte-todo. Este acercamiento se presentó en tres de los trece equipos Por ejemplo, la aportación del estudiante F6 en el equipo E7.

F6: …bueno, en esto, pues yo he hecho esta razón pero es como un… una fracción pero expresado con palabras…

En el G2 tal acercamiento se manifestó en cinco de los ocho equipos, siendo así el segundo acercamiento más frecuente en este grupo, en el que observamos un frecuente uso del lenguaje de las fracciones para referirse a la razón. Creemos que el tratamiento dado en el estudio de los números racionales, en una lección previa, de la asignatura podría ser la causa de la identificación entre la fracción y la razón evidenciada en este grupo. Por ejemplo mostramos un fragmento del trabajo del equipo E4, además mostramos en la Figura 7.2 la producción escrita de este equipo.

A10: de seis, cuatro son cultivadas, cada seis, cuatro son cultivables
C10: cuatro sextos claro y… dos sextos es el resto que queda sin cultivar

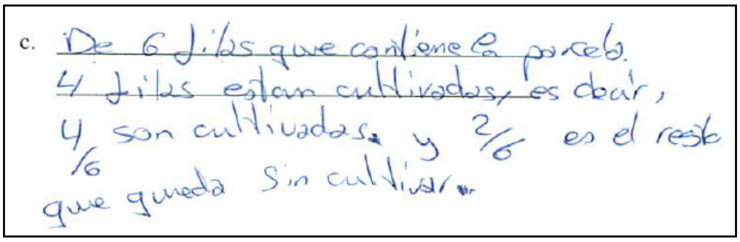

c. De 6 jibs que contiene la parcela 4 jibs estan cultivados, es decir, 4/6 son cultivadas, y 2/6 es el resto que queda sin cultivar.

Figura 7.2. Acercamiento NR4 manifestado en el equipo E4 del G2

NR5. Identificación de la razón con la regla de tres.

Algunos estudiantes, en dos de los trece equipos del G1, relacionaron la razón con la regla de tres. En el G2 no se manifestó tal acercamiento. Mostramos la intervención en el equipo E5.

A5: igual y es una regla de tres, si en tantos hay tantos cultivos entonces en equis…
B5: ¿será?, es que eso de la razón… bueno pues ya está.

NR6. Desconocimiento del contenido

En seis de los trece equipos del G1 al menos uno de los integrantes declaró no acordarse qué era una razón o no sabía de qué se trataba. Presentamos a modo de ejemplo el caso del equipo E9, en donde decidieron simplemente no hacerlo.

B11: y ahora la noción de razón no sabemos lo que significa…
A11: …hay que poner que ninguna lo tiene claro…

Sólo en dos de los ocho equipos del G2 alguno de los estudiantes expresó un desconocimiento del contenido.

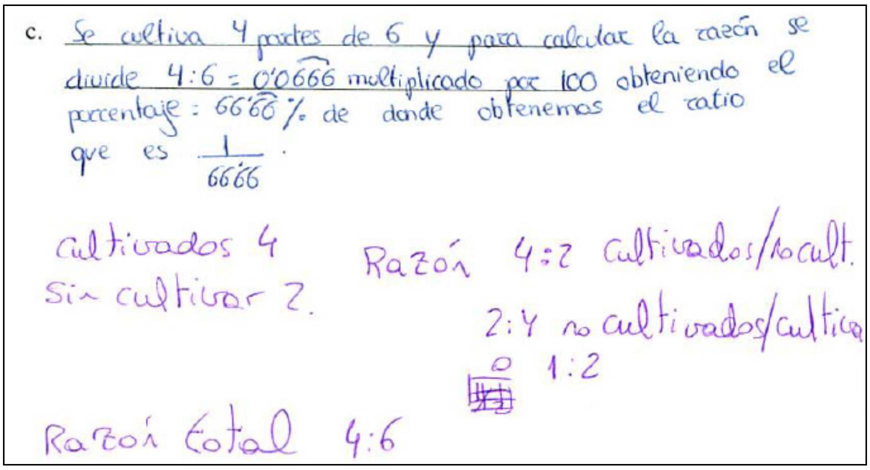
NR7. Otros

En este grupo de actuaciones se han considerado aquellas que ponen de manifiesto la aplicación de conocimientos procedimentales vinculados con la razón, tanto adecuados como inadecuados.

En dos de los equipos del G1 (E1 y E5) observamos que los estudiantes recurrieron a la división de los elementos para así conocer el valor racional de la razón, este procedimiento despoja a la razón de su sentido relacional. Mostramos como ejemplo un fragmento procedente del equipo E1 del G1.

B1: y para calcular la razón dividimos (C1 dice: se divide)
C1: para calcular la razón se divide…

Una aproximación puntual y que consideramos inadecuada se mostró en el equipo E1 del G1, los estudiantes relacionan la razón con el porcentaje, consideran que a partir del porcentaje que representa la relación entre 4 y 6 (66,6%) pueden obtener una fracción con numerador 1 y denominador el porcentaje, según ellos ésta representa a la razón entre las cantidades, a la cual denominan ratio. Esta manifestación se presentó en la resolución del ejercicio (c) de la tarea 1. En la Figura 7.3 recogemos la producción escrita de este equipo, donde se constata esta aproximación.


c. Se cultiva 4 partes de 6 y para calcular la razón se divide 4:6 = 0'0666 multiplicado por 100 obteniendo el porcentaje: 66'66 % de donde obtenemos el ratio que es $\frac{1}{6666}$.

cultivados 4
Sin cultivar 2.

Razón 4:2 cultivados/no cult.
2:4 no cultivados/cultiva
o 1:2

Razón total 4:6

Figura 7.3. Ejemplo de los acercamientos sobre la razón catalogados en "Otros"

En el G2, el equipo E5 manifestó otro acercamiento puntual en el que se hace referencia a la razón como "*la relación entre dos cantidades con igual medida*", esta idea fue propuesta por uno de los miembros quien al parecer la tomó de sus notas, el resto del equipo mostró no comprender esa idea.

Resumen

Con base en el estudio de las actuaciones de los estudiantes constatamos que, respecto a la razón, los estudiantes del G1 mostraron con mayor frecuencia tres acercamientos: la razón como descripción cuantitativa de las partes que forman el todo (NR1), la descripción de la razón como relación parte-todo usando términos como "*de cada*" o "*por cada*" (NR2), y en igual medida expresaron un desconocimiento del concepto (NR6). Además señalamos que en los equipos E2, E5, E7, E10 y E13 se observó una mayor riqueza de acercamientos a la noción de razón, esto se traduce en una mayor participación e implicación en el desarrollo de la tarea que el mostrado en los otros equipos.

En el G2, los acercamientos con mayor frecuencia fueron NR2 y NR4, éste último referido a la razón como una descripción verbal de la fracción (parte-todo), prevaleciendo el uso de expresiones propias de las fracciones, lo que nos permite afirmar que los estudiantes de este grupo identifican ambas nociones. Los equipos E2, E3, E4, E6 y E8 mostraron dos acercamientos distintos sobre la razón.

7.1.1.2 Acercamientos en Relación con la Noción de Fracción

Aunque la tarea estaba ideada con el fin de estudiar la comparación parte-parte observamos que todos los equipos de ambos grupos, durante la fase de trabajo colaborativo, hicieron referencia a la relación de la parte cultivada con respecto al total, este aspecto se discutirá con más detalle en el apartado "Balance sobre la Tarea 1" (Apartado 7.1.5), relativo a la valoración de la tarea. No obstante, los estudiantes no mostraron ningún tipo de dificultad en describir la relación parte-todo en este ejercicio, que es el (a) de la tarea, usaron descripciones verbales tales como "la región cultivada son dos quintos del total” y la notación usual de fracciones “$\frac{2}{5}$ del terreno está cultivado”. Veamos un ejemplo extraído del trabajo del equipo E2 del G1:

A21: si hay cinco partes y hay dos cultivadas…
*B21: pues… **dos quintos**, pero ¿cómo lo ponemos?...*
*D21: ...pues la parte del terreno cultivada corresponde a **dos quint**os del terreno mientras que la parte, que queda libre sería **tres quintos** ¿no?...*

<u>*Tipo de comparación mostrada*</u>

A partir de las producciones individuales, en equipo, y de las aportaciones sugeridas en la puesta en común observamos que de manera general los estudiantes de estos grupos resolvieron los tres ítems de la tarea atendiendo a la comparación parte-todo (codificada con Comp. P-T). Tomaron como unidad de referencia el campo total de cultivo y aplicaron la noción de fracción (parte-todo), porcentaje y razón. A continuación presentamos tres ejemplos de las comparaciones mostradas concernientes a cada uno de los ejercicios de la tarea, los mismos proceden del trabajo en equipos del G1.

En el equipo E6 observamos como con respecto a la aplicación de la noción de fracción en el ejercicio (a) aplican el significado parte-todo, tomando como unidad todo el campo.

*A4: tenemos un campo de…que está partido **en cinco partes***
C4: regiones… y solamente dos están cultivadas…
*B4: **el concepto de fracción se representaría como numerador dos, la zona cultivada y denominador cinco las zonas totales***
*C4: ...ponemos arriba el dos porque son las partes cultivadas y ponemos **abajo el cinco porque son las partes cultivadas y no cultivadas del campo***

En la Figura 7.4 recogemos la resolución mostrada por este equipo en la hoja de trabajo.

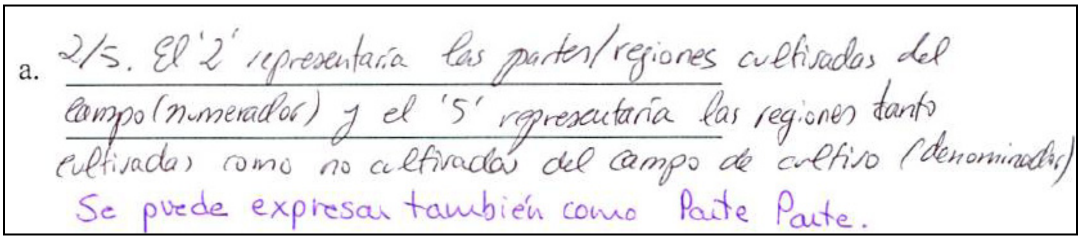

a. 2/5. El '2' representaría las partes/regiones cultivadas del campo (numerador) y el '5' representaría las regiones tanto cultivadas como no cultivadas del campo de cultivo (denominador)
Se puede expresar también como Parte Parte.

Figura 7.4. Comparación parte-todo, manifestada en el equipo E6 del G1

En el equipo E8, en la resolución del ejercicio (b), toman como unidad el total del campo que está dividido en 9 regiones o parcelas de las cuales 1 está cultivada.

A7: el ejercicio (b) usa la idea de porcentaje
*C7: ... en el ejercicio (b) tenemos un noveno, **si nueve novenos es el cien por cien** un noveno será “x”, por tanto multiplicamos cien por uno y partido nueve y como resultado nos da que tenemos un once coma uno por ciento **del total**, del… de la región cultivada...*

El equipo E5 describe la razón entre las regiones cultivadas y el total de regiones.

*A3: mira, **razón** yo creo que va a ser…*

A3: pon ***cuatro de cada seis regiones*** *están cultivadas…*
C3: y las dos restantes ¿qué haces?
A3: son ***cuatro de cada seis****, son cuatro de seis*

Aunque teníamos la expectativa de que podrían expresar distintas relaciones también habíamos considerado la posibilidad de que la mayoría de estudiantes observaría la parte-todo, hecho que no nos sorprendió pues de acuerdo con investigadores como Llinares y Sánchez (1988), la relación parte-todo ha gozado de un papel destacado en la educación matemática por distintas razones que presentamos a continuación:

- La relación parte-todo constituye la piedra angular sobre la que se van a desarrollar algunos de los otros significados de las fracciones.
- La "naturalidad" de la relación parte-todo se ve reflejada en la gran atención que normalmente recibe en el desarrollo de las matemáticas escolares.
- Según Ellerbruch y Payne (citados en Llinares y Sánchez, 1988) para realizar la introducción al concepto de fracción se debe usar una interpretación simple como la parte-todo. Además, ésta constituye un buen modelo para dotar de significado a la suma de fracciones.

No obstante, como señalamos en el Capítulo 2, compartimos con múltiples investigadores (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992; Kieren, 1988; Lamon, 1993, 2007; Llinares y Sánchez,1988; Bezuk y Sowder, 1993) la idea de que en la enseñanza, en cualquier nivel educativo, es necesario ir completando la visión parte-todo con los otros significados del número racional con el fin de evitar las limitaciones conceptuales que se podrían derivar, por ello creemos que es preciso que el futuro maestro de primaria conozca y comprenda los distintos significados de la fracción en su amplia complejidad.

Además del peso que tiene el significado parte-todo es evidente que la indicación o enunciado del problema no fue interpretado por los estudiantes como se esperaba, este aspecto se comenta con más detalle en el apartado "Balance sobre la Tarea 1" (Apartado 7.1.5) relacionado con el estudio de las fortalezas y debilidades de la misma.

Resumen

A modo de síntesis se tiene que todos los equipos de ambos grupos, en el ejercicio (a), describieron la relación parte-todo mediante la notación y lenguaje usual de la fracción, no manifestaron desconocimiento ni olvido de estos aspectos de la fracción. No obstante indicamos que el objetivo de la tarea se refería a describir una relación del tipo parte-parte. Concluimos que las actuaciones de los estudiantes pueden deberse a una debilidad de la tarea.

7.1.1.3 Acercamientos en Relación con la Noción de Porcentaje

Destacamos que el ejercicio (b) propuesto en la Tarea 1busca conocer la forma en que los estudiantes describen la comparación de dos partes usando la idea de porcentaje. Durante el desarrollo de la fase colaborativa emergieron distintas ideas relacionadas con el porcentaje, en ese período los estudiantes tuvieron la oportunidad de expresar sus resoluciones fueran éstas correctas o no.

La comparación del tipo parte-todo también se presentó en las resoluciones de este ejercicio. Dado que el campo estaba dividido en nueve parcelas, de las cuales sólo una estaba cultivada, todos los equipos buscaron el porcentaje relativo a una parte de nueve, aplicando diferentes procedimientos entre los que destaca el uso de la regla de tres. Tales técnicas de cálculo estuvieron desprovistas de otros razonamientos.

Los equipos de ambos grupos (G1 y G2), en relación con la noción de porcentaje, manifestaron alguno de los siguientes acercamientos:

- Uso de la regla de tres para hallar el porcentaje
- Uso de otras técnicas para hallar el porcentaje
- Identificación de la unidad absoluta con la relativa

En la Tabla 7.2 se muestran los distintos acercamientos expresados en cada equipo, en relación con la expresión porcentual entre la cantidad de regiones cultivadas y el total de regiones.

Tabla 7.2. *Acercamientos en relación con la noción de porcentaje*

G1													
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
NP1							*	*					
NP2	*	*	*	*		*	*	*				*	
NP3					*				*				*
NP4										*	*		

G2								
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
NP1		*	*					*
NP2	*			*				*
NP3					*		*	
NP4						*		

Acercamientos

NP1: Uso de la regla de tres para hallar el porcentaje
NP2: Uso de otras técnicas para hallar el porcentaje
NP3: Identifican la unidad absoluta con la relativa
NP4: Ninguna

NP1. Uso de la regla de tres para hallar el porcentaje

Dos equipos del G1 y tres del G2 manifiestan explícitamente el uso de la regla de tres para hallar el porcentaje. Ejemplificamos cómo en el equipo E8 (del G1) uno de los participantes propone la regla de tres para averiguar ese porcentaje, su compañero le comenta otro procedimiento. Sin embargo no comparan las dos técnicas usadas, su interés se centra en el resultado que ha sido el mismo.

C7: ...en el ejercicio (b) tenemos un noveno, si nueve novenos es el cien por cien un noveno será "x", por tanto multiplicamos cien por uno y partido nueve y como resultado nos da que tenemos un once coma uno por ciento del total, del… de la región cultivada, ¿qué piensas?
B7: yo pienso lo mismo pero en vez de regla de tres yo lo que hecho un noveno de cien y he multiplicado lo mismo, uno por cien partido por nueve, y me ha dado el mismo resultado y ya está.

A partir de esta observación surge una pregunta a tomar en cuenta en futuros estudios y constituye una línea abierta del nuestro ¿en estos grupos de estudiantes se tiene conocimiento de por qué es apropiado utilizar la regla de tres en la búsqueda de porcentajes?

NP2. Uso de otras técnicas para hallar el porcentaje

En este acercamiento los estudiantes reconocen que las 9 partes corresponden al 100%. Observamos que en estos grupos, para calcular el porcentaje, se utilizaron técnicas tales como:

- Dividir 100 entre 9.
- Dividir 1 entre 9 y luego multiplicar por 100.
- Calcular 1/9 de 100
- Hallar la expresión decimal de la fracción 1/9 y después multiplicar por 100.

Aunque los procedimientos lleven al mismo resultado, consideramos que las aproximaciones para llegar a ese cálculo son distintas, en un caso se toma la fracción 1/9 como operador sobre 100 (caso c y d), en otros casos ni se menciona a la fracción y se opera sobre números naturales (caso a y b).

En el G1, ocho de los trece equipos aplican estas técnicas y en el G2 las aplican tres de los ocho equipos. Destacamos que en el G2 únicamente el equipo E8 mostró el uso simultáneo de la regla de tres y de otro procedimiento.

Presentamos un fragmento de la conversación dada en el equipo E2 (del G1), éste ejemplifica el uso de tales técnicas.

B21: multiplicando la fracción un noveno por cien… y expresándolo en forma de porcentaje,… porque saldría… ¿no?… saldría…

NP3. Identifican la unidad absoluta con la relativa

Es una concepción errónea manifestada. Se presenta cuando relacionan cada una de las nueve parcelas con un 1% o con un 10%, o sea que identifican la cantidad absoluta con la relativa (porcentual). Destacamos que tal acercamiento se manifestó en los dos grupos, en el G1 la mostraron tres equipos y en el G2, dos equipos.

A partir de la información mostrada en las conversaciones de los equipos del G2 observamos cómo relacionaron las 9 partes de todo el terreno con un 90%. Mostramos un caso que ejemplifica la situación descrita anteriormente. Del equipo E7:

D7: ¿esto qué era? Yo he puesto el 10% del campo

C7: yo también pero con dudas
A7: yo puse, como aquí son…, yo puse que esto no era un 100%, yo puse que esto era un 90%, y que de ese 90%, 10 estaba cultivado pero diciendo que esto es un 90%

Otra manera concreta en la que se manifiesta el acercamiento NP3 corresponde a la relación que establecen los estudiantes entre cada una de las nueve parcelas con un 1% del total, las conversaciones de dos equipos presentan evidencia de esta idea. Por ejemplo en el equipo E9 (del G1) se manifiesta esta idea, la cual se fue modificando a lo largo de la conversación hasta llegar a relacionar cada parcela con el 10%, tal y como se recoge en la Figura 7.5.

B11: es que si el cien por cien son los nueve cuadritos
A11: un cuadrito sería el uno por cien
B11: un cuadrito se podría decir que es el uno por ciento entonces el uno por ciento representa la región cultivada… y la no cultivada…

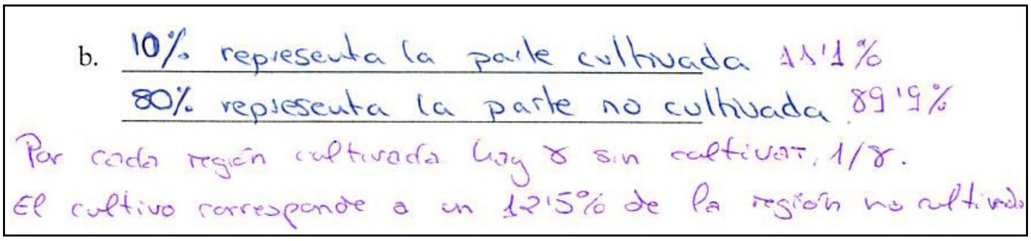

b. 10% representa la parte cultivada 11'1%
80% representa la parte no cultivada 89'9%
Por cada región cultivada hay 8 sin cultivar, 1/8.
El cultivo corresponde a un 12'5% de la región no cultiva

Figura 7.5. Acercamiento NP3 manifestado en el equipo E9 del G1

Resumen

En relación con el porcentaje, los estudiantes de ambos grupos mostraron acercamientos procedimentales; en ninguno de los equipos se expresó un razonamiento o argumento, no procedimental, que justificara la respuesta dada por la mayoría de equipos. Al igual que en el caso de la razón y la fracción, todos los estudiantes expresaron la relación parte-todo en lugar de la relación porcentual entre las dos partes.

Destacamos que en cinco equipos, procedentes de ambos grupos, se mostró una ausencia de comprensión de lo que es el 100%, o lo que es el “todo” o “referencia” de la comparación. La identificación de la cantidad absoluta y la cantidad relativa (una unidad es un 1% o un 10%) plantea la necesidad de trabajar más sobre la noción de porcentaje en el proceso de formación de maestros de primaria.

7.1.1.4 Relación Entre las Tres Nociones

Además de conocer las concepciones que en relación a la razón mostrarían los estudiantes, nos interesaba conocer de qué manera relacionaban este contenido con los otros subconstructos: el porcentaje y la fracción.

Observamos que los estudiantes de ambos grupos, en relación con la fracción, porcentaje y razón, muestran relaciones de distinta naturaleza. Se manifestó alguno de los siguientes acercamientos:

- La razón es un posible significado de la fracción.
- Relación procedimental entre fracción y porcentaje.
- Relaciones erróneas entre las nociones.

En la Tabla 7.3 se recogen las relaciones detectadas y los equipos que las expresan, presentamos también ejemplos de tales manifestaciones.

Tabla 7.3. *Acercamientos sobre la relación entre la razón, porcentaje y fracción*

G1													
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
Rel.1		*					*						*
Rel.2	*	*				*	*	*		*			*
Rel.3	*												
Rel.4			*	*	*				*		*	*	

G2								
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
Rel.1				*	*			
Rel.2				*				*
Rel.3								
Rel.4	*	*	*					

Relaciones Detectadas

Rel.1: La razón como posible significado de la fracción
Rel.2: Relación procedimental entre fracción y porcentaje
Rel.3: Relaciones erróneas entre las nociones
Rel.4: No manifiestan algún tipo de relación

Rel.1. La razón como posible significado de la fracción

En tres de los trece equipos del G1 sus miembros identificaron la relación señalada en la clase de teoría, en la que se ubica a la razón como uno de los posibles significados del número racional (en el aula se trabajó como significados de las fracciones). Sin embargo, los aportes hechos en este sentido apuntan a que durante la clase únicamente se dijeron los epígrafes o sea que no profundizaron en ellos. Por ejemplo mostramos lo dicho en el equipo E2.

C21: en los apuntes sí sale una fracción…
D21: y esto qué es ¿operador? y no ha dicho Isidoro que había tres maneras, ¿no ha dicho que había tres maneras?
D21: y si hay tres maneras uno es expresado en dos quintos, otro expresado de porcentaje y otro tiene que ser…
A21: es que lo otro es operador
B21: pero es que ahí no aparece el porcentaje

En el G2, únicamente dos de los ocho equipos evidencian que reconocen la razón como una de las posibles interpretaciones del número racional. Observamos que cinco de los equipos no manifiestan algún tipo de relación entre las nociones.

Rel.2. Relación procedimental entre fracción y porcentaje

En el G1 una relación frecuente, mostrada en distintos equipos, es la procedimental entre fracción y porcentaje, a partir de la fracción "pasan" al porcentaje mediante la división de numerador y denominador luego multiplican este valor por cien, sin embargo en ningún equipo se hace una reflexión sobre la relación entre estas dos nociones. En cinco de los trece equipos se presenta ésta aproximación. En el equipo E6 por ejemplo dicen:

A4: el (b), en el (b) tenemos… (B4: en porcentaje) la idea de porcentaje, tenemos un campo sembrado de naranjas, un cuadrito…
B4: sería que debemos combinar el concepto de fracción con el de… porcentaje ¿no?
*C4: entonces **tendríamos que poner un noveno por cien para lo de porcentaje**, precisamente una de las regiones está cultivada y por cien **para pasarlo a porcentaje***

En el G2 observamos que dos de los ocho equipos, E4 y E8, transforman la expresión fraccionaria en porcentual aplicando la división y multiplicación usual entre las cantidades. Únicamente el equipo E4 manifiesta dos acercamientos distintos relativos a la relación entre las tres nociones.

Rel.3. Manifiestan relaciones erróneas entre las nociones

Señalamos que de forma puntual en el equipo E1, del G1, se dio una conversación en la que se relacionan las tres nociones. Sin embargo, tal relación no tiene fundamento matemático que lo sustente, por lo tanto consideramos que este equipo manifiesta una relación errónea entre las tres nociones.

B1: multiplicado por cien, ¿no?...
C1: …da igual, por cien
B1: …y obtenemos la fracción de uno partido…
A1: ¡no! oye, ahí se obtiene el tanto por ciento
B1: …y del porcentaje damos la fracción
C1: pero ¿el porcentaje?, ¿cuál es el resultado para ponerlo?... eso es lo que yo quería, el porcentaje igual ¿no?, a sesenta y seis coma seis, seis ¿no?
B1: por ciento, de donde sacamos la fracción, ¿no?
A1: sí, que representa…espera, espera, espera, o sea la idea es que esto representa eh… el ratio que es uno partido por… o sea esto, obtenemos… de donde obtenemos el ratio
B1: …uno partido de sesenta y seis

Resumen

De los trece equipos del G1, cinco de ellos expresan que existe una relación entre la fracción y el porcentaje, implícita o explícitamente. Aunque en tres de los equipos se mencione que la razón es uno de los significados que puede adoptar la fracción, no expresan ideas sobre lo que es cada uno de esos significados o las diferencias que existen entre ellos. En el G2 sólo tres de los ocho equipos muestran algún tipo de relación. En ambos grupos señalan que para hallar el porcentaje es preciso considerar primero la fracción, luego mediante la división y multiplicación pasan de una notación a otra. No obstante no aportan evidencias de otros razonamientos más elaborados como por ejemplo que el porcentaje buscado corresponde a una fracción equivalente a 1/9 pero con denominador 100.

7.1.2 Conocimientos Manifestados en la Puesta en Común

En este apartado incluimos las aproximaciones que mostraron los estudiantes respecto a la razón, fracción y porcentaje, durante la puesta en común.

Conforme a lo establecido en la dinámica de trabajo, cuando la mayoría de los equipos llegaron a un ‘acuerdo’ y el tiempo predeterminado pasó, la investigadora solicitó a uno de los equipos presentar su respuesta como base para la discusión general. En esta fase se esperaba que los alumnos complementaran, aceptaran o criticaran la respuesta dada por el grupo.

En el G1, la investigadora pidió la participación voluntaria de los estudiantes y pasó al frente una alumna (B5) representando al grupo E11, y en relación con la fracción dice:

B5: “Hemos puesto que de los cinco campos que hay totales, tienen manzanas dos de ellos, o sea dos quintos del dibujo completo, en el (b) hemos puesto que de los nueve campos que hay, que sería el cien por cien del dibujo, hay nada más que completo uno de ellos, entonces para nosotras es el once con once por ciento, y en el (c) que es la razón, que antes no sabía lo que era pero ya si lo sabemos, pues que ***cuatro de los seis campos que hay están completos****, o sea es la comparación entre el total y…”*

Su participación refleja que la comparación establecida en los tres casos es del tipo parte-todo, utiliza el lenguaje usual de las fracciones para enunciar la comparación entre lo cultivado y el total de los campos; respecto al porcentaje observamos que reconoce que los nueve campos totales corresponden al 100%, expresa la razón como una descripción cuantitativa de la parte y el todo. Sin embargo durante la conversación del trabajo colaborativo el equipo identificó a la razón con la regla de tres y además expresó desconocimiento del contenido.

Resaltamos que durante la puesta en común de la Tarea 1fue notable la participación del estudiante A9 quien aportó sus ideas y dudas en varias ocasiones. En relación a la razón y después de lo dicho por B5, A9 agrega que “… *hemos puesto, en razón, que hay cuatro cultivables de seis totales, lo mismo que ella, que son cuatro sextos de seis sextos, hay cuatro sextos cultivables de seis sextos*”. El estudiante identifica la razón con la expresión verbal de la fracción, su aporte no evidencia reconocimiento de la entidad razón y sus representaciones.

Posteriormente el estudiante A9 señala que en su equipo han puesto otra respuesta en el caso del porcentaje, su aporte refleja que para ellos los 9 campos totales corresponden a un 90%, ante esto la alumna B5 refuta con un argumento sencillo pero convincente.

A9: vale, nosotros en el (b) hemos hecho, creemos, después de haber visto el once coma once que bueno hemos cometido el error de poner que, creemos que era el diez por cien del total...
B5: es que no tiene sentido, si fuesen diez, pero como son nueve
A9: ya… ahora hemos considerado que el cien por cien eran nueve partes, entonces antes hemos dicho si es una, pues el diez por cien
B5: si fuesen diez daría el diez por ciento

Aunque más adelante comentaremos las fortalezas de la dinámica de trabajo, indicamos al lector que el episodio anterior constituye un ejemplo de un intercambio que consideramos enriquecedor, al menos para A9, en tanto éste pudo reconocer el error cometido a partir de la participación de la compañera.

Destacamos que la investigadora continuó solicitando a los estudiantes que participaran con otros aportes distintos a los expuestos por B5 y A9, ante esto el estudiante A1 del equipo E1 manifestó una visión inadecuada de la razón:

A1: …pues nosotros hemos dicho cuatro de cada seis partes que representa el sesenta y seis coma seis por ciento y hemos sacado ***el ratio*** *uno partido sesenta y seis coma seis.*
I: ¿cómo? (El alumno A1 le repite la misma idea)
I: alguien más, ¿algún otro aporte?

Lamentablemente la investigadora no se detuvo a discutir esta idea, ya que desde su posición como profesora, esperaba escuchar otra idea más acertada, además pensó que en la discusión de esa idea podría tardar más tiempo que el planificado para el desarrollo de la revisión de la tarea o que el resto de los estudiantes podrían desviar su atención. Sin embargo, a partir de esta observación reconocemos que para las siguientes sesiones es preciso detenerse con mayor detalle en los aportes sugeridos por los estudiantes.

En el G2 la investigadora también pidió la participación voluntaria de los estudiantes, pasó al frente la estudiante B12 del equipo E3, quien en relación con el ejercicio (a) expresa:

B12: nosotros hemos pensado que el primero como dice de las fracciones pues hemos puesto dos quintos del campo, del campo que es lo que se ha cultivado, o sea dos quintos del campo es lo que se ha cultivado… en la segunda parte hemos puesto que la región no cultivada corresponde aproximadamente al once coma cero uno por ciento del total… en la última hemos puesto que cuatro de cada seis regiones de campo están cultivadas

En su aportación observamos que en los tres ejercicios han establecido la relación entre la parte y el todo, primero mediante el lenguaje usual de las fracciones, luego el cálculo del porcentaje y finalmente usando términos propios de la noción de razón. La participación de la estudiante es un reflejo de las actuaciones más comunes mostradas por todos los equipos.

Ante la participación de la estudiante B12 la intervención de la investigadora estuvo orientada a estimular a los estudiantes para que identificaran la relación parte-parte. Así, los estudiantes A7 y A12 participaron aportando ideas relativas a este tipo de comparación.

I: ¿está correcto?... sí está correcto desde este punto de vista, que estamos estableciendo la relación entre cultivado y total, pero ahora ¿podemos establecer otra relación?, otra fracción para comparar lo cultivado y lo no cultivado
B12: tres quintos
I: bueno tres quintos podría ser pero estaríamos comparando…
A7: lo no cultivado y el total, es dos tercios
I: ahí vamos, ¿por qué dos tercios?
A7: porque hay dos partes cultivadas y tres es el resto que quedan

Posteriormente la investigadora les cuestiona sobre la relación si se considera como todo la otra parte, no obstante de nuevo la estudiante A7 es quien aporta la respuesta.

I:…y si lo hacemos inverso ¿qué pasaría?, ¿podríamos considerarlo en sentido inverso?, es decir a cuánto corresponde si considero esto como todo (señala lo cultivado), ¿a cuánto corresponde la región no cultivada en relación con lo cultivado?
A7: a tres medios

En relación con la razón, el estudiante A12 expresó la relación entre las dos partes de la siguiente manera: "*…por cada cuatro partes cultivadas hay dos partes sin cultivar*"

Destacar que durante la puesta en común de la Tarea 1 los estudiantes del G2, alentados por la investigadora, lograron visualizar otra forma de comparar las cantidades, y han presenciado dos formas distintas de acercarse a las comparaciones multiplicativas.

En relación con la noción de porcentaje, durante la puesta en común uno de los estudiantes, A7, manifestó la idea incorrecta en la que se identifica la unidad absoluta de campos de cultivo con la expresión relativa, no obstante, la limitación de tiempo no hizo posible la atención directa a tal deficiencia. La investigadora consideró pertinente abordar la cuestión referida al porcentaje centrándose en la identificación de las partes y el todo y subrayando cuál es el 100% en cada caso.

En los aportes de los estudiantes del G2 no se evidenciaron relaciones entre las tres nociones, fracción, razón y porcentaje. Tal aspecto lo abordó la investigadora en su intervención.

7.1.3 Resumen de las Actuaciones Manifestadas en la Tarea 1

En la Tabla 7.4 presentamos una síntesis de las concepciones que manifestaron los estudiantes en la resolución colaborativa de la tarea 1. Las concepciones expuestas atañen a las nociones de razón, fracción y porcentaje así como a la relación entre las mismas. En la Tabla se indica la cantidad de equipos (expresada porcentualmente) en los cuales se detectó cada concepción; subrayamos que los indicadores asociados a cada categoría no son excluyentes, esto quiere decir que un mismo equipo se presentaron varios acercamientos de modo que la suma de los porcentajes no es igual a 100. Destacamos que las actuaciones catalogadas como NP3, NR3 y Rel.3 contemplan concepciones inadecuadas sobre alguno de estos contenidos.

Tabla 7.4. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 1*

Categoría	Indicadores	Descripción de Actuaciones	G1	G2
Tipo de Relación	Com. P-P	Establecer la relación parte-parte en la descripción de la razón, la fracción o el porcentaje.	0%	0%
	Com. P-T	Establecer la relación parte-todo en la descripción de la razón, la fracción o el porcentaje.	100%	100%
Acercamientos al porcentaje	NP1	Usar la regla de tres para hallar el porcentaje.	15%	37%
	NP2	Usar otras técnicas diferentes a la regla de tres para hallar el porcentaje.	61%	37%
	NP3	NP3: Identificar la cantidad absoluta con la relativa. Cada unidad corresponde a un 1%.	23%	25%
Acercamientos a la noción de Razón	NR1	Razón como una descripción cuantitativa de las partes. Señalar cuánto hay de una parte y cuánto hay de la otra, considerando las dos partes o una parte y el todo.	46%	25%
	NR2	Razón como descripción de la parte con el todo o entre las partes usando términos “de cada”, “por cada”, o expresiones particulares de la forma “x es a y”, “x” a “y”.	46%	75%
	NR3	Razón como relación aditiva entre las cantidades.	8%	0%
	NR4	Razón como una descripción verbal de la fracción. Identificar la razón y la fracción desde alguna perspectiva.	23%	62%
	NR5	Identificar la razón con la regla de tres. Establecer algún tipo de relación entre la razón y la regla	15%	0%

Tabla 7.4. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 1*

Categoría	Indicadores	Descripción de Actuaciones	G1	G2
		de tres.		
	NR6	Desconocimiento del contenido.	46%	25%
	NR7	Otros acercamientos.	23%	7,69%
Relaciones entre las tres nociones	Rel.1	La razón como posible significado de la fracción. Identificar la relación que sitúa a la razón como uno de los posibles significados del número racional.	23%	25%
	Rel.2	Relación procedimental entre fracción y porcentaje. Convertir la notación de fracción a porcentaje o viceversa.	38%	25%
	Rel.3	Manifestar relaciones erróneas entre las nociones fracción, razón y porcentaje.	7,69%	0%

7.1.4 Logro de las Expectativas de Aprendizaje

En la planificación de la Tarea 1 (Apartado 6.1.1.1) se describe los objetivos específicos relacionados con la misma y las competencias matemáticas que consideramos que podrían verse favorecidas. Esta tarea se ha relacionado con los objetivos específicos 1 y 2, a continuación presentamos las evidencias que hemos detectado acerca del logro de los mismos.

Logro del objetivo específico 1: Identificar conexiones entre los significados de las fracciones como representantes del número racional (parte-todo, operador, cociente y razón).

En el logro de esta expectativa de aprendizaje nos concentramos en determinar si los estudiantes de magisterio establecieron conexiones entre estas nociones y qué tipo de vínculos expresaron explícitamente o se desprenden de la resolución de la Tarea 1.

Las actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 1 han sido descritas en el apartado 7.1.1 "*Conocimientos manifestados en la resolución colaborativa*" y evidencian las concepciones que los estudiantes mostraron en relación con la fracción, razón y porcentaje cuando éstos las aplicaron para describir la comparación entre las cantidades. Cada uno de los acercamientos descritos considera el empleo de las nociones (fracción parte-todo, porcentaje y razón), el reconocimiento de sus características, el uso de una representación o expresión para ponerlas de manifiesto y el establecimiento de relaciones entre las tres nociones. No obstante reconocemos que los acercamientos NR4, Rel.1 y Rel.2 son los que aportan información acerca de las conexiones que los estudiantes establecieron entre las nociones en cuestión.

Ahora bien, en el acercamiento NR4 se mostró que los estudiantes de tres de los trece (23%) equipos del G1 y en cinco de los ocho (62,5%) equipos del G2 relacionaron la razón con la fracción identificando ambas nociones.

Como se indicó en el apartado "*Relación entre las tres nociones*" (Acercamiento Rel.1, Apartado 7.1.1.4), únicamente en tres de trece equipos (23%) del G1 y en dos de ocho equipos (25%) del G2 se identificó a la razón como uno de los posibles significados del número racional (en el aula se trabajó como significados de las fracciones), en estos equipos únicamente se mencionó esta relación.

En el acercamiento Rel.2 indicamos que cinco de trece equipos del G1 (38,5%) y dos de ocho equipos (25%) del G2 expresaron la relación procedimental entre la fracción y el porcentaje, misma que en la mayoría de los casos se reflejó a través de la aplicación de la regla de tres.

En ninguno de los equipos de ambos grupos se hizo referencia a que tales nociones son significados del número racional, que las tres permiten describir comparaciones entre cantidades u otras relaciones como las previstas en la planificación (Figura 6.6) que evidencien un manejo de las nociones dentro de una estructura conceptual global que contemple a los significados y representaciones de los números racionales.

Aunque los estudiantes no hayan identificado, en la fase colaborativa, relaciones conceptuales más complejas entre las tres nociones, reconocemos que éstos tuvieron que recurrir a un proceso de diferenciación e incluso discriminación, razonando lo que entienden por cada noción para después –a partir de un consenso en el equipo sobre lo que se entiende por fracción, porcentaje o por razón– aplicarlo y responder a la demanda de la tarea. Desde esta perspectiva consideramos que el trabajo sobre la T1 estimuló la competencia *pensar y razonar*, no obstante las actuaciones descritas sugieren que ésta se ha trabajado en un nivel de reproducción.

Logro del objetivo específico 2: Describir comparaciones parte-parte y parte-todo, utilizando los subconstructos y representaciones del número racional.

En la planificación de la tarea se había considerado la resolución de la misma contemplando la descripción de la relación parte-parte. Sin embargo, sucedió que las resoluciones mostradas se centraron en la descripción de la relación parte-todo (Ver apartado *Tipo de comparación mostrada*, Apartado 7.1.1.2). Aunque los estudiantes no resolvieron la tarea según lo planificado consideramos que el objetivo se alcanzó en tanto emplearon las nociones fracción, porcentaje y razón para describir las comparaciones. Por lo anterior y la relación establecida entre este objetivo y la competencia *pensar y razonar* (Apartado 4.2.2) consideramos que ésta se trabajó. Sin embargo consideramos que la descripción de la relación parte-todo en lugar de la relación parte-parte nos permite afirmar que la competencia se ha trabajado en un nivel de reproducción.

Todos los equipos, de ambos grupos, describieron la relación entre los cultivos mediante representaciones verbales o simbólicas (fracción y porcentaje), la expresión de la comparación aplicando la noción de razón se representó en la mayor parte de los equipos de forma verbal, estimulándose la competencia *comunicar* en un nivel de reproducción dada la sencillez del contenido matemático del mensaje.

La resolución de la tarea demandó extraer información de la representación gráfica y expresarla a través de otra representación, este tipo de actuación evidencia un proceso sencillo de decodificación la cual constituye un indicador de la competencia *representar* en un nivel de reproducción. Mostramos a modo de ejemplo la resolución escrita del equipo E8 del G1 en el ejercicio (a).

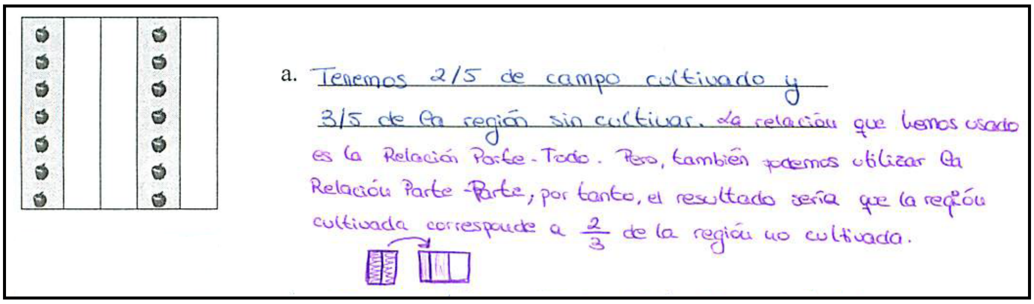


Figura 7.6. Resolución escrita del ejercicio (a) expuesta en el equipo E8 del G1

7.1.5 Balance de la Tarea 1 "Fracción, Razón y Porcentaje"

En este apartado abordamos las fortalezas y debilidades de la Tarea 1 en relación a la cual consideramos que puede mejorarse con el propósito de que ésta permita obtener información acerca de la manera en la que los estudiantes identifican y expresan la comparación entre las partes de un todo. El enunciado se presentó así:

Las figuras de abajo representan tres campos de cultivos, de manzanas, naranjas y cerezas respectivamente. Cada campo se ha dividido en regiones cultivadas (partes con figuras) y regiones no cultivadas (partes en blanco).
1. Para cada situación, escribe afirmaciones comparando las regiones cultivadas y las no cultivadas. En el caso (a) para expresar la comparación usa el significado de fracción, en el caso (b) usa la idea de porcentaje y en caso (c) usa la noción de razón.

La indicación de comparar las regiones cultivadas y las no cultivadas se interpretó como la comparación entre cada tipo de región respecto el total y no entre ellas como se buscaba. Lo sucedido invita a reflexionar y ensayar un cambio en el enunciado de modo que la tarea permita explorar la comparación entre las partes, una posibilidad sería cambiar en el enunciado de la siguiente forma:

Para cada situación, escribe afirmaciones comparando las regiones cultivadas con las no cultivadas. En el caso (a) para expresar la comparación usa el significado de fracción, en el caso (b) usa la idea de porcentaje y en caso (c) usa la noción de razón(Enunciado propuesto).

Por otro lado la representación de los campos cultivados y no cultivados, usada en el caso (c) de la tarea (Figura 7.7), provocó algunas confusiones en los estudiantes de ambos grupos y en consecuencia en algunos equipos la conversación se dispersó hacia este tema y no hacia el esperado por la investigadora.

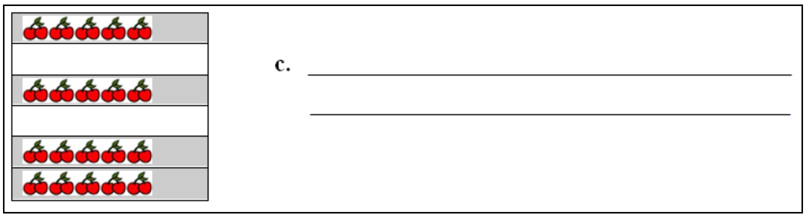


Figura 7.7. Representación del ejercicio (c) de la tarea 1

A continuación mostramos la conversación de algunos equipos, para los que la cantidad de figuras incluida en cada franja resultó ser un dato relevante, sin embargo para efectos de la investigación resultó ser un distractor no controlado, a partir de los sucedido sería conveniente incluir figuras hasta el final de la franja o bien no incorporarlas ya que no ejercen ningún papel en la resolución de la tarea. Por otro lado consideramos que una lectura superflua por parte de los estudiantes influyó en esta situación ya que se trata de comparar las regiones o campos cultivados con los no cultivados, sin hacer alusión a la comparación entre la cantidad de frutos de cada caso. En el equipo E7 del G1

B6: cuatro de seis, pero no cuatro partes enteras, no llega al final…
F6: no está completa
D6: pero es que, es que… no sabes, es que a lo mejor es que el dibujo era así y le ha sobrado espacio pa el cuadro
A6: pero aquí mira
D6: son distintos dibujitos, claro porque no te vas a poner a calcular ahora cuántas frutas caben en cada línea

En el equipo E8 (G1) un estudiante razona considerando que cada par de cerezas en cada fila representa un campo de cultivo, además le da un significado al espacio que parece estar vacío.

C7: aunque yo he pensado que tenemos siete partes y en cada parte observamos que tenemos cinco partes cultivadas y como podemos observar el trocito que queda sin cultivar podemos imaginar que son dos y entonces en cada línea son cinco sétimos pues los sumamos y en total obtenemos veinte partido cuarenta y dos del campo cultivado.

Presentamos otro ejemplo extraído de la conversación en el equipo E12 (G1), pero en esta caso se refieren a la representación del caso (a), en este equipo una estudiante recurre a la instrucción de la tarea y se reorienta el trabajo.

A8: porque las manzanas no tienen nada que ver, ¿no?
F8: igual sí que tiene algo que ver…
*D8: **habla de campos y ¡qué va!, campos se refiere a uno ¿no**?*
A8: sí, estamos aquí dándole vueltas…, pues ponemos eso, ¿no?, que son dos quintos

En el G2 detectamos que los equipos E2 y E6 dedicaron gran parte del trabajo colaborativo a comentar la situación generada a partir de la representación incluida en el ejercicio (c) de la Tarea 1. Veamos un ejemplo del trabajo en el equipo E6 con el que mostramos la extensión de su confusión:

B7: a mí me parece un recorte así cortado y pegado…
A9: sí, igual que aquí, aquí caben otras dos, seguro, y si me apuras y está la cosa crítica y ya que estoy… planto también… perejil (ríen)
C9: ya pero aquí no más yo que sé, qué le hubiera costado poner dos o tres más ahí
A9: ay… la informática, a mí me cuesta eh… a mí, cuadrar las cosas en una tabla…
C9: claro que cogen
B7: cogen pero tocaría en la línea
A9: a ver de todas formas, si entendemos que aquí faltan dos, vamos a liarnos ya, sería como tachamos una de aquí… quedan cuatro ¿no?
C9: es que si no, aquí no más que habría… yo que sé, podría haber tres aquí no más…
B7: si nos ponemos a contar las manzanas que hay ya ponemos otra relación
C9: (ríe) sí
B7: si contamos el número de manzanas que hay podemos decir que hay 1, 2, 3… 7, hay 14… de las que podía haber
A9: 14 de… 7 por 5…
B7: no, de 35
C9: 14 de 35
B7: sabes
B9: yo entiendo que es como que esto no existiera, como que esto no existe…
C9: entonces ¿por qué esta pintado?
B9: yo no sé
B7: 14 de 35 eso es bueno…
B9: porque todavía no han crecido las manzanas ¿no? (ríen)
A9: podría ser…
C9: claro porque es una fracción equivalente
A9: de 35…
B7: manzanas posibles hay 14, se podían plantar 35 manzanos en total pero sólo se plantaron 14
C9: pero este qué hacemos
A9: pues…
C9: sí… como si fuera todo cultivado, es muy fácil

Detectamos que una fortaleza de la Tarea 1corresponde, en el ejercicio (b), a la división del terreno en 9 partes. En este sentido ejemplificamos con un fragmento del equipo E1 cómo los mismos estudiantes reconocen el conflicto que les ocasiona la división en 9 partes:

D1: ah…. pero es que aquí no hay diez partes, es lo que a mí me lía
A1: por eso, hay nueve, entonces por eso no es el diez por ciento, es el once coma once

Al explorar las dificultades no cognitivas que enfrentan los estudiantes al resolver las tareas detectamos que, en ambos grupos y durante el trabajo individual, algunos estudiantes manifiestan a la investigadora que no tienen claro si han de expresar las comparaciones usando un lenguaje verbal o si debe ser con "símbolos matemáticos", en esta ocasión la investigadora les señaló que podían utilizar cualquiera de las opciones, que podían expresarlo incluso con sus propias palabras.

Durante el trabajo en equipo los estudiantes manifiestan, entre ellos, dudas sobre cómo o qué deben de escribir, o sobre las instrucciones de la tarea; por ejemplo la estudiante B21 del equipo E2, del G1, manifiesta en su comentario que no comprende lo que se le pide en la tarea.

*B21: pues…pues **habrá que**…*
A21: si hay cinco partes y hay dos cultivadas
*B21: pues… dos quintos, **pero ¿cómo lo ponemos?***
C21: ponemos, usando el significado de fracción…
B21: porque hay que poner… pero lo que no entiendo es que pone que hay que hacer comparaciones entre…
A21: comparaciones entre lo que está cultivado y lo que no está cultivado
B21: pero ¿qué comparas?... hay partes cultivadas…
A21: hay dos, dos, dos partes de cinco cultivadas…

En la observación de la Tarea 2 detallaremos el logro de este objetivo, dado el carácter abierto de la 2ª tarea, hecho que les provocó más dificultades en la expresión y concreción de sus ideas.

7.1.6 Revisión de los Supuestos Relativos a las Posibles Actuaciones

En la planificación de la Tarea 1(Apartado 6.1.1.1) se enunciaron los supuestos en relación a las posibles actuaciones que podrían manifestar los estudiantes.

Después de la resolución de la Tarea 1confirmamos que no sólo expresaron la comparación entre las partes con menor frecuencia que entre la parte y el todo, sino que el 100% de los estudiantes compararon la parte cultivada respecto al total de partes, no obstante, consideramos que además del peso que tiene la relación parte-todo en la formación matemática previa de los estudiantes, el enunciado de la tarea pudo favorecer esta forma de comparación. Para una futura aplicación en vista de observar cómo expresan los estudiantes la comparación parte-parte es necesaria una revisión de la instrucción de la tarea o, al menos, ha de acompañarse de una explicación adicional por parte de quien aplique la intervención.

Observamos que los estudiantes del G1 mostraron más dudas en la expresión de afirmaciones relativas a la noción de razón que en el caso del porcentaje o la fracción. En casi la mitad de los equipos, al menos un estudiante manifestó desconocer el significado de razón. Ahora creemos que no sólo la ausencia de tratamiento del tema, en la asignatura, ha afectado este comportamiento sino que el concepto está revestido de gran complejidad debido a las múltiples representaciones, propiedades matemáticas y por la ausencia de identidad que se le ha otorgado como posible significado de la fracción. Este hecho nos invita a continuar examinándolo en futuras intervenciones y por supuesto a seguir promoviendo la comprensión del mismo.

Aunque se había previsto que a partir del trabajo en la tarea y de la guía adecuada de la investigadora sería posible que los estudiantes llegaran a analizar algunas relaciones entre las nociones de fracción, razón y porcentaje; resultó que dada la insuficiencia de tiempo en el G1 no se logró llegar a estudiar este aspecto durante la puesta en común y aunque en el G2 se llegaron a exponer algunas ideas relativas a las relaciones entre tales nociones no fue posible explorar los conocimientos de los estudiantes. De modo que no nos ha sido posible observar esta presunción.

7.2 TAREA 2

7.2.1 Conocimientos Manifestados en la Resolución Colaborativa

El estudio de las respuestas dadas en cada uno de los apartados de la Tarea 2 constituyó una información básica para observar la aplicación, por parte de los estudiantes, de distintos conocimientos relativos a la razón. A partir del análisis de las producciones en equipos logramos detectar actuaciones relacionadas con:

- Interpretación de la razón.
    - Interpretación de la expresión "la razón es de 3 a 2".
    - Aplicación de la razón en una situación cotidiana.
- Concepciones sobre las propiedades de la razón.
    - Equivalencia de razones.
    - Suma y diferencia de elementos de razones equivalentes.
    - Concepción sobre la suma de los elementos de la razón.
    - Aplicación de las propiedades de la razón.
- Representaciones de la razón.

7.2.1.1 Interpretación de la Expresión "La Razón es de 3 a 2"

Las ideas asociadas con la interpretación de la expresión verbal de la razón "3 a 2" así como con las propiedades de la misma se mostraron durante el tratamiento que dieron los estudiantes a las cuatro preguntas de la tarea. A partir de la observación de las conversaciones surgidas a lo largo de la resolución de toda la tarea describimos actuaciones, razonamientos y concepciones mostradas, tanto comunes como divergentes, presentes en los equipos.

Se mostraron tres acercamientos en relación con la interpretación de la expresión "3 a 2" que puntualizamos a continuación:

- Tres es a dos.
- Tres de cada dos.
- En tres, hay dos y uno.

En la Tabla 7.5 se recogen los equipos de cada grupo que ponen de manifiesto cada interpretación, a continuación se detalla en qué consiste y se dan ejemplos de dichas manifestaciones.

Tabla 7.5. *Interpretaciones de la expresión "La razón es de 3 a 2"*

	G1											
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
IR1.1	*	*	*	*		*	*	*		*		*
IR1.2	*	*	*			*	*				*	
IR1.3					*							
IR1.4									*			

	G2							
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
IR1.1		*	*	*	*	*	*	*
IR1.2	*	*	*	*				*
IR1.3		*		*	*			

Interpretaciones

IR1.1: Tres es a dos.
IR1.2: Tres de cada dos.
IR1.3: En tres, hay dos y uno.
IR1.4: Ninguno

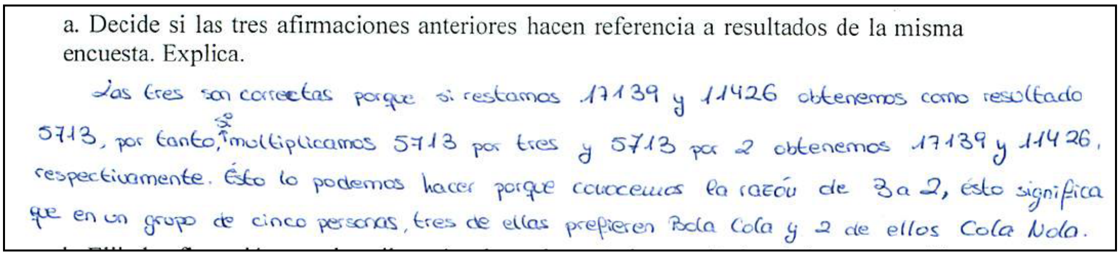
Nota: El equipo E13 del G1 no participó en la resolución de la Tarea 2.

IR1.1 Tres es a dos

En este caso los estudiantes hicieron una interpretación correcta de la expresión, considerando, por ejemplo, que en un conjunto de 5 elementos, 3 son de un tipo y 2 son de otro tipo. Gráficamente podría representarse así:

● ● ● ○ ○

En nueve de los doce equipos del G1 y en siete de los ocho equipos del G2 se mostró esta interpretación, la cual fue la más frecuente en ambos casos. Como ejemplo presentamos un fragmento del trabajo oral del equipo E1 en el que el estudiante A1 expresa que: "*…tres a dos… **tres** prefieren una y **dos** prefieren otra… eso es **de cada cinco tres** quieren una y **dos** quieren otra, de **cada diez seis** quieren una y **cuatro** quieren otra…*" En la Figura 7.8 mostramos un ejemplo procedente de la producción escrita del equipo E8 del G1.


a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

Las tres son correctas porque si restamos 17139 y 11426 obtenemos como resultado 5713, por tanto, si multiplicamos 5713 por tres y 5713 por 2 obtenemos 17139 y 11426, respectivamente. Ésto lo podemos hacer porque conocemos la razón de 3 a 2, ésto significa que en un grupo de cinco personas, tres de ellas prefieren Bola Cola y 2 de ellos Cola Nola.

Figura 7.8. Interpretación IR1.1manifestada en el equipo E8 del G1

IR1.2 Tres de cada dos

Observamos que algunos de los integrantes de seis equipos del G1 y cinco equipos del G2 interpretaron la expresión "3 a 2" como "tres de cada dos", reconocemos que ésta lectura admite distintos matices. Por un lado podría interpretarse como que **hay tres** elementos de un tipo **por cada** dos elementos de otro tipo lo cual sería análogo a lo expresado en *IR1.1*, sin embargo analizando las conversaciones dadas en estos equipos observamos que no dieron muestra de esta posibilidad.

Consideramos que existe una diferencia entre las expresiones "**tres de cada dos**" y "**tres por cada dos**" y esta última no fue utilizada por los estudiantes. La expresión cotidiana y frecuente de relaciones del tipo parte-todo, por ejemplo *3 de cada 5 españoles…*, sumado a una débil reflexión de la frase podría ser la causa de esta interpretación.

Como ejemplo mostramos un extracto del trabajo del equipo E7 del G1.

*B6: **tres de cada dos** niños meriendan Cola Bola, de esa,…*
*D6: ¿**tres de cada dos** niños?…*
*F6: es que no, porque ya estás diciendo **otra afirmación diferente** a ésta…*

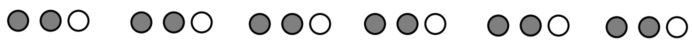
Por otro lado "tres de cada dos" resulta ser una expresión que no tiene sentido porque se puede interpretar que en un conjunto con dos elementos se están considerando tres. Gráficamente tampoco lo podríamos representar. En este sentido observamos la explicación dada en el equipo E11 (G1).

*B5: … a mí no me parece que ninguna de las tres… porque si tú coges a una persona… y le dices **tres a dos**, pues cómo va ser tres a dos,… cómo van a decirle **el total son dos personas**, cómo va ser que **tres personas si no más que hay dos**…*

En el G2 los acercamientos *IR1.1* y *IR1.2* se presentaron casi con la misma frecuencia (en seis y cinco equipos respectivamente), no obstante deseamos destacar que en cuatro de los equipos (E2, E3, E4 y E8) se manifestaron ambos acercamientos simultáneamente lo cual nos dice que aunque algún estudiante interpretara la razón como en *IR1.2* tuvo la oportunidad de conocer, gracias al aporte de otro compañero, otra interpretación más adecuada como lo es la descrita en *IR1.1*. Esta simultaneidad en la presencia de los acercamientos *IR1.1* y *IR1.2* se mostró en cinco equipos del G1 (E1, E2, E3, E6 y E7).

IR1.3 En tres, hay dos y uno

De modo particular observamos que en uno de los equipos (E5) del G1 surgió una interpretación distinta para la expresión "*la razón es de 3 a 2*". En este caso los estudiantes consideran que el total de elementos se van agrupando de tres en tres y dentro de cada subgrupo de tres, hay dos elementos de un tipo y uno de otro tipo. Gráficamente lo podemos representar así:



Para ejemplificar esta interpretación mostramos un fragmento de la conversación dada en el equipo E5.

*B3: vamos a ver, un grupo de gente todos los entrevistados que son todos estos, pues han ido haciendo **pequeños grupos de tres**, de tres, de tres, de tres, de tres y en cada grupo de tres… **dos** prefieren uno y **el otro** prefiere la otra, de cada grupo que forman todos…*

Esta interpretación refleja la asignación de un significado distinto a los elementos de la razón 3:2. El estudiante considera el total de elementos subdivididos en unidades compuestas de tres elementos, en cuyo caso el 3 hace referencia al total de unidades que componen cada unidad compuesta, el 2 y el 1 hacen referencia a las partes comparadas. La interpretación manifestada por el estudiante B3 refleja la interpretación de la razón 3:2 como una relación parte-todo.

Tal interpretación también se hizo presente en tres equipos del G2 (E2, E4 y E5). Como ejemplo mostramos un fragmento del equipo E5.

C5: hombre si significa que de tres a dos, hombre es que si de cada tres se refiere que de cada tres pues hay dos, ya sería distinto, ya eso sería… yo no sé, yo no lo entiendo…
C3: vamos a ver si era eso es lo que quiere expresar, que yo me he quedado con mi duda…, pero yo entiendo que de cada tres personas, dos, lo mismo no y está mal y no quiere decir eso…

Resumen

Con base en las actuaciones detectamos que, respecto a la interpretación de la razón “3 a 2”, los estudiantes de ambos grupos mostraron con mayor frecuencia dos acercamientos: “tres es a dos” y “tres de cada dos”. El uso frecuente de relaciones parte-todo podría influir en la interpretación común manifestada en IR1.2 “tres de cada dos”, consideramos que los estudiantes la utilizan sin atribuirle la reflexión requerida.

Además señalamos que en los equipos E1, E3 y E7 del G1, E2 y E4 del G2 se observó una mayor riqueza de interpretaciones de la razón, esto se traduce en una mayor participación e implicación en el desarrollo de la tarea que el mostrado en los otros equipos. En ciertos casos se evidenció que una intervención errónea manifestada por alguno de los integrantes (IR1.2) estuvo complementada por una interpretación acertada (IR1.1) expresada por otro de los estudiantes del mismo equipo.

Destacamos que en ambos grupos detectamos la presencia de una interpretación distinta de la expresión “*la razón es de 3 a 2*”, en la que considerando tres elementos, dos prefieren una marca de refresco y otro prefiere la otra marca. La interpretación refleja la consideración de la razón 3:2 como una relación parte-todo, en la cual el 3 no se refiere al total de personas participantes en la encuesta sino al total de elementos que conforman cada una de las unidades compuestas consideradas y el 2 representa la cantidad de personas que prefieren uno de los refrescos.

7.2.1.2 Aplicación de la Razón en una Situación Cotidiana

Las preguntas (b) y (c) de la tarea demandaban del estudiante una elección. En el primer caso debían elegir la afirmación que les parecía “más adecuada” para expresar la comparación entre la preferencia de refresco y en el otro caso debían elegir cuál afirmación consideraban que era “más eficaz” para un anuncio publicitario. El análisis de las elecciones manifestadas en estas preguntas, nos aporta información acerca de cómo estos estudiantes interpretan la razón, en una situación del entorno en la que se ha utilizado esta noción, para expresar una comparación entre dos cantidades.

Debido a que las dos primeras afirmaciones del enunciado de la tarea consideran la relación multiplicativa de las cantidades y que la tercera se refiere a una comparación aditiva consideramos que la elección de alguna de las dos primeras, por encima de la tercera, constituye un indicio de que los estudiantes reconocen a la razón como una noción que posibilita la expresión de comparaciones en situaciones cotidianas. Este reconocimiento puede estar sustentado en mayor o menor medida sobre razones matemáticas o de otro tipo que intentaremos develar (Rigo, 2009; Rigo et al., 2011).

Análisis de las actuaciones en la pregunta (b)

Para decidir cuál de las afirmaciones describe “más adecuadamente” los resultados de la encuesta es preciso estudiar las posibilidades de cada afirmación. En este sentido esperábamos un proceso de análisis de cada afirmación por parte de los estudiantes. Con la expresión “más adecuadamente” incluida en la pregunta se hace referencia a que la afirmación elegida no dé cabida a posibles interpretaciones erróneas de los resultados de esa encuesta y que además pueda ser interpretada rápidamente, esto es, que informe con certeza acerca de cómo se distribuyen las cantidades de personas que prefieren uno u otro refresco. En la Tabla 7.6 mostramos las elecciones manifestadas en cada uno de los equipos de los dos grupos ante la cuestión ¿cuál afirmación describe más adecuadamente los resultados de la encuesta? posteriormente detallamos cada elección y mostramos ejemplos.

Tabla 7.6. *¿Cuál afirmación describe más adecuadamente los resultados de la encuesta?*

G1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
b.1	*	*			*	*	*		*	*		*
b.2	*		*	*	*	*		*		*		
b.3												
Ninguna											*	

G2	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
b.1	*	*	*	*	*	*	*	*
b.2	*	*		*	*			*
b.3		*						*

Afirmaciones Elegidas

(b.1): 1ª Afirmación (La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2)
(b.2): 2ª Afirmación (El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426)
(b.3): 3ª Afirmación (5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola)

Observamos que en los equipos de los dos grupos, excepto en el equipo E11 (G1) y E6 (G2), eligen como “más adecuada” la 1ª ó la 2ª, o ambas proposiciones. Consideramos que el hecho de que hayan elegido alguna de las afirmaciones relativas a la razón y de que hayan dejado de lado la expresión sobre la diferencia aditiva, apunta a que los estudiantes reconocen que ésta es una noción adecuada en la expresión de comparaciones entre cantidades. En el G1 ningún equipo eligió la 3ª afirmación, mientras que en el G2 los equipos E2 y E8 además de elegir las dos primeras afirmaciones comentan que la tercera opción también podría ser la más adecuada.

b.1. Eligen la 1ª afirmación

En ocho de los doce equipos del G1 y en todos los equipos del G2, al menos uno de los estudiantes manifestó que la 1ª afirmación era más adecuada para describir la comparación. Como ejemplo presentamos un fragmento del equipo E2 (G1).

D21: yo en esa había puesto que la ***de tres a dos*** *porque es la que* ***expresa los datos*** *de manera* ***más simplificada*** *y es* ***más fácil*** *su comprensión…*

Ahora bien, las razones o argumentos que aportan los estudiantes de los equipos que eligieron la 1ª afirmación las hemos agrupado como se indica a continuación:

- Más fácil de comprender, más clara.
- Expresión sencilla, números pequeños.
- Visualiza más rápido la diferencia o la comparación.

Destacamos que tales argumentos poseen un carácter extra-matemático, pues denotan la ausencia de propiedades de la razón o de otros conceptos matemáticos que fundamenten la decisión tomada.

Observamos que únicamente en el equipo E6 del G2 se indica que la primera afirmación es la que describe más adecuadamente los resultados de la encuesta aportado una justificación en la que se refleja la aplicación de la idea de equivalencia de razones y en la que además se justifica por qué la tercera afirmación es la menos adecuada (Figura 7.9).

> b. Elije la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.
>
> - La primera es la más pertinente porque relaciona las preferencias en su expresión irreducible, siendo más fácil apreciar la relación que hay entre ambos.
> - La tercera no sería adecuada, porque falta el dato del número total de participantes.

Figura 7.9. Elección (b.1) manifestada en el equipo E6 del G2

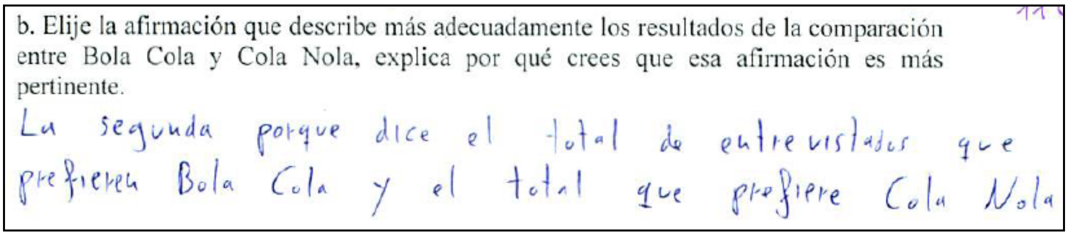
b.2. Eligen la 2ª afirmación

En siete de los doce equipos del G1 y en cinco de los ocho equipos del G2, al menos uno de los estudiantes se decantó por la segunda afirmación, por ejemplo en el equipo E2 (G2):

D14: la afirmación que describe más adecuadamente los resultados…

C14: yo pondría la segunda porque te dice cuánta gente hay

En la Figura 7.10 presentamos un ejemplo de esta elección, procede del trabajo escrito del equipo E3 del G1.


b. Elije la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.

La segunda porque dice el total de entrevistados que prefieren Bola Cola y el total que prefiere Cola Nola

Figura 7.10. Ejemplo de la actuación (b.2) manifestada en el equipo E3 del G1

De modo general, quienes plantean que la 2ª afirmación describe más adecuadamente la comparación proponen los siguientes argumentos:

- Aparece el dato del total de personas encuestadas, más precisa
- Se ve la diferencia real entre quienes prefieren uno u otro refresco
- No hay que hacer aproximaciones
- Mayor probabilidad de extrapolar los resultados de la encuesta

Nuestra posición es que la 1ª afirmación es la *más adecuada* para expresar la comparación porque nos dice, sin conocer la cantidad total de personas encuestadas, que por cada 3 personas que eligen Bola Cola habrá únicamente 2 personas que eligen la Cola Nola. El total de personas resulta ser un dato de poco interés para comprender que la preferencia entre los dos refrescos se distribuye de la forma "3 a 2", esta relación indica que el refresco más aceptado es la Bola Cola y que la cantidad de personas que lo prefieren siempre será "una y media veces" la cantidad de personas que elige la otra bebida. Coincidimos con los estudiantes cuando afirman que es más sencillo interpretar la relación con números más pequeños, es decir visualizamos la distribución de las cantidades más rápidamente con 3 y 2 que con 17139 y 11426.

Aunque la razón incluida en la 2ª afirmación es equivalente a la 1ª razón, contiene dos cifras o "representantes" que no aportan información para una fácil o rápida interpretación de la relación. Los estudiantes dieron razones que se basan en la concepción sobre la suma de los elementos de la razón, pues consideraron que a partir de la razón 17139:11426 se podía inferir que 17139 personas eligieron la Bola Cola y 11426 la Cola Nola, o que el total de encuestados era la suma de estas dos cantidades, esta concepción la detallamos en el apartado referente a las propiedades de la razón.

Análisis de las actuaciones en la pregunta (c)

Se podría decir que una frase "eficaz" en un anuncio publicitario se caracteriza entre otras condiciones por: promover la venta de un producto o servicio, informar verazmente sobre el producto con los datos necesarios y suficientes, llegar a la mayor cantidad de posibles compradores, mantener un recuerdo sobre la marca o producto publicitado.

En el caso de la pregunta (c), observamos que la mayor parte de los equipos, de ambos grupos, eligen como “más eficaz” la 1ª ó la 3ª, o ambas proposiciones. Únicamente dos equipos del G1 y uno del G2 consideran la 2ª afirmación como una posibilidad.

En la Tabla 7.7 recogemos las elecciones manifestadas en cada uno de los equipos, a continuación detallamos cada una de ellas y mostramos ejemplos.

Tabla 7.7. *¿Cuál afirmación resultaría más eficaz para divulgar los resultados en un anuncio publicitario?*

G1												
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
c.1	*	*	*	*	*	*	*		*	*		*
c.2			*		*	*						
c.3	*		*	*		*	*					*
Ninguna								*			*	

G2								
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
c.1	*	*	*	*	*	*	*	*
c.2					*			
c.3		*	*	*	*		*	

Afirmaciones Elegidas

(c.1): 1ª Afirmación (La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2)
(c.2): 2ª Afirmación (El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426)
(c.3): 3ª Afirmación (5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola)

c.1. Eligen la 1ª afirmación

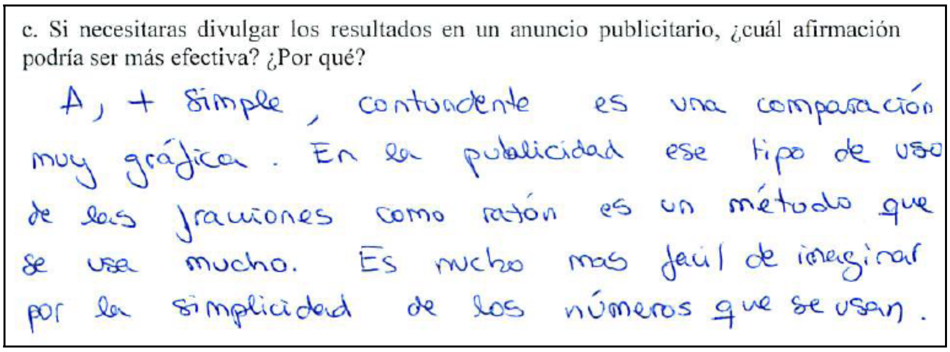
En diez de los doce equipos del G1 y en todos los equipos del G2, los estudiantes eligieron la 1ª afirmación como la “más eficaz” para divulgar los resultados en un anuncio publicitario. En general, asociaron la comprensión de la frase con la eficacia de la misma en un anuncio publicitario. Entre las razones que mencionan para justificar esta elección se encuentran:

- Fácil comprensión de cifras sencillas como 3 y 2.
- Las otras afirmaciones surgen de la 1ª.
- En los anuncios conocidos siempre aparece la información en una razón.
- Experiencia personal.

En el caso de los que eligieron la 1ª proposición basándose en la experiencia personal, destacamos que consideraron que si para ellos había sido más sencillo comprender la 1ª afirmación para otras personas también lo sería. Presentamos un fragmento del trabajo del equipo E6, del G1.

C4: a ver yo he puesto ***la primera*** *porque al encuestado cuando tú haces publicidad se fija más en* ***números pequeños*** *que en grandes,* ***no se van a parar a ver cuántos números tiene cada uno*** *y cuál es mayor que el otro, simplemente* ***con tres y dos*** *se ve* *mucho **más claro** que con diecisiete mil ciento treinta y nueve y once mil cuatrocientos veintiséis…*

En la Figura 7.11 presentamos un ejemplo procedente de la producción escrita del equipo E8 del G2.


c. Si necesitaras divulgar los resultados en un anuncio publicitario, ¿cuál afirmación podría ser más efectiva? ¿Por qué?

A, + simple, contundente es una comparación muy gráfica. En la publicidad ese tipo de uso de las fracciones como razón es un método que se usa mucho. Es mucho mas fácil de imaginar por la simplicidad de los números que se usan.

Figura 7.11. Ejemplo de la elección (c.1) manifestada en el equipo E8 del G2

c.2. Eligen la 2ª afirmación

En los tres equipos del G1 que eligieron la 2ª afirmación como la "más eficaz" mencionaron que así expresada la relación es posible hacer la diferencia y ver cuántos más prefieren uno que otro refresco. Por ejemplo en el equipo E5, del mismo grupo:

*C3: **la primera no se entera** la gente, de tres a dos, a lo mejor si eres una persona mayor y te dice el cinco por ciento de los andaluces coge el autobús para ir al colegio… yo **me entero mejor viendo los datos**… tienes para **hacer la diferencia**…*

En el G2 sólo en un equipo (E5) se manifestó esta elección.

c.3. Eligen la 3ª afirmación

Observamos que en la mitad de los equipos del G1 y en cinco de los ocho equipos del G2, al menos uno de los participantes dijo que la afirmación más eficaz para un anuncio sería la 3ª, ésta establecía que "*5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola*".

Como ejemplo presentamos un extracto de la conversación del equipo E7, del G1:

*D6: yo he puesto la tercera también porque creo que **llegaría a más gente**, la primera lo que pasa es que…*
*F6: la primera yo he puesto que **podría ser más difícil de comprender,** en un ámbito de aula…, pero aquí te viene para un medio publicitario y entonces he dicho que es la **tercera porque sólo hace referencia positivamente** a los que prefieren Bola Cola, no dice la cantidad que prefiere la otra marca…*

En el resto de equipos de ambos grupos que eligieron la 3ª afirmación observamos que aportaron algunos argumentos que hemos agrupado de la siguiente manera:

- La diferencia es muy grande, es la cantidad exacta que hay entre uno y otro.
- Impresiona más a la gente que números pequeños.
- Uso frecuente en los anuncios de televisión.

Consideramos que en esta situación la razón se usa para describir de qué manera se distribuyen las cantidades de personas. Sin importar el total de personas que han participado la interpretación de la razón permite inferir, entre otras ideas, que hay más personas que prefieren Bola Cola y que esta cantidad de personas es 1,5 veces la cantidad de personas que prefieren Cola Nola. En consecuencia podría desembocar en una información engañosa para el consumidor debido a que en este caso la afirmación se refiere únicamente a que hay 5713 personas más que prefieren Bola Cola. O sea, nos habla de la diferencia aditiva entre la cantidad de personas que elige uno u otro refresco. En este caso no se sabe respecto a cuántas personas, se ha establecido esa diferencia. Podríamos por lo tanto pensar que dado que $x - y = 5713$, donde "*x*" es el número de personas que prefiere Bola Cola e "*y*" la cantidad de personas que elige Cola Nola, sería posible que si ambas cantidades son grandes y no tan distintos, esta diferencia sea poco significativa por ejemplo si 35713 personas dijeron Bola Cola y 30000 encuestados dijeron Cola Nola, la diferencia de 5713 representa sólo un 8% del total, mientras que si las cantidades son muy diferentes como 5718 personas que eligen Bola Cola y sólo 5 que prefieren Cola Nola, la diferencia 5713 representaría más del 99% del total. De modo que la diferencia entre las cantidades aporta una información que se puede interpretar de distintas formas dependiendo de cuál sea el total de personas encuestadas.

Únicamente en el equipo E12 (G1) uno de los estudiantes cuestiona la elección de la 3ª afirmación basándose en un argumento intuitivo pero que se corresponde con el razonamiento matemático expuesto anteriormente, mostramos el fragmento que lo ejemplifica:

A8: … ésta me ha entrado a mí, la primera me ha llegado a mí, claro si pones 5713 beben Bola Cola, ***lo mismo hay 11000 que beben Cola Nola****, ¿no?, yo que sé… es que yo creo que aquí* ***no nos dan el total****, creo yo, el total digo, es decir porque aquí se compara uno y otro* ***pero de cuántas personas*** *y aquí cuántas, aquí por lo menos sabes que de cada 5 personas, tres beben una y dos beben otra…*

Resumen

A modo de resumen tenemos que en once de los doce equipos del G1 y en siete de los ocho equipos del G2 los estudiantes indicaron que las afirmaciones cuya información se presentaba mediante la razón eran las "más adecuadas" para expresar los resultados de la encuesta, consideramos que esta elección es una evidencia del reconocimiento que los estudiantes conceden a este concepto matemático como herramienta en la expresión de comparaciones entre cantidades.

La elección de la afirmación "más eficaz" para divulgar los resultados en un anuncio publicitario estuvo repartida entre las tres afirmaciones, pero en ambos grupos la 1ª y la 3ª obtuvieron la mayor frecuencia. Esto refleja la dicotomía en el razonamiento de los estudiantes en relación con la expresión de comparaciones entre cantidades, pues la 1ª relación es multiplicativa mientras la 3ª es aditiva.

En ambos casos, los argumentos aportados por los estudiantes estuvieron en su mayoría desprovistos de base matemática como definiciones o propiedades de la razón.

En relación con la pregunta (b) los equipos del G1 que mostraron al menos dos acercamientos fueron el E1, E5, E6 y E10. Los equipos del G2 que mostraron tres acercamientos fueron E2 y E8.

En relación con la pregunta (c) destacamos que en los equipos E3 y E6 (G1), y en el equipo E5 (G2) manifestaron tres acercamientos distintos a la cuestión.

7.2.1.3 Concepciones sobre las Propiedades de la Razón

La observación de las producciones orales de los estudiantes en la Tarea 2, nos ha permitido detectar tres concepciones[84] relacionadas con las propiedades de las razones al dar muestras de aplicar la:

- Equivalencia de razones.
- Diferencia y suma de los elementos de dos razones equivalentes, misma que se puede enunciar como a continuación: Si $a:b$ y $c:d$ son dos razones equivalentes entonces se cumple que $\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}$.
- Concepción sobre la suma de los elementos de una razón.

Ésta última es una concepción particular relacionada con la razón, la mayor parte de los equipos evidenciaron la creencia de que si dos cantidades de magnitud "A" y "B" guardan una cierta razón $a:b$ entonces el total de elementos comparados es $a+b$. Esta concepción no la habíamos contemplado en la planificación previa de la tarea.

En la Tabla 7.8 se recoge la información sobre la frecuencia con que han aparecido estas concepciones, posteriormente detallamos cada una de éstos y presentamos ejemplos extraídos de las conversaciones de los estudiantes.

[84] Compartimos la idea expuesta por Hitt (2007) en relación con el término concepción.

Tabla 7.8. *Concepciones mostradas en relación con las propiedades de la razón*

G1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E12
CPr1	*	*	*			*	*	*		*	*
CPr2							*	*			
CPr3	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*

G2	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
CPr1		*	*	*		*	*	
CPr2			*					
CPr3	*	*	*	*	*			*

Concepciones sobre las Propiedades de la Razón

CPr1: Equivalencia de Razones
CPr2: Diferencia y la Suma de los Elementos de Razones Equivalentes
CPr3: Concepción sobre la Suma de Elementos de la Razón.

Nota: El equipo E13 del G1 no participó en la resolución de la Tarea 2 y el equipo E11 del G1 no manifestó alguna de las concepciones anteriores.

CPr1. Equivalencia de razones

Observamos la presencia de esta propiedad en los trabajos de ocho equipos del G1 y en cinco equipos del G2, no en todos los casos aplicaron la propiedad mencionando de manera explícita el término "equivalentes", el cual se menciona únicamente en los equipos E2 (G2) y E2 (G1), en este último la estudiante también hace referencia a lo visto en la revisión de la tarea 1, tal y como se muestra a continuación:

*B21: … **sería seis a cuatro** en vez de tres a dos… o cualquiera que sea **equivalente**, yo creo que eso es lo que **ha explicado antes** aquí en esta parte…*

Mostramos el fragmento del equipo E2 (G2) que ejemplifica el uso del término "equivalentes".

D14: es decir que expresado de diferente manera pero que significa lo mismo, que son equivalentes
I: que es lo mismo pero…
B14: pero con diferentes números, diferentes expresiones y eso…

La mayor parte de los equipos del G1 aplican la equivalencia de razones cuando están buscando otras formas de comparar las preferencias de refresco indicando que "cuatro a seis" es otra forma de expresar la razón "3 a 2", o bien señalando que los porcentajes 60% y 40% también serían otra manera de expresarlo. A modo de ejemplo presentamos un fragmento de la conversación del equipo E3 en el que además reconocen que la expresión de la razón "3 a 2" es la más reducida porque mediante la multiplicación se pueden obtener otras razones.

*A2: pero si dices **seis a cuatro** ya va aumentando la diferencia… pero es que ya te lo reduce, **te lo reducen al mínimo**…*
*D2:…te quedas con la primera si como las demás **son multiplicar** a partir de la primera…*
*A2: es que las demás son **amplificaciones** y lo otro es **reducido***

En el G2, tenemos que de los ocho equipos solamente tres de éstos manifiestan implícitamente el uso de la equivalencia de razones señalando que los porcentajes 60% y 40% también serían otra manera de expresar la razón 3:2. Únicamente en el equipo E4 (G2) se menciona la simplificación como el procedimiento que les permite reconocer la equivalencia entre las razones expuestas en las dos primeras afirmaciones de la tarea. Mostramos un fragmento del trabajo de este equipo.

C10: ahora… El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426. Esto es una relación que hace entre las personas, es una, una… lo mismo de arriba pero utilizando las personas
A10: el número
B10: el número total, es que la parte de arriba, notación que lo hecho por calculadora es una simplificación de estos datos de aquí abajo, es una simplificación

CPr2. Relación entre la diferencia y la suma de los elementos de razones equivalentes[85]

En los equipos E7 y E8 del G1 y en el E3 del G2 se hace alusión a una propiedad que relaciona la diferencia y la suma de los elementos de dos razones equivalentes. Se percibe el uso de tal propiedad en el extracto de la conversación dada en el equipo E8, del G1:

C7: …, por tanto ***si a 17139 le restamos 11426*** *obtenemos como resultado que* ***5713*** *participantes prefieren la Bola Cola por tanto esto equivaldría a* ***un quinto (1/5)*** *porque habíamos dicho que* ***hay 5 grupos****…*

Señalamos que durante la planificación de la sesión y de la tarea, además en la conjetura planteada para esta tarea no se consideró como posibilidad que los estudiantes llegaran a observar o aplicar la propiedad descrita, en consecuencia, la detección de su uso ha resultado ser una evidencia clara de que la tarea permitió movilizar en los estudiantes otras "ideas relevantes".

CPr3. Concepción sobre la suma de los elementos de la razón

En diez de los doce equipos del G1 y en seis de los ocho equipos del G2, se hace presente la concepción de que si dos cantidades de magnitud "A" y "B" se relacionan bajo cierta razón *a:b* entonces el total de elementos comparados es $a+b$. La idea de que la primera afirmación únicamente hacía referencia a 5 encuestados y que en la segunda afirmación se refería a 28565 permeó muchos de los razonamientos de los estudiantes, a pesar de la contradicción que se da al considerar ambas posibilidades. Creemos que esta idea puede estar determinada o asociada con el tipo de magnitud involucrada, pues las cantidades comparadas han de poder sumarse y ser discretas, además sólo ha de estar involucrada 1 magnitud para que se puedan sumar.

A continuación mostramos un fragmento de la conversación dada en el equipo E2 (G1) con el objetivo de ejemplificar esta concepción.

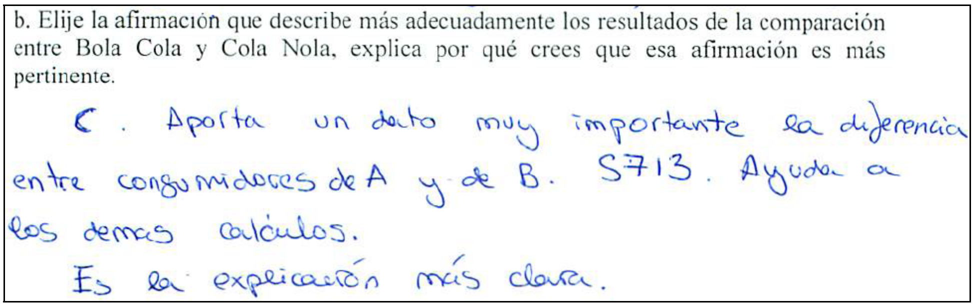
[85] Esta propiedad establece que si $a:b=c:d \Rightarrow (a-b):(a+b)=(c-d):(c+d)$, con $a>b, c>d$.

B21: pues expresarlo en forma de fracción… o diecisiete mil ciento treinta y nueve partido la suma entre los dos, que serían las personas totales a las que les han preguntado…

Otro ejemplo manifestado en el equipo E4 del G2 es el siguiente:

C10: mira, mira que yo he puesto en mi pregunta que la (a), pero yo si me refiero a lo que es que me den datos precisos con ésta ***sabemos el total de personas*** *que hay* ***sumándolas***

En la Figura 7.12 se aprecia un ejemplo de la concepción CPr3 procedente de la producción escrita del equipo E8 del G2.



b. Elije la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.

C. Aporta un dato muy importante la diferencia entre consumidores de A y de B. 5713. Ayuda a los demas calculos.
Es la explicación más clara.

Figura 7.12. Concepción CPr3 manifestada en el equipo E8 del G2

Interpretamos que la concepción descrita responde a una construcción parcial del concepto de razón que funciona en algunos contextos o casos particulares pero no en otros (Hitt, 2007). En relación con esta concepción hemos considerado que:

Si las cantidades comparadas son números naturales, como en el caso de la encuesta, la razón 3:2 ciertamente podría referirse a 5 elementos en total que es la suma de 3 y 2, pero también la misma razón podría referirse a 10, 15, 20, 25…, 28565… etc. La inferencia mostrada por los estudiantes responde a una visión estática de la razón y no al carácter "variable" de la razón, característica intrínseca al concepto que en términos generales describe una relación entre múltiples pares de cantidades.

La aplicación de esta idea a la razón 17139:11426, de la segunda afirmación, puede responder a una sobre-generalización de lo observado y aplicado en la primera afirmación al sumar 3 y 2, esto es que a partir de un caso sencillo extrapolan a otros casos con cantidades mayores.

A partir de la concepción que podríamos resumir como "*si a:b entonces hay a+b elementos*" se infiere que por un lado se encuestó a 5 personas en total y por otro a 28565 personas en total, dándose así una contradicción evidente que los estudiantes no percibieron. Esta idea apareció con posterioridad en la resolución de toda la tarea por la mayor parte de los estudiantes de los dos grupos, o sea se utilizó frecuentemente.

Consideramos que ésta concepción puede estar asociada al tipo de magnitud implicada (discreta) y estar relacionada con el hecho de que el todo es un dato desconocido. Intuimos que la relación parte-todo podría constituir un obstáculo en la comprensión de la razón como relación dinámica. En la relación parte todo $\frac{a}{b}$ se cumple que la unión de las partes es igual al todo $\frac{a}{b}+\frac{b-a}{b}=\frac{b}{b}=1$, en la representación simbólica y gráfica de la fracción se visualiza que la diferencia entre el total de partes y la cantidad de partes que se han tomado resulta en las partes que constituyen el "complemento" de las tomadas. Por su lado la razón *a:b* expresa la relación multiplicativa en un conjunto en que no necesariamente hay $a+b$ elementos (Figura 7.13)

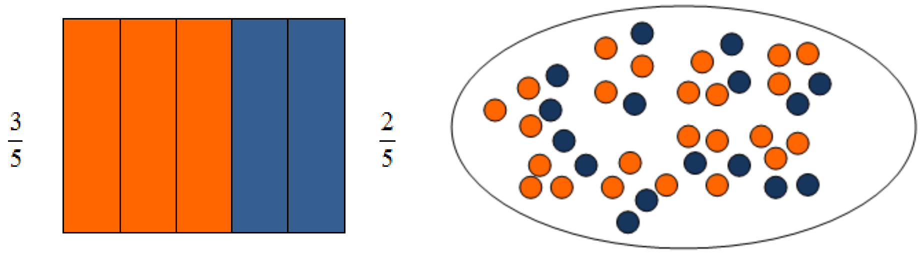


Figura 7.13. Relación parte-todo $\frac{3}{5}$ o $\frac{2}{5}$ y razón $3:2$ o $2:3$

Con base en este resultado consideramos que una posible vía de continuación es estudiar cómo la comprensión sobre la relación parte-todo favorece u obstaculiza la comprensión de los demás subconstructos de los números racionales, en particular la comprensión de la razón.

Resumen

En ocho de los doce equipos del G1 y en cinco de los ocho equipos del G2 se mostraron evidencias de la comprensión de la equivalencia de razones. En la mayor parte de los equipos se dieron nuevos ejemplos de razones equivalentes a 3:2 o hicieron alusión a la "amplificación o simplificación" como procedimientos para hallarlas, sin embargo la mayor parte de los equipos del G1 (9 de 12) y del G2 (5 de 8) no usaron la propiedad en el análisis de la pregunta 1, esto se detallará en el apartado que aparece después de este recuadro.

Observamos que tres equipos del G1 y uno del G2 mostraron comprensión, al menos intuitiva, de la propiedad de las razones equivalentes relativa a la diferencia y suma de los elementos de cada una, la detección de esta propiedad fue inesperada debido a que en la planificación de la sesión no se había considerado la posibilidad de que los estudiantes la manifestaran.

La observación de las actuaciones en la Tarea 2 nos permitió detectar una concepción de los estudiantes que no ha sido expuesta en otras investigaciones, ésta se refiere a que a partir de la suma de los elementos de la razón se infiere el total de elementos comparados. Diez de los doce equipos del G1 y seis de los ocho equipos del G2 la manifestaron de una u otra manera en la resolución de toda la tarea. Consideramos que esta concepción está vinculada a la relación parte-todo que podría constituir un obstáculo para la comprensión del carácter dinámico de la razón, no obstante la confirmación de esta suposición requiere de un estudio más a fondo de la cuestión.

7.2.1.4 Aplicación de las Propiedades de la Razón

El objetivo de la primera cuestión de la tarea es concluir si las tres afirmaciones hacen referencia a resultados de una misma encuesta, éste no era un punto que a simple vista se pudiera decidir pues debían considerarse algunas ideas relacionadas con las propiedades de la razón (Ver Planificación de la Tarea 2, Apartado 6.1.1.1).

En primera instancia observamos que todos los equipos de ambos grupos tomaron como cierto el hecho de que las tres afirmaciones se referían a resultados de la misma encuesta, lo cual es incorrecto. Sólo en el equipo E5 (del G2) la estudiante codificada por C3 les plantea a sus compañeros que la 1ª afirmación no forma parte de los resultados de la misma encuesta, sin embargo su razonamiento es superficial pues se basa en el hecho de que la afirmación no indica las personas mientras que las otras afirmaciones sí. Este hecho es significativo porque nos muestra que ninguno de los estudiantes realizó un análisis de las tres afirmaciones tomando en cuenta las consideraciones matemáticas de la razón.

De modo general, los razonamientos mostrados en la resolución de toda la tarea, y en particular en el ejercicio 1, han estado determinados por la idea de que a partir de una razón se puede decir con certeza cuántos elementos en total han sido comparados (Concepción CPr3, Apartado 7.2.1.3).

Agrupamos las justificaciones mostrados por los estudiantes en el primer ejercicio según los siguientes acercamientos:

- Las tres afirmaciones son formas distintas de decir lo mismo.
- Consideran una relación multiplicativa entre las cantidades de las afirmaciones.
- La tercera afirmación es la diferencia de los elementos de la segunda.
- Las dos razones son equivalentes.
- Otras.

La observación de estos acercamientos nos aporta información acerca de la manera en la que los estudiantes han aplicado las propiedades de la razón en la resolución del primer ejercicio. En la Tabla 7.9 se recogen los equipos de cada grupo que ponen de manifiesto cada uno de los acercamientos, a continuación se dan ejemplos.

Tabla 7.9. *Justificaciones manifestadas en la resolución de la pregunta (a)*

G1

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
a.1	*			*		*	*				*	
a.2			*					*				*
a.3		*	*		*		*	*	*			*
a.4		*			*			*				
a.5				*		*				*		

G2

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
a.1	*	*					*	*
a.2			*					*
a.3	*	*	*	*	*		*	*
a.4		*	*	*		*		
a.5		*		*	*			

Justificaciones Manifestadas

a.1: Las tres afirmaciones son formas distintas de decir lo mismo.
a.2: Existe una relación multiplicativa entre las cantidades de las afirmaciones.
a.3: La tercera afirmación es la diferencia de los elementos de la segunda.
a.4: Las dos razones son equivalentes.
a.5: Otras

Nota: El equipo E13 del G1 no participó en la resolución de la Tarea 2.

a.1. Las tres afirmaciones son formas distintas de decir lo mismo

En cinco de los equipos del G1 (E1, E4, E6, E7, E11) al menos uno de los integrantes mostró esta idea, durante la conversación se evidencia que para estos estudiantes las tres afirmaciones dicen que el refresco Bola Cola es el de mayor preferencia, o que las tres ideas son distintas representaciones de lo mismo, sin embargo no dejan ver claramente a qué se refieren con “lo mismo”. Tal acercamiento se mostró en cuatro de los ocho equipos del G2 (E1, E2, E7 y E8).

Como ejemplo mostramos un fragmento de la conversación dada en el equipo E11 (G1):

B5: para mí que sí hacen referencia a la misma encuesta son tres formas, ***están diciendo la misma cosa pero de tres maneras diferentes***
A5: (mientras escribe) pensamos que sí hacen… ***referencia a la misma*** *encuesta pero dicho de* ***maneras distintas****…*

Consideramos que los que muestran este acercamiento han tomado una decisión con muy poca información o, al menos, no han explicitado las ideas subyacentes a su argumento. No han mostrado evidencia de haber considerado el hecho de que las razones de las dos primeras proposiciones sean equivalentes o que la 3ª proposición formará parte de los resultados de la misma encuesta únicamente en el caso de que el total de los encuestados fuera de 28565 personas.

a.2. Consideran una relación multiplicativa entre las cantidades de las afirmaciones

Observamos distintos matices en los equipos E3, E8 y E12 del G1 y en los equipos E3 y E8 del G2. En todos los casos relacionaron las cantidades aplicando la multiplicación o la división. En el equipo E3 (G1) observaron que al dividir los elementos correspondientes de las dos razones (antecedentes y consecuentes) obtenían la cantidad presentada en la 3ª afirmación, mostramos como ejemplo un fragmento de la conversación.

C2: porque esto menos esto da esto, ***esto dividido entre tres da esto*** *(se refiere a 17139 entre 3, que da 5713) y* ***esto dividido entre dos da esto*** *(se refiere a 11426 entre 2, que da 5713), ¿qué te parece eh…?*

En el equipo E12 (G1) razonaron de forma similar, con la diferencia que después de dividir los dos antecedentes y observar que se obtiene la diferencia 5713 la multiplicaron por 2 viendo que se obtenía el consecuente de la segunda razón.

C8: yo aquí lo que hecho es, ***yo he dividido esto entre 3***
A8: y sale esto…
C8: y sale ***la diferencia pa ver si era el número, luego lo he multiplicado por 2*** *a ver si da este…*
A8: sí, sí este también da

Otro de los matices que observamos en la relación multiplicativa consiste en que a partir de la diferencia entre los elementos de cada razón establecen que esa cantidad es la quinta parte del total de encuestados, en cada caso. Aunque esta idea está determinada por la concepción errónea que afirma que a partir de la razón se conoce el total de elementos comparados, consideramos que es una idea que tiene cabida dentro de este acercamiento. Mostramos a modo de ejemplo un extracto de la conversación en el equipo E8 (G1).

C7: … si a 17139 le restamos 11426 obtenemos como resultado que 5713 participantes prefieren la Bola Cola por tanto ***esto equivaldría a un quinto (1/5)*** *porque habíamos dicho que* ***hay 5 grupos*** *(B7: grupos…), total que* ***si multiplicamos 5713 por 3*** *obtenemos* ***la primera cantidad*** *y si lo volvemos a* ***multiplicar por 2*** *obtenemos* ***la segunda cantidad****, y tú qué piensas…*

En la Figura 7.14 presentamos el acuerdo al que llegaron en el equipo E8 del G1, mismo que se plasmó en la producción escrita.

a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

Las tres son correctas porque si restamos 17139 y 11426 obtenemos como resultado 5713, por tanto, si multiplicamos 5713 por tres y 5713 por 2 obtenemos 17139 y 11426, respectivamente. Esto lo podemos hacer porque conocemos la razón de 3 a 2, esto significa que en un grupo de cinco personas, tres de ellas prefieren Bola Cola y 2 de ellos Cola Nola.

Figura 7.14. Ejemplo de la actuación (a.2) manifestada en el equipo E8 del G1

Consideramos que estos equipos han analizado las proposiciones, al menos procedimentalmente, y en consecuencia la decisión o respuesta mostrada está revestida de un argumento matemático más rico que en el acercamiento a.1, debido a que han observado una relación multiplicativa entre los elementos correspondientes de la razón y la diferencia de la 3ª afirmación. Si se hubiera tenido certeza respecto al total de encuestados, éste sería un razonamiento definitivamente válido.

a.3. La tercera afirmación es la diferencia de los elementos de la segunda

Este acercamiento ha sido el que con mayor frecuencia manifestaron los estudiantes, se presentó en siete de los doce equipos del G1 (E2, E3, E5, E7, E8, E9, E12) y en siete de los ocho equipos del G2 (E1, E2, E3, E4, E5, E7 y E8). Consiste en que haciendo la resta de los elementos de la segunda razón (17139 y 11426) se obtiene la cantidad de la 3ª afirmación (5713), entonces dado que observaron esa relación entre las cantidades, los estudiantes se apresuraron a concluir que efectivamente las tres afirmaciones hacían referencia a resultados de la misma encuesta, esta conclusión está determinada, al igual que otras ideas mostradas, por la concepción de que a partir de la razón se conoce el total de elementos comparados. Como ejemplo de este acercamiento mostramos lo que se dice en el equipo E4 del G2:

C10: vale, pero esto dice lo mismo, hazlo, resta la del segundo, resta esto entre esto y te sale esto
B10: ahí estamos, ya está
C10: las tres son una relación, con lo cual sí son…
B10: sí, sí
C10: sí están relacionadas…
B10: o hacen referencia a la misma…

a.4. Las dos razones son equivalentes

Únicamente tres de los doce equipos del G1 (E2, E5 y E8) utilizaron la relación de equivalencia entre las dos razones para concluir que las tres afirmaciones hacían referencia a resultados de la misma encuesta. Resaltamos que no utilizaron el término "equivalentes" sino que determinaron que el valor de las razones era el mismo (1,5). Este acercamiento se hizo presente en los equipos E2, E3, E4 y E6 del G2. Veamos un ejemplo extraído del trabajo del equipo E2 (G1).

B21: sí… porque ***tres entre dos*** *y* ***esto entre esto da la misma solución*** *es decir siguen la misma razón además…*
A21: ah… ***da igual***
C21: ***siguen la misma razón****…*

La debilidad de este acercamiento consiste en que los estudiantes de la mayor parte de los equipos que lo mostraron omitieron realizar un análisis de la tercera afirmación, esto significa que no aportaron razones para descartarla. Dado que las dos razones son equivalentes, tenemos que en cualquier caso las afirmaciones 1 y 2 harán referencia a resultados de la misma encuesta pues ambas son dos representaciones de la misma comparación. Únicamente el equipo E6 del G2 manifestó una razonamiento pertinente en relación con esta cuestión como se ha presentado en la Figura 7.9.

a.5. Otras

En dos de los equipos (E6 y E10) del G1 consideraron que el número de personas en cada caso era un dato importante para decidir si las tres afirmaciones hacían referencia a resultados de la misma encuesta. En el caso del equipo E10 se desviaron del propósito del ejercicio pues además hablan del acierto de las afirmaciones. Mostramos a modo de ejemplo un fragmento de lo hablado en este equipo.

*A12: bueno yo pienso que **todas tienen el mismo grado de acierto**, es decir no hay ninguna incorrecta, nada más que **la diferencia** entre ambas está en **la cantidad de datos de cada muestra** que maneja cada frase, cada apartado…*

Por otra parte, en el G2 los equipos E2, E4 y E5 mostraron razonamientos puntuales, uno de los cuales se basa en el reconocimiento de ciertas diferencias entre las afirmaciones, pero sin ningún argumento matemático que justifique la respuesta dada. Por ejemplo mostramos un fragmento del equipo E4 (G2):

C10: …ahora dice la pregunta decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma. Sí, lo único que es que una utiliza una fracción a razón, la otra utiliza el número de personas, es decir las personas que hay que prefieren una cosa que otra y otra se refiere, te está diciendo, que hay más que otra…

Resumen

La observación específica de la pregunta 1 ha posibilitado conocer si, y de qué manera, aplicaron las propiedades de la razón en el análisis de esa cuestión. Ninguno de los equipos de los dos grupos manifestó una respuesta correcta que estuviese basada en los análisis, parciales y por separado, hechos a las afirmaciones propuestas. Solo dos equipos del G1 y tres del G2 aplicaron la propiedad de la equivalencia, los razonamientos mostrados se vieron determinados por la concepción de que el total de encuestados se infería a partir de la razón dada. El acercamiento que se mostró con mayor frecuencia, siete de doce equipos del G1 y siete de los ocho equipos del G2, corresponde a la relación que observaron entre las cantidades de la 2ª y la 3ª afirmación, la diferencia de 17139 y 11426 es 5713.

7.2.1.5 Representaciones de la Razón

La observación de las respuestas dadas a la 4ª pregunta de la tarea nos aportaron información acerca de los conocimientos de estos estudiantes en relación con otras maneras de representar la razón “3 a 2”, específicamente se les pedía sugerencias para expresar los resultados de preferencia entre las dos bebidas.

En la Tabla 7.10 recogemos las manifestaciones expresadas en cada uno de los equipos. A continuación detallamos en qué consiste cada sugerencia y ejemplificamos con trabajos de los estudiantes.

Tabla 7.10. *Otras formas de representar la relación "3 a 2"*

G1												
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12
Rep1	*	*										*
Rep2	*	*	*			*	*			*		*
Rep3	*	*				*	*			*		
Rep4				*	*	*					*	
Ninguna								*	*			

G2								
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
Rep1								
Rep2	*		*			*	*	
Rep3			*			*		*
Rep4			*			*		*
Rep5	*	*	*	*	*		*	
Rep6					*			

Representaciones Manifestadas

Rep1: Una razón equivalente a 3:2
Rep2: Porcentajes 60% y 40%
Rep3: Fracciones parte-todo $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$
Rep4: Descripción verbal parte-todo
Rep5: Representaciones generales, sin aportar ejemplos.
Rep6: Representación gráfica de la relación 3:2

Rep1. Una razón equivalente a 3:2

Como se recoge en la Tabla x, tres de los equipos del G1 (E1, E2 y E12) aportaron una razón equivalente a "3 a 2", en todos los equipos expresaron la razón "6 a 4" como alternativa para expresar la comparación de la preferencia de refresco, tal y como lo ejemplificamos con un fragmento del trabajo del equipo E1:

A1: …y la última que dice…, eh… pues sería por ejemplo… pon si la relación es tres a dos es igual que seis a cuatro de cada diez eh…

Destacamos que en el G2 ninguno de los equipos aportó una razón equivalente como alternativa para expresar la relación "3 a 2".

Rep2. Porcentajes 60% y 40%

La representación más frecuente que mencionaron los estudiantes del G1 corresponde al porcentaje, en total siete de los doce equipos (E1, E2, E3, E6, E7, E10 y E12) manifestaron que 60% y 40% era otra forma de expresar la relación de "3 a 2". Este hecho evidencia que estos estudiantes reconocen al menos intuitivamente la relación que hay entre la razón y el porcentaje. Recordamos que en este trabajo hemos considerado, en términos generales, que el porcentaje es un tipo particular de razón, en la cual el total de elementos comparados se ha normalizado mediante el 100.

En el G2 los estudiantes de cuatro de los ocho equipos (E1, E3, E6 y E7) plantearon dicho porcentajes para expresar la preferencia de refresco.

Extraemos un fragmento procedente del equipo E3 del G1, en el cual adicionalmente se mostró un razonamiento que nos indica una comprensión de la relación entre razón y porcentaje:

*B2: porque tú dices tres y dos, eso quiere decir que habría cinco… divides cien entre cinco… el total **como si fueran cinco** personas… **cada persona** representa el **veinte por ciento**, equis es veinte… ah… pues directamente da (varios le responden ¡claro!), **el sesenta por ciento** de lo que prefieren una y ahora el **cuarenta por ciento** quieren otro, yo lo que **quería hacer es dividir cien en cinco partes cada parte es el veinte** por ciento y **tres** pues **sesenta**…*

Rep3. Fracciones parte-todo $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$

La representación de la razón "3 a 2" empleando la noción de fracción parte-todo se evidenció en el trabajo de cuatro equipos (E2, E6, E7 y E10) del G1 y en tres equipos del G2 (E3, E6 y E8). En el equipo E2 (G1) ésta manera de representar se conjugó con la idea de que el total de elementos se correspondía con la suma de los elementos de la razón, así que "el todo" considerado en la fracciones mencionadas en estos equipos fue cinco, o como en el caso del equipo E2 el todo también podría ser *28565*, que es el total de la suma de los elementos de la razón de la 2ª afirmación. Mostramos el extracto del trabajo de este equipo:

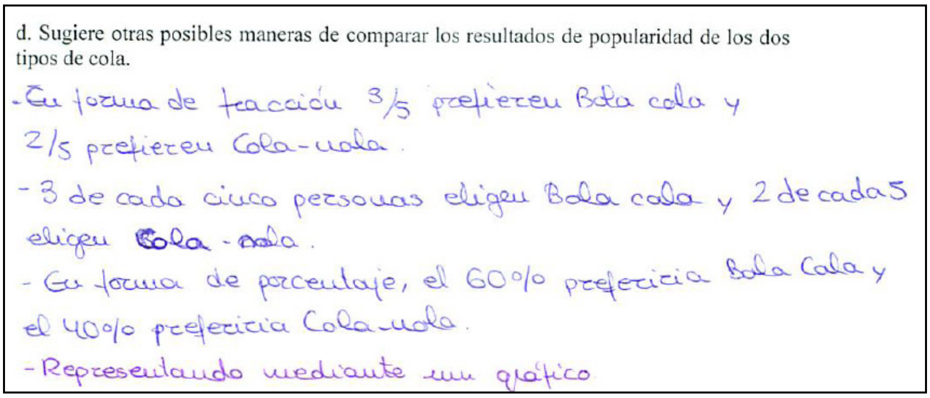
*B21: pues expresarlo en forma de **fracción** con respecto **al todo tres quintos y dos quintos** o **diecisiete mil ciento treinta y nueve** partido **la suma entre los dos**, que serían las personas totales a las que les han preguntado…*

Rep4. Descripción verbal de la relación parte-todo

En los equipos E4, E5, E6 y E11 del G1, E3, E6 y E8 del G2 se expresó una descripción verbal de la relación parte-todo determinada por la cantidad de personas que preferían la Bola Cola respecto al total de 5 personas. Veamos por ejemplo lo dicho en el equipo E11 del G1.

*B5: **tres de cada cinco** personas prefieren la Bola Cola porque a la hora de transmitírselo a la gente **es más claro**, ¿no?...*

En la Figura 7.15 presentamos un ejemplo de tres representaciones mostradas en la producción escrita del equipo E6 del G2.


d. Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola.

- En forma de fracción 3/5 prefieren Bola cola y 2/5 prefieren Cola-nola.
- 3 de cada cinco personas eligen Bola cola y 2 de cada 5 eligen Cola-nola.
- En forma de porcentaje, el 60% prefericia Bola Cola y el 40% prefericia Cola-nola.
- Representando mediante un gráfico

Figura 7.15. Representaciones Rep2, Rep3 y Rep4 manifestadas en el E6 del G2

Las nociones recogidas e interpretadas nos permiten profundizar en la situación de aula. Las actuaciones Rep1 y Rep2 corresponden a la representación de la razón como una relación parte-parte, mientras que las actuaciones Rep3 y Rep4 son representaciones de la razón como relación parte-todo. De la Tabla 7.10 se desprende que los estudiantes reconocen estos dos significados de la razón.

Rep5. Representaciones Generales, sin Aportar Ejemplos

En seis de los ocho equipos del G2 detectamos que los estudiantes mencionaron de manera general formas de representar la comparación, por ejemplo dicen porcentajes, fracciones o gráficamente. Sin embargo no dan datos explícitos relativos a la relación 3:2. En este grupo incluimos aquellas actuaciones en las que los estudiantes aportan razones, porcentajes, fracciones u otras representaciones que incluyen cantidades arbitrarias o que han sido producto de un cálculo erróneo.

Ejemplificamos este acercamiento con un fragmento extraído del equipo E2 (G2).

D14: ah… otras, otras… gráfica
A14: en forma de porcentaje, representación gráfica como ha dicho Fran
B14: mediante porcentajes y representaciones gráficas
C14: ah… fracciones

Rep6. Representación gráfica de la relación 3:2

Únicamente en el equipo E5 del G2 se aportó una representación gráfica de la razón. El estudiante C3 dice "*yo dibujé un cuadro con tres franjas, con tres regiones como el ejercicio anterior y dos son las que he puesto Bola Cola, pero no sé si lo hecho bien o no, no sé si lo he representado bien…*". La representación gráfica corresponde a una interpretación inadecuada de la razón, evidencia la concepción IR1.3 descrita en el apartado 7.2.1.1.

Resumen

En términos generales en el G1 se mostraron cuatro formas diferentes para expresar la comparación en la preferencia de refresco: otra razón equivalente, porcentajes, fracciones y descripciones verbales de la relación parte-todo. La representación porcentual de la relación 3:2 fue la que con mayor frecuencia mencionaron los estudiantes, se presentó en siete de los doce equipos del G1. Sin embargo si consideramos la relación parte-todo, expresada verbal o simbólicamente de manera conjunta, tenemos que se manifestó en ocho de los doce equipos. Los equipos del G1 que aportaron mayor cantidad de representaciones fueron el E2 y E6, con tres formas. Luego los equipos E1, E7, E10 y E12 expresaron la relación de dos maneras diferentes.

Además de las representaciones mencionadas en el G1, tenemos que en el G2 los estudiantes mencionaron, por lo menos genéricamente, las representaciones gráficas como una alternativa para expresar la relación sobre la preferencia del refresco. Indicamos que en seis de los ocho equipos se aportaron ideas sobre otras representaciones pero sin datos específicos de las mismas, tal aproximación fue la más frecuente en este grupo.

En el G2, el equipo E3 aportó cuatro maneras de expresar la relación, mientras que E1, E5, E6, E7 y E8 manifestaron, al menos, dos representaciones, aunque no aportaran ejemplos concretos de las mismas.

7.2.1.6 Procedimientos Expuestos en la Resolución Colaborativa

El carácter de la Tarea 2 es más argumentativo que procedimental, en el sentido de que la resolución de los ejercicios demandaba de más conocimientos de corte conceptual que procedimental, en ninguno de los casos se esperaba una única respuesta numérica o que obedeciera a un proceso operacional. En la Tabla 7.11 recogemos las actuaciones relacionadas con aproximaciones procedimentales mostradas en los equipos de ambos grupos, después de la misma detallamos los conocimientos detectados.

Tabla 7.11. *Conocimientos procedimentales expuestos en la resolución de la T2*

	G1					G2	
	E1	E2	E3	E7	E8	E3	E4
Proc1			*				
Proc2	*	*	*		*		*
Proc3		*					
Proc4				*		*	

Procedimientos

Proc1: Normalización de razones
Proc2: Amplificación o simplificación de razones
Proc3: Comprobación de equivalencia por medio de la división
Proc4: Regla de tres

En el G1 observamos que en la búsqueda de razones equivalentes, los estudiantes multiplican ambos términos por un mismo número (amplificación), además para comprobar la relación de equivalencia entre dos razones dividen el antecedente entre el consecuente, en cada caso, con el fin de hallar el valor de cada razón y verificar si estos valores son iguales o no.

Los equipos E1, E2, E3 del G1 aplicaron la amplificación en la búsqueda de razones equivalentes, mostramos un extracto del equipo E2, que expone la estudiante B21:*"…que multiplicado por tres, **multiplicado por el mismo número** es equivalente…"*

Únicamente en el equipo E2 del G1 dividen el antecedente y consecuente para determinar la equivalencia entre las razones de las dos primeras afirmaciones de la tarea. La misma estudiante B21 expresa: "*sí… porque tres **entre** dos y esto **entre** esto da **la misma solución** es decir siguen la **misma razón** además…*"

Observamos que para expresar la razón de manera porcentual el equipo E7 (G1) aplica la regla de tres como método para conocer la expresión porcentual de "la razón 3 a 2".

*D6: pero si hace… **cinco es el cien por cien**, pues tres es… setenta y cinco…*
*A6: pon **la regla de tres** ahí…*

En el G2, uno de los estudiantes del equipo E3 hace referencia al uso de la regla de tres como una forma de verificar la equivalencia entre las razones de las dos primeras afirmaciones de la Tarea 2, para este fin establece una relación en una de las partes y un todo "supuesto", en este caso utiliza el 10 como todo.

C12: porque para la primera hecho una regla de tres que lo demuestra perfectamente
B12: yo eso no lo entendido...
C12: porque mira yo he cogido porque dice la razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2, pues Bola Cola tres y Cola Nola dos, ¿no?, pues yo he cogido y he dicho 3 son 17139 que lo pone la segunda afirmación y 10, porque será 3 de cada 10 ¿no?...

El equipo E4 (G2) aplica la simplificación de razones para verificar la equivalencia de las razones, mostramos un fragmento que lo ejemplifica:

B10: yo voy hacer, yo ahí discrepo un poquillo, yo lo que veo que esto y esto es lo mismo, que hacen los dos a razón, salvo que éste utiliza el número total y éste es una simplificación, porque ambos están divididos por el mismo número y te da dos y tres…

En el G1 los equipos E2, E3, E12 se manifestaron otras formas para escribir la expresión "3 a 2" porcentualmente, sin embargo en el equipo E3 observamos que uno de los estudiantes plantea la estrategia de la normalización, que es una manera razonada para expresar porcentualmente una razón, esta técnica busca una razón equivalente a la dada, pero cuyo consecuente sea 100.

*B2: pues ya está…, **cada persona** representa **el veinte por ciento**…, el **sesenta** por ciento de lo que prefieren una y ahora el **cuarenta** por ciento quieren otro, yo lo que quería hacer es **dividir cien en cinco** partes, **cada parte es el veinte** por ciento y tres pues sesenta…*

7.2.2 Conocimientos Manifestados en la Puesta en Común

En este apartado incluimos las actuaciones que mostraron los estudiantes respecto a la razón durante la puesta en común de la Tarea 2.

En el G1 la investigadora pidió la participación voluntaria de los estudiantes y pasó al frente un alumno (A8) representando al equipo E12, su participación evidenció cómo al estudiar las tres afirmaciones fueron capaces de detectar relaciones numéricas entre las cantidades mostradas en las proposiciones, sin embargo expresó que no sabían el por qué de estas relaciones evidenciado así un desconocimiento de la aplicación de las propiedades matemáticas implicadas en la respuesta de la primera pregunta:

*A9: hemos puesto que se relacionan entre ellas porque hemos dividido**, no sabemos exactamente por qué**, pero hemos dividido diecisiete mil ciento treinta y nueve entre tres saliendo eh… cinco mil setecientos trece, después hemos restado las dos cantidades y nos sale lo mismo también entonces creemos que hay una relación...*

Este estudiante también señala la manera en la que han interpretado la expresión "la razón es de 3 a 2", cuando la investigadora les pregunta ¿qué significa tres a dos?, éste responde:

A9: de cinco personas, tres prefieren Bola Cola y dos prefieren Cola Nola…

En relación con las propiedades de la razón, indicamos que durante la puesta en común se trató la equivalencia de razones, la investigadora les plantea ¿por qué decir seis a cuatro es equivalente a decir tres a dos?, ante lo que el estudiante participante responde:

*A8: porque se **duplica**… el numerador y el deno…*

La idea de equivalencia manifestada está relacionada con el procedimiento común aplicado en la búsqueda de fracciones o razones equivalentes, multiplicar ambas cantidades por un mismo número. Otro de los estudiantes (A9) participa durante este episodio, plantea a la investigadora su duda en relación con el procedimiento aplicado en la búsqueda de razones equivalentes, de su participación se desprende que no conoce qué número o tipos de números pueden utilizarse al amplificar la razón.

*A9: …es que tengo una pregunta, ¿la relación la estamos **duplicando siempre**?... ah… por **ocho**, por **siete**… ah vale pero que sea **el mismo** para…, antecedente y consecuente, ¿**decimal** también podría ser?...*

Posterior a la intervención del estudiante, la investigadora dedica un espacio para promover la comprensión de la idea de equivalencia de razones, este aspecto lo detallaremos en el apartado "*Aportaciones de la investigadora respecto a la noción de razón*" (Apartado 7.9.1).

Durante la puesta en común también se manifestaron ideas iniciales relacionadas con otra de las características o interpretaciones de la razón, la investigadora les plantea la siguiente cuestión

I: …**la razón es una afirmación mediante la cual comparamos dos cantidades**, una** cantidad **"a"** y una cantidad **"b"** de elementos**,** ahora a partir de la razón **¿podemos saber cuántos elementos en total hay, o se están comparando?

En esta situación el estudiante A9 vuelve a participar manifestando que:

A9: no porque…, no porque ya estamos diciendo que podemos hacer la equivalencia, ***que cambiará*** *dependiendo de la equivalencia que le demos* ***habrá una cantidad total*** *u otra, o* ***sea el número total no lo podemos saber****…*

Su respuesta evidencia un desacuerdo con la idea que la investigadora busca explorar. Ella desea tratar el hecho de que no se puede, en todos los casos, inferir el tamaño del conjunto comparado a partir de la razón entre sus elementos, mientras que la respuesta negativa del estudiante es correcta vemos que el razonamiento ofrecido por el mismo no lo es, su razonamiento refleja la creencia de que la suma de antecedente y consecuente da el total de los elementos, se desprende que si la razón es 3:2 hay cinco elementos, si la razón es 6:4 hay diez elementos o sea según su argumento el total de personas va cambiando según las razones equivalentes consideradas. Ante esta situación la investigadora ofrece algunos contraejemplos con el fin de promover la comprensión de esta idea, detallamos en el apartado "*Aportaciones de la investigadora respecto a la noción de razón*" (Apartado 7.9.1).

En el G2 al llegar a la puesta en común el estudiante C14 pasó al frente para exponer las ideas que se habían acordado en su equipo, E2.

En relación el primer ejercicio dice "…decide si las tres afirmaciones hacen referencia a resultados de la misma encuesta, explica. Hemos puesto que sí porque tienen el mismo resultado. Por ejemplo, la segunda si hacemos la diferencia nos sale la tercera, ¿no? el cinco mil setecientos trece, y el de tres a dos y ese… pues no sale el mismo, y el porcentaje". En el aporte de C14 podemos observar que han logrado detectar distintas relaciones numéricas entre las cantidades de las afirmaciones, no obstante no argumentan a qué se deben tales relaciones, la participación del estudiante refleja la presencia de las aproximaciones (a.3) y (a.4) descritas en el apartado "Aplicación de las propiedades de la razón en una situación cotidiana" (Apartado 7.2.1.4). En la revisión de la misma pregunta otros estudiantes (B12 y C12) participaron con aportes basados en conocimientos procedimentales, por ejemplo:

B12: nosotros lo que hemos hecho en el primero ha sido dividir diecisiete mil ciento treinta y nueve entre tres y da cinco mil setecientos trece y once mil cuatrocientos veintiséis entre dos y también da cinco mil setecientos trece, por eso hemos deducido que tienen relación las tres.

Posteriormente interviene el estudiante A12 diciendo "*la relación es la misma ¿no?*", la investigadora le pregunta *"¿qué significa que la relación sea la misma?"* y el estudiante agrega *"pues um… que la proporción de personas que beben una con respecto a la otra es la misma"*. En esta aportación detectamos el reconocimiento de la equivalencia de razones en las dos primeras afirmaciones de la tarea.

El estudiante A9 aporta lo hecho en su equipo, dice "*nosotros hicimos justo eso, dividimos tres entre dos dio uno con cinco, luego la dos dio uno con cinco, es una proporción, a lo mejor sería ciento cincuenta por cada cien, sería como porcentaje, se puede expresar así también y para saber los participantes totales, abajo dice que hay cinco mil setecientos trece, arriba no te lo explica abajo sí, eso por tres en un lado y* *por dos en el otro te da justamente los números de arriba entonces si tu sumas eso te da el total…*” Su aporte es otro ejemplo del predominio de conocimientos procedimentales en los razonamientos ofrecidos por los estudiantes, no obstante deseamos rescatar el uso de la equivalencia de razones y la relación que plantea el estudiante entre la razón y el porcentaje. En la participación del estudiante también observamos que está reflejada la concepción CP3 en la que a partir de la razón infieren el total de elementos comparados.

Resumen

Durante la puesta en común de la Tarea 2, en ambos grupos, se pusieron de manifiesto las siguientes ideas iniciales:

- los estudiantes participantes ofrecieron una interpretación correcta de la expresión “la razón 3 a 2”, diciendo que en un conjunto de 5 elementos, hay 3 elementos de un tipo y 2 de otro tipo,
- se expresaron razonamientos basados en conocimientos procedimentales,
- se puso de manifiesto lo que significa que dos razones sean equivalentes,
- se expresó que la amplificación de la razón es un procedimiento válido en la búsqueda de razones equivalentes,
- se hizo presente la idea errónea de que a partir de la razón se puede inferir el total de elementos comparados.

7.2.2.1 Procedimientos Expuestos en la Puesta en Común

Durante la puesta en común en el G1 la participación de los estudiantes evidenció únicamente el uso de la amplificación en la búsqueda de razones equivalentes, la investigadora señaló que las dos razones incluidas en la tarea eran equivalentes, lo hizo siguiendo un proceso inductivo, amplificando poco a poco la razón 3:2 por 2, 3, 4, 10 luego multiplicó ambos términos por 5713 obteniendo así la razón 17139:11426. Durante el momento 2 no se hizo alusión a otras estrategias o procedimientos asociados a la razón.

En el G2, la participación de la estudiante B12 evidenció el uso de la división como medio para verificar la relación entre las expresiones, no obstante, este uso no está acompañado de una reflexión que justifique la aplicación de tal procedimiento ($17139 \div 3 = 5713,\ 11426 \div 2 = 5713$), lo que en realidad hace es el proceso inverso a la amplificación de 3:2 por 5713.

B12: nosotros lo que hemos hecho en el primero ha sido dividir diecisiete mil ciento treinta y nueve entre tres y da cinco mil setecientos trece y once mil cuatrocientos veintiséis entre dos y también da cinco mil setecientos trece, por eso hemos deducido que tienen relación las tres.

En la participación de la estudiante C12 se refleja el uso de la regla de tres, la utiliza para relacionar una de las partes con un “todo supuesto” de 10 personas, hace lo mismo con otra de las partes. Mediante el procedimiento halla en los dos casos un total de

57130, cantidad que, suponemos, relaciona con una de las afirmaciones de la tarea. Sin embargo tal procedimiento no es adecuado porque tal planteamiento implica otra relación entre las partes, ya no es de 3:2 sino sería 3:7.

C12: yo, cuando hemos estado trabajando individual yo lo que hecho ha sido la regla de tres, pero yo he cogido y he dicho si tres son diecisiete mil ciento treinta y nueve, diez son equis, y entonces me ha salido que era cincuenta y siete mil ciento treinta (57130) y luego lo hecho con el dos y me salía también lo mismo… (Un compañero de otro grupo le dice tres de cinco)… pues yo decía tres de cada diez personas, de cada diez que podía haber dicho de cada cinco…

Finalmente observamos que en la participación del estudiante A9 se muestra el uso de la división para calcular el valor de la razón y a través de este procedimiento afirmar si existe equivalencia entre las razones, dice "*nosotros hicimos justo eso, dividimos tres entre dos dio uno con cinco, luego la dos dio uno con cinco, es una proporción…"*

7.2.3 Resumen de las Actuaciones Manifestadas en la Tarea 2

A continuación, en la Tabla 7.12, se presenta una síntesis de las actuaciones manifestadas por los estudiantes en la resolución de la Tarea 2. En la Tabla se indica la cantidad de equipos (expresada porcentualmente) en los cuales se detectó cada concepción.

Las actuaciones identificadas con los indicadores CPr.3, IR1.3 corresponden a concepciones inadecuadas en relación con la razón, las actuaciones catalogadas con los indicadores (a.1), (a.3), (b.3) y (c.3) corresponden a aproximaciones que no son pertinentes para resolver las primeras tres cuestiones planteadas en la tarea.

Tabla 7.12. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 2*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Actuaciones en la cuestión (a).	(a.1)	Afirmar que las tres afirmaciones son formas distintas de decir lo mismo.	42%	50%
	(a.2)	Identificar relaciones multiplicativas entre las cantidades.	25%	25%
	(a.3)	Afirmar que la tercera afirmación es la diferencia de los elementos de la segunda razón.	58%	87%
	(a.4)	Aseverar que las razones de las dos primeras afirmaciones son equivalentes.	25%	50%
	(a.5)	Otras.	17%	37%
Concepciones sobre las Propiedades de la Razón	CPr.1	Concepción sobre la equivalencia de razones.	67%	62%
	CPr.2	Concepción relativa a la diferencia y suma de los elementos de razones	25%	12%

Tabla 7.12. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 2*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
		equivalentes.		
	CPr.3	Concepción sobre la suma de elementos de la razón.	83%	75%
Interpretaciones de la representación verbal de la razón	IR1.1	Tres es a dos.	75%	87%
	IR1.2	Tres de cada dos.	50%	62%
	IR1.3	En tres, hay dos y uno.	8%	37%
	IR1.4	Ninguna.	8%	0%
Actuaciones en la cuestión (b)	(b.1)	Elegir la 1ª Afirmación.	67%	100%
	(b.2)	Elegir la 2ª Afirmación.	58%	62%
	(b.3)	Elegir la 3ª Afirmación.	0%	25%
Actuaciones en la cuestión (c)	(c.1)	Elegir la 1ª Afirmación.	83%	100%
	(c.2)	Elegir la 2ª Afirmación.	25%	12%
	(c.3)	Elegir la 3ª Afirmación.	50%	62%
Representaciones de la razón	Rep1	Razones equivalentes a 3:2	25%	0%
	Rep2	Porcentajes 60% y 40%, u otros porcentajes equivalentes.	58%	50%
	Rep3	Fracciones parte-todo 2/5 y 3/5	33%	37%
	Rep4	Descripción verbal parte-todo	33%	37%
	Rep5	Mencionar formas de representar la comparación (porcentajes, fracciones o representaciones gráficas) sin aportar casos particulares.	0%	75%
	Rep6	Representación gráfica de la relación 3:2	0%	12%
Procedimientos aplicados en la búsqueda o comprobación de razones equivalentes	Proc1	Normalización de razones.	8%	0%
	Proc2	Amplificación o simplificación de razones.	33%	12%
	Proc3	Uso de la división para comprobar la equivalencia de razones.	8%	0%
	Proc4	Regla de Tres.	0%	12%

7.2.4 Logro de las Expectativas de Aprendizaje

En la planificación de la Tarea 2 (Apartado 6.1.1.1) se describe los objetivos específicos relacionados con la misma y las competencias matemáticas que podrían verse favorecidas. Esta tarea se ha relacionado con los objetivos específicos 3, 4, 7 y 12. Se había previsto que con base en las demandas cognitivas particulares requeridas en la resolución de esta tarea, y en la vinculación establecida entre los objetivos y las competencias matemáticas, era posible que se favorecieran las competencias: (a) *pensar y razonar*, (b) *modelizar*, (c) *resolver problemas* y (d) *representar*. A continuación presentamos las evidencias que sustentan el logro de las expectativas de aprendizaje relacionadas con la Tarea 2.

Logro del objetivo 3: Interpretar y realizar comparaciones entre cantidades desde las perspectivas aditiva y multiplicativa.

El logro de este objetivo supone, entre otras actuaciones, distinguir qué tipo de comparación es más apropiada para expresar la relación entre dos cantidades en una situación particular, reconocer la eficacia de una comparación multiplicativa ante una aditiva o viceversa según sean las condiciones del escenario.

En el caso de la Tarea 2 era preciso reconocer que la tercera afirmación, la cual describe una relación aditiva entre las cantidades de personas, no aporta información para resolver la tarea ya que no se conoce el número de personas respecto del cual se ha establecido esa diferencia. Este reconocimiento debía de manifestarse explícitamente en la resolución del ejercicio (a) para concluir que las tres afirmaciones no hacen referencia necesariamente a resultados de una misma encuesta. En el análisis de las actuaciones mostradas en esta cuestión (Apartado 7.2.1.4) observamos que todos los equipos de ambos grupos decidieron que las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta basándose en distintas razones, siendo la más frecuente la creencia de que la tercera afirmación (comparación aditiva) corresponde a la diferencia de los elementos de la razón descrita en la segunda afirmación (comparación multiplicativa), ésta idea se mostró en siete de los doce equipos del G1 (58,3%) y en siete de los ocho equipos del G2 (87,5%), la misma estuvo determinada por la concepción de que a partir de la suma de los elementos de la razón se conoce el total de elementos comparados.

En el análisis de la resolución de la tercera cuestión de la tarea (Apartado 7.2.1.2, puntos (c.1) y (c.3)) detallamos que la elección de la afirmación más eficaz para un anuncio publicitario estuvo repartida prácticamente en la misma medida entre la primera y última afirmación, referidas respectivamente a la comparación multiplicativa dada mediante la razón y la comparación aditiva sugerida por la diferencia entre las cantidades. Sin embargo las razones que sustentan tales elecciones no evidencian que hayan razonado sobre el hecho de que si no se conoce el total de elementos del conjunto la diferencia no es un dato que aporte información útil.

En la resolución de la cuestión (c) observamos que únicamente en el equipo E12 del G1 y en el E6 del G2 se expuso, en relación con la interpretación de estos dos tipos de comparaciones, un argumento matemático un tanto “intuitivo” pero al fin y al cabo evidencia que se ha interpretado adecuadamente la comparación aditiva expuesta en la tercera afirmación de la tarea, esta aportación la hemos descrito en el punto (c.3) del Apartado 7.2.1.2.

Considerando que el análisis de las actuaciones mostradas en la primera y tercera cuestión ha evidenciado que los estudiantes razonaron, sin emplear nociones matemáticas, sobre por qué la comparación aditiva no es útil para expresar la preferencia entre los refrescos, concluimos que el objetivo 3 no se logró y por lo tanto no podemos afirmar que la competencia *pensar y razonar*, tal y como se ha concebido en la planificación de este estudio, se haya visto favorecida.

Logro del objetivo 4: Interpretar el significado de la razón, de sus elementos o del valor racional de la misma en distintas situaciones.

Del análisis de las cuestiones (a), (b) y (c) descritas en el apartado "Conocimientos manifestados en la resolución colaborativa" de la Tarea 2 (Apartados 7.2.1.2 y 7.2.1.4) se desprende que los estudiantes de ambos grupos no lograron traducir las afirmaciones de la tarea y todas las condiciones de la situación en estructuras matemáticas que posibilitaran dar respuesta a las preguntas. Desde esta perspectiva consideramos que la competencia *modelizar* no se estimuló con la resolución de la Tarea 2, las carencias conceptuales de los estudiantes sobre la razón incidieron en esta situación.

Debido a nuestro interés investigador por conocer las concepciones iniciales de los estudiantes en torno a la razón detectamos distintas actuaciones relacionadas con la interpretación de la expresión "*la razón es de 3 a 2*", éstas se han descrito en la p.402. Traemos a colación el hecho de que una interpretación adecuada de la razón, descrita en el acercamiento IR1.1, ha sido la más frecuente en ambos grupos, la misma se presentó en nueve de los doce equipos del G1 (75%) y en siete de los ocho equipos del G2 (87%). No obstante subrayamos que la presencia de este acercamiento únicamente nos informa sobre la manera en la que han decodificado esa expresión y no sobre las implicaciones de tal interpretación en la resolución de las cuestiones. Este acercamiento evidencia que los estudiantes realizaron una lectura de la expresión "*la razón es de 3 a 2*", por lo que consideramos que la competencia *representar* se ha trabajado, aunque reconocemos que de un modo incipiente motivo por el cual afirmamos que se ha trabajado en un nivel de reproducción.

Logro del objetivo 12: Aplicar la noción de razón y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.

Las evidencias sobre el logro de este objetivo se encuentran en el análisis de las respuestas aportadas por los estudiantes en las primeras tres preguntas de la Tarea 2.

Como ya hemos señalado, la decisión sobre si las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta (cuestión a) se tomó en la mayor parte de los equipos de ambos grupos, sin considerar los conocimientos matemáticos previstos en la planificación de la tarea (Apartado 7.2.1.4). Los indicadores asignados a las actuaciones de los estudiantes en la cuestión (a) evidencian que ésta no se abordó con éxito ya que los estudiantes no aplicaron las propiedades de la razón en el estudio de la situación expuesta; en su lugar reconocieron algunas relaciones entre las cantidades mediante la aplicación de operaciones sencillas y los estudiantes, de la mayor parte de los equipos, basaron sus razonamientos en la creencia de que las partes de la razón (antecedente y consecuente) indican el total de elementos que se comparan. En vista de lo expuesto consideramos que el trabajo sobre este ejercicio refleja que la competencia *resolver problemas* se ha trabajado a nivel de reproducción dado que se ha mostrado un enfoque instrumental de abordaje de la cuestión a través de la aplicación de operaciones y detección de relaciones numéricas.

Tal y como se señala en el acercamiento codificado por (*a.4*) en el apartado "*Aplicación de las propiedades de la razón*", sólo tres de doce equipos del G1 (25%) y cuatro de ocho equipos del G2 (50%) hicieron referencia a la equivalencia de razones para responder a la cuestión.

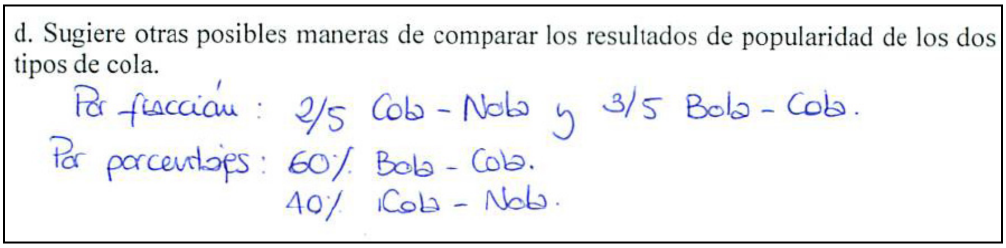
En el apartado "*Concepciones sobre las propiedades de la razón*" (p.414) presentamos una síntesis de la presencia de la equivalencia de razones y de la propiedad que contempla la relación entre la diferencia y suma de los componentes de razones equivalentes; el estudio de la presencia de estas propiedades se hizo considerando la resolución de todas las cuestiones de la tarea. La concepción CPr1 relacionada con la equivalencia de razones se mostró en ocho de los doce equipos del G1 (66,6%) y en cinco equipos del G2 (62%). La propiedad descrita en el acercamiento CPr2 (Apartado 7.2.1.3) se mostró en tres de los doce equipos del G1 (25%) y en un equipo del G2.

Según lo expuesto en el párrafo anterior al menos la mitad de los equipos participantes en cada grupo mostraron la aplicación de alguna propiedad de la razón para abordar la resolución de la tarea, en estos casos el objetivo 12 se logró y en consecuencia se dieron las condiciones para que se trabajara sobre la competencia *pensar y razonar* en un nivel de conexión.

Logro del objetivo 7: Emplear diferentes representaciones para expresar las razones.

El análisis de la última cuestión de la tarea se ha mostrado en el apartado "*Representaciones de la razón*", Apartado 7.2.1.5, en éste se describen las representaciones manifestadas por los estudiantes para expresar la relación entre las cantidades de personas que prefieren uno u otro tipo de refresco. Las representaciones mostradas atendieron no sólo a la comparación parte-parte, manifestada mediante razones equivalentes, sino que también consideraron la relación parte-todo, esta última se reflejó en el uso de las fracciones y de los porcentajes. La interpretación y aplicación de tales representaciones ha requerido de la traducción de cuestiones estructurales, como lo es el tipo de comparación. Las actuaciones observadas ponen de manifiesto representaciones que han requerido del establecimiento de conexiones entre las nociones de razón, porcentaje y fracción (parte-todo). En este sentido la resolución del ejercicio suscitó la puesta en marcha de actuaciones relacionadas con la competencia *representar* la cual se ha trabajado a nivel de conexión.

Mostramos un ejemplo procedente del equipo E7 del G1.


d. Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola.

Por fracción : 2/5 Cola - Nola y 3/5 Bola - Cola.
Por porcentajes : 60% Bola - Cola.
40% Cola - Nola.

Figura 7.16. Representaciones simbólicas mostradas en el equipo E7 del G1

7.2.5 Balance de la Tarea 2 "Preferencia en el Refresco de Cola"

En relación con la Tarea 2 señalamos que de acuerdo con las actuaciones y conocimientos matemáticos puestos de manifiesto por los estudiantes de ambos grupos, podría resultar más productivo proponer inicialmente una razón entera y posteriormente discutir lo que sucede con una razón no entera como lo es 3:2.

El carácter abierto de la tarea resulta ser una fortaleza debido a que constituyó una oportunidad para conocer cualitativamente las ideas iniciales de los estudiantes en torno a la razón, este carácter abierto también suscitó conversaciones productivas durante el trabajo colaborativo.

Los nombres de los refrescos Bola Cola y Cola Nola lejos de resultar ser un distractor dada la semejanza lingüística consideramos que promovió la concentración y cuidado al resolver la tarea, pues a sabiendas que podían fácilmente confundirse con los nombres los estudiantes manifestaron esmero en asociar cada nombre con las cantidades de preferencia de manera correcta. Mostramos un fragmento del trabajo del equipo E4 (G2) en el que se evidencia este aspecto.

C10: esto de la Bola Cola y la Cola Nola…
B10: vamos a decir Pepsi y Coca Cola pa no liarnos
A10: no, no el nombre…
C10: es que el nombre es chungo y nos podemos equivocar eh, es una cosa que hay que afirmarla y tenerla en cuenta. Venga dice…

A partir del análisis del trabajo colaborativo consideramos que podría resultar conveniente homogenizar la expresión de las dos primeras afirmaciones, la inclusión de la palabra "personas" en la 2ª proposición pudo influir en aquellos equipos que manifestaron que ahí aparecían los totales de personas encuestadas.

Enunciado original de las afirmaciones	Sugerencia
La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2.	*La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2.*
El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426.	*La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 17139 a 11426*

En relación con las cuestiones (b) y (c), consideramos que antes de trabajar la tarea se podría describir oralmente algunos indicadores generales de lo que se entiende por "más adecuadamente" o "más efectiva", debido a que en algunos casos no se evidencia que los estudiantes tengan clara la diferencia entre los propósitos de cada pregunta.

Consideramos que una de las fortalezas de la tarea es la variedad de acercamientos que admiten las preguntas abiertas que la componen. Por ejemplo en el equipo E5 (G2) se manifiestan tres respuestas distintas a la cuestión (c).

C3: sin embargo ahora elegido la tercera, ¿por qué has elegido la primera?
C5: no, yo he elegido la segunda (C3: ah… la segunda), yo en todas he puesto la segunda, (B5: por qué)… porque sigue incitando más al ver más gente
B5: yo he puesto la segunda y la tercera…

Al explorar las dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver las tareas observamos que en el caso de la Tarea 2 el formato abierto de las preguntas, cuyo tratamiento requiere de la formulación de razonamientos verbales y de la aplicación de propiedades, generó dificultades en los estudiantes de ambos grupos quienes mostraron su falta de experiencia en la expresión de argumentos; además indicamos que ninguna de las cuestiones planteadas requería de la aplicación de un algoritmo o solicitaba una respuesta numérica única.

Aunque en ningún momento se les pidió que usaran el lenguaje matemático convencional observamos que en algunos casos manifestaron la dificultad en expresar sus ideas intuitivas de una manera formal.

En tres de los doce equipos del G1 (E1, E5 y E6), se mencionó la dificultad para expresar la respuesta. Por ejemplo en el equipo E1:

A1: o sea tres frente a dos el total es cinco, yo entiendo que el total es cinco…
C1: ¿cómo explico eso?

Consideramos que en muchos casos los estudiantes confunden el no saber expresarse con no comprender las nociones, el siguiente ejemplo lo extraemos del trabajo del equipo E5 del G1 en el que el estudiante C3 expresa la dificultad de explicar, sin embargo su compañera le señala si lo que no sabe es el por qué. Esto es distinto a no saberlo expresar, la siguiente intervención de C3 indica que no comprende.

C3: es que no sé explicar…
B3: tú no sabes el por qué son las tres de la misma encuesta…

En el G2, durante la fase de trabajo colaborativo, no se dieron muestras de dificultades para expresar sus ideas, aunque los razonamientos expuestos carecieran de fundamento matemático.

7.2.6 Revisión de los Supuestos Relativos a las Posibles Actuaciones

En la planificación de la Tarea 2 (Apartado 6.1.1.1) se enunciaron los supuestos en relación a las posibles actuaciones que podrían manifestar los estudiantes.

Después de la puesta en práctica de la Tarea 2 observamos que los estudiantes no manifestaron abiertamente tener dificultades durante la resolución de la primera cuestión, esto no quiere decir que la resolvieran exitosamente, de hecho ninguno de los equipos de los dos grupos la respondió acertadamente, observamos que los estudiantes abordaron la pregunta de una manera superficial, sin aplicar conjuntamente las propiedades de la razón, no obstante reconocemos que lo hicieron con las herramientas cognitivas de que disponían. Un conocimiento procedimental básico fue utilizado para detectar relaciones entre las cantidades descritas en cada afirmación no obstante no dieron muestra de conocer el trasfondo matemático de esas relaciones.

Verificamos que en la búsqueda de otras representaciones de la razón 3:2 los estudiantes mostraron más frecuentemente la expresión porcentual y la relación parte-todo, ninguno de los equipos del G1 mostró representaciones gráficas ni hicieron referencia a relaciones aditivas. En el G2 sí mencionaron las representaciones gráficas como una posible forma de expresar la comparación de la tarea, no obstante, únicamente un equipo mostró una representación gráfica específica, el resto de equipos las mencionaron de manera genérica. Hemos detectado una fuerte concepción ligada a la razón, que no se consideró en el momento en el que se enunció la conjetura relativa a esta tarea, ésta se refiere a la idea de que a partir de la suma del antecedente y consecuente se obtiene el total de elementos comparados, la presencia de esta concepción nos invita a continuar promoviendo la comprensión de la razón como expresión de una *relación* multiplicativa entre cantidades, cuya naturaleza no es fija o estática, como lo es un cociente, sino dinámica.

7.3 TAREA 3

7.3.1 Conocimientos Manifestados en la Resolución Colaborativa

En ambos grupos de estudiantes, en relación con la noción de porcentaje, se recogieron actuaciones en las que se manifestaron aproximaciones que se han clasificado como a continuación se recoge:

- Acercamientos procedimentales al porcentaje.
    - Esquemas en el cálculo del porcentaje por regla de tres.
    - Reconocimiento de la unidad de referencia.
    - Desconocimiento de la regla de tres.
- Interpretación del porcentaje.
    - Interpretación adecuada del porcentaje.
    - Interpretación del porcentaje como una media o suma.
    - Interpretación incorrecta del signo del porcentaje.
    - Interpretación que relaciona directamente el tamaño de un territorio y el porcentaje.
- Relación entre aumento absoluto (aditivo) y relativo (multiplicativo).

7.3.1.1 Acercamientos Procedimentales al Porcentaje

En la Tabla 7.13 mostramos los acercamientos expresados en cada uno de los equipos de los grupos G1 y G2, respectivamente. Los detallamos y presentamos ejemplos extraídos de los trabajos colaborativos.

Tabla 7.13. *Acercamientos procedimentales al porcentaje*

G1	E1	E3	E4	E5	E7
NP1	*	*	*	*	*
URef	*	*	*		*
Error RT				*	

G2	E1	E2	E3	E4	E5	E9
NP1	*	*	*	*	*	*
URef	*	*				*
Error RT					*	

Acercamientos

NP1: Cálculo del porcentaje por regla de tres.
URef: Reconocimiento de la unidad de referencia.
Error RT: Errores en la aplicación de la regla de tres.

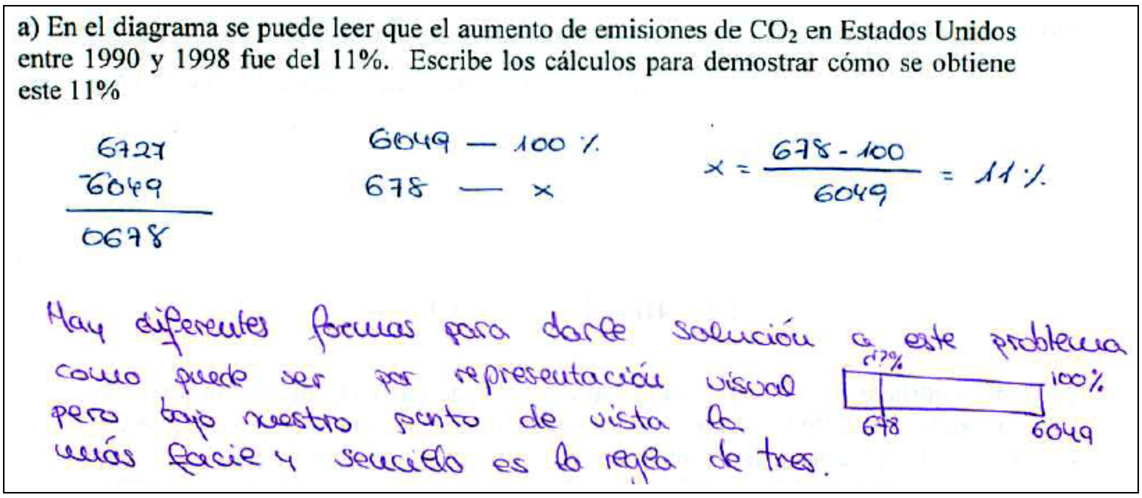
NP1. Cálculo del porcentaje por regla de tres

En todos los equipos de los dos grupos se aplicó la regla de tres como único procedimiento para abordar la primera cuestión de la tarea. Tales actuaciones nos permiten confirmar el supuesto expuesto para esta sesión, el cual hace referencia a la posibilidad de que los estudiantes recurrieran de modo general a esta técnica para obtener un porcentaje.

A modo de ejemplo mostramos un fragmento del trabajo del equipo E4 del G1.

B7: en el primer ejercicio de los porcentajes de CO_2 yo hecho, he restado el 6727 menos 6049 y me ha dado 678 y luego hecho una regla de tres, he dicho que si 6049 es el 100%, ¿678 cuánto es? con lo que me da un 11%...

En la Figura 7.17 presentamos un ejemplo procedente de la producción escrita del equipo E4 del G1. En las anotaciones tomadas por el grupo durante la puesta en común se observa que en este equipo valoran la regla de tres como el procedimiento más fácil, opinión que posiblemente se deba a lo familiar que les resulta esta técnica.


a) En el diagrama se puede leer que el aumento de emisiones de CO_2 en Estados Unidos entre 1990 y 1998 fue del 11%. Escribe los cálculos para demostrar cómo se obtiene este 11%

6727
6049
0678

6049 — 100 %
678 — x

$x = \frac{678 \cdot 100}{6049} = 11\%$

Hay diferentes formas para darle solución a este problema como puede ser por representación visual pero bajo nuestro punto de vista la más fácil y sencilla es la regla de tres.

Figura 7.17. Acercamiento NP1 manifestado en el equipo E4 del G1

La estudiante F3 del equipo E3, del G2, ha sido la única alumna que manifestó aplicar otro procedimiento que permite obtener el porcentaje, no obstante reconocemos que en función de las operaciones a realizar tal procedimiento guarda similitud con la regla de tres, la diferencia está en que de esta forma se obtiene una expresión decimal del porcentaje.

F3: ya está, yo lo hecho igual… pero suponiendo, al más grande le restas el más chico y lo divides por el más chico y ya está, yo suponiendo que el 100% era el 6049…

De acuerdo con las observaciones realizadas a los datos, distinguimos distintas relaciones establecidas entre las cantidades de la tarea expresadas mediante la regla de tres. Así dependiendo de la cantidad que se toma como referencia (100%), del uso de la diferencia entre las cantidades y de la inclusión del porcentaje en cuestión (11%) un dato desconocido, agrupamos las reglas de tres según cuatro esquemas, los cuales responden a distintas incógnitas y que mostramos a continuación:

$$\text{(a)}\ \boxed{\begin{array}{l}6049 \to 100\% \\ 678 \to x \\ x = 11\%\end{array}}\quad \text{(b)}\ \boxed{\begin{array}{l}6049 \to 100\% \\ 6727 \to x \\ x = 111\%\end{array}}\quad \text{(c)}\ \boxed{\begin{array}{l}6727 \to 100\% \\ 6049 \to x \\ x = 89\%\end{array}}\quad \text{(d)}\ \boxed{\begin{array}{l}6049 \to 100\% \\ x \to 11\% \\ x = 678\end{array}}$$

Aunque las cuatro formas de planteo de la regla de tres permiten hallar valores de "x" que están relacionados numéricamente con el porcentaje en cuestión (11%), reconocemos que la forma (a) es la que conduce directamente a tal porcentaje.

En el G1, cuatro de los cinco equipos (E4, E5, E3 y E1) aplicaron el esquema (a) de la regla de tres, en este sentido tales equipos reconocieron que el porcentaje en cuestión (11%) corresponde a la diferencia relativa que hay entre las dos cantidades dado que buscaron la diferencia absoluta, 678, y utilizaron esta cantidad en el planteo de la relación. Dos equipos (E3 y E7) del mismo grupo aplicaron el esquema (b), relacionaron las cantidades de la tarea sin hallar la diferencia absoluta de modo que obtuvieron que 6727 corresponde al 111% de la cantidad inicial, posteriormente concluyen que el aumento ha sido del 11%. En el G2, los equipos E1 y E9 utilizaron el esquema (b). Destacamos que cuatro de los seis equipos (E2, E3, E5 y E9) aplicaron la regla de tres como en el esquema (c), de modo que asumieron como referente 6727, obteniendo que la menor cantidad 6049 corresponde a un 89% de 6727. Finalmente, sólo el equipo E4 planteó la regla de tres de la forma (d). En resumen, en este grupo, ninguno de los equipos aplicó la regla de tres que permite llegar a la solución de forma directa.

URef. Reconocimiento de la unidad de referencia

Hemos distinguido aquellas actuaciones en las que se evidencia que los estudiantes reconocen explícitamente la unidad de referencia a partir de la cual se calcula el porcentaje o se realiza una comparación multiplicativa. En el caso de plantear la regla de tres, los estudiantes reconocen explícitamente cuál es la unidad de referencia (el 100%), esto es una muestra de que la elección y disposición de las cantidades en tal procedimiento no se hace de manera arbitraria. Tal acercamiento se mostró en cuatro equipos del G1 (E1, E3, E4 y E7) y en tres del G2 (E1, E2 y E9). Mostramos un fragmento del equipo E9 del G2:

B6: claro pero la regla de tres es menos lioso porque si tú coges ***esto que es el 100%*** *el de 1990 ¿no?, el otro es "x", entonces tú lo que haces es multiplicar eh… 6049 por 100 y lo divides entre…, lo de 1998 por cien y lo divides entre lo de 1990 y te sale el 111%...*

Error RT. Errores en la aplicación de la regla de tres

En dos equipos, uno de cada grupo, se mostraron errores en la aplicación de la regla de tres, de modo que se evidenció que los estudiantes no manejaban del todo las pautas instrumentales de esta técnica. Por ejemplo en el equipo E5 del G1 se expresó:

C3: y ahora la regla de tres… cómo era lo de antes, qué ponemos "x" 100, y ¿qué más?
C8: "x", 100, 678 que es el cambio… (usa la calculadora) 6,0,49 entre 678 cero, cero, ay ahora no me sale, no sé qué hecho antes…
C3: ¿es éste?
C8: es el chiquitillo, pero yo ahora no sé porque habíamos puesto el chico

Resumen

Todos los equipos de ambos grupos aplicaron la regla de tres para calcular el porcentaje. En la mayor parte de los equipos del G1 se observa que la aplicación de tal técnica viene acompañada del reconocimiento de la unidad de referencia, o sea del 100%, mientras que solo un equipo mostró no manejar las reglas operativas que rigen tal procedimiento.

De los seis equipos del G2 observamos que en tres de ellos se reconoce explícitamente cuál cantidad se ha considerado como el 100%, en otros dos equipos no se reconoce este aspecto y uno de los equipos, al igual que en el G1, no manipula correctamente la regla de tres.

Hemos detectado y descrito, en las actuaciones de ambos grupos, variaciones en el planteamiento de la regla de tres dependiendo de la cantidad que se toma como referencia (100%), del uso de la diferencia entre las cantidades y de la inclusión del porcentaje en cuestión (11%).

7.3.1.2 Interpretación del Porcentaje

En relación con la interpretación del porcentaje en la situación indicamos que el estudio de las respuestas dadas a la cuestión (b) nos permitió explorar significados que atribuyen los estudiantes a tal noción. En la Tabla 7.14 mostramos los acercamientos expresados en cada uno de los equipos, a continuación los detallamos y presentamos ejemplos de los trabajos colaborativos.

Tabla 7.14. *Acercamientos sobre la interpretación del porcentaje*

G1					
	E1	E3	E4	E5	E7
InPo1	*		*		*
InPo2	*	*		*	*
InPo3	*				
InPo4	*				*

G2						
	E1	E2	E3	E4	E5	E9
InPo1	*		*	*		*
InPo2		*	*	*	*	*
InPo3	*	*			*	
InPo4	*					

Acercamientos

InPo1: Interpretación adecuada del porcentaje en la situación.
InPo2: Interpretación del porcentaje como una media o suma.
InPo3: Interpretación incorrecta del signo del porcentaje.
InPo4: Interpretación que relaciona el tamaño de un territorio y el porcentaje.

InPo1: Interpretación adecuada del porcentaje en la situación.

En la situación de la tarea "Los niveles de CO_2" el porcentaje representa el cambio relativo en las cantidades de emisión de CO_2 de distintos países o regiones medidas en dos años 1990 y 1998. Destacamos que en el ejercicio (b) es necesario decidir si es posible, y en el caso afirmativo, por qué aunque Alemania, que forma parte de la Unión Europea (UE), tiene un porcentaje de descenso en las emisiones mayor que el porcentaje de descenso de la UE.

Consideramos que una interpretación adecuada da muestra de razonamientos en los que se afirma que otros países de la UE pueden haber aumentado *la cantidad absoluta* de emisiones, de modo que al calcular el porcentaje de cambio de emisiones de la UE se obtiene una disminución porcentual menor que la disminución porcentual de Alemania. En síntesis, una visión adecuada debe informar que tales porcentajes son posibles en vista de que el total (cantidad de referencia) sobre el cual se han calculado son diferentes.

En el G1, tres equipos (E1, E4 y E7) y en el G2, cuatro equipos (E1, E3, E4 y E9) manifestaron ideas que hemos considerado aproximaciones adecuadas pues involucran matices del razonamiento expuesto en el párrafo anterior. Por ejemplo mostramos un fragmento del trabajo realizado en el equipo E4 del G1:

C10: en el ejercicio 2 no estamos de acuerdo en realidad porque…
B7: porque la Unión Europea hay muchos países no sólo uno, no es lo mismo fijarse en un país que no contamina que en muchos, porque a lo mejor hay un país de la Unión Europea que no contamina pero hay 18 que sí contaminan ***entonces unos contrarrestan a otro****…*
C10: claro además está bien expresado porque la Unión Europea son muchos países y Alemania es sólo uno, ***no tenemos los datos de todos los países*** *de la Unión Europea*

B7: y si los tuviéramos pues podríamos hacer la comparación y si es cierto que hay un error o no hay un error

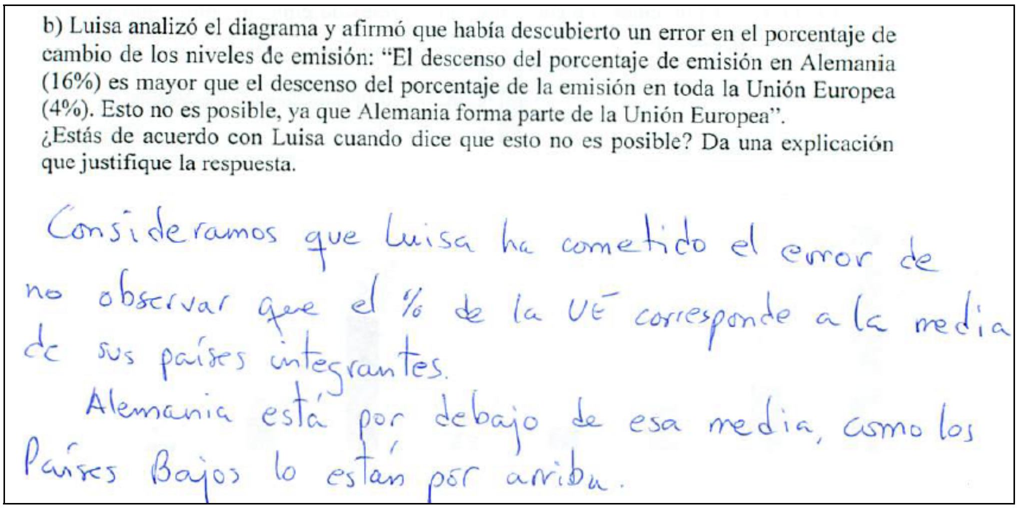
InPo2: Interpretación del porcentaje como una media o suma de porcentajes.

Es fundamental señalar que el porcentaje de emisiones de la UE no es el promedio de los porcentajes de los países que la componen (Ver Planificación de la Tarea 3, Apartado 6.2.1). Puede ser que las cantidades de emisiones de la UE en 1990 y 1998 correspondan a un promedio de las cantidades de emisiones de CO2 de los países integrantes. Considerar el porcentaje de la UE como tal promedio refleja que esta noción se asume como un dato absoluto con el que se puede operar de la misma manera que con las cantidades extensivas, lo cual constituye un acercamiento inadecuado o bien incompleto respecto a tal noción.

En ambos grupos fue el acercamiento más frecuente, en el G1, cuatro de los equipos (E1, E3, E5 y E7) y en el G2 lo mostraron cinco de seis equipos (E2, E3, E4, E5 y E9). Lo ejemplificamos con un segmento del trabajo del equipo E5 del G2:

C5: ah no, es que es en Alemania y Europa, (lee) es mayor que el descenso del porcentaje de la emisión en toda Europa. No porque Alemania… en Europa está Alemania pero otro país tiene menos y Alemania tiene más se hace ***la media*** *de eso, por lo tanto puede que Europa tenga menos nivel de eso haciendo* ***la media*** *de todos los países aunque Alemania tenga más ¿no?...*

Sin embargo, subrayamos que en algunas producciones de los equipos no nos ha sido posible dilucidar si se están refiriendo a la media de los porcentajes o la media de las cantidades de emisiones. Ejemplificamos esta observación con la producción escrita del equipo E3 del G1.


b) Luisa analizó el diagrama y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) es mayor que el descenso del porcentaje de la emisión en toda la Unión Europea (4%). Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea".
¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique la respuesta.

Consideramos que Luisa ha cometido el error de no observar que el % de la UE corresponde a la media de sus países integrantes.
Alemania está por debajo de esa media, como los Países Bajos lo están por arriba.

Figura 7.18. Interpretación del porcentaje InPo2 manifestada en el equipo E3 del G1

InPo3: Interpretación incorrecta del signo del porcentaje.

Como conocimiento previo que había de ponerse en juego al resolver la Tarea 3 está la interpretación de los signos + y – de los números enteros que representan los porcentajes de cambio. Observamos cómo algunos estudiantes no lograron aportar una interpretación adecuada del porcentaje debido a una incorrecta lectura de los signos que le antecedían. Un -8% debía interpretarse como un descenso en las emisiones de CO_2 del 8%. Tal acercamiento se ha manifestado en el equipo E1 del G1 y en los equipos E1, E2 y E5 del G2.

Por ejemplo en el equipo E1 del G1, observamos que en el aporte del estudiante F1 se prescinde del sentido positivo o negativo del porcentaje, en este caso el 16% representaba una disminución en las emisiones, de ahí el signo negativo -16%, y en consecuencia para "compensar", en términos del estudiante, otros países han de tener emisiones mayores. En tal equipo se manifestó incorrectamente la relación de orden entre números negativos, por ejemplo al comparar las expresiones -16% y -8%.

F1: sí, pa compensar el 16% tiene que haber otros países que tengan la emisión muy baja, ¿sí o no?, ¿me seguís o no?... vamo a ver, que si tú cuando haces la media, ¿tú sabes cómo se hace, no? se suman todas las cantidades y se divide pues pa que salga el 4%, el 16 es un número muy alto tiene que haber otros países que tengan un número, un porcentaje muy bajo pa compensarlo…

Mostramos a modo de ejemplo la dificultad que les resultó la interpretación de los signos en el equipo E1 del G2, no obstante también ejemplificamos cómo la experiencia colaborativa contribuye en el esclarecimiento de tal acercamiento.

D1: aunque represente un porcentaje, una disminución menor, ¿no?, ¿cómo se dice aquí?, ¿es más o menos eso?... un descenso de dióxido de carbono menor o mayor… pero en este es mayor, significativo descenso y este descenso es menor
B1: pero si esto es mayor no puede ser descenso
D1: no, pero ha disminuido en mucha cantidad o ha disminuido en poca cantidad

InPo4: Interpretación que relaciona el tamaño de un territorio y el porcentaje.

El equipo E1 del G2 y los equipos E1 y E7 del G1 pusieron de manifiesto que no era posible que Alemania tuviera un porcentaje mayor (de disminución) que el de la UE porque el territorio de Alemania es menor que el de la UE en conjunto o porque este país forma parte de la Unión, o sea porque es una parte del todo. Tal interpretación evidencia que los estudiantes relacionan directamente el "tamaño" de los territorios con el porcentaje de emisiones de CO_2, esta idea es muestra de una limitada comprensión del porcentaje pues el razonamiento omite, entre otros, la consideración de los referentes de la comparación. Por ejemplo mostramos un extracto del trabajo del equipo E1 del G1:

C1: pero... ¿cómo tiene un tanto por ciento mayor que toda la Unión Europea juntos?, ¿eso cómo?

Resumen

En síntesis, observamos que en ambos grupos la interpretación del porcentaje que se presentó con mayor frecuencia ha sido aquella en la que éste se considera como la media o como un total, es decir en esta interpretación se refleja que el porcentaje se toma como un dato absoluto con el que se puede operar de la misma manera que con las cantidades extensivas. Aunque en tres equipos del G1 y en cuatro del G2 se dieron muestras de interpretaciones adecuadas del porcentaje observamos que las mismas se vieron acompañados de la interpretación inadecuada que lo relaciona con una media.

En ambos grupos detectamos equipos que no interpretaron correctamente el signo del porcentaje. Otro acercamiento mostrado se refiere a la relación directa que establecen algunos estudiantes entre el tamaño de un territorio y el porcentaje de cambio de emisión del CO_2.

En dos equipos del G1 se mostraron al menos tres interpretaciones del porcentaje. En cinco de los seis equipos del G2 se mostraron al menos dos acercamientos y el equipo E1 presentó tres aproximaciones.

7.3.1.3 Justificaciones sobre las Comparaciones Aditiva y Multiplicativa

El estudio de las respuestas dadas a la cuestión (c) nos permitió explorar los razonamientos expuestos por los estudiantes en relación con una idea básica en el estudio de la razón y la proporcionalidad, nos referimos a la distinción entre las comparaciones aditiva y multiplicativa.

En tal ejercicio aparecen los crecimientos relativos de emisiones de CO_2 de Estados Unidos y Australia así como las cantidades de CO_2 de 1990 y 1998 que permiten obtener o visualizar los crecimientos absolutos. En la situación dos personas emiten juicios distintos en relación al país que más ha aumentado las emisiones de CO_2. La pregunta propuesta se centra en analizar las respuestas distintas de las dos personas. Consideramos que el ejercicio permitiría a los estudiantes observar que un mayor crecimiento absoluto no implica un mayor crecimiento relativo, pues este último depende de la unidad de referencia que se tome para su cálculo.

En la tabla 7.15 mostramos una síntesis de las actuaciones expresadas en cada uno de los equipos, posteriormente los detallamos y presentamos ejemplos.

Tabla 7.15. *Justificaciones sobre las comparaciones aditiva y multiplicativa*

	G1				
	E1	E3	E4	E5	E7
Co.Ad.Mu.1	*		*	*	*
Co.Ad.Mu.2	*	*	*	*	*

	G2					
	E1	E2	E3	E4	E5	E9
Co.Ad.Mu.1			*	*		
Co.Ad.Mu.2		*	*		*	
Ninguna	*					*

Acercamientos

Co.Ad.Mu.1: Aportan argumentaciones basadas en razones matemáticas.
Co.Ad.Mu.2: Aportan argumentaciones basadas en razones superfluas.

Co.Ad.Mu.1. Aportan argumentaciones basadas en razones matemáticas

Observamos que en algunos equipos los estudiantes llegaron a aportar ideas relativas a la cuestión matemática de fondo que deseábamos explorar con este ejercicio, es decir, aportaron razonamientos relativos al hecho de que un aumento absoluto mayor no implica un aumento relativo mayor o viceversa. En sus manifestaciones se tomó en cuenta la unidad de referencia a partir de la cual se calculó el porcentaje de cambio. Tal aproximación se mostró en los equipos E1, E4, E5 y E7 del G1, y en los equipos E3 y E4 del G2. Para ejemplificar mostramos un fragmento del trabajo del equipo E4 del G2 en el que la estudiante C11 reconoce que la elección de Antonio se basa en la consideración de la unidad de referencia.

C11: yo he puesto porque Luisa se basa en el gráfico, por ejemplo, que se ve aquí que hay mucha diferencia mucha más que en Australia, se basa en estos números que son más grandes, la diferencia es más grande numéricamente pero el otro se basa en el porcentaje, en el porcentaje se ve claramente que también tiene razón… uno se basa en lo que ve gráficamente, en los números mayores, pero si te das cuenta en lo que tenían y en lo que tienen, en eso se basa Antonio…

Observamos que en el razonamiento expuesto en el equipo E1 del G1, el estudiante F1 manifiesta una concepción individual, ésta se refiere a que los aumentos se tratan sólo mediante porcentajes. Su aportación refleja la comprensión de que un mayor crecimiento absoluto no implica un mayor crecimiento relativo.

F1: el aumento se mide en porcentaje o los aumentos van en porcentaje, no es de la cantidad, te pregunta por el aumento no por la cantidad…porque a lo mejor Estados Unidos puede que crezca un 1% y el otro ha crecido un 90% y a lo mejor uno tiene nada más que 20 y el otro tiene 100000, eso no tiene nada que ver, es el porcentaje…

Co.Ad.Mu.2. Aportan argumentaciones basadas en razones superfluas

En todos los equipos del G1 y en los equipos E2, E3 y E5 del G2 se manifestaron argumentos superfluos relativos a la causa de por qué Antonio y Luisa dieron una respuesta distinta a la cuestión. Tales ideas se centran en que uno se ha fijado en las barras del gráfico y otro en el porcentaje de cambio. Sin embargo observamos que en el G1 aunque en todos los equipos se mostraron ideas superficiales también, gracias a la dinámica colaborativa, se evidenciaron razonamientos que contemplaron la unidad de referencia (acercamiento anterior Co.Ad.Mu.1). Esta situación no ocurrió en el G2.

Como ejemplo aportamos un extracto del trabajo en el equipo E4 del G1:

B10: bueno pues en el ejercicio tercero hemos llegado a la conclusión de que Luisa dice que Estados Unidos tuvo un mayor aumento en emisiones de CO2 porque ella se basa en la observación del diagrama en barras y por ello Estados Unidos es mayor ya que sus barras son más elevadas que otros países y después Antonio dice que el aumento de emisión de CO2 es mayor en Australia ya que se basa en la observación de los porcentajes, entonces por ello Australia es el mayor con un 15%...
C10: pues claro, dependiendo de dónde se mire, en el porcentaje o en el diagrama pues es mayor en un país o en otro, en porcentajes es mayor Australia pero en cambio en el de barras es mayor Estados Unidos…

Resumen

En cuatro de los cinco equipos del G1 y en un equipo del G2, se mostraron simultáneamente razonamientos basados en razones y en fuentes extra-matemáticas, lo cual evidencia que aunque algunos estudiantes no razonaran con profundidad otros compañeros de equipo aportaron ideas más fundamentadas que posiblemente podrían enriquecer los acercamientos triviales.

Destacamos que en el G2, cuatro de los cinco equipos participantes mostraron razonamientos superfluos aislados o no mostraron alguno.

7.3.1.4 Conocimientos Procedimentales Expuestos en la Resolución Colaborativa de la T3

Como destacamos en el apartado 7.3.1.1, la mayoría de los estudiantes de ambos grupos aplicaron la regla de tres como único procedimiento para abordar la obtención de un porcentaje. En casos puntuales consideraron la división de las cantidades y multiplicación por cien como alternativa (estudiante F3 en G2).

Las demandas de la tarea no implicaban la ejecución de estrategias. Sin embargo, como parte de la planificación de la sesión y con el fin de promover la comprensión del porcentaje durante la puesta en común, la investigadora expuso en el G1 tres maneras alternativas a la regla de tres para hallar el porcentaje. Una se basa en la estrategia de la estimación, otra en la búsqueda conveniente de razones equivalentes y otra se fundamenta en una representación gráfica.

7.3.2 Conocimientos Matemáticos Manifestados en la Puesta en Común

En el G1 el estudiante A9 del equipo E3 participó en la puesta en común de la tarea. En su aporte inicial observamos que aplicó la regla de tres (NP1) como procedimiento para justificar cómo se obtiene el 11% implicado en el ejercicio, relacionando la cantidad inicial, 6049, con el 100% y la cantidad final 6727 con "x", aunque posteriormente hiciera la diferencia y llegara al 11%, el planteamiento elegido no justificaba directamente la obtención de tal porcentaje. Además, el estudiante explicó por qué habían elegido tal cantidad como referencia.

Estudiantes de otros equipos participaron aportando otra manera de plantear la regla de tres, por ejemplo, el estudiante F1 del equipo E1 dice "*seis mil cuarenta y nueve es a cien y la diferencia que sería seis cientos setenta y ocho es a equis*". En ambas participaciones se refleja el acercamiento NP1, descrito en el apartado "Acercamientos procedimentales al porcentaje" (Apartado 7.3.1.1). En la revisión del ejercicio (b) el estudiante A9 puso de manifiesto que en su equipo interpretaron el porcentaje como la media.

En el G2 debido a la limitación de tiempo, no hubo posibilidad de desarrollar completamente la puesta en común de esta tarea, únicamente se revisó parcialmente el primer ejercicio. En este grupo participó la estudiante C10 del equipo E4, quien expone que han aplicado una regla de tres relacionando las cantidades como a continuación $6049 \to 100\%,\ x \to 11\%$, explica que han tomado 6049 como el 100% porque es la primera cantidad en la situación y agrega que el resultado es el once por ciento de esta cantidad (señala 6049) que es… seis cientos sesenta y cinco. En su aporte se reflejan las aproximaciones NP1 y URef, descritas en el apartado "Acercamientos procedimentales al porcentaje" (Apartado 7.3.1.1).

7.3.3 Resumen de las Actuaciones Manifestadas en la Tarea 3

En la Tabla 7.16 presentamos un resumen de los conocimientos matemáticos identificados en las producciones colaborativas de los equipos de ambos grupos. En la Tabla se indica la cantidad de equipos (expresada porcentualmente) en los cuales se detectó cada concepción. Reconocemos que las actuaciones catalogadas con los indicadores CoAdMu2, InPo2, InPo3, Error RT corresponden a concepciones inadecuadas sobre el porcentaje.

Tabla 7.16. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 3*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Comparaciones aditivas y multiplicativas	CoAdMu1	Aportar argumentaciones referidas a que un mayor crecimiento absoluto no implica un mayor crecimiento relativo, o que un mismo crecimiento absoluto no implica igual crecimiento	80%	33%

Tabla 7.16. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 3*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
		relativo, esto depende de la unidad de referencia.		
	CoAdMu2	Aportar razonamientos superficiales en relación a que un mayor crecimiento absoluto no implica un mayor crecimiento relativo.	100%	50%
Interpretaciones del porcentaje en la situación	InPo1	Interpretación adecuada del porcentaje en una situación concreta.	60%	66%
	InPo2	Interpretación del porcentaje como una media o una suma.	80%	83%
	InPo3	Interpretación incorrecta del signo del porcentaje.	20%	50%
	InPo4	Interpretación que relaciona directamente el tamaño del territorio y el porcentaje.	40%	16%
Aproximaciones procedimentales al porcentaje	NP1	Usar la regla de tres para hallar el porcentaje.	100%	100%
	Error RT	Cometer errores en la aplicación de la regla de tres.	20%	16%
	URef	Reconocer explícitamente la unidad de referencia a partir de la cual se calcula un porcentaje.	80%	50%

7.3.4 Logro de las Expectativas de Aprendizaje

En la planificación de la Tarea 3 (Apartado 6.2.1) mostramos los objetivos específicos relacionados con la misma, las competencias matemáticas vinculadas a estos objetivos y las competencias, que a raíz de la dinámica de trabajo en el aula, podrían verse favorecidas. Se había previsto que la resolución del primer ejercicio, propia de objetivo específico 34 relativo al cálculo de porcentajes, podría incitar actuaciones que favorecieran la competencia *usar lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones*. La segunda cuestión de la T3 se relacionó con el objetivo específico 33 –centrado en interpretar el sentido de uso del porcentaje en distintas situaciones–, en el marco de esta cuestión se previó la posibilidad de que se favoreciera el desarrollo de las competencias: *pensar y razonar, modelizar y representar*. La resolución de la última cuestión requería de la interpretación de las comparaciones absolutas y relativas entre cantidades por lo que se relacionó con el objetivo específico 3.

Logro del objetivo 34: Calcular porcentajes de cantidades.

Las actuaciones de los estudiantes en la resolución del primer ejercicio de la tarea ponen de manifiesto que éstos han sido capaces de mostrar conocimientos procedimentales requeridos en el cálculo del porcentaje. En el apartado "*Acercamientos procedimentales al porcentaje*" (Apartado 7.3.1.1) detallamos la manera en la que los estudiantes han calculado el porcentaje. En síntesis se observó que todos los equipos de ambos grupos aplicaron una regla de tres para calcular el porcentaje, lo cual nos permite afirmar que el objetivo 34 se logró y que las actuaciones de los estudiantes reflejan que se ha trabajado sobre la competencia *usar lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones* en un nivel de reproducción dado que este procedimiento es rutinario.

Logro del objetivo 33: Interpretar el sentido de uso del porcentaje en distintas situaciones.

El segundo ejercicio de la Tarea 3 requiere de la interpretación del porcentaje como el cambio en las emisiones de dióxido de carbono en distintos países o regiones, con base en la medición hecha en dos momentos 1990 y 1998. Las capacidades que han de aplicarse en la resolución del mismo se han descrito con detalle en la planificación de la tarea (Apartado 6.2.1). En el apartado "*Interpretación del porcentaje*" (Apartado 7.3.1.2) se han descrito distintas aproximaciones que manifestaron los estudiantes. Destacamos que en el G1, tres de cinco equipos (60%) y en el G2, cuatro de seis equipos (66,6%) manifestaron acercamientos que reflejan un significado adecuado de los porcentajes implicados, en tales aportes reconocemos que se ha dado una lectura de la situación real reconociendo que el porcentaje de cambio corresponde a la comparación entre la diferencia de emisiones de los dos años respecto a la cantidad inicial emitida. Esta actuación refleja que se han empleado nociones matemáticas e interpretado la información que sobre las cantidades de emisiones aparecen en el gráfico, consideramos que el trabajo sobre este ejercicio ha constituido un espacio en el que se han trabajado las competencias *pensar y razonar* y *modelizar* en un nivel de conexión y en un nivel de reproducción la competencia *representar* en tanto se ha requerido la decodificación de información presente en un gráfico familiar para los estudiantes.

Logro del objetivo 3: Interpretar y realizar comparaciones entre cantidades desde las perspectivas aditiva y multiplicativa.

Como se describió en la planificación de la tarea, la última cuestión demandaba una reflexión, por parte de los estudiantes, quienes debían poner de manifiesto argumentaciones relacionadas con las respuestas mostradas por los dos sujetos de la situación, cada una de las cuales corresponde a un tipo de comparación (aditiva y multiplicativa). En el caso idóneo de que los futuros maestros aportaran razones matemáticas que evidenciaran que un mayor crecimiento absoluto (aditivo) no implica un mayor crecimiento relativo (porcentual), se podría confirmar que han interpretado la situación adecuadamente y en consecuencia logrado el objetivo 3.

El análisis de esta cuestión lo mostramos en el apartado "*Justificaciones sobre las comparaciones aditiva y multiplicativa*" (Apartado 7.3.1.3), destacamos que en cuatro de los cinco equipos del G1 (80%) y en dos de los seis equipos del G2 (33,3%) se manifestaron argumentos matemáticos que reflejan que los estudiantes han reflexionado acerca de por qué Antonio y Luisa sugieren respuestas distintas a la pregunta de cuál país o región tuvo el mayor aumento en las emisiones de CO_2, además en las aportaciones se observa que ha extraído e interpretado información del gráfico de barras. En vista de lo expuesto tales equipos evidencian el logro del objetivo 3 y las capacidades mostradas ejemplifican que las competencias *pensar y razonar y representar* se han trabajado, aunque en relación con la segunda competencia sólo se ha puesto en juego la decodificación de la información.

7.3.5 Balance de la Tarea 3 "Los Niveles de CO_2"

En los siguientes dos apartados presentamos las fortalezas y debilidades identificadas a partir del trabajo sobre la Tarea 3.

Señalamos que el ejercicio (a) tuvo potencial para abordar la cuestión del cálculo del porcentaje mediante distintos procedimientos. Aunque este aspecto se consideró en la planificación y llegó a plasmarse en la puesta en común en el G1, observamos también que en el trabajo del equipo E3 del G2 se trataron por lo menos dos formas para calcularlo:

B12: primero he restado esto pero luego me he dado cuenta que 6727 es el 100%, cuánto es 6049, me ha dado 89% y se lo he restado a 100 y me ha dado 11…
F3: ya está, yo lo hecho igual… pero suponiendo, al más grande le restas el más chico y lo divides por el más chico y ya está, yo suponiendo que el 100% era el 6049

Esta condición del ejercicio (a) podría aprovecharse en futuras aplicaciones de la tarea indicando a los estudiantes que lo realicen aplicando al menos dos procedimientos distintos y, si no son del todo distintos, que usen distintas representaciones para expresarlo.

En los equipos E1, E4 y E7 del G2 se evidenció que otra fortaleza del planteamiento del ejercicio (a) es que el porcentaje es un dato conocido y lo que los estudiantes han de mostrar es el procedimiento que justifica ese porcentaje, pues resultó ser un elemento que algunos estudiantes utilizaron como "mecanismo de control" del trabajo realizado. Veamos por ejemplo un fragmento del trabajo del equipo E1:

F1: el once tiene que salir, debe salir 11 si está bien…

Con base en la observación del trabajo colaborativo en el ejercicio (a) consideramos que la implementación de tareas que en lugar de centrarse en un resultado promuevan la búsqueda de estrategias o procedimientos que permitan hallarlo, podría constituir una alternativa productiva en el proceso formativo de los futuros maestros.

En términos generales, el carácter abierto de los ejercicios (b) y (c) posibilitaron intercambios productivos[86] en los estudiantes.

Observamos que a los estudiantes del equipo E2 y E9 del G2, les causó cierta confusión la situación del ejercicio (b), en el que se debían aportar argumentos para justificar la posibilidad de que Alemania tuviera un descenso mayor en las emisiones de CO2 que en la Unión Europea. Entre otras, observamos en los intercambios, dudas respecto a si los datos o cantidades de Alemania se habían tomado en cuenta o no dentro del conjunto de países de la UE. Por ejemplo en el equipo E9 se dice:

B6: no escúchame tú…, ahí te lo dice, ahí te está diciendo que Luisa ha visto ya un error en la estadística, en el diagrama o como se llame, ahí ya visto un error entonces te dice que cómo es posible eso, no, no es posible porque si tu pones la UE no me pongas Alemania por otro lado, porque Alemania está dentro de la UE lo mismo que los Países Bajos están dentro de la UE…

En una futura aplicación de la tarea debería de considerarse esta duda. Podría indicarse que dentro de los datos utilizados para hallar el porcentaje de cambio de la UE están los de Alemania.

En el mismo equipo del G2, observamos que el enunciado del ejercicio (b) les resultó confuso. Consideramos que para una futura aplicación de la tarea puede ser beneficioso revisarlo y si es posible mejorarlo. La parte del enunciado, en cuestión, se propuso así "*¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible?* Veamos en qué consiste la confusión de este equipo:

A6: pongo…
B6: que sí estamos de acuerdo con ella
D9: será que no, ¿no?
A9: no porque ella decía que no era posible
B6: pues ya que estamos de acuerdo con ella ¿no?
A6: no
D9: no, no estamos de acuerdo que sí es posible…
A9: ah… que sí es posible, claro, sí porque ella decía que cómo era posible…o sea, a ver léelo de nuevo…

En la observación de este objetivo exploramos las dificultades no cognitivas[87] que encontraron los estudiantes al resolver las tareas. Para el caso de la Tarea 3, observamos que en el equipo E1 del G2, una de las estudiantes manifestó no saber cómo expresar la solución del ejercicio (b), aunque en éste se solicitaba una argumentación, una de sus compañeros de equipo le expresa que se tendría que hacer una cuenta. La actuación nos indica que, en una futura aplicación del experimento, es preciso señalar que la resolución de los ejercicios (b) y (c) precisa de argumentos más que de operaciones aritméticas.

C1: es que explicarlo es lo que… yo lo entiendo pero no sé explicárselo

---

[86] Tal y como se han caracterizado en el apartado 5.2.8.3, punto II, subapartado "Metodología de Trabajo".
[87] Nos referimos a dificultades asociados al carácter abierto de las tareas, éstas son de desarrollo.

A1: habrá que hacer una cuenta o algo
C1: yo que sé…
A1: es que tiene que tener algo, de cuenta o…
El mismo equipo expresó a la investigadora su duda, y ésta la atendió.
D1: ¿aquí tiene que ser con una explicación lógica, explicación de palabras o…?
I: con palabras, con palabras, ahí no hay nada de procedimientos o cálculos… es decir estamos de acuerdo con Luisa o no lo estamos y por qué razón…

7.3.6 Revisión de los Supuestos Relativos a las Posibles Actuaciones

En la planificación de la Tarea 3 (Apartado 6.2.1) enunciamos los supuestos en relación a las posibles actuaciones que podrían manifestar los estudiantes.

Con base en el estudio del conocimiento matemático manifestado por los estudiantes podemos confirmar la aplicación de la regla de tres como único procedimiento conocido por los estudiantes de estos grupos para calcular un porcentaje. La puesta en común en el G1 posibilitó dar a conocer otras estrategias para realizar dicho cálculo, los estudiantes del G2 no tuvieron esta oportunidad. Observamos que en el G1 la mayoría de los equipos ofrecieron razonamientos para justificar la doble perspectiva (absoluta y relativa) expuesta en el ejercicio (c) de la tarea. En los mismos se reconoció, al menos intuitivamente, que en términos relativos se ha de tomar en cuenta una unidad de referencia para establecer la comparación multiplicativa, mientras que en términos absolutos basta con ver la diferencia que existe entre las cantidades. Por su lado en el G2, la mayor parte de los equipos mostraron razonamientos superficiales o no mostraron alguno. En síntesis los estudiantes del G2 mostraron dificultades para detectar y expresar la cuestión de fondo (mayor crecimiento absoluto no implica mayor crecimiento relativo).

7.4 TAREA 4

7.4.1 Conocimientos Manifestados en la Resolución Colaborativa

El interés por conocer las concepciones iniciales que muestran los estudiantes en torno a las relaciones de proporcionalidad hizo posible la identificación de distintas actuaciones. El estudio de las producciones de los equipos en la Tarea 4 posibilitó conocer:

- Las relaciones que entre las cantidades fueron identificadas por los estudiantes.
- Las representaciones simbólica y gráfica de la relación de proporcionalidad directa.
- Uso de procedimientos alternativos a la regla de tres en ejercicios de cuarta proporcional (valor ausente).
- Comparación absoluta y relativa de cantidades.

7.4.1.1 Relaciones Entre Cantidades Identificadas por los Estudiantes

A partir de la observación de las resoluciones correspondientes al primer ejercicio de la tarea tenemos que los equipos de ambos grupos (G1 y G2), manifestaron algunas de las siguientes relaciones:

- Relación aditiva entre cantidades de la misma o distinta magnitud.
- Relación escalar entre las cantidades.
- Relación funcional entre las cantidades.
- Otras

En la Tabla 7.17 se muestran las distintas relaciones expresadas por los equipos de cada grupo, posteriormente se dan ejemplos de dichas manifestaciones.

Tabla 7.17. *Relaciones detectadas entre las cantidades*

G1															
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E9	E11	E12	E14	E15	E16	E17	E18
Re1		*	*				*	*		*		*			*
Re2							*								
Re3	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	
Re4				*		*	*	*		*	*	*		*	

G2							
	E1	E2	E3	E5	E7	E10	E11
Re1	*	*	*	*	*	*	*
Re2				*		*	*
Re3	*	*	*	*	*	*	
Re4	*			*	*	*	

Relaciones

Re1: Relación aditiva entre cantidades de la misma o distinta magnitud.
Re2: Relación escalar entre las cantidades.
Re3: Relación funcional entre las cantidades.
Re4: Otras.

Re1. Relación aditiva entre cantidades de la misma o distinta magnitud

Detectamos que en siete (E2, E3, E7, E9, E12, E15 y E18) de los quince equipos participantes en el G1 y en todos los equipos del G2 los estudiantes evidenciaron la identificación de una relación aditiva entre las cantidades. De manera conjunta observan la diferencia entre pares de cantidades de días y entre pares de cantidades de bacterias, en la mayoría de los equipos los estudiantes utilizan esta relación para concluir que después de cada día la cada cantidad de bacterias aumenta en 13. A modo de ejemplo mostramos un fragmento del equipo E7:

D13: yo vi que 5 días menos 3 días son 2 días, está claro, luego 65 bacterias menos 39 bacterias es 26 bacterias (A6: 26… eso es lo que me ha salido a mi), ¿no?, entonces entre el quinto y el sexto día lo que te ocurre en un día, el número de bacterias que crece, entre el sexto y el octavo día el número de bacterias que crece restando del *número de bacterias del octavo día al sexto por ejemplo o del sexto restado de la del quinto, lo cual me da un incremento de 13 bacterias por día, ¿no?...*

La conclusión del crecimiento diario de 13 bacterias es una forma de expresar que el crecimiento es constante. Observamos que debido a que las cantidades de días no eran consecutivas los estudiantes después de hallar las diferencias cada dos o cada tres días procedieron a dividir entre el número de días transcurridos, esto implica que estos estudiantes han asumido que cada día aumenta la misma cantidad. Por ejemplo en el equipo E1 del G2 se mostró el aporte siguiente:

A1: yo fui restando 65 menos 39 y me ha salido 26 (C1: eso hecho yo), digo de 26 en 26 pero no he visto no he visto 3 ni 5, ¡ah! es que van dos días…tú sino pon 65 menos 39 y sale 26 y como son dos días lo dividimos entre 2…

Re2. Relación escalar entre las cantidades

Una relación escalar es una relación multiplicativa entre cantidades de una misma magnitud. En el caso de la tarea la detección de una relación escalar implica identificar la relación multiplicativa entre dos pares de cantidades de días y la relación correspondiente entre los dos pares de cantidades de bacterias. En el G2 se presentó en tres equipos (E5, E10 y E11). Por ejemplo mostramos un fragmento del trabajo oral del equipo E11 del G2:

B13: no, no cada tres, sino que del 5 al 10 también se duplica, del 8 al 16 también encontramos que se duplica, entonces esa es la relación que he puesto en el ejercicio, la relación que yo he sacado es que se va duplicando conforme también se duplican los días pero luego a la hora de hacer el ejercicio sí que he puesto lo que dice Magdalena, que cada día son 13 más…

En la Figura 7.19 mostramos la resolución mostrada en la producción escrita del mismo equipo, donde se refleja la identificación de otras relaciones, además de la escalar.

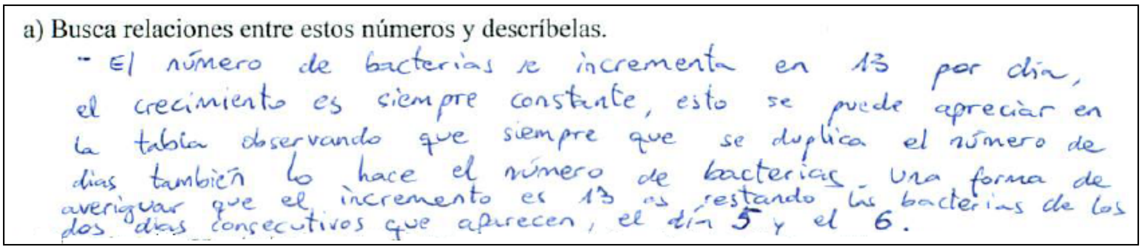

a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.
- El número de bacterias se incrementa en 13 por día, el crecimiento es siempre constante, esto se puede apreciar en la tabla observando que siempre que se duplica el número de días también lo hace el número de bacterias. Una forma de averiguar que el incremento es 13 es restando las bacterias de los dos días consecutivos que aparecen, el día 5 y el 6.

Figura 7.19. Relación escalar Re2 manifestada en el equipo E11 del G2

En el G1 únicamente se mostró en el equipo E7, no obstante el estudiante reconoció la relación parcialmente, es decir detectó relaciones escalares (mediante una combinación de razonamientos aditivos y multiplicativos) en la magnitud tiempo e intentó detectar la relación en la otra magnitud, sin éxito.

C9: yo he encontrado una relación, yo he encontrado que por ejemplo en el tercer día son 39, ¿no?, ahora luego en el sexto día son 78 y aumenta 39, 39 y 39 son 78…, pero ahora en el doce son tres y tres, seis, y seis y tres, nueve, y nueve y tres, doce, ¿no?, son 156 que te lo dicen, el doce es 156 y yo he visto que 156 de 39 aumenta 117 y me he dado cuenta que el 117 son 39 por 3, ahora luego el 12 más 3 son 15 ¿no?, tres y tres y *tres y tres… y aumenta 195, y me he dado cuenta que 195 son siempre 39…, y aumenta siempre 156 y me he dado cuenta que es 39 por 4…*

Lo observado en Re2 confirma un supuesto acerca de las posibles actuaciones en la resolución de esta tarea, en la planificación de la misma habíamos previsto que los estudiantes no reconocerían, en su mayoría, la relación escalar. En comparación con la relación funcional, la identificación de la relación escalar sitúa a los estudiantes ante una dificultad mayor ya que requiere coordinar la detección de la relación simultáneamente en las dos magnitudes.

Re3. Relación funcional entre las cantidades

Una relación funcional vincula multiplicativamente cantidades de distinta magnitud. Tal relación ha sido la más frecuentemente mostrada por los estudiantes de ambos grupos, trece equipos del G1 y seis equipos del G2 (Tabla 7.17). En la situación planteada los estudiantes realizan la división de cantidades de días y de bacterias y tras observar que el cociente es constante llegan a afirmar que el crecimiento diario es de 13 bacterias. No obstante cabe resaltar dos aspectos que de modo general mostraron los estudiantes de ambos grupos. En todos los casos tomaron como dividendo la cantidades de bacterias y como divisor los días, de modo que el valor de la razón bacterias/día es un número entero mayor que 1, la división no se realizó invirtiendo los elementos. Aunque en las sesiones previas se promovió que el valor de la razón es mayor que 1, no creemos que tal actuación se deba completamente a estas intervenciones, sino que puede estar vinculada a la dificultad de realizar la división en cada caso. Por otro lado la conclusión a la que llegan los estudiantes, relativa a que el crecimiento diario es de 13 bacterias, se basa en el cociente de las divisiones. La aplicación de tal procedimiento implica la creencia de que cada día aumenta la misma cantidad obviando que el crecimiento sigue tal comportamiento después del 3º día, es decir hemos observado que al dividir 65 bacterias entre 5 días y obtener 13 bacterias/día se asume que después del 1º día hay 13, después del 2º hay 26 y así sucesivamente, sobre lo cual no hay certeza dados los datos del problema. Se puede afirmar que el cociente es constante, 13, sin asumir que este dato corresponda necesariamente al número de bacterias que crece cada día desde el 1º día, entendemos que tal conclusión sería adecuada en cuanto se refiera a los datos después del 3º día.

A modo de ejemplo mostramos dos fragmentos de los equipos E3 (estudiante B2) y E11 (estudiantes B5 y B20) respectivamente:

B2: la relación es que cada día crecen 13 bacterias, ¿no? y lo obtenemos dividiendo 39 entre 13
B5: ahora decimos que si dividimos cada número de bacterias por ejemplo 39 entre 3, 65 entre 5, 78 entre 6, en todos nos sale 13 por lo que la relación que hay entre estos números es que el número de bacterias entre el tiempo nos sale todo 13
B20: es decir es constante

En cuatro equipos del G1 (E1, E2, E6, E14) y en dos equipos del G2 (E2 y E3), algunos estudiantes hallaron, mediante distintos procedimientos, la constante de crecimiento diario de bacterias 13; posteriormente multiplicaron ese número por el resto de días de la tabla con el fin de verificar la cantidad de bacterias correspondientes. Por ejemplo, en el equipo E3 del G2, el estudiante B12 dijo: "*…y luego si primero divides entre 3 y te da 13, esto lo ha hecho Antonio, y luego lo multiplicas por el número de días, el resultado es el número de bacterias, pues 13 por 5, 65, y así te daban todos…*"

Re4. Otras

En ambos grupos se detectaron otras relaciones entre las cantidades implicadas. Se manifestaron en ocho equipos del G1 y en cuatro equipos del G2. Las que indicaron con mayor frecuencia se refieren a la relación de múltiplos o divisores que cumplen las cantidades de la tarea (cuatro equipos del G1). Fue frecuente el reconocimiento de que conforme aumenta la cantidad de días también aumentan las bacterias (cuatro equipos del G1 y tres del G2). Puntualmente encontramos el reconocimiento de otras relaciones entre las que está la paridad, en relación a esto mostramos un fragmento del trabajo del equipo E7 del G1:

B6: bueno una relación que es evidentísima es que tiempo impar, bacteria impar
A6: no, bacteria impar no… porque, no, si hay tiempo par y bacteria par
B6: eso es tiempo impar bacteria impar, tiempo par bacteria par

Resumen

En términos generales hemos observado que el grupo (G1) predominó la detección de relaciones multiplicativas (Re3) frente a las relaciones aditivas (Re1). Los estudiantes aplicaron diversos procedimientos para concluir que cada día el número de bacterias aumentaba en 13, sin embargo el uso de la división implica la suposición de que cada día creció la misma cantidad incluyendo los primeros días sobre los cuales no hay certeza de este supuesto, no observamos alguna reflexión sobre este aspecto por parte de los estudiantes que usaron la división.

En el G2 se identificaron casi con igual frecuencia las relaciones aditivas (Re1) y la relación funcional (Re3), en la que se relacionan multiplicativamente las cantidades de distinta magnitud.

Destacamos la baja presencia de la detección de relaciones escalares, en un equipo del G1 y en tres del G2, esto nos permite aceptar los supuestos establecidos en la conjetura de la tarea que describimos en la planificación de la misma.

En el G1 los equipos E2, E7, E12, E14 y E15 detectaron 3 o más relaciones entre las cantidades, y en el G2 todos los equipos, menos el E1, describieron al menos 3 relaciones.

7.4.1.2 Representaciones, Simbólica y Gráfica, de la Relación de Proporcionalidad Directa

En ambos grupos de estudiantes, en relación con las representaciones de la relación, observamos que se aportaron algunas expresiones que hemos codificado como:

- Representación simbólica en función del tiempo.

- Representación simbólica en función del número de bacterias.
- Representación verbal.
- Representación gráfica inadecuada de la relación.

En la Tabla 7.18 se recogen los equipos que expresan cada representación y a continuación se dan ejemplos de dichas manifestaciones.

Tabla 7.18. *Representaciones simbólica y gráfica de la relación de proporcionalidad directa mostradas en la T4*

G1

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E9	E11	E12	E14	E15	E16	E17	E18
Rep1(D)	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*
Rep2(D)															*
Rep3(D)						*									
Rep4(D)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

G2

	E1	E2	E3	E5	E7	E10	E11
Rep1(D)	*	*	*		*		*
Rep2(D)					*		
Rep3(D)							
Rep4(D)	*	*	*	*	*		*

Representaciones

Rep1 (D): Representación simbólica en función del tiempo.
Rep2 (D): Representación simbólica en función del número de bacterias.
Rep3 (D): Representación verbal.
Rep4 (D): Representación gráfica inadecuada.

Nota: El equipo E10 del G2 no realizó los ejercicios (b.2), (c), (d) ni la 2ª parte de la tarea.

Rep1 (D). Representación simbólica en función del tiempo

En todos los equipos del G1, excepto en el E6, y en cinco de los siete equipos del G2 (E1, E2, E3, E7 y E11) se representó la relación entre las cantidades mediante una expresión algebraica que de modo general estuvo dada por $B = 13 \cdot n$, con la variable "*B*" representando la cantidad de bacterias y "*n*" la cantidad de días, de modo que al variar los días se podría obtener la cantidad de bacterias. A modo de ejemplo mostramos un fragmento del trabajo del equipo E5 del G1:

A15: ah sí, "n" que son los días por…
B8: por trece que es la constante
B15: por trece
A15: el número de bacterias "b" es igual…
C3: "b" que es el número de bacterias es igual a trece por "n"

En relación con la formulación de esta expresión debemos señalar que los estudiantes utilizan distintas letras para representar las variables, además como era de esperar no hacen referencia al dominio de la variable días de modo que el número de bacterias sea un número entero. En ambos grupos se evidencian "abusos de lenguaje" relativos al uso sinónimo de los términos variable e incógnita, también hemos observado el uso de otras variables para representar a la constante de proporcionalidad.

Rep2 (D). Representación simbólica en función del número de bacterias

De manera puntual los equipos E18 del G1 y E7 del G2 expresaron simbólicamente la relación de proporcionalidad en función del número de bacterias, en ambos casos indicaron que "*los días eran iguales a las bacterias entre 13*", representado por $n = \frac{B}{13}$.

No obstante indicamos que en ambos casos otro de sus compañeros indicó que la fórmula debía de escribirse para el número de bacterias, o señaló, la equivalencia entre ambas expresiones. A modo de ejemplo en el equipo E7 del G2 el estudiante A4 dijo: "*yo he puesto el número de días es igual al número de bacterias partido por 13…*"

Rep3 (D). Representación verbal

En el ejercicio (c) correspondiente al enunciado de la expresión simbólica observamos que los estudiantes del equipo E6 del G1 la escribieron utilizando palabras de la siguiente manera: $\text{Nº Bacterias} = \text{nº días x } 13$. O sea manifestaron una representación verbal.

Rep4 (D). Representación gráfica inadecuada

Con el fin de conocer si los estudiantes lograban representar gráficamente la relación estudiamos las producciones del ejercicio (d), en éste se le colocaron los ejes, un fondo cuadriculado del plano y en cada eje señalamos los nombres de las magnitudes en el de las abscisas el tiempo y en el de las ordenadas el número de bacterias, tales ayudas se dieron con el objetivo de que el intento de los estudiantes por plasmar la gráfica no se viera limitado por no conocer cuál magnitud iba en cada eje o por la elección casual de escalas.

El objetivo instruccional principal de este ejercicio estaba orientado a conocer de qué manera se caracteriza y representa una relación de proporcionalidad directa. Gráficamente, la misma está dada por una recta que pasa por el origen. Parte de nuestro interés investigador era conocer si lo estudiantes representaban la relación de manera adecuada, lo cual implicaba considerar dos circunstancias de la situación: una magnitud es continua y la otra es discreta y la relación se da a partir del 3º día. Tales condiciones determinan la construcción de una gráfica punteada a partir de n=3.

En términos generales, los estudiantes de ambos grupos representaron gráficamente la relación sin tomar en cuenta el dominio de la relación ni la naturaleza de ambas magnitudes, por lo que todas las representaciones mostradas son inadecuadas, no obstante tales actuaciones constituyen un indicador del nivel de dificultad de este ejercicio.

En el apartado "Balance sobre la Tarea 4", (Apartado 7.4.5) dedicado al estudio de las fortalezas y debilidades de la tarea hacemos referencia a las modificaciones, en el ejercicio, que podrían favorecer las actuaciones de los estudiantes, pues en términos generales consideramos que las condiciones de la situación influyeron directamente en las producciones erróneas mostradas.

No obstante, destacamos que los estudiantes de ambos grupos reconocieron que la representación gráfica de la relación es una línea recta. Por ejemplo mostramos un fragmento del trabajo del equipo E5 del G1:

A15: vas cogiendo 1 día, cuántas bacterias, "n" es 1 por 13 días pues 13… luego en el día 5 habrá 65 bacterias, 5, 50, 60… (Va diciendo los pares y dibujando la gráfica)
C3: al final sale una línea recta
B15: claro porque es una constante la de 13, ¿no?
A15: luego el día 10 por ejemplo es 130

En la Figura x se ejemplifica este tipo de actuación, la resolución procede del trabajo del equipo E3 del G2.

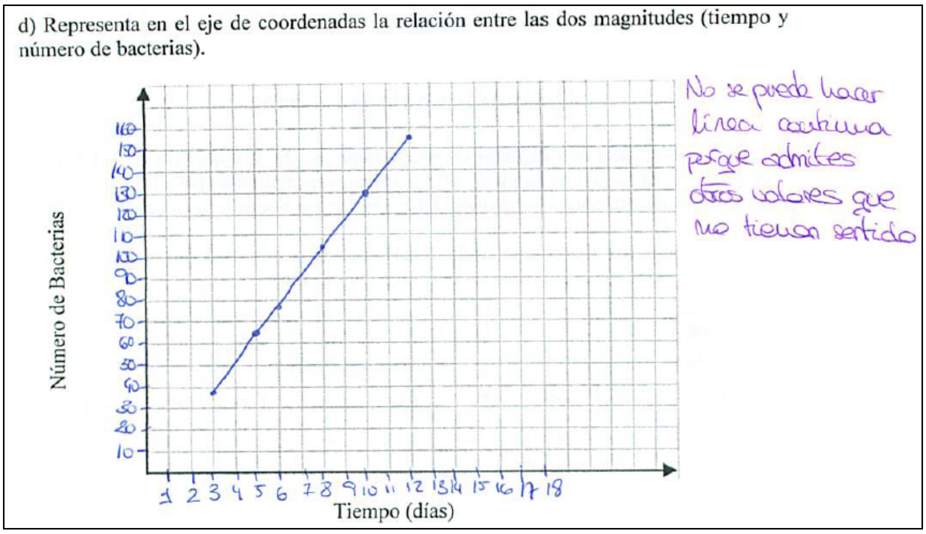


Figura 7.20. Representación Rep4 (D) manifestada en el equipo E3 del G2

Resumen

Los estudiantes de ambos grupos no manifestaron dificultades en la expresión simbólica de la relación entre las dos magnitudes de la situación. En catorce de los quince equipos del G1 y en cinco de los siete equipos del G2 expresaron la relación en función del tiempo, únicamente un equipo de cada grupo la expresó en función del número de bacterias, sin embargo en estos dos casos otro de los miembros del equipo mostró correctamente la forma en que debía de representarse la relación.

En el ejercicio relativo a la representación gráfica de la relación hemos observado una actuación inadecuada por parte de todos los equipos de ambos grupos debido a que en su representación no tomaron en cuenta las condiciones de la situación. Consideramos que este ejercicio ha resultado muy difícil para los estudiantes, en el apartado "Balance de la Tarea 4" (Apartado 7.4.5) reflexionamos acerca de esta situación.

7.4.1.3 Procedimientos Expuestos en la Resolución Colaborativa

En este apartado nos centramos en describir los conocimientos procedimentales que han sido manifestados en la resolución de la tarea.

Los ejercicios (b.1) y (b.2) son de "valor ausente", en los cuales se ha variado la localización del mismo, en el primero se busca el consecuente y en el otro se busca el antecedente. La resolución de los mismos nos permitió conocer procedimientos alternativos utilizados por los estudiantes para hallar el valor ausente en una cuarta proporcional, según la localización de este valor, identificamos en la resolución del ejercicio b.1 los procedimientos:

- División por la constante de proporcionalidad.
- Planteo y resolución de una ecuación.
- Aplicación de una relación escalar.
- Aplicación de la estrategia "building-up".

En la resolución del ejercicio b.2 identificamos los procedimientos:

- Multiplicación por la constante de proporcionalidad.
- Detección de la relación escalar y aplicación de ésta a las cantidades de la otra magnitud.
- Aplicación de la propiedad de las relaciones directamente proporcionales $f(a+b)=f(a)+f(b)$.
- Otras.

En la Tabla 7.19 recogemos los procedimientos utilizados en la resolución del ejercicio b.1 en cada uno de los equipos, a continuación detallamos en qué consiste cada uno y ejemplificamos con trabajos de los estudiantes.

Tabla 7.19. *Procedimientos alternativos a la regla de tres en el ejercicio (b.1)*

G1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E9	E11	E12	E14	E15	E16	E17	E18
Pr1	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*
Pr2		*		*		*			*			*	*		
Pr3			*												
Pr4						*	*			*					

G2	E1	E2	E3	E5	E7	E10	E11
Pr1	*	*	*		*		*
Pr2			*				*
Pr3							
Pr4		*				*	*
Pr8				*			

Procedimientos

Pr1: División por la constante de proporcionalidad.
Pr2: Planteo y resolución de una ecuación.
Pr3: Aplicación de una relación escalar.
Pr4: Aplicación de la estrategia "building-up".
Pr8: Otras

Pr1. División por la constante de proporcionalidad

En cuanto a determinar el tiempo transcurrido, tras el cual el número de bacterias sea de 650, observamos que en los equipos del G1, excepto en el E11, y en cinco de los siete equipos del G2 (E1, E2, E3, E7 y E11) al menos uno de los estudiantes sugirió utilizar la relación detectada previamente relativa al crecimiento diario, dividiendo las 650 bacterias entre 13. Por ejemplo mostramos un fragmento del trabajo del equipo E9 del G1:

A19:… el número de días que han transcurrido hasta que el número de bacterias sea de 650
B12: ¿habéis hecho esa?, pues… dilo tú
A19: dividido entre 13, como antes ha sido…
B12: como ya conocemos que la proliferación aumenta de 13 en 13…
A19: pues se divide
B12: 650 que sería el número total de bacterias lo dividimos entre 13, que sería la población de bacterias que aumentaría en un día, entonces nos da como resultado 50, en 50 días pues la población sería de 650 número bacterias, la (b) que es…

Detectamos que estudiantes de los equipos E2, E3 y E18 del G1 indican que realizar la división por 13 es lo mismo que aplicar la regla de tres. Por ejemplo, mostramos un fragmento del trabajo del equipo E3:

B2: ahora sin utilizar la regla de tres hay que averiguar el número de días que han transcurrido hasta que el número de bacterias sea de 650
D2: 650 entre 13…
B2: no, porque es una regla de tres…
D2: no, 650 dividido entre 13

Pr2. Planteo y resolución de una ecuación

Otra alternativa que mostraron seis equipos del G1 (E2, E4, E6, E11, E15 y E16) y dos equipos del G2 (E3 y E11) corresponde al planteo de una ecuación. Basándose en el patrón detectado nombran las variables y enuncian la relación entre las mismas, en seguida resuelven mecánicamente la ecuación. Del equipo E11 del grupo destacamos un fragmento que ejemplifica el uso de este procedimiento:

A20: … ahora tenemos que mirar el número de días que han transcurrido hasta que el número de bacterias sea de 650
B5: sabemos que el, el,… pon la formulilla ahí de tiempo… de "n" días entre… de número de días entre tiempo es igual… número de bacterias… entre tiempo… es igual a 13, pues ya está ahora ya sustituyes, 650 entre "x" es igual a 13, con lo que "x"…

Pr3. Aplicación de una relación escalar

Hemos observado que en el equipo E3 del G1 han detectado y utilizado una relación escalar para hallar el valor de la cuarta proporcional del ejercicio. Destacamos que en el equipo E3 eligen el par de cantidades (5, 65) y a partir de la relación que hay entre 65 y 650 (por 10) infieren que el dato buscado es 5x10, es decir 50. Mostramos parte de lo comentado en este equipo:

B2: no, pero eso es regla de tres si dices si en 5 días hay 65 pues en 650… pero si a simple vista ves que 650 es 65 por 10 ya estás aplicando que estás viendo…
D9: es proporcionalidad
B2: claro… pues es 650 es 65 por 10
A2: pero hay que explicar todos los pasos pa que vea…
C15: pues 5 por 10, 50 días

En la Figura 7.21 ilustramos la aplicación de las relaciones escalar y funcional manifestada en la producción del equipo E3 del G1.

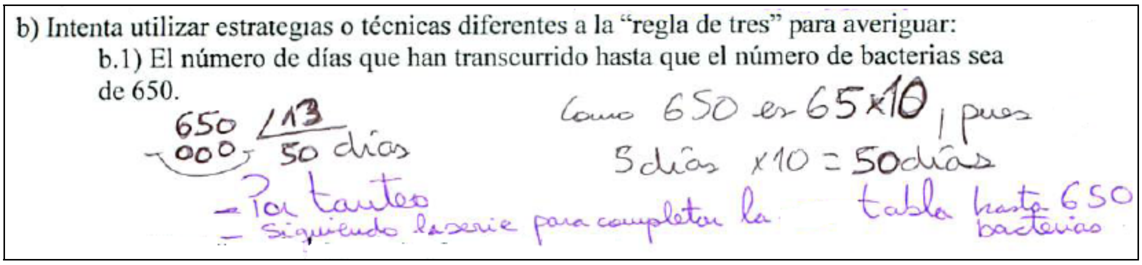

b) Intenta utilizar estrategias o técnicas diferentes a la "regla de tres" para averiguar:
b.1) El número de días que han transcurrido hasta que el número de bacterias sea de 650.
650 | 13
000 50 días
Como 650 es 65x10, pues 5 días x10 = 50días
– Por tanteo
– Siguiendo la serie para completar la tabla hasta 650 bacterias

Figura 7.21. Procedimientos Pr1 y Pr4 manifestados en el equipo E3 del G1

Destacamos que el procedimiento Pr4 no se manifestó en los equipos del G2 en la resolución del ejercicio (b.1).

Pr4. Aplicación de la estrategia "building-up"

La estrategia de construcción progresiva (building up) se caracteriza porque en ella los estudiantes establecen una relación en una razón y la extienden aditivamente a la otra (Hart, 1981), es decir van sumando poco a poco los datos de la razón de referencia para llegar a la razón buscada, en muchas ocasiones los estudiantes recurren a la construcción de tablas de proporcionalidad. Según Streefland (1985) el uso de este tipo de tablas para organizar los datos del problema capacita a los alumnos para comprender más fácilmente la preservación de las razones internas que hay entre los datos de una serie y la constancia de las relaciones externas que hay entre los datos de las series.

Este procedimiento se manifestó en tres de quince equipos del G1 (E6, E7 y E12) y en tres de los siete equipos del G2 (E2, E10 y E11), en los cuales se explica el procedimiento a seguir eligiendo como referencia la razón de base (13, 39), no obstante los estudiantes señalan lo poco eficaz de esta forma de abordar la resolución del ejercicio. A modo de ejemplo mostramos un fragmento del trabajo del equipo E12 del G1:

D8: estrategias diferentes o técnicas diferentes…
B14: otra estrategia… sería cada día vas sumándole 13 hasta llegar… o vas sumando 13, 13, 13… hasta llegar a 650, sería una burrada, una barbaridad pero…

Hemos observado en dos de los tres equipos del G2 que la han manifestado (E10 y E11) una variación del uso de esta estrategia, en relación con la expuesta por otros investigadores que han trabajado con niños (Hart, 1981; Lamon, 1993). Hemos detectado que los estudiantes construyen progresivamente las razones pero a diferencia de lo expuesto en el ejemplo anterior, eligen una razón particular que facilite el proceso, en estos casos eligen la razón (10, 130). Ya sea mediante la identificación de relaciones escalares con otros pares (dobles) o mediante sumas repetidas y la aplicación de la propiedad $f(a+b)=f(a)+f(b)$ llegan a la cantidad buscada, 50 días.

Por ejemplo en el caso del equipo E11 del G2 utilizan el par (10, 130) y determinan la relación escalar del doble de las dos cantidades, esto es (20, 260). Tal elección no es casual pues combinan esta idea con la descomposición de 50=20+20+10 a la cual le aplican la propiedad $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Ejemplificamos este trabajo, porque aunque sean casos puntuales constituyen ejemplos del uso de las propiedades estructurales de la proporción.

B13: yo ahí sí que me he complicado más porque he seguido con la misma relación que he sacado en el primero, he ido duplicando y he dicho si en 10 días son 130, en 20 días son 260, 40 días tanto y 10 días más y me ha dado…

Parte de la estrategia utilizada por el equipo E11 también la reconocen Cramer y Post (1993) con el nombre de “factor de cambio” o “tantas veces como” (factor of change method or times as many), en ella el sujeto reconoce el factor multiplicativo asociado a las relación interna entre los datos en cada espacio de medida (doble).

En la Tabla 7.20 recogemos los procedimientos utilizados en la resolución del ejercicio (b.2), posteriormente detallamos y ejemplificamos cada uno con producciones de los estudiantes.

Tabla 7.20. *Procedimientos alternativos a la regla de tres en el ejercicio (b.2)*

G1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E9	E11	E12	E14	E15	E16	E17	E18
Pr5	*	*	*	*	*		*	*		*	*	*	*	*	*
Pr6			*			*		*	*	*					
Pr7						*									
Pr8						*									

G2	E1	E2	E3	E5	E7	E10	E11
Pr5	*	*	*		*		*
Pr6					*		*
Pr7	*						*
Pr8				*			

Procedimientos

Pr5: Multiplicación por la constante de proporcionalidad.
Pr6: Detección de relación escalar y aplicación de ésta a cantidades de la otra magnitud.
Pr7: Aplicación de la propiedad $f(a+b)=f(a)+f(b)$
Pr8: Otras

Nota: El equipo E10 del G2 no realizó los ejercicios (b.2), (c), (d) y ni la 2ª parte de la tarea.

Pr5. Multiplicación por la constante de proporcionalidad

Para determinar la cantidad de bacterias después de 25 días, la mayor parte de los equipos del G1 (trece de quince) y cinco de los siete equipos del G2 aplicaron la multiplicación de la cantidad de días por la constante de proporcionalidad, 13, ésta había sido detectada en el primer ejercicio de la tarea. Como ejemplo mostramos un segmento del trabajo del equipo E5 del G1:

A15: pues se multiplica el número de días que transcurren, 25, por el número de bacterias que aumenta cada día ¿no?
C3: 25 por 13, 325

Pr6. Detección de relación escalar y aplicación de ésta a cantidades de la otra magnitud

En cinco equipos del G1 (E3, E6, E9, E11 y E12) y en los equipos E7 y E11 del G2 los estudiantes llegaron a identificar la relación escalar entre 50 y 25, dado que la mitad de 50 es 25 aplicaron esa misma relación a las cantidades correspondientes de bacterias, concluyen que el dato faltante era 325, la mitad de 650. Mostramos un ejemplo del trabajo del equipo E11 del G2:

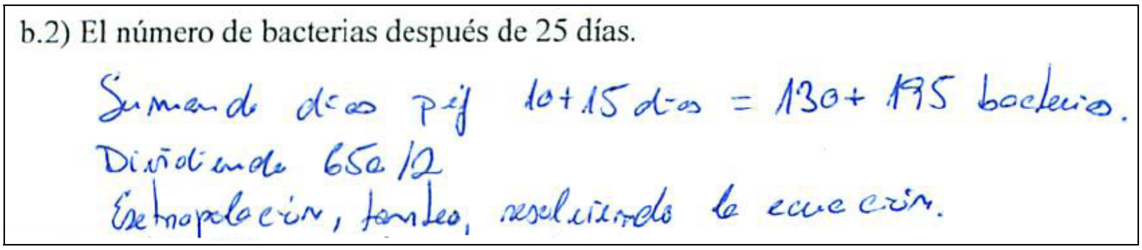
B13: el mismo patrón, como esa la relación que he puesto en el primero en la segunda lo he utilizado
A13: muy bien
C8: 25 es la mitad de 50, entonces…
D10: la mitad de 650, es 325

Pr7. Aplicación de la propiedad f(a+b)=f(a)+f(b)

Observamos que en el equipo E6 del G1 y en los equipos E1 y E11 del G2, los estudiantes aplican implícitamente una de las propiedades que definen las relaciones de proporcionalidad directa, para el caso del ejercicio aplican *f(25)=f(10)+f(15)*, realizan la descomposición conveniente de 25 pues los datos *f(10)* y *f(15)* son conocidos. Ejemplificamos este procedimiento con datos del equipo E6 del G1:

C18: bueno cuántas tenemos…, dos, entonces pues… tenemos sumando tiempos parciales… de días, por ejemplo habíamos dicho que son 25 días, 25 días son…
A4: 10 más 5
C18: 10 más 15 días, es igual a 130 más 195 bacterias ¿no?
A4: sí

En la Figura 7.22 presentamos la resolución mostrada en este equipo en la producción escrita.


b.2) El número de bacterias después de 25 días.

Sumando días p/ej 10+15 días = 130+195 bacterias.
Dividiendo 650/12
Extrapolación, tanteo, resolviendo la ecuación.

Figura 7.22. Procedimiento Pr7 manifestado en el equipo E6 del G1

Pr8. Otras

En el equipo E6 el G1 se tiene que el estudiante C18 indica otras dos formas para hallar el valor ausente de la cuarta proporcional del ejercicio. Una de las cuales se refiere a la estimación, según el estudiante a partir de un dato conocido se va haciendo aproximaciones y ajustes hasta llegar a la cantidad de bacterias buscada.

También señala que la extrapolación es una alternativa, durante la puesta en común explica que esto consiste en ir sumando poco a poco, se refiere a la estrategia de construcción progresiva.

Mostramos el aporte de este estudiante durante el trabajo en equipo:

B18: sí, extrapolando podría ser
C18: por tanteo podría ser
B18: por tanteo sería…
C18: tenemos 16 sabemos que son…
B18: 208
C18: 208, si hacemos 100 sabemos que son seis mil… si otro pues sesenta y cinco mil pues vamos ajustando hasta que…

Resumen

Todos los equipos de ambos grupos siguieron la consigna de no utilizar la regla de tres, esto les instó a buscar alternativas que permitiera hallar el valor buscado en cada caso. Los ejercicios (b.1) y (b.2) que se pueden considerar de "valor ausente", en los cuales se ha variado la localización del mismo, en el primero se busca el consecuente y en el otro se busca el antecedente.

El ejercicio (a) de la tarea, les permitió hallar la constante de proporcionalidad. Observamos que en la resolución posterior del ejercicio (b.1), catorce equipos del G1 y cinco del G2 la utilizaron dividiendo las bacterias por dicha constante. En la resolución del ejercicio (b.2) también utilizaron la multiplicación por la constante para hallar la cantidad de bacterias (trece equipos de G1 y cinco de G2). En ambos ejercicios la división y multiplicación por la constante fueron los procedimientos que utilizaron con mayor frecuencia.

En el G1, seis de los equipos plantearon y resolvieron una ecuación, tal procedimiento lo aplicaron dos equipos del G2.

En cuanto al uso de las relaciones escalares, tenemos que en la resolución de (b.1) sólo la presentó un equipo del G2. No obstante en la resolución del ejercicio (b.2) fue aplicada por cinco equipos del G1 y 2 del G2. Consideramos que la mayor presencia del uso de la relación escalar en este ejercicio podría estar relacionada con el hecho de que el valor ausente sea el antecedente de la relación, por lo que resulta más difícil que el caso (b.1) (Puig y Cerdán, 1995, p.136) esto, aunado a la limitación de uso de la regla de tres, les inste a usar un par de cantidades cuya relación escalar con el par buscado sea evidente.

En ambos grupos y como procedimiento alternativo en la resolución del ejercicio (b.1), tres de los equipos, mostraron el uso de la estrategia de construcción progresiva (building up) no obstante hemos observado que a diferencia del uso mostrado por niños participantes en otros estudios (Hart, 1981; Lamon, 1993) eligen tomar como punto de partida una razón que mantenga una relación escalar evidente con la razón buscada, es decir, en este caso para buscar el correspondiente a 650 no construyeron la relación de 13 en 13 con una razón como 13:26, sino usaron una razón como 10:130 para ir sumando de 10 en 10.

Finalmente tres equipos (uno de G1 y dos de G2) aplicaron espontáneamente y sin un razonamiento explícito la propiedad $f(a+b)=f(a)+f(b)$.

Los equipos E2, E3, E4, E6, E7, E12, E15 y E16 del G1 y E2, E3 y E11 del G2 aplicaron al menos dos estrategias alternativas a la regla de tres en la resolución de (b.1). En el caso del ejercicio (b.2) los equipos E3, E6, E9 y E12 del G1 y los equipos E1, E7 y E11 del G2 manifestaron al menos dos procedimientos distintos para abordar la cuestión.

7.4.1.4 Comparaciones Aditiva y Multiplicativa de Cantidades

En las sesiones previas se ha trabajado sobre diversos aspectos de las comparaciones aditivas y multiplicativas. En la sesión 1, con la Tarea 2 se indagó sobre el reconocimiento, por parte de los estudiantes, de la aplicación de cada tipo de comparación en una situación cotidiana. En la sesión 2 con la Tarea 3, los estudiantes abordaron una cuestión en la que se requería aportar razonamientos sobre el hecho de que un aumento absoluto mayor no implica un aumento relativo mayor o viceversa, sino que esto depende de la unidad de referencia a partir de la cual se establece la comparación.

Las actuaciones, en ambas sesiones, confirmaron las suposiciones planteadas en la planificación de las mismas relativas al predominio de un pensamiento absoluto o aditivo en las producciones de los estudiantes. Con el objetivo de continuar promoviendo la comprensión de estas comparaciones se decidió incluir otro ejercicio en la tercera sesión.

A propósito de la situación de las bacterias, en el ejercicio de la segunda fase, se daban los datos relativos a la longitud de dos bacterias en dos momentos distintos. El crecimiento absoluto era el mismo, no obstante desde una perspectiva relativa una bacteria había crecido más que la otra.

El estudio de las producciones colaborativas de los estudiantes lo realizamos a la luz del uso de la estrategia aditiva y del uso de alguna estrategia multiplicativa de comparación.

En la Tabla 7.21 mostramos el uso de cada una de las estrategias en los equipos de ambos grupos, a continuación detallamos cada una y ejemplificamos con trabajos de los estudiantes.

Tabla 7.21. *Comparación absoluta y relativa de cantidades*

G1															
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E9	E11	E12	E14	E15	E16	E17	E18
EstAd		*	*	*	*			*	*	*	*	*	*	*	*
EstMu	*				*	*									

G2							
	E1	E2	E3	E5	E7	E10	E11
EstAd	*	*	*	*	*		*
EstMu					*		

Estrategia

EstAd: Aplican la estrategia aditiva en la comparación de cantidades.
EstMu: Aplican alguna estrategia de comparación multiplicativa.

Nota: Los equipos E7 del G1 y E10 del G2 no realizaron la 2ª parte de la tarea.

EstAd. Aplican la estrategia aditiva en la comparación de cantidades

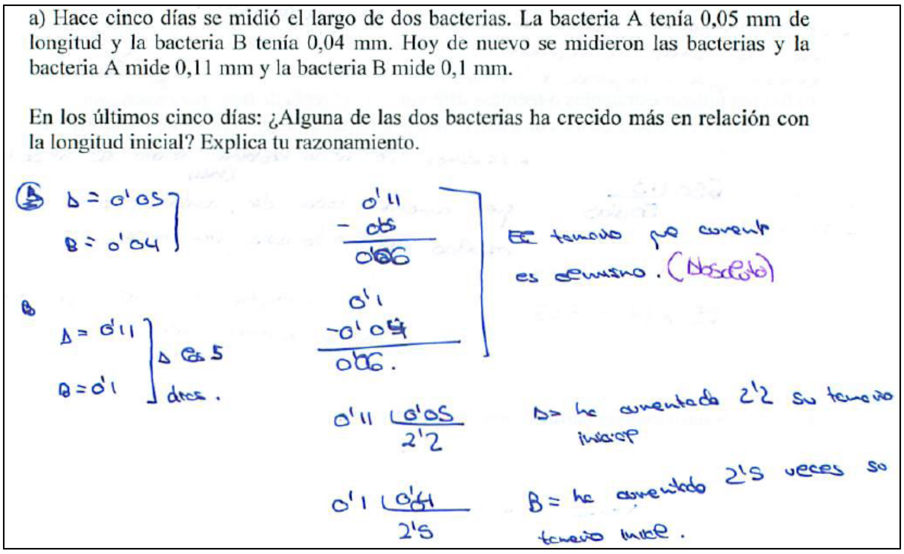
Al abordar la cuestión *¿alguna de las dos bacterias ha crecido más en relación con la longitud inicial?* observamos que doce de los quince equipos del G1 y seis de los siete equipos del G2 aplicaron la estrategia aditiva. Esto quiere decir que hallaron la diferencia entre las longitudes de cada bacteria y dado que el resultado de esta resta era el mismo (0,06 mm) concluyeron que ambas bacterias habían crecido lo mismo. La ejemplificamos con datos del trabajo del equipo E9 del G1:

B12: (lee el enunciado de la segunda fase)… Si nos damos cuenta han crecido en la misma proporción, seis (6)…, cero coma seis (0,6)
A11: crecen lo mismo
B12: entonces pongamos… han crecido las dos en la misma proporción, seis milímetros por... ¿qué han sido 5 días?
A11: sí
B12: han crecido 6 milímetros en 5 días

EstMu. Aplican alguna estrategia de comparación multiplicativa

En los equipos E1, E5 y E6 del G1 y en el equipo E7 del G2 se aplicó alguna estrategia multiplicativa para estudiar el crecimiento de las bacterias. En estos equipos llegaron a concluir que una de las bacterias había crecido más que la otra. Destacamos el trabajo del equipo E5 del G1 dado el papel que ejerce el estudiante A15 explicando la estrategia seguida a sus compañeros. En la Figura 7.23 presentamos la resolución manifestada en la producción escrita del mismo equipo.

A15: es que esto es 0,04…; entonces lo que aumentan las dos… el tamaño que aumenta es el mismo, pero luego lo que te pide en relación…
B8: ahí es donde yo no…
A15: dice en los últimos 5 días, alguna de las dos bacterias ha crecido más en relación con la longitud inicial, es lo que quiere que expliques entonces lo que aumentan los dos es 0,6 pero en relación con el tamaño inicial lo que ha crecido una que es "A" que medía 0,5 y ahora mide 0,11 es 0,11 entre 0,05, ¿cuánto da?
C3: ¿cuánto?
A15: 0,11 entre 0,05
B8: ¿la división esa pa qué la haces?
A15: pa saber el número de veces que ha aumentado su tamaño, entonces y ahora esto sería 0,1 entre 0,04
C3: 2,2
A15: 2,2 y ésta me parece que da 2,5… entonces la bacteria "A" ha aumentado 2,2 veces su tamaño inicial
C3: a ver
B8: esa es la A ¿no?
A15: sí, mientras que la "B" ha aumentado 2,5 veces su tamaño inicial, aunque las dos han crecido la misma cantidad de centímetros en relación con su tamaño inicial una ha aumentado 2,2 y la otra 2,5, eso es lo que te pide.



a) Hace cinco días se midió el largo de dos bacterias. La bacteria A tenía 0,05 mm de longitud y la bacteria B tenía 0,04 mm. Hoy de nuevo se midieron las bacterias y la bacteria A mide 0,11 mm y la bacteria B mide 0,1 mm.

En los últimos cinco días: ¿Alguna de las dos bacterias ha crecido más en relación con la longitud inicial? Explica tu razonamiento.

Figura 7.23. Actuación "EstMu" manifestada en el equipo E5 del G1

Resumen

En relación con el reconocimiento y aplicación de comparaciones aditivas y multiplicativas hemos observado que las actuaciones manifestadas, por los estudiantes de ambos grupos, no han mostrado una mejoría en relación con las actuaciones presentadas en las tareas de las sesiones previas que abarcaron temas relacionados. El predominio del razonamiento aditivo está muy arraigado en las producciones de los estudiantes, quienes en su mayoría (doce equipos de G1 y seis de G2) no se plantean la posibilidad de estudiar la situación del crecimiento desde otra perspectiva que no sea la absoluta. Solo los equipos E1, E5 y E6 del G1 y el equipo E7 del G2 consideraron la posibilidad de comparar relativamente las longitudes.

Consideramos que esta problemática requiere de un tratamiento centrado en la misma, por el momento la reconocemos como una línea abierta cuya superación precisa de una experimentación dedicada a tal fin.

7.4.2 Conocimientos Manifestados en la Puesta en Común

En este apartado describimos las actuaciones mostradas por los estudiantes en torno a las relaciones de proporcionalidad durante la puesta en común de la Tarea 4.

En el G1 durante la puesta en común participa el estudiante C3 indicando que si se divide el número de bacterias entre el número de días se obtiene una constante, en este caso muestra la relación que hemos codificado como Re4 correspondiente a la relación funcional entre las cantidades. Posteriormente el estudiante B14 señala que al dividir el número de bacterias por 13 se obtiene el número de días, lo que muestra es la relación Re2 pues utiliza la constante para vincular las cantidades. En seguida el estudiante B6 plantea que el producto en cruz de cantidades es constante, tal relación no la mostró durante el trabajo colaborativo.

Durante la revisión del ejercicio (c), referente a la expresión simbólica algebraica de la relación de proporcionalidad directa, se llegó a concluir que la expresión podría escribirse así $B = 13n$ con "n" número de días y "B" número de bacterias. Posteriormente, en la revisión de la representación gráfica, surgió un intercambio de ideas entre algunos estudiantes y la investigadora en relación con la definición del dominio de la función y sobre la naturaleza discreta de la magnitud "número de bacterias" lo cual derivó en una gráfica discontinua de puntos. A partir de este intercambio observamos que algunos estudiantes reconocen el nombre de la función que representa la relación, función lineal, además llegaron a identificar que la relación se cumple para $n \geq 3$ e intentaron caracterizar con mayor precisión el dominio de tal función. No obstante, tales actuaciones surgieron de muy pocos estudiantes por lo cual la investigadora decidió no ahondar en el tema dado que la mayoría del grupo estaba distraído y este aspecto del contenido no era primordial en el experimento.

En el G2 la revisión del primer ejercicio de la tarea, relativo a la búsqueda de relaciones entre las cantidades, estuvo a cargo de la investigadora por lo que a partir de esta fase de trabajo no obtuvimos información acerca de las relaciones detectadas por los estudiantes. Tal decisión obedeció a la necesidad de optimizar el tiempo en esta sesión.

En la revisión del ejercicio (c) participa la estudiante A12 quien aporta una respuesta correcta, 13 por "n" es igual a "b" (codificada con Rep1), el resto de los compañeros estuvo de acuerdo. La revisión de la gráfica estuvo también a cargo de la investigadora quien procuró dirigir la puesta en común teniendo en cuenta las actuaciones observadas en el G1.

7.4.2.1 Conocimientos Procedimentales Expuestos en la Puesta en Común de la T4

En el G1, cuando los estudiantes aportaron las relaciones detectadas en el primer ejercicio habíamos señalado que la participación del alumno B6 estuvo relacionada con la invarianza del producto cruzado de los pares de cantidades correspondientes. Ante esto, la investigadora cuestionó al grupo planteándoles *¿por qué se cumple esta condición?* Los estudiantes C18 y A15 participan indicando que son equivalentes. En sus aportaciones reconocemos el uso de conocimientos procedimentales, así C18 argumenta que son equivalentes por la regla de tres mientras que A15 indica que "*…es como una fracción que la doblas y otra que sea igual la multiplicas por el mismo número pero en los dos casos se ha multiplicado por el mismo número*".

Cuando se pasa a la revisión del ejercicio (b) varios estudiantes participan. C3 dice que para hallar ese valor se puede dividir por 13 porque es la constante, luego el estudiante C18 agrega diciendo que se puede calcular por tanteo al multiplicar por 13 distintas cantidades o extrapolando. Según él, esto es seguir una serie hasta llegar al número de 650 bacterias, además dice que otra forma es ir sumando bacterias poco a poco. En todo caso ambas implican una construcción progresiva de la relación (estrategia *building up*).

Cuando se llega a la revisión de la segunda fase de la tarea relativa al crecimiento absoluto y relativo de la longitud de dos bacterias, la investigadora retoma la pregunta

¿alguna de las dos ha crecido más en relación con la medida inicial? y de acuerdo con las respuestas dadas añade que desde la perspectiva absoluta las dos han crecido lo mismo. En este momento el estudiante A15 señala que se debe de tomar en cuenta que al inicio una es más grande que la otra, aunque en su aporte no explicita el uso de alguna estrategia multiplicativa reconocemos que ha logrado interpretar la cuestión desde la perspectiva relativa.

En el G2, a diferencia de la revisión del primer ejercicio, la investigadora durante la revisión del siguiente ejercicio (b.1) pide la participación de los estudiantes. Observamos que los estudiantes desplegaron distintos conocimientos procedimentales como formas de resolver los ejercicios de valor ausente.

La alumna B12 participa diciendo que una forma de averiguar ese dato es aplicar una ecuación, luego el estudiante A12 apunta que otra forma es utilizar la relación que hay entre las cantidades, ya que como se sabe que es 13 pues basta con dividir entre 13. Luego la estudiante A4 aporta otra estrategia distinta a las previstas en la planificación, la investigadora la interpreta y explica al resto del grupo diciendo: "... *ella vio… la diferencia que hay de las 208 hasta las 650 y lo ha dividido por 13 porque sabe que cada día hay 13, entonces ahí dan los días que han transcurrido y eso lo sumo a los que ya habían pasado y lo obtenemos".*

En la revisión del siguiente ejercicio (b.2) la investigadora plantea ¿si se tiene que en 50 días hay 650 bacterias, en 25 días cuántas habrá?, de inmediato la estudiante A4 dice "*la mitad, porque 25 es la mitad de 50, pues si hay 650 bacterias la mitad sería 325*", reconocemos en su aporte el uso de la estrategia escalar dado que reconoce la relación multiplicativa entre las cantidades de días y aplica ésta a las cantidades de bacterias.

Posteriormente durante la revisión de la segunda fase y después de preguntarles ¿alguna de las dos creció más?, a lo que la mayoría contestó que no, les cuestiona acerca del procedimiento que aplicaron para llegar a esa conclusión, responden que restando. Luego pregunta acerca de qué otra información se puede tomar en cuenta al comparar la longitud de las dos bacterias. La estudiante A4 dice que en el inicio una era más pequeña que la otra, en esta participación la estudiante manifiesta que reconoce la principal característica de la perspectiva relativa. En relación con el mismo ejercicio el estudiante B7 participa diciendo: *"…teniendo en cuenta que las dos bacterias crecieron el doble de su peso inicial podemos ver la diferencia entre el doble de su peso (I: longitud) y el peso final… si restamos eso, es decir dos A de 0´11 y nos queda 0´01, y dos veces B le restamos del 0´1 y nos queda 0´02, por lo tanto la diferencia es menor y podemos deducir por lo tanto que crece más A que B*". En el procedimiento sugerido por A4 aparecen conjugadas ambas perspectivas, la aditiva y la multiplicativa. Aunque el planteamiento de su estrategia pareciera que ésta sería exitosa, en la interpretación final aparece un razonamiento aditivo inadecuado que lleva al estudiante a una respuesta errónea, en este caso la diferencia entre 0,01 y 0,02 informa que la bacteria que más ha crecido ha sido la B.

7.4.3 Resumen de las Actuaciones Manifestadas en la Tarea 4

En la Tabla 7.22 sintetizamos los indicadores de actuaciones usados para describir el conocimiento matemático expuesto por los equipos en la resolución de la Tarea 4. En la Tabla se indica la cantidad de equipos (expresada porcentualmente) en los cuales se detectó cada concepción. Únicamente el indicador Rep4 (D) hace referencia a una actuación no adecuada, misma que se ha mostrado en el esbozo de la representación gráfica de la relación entre las magnitudes.

Tabla 7.22. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 4*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Relaciones entre cantidades de magnitudes proporcionales.	Re1	Detectar o aplicar una relación aditiva entre cantidades de distinta o de la misma magnitud.	47%	100%
	Re2	Detectar o aplicar una relación escalar entre las cantidades, esto es una relación multiplicativa entre cantidades de la misma magnitud.	7%	43%
	Re3	Detectar o aplicar una relación funcional entre las cantidades, esto es relacionan multiplicativamente cantidades de distinta magnitud.	87%	86%
	Re4	Detectar otras relaciones o características de las cantidades.	53%	57%
Representaciones simbólica y gráfica de la proporcionalidad directa.	Rep1(D)	Representar la relación simbólicamente en función del número de días.	93%	71%
	Rep2(D)	Representar la relación simbólicamente en función del número de bacterias.	7%	14%
	Rep3(D)	Representar la relación mediante una fórmula, pero no representan las cantidades con variables sino que usan palabras.	7%	0%
	Rep4(D)	Trazar una recta continua, no considerar la restricción en el dominio, *n* mayor o igual que 3. Usar distintas escalas en el mismo eje de coordenadas.	100%	100%
Comparaciones Aditivas y	EstAd	Aplicar la estrategia aditiva en la comparación de las cantidades.	80%	86%

Tabla 7.22. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 4*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Multiplicativas	EstMu	Aplicar alguna estrategia multiplicativa en la comparación de las cantidades.	20%	14%
Conocimiento procedimental para hallar el valor ausente en una proporción directa.	Pr1	Dividir por la constante de proporcionalidad.	93%	71%
	Pr2	Plantear y resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.	40%	28%
	Pr3	Elegir un par de cantidades particular y aplicar una relación escalar.	7%	0%
	Pr4	Usar sumas repetidas hasta llegar al par de cantidades buscado (estrategia building-up), o usar restas sucesivas.	20%	43%
	Pr5	Multiplicar por la constante de proporcionalidad.	87%	71%
	Pr6	Detectar la relación escalar entre cantidades de días y aplicarla a las cantidades de bacterias.	33%	28%
	Pr7	Aplicar la propiedad $f(a+b)=f(a)+f(b)$.	7%	28%
	Pr8	Otras.	7%	0%

7.4.4 Logro de las Expectativas de Aprendizaje

En la planificación de la Tarea 4 (Apartado 6.3.1.1) se detallan los objetivos específicos y competencias matemáticas que podrían verse favorecidas con la resolución de esta tarea, tales expectativas se han enunciado tomando en consideración los conocimientos y procesos matemáticos requeridos en la resolución de cada ejercicio. De este modo se indicó que las actuaciones correspondientes a la resolución del primer ejercicio centrado en la búsqueda y descripción de relaciones entre cantidades podrían promover el desarrollo de las competencias *pensar y razonar*, y *comunicar*. También en la planificación indicamos que el trabajo en los ejercicios (b.1) y (b.2) posiblemente promovería las competencias *pensar y razonar,* y *usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones*. Previmos que el tercero y cuarto ejercicio suscitarían actuaciones que se relacionan directamente con el objetivo específico 20, y en consecuencia indicamos que la competencia *representar* se vería posiblemente estimulada. Finalmente indicamos que el trabajo sobre la segunda fase de la tarea posiblemente favorecería las competencias *pensar y razonar, usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones*, *y resolver problemas*.

Logro del objetivo 16: Utilizar diferentes procedimientos para hallar un término desconocido en una proporción.

El análisis de las actuaciones manifestadas por los estudiantes ha posibilitado conocer distintos conocimientos procedimentales aplicados por los estudiantes en la resolución de los ejercicios de valor ausente (b.1 y b.2). Los acercamientos Pr1, Pr2, Pr3 y Pr4 se han mostrado para hallar la cantidad de días (consecuente de la razón) mientras que los acercamientos Pr5, Pr6 y Pr7 se han usado para hallar la cantidad de bacterias (antecedente de la razón). Destacamos que ocho de los quince equipos del G1 (53,3%) y tres de los siete equipos del G2 (42,8%) mostraron al menos dos procedimientos distintos a la regla de tres para hallar el valor ausente en la proporción. Todos los equipos hicieron uso de la constante de proporcionalidad y por demanda de la tarea no recurrieron a la regla de tres. Esta situación favoreció la aplicación de operaciones, procedimientos y estrategias por lo que se trabajó sobre la competencia *usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones* en un nivel de conexión. Consideramos que la pauta de no usar la regla de tres suscitó actuaciones que favorecieron la competencia *pensar y razonar* en un nivel de conexión.

Logro del objetivo 19: Identificar y describir las relaciones estructurales de una proporción (escalar y funcional).

En el primer ejercicio de la tarea se debían descubrir y describir relaciones entre las cantidades de dos magnitudes que estaban expuestas en una tabla. En el apartado "*Relaciones entre cantidades identificadas por los estudiantes*" (Apartado 7.4.1.1) se muestran las relaciones manifestadas, entre las cuales están la relación escalar y la funcional, mismas que caracterizan la estructura de una proporción y sobre las que centramos el objetivo especifico 19. La relación escalar fue identificada en uno de los quince equipos del G1 (6,6%) y en tres de siete equipos del G2 (42,85%).

No obstante, el proceso de búsqueda de relaciones entre las cantidades así como la verificación o refutación de posibles patrones ha supuesto actos que reflejan que se ha trabajado la competencia *pensar y razonar* en un nivel de conexión.

Todos los segmentos referidos a los intercambios entre los estudiantes que han sido codificados por las Re1, Re2, Re3, Re4 y recogidos en el apartado "*Relaciones entre cantidades identificadas por los estudiantes*" (Apartado 7.4.1.1) evidencian la expresión oral de las relaciones entre las cantidades, los miembros de los equipos no solo aportaron ideas sino también tuvieron que interpretar las enunciadas por sus compañeros. Las mismas relaciones se han expresado por escrito, consideramos que la resolución del ejercicio ha estimulado la competencia *comunicar* en un nivel de conexión. En la Figura 7.24 mostramos un ejemplo procedente de la producción escrita del equipo E11 del G2.

a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.

- El número de bacterias se incrementa en 13 por día, el crecimiento es siempre constante, esto se puede apreciar en la tabla observando que siempre que se duplica el número de días también lo hace el número de bacterias. Una forma de averiguar que el incremento es 13 es restando las bacterias de los dos días consecutivos que aparecen, el día 5 y el 6.

Figura 7.24. *Descripción de las relaciones detectadas en el E11 del G2*

Logro del objetivo 20: Describir las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, entre magnitudes mediante distintas representaciones.

Los ejercicios (c) y (d) constituyen ejemplos de desempeños relacionados con el objetivo específico 20, demandan respectivamente la representación simbólica y gráfica de la relación de proporcionalidad directa.

El análisis de las actuaciones mostradas por los futuros maestros ha sido descrito en el apartado "*Representaciones simbólica y gráfica de la relación de proporcionalidad directa*" (Apartado 7.4.1.2), evidencia que los estudiantes han sido capaces de describir de manera verbal, algebraica y gráfica la relación entre las magnitudes. Esto nos permite afirmar que la resolución de estos ejercicios ha estimulado la competencia *representar* en un nivel de conexión.

Mostramos a modo de ejemplo la resolución escrita del equipo E18 en ambos ejercicios.

c) Escribe una expresión o fórmula que permita hallar el número debacteriasdespués de un número cualquiera de días (*n* días).

n= nº días
a= bacterias
13 = incremento bacterias por dia

$\boxed{n = \frac{a}{13}} \rightarrow \boxed{a = 13 \cdot n}$

d) Representa en el eje de coordenadas la relación entre las dos magnitudes (tiempo y número de bacterias).

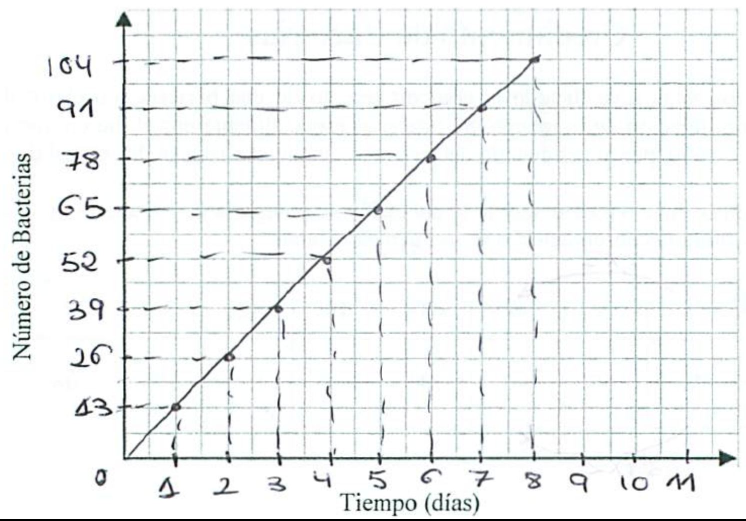


Figura 7.25. Representaciones simbólica y gráfica mostradas en el equipo E18 del G1

Logro del objetivo 3: Interpretar y realizar comparaciones entre cantidades desde las perspectivas aditiva y multiplicativa.

En la segunda fase de la Tarea 4 era preciso comparar la medida actual y la de hace 5 días para cada una de las bacterias, en el apartado "*Comparaciones aditiva y multiplicativa de las cantidades*" (Apartado 7.4.1.4) hemos descrito que los estudiantes realizaron comparaciones aditivas y multiplicativas, siendo las primeras las más frecuentemente aplicadas pues se manifestaron en doce de los quince equipos del G1 (80%) y seis de los siete equipos del G2 (85,7%). El predominio de la comparación aditiva evidencia que los futuros maestros no han interpretado como esperábamos la expresión "en relación con la medida inicial" incluida en el enunciado del problema. Como hemos indicado en el logro de este mismo objetivo en tareas anteriores, reconocemos que es trascendental que los futuros maestros sean capaces de diferenciar entre situaciones aditivas y multiplicativas, y apliquen la que es apropiada (Lamon, 2007). En la resolución de este problema pocos equipos evidenciaron esta capacidad y en consecuencia consideramos que en estos equipos se ha trabajado la competencia *pensar y razonar* en un nivel de conexión. En vista de que el problema se ha resuelto a través de procedimientos estándar y en la mayor parte de los equipos de una única manera consideramos que la competencia resolver problemas se ha trabajado en un nivel de reproducción.

Logro del objetivo 11: Establecer la relación de orden entre dos razones cualesquiera.

Para responder a la cuestión propuesta en la segunda fase de la tarea era preciso realizar una comparación de razones con el fin de determinar la relación de orden entre las mismas y así conocer cuál de las dos bacterias había crecido más respecto a su medida inicial. Como se ha presentado en el apartado "*Comparaciones aditiva y multiplicativa de las cantidades*" (Apartado 7.4.1.4) tres equipos del G1 y un equipo del G2 estudiaron la situación desde una perspectiva multiplicativa y respondieron correctamente. Aunque esperábamos que utilizaran estrategias de comparación de razones distintas de la división de las cantidades, se ha observado que éstos han recurrido a esta operación con el objetivo de determinar cuántas veces es una medida en relación a la otra. No obstante, consideramos que la aplicación de la división y la interpretación posterior del cociente han supuesto que se trabajen las competencias *pensar y razonar* y *usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones* en un nivel de reproducción.

Logro del objetivo 23: Aplicar la noción de proporcionalidad, directa o inversa, y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.

El trabajo realizado en distintos ejercicios de la Tarea 4 ha puesto de manifiesto la aplicación de algunas propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa, sin embargo los estudiantes usan las propiedades sin referirse explícitamente a las mismas, por lo que concluimos que es una aplicación intuitiva de las propiedades. Evidencia del logro de este objetivo la encontramos en los acercamientos Re2 y Re3 (Apartado 7.4.1.1) concernientes a la identificación de las relaciones escalar y funcional, la aplicación de procedimientos para hallar el valor ausente de una cuarta proporcional están fundamentados en las propiedades de la relación de proporcionalidad directa. Sin embargo, los estudiantes las aplican sin mostrar conciencia de esto. Esta situación no resulta sorprendente dado que no han recibido una instrucción previa sobre el tema. Bajo las consideraciones expuestas creemos que la competencia *pensar y razonar* no se ha estimulado en este caso.

7.4.5 Balance de la Tarea 4 "Crecimiento de Bacterias"

En relación con las fortalezas de la tarea destacamos que los tres primeros ejercicios posibilitaron la búsqueda de distintas relaciones numéricas entre las cantidades así como la exploración de técnicas alternativas a la regla de tres. La estimulación de estas capacidades favorece el desarrollo de razonamientos no mecánicos en los estudiantes. Las distintas aproximaciones a una misma cuestión permiten ampliar los conocimientos que individualmente se poseen; éstas se dieron en los equipos E3, E6, E9 E11, E12, E15 y E17 del G1 y en los equipos E1, E2, E7, E10 y E11 del G2. Ejemplificamos con el trabajo del equipo E6 del G1:

C18: ponemos las tres… (dice lo que va escribiendo) extrapolación, tanteo, resolución ecuación que es la que vamos aplicar porque es la más rápida…, tiempo en días por 13 es igual a 650, por tanto, tiempo en días que es igual a 650 partido por 13, que es igual a… 50 hemos dicho, ¿no?..., el (b2)
A4: yo lo hecho sumando 10 y 15, sumando ambos tiempos…
C18: pues dividiendo por la mitad 650, si divides 650 entre 2

La debilidad más evidente de la tarea la encontramos en el ejercicio (d) relativo a la construcción de la gráfica, para lo cual era necesario tomar en cuenta dos condiciones de la situación: distinta naturaleza de las magnitudes (continua y discreta) y el dominio de la relación (a partir de $n \geq 3$). Las condiciones descritas no fueron consideradas por ninguno de los estudiantes quienes en su mayoría trazaron una recta continua desde el origen. Las actuaciones mostradas nos informan acerca de la alta dificultad del ejercicio por lo que sugerimos un cambio de las condiciones de la tarea para una futura aplicación de la misma a un tipo de sujetos similares.

7.4.6 Revisión de los Supuestos Relativos a las Posibles Actuaciones

Los supuestos planteados antes de la intervención se han descrito en la planificación de la Tarea 4 (Apartado 6.3.1.1)

Después de la aplicación de la Tarea 4 hemos observado que en ambos grupos predominó la búsqueda de relaciones multiplicativas entre cantidades de distinta magnitud, la detección de relaciones escalares no fue frecuente en ninguno de los grupos. Los estudiantes de siete equipos de cada grupo buscaron relaciones aditivas entre cantidades de la misma magnitud.

Destacamos que los estudiantes usaron las relaciones halladas en la resolución del ejercicio (a) para concluir sobre el crecimiento diario de bacterias, esta demanda no formaba parte del ejercicio en el que sólo se les pedía buscar relaciones entre los números y describirlas. De modo que una relación evidente es que la razón entre las cantidades de distinta magnitud es constante, su valor es 13; sin embargo, a partir de lo anterior no se puede afirmar que después de cada día hubo 13 nuevas bacterias, en todo caso tal afirmación requiere de la condición “después del 3º día”. Observamos que los estudiantes en búsqueda de más relaciones indicaron la relación “es múltiplo de” o “es divisor de” además llegaron a describir características de las cantidades como la paridad.

De acuerdo con las Tablas 7.19 y 7.20 (sobre procedimientos aplicados) reconocemos que en los ejercicios de valor ausente (b.1 y b.2) los estudiantes manifestaron una elección de procedimientos que estuviera determinada por la localización del valor ausente. La mayor parte de los estudiantes indicaron que la relación más evidente entre las cantidades es que *cada día crecen 13 bacterias* y la expresaron mediante el producto $B = 13 \cdot x$. En el ejercicio (b.1) se desconocía el valor de x lo cual lo convierte en un problema de división y en el (b.2) se desconocía el valor de B por lo que es un problema de multiplicación. En consecuencia, los estudiantes utilizaron más frecuentemente la división y la multiplicación, respectivamente; no obstante detectamos diferencias en el uso de otros procedimientos alternativos. En el caso de (b.1) observamos que algunos estudiantes resolvieron mediante una ecuación sencilla o aplicando la estrategia de construcción progresiva, tales procedimientos no se manifestaron en el ejercicio (b.2). En el caso de (b.2) los estudiantes aplicaron intuitivamente la propiedad $f(a+b)=f(a)+f(b)$. Sin embargo, tal actuación no se manifestó en la resolución de (b.1). Además, la aplicación de la relación escalar fue, con diferencia, más frecuente en el ejercicio (b.2) que en el (b.1). En resumen, consideramos que la elección de los procedimientos aplicados en (b.1) y en (b.2) estuvo determinada por la localización del valor ausente.

Muy pocos equipos confundieron la regla de tres con otros procedimientos, por lo que no podemos aceptar nuestra suposición previa relativa a este aspecto. De modo general, los estudiantes reconocen la estructura y funcionamiento de la regla de tres. Así, aportaron siete procedimientos alternativos para hallar el valor ausente de una cuarta proporcional.

En relación con la representación simbólica de la proporcionalidad directa confirmamos lo expresado previo a la aplicación de la tarea en cuanto los estudiantes no presentaron dificultades para realizar tal tarea. Sin embargo, respecto al ejercicio correspondiente a la representación gráfica, observamos que no sólo manifestaron desconocimiento acerca de cómo esbozarla sino que en todos los equipos la trazaron sin tomar en cuenta la naturaleza discreta del conjunto de bacterias ni la condición que determina que el crecimiento de bacterias es constante a partir del tercer día.

7.5 TAREA 5

En ambos grupos, el desarrollo de la Tarea 4 tuvo una duración mayor que la prevista en la planificación; por este motivo la Tarea 5 se realizó únicamente de forma individual. Así mismo, en el G2 se les dio la consigna de realizar únicamente los ejercicios (a), (b.1) y (b.2), no obstante, algunos estudiantes resolvieron adicionalmente los otros ejercicios. En el G1 recogimos 60 producciones individuales y en el G2 recogimos 27. Sin embargo, indicamos que los estudiantes no resolvieron todos los ejercicios. Destacamos que este análisis difiere del análisis de las tareas anteriores debido a que durante la sesión solamente se realizó la fase de trabajo individual. De este modo, el análisis contempla únicamente la dimensión cognitiva, relativa a los conocimientos matemáticos manifestados individualmente por los estudiantes.

Debido a la situación anteriormente descrita, hemos considerado relevante mostrar en primera instancia la frecuencia de resoluciones y respuestas en blanco en cada grupo y ejercicio. Mostramos los resultados de este recuento en la Tabla 7.23. La información procedente de la misma se ha utilizado para calcular los porcentajes que aparecen en las tablas correspondientes a las actuaciones de los sujetos, en las mismas no se han considerado las respuestas en blanco.

Tabla 7.23. *Frecuencia de ejercicios resueltos y sin resolver de la T5 en cada grupo.*

	(a)		(b.1)		(b.2)		(c)		(d)		(e)	
	R	SR	R	SR	R	SR	R	SR	R	SR	R	SR
G1 (60 PI)	60	0	60	0	50	10	48	12	44	16	38	22
G2 (27 PI)	25	2	25	2	22	5	14	13	15	12	17	10

R: Resueltos; SR: Sin Resolver; PI: Producciones Individuales

En la Tabla 7.23 se refleja que en los dos grupos un menor número de estudiantes llegaron a resolver los últimos tres ejercicios debido a la limitación de tiempo en la aplicación de la tarea.

Hemos analizado las producciones individuales explorando los conocimientos matemáticos manifestados por los futuros maestros. El estudio de las producciones individuales de la Tarea 5 posibilitó conocer las actuaciones de los estudiantes en relación con:

- Las relaciones entre las cantidades de tiempo y medicamento.
- La representación simbólica de la relación de proporcionalidad inversa
- La representación gráfica de la relación de proporcionalidad inversa
- Los procedimientos aplicados en los ejercicios de valor ausente.

Las actuaciones identificadas se han codificado y organizado en tablas de frecuencias.

7.5.1 Conocimientos Manifestados en la Resolución Individual

Hemos organizado los hallazgos encontrados en dos partes, una que contempla las relaciones que entre las cantidades describieron los estudiantes y otra que considera las representaciones simbólicas y gráficas mostradas.

7.5.1.1 Relaciones Entre las Cantidades de Tiempo y Medicamento

Con base en la observación de las resoluciones del primer ejercicio distinguimos, en las producciones de los estudiantes de ambos grupos, seis tipos de relaciones entre las cantidades, algunas de las cuales permiten caracterizar la relación de proporcionalidad inversa. En la Tabla 7.24 aparece la frecuencia con que se ha presentado cada tipo de relación en ambos grupos. A continuación de la tabla describimos cada una de las relaciones y ejemplificamos con producciones de los estudiantes.

Tabla 7.24.*Frecuencia de relaciones descritas en la resolución del ejercicio (a)*

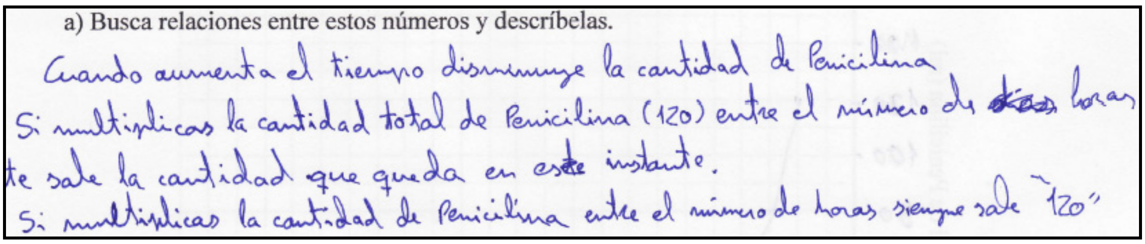
	Re1.1(I)	**Re1.2(I)**	**Re2(I)**	**Re3(I)**	**Re4(I)**	**Re5(I)**	**Re6(I)**
G1	36/60	8/60	11/60	14/60	8/60	6/60	12/60
	60%	13%	18%	23%	13%	10%	20%
G2	15/25	3/25	3/25	10/25	2/25	3/25	0/25
	60%	12%	12%	40%	8%	12%	0%

Relaciones

Re1.1 (I): Relación multiplicativa involucrando la constante de proporcionalidad inversa (verbal).
Re1.2 (I): Relación multiplicativa involucrando la constante de proporcionalidad inversa (simbólica).
Re2 (I): Relación escalar entre las cantidades.
Re3 (I): Relación de orden entre las cantidades de ambas magnitudes.
Re4 (I): Operaciones aritméticas en ausencia de la descripción de relaciones.
Re5 (I): Otras relaciones.
Re6 (I): Relaciones aditivas ó erróneas.

Re1.1 (I). Relación multiplicativa entre las cantidades usando la constante de proporcionalidad inversa (verbal)

Los estudiantes reconocen y utilizan la constante de proporcionalidad inversa para relacionar las cantidades de manera multiplicativa. En este caso describen las relaciones de forma verbal. Este tipo de descripciones fueron las más frecuentes en ambos grupos, con un 60%, los estudiantes hacen referencia a la invarianza del producto de cantidades de distinta magnitud, que es 120, o se refieren al hecho de que el cociente de la constante por una cantidad de tiempo permite obtener la cantidad de medicamento correspondiente. Destacamos que los estudiantes no describen la relación de la cantidad de tiempo como cociente de la constante y la cantidad de medicamento. Ejemplificamos con la producción de la estudiante B9 del G2, en la cuarta línea de la misma hace referencia a la invarianza del producto mientras que en la segunda comete un error al expresar “si multiplicas” cuando lo correcto es “si divides”, consideramos que es un descuido de expresión pues de hecho luego escribe “entre el número de horas” terminología propia de la división, el trabajo posterior realizado en otros ejercicios confirma que en realidad se refería a la división.


a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.

Cuando aumenta el tiempo disminuye la cantidad de Penicilina
Si multiplicas la cantidad total de Penicilina (120) entre el número de horas
te sale la cantidad que queda en este instante.
Si multiplicas la cantidad de Penicilina entre el número de horas siempre sale "120"

Figura 7.26. Actuación Re1.1(I) manifestada por el estudiante B9 del G2

Re1.2 (I). Relación multiplicativa entre las cantidades usando la constante de proporcionalidad inversa (simbólica)

Al igual que en la situación anterior, los estudiantes utilizan la constante 120 para relacionar las cantidades de manera multiplicativa, la diferencia radica en que la descripción la realizan a través de una representación simbólica. En las producciones se muestran representaciones simbólicas de la forma $x \cdot y = 120$ o $\frac{120}{x} = y$, con x representando al tiempo e y la cantidad de medicamento, no obstante, los estudiantes no utilizan en todos los casos las mismas letras para las variables indicadas. Destacamos que, al igual que en la descripción verbal Re1.1 (I), no hacen referencia a la relación expresada de la forma $\frac{120}{y} = x$. Este tipo de descripciones se mostró con menor frecuencia; únicamente la manifestaron ocho estudiantes del G1 y tres del G2.

Indicamos que en la expresión de la relación en este caso, los estudiantes usaron tanto variables como expresiones verbales. En la Figura 7.27 mostramos dos ejemplos de este tipo de actuación tomadas del trabajo de los estudiantes B15 (izquierda) y C18 (derecha), ambos del G1.

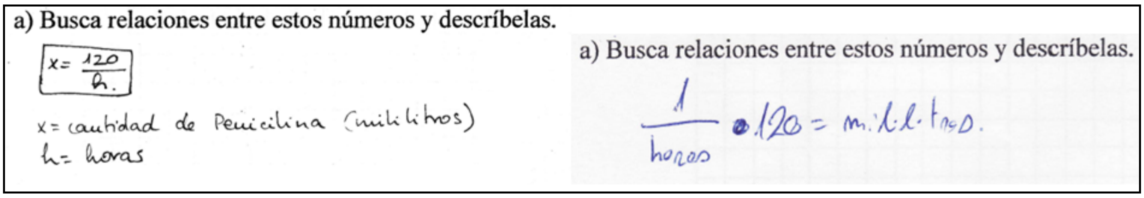
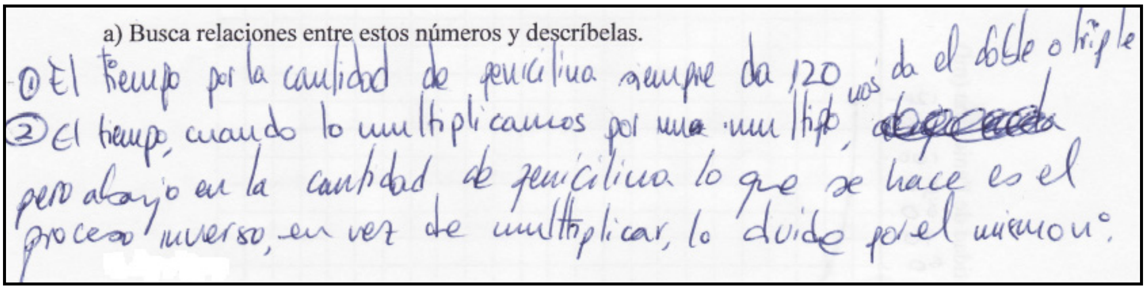


Figura 7.27. Actuación Re1.2(I) manifestada por los estudiantes B15 y C18 del G1

Considerando conjuntamente las relaciones Re1.1 y Re1.2 se tiene que la mayoría de los estudiantes de ambos grupos (73% de G1 y 72% de G2) lograron describir la invarianza del producto de cantidades, reconocieron que tal constante es 120 y expresaron la relación multiplicativa de manera equivalente expresando la cantidad de medicamento como el cociente de la constante y del tiempo. Un hecho significativo y que permite explicar otras actuaciones que más adelante detallamos se refiere a que los estudiantes no describieron la cantidad de tiempo como el cociente de la constante y la cantidad de medicamento.

Re2 (I). Relación escalar entre las cantidades

Los estudiantes detectan la relación escalar entre las cantidades de la misma magnitud y sus correspondientes. Específicamente, indican que si se multiplica una cantidad de tiempo por un número, la cantidad correspondiente de medicamento queda dividida por ese mismo número, o viceversa. En este caso los estudiantes realizan descripciones verbales de tipo general o recurren a describir la relación escalar mediante ejemplos particulares. La identificación de la relación escalar se presentó con una frecuencia del 18% en el G1 y del 12% en el G2. Consideramos que es posible que el trabajo realizado en la Tarea 4 —principalmente durante la puesta en común en la que se hizo hincapié en la relación escalar— haya promovido en los estudiantes el interés por buscar la misma relación en la Tarea 5. A continuación, en la Figura 7.28 presentamos como ejemplo una descripción de tipo general de la relación escalar, éste procede del trabajo del estudiante A2 del grupo1.

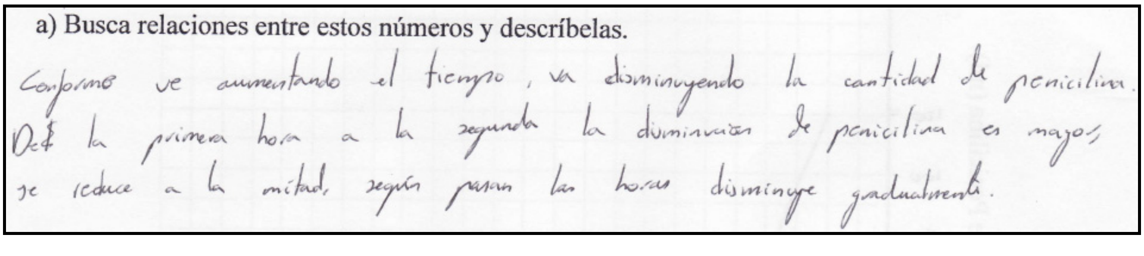

a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.

① El tiempo por la cantidad de penicilina siempre da 120 uds da el doble o triple
② El tiempo, cuando lo multiplicamos por un nº múltiplo, pero abajo en la cantidad de penicilina lo que se hace es el proceso inverso, en vez de multiplicar, lo divide por el mismo nº.

Figura 7.28. Actuación Re2(I) manifestada por el estudiante A2 del G1

<u>*Re3 (I). Relación de orden entre las cantidades de ambas magnitudes*</u>

Observamos que 23% del G1 y 40% de los estudiantes del G2 describieron la relación de orden de las cantidades de ambas magnitudes indicando, verbalmente, que conforme aumentan las cantidades de tiempo disminuyen las cantidades de medicamento activo. Esta descripción ha sido la segunda más frecuente en los dos grupos. De los catorce estudiantes del G1, tres de ellos la indican de manera aislada, esto es, sin hacer referencia a otra relación. Consideramos que estas actuaciones constituyen un acercamiento limitado e insuficiente a la descripción de la situación, dada la experiencia previa compartida en la resolución de la Tarea 4. Las actuaciones de los diez estudiantes del G2 presentan este mismo matiz con la diferencia de que dos estudiantes (D10 y A12) señalan que el decrecimiento de la cantidad de medicamento es lento. Desde nuestra perspectiva esto es una descripción intuitiva aunque irreflexiva del comportamiento de la función $f(x)=\dfrac{120}{x}$ cuando x es cada vez mayor. Por ejemplo, como se aprecia en la Figura 7.29 el estudiante C10 del G2 describe solamente el comportamiento de orden de las cantidades.


a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.

Conforme ve aumentando el tiempo, va disminuyendo la cantidad de penicilina. De la primera hora a la segunda la disminución de penicilina es mayor, se reduce a la mitad, según pasan las horas disminuye gradualmente.

Figura 7.29. Actuación Re3(I) manifestada por el estudiante C10 del G2

<u>*Re4 (I). Operaciones Aritméticas*</u>

En este indicador de actuación ubicamos aquellas en las que los estudiantes realizan operaciones aritméticas pero no llegan a describir alguna regularidad o característica relativa a las cantidades. Tales actuaciones corresponden a un 13% de G1 y 8% de G2. Entre las operaciones que muestran están las multiplicaciones de las cantidades de distinta magnitud ($120\cdot 1=120,\ 60\cdot 2=120,\ 3\cdot 40=120...$) o divisiones de las cantidades de distinta magnitud ($\frac{120}{1}=120$, $\frac{60}{2}=30$, $\frac{40}{3}=13{,}33....$). En el caso de la proporcionalidad directa el cociente es constante y tiene sentido realizarlas. Creemos que es posible que la experiencia previa en la Tarea 4 motivó a los estudiantes a buscar esos cocientes. Sin embargo, observamos que los estudiantes no indican explícitamente esta diferencia de comportamiento entre las cantidades en la situación 5. La ausencia de una descripción verbal no nos permite saber que motivó a los estudiantes a realizarlas. Por ejemplo, mostramos en la Figura 7.30 que el estudiante C5 del G2 busca las diferencias entre las cantidades de medicamentos, considera el cociente de pares de cantidades de medicamento y determina el divisor que las relaciona; también busca el producto de las cantidades de distinta magnitud, pero no describe explícitamente las relaciones que ha hallado, solamente indica “relación 120”.

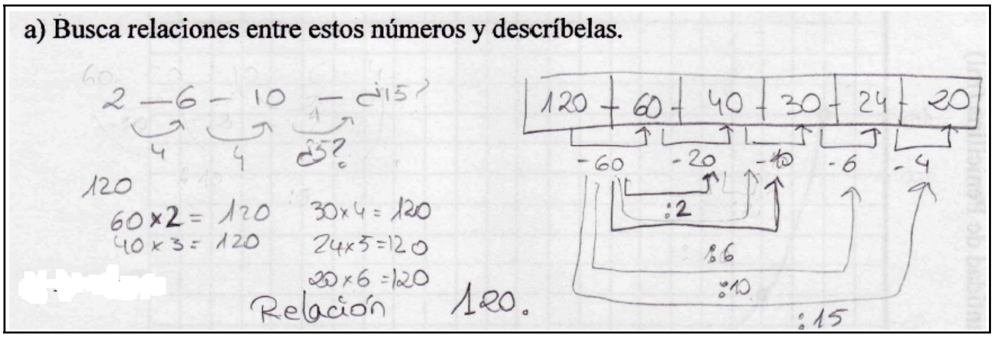


Figura 7.30. Actuación Re4(I) manifestada por el estudiante C5 del G2

<u>*Re5 (I). Otras Relaciones*</u>

Hemos adjudicado este indicador a dos tipos de actuaciones las cuales han sido poco frecuentes. Una se refiere a la detección de una regularidad entre los cocientes de las cantidades cruzadas, por ejemplo 40:2=60:3. Esta es una implicación del hecho de que los operadores escalares sean inversos multiplicativos. Por ejemplo, con los pares (2,60) y (4,30) se cumple que $\frac{2}{3}=\frac{40}{60} \rightarrow 2\cdot 60 = 40\cdot 3 \rightarrow \frac{40}{2}=\frac{60}{3}$. La mostraron únicamente seis estudiantes del G1. En las tres actuaciones del G2 observamos que se recurre a las características de la proporcionalidad directa como lentes para observar las relaciones en la tabla de magnitudes inversamente proporcionales, en este caso los estudiantes indican explícitamente que las mismas no se cumplen. Como muestra de la detección de la invarianza del cociente presentamos en la Figura 7.31 la respuesta del estudiante B19 del G1.

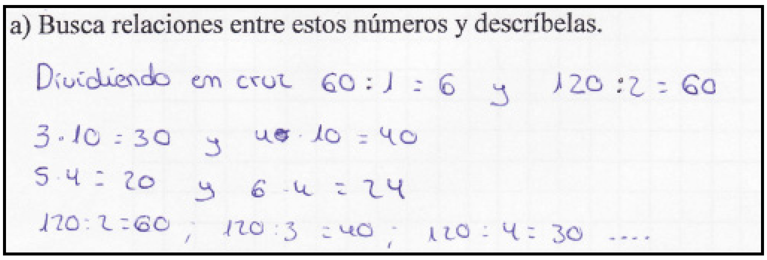
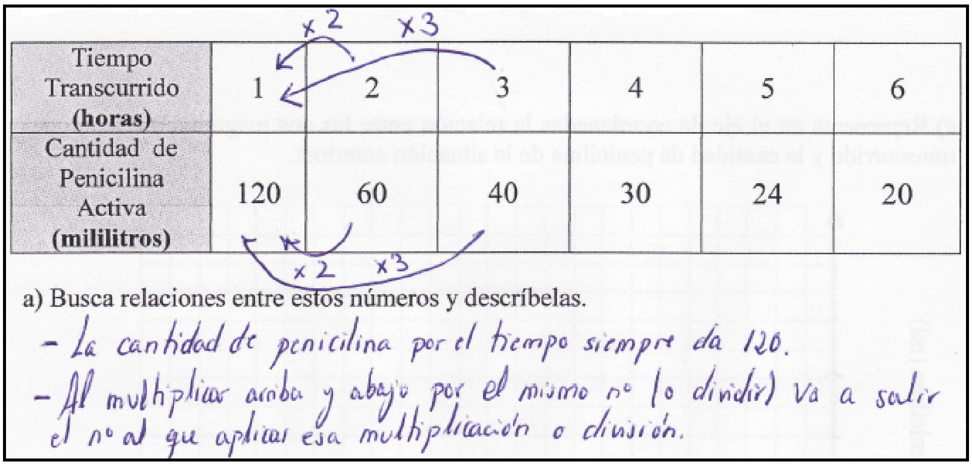


Figura 7.31. Actuación Re5(I) manifestada por el estudiante B19 del G1

Re6 (I). Relaciones Aditivas ó Erróneas

En el G1 algunos estudiantes buscan relaciones aditivas entre las cantidades o describen relaciones erróneas, debido principalmente a la dificultad de comunicar la idea. Una de las relaciones aditivas que mencionan cinco estudiantes del G1 se refiere a la diferencia entre cantidades de medicamento sucesivas. Por ejemplo, en los pares (3,40) y (4,30), señalan la diferencia de 10 ml e indican que al multiplicar esta diferencia por cada cantidad de tiempo se obtiene la cantidad de medicamento "en cruz", así 3x10=30 y 4x10=40.

Siete de los estudiantes del G1 (C6, A3, B14, C8, A12, A20 y B26) describen relaciones erróneas entre las cantidades. En sus producciones se observan ideas confusas, redundantes o poco claras, se percibe dificultad para comunicar las ideas matemáticas. Por ejemplo, el estudiante B14 dice "*Al multiplicar arriba y abajo por el mismo número, o dividir, va a salir el número al que aplicar esa multiplicación o división*". El estudiante describe una relación escalar, menciona a la vez las operaciones pero no indica con las flechas el sentido correcto de las mismas (Figura 7.32).



x2 x3

Tiempo Transcurrido **(horas)**	1	2	3	4	5	6
Cantidad de Penicilina Activa **(mililitros)**	120	60	40	30	24	20

x2 x3

a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.

- La cantidad de penicilina por el tiempo siempre da 120.
- Al multiplicar arriba y abajo por el mismo nº (o dividir) va a salir el nº al que aplicar esa multiplicación o división.

Figura 7.32. Actuación Re6(I) manifestada por el estudiante B14 del G1

7.5.1.2 Representación Simbólica de la Relación de Proporcionalidad Inversa

En ambos grupos de estudiantes se manifestaron algunas expresiones respecto a las representaciones simbólicas de la relación, que describimos a continuación:

- Representación simbólica de la forma $y = \frac{120}{x}$, siendo y la cantidad de medicamento y x la cantidad de horas.
- Representación simbólica de la forma $y \cdot x = 120$, siendo y la cantidad de medicamento y x la cantidad de horas.
- Representación verbal de la fórmula.

En la Tabla 7.25 se recoge la frecuencia de uso de cada representación en el ejercicio (d) en cada uno de los grupos, a continuación de la tabla se dan ejemplos de dichas expresiones.

Tabla 7.25. *Frecuencia de representaciones expresadas en el ejercicio (d)*

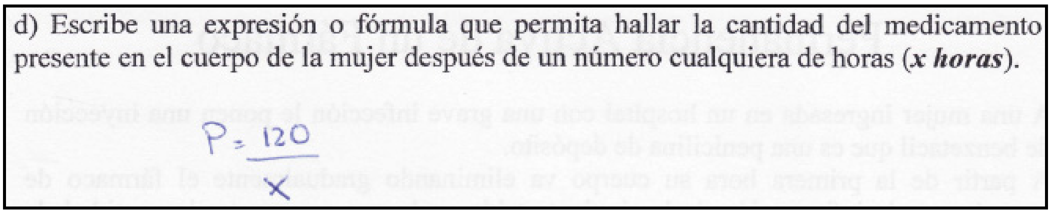
	Rep1.1(I)	**Rep1.2(I)**	**Rep2(I)**
G1	37/44 84%	4/44 9%	3/44 7%
G2	7/15 46%	4/15 27%	4/15 27%

Representaciones

Rep1.1 (I): Representación simbólica de la forma *y=120/x*.
Rep1.2 (I): Representación simbólica de la forma $y \cdot x = 120$.
Rep2 (I): Representación verbal de la relación.

Rep1.1 (I). Representación simbólica de la forma $y = \frac{120}{x}$

En la resolución del ejercicio (d) observamos que un 86% del G1 y un 47% del G2 representan la relación entre las magnitudes simbólicamente de la forma $y = \frac{120}{x}$, siendo y la cantidad de medicamento y x la cantidad de horas, utilizan distintas letras para representar las variables pero mantienen la forma. Creemos que la alta frecuencia de esta actuación está vinculada al hecho de que en el primer ejercicio ésta ha sido la relación que más cantidad de estudiantes detectaron y describieron. A modo de ejemplo recogemos en la Figura 7.33 la representación mostrada por el estudiante D1, del G1, en su actuación no aparecen descritas las variables de forma verbal, no obstante dado que en el enunciado se sugirió usar la letra "x" para representar la cantidad de tiempo afirmamos que la expresión se ajusta a la forma $y = \frac{120}{x}$.


d) Escribe una expresión o fórmula que permita hallar la cantidad del medicamento presente en el cuerpo de la mujer después de un número cualquiera de horas (***x horas***).

$P = \frac{120}{x}$

Figura 7.33. Representación Rep1.1(I) manifestada por el estudiante D1 del G1

Rep1.2 (I). Representación simbólica de la forma $y \cdot x = 120$

Otra manera de expresar la relación entre las magnitudes se presentó mediante la forma $y \cdot x = 120$, siendo *"y"* la cantidad de medicamento y *"x"* la cantidad de horas. La misma se mostró en las producciones de cuatro estudiantes del G1 y cuatro del G2. En esta representación observamos que dos estudiantes del G1 (A3 y A21) cometieron el error de expresar la relación multiplicando la constante por una de las variables e igualando este producto a la otra variable ($y = 120 \cdot x$).

Creemos que esta forma de representar la relación permite visualizar la conmutatividad del producto lo que permite hallar el valor de cualquiera de las variables a través del mismo procedimiento, la división. Consideramos que la baja frecuencia en la expresión de la relación mediante esta forma de producto podría estar vinculada con el uso de procedimientos distintos a la división en la resolución del ejercicio (b.2) en el cual era necesario hallar el valor del tiempo *"x"* conociendo el valor de la cantidad de medicamento *"y"*. El estudiante C14 del G2 expresó la relación simbólicamente mediante la forma de producto, como mostramos a continuación en la Figura 7.34.

d) Escribe una expresión o fórmula que permita hallar la cantidad del medicamento presente en el cuerpo de la mujer después de un número cualquiera de horas (*x* ***horas***).

x = nº de horas

y = Cantidad de Penicilina activa → x · y = 120.

Figura 7.34. Representación Rep1.2 (I) expuesta por el estudiante C14 del G2

<u>*Rep2(I). Representación verbal*</u>

Como se muestra en la Tabla 7.25, tres estudiantes del G1 y cuatro del G2 expresan la relación usando palabras o combinando el uso de variables y palabras, reconocemos esta forma como representación verbal. Las respuestas dadas por los estudiantes B16 y A12 del G1 nos permiten ejemplificar tal actuación (Figura 7.35).

d) Escribe una expresión o fórmula que permita hallar la cantidad del medicamento presente en el cuerpo de la mujer después de un número cualquiera de horas (*x* ***horas***).

Cantidad x tiempo = 120.

d) Escribe una expresión o fórmula que permita hallar la cantidad del medicamento presente en el cuerpo de la mujer después de un número cualquiera de horas (*x* ***horas***).

Cantidad Penicilina: $\frac{120}{x(h)}$

Figura 7.35. Representaciones Rep2(I) expuestas respectivamente por los estudiantes B16 y A12 del G1

7.5.1.3 Representación Gráfica de la Relación de Proporcionalidad Inversa

En relación con la representación gráfica, agrupamos las actuaciones de los estudiantes según mostraran:

- Una representación gráfica correcta.
- Un trazo inadecuado de la gráfica.
- La representación de otras gráficas.

En la Tabla 7.26 se recoge la frecuencia de uso de cada representación en el ejercicio (e) en cada uno de los grupos, a continuación de la tabla se dan ejemplos de dichas representaciones.

Tabla 7.26. *Frecuencia de representaciones expresadas en el ejercicio (e)*

	Rep3.1(I)	Rep3.2(I)	Rep3.3(I)
G1	27/38 71%	4/38 11%	7/38 18%
G 2	12/17 70%	4/17 24%	1/17 6%

Representaciones

Rep3.1 (I): Representación gráfica correcta.
Rep3.2 (I): Trazo inadecuado de la gráfica.
Rep3.3 (I): Representación de otras gráficas.

Rep3.1 (I). Representación gráfica correcta

El ejercicio (e) fue resuelto por 59 estudiantes del G1 y solamente por 17 estudiantes del G2 debido a la limitación de tiempo en la aplicación de la tarea en este grupo.

De los estudiantes que resolvieron el ejercicio, encontramos que un 46% del G1 y un 71% del G2 representaron gráficamente la relación de manera correcta mediante el esbozo de una hipérbola equilátera para los valores de *x* (tiempo) mayores o iguales que 1. Observamos que trece estudiantes del G1 y uno del G2 trazan la gráfica considerando valores mayores de tiempo que los de la tabla de datos, no obstante no tenemos constancia de las razones que motivaron a extender la relación a otros pares de cantidades por lo que no podemos afirmar que esos estudiantes reconocen el carácter dinámico de la relación. Además, consideramos que el hecho de que hayan trazado una gráfica continua no es evidencia suficiente para afirmar que los estudiantes han tomado en cuenta la naturaleza continua de las magnitudes implicadas en la situación. Con base en las consideraciones previas, ejemplificamos lo que hemos considerado como una gráfica correcta mediante el trabajo del estudiante B12 del G1 (Figura 7.36).

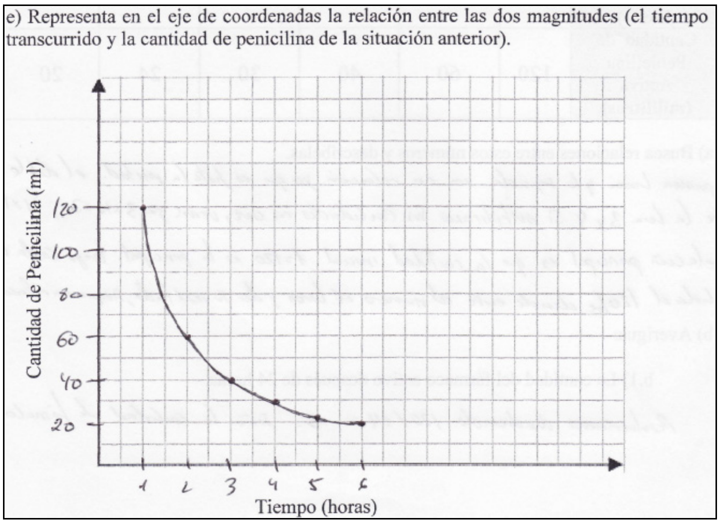


Figura 7.36. Representación Rep3.1(I) expuesta por el estudiante B12 del G1

Rep3.2 (I). Trazo inadecuado de la gráfica

Observamos que cuatro estudiantes de cada grupo trazaron una gráfica inadecuada y (o) poco cuidada debido a que unieron los puntos con segmentos o no eligieron escalas apropiadas en los ejes. Tres de los estudiantes del G2 (A13, C8 y B14) señalaron los puntos de pares correspondientes, sin embargo, no los unieron. Consideramos que esta actuación podría haberse dado debido a la experiencia previa en el trazo de la gráfica de la Tarea 4, de tipo punteada por la naturaleza discreta de una de las magnitudes. Ejemplificamos la situación descrita con la gráfica realizada por el estudiante A13 del G2 y que se presenta en la Figura 7.37.

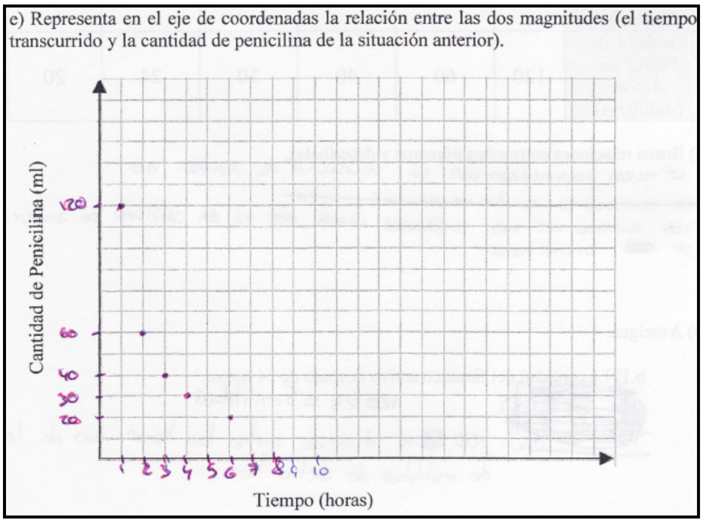


Figura 7.37. Representación Rep3.2(I) expuesta por el estudiante A13 del G2

<u>*Rep3.3 (I). Representaciones de otras gráficas*</u>

Encontramos que siete estudiantes del G1 y uno del G2 trazan gráficas lineales o de otro tipo debido a que no colocan las cantidades de los ejes en el orden adecuado. Observamos que en el eje de las abscisas colocan ordenadamente los números naturales correspondientes a la cantidad de horas, sin embargo, en el eje de las ordenadas colocan las cantidades correspondientes sin respetar el orden de los números. En la Figura 7.38 presentamos como ejemplo el trabajo del estudiante A18 del G1.

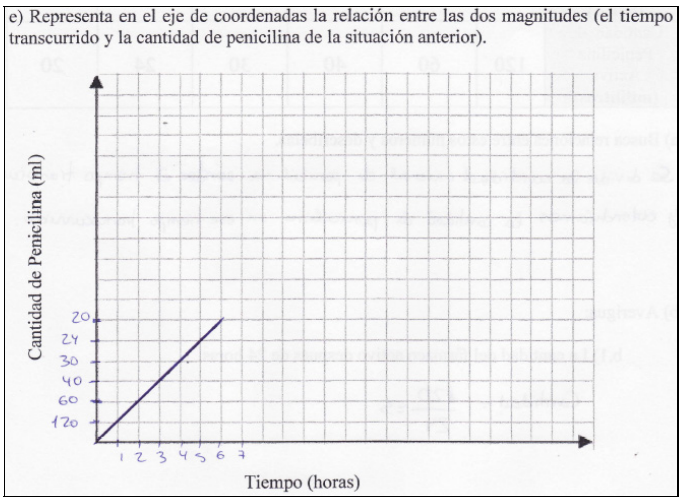


Figura 7.38. Representación Rep3.3(I) expuesta por el estudiante A18 del G1

En la planificación de la sesión, se había señalado que a diferencia de los problemas de proporcionalidad directa, las actuaciones de estudiantes en problemas de proporcionalidad inversa han sido poco estudiados, debido a esto no contábamos con suficientes referentes que nos informasen acerca de posibles actuaciones en este tipo de problemas.

7.5.1.4 Procedimientos Expuestos en la Resolución Individual de la Tarea 5

Los ejercicios (b.1), (b.2) y (c) se han considerado de "valor ausente", en éstos se ha variado la localización de ese valor y el tipo de cantidad, como ya se ha descrito al principio del análisis de la Tarea 5. La resolución de los mismos nos permitió conocer los procedimientos utilizados por los estudiantes para hallar el valor ausente en una cuarta proporcional inversa, identificamos en la resolución de los tres ejercicios los procedimientos:

- División de la constante por la cantidad de tiempo o medicamento según sea la localización del valor ausente.
- Sustitución de los datos y (o) despeje en la relación expresada simbólicamente.
- Aplicación de una relación escalar.
- Regla de tres inversa.
- Procedimientos erróneos.

En la Tabla 7.27 aparece la frecuencia de los procedimientos identificados en la resolución de los tres ejercicios en cada grupo. A continuación de la tabla los describimos y ejemplificamos con producciones de los estudiantes.

Tabla 7.27. *Frecuencia de procedimientos aplicados en la resolución de (b.1), (b.2) y (c)*

	Pr1(I)			**Pr2(I)**			**Pr3(I)**			**Pr4(I)**			**Pr5(I)**		
	b.1	**b.2**	**c**	**b.1**	**b.2**	**c**	**b.1**	**b.2**	**c**	**b.1**	**b.2**	**c**	**b.1**	**b.2**	**c**
G1	32/60 53%	8/50 16%	28/42 58%	13/60 22%	24/50 48%	11/42 23%	4/60 7%	6/50 12%	0/42 0%	9/60 15%	9/50 18%	4/42 8%	2/60 3%	3/50 6%	5/42 11%
G2	12/25 48%	4/22 18%	4/14 29%	9/25 36%	11/22 50%	8/14 57%	1/25 4%	3/22 14%	1/14 7%	2/25 8%	3/22 14%	1/14 7%	1/25 4%	1/22 4%	0/14 0%

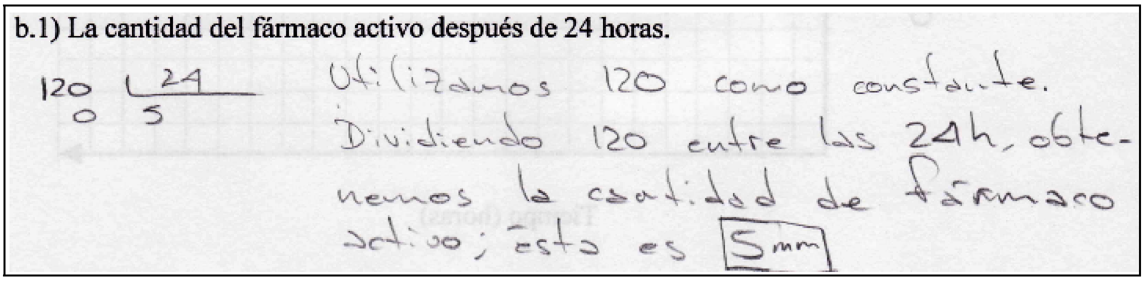
Procedimientos

Pr1(I): División de la constante por la cantidad de tiempo o medicamento según sea el valor ausente.
Pr2(I): Sustitución de los datos y (o) despeje en la relación expresada simbólicamente.
Pr3(I): Aplicación de una relación escalar.
Pr4(I): Regla de tres inversa.
Pr5(I): Procedimientos erróneos.

Pr1 (I). División de la constante por la cantidad de tiempo o medicamento según el valor ausente por buscar.

Este procedimiento fue el más utilizado por los estudiantes en la resolución del ejercicio (b.1). Consideramos que este tipo de actuaciones podría estar vinculada al hecho de que en la resolución del ejercicio (a) la mayoría de los estudiantes de ambos grupos identificaron principalmente la relación mediante la forma $\frac{120}{x} = y$ (x: horas, y:

cantidad de medicamento). Si en un principio los estudiantes reconocieron que la cantidad de medicamento activo es el cociente de 120 entre la cantidad de tiempo, no resulta sorprendente que en el ejercicio (b.1), que solicitaba la cantidad de medicamento, realizaran directamente la división 120÷24. Este procedimiento lo utilizó el 53% de los estudiantes del G1 y el 48% del G2. En la Figura 7.39 ejemplificamos esta actuación con la resolución hecha por el estudiante C7 del G2, aunque en la misma detectamos un error en las unidades en las que expresa la respuesta.



b.1) La cantidad del fármaco activo después de 24 horas.

120 | 24
0   5

Utilizamos 120 como constante. Dividiendo 120 entre las 24h, obtenemos la cantidad de fármaco activo; esto es $\boxed{5mm}$

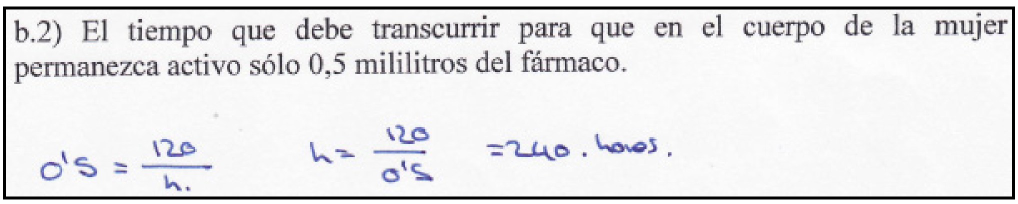
Figura 7.39. Procedimiento Pr1(I) manifestado por el estudiante C7 del G2

<u>Pr2 (I). Sustitución de los datos y (o) despeje en la relación expresada simbólicamente.</u>

El procedimiento más frecuente en la resolución del ejercicio (b.2) ha sido el tratamiento de la relación simbólica $\frac{120}{x} = y$ (x: horas, y: cantidad de medicamento) como una ecuación. Los estudiantes sustituyeron la variable "y" por 0,5 y hallaron la cantidad de tiempo correspondiente.

Consideramos que la localización del valor ausente en el lugar del divisor ha motivado a los estudiantes a utilizar un procedimiento distinto de la división, tal y como sucedió en el ejercicio (b.1). Esta situación evidencia que los estudiantes no reconocen la equivalencia de las expresiones $x \cdot y = 120$, $\frac{120}{x} = y$, pues dada la conmutatividad del producto en la primera expresión es posible realizar la división directa de 120 entre la cantidad de medicamento y así obtener la cantidad de tiempo correspondiente.

En la resolución del ejercicio (b.2) ha sido aplicado por un 48% de los estudiantes del G1 y por un 50% de los estudiantes del G2. En ambos grupos ha sido el segundo procedimiento con mayor frecuencia de aplicación para resolver el ejercicio (b.1). El ejemplo que mostramos en la Figura 7.40 procede de la producción del estudiante A15 del G1.



b.2) El tiempo que debe transcurrir para que en el cuerpo de la mujer permanezca activo sólo 0,5 mililitros del fármaco.

$0'5 = \frac{120}{h.}$ $h = \frac{120}{0'5}$ $= 240.$ horas.

Figura 7.40. Procedimiento Pr2(I) manifestado por el estudiante A15 del G1

Pr3 (I). Aplicación de una relación escalar

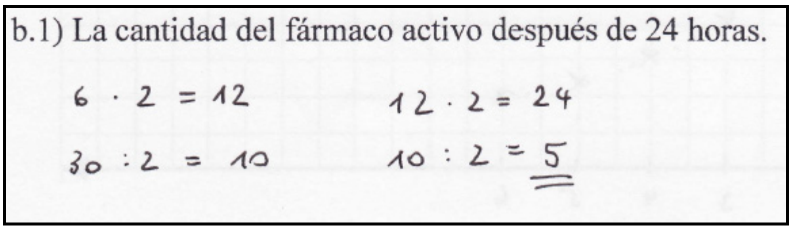
Como se muestra en la Tabla 7.27 pocos estudiantes, de ambos grupos, aplicaron una relación escalar en la resolución de los tres ejercicios. No obstante, destacamos que se utilizó con mayor frecuencia en la resolución del ejercicio (b.2) que en los ejercicios (b.1) y (c). Consideramos que la dificultad de hallar el valor ausente localizado en el consecuente ha impulsado a utilizar procedimientos alternativos a la división, tal y como se describió anteriormente en *Pr2 (I)*.

De los seis estudiantes del G1 que aplican la relación escalar, solamente cuatro la habían detectado y descrito previamente en la resolución del ejercicio (a), a diferencia de dos estudiantes quienes a pesar de haberla identificado inicialmente no la aplicaron en la resolución de los ejercicios. En este mismo grupo de seis estudiantes, también observamos que cuatro de ellos aplicaron la relación escalar para resolver tanto el ejercicio (b.1) como el (b.2), sin embargo ninguno la usó en la resolución del ejercicio (c).

En el G2, observamos que tres estudiantes aplicaron esta relación para resolver el ejercicio (b.2), de ellos únicamente una estudiante aplicó la misma estrategia en la resolución de los tres ejercicios.

De los procedimientos correctos, aplicados por los estudiantes de ambos grupos, tenemos que éste ha sido el menos frecuente en el G1 y en el G2 comparte frecuencia con el uso de la regla de tres inversa.

Por ejemplo, sabiendo que después de 6 horas hay 20 ml de medicamento activo, para averiguar la cantidad de medicamento después de 24 horas podría aplicarse la relación escalar entre 6 y 24 que está dada por 4, entonces la relación entre x y 20 ha de estar dada por ¼, de ahí que para averiguar el dato se divida 20 entre 4, obteniendo 5ml como valor de la cantidad desconocida en el ejercicio (b.1). A continuación, en la Figura 7.41, mostramos un ejemplo del uso de la relación escalar en la resolución de (b.1), realizada por el estudiante C8 del G2.


b.1) La cantidad del fármaco activo después de 24 horas.

$6 \cdot 2 = 12$ $\quad$ $12 \cdot 2 = 24$

$30 : 2 = 10$ $\quad$ $10 : 2 = \underline{\underline{5}}$

Figura 7.41. Procedimiento Pr3(I) manifestado por el estudiante C8 del G2

Pr4 (I). Regla de tres inversa

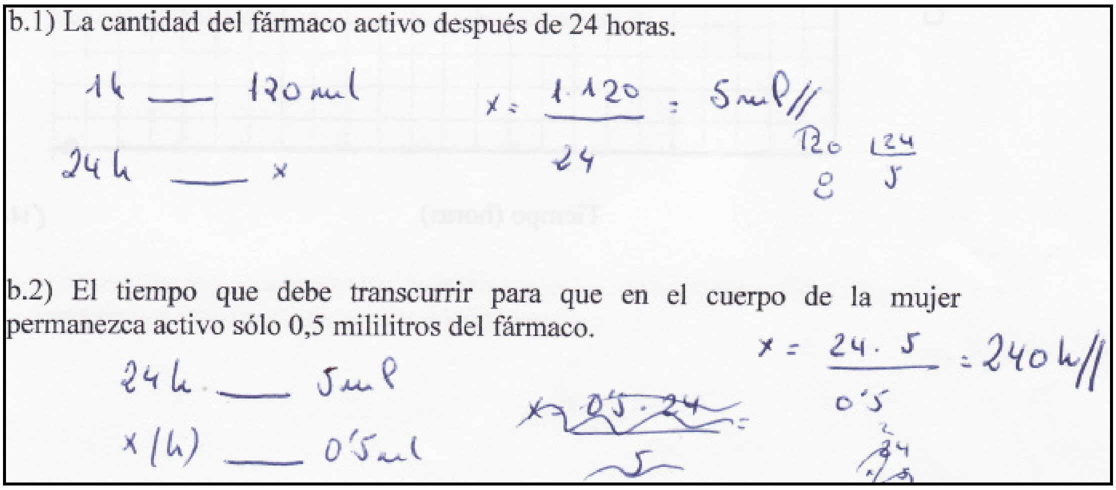
Al método de averiguar una cantidad que forma proporción con otras tres conocidas de magnitudes inversamente proporcionales, se le llama regla de tres inversa (F. Fernández, 2001). La proporción se establece entre la razón de dos cantidades homogéneas y la razón inversa de las cantidades correspondientes de la otra magnitud. Esta igualdad se basa en el hecho de que los operadores escalares son inversos multiplicativos. Por ejemplo, sabiendo que después de 1 horas hay 120 ml de medicamento activo, para averiguar la cantidad de medicamento después de 24 horas podría aplicarse la regla de tres inversa $\frac{1}{24}=\frac{x}{120}$, a continuación se procede como en la regla de tres directa.

En el caso de los estudiantes del G1 hemos observado un planteamiento semejante al descrito en el párrafo anterior, lo hemos denominado regla de tres inversa y codificado mediante Pr4(I), no obstante, indicamos que existe una diferencia entre lo hecho por los estudiantes y el procedimiento descrito.

Usando como par de referencia (1, 120) relacionan las cantidades de las dos magnitudes 1 — 120 y 24 — x, luego no se procede como en la regla de tres directa pues en lugar de multiplicar en cruz se multiplica en sentido horizontal y se divide por el dato restante, como mostramos a continuación:

$$1 \;-120 \quad x=\frac{1\cdot 120}{24}=5 \text{ ml}$$
$$24-x$$

Consideramos que esta técnica no obedece a un fundamento matemático, a diferencia de la "regla de tres inversa" descrita al inicio de este apartado, en la que las características de los operadores juegan un papel determinante. Al parecer, los estudiantes plantean la relación como en la regla de tres directa pero operan en sentido inverso. Esta manera de proceder puede deberse a una mecanización de la regla de tres directa y una posterior traslación de tal procedimiento a los casos de proporcionalidad inversa siguiendo la pauta de operar en sentido contrario. En la Figura 7.42 ejemplificamos con la resolución hecha por el estudiante A12 del G1 en los ejercicios (b.1) y (b.2).


b.1) La cantidad del fármaco activo después de 24 horas.

1h —— 120 ml　　$x = \frac{1\cdot 120}{24} = 5$ ml//

24h —— x

b.2) El tiempo que debe transcurrir para que en el cuerpo de la mujer permanezca activo sólo 0,5 mililitros del fármaco.

24 h —— 5 ml

x (h) —— 0'5 ml　　$x = \frac{24\cdot 5}{0'5} = 240$ h//

Figura 7.42. Procedimiento Pr4(I) manifestado por el estudiante A12 del G1

Al aplicar esta forma de regla de tres inversa observamos que algunos estudiantes del G1 la plantean como en el caso anterior, sin embargo para hallar el valor de x dividen 24 entre 120 y obtienen así un resultado incorrecto.

$$1-120 \quad x=\frac{24}{120}=0{,}2 \text{ ml}$$
$$24-x$$

De los nueve estudiantes del G1 que la aplican en el ejercicio (b.2), observamos que siete de ellos la aplican también para resolver el ejercicio (b.1). Únicamente cuatro estudiantes la aplican para resolver el ejercicio (c).

En el G2, tres estudiantes la aplicaron para resolver el ejercicio (b.2), dos en el (b.1) y solamente uno la usó en el ejercicio (c), dos de los tres estudiantes la aplicaron en la resolución de al menos dos ejercicios. Ninguno de los estudiantes llegó a una respuesta errónea. Observamos el mismo planteamiento y procedimiento utilizado por los estudiantes del G1.

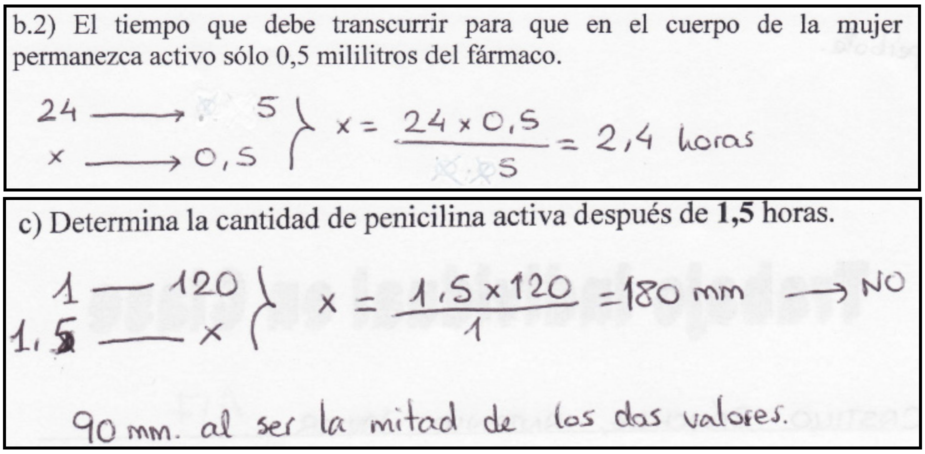
Pr5 (I). Procedimientos erróneos

En la resolución del ejercicio (b.1) dos estudiantes, uno de cada grupo dividen 24 entre 120, es decir invierten dividendo y divisor, luego un estudiante del G1 multiplica 120 por 24. Consideramos que estos errores se deben a una resolución incorrecta de la expresión simbólica de la relación $\frac{120}{x}=y$.

En el ejercicio (b.2) observamos que tres estudiantes del G1 y uno del G2 cometen el error de aplicar la regla de tres directa para hallar la cantidad desconocida. Esta actuación refleja que los estudiantes, a pesar del trabajo realizado previamente en la Tarea 4, no reconocen en la situación características que los lleve a concluir que no es de proporcionalidad directa.

Finalmente, en la resolución del ejercicio (c) uno de los estudiantes del G1 aplica la regla de tres directa y cuatro estudiantes averiguan la cantidad de medicamento activo después de 1,5 horas mediante un razonamiento inadecuado basado en la media. Toman las cantidades de medicamento activo después de 1 y 2 horas, 120 ml y 60 ml, las suman y dividen por 2 obteniendo como resultado 90 ml. Este tipo de actuación pone de manifiesto que estos estudiantes consideran un decrecimiento constante de la cantidad de medicamento. Entendemos que en la base de su actuación se halla la suposición de que la situación es de proporcionalidad directa. Ningún estudiante del G2 cometió errores en la resolución de este ejercicio, destacamos que sólo catorce estudiantes del G2 lo resolvieron debido a la falta de tiempo.

En la Figura 7.43 mostramos, como ejemplo, las resoluciones hechas por el estudiante A17 del G1 a los ejercicios (b.2) y (c), en éstas se muestra el uso de la regla de tres directa, además manifiesta que la cantidad de medicamento buscado en el ejercicio (c) tiene que ser la mitad de la suma de las cantidades después de 1 y 2 horas, es decir 90 ml.



b.2) El tiempo que debe transcurrir para que en el cuerpo de la mujer permanezca activo sólo 0,5 mililitros del fármaco.

24 ⟶ 5
x ⟶ 0,5
x = 24 x 0,5 / 5 = 2,4 horas

c) Determina la cantidad de penicilina activa después de **1,5** horas.

1 — 120
1.5 — x
x = 1.5 x 120 / 1 = 180 mm ⟶ NO

90 mm. al ser la mitad de los dos valores.

Figura 7.43. Procedimiento Pr5(I) manifestado por el estudiante A17 del G1

7.5.2 Resumen de las Actuaciones Manifestadas en la Tarea 5

En la Tabla 7.28 presentamos un resumen de los conocimientos matemáticos identificados en las producciones individuales de los estudiantes. En la tabla se indica la cantidad de estudiantes (expresada porcentualmente) que manifestaron cada concepción.

Tabla 7.28. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 5*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Relaciones entre cantidades de magnitudes inversamente proporcionales	Re1.1 (I)	Reconocer y utilizar la constante de proporcionalidad inversa, 120, para relacionar las cantidades, la expresan de manera verbal.	60%	60%
	Re1.2(I)	Reconocer y utilizar la constante de proporcionalidad inversa, 120, para relacionar las cantidades, la expresan de manera simbólica.	13%	12%
	Re2 (I)	Detectar la relación escalar entre las cantidades.	18%	12%
	Re3 (I)	Describir el comportamiento monótono de las cantidades de ambas magnitudes.	23%	40%
	Re4 (I)	Realizar operaciones aritméticas y no describir alguna regularidad o característica relativa a las cantidades.	13%	8%
	Re5 (I)	Otras.	10%	12%
	Re6 (I)	Describir relaciones erróneas, debido a que se presenta una dificultad en comunicar la relación.	20%	0%
Representaciones simbólica y	Rep1.1(I)	Representar la relación entre las magnitudes simbólicamente de la	84%	46%

Tabla 7.28. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 5*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
gráfica de la proporcionalidad inversa.		forma $C = \frac{120}{x}$.		
	Rep1.2(I)	Representar la relación entre las magnitudes simbólicamente de la forma $C \cdot x = 120$.	9%	27%
	Rep2(I)	Expresar la fórmula usando palabras o combinado el uso de variables y palabras, reconocemos esta forma como representación verbal.	7%	27%
Procedimientos aplicados para hallar el valor ausente en una proporción inversa.	Pr1(I)	Dividir la constante por la cantidad de tiempo o medicamento según sea el caso.	Ver Tabla 7.27	
	Pr2(I)	Sustituir los datos y (o) despejar en la relación expresada simbólicamente.		
	Pr3(I)	Aplicar una relación escalar.		
	Pr4(I)	Aplicar la regla de tres inversa.		
	Pr5(I)	Procedimientos erróneos.		

7.5.3 Logro de las Expectativas de Aprendizaje

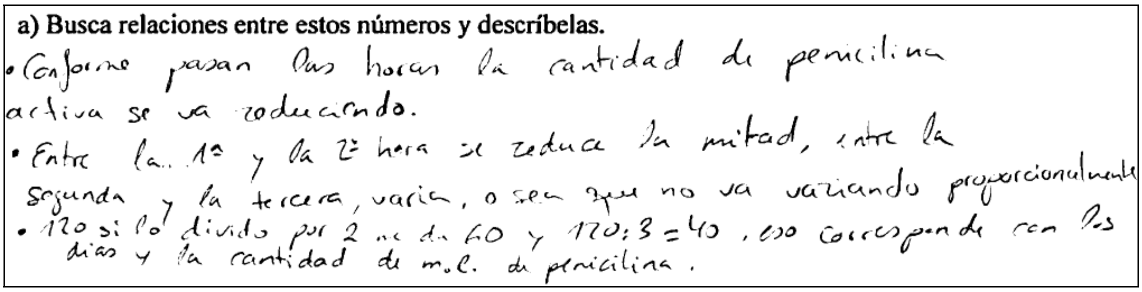
En la planificación de la Tarea 5 (Apartado 6.3.1.1) se describen posibles actuaciones relacionadas con la resolución de esta tarea, así como los objetivos específicos y competencias matemáticas vinculadas a la misma. En la programación argumentamos que las competencias que posiblemente se verían favorecidas son: *pensar y razonar, comunicar, usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones*, *representar*. Señalamos que debido a la dinámica de trabajo posiblemente también se favorecerían las competencias *argumentar y justificar* y *plantear y resolver problemas*.

Logro del objetivo 19: Identificar y describir las relaciones estructurales de una proporción (escalar y funcional)

Tal y como se describió en la planificación de la Tarea 5 la proporción inversa se caracteriza por dos relaciones: el producto constante de las cantidades (relación funcional) y los operadores escalares que relacionan cantidades de la misma magnitud, que son inversos multiplicativos (relación escalar).

En la sección "*Relaciones entre las cantidades de tiempo y medicamento*" (Apartado 7.5.1.1) presentamos las relaciones que los estudiantes identificaron en la resolución del primer ejercicio de la tarea. Los resultados observados en los acercamientos Re1.1 (I), Re1.2 (I) y Re2 (I) confirman la detección de las relaciones que caracterizan la proporcionalidad inversa. La invarianza del producto de cantidades (relación funcional) fue descrita de forma explícita e implícita mediante la relación por cociente de la cantidad de medicamento inicial (120), constante de proporcionalidad, y la cantidad de tiempo, la misma se mostró con mayor frecuencia a través de la descripción verbal. Pocos estudiantes utilizaron el leguaje simbólico. La relación escalar entre cantidades de la misma magnitud fue identificada por un 18% del G1 y un 12% del G2. Por lo tanto consideramos que la resolución del ejercicio resultó propicia para la identificación de las relaciones estructurales entre las cantidades, en sus actuaciones reconocemos que han aplicado operaciones entre las cantidades con el fin de buscar patrones en el comportamiento de las mismas; esto ha requerido poner en marcha las competencias *pensar y razonar*, y *usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones*; los indicadores de actuación se ubican en el grupo de conexión de éstas competencias.

La descripción verbal de las relaciones se han expresado por escrito, en las mismas se han visto incitados a exponer las ideas matemáticas producto de su proceso de búsqueda de relaciones entre las cantidades. Consideramos que este tipo de desempeño ejemplifica que se ha estimulado la competencia *comunicar* en el nivel de conexión. Mostramos un ejemplo de la descripción ofrecida por el estudiante D3 del G2, en la misma identificamos el uso de los términos cantidad, mitad, varía, variando proporcionalmente.


a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.

• Conforme pasan las horas la cantidad de penicilina activa se va reduciendo.
• Entre la 1ª y la 2ª hora se reduce la mitad, entre la segunda y la tercera, varía, o sea que no va variando proporcionalmente
• 120 si lo divido por 2 me da 60 y 120:3 = 40, eso corresponde con los días y la cantidad de m.l. de penicilina.

Figura 7.44. Resolución del ejercicio (a) expuesta por el estudiante D3 del G2

Logro del objetivo 16: Utilizar diferentes procedimientos para hallar un término desconocido en una proporción

Las actuaciones mostradas por los estudiantes en la resolución de los ejercicios (b.1), (b.2) y (c), las mismas que se han analizado y discutido en el apartado "*Procedimientos aplicados en los ejercicios de valor ausente*" (Tabla 7.27), reflejan la aplicación de cuatro procedimientos en la resolución de este tipo de ejercicios. Los que se mostraron con mayor frecuencia han sido la división de la constante por la cantidad de tiempo o medicamento según sea el valor ausente y la resolución de una ecuación. Estos tres ejercicios han constituido un espacio en el que se ha trabajado la competencia *usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de las operaciones* en un nivel de conexión ya que se han utilizado expresiones con símbolos, fórmulas sencillas, utilizado variables y realizado cálculos mediante procedimientos familiares.

Logro del objetivo 20: Describir las relaciones de proporcionalidad, directa e inversa, entre magnitudes mediante distintas representaciones

En los apartados "Representación simbólica de la relación de proporcionalidad inversa" (Apartado 7.5.1.2) y "Representación gráfica de la relación de proporcionalidad inversa" (Apartado 7.5.1.3) se describen las representaciones que mostraron los estudiantes para maestro. Las representaciones simbólicas describen la relación funcional entre las dos magnitudes, prevaleció la expresión $y = \frac{120}{x}$, la cual se presentó con una frecuencia del 60% en los dos grupos. La representación simbólica da muestra de que los estudiantes han logrado identificar la relación entre las magnitudes y expresarla de manera general a través del lenguaje algebraico, esta actuación evidencia que se han trabajado las competencias *representar* y *pensar y razonar* en un nivel de conexión. Como se describió en el apartado "*Representación gráfica de la relación de proporcionalidad inversa*" (Apartado 7.5.1.3) hubo un significativo número de estudiantes que esbozaron la gráfica de manera adecuada. Las actuaciones evidencian que en la resolución de estos ejercicios los estudiantes han puesto en práctica la competencia *representar* en un nivel de conexión ya que se ha tomado la información simbólica o numérica y se ha trasladado a un gráfico, todas son formas de representación más o menos familiares del objeto matemático con el que se está trabajando.

Logro del objetivo 23: Aplicar la noción de proporcionalidad, directa o inversa, y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.

El reconocimiento y aplicación de las relaciones escalar y funcional en la resolución de los ejercicios de valor ausente dan muestra del logro del objetivo 23. Como ya hemos planteado en la discusión de este objetivo en la Tarea 4, se ha detectado que la aplicación o identificación de tales relaciones no es explícita, es decir los estudiantes no explican su resolución haciendo alusión explícita, como puede ser mencionando los términos, de las relaciones estructurales que caracteriza la relación de proporcionalidad inversa. Bajo las observaciones expuestas creemos que la competencia *pensar y razonar* no se ha estimulado.

7.5.4 Balance de la Tarea 5 "Permanencia Activa de un Fármaco"

Dentro de las fortalezas de esta tarea reconocemos su potencial para suscitar la aplicación de procedimientos basados en las relaciones estructurales de la proporcionalidad inversa en tareas de valor ausente, estas relaciones fueron detectadas y descritas por los estudiantes en la resolución del ejercicio (a).

Consideramos que la elección de la constante de proporcionalidad (120) ha sido acertada pues los estudiantes han visualizado la constancia del producto sin dificultades, además, la inclusión de dos magnitudes continuas ha derivado en la construcción de gráficas adecuadas ya que, a diferencia de la Tarea 4, no tuvieron que tomar en consideración detalles que entorpecen la visualización gráfica de la relación. No hemos detectado dificultades en la interpretación de las instrucciones de los ejercicios.

7.5.5 Revisión de los Supuestos Relativos a las Posibles Actuaciones

En la planificación de la Tarea 5 (Apartado 6.3.1.1) describimos los supuestos planteados en relación con las posibles actuaciones de los estudiantes antes de la intervención. En las actuaciones mostradas por los estudiantes en la resolución del ejercicio (a), relativo a la búsqueda y descripción de relaciones entre las cantidades de dos magnitudes inversamente proporcionales, detectamos que la relación funcional entre las magnitudes ($y = \frac{120}{x}$) ha sido la más frecuentemente descrita por los estudiantes de ambos grupos. Por otro lado si consideramos aisladamente las relaciones adecuadas, a saber Re1.1 (I), Re1.2 (I), Re2 (I) y Re3 (I), tenemos que la detección de la relación escalar es la que se presentó con menor frecuencia. Sólo un 8% de los estudiantes del G1 y ninguno del G2 buscó relaciones aditivas entre las cantidades.

En la resolución de los ejercicios de valor ausente se reflejó el uso de las relaciones detectadas en la primera parte de la tarea, muestra de esto es que la mayor parte de estudiantes de ambos grupos aplicaron, en la resolución del ejercicios (b.1), la división de la constante por una de las cantidades para hallar el valor de la otra. En la resolución del ejercicio (b.2) usaron la expresión simbólica de la relación para hallar mediante una ecuación el valor de una de las cantidades. En el mismo ejercicio se reflejó que los estudiantes usaron las relaciones escalares detectadas previamente para hallar la cantidad tiempo requerida. De modo general se mostró solamente un procedimiento que no responde a las relaciones detectadas en la primera parte, se trata de la regla de tres inversa, la misma se usó con mayor frecuencia en el ejercicio (b.2).

No obstante consideramos que la búsqueda y descripción de relaciones entre las cantidades en el ejercicio (a) estimuló en los estudiantes el uso de procedimientos distintos a la regla de tres inversa y se basaron en las mismas para hallar las cantidades. Además consideramos que es posible que la búsqueda y descripción de tales relaciones favoreciera la baja presencia de procedimientos erróneos y de acercamientos propios de la proporcionalidad directa.

Los procedimientos aplicados en la resolución de los ejercicios (b.1) y (b.2) se presentaron con una marcada diferencia en cada caso. Así en (b.1) predominó la aplicación de la división mientras que en (b.2) prevaleció el uso de una ecuación. En relación con el ejercicio (c) vemos que en el G1 predominó el uso de la división mientras que en el G2 se aplicó mayormente la resolución de la ecuación. De este modo creemos que la localización del valor ausente determinó la elección del procedimiento elegido, división o ecuación.

Consideramos que a pesar de que el ejercicio (c) y (b.1) comparten la localización del valor ausente la distinción en el procedimiento aplicado no se reflejó debido al efecto de la repetición de la demanda del ejercicio. No es posible extraer conclusiones acerca de la influencia de la presencia de una cantidad no entera en la elección del procedimiento debido a que no fue posible controlar el uso de la calculadora para resolver estos ejercicios. En las resoluciones del ejercicio (d) observamos que 93 % de los estudiantes del G1 y 73% del G2 aportaron representaciones simbólicas algebraicas para expresar la relación entre las magnitudes, sin errores, por lo que aceptamos la suposición planteada previamente a la puesta en práctica de este ejercicio (Ver Planificación de la Tarea 5, Apartado 6.3.1.1). Respecto a la representación gráfica, observamos que al menos el 70% de las producciones de los estudiantes evidenciaron la construcción de una gráfica correcta, no obstante, como señalamos en la discusión de este ejercicio, no contamos con información suficiente para afirmar que los estudiantes cuentan con los conocimientos requeridos para elaborar con comprensión una gráfica propia de la situación de proporcionalidad inversa.

7.6 TAREA 6

7.6.1 Conocimientos Manifestados en la Resolución Colaborativa

En este apartado se describen las actuaciones mostradas en la resolución de las dos partes de la Tarea 6. Nos centramos en estudiar las estrategias que aplicaron los estudiantes en la comparación de razones y en el reparto proporcional. También se presentan las interpretaciones de la razón que se desprenden de las resoluciones manifestadas en ambas partes de la tarea.

7.6.1.1 Estrategias de Comparación de Razones

En ambos grupos de estudiantes, en relación con la comparación de razones, se manifestó alguno de los siguientes acercamientos:

- División de las dos cantidades.
- División de pizzas en número fijo de porciones.
- Procedimientos de comparación de fracciones.
- Reinterpretación de la situación en términos de una razón (normalización).
- Suposición de equivalencia de razones.

En la Tablas 7.29 se recogen los equipos que expresan cada acercamiento y a continuación se detallan y dan ejemplos de dichas manifestaciones.

Tabla 7.29. *Actuaciones manifestadas en la comparación de razones*

G1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E9	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E19	E20
CoR1	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*
CoR2								*						*		*
CoR3						*										
CoR4			*													
CoR5	*			*												

G2	E1	E2	E3	E4	E5	E7	E10	E11	E12
CoR1	*	*	*	*	*	*	*	*	*
CoR2		*	*	*	*		*		
CoR3						*		*	*
CoR5							*	*	*
CoR6					*				

Estrategias

CoR1: División de las dos cantidades
CoR2: División de pizzas en número fijo de porciones
CoR3: Procedimientos de comparación de fracciones
CoR4: Resolución gráfica
CoR5: Reinterpretación de la situación en términos de una razón (Normalización)
CoR6: Suposición de equivalencia de razones

CoR1. División de las dos cantidades

En el G1, quince de los 16 equipos y en el G2 todos los equipos aplicaron la división de las cantidades como procedimiento para comparar las razones, siendo éste el acercamiento más frecuente en la resolución de la Tarea 6. La búsqueda del valor racional de las razones facilita la visualización de la situación más conveniente, en consecuencia la comparación de razones se transforma en una situación de comparación de números decimales.

Esta aproximación evidencia una ausencia absoluta del razonamiento proporcional, pues no se considera ninguna idea de compensación relativa ni tampoco se reconoce la razón como un elemento que permite abordar la situación.

Como ejemplo de este procedimiento mostramos un fragmento del trabajo del equipo E19 del G1:

B4: …, yo hecho la división de 4 entre 6 y me salía cero con sesenta y seis aquí (0,66)…
A13: a cero coma sesenta y seis trozos de pizzas toca a cada uno ¿no?
B4: sí, y aquí me salía, haciendo lo mismo ¿no? eh… seis entre ocho…, ocho entre seis me salia cero setenta y cinco

Como se muestra en el fragmento anterior, la interpretación del cociente (cantidad intensiva) no es del todo adecuada pues lo que se obtiene es cantidad de pizza/persona sin embargo los estudiantes concluyen que tal cantidad son "trozos" o en otros casos hablan de porciones. Esto denota una ausencia de comprensión de la cantidad intensiva, es decir, los estudiantes muestran una dificultad para interpretar lo que esta cantidad abstracta representa en la realidad. Por otro lado, la consideración de cantidad de pizzas o de personas ya sea como dividendo o como divisor provoca la presencia de un error relativo a la interpretación del cociente, lo detallaremos en el apartado referente a los errores en la comparación de razones.

CoR2. División de pizzas en número fijo de porciones

La división de las pizzas en un número fijo de porciones, suma de todas las porciones y reparto equitativo de las mismas entre la cantidad de personas resultó ser una resolución manifestada en tres equipos del G1 (E11, E17 y E20) y en cinco equipos del G2 (E2, E3, E4, E5 y E10).

En este procedimiento, al igual que en el anterior, no encontramos evidencia de indicadores del razonamiento proporcional. Como ejemplo mostramos un fragmento del trabajo del equipo E10 del G2.

A4: yo la forma en que lo hecho, mira como era más difícil dividir 4 pizzas enteras entre 5 ó 6 (B3: 6), acá pone 6, yo hecho la pizza en trozos, la hecho en 8 trozos la pizza entonces he multiplicado 8 por 4 (B3: 32), sí, sí 32 dividido entre 6 y tocaban a 5 y algo, sí 5 y un cuarto de trozos (B3: pero ahí ya es complicado para ellos), sí pero lo otro me salía um… aquí sí me salía exacto, me salía 5 trozos para cada uno, en la mesa 2…

CoR3. Procedimientos de comparación de fracciones

Entre las posibles maneras que pueden aplicarse para comparar dos fracciones hemos observado que, los estudiantes del equipo E6 del G1 y de los equipos E7, E11 y E12 del G2, utilizan básicamente las ideas de fracciones equivalentes y homogenización de fracciones, de modo que al igualar los denominadores la comparación se reduce a determinar la relación de orden entre los numeradores. Reconocemos en las actuaciones de los estudiantes el uso del lenguaje de las fracciones y la mención explícita de los procedimientos de búsqueda de fracciones equivalentes o de homogenización de fracciones. Ejemplificamos este acercamiento con un segmento del trabajo del equipo E7 del G2. Después de este fragmento presentamos en la Figura 7.45 la resolución expuesta por este equipo en la producción escrita.

F3: y otra estrategia también es esto es cuatro sextos y esto es seis octavos, ¿no?, si simplificamos nos daba aquí que eran dos tercios y aquí simplificando también aquí entre dos, sería tres cuartos entonces sacamos factor común de eso que es 12 ¿no?, entonces 12 entre 3 (C3: 4)…, y aquí daba 9, 9 doceavos de una pizza, comen más que…

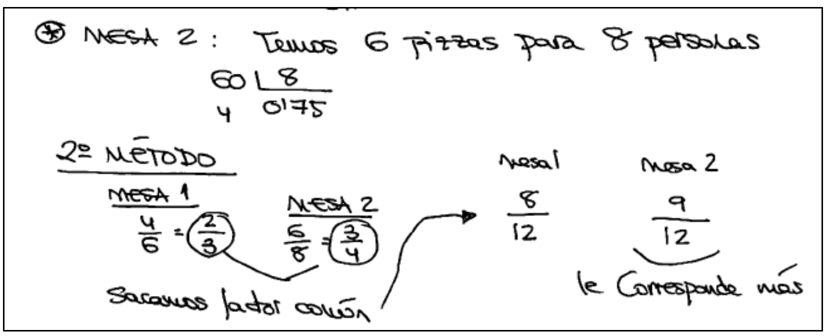


Figura 7.45. Procedimiento CoR3 manifestado en el equipo E7 del G2

CoR4. Resolución gráfica

Solamente en el equipo E3 del G1 se manifestó una resolución gráfica. Sin embargo, reconocemos que el estudiante ha resuelto el ejercicio según la estrategia que hemos descrito anteriormente y codificado como CoR2 pero la ha razonado y representado haciendo uso de los dibujos de la tarea. A continuación mostramos un fragmento de la intervención del estudiante A2 en la que explica al equipo lo que ha realizado, posteriormente en la Figura 7.46 mostramos el trabajo escrito.

A2: no sé… es que después yo lo hecho de otra manera, sabes lo que te digo, yo lo he partido y he visto que donde tenía que comer era aquí, pero así lo he visto en dibujo no sacando… ya cuando lo he visto pues lo hecho, yo con el dibujo he dividido todas las pizzas en 4 y agrupaba 4…
B2: vamos a ponerlo…, uno gráficamente
A2: claro el primero lo hacemos de manera gráfica con los dibujos y en el segundo ya lo desarrollamos con los números…

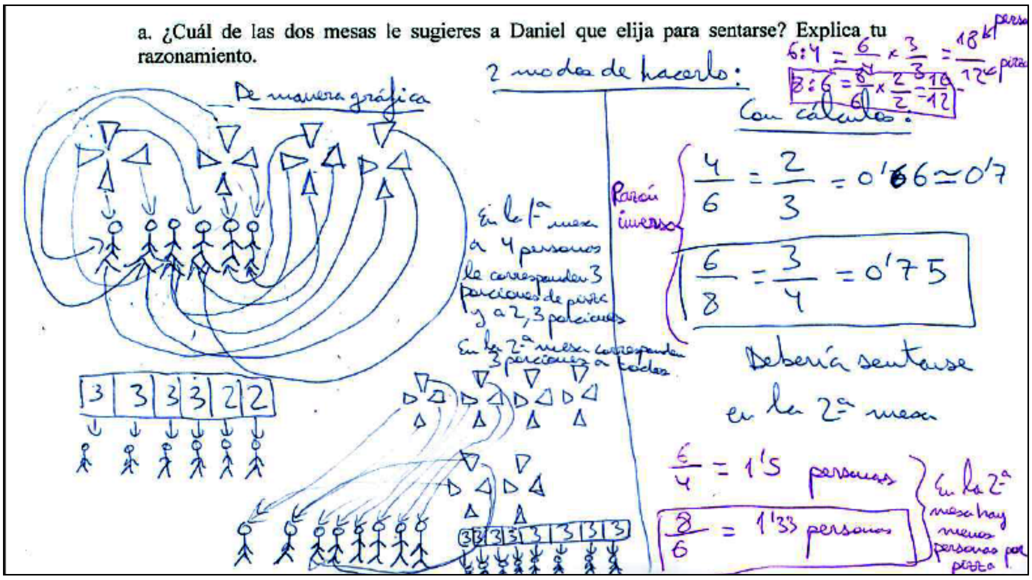


Figura 7.46. Resolución del ejercicio (a) manifestada en el equipo E3 del G1

CoR5. Reinterpretación de la situación en términos de una razón (Normalización)

Hemos observado la estrategia de la normalización en los equipos E1 y E4 del G1 y E10, E11 y E12 del G2. Esta consiste en la elección de una razón del tipo “a pizzas”: “b personas” o “b personas: a pizzas” mediante la cual reinterpretan la situación expuesta, llegan a dos razones con antecedentes o consecuentes iguales y logran determinar la mesa más conveniente para sentarse a comer. No obstante, según Lamon (2007) la normalización no es un buen indicador del razonamiento proporcional ya que los estudiantes que la usan fallan en reconocer toda la relación estructural de una proporción.

Ejemplificamos con un fragmento del trabajo del equipo E11 del G2 en el cual el estudiante manifiesta que ha usado la razón unitaria $\frac{1}{2}$ pizza: 1 persona, posteriormente tras el reparto inicial llega a las razones 1:6 y 2:8 cuya comparación es más sencilla, pues 2:8 es equivalente a 1:4.

B13: bueno yo lo hecho de otra forma, he propuesto el reparto de la mesa 1 como son 6 personas y hay 4 pizzas, he cogido 3 personas que es la mitad de las personas le he repartido media pizza a cada uno de los integrantes de la mesa y queda 1 pizza para repartir entre los seis, sin embargo en la mesa 2 he hecho el mismo procedimiento como hay 8 personas y hay 6 pizzas he cogido 4 y he repartido media a cada uno, y sobran 2 pa repartir entre los 8, entonces vemos que la proporción es mayor
A13: uno, uno a seis y dos a ocho…

Destacamos otro ejemplo, ahora del equipo E10 del G2 con el fin de ilustrar el razonamiento expuesto al elegir la razón no unitaria 3 personas: 2 pizzas.

D3: claro, yo también he llegado a que la mesa 2 comen más, yo aquí (he)hecho 3 personas tocan a 2 pizzas entonces aquí si pongo a Daniel 3 tocan a 2 pizzas ¿no?, aquí 3 personas tocan a 2 ¿no?, y hay 3, 6, 7 y si ponemos a Daniel, 8, o sea que a 3 personas tocan a 2 pizzas, otras 3 tocan a 2 pizzas, y otras 2 pizzas para 2 y por eso ahí tocan a más…

En la Figura 7.47 presentamos la estrategia CoR5 expuesto en la producción escrita del equipo E10 del G2.

- 1 opción → Cada 3 comensales tocan a 2 pizzas enteras. Quedan todos repartidos. (mesa 1).
Cada 3 personas, tocan a 2 pizzas y los 2 restantes se reparten (solamente 2).

Figura 7.47. Estrategia CoR5 manifestada en el equipo E10 del G2

<u>*CoR6. Suposición de equivalencia de razones*</u>

Tal estrategia consiste en relacionar dos de las cantidades y a partir de esa razón suponer, de manera simulada, que las otras cantidades se relacionan bajo la misma razón; luego proceder como en una regla de tres, y comparar el resultado obtenido con las cantidades dadas originalmente (Valverde, 2008). Como ejemplo de esta estrategia mostramos un fragmento del trabajo del equipo E5 del G2 que ha sido el único en el que se ha manifestado su uso, aunque consideramos que no lo hacen de una manera suficientemente evidente.

C5: yo lo (que he) hecho es una regla de tres, he puesto 4 pizzas a 5 personas, si en la mesa 2 hay 6 pizzas, a cuántas personas daría, entonces me daba que la mesa 2 había más…

7.6.1.2 Errores en la Comparación de Razones

En la observación de las actuaciones de los estudiantes en la resolución de la Tarea 6 hemos detectado poca frecuencia de errores, y reconocemos tres acercamientos que han conducido a los estudiantes a una respuesta incorrecta, estos son:

- Interpretación inadecuada del cociente.
- Redondeo del cociente.
- Razonamiento aditivo.

En la Tabla 7.30 mostramos los errores manifestados en cada equipo, a continuación de las mismas detallamos en qué consiste cada uno y ejemplificamos con trabajos de los estudiantes.

Tabla 7.30. *Errores manifestados en la comparación de razones*

G1																
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E9	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E19	E20
ECoR1											*	*			*	
ECoR2										*		*				
ECoR3		*								*						

G2									
	E1	E2	E3	E4	E5	E7	E10	E11	E12
ECoR1					*				*
ECoR2	*								
ECoR3						*			

Errores

ECoR1: Interpretación inadecuada del cociente
ECoR2: Redondeo del cociente
ECoR3: Razonamiento aditivo

ECoR1. Interpretación inadecuada del cociente

Observamos que en la comparación de razones, cuando los estudiantes recurrieron a la división de la cantidad de personas entre la cantidad de pizzas obtuvieron como cociente la cantidad intensiva personas/pizza. No obstante interpretaron el cociente en el sentido pizza/persona de modo que al obtener una cantidad mayor en la mesa 1 consideraron que ésta era la mejor opción para sentarse a comer. Esta aproximación se manifestó en los equipos E14, E15 y E19 del G1 y en los equipos E5 y E12 del G2.

Consideramos que es posible que el procedimiento de dividir la cantidad de personas entre la cantidad de pizzas pudo estar influido por la intervención inicial de la investigadora, ésta repaso algunos contenidos asociados a la razón, uno de los cuales se refiere a que el valor de la razón por definición es un número mayor que 1 y de ahí que se considere como antecedente la mayor de las cantidades. Podría ser que siguiendo esta idea los estudiantes eligieran dividir personas/pizzas, no obstante la interpretación errónea del cociente los condujo a una respuesta equivocada. Ejemplificamos con un fragmento del equipo E5 del G2:

B6: donde me sale más es en la mesa 1
A6: ¿ésta?
B6: sí
A6: a mí al revés...
B6: 6 entre 4 me ha salido uno y medio…

ECoR2. Redondeo del cociente

El cociente de la división de la cantidad de pizzas entre la cantidad de personas, en cada mesa, es igual a 0,8 y 0, 85… sin tomar en cuenta a Daniel y en el caso de que se tomara en cuenta es 0,6… y 0,75. Hemos observado que en dos equipos del G1 (E13 y E15) y en el equipo E1 del G2 algunos de los estudiantes expresaron que llegaron a la conclusión equivocada de que en ambas mesas se comía lo mismo debido a que redondearon los cocientes a 0,8 a 0,7 ó a 0,75. Mostramos a modo de ejemplo un fragmento del trabajo del equipo E13 del G1.

B9: estas son equivalentes, ahora, estas son equivalentes...
D9: equivalentes porque la proporción sería la misma, entonces daría igual donde se siente, que la proporción, la razón que va llevar siempre es cero setenta y cinco (0,75) he aproximado yo…

ECoR3. Razonamiento aditivo

Dadas las razones de la tarea (4 pizzas: 6 personas y 6 pizzas: 8 personas), en este caso considerando que si el chico se sentara en alguna de las mesas, se tiene que la relación aditiva entre los antecedentes 4 y 6 o entre los consecuentes 6 y 8 es la misma, la diferencia es 2. Hemos observado que algunos estudiantes de los equipos E2 y E13 del G1 y una estudiante del equipo E7 del G2 han razonado inadecuadamente planteando que no interesa dónde se siente el chico pues en ambas mesas se come lo mismo ya que la diferencia entre personas y pizzas es la misma en cada caso. Mostramos un fragmento que ejemplifica claramente esta idea con el trabajo del equipo E13 del G1, la detección y tratamiento dado durante el trabajo colaborativo incidió en que el estudiante que lo manifestó posteriormente se diera cuenta del error.

I: pero, ¿por qué creen que estas dos fracciones son iguales?, eso es lo importante
A9: la historia es esa, la historia es que yo de entrada le he dicho claro 4 a 6, esto es de 4 a 5, en principio es de 4 a 5 ó 6 a 7 pero como viene Daniel pasa a ser 4 a 6 y 6 a 8, y dije esto es parejo da igual que se siente pero sin haber hecho la división, ¿me entiendes?, digo claro se llevan 2, 4 a 6, 6 a 8, dos digo da igual que se siente…

Resumen

En ambos grupos la división de antecedente y consecuente constituyó el procedimiento con mayor frecuencia de uso. Ante la situación dada en el G1, relativa al predominio de la división, se decidió cambiar las pautas en el G2 en donde se les pidió que resolvieran la tarea al menos de dos maneras diferentes.

La Tarea 6 ha resultado poco efectiva para detectar y estudiar indicadores del razonamiento proporcional en el G1. Consideramos que esto podría deberse al tipo de razones implicadas, las relaciones escalares y funcionales no son enteras y creemos que esta situación impulsa al estudiante a recurrir a procedimientos relacionados con el reparto equitativo, como la división, o a procedimientos de comparación de fracciones, como la homogeneización. La diferencia de edad y nivel de formación entre los participantes de otros estudios que han usado esta tarea y los participantes de nuestra investigación podrían explicar el protagonismo con que la división de naturales aparece en la tarea de comparar razones. En consecuencia consideramos que, tal y como se desarrolló en el G2, es preciso indicar a los estudiantes de magisterio que resuelvan la tarea de distintas maneras con el propósito de promover la flexibilidad en el conocimiento procedimental.

En las actuaciones de los estudiantes de ambos grupos observamos la presencia de la normalización, estrategia en la que se reinterpreta toda la situación en términos de una razón particular y que ha sido reportada en estudios como el de Lamon (1994) o A. Fernández (2001).

En el G1 los equipos E1, E3, E4, E6, E17 y E20 resolvieron la comparación de razones de dos maneras distintas. Todos los equipos del G2, excepto el E1, resolvieron la tarea de dos o tres maneras diferentes.

La interpretación inadecuada del cociente al dividir la cantidad de personas entre la cantidad de pizzas ha sido el error más frecuente, en tres equipos del G1 y en dos del G2. En dos equipos del G1 y en uno del G2 se mostró una elección inadecuada de la mesa debido al redondeo de los cocientes a un mismo decimal, esta actuación no se había considerado como una posibilidad.

Destacamos la baja frecuencia del razonamiento aditivo, se manifestó sólo en dos equipos del G1 y en uno del G2. No obstante, previamente a la intervención habíamos considerado que, dado que la relación aditiva entre los elementos de las razones era igual, los estudiantes mostrarían razonamientos de este tipo con mayor frecuencia.

7.6.1.3 Tratamiento del Reparto Proporcional

El ejercicio (b) de la Tarea 6 se centra en el reparto de 240 personas en mesas de dos tipos (1 y 2), las cuales están distribuidas según la razón 7:4. El ejercicio demanda hallar la cantidad de de mesas de cada tipo de modo que se puedan sentar todas las personas.

En la planificación de la Tarea 6 (Apartado 6.4.1.1) se caracteriza detalladamente este ejercicio, sin embargo se había previsto que una forma posible de abordar la tarea es considerar que en una unidad compuesta de 11 mesas (7:4 mesas) se ubican 80 personas y entre este subtotal de personas y el total de las mismas existe una relación escalar igual a 3. En consecuencia, es necesario extender tal relación para conocer que las mesas requeridas han de ser el triple de las consideradas de ahí que se busque la razón equivalente a 7:4 multiplicando ambos elementos por tres, $(7:4)\times 3 = 21:12$

Después de la observación de las producciones de los equipos hemos detectado que las actuaciones se ajustan a la estrategia descrita en el párrafo anterior, agrupamos las resoluciones según dos aproximaciones:

- Detección y aplicación de la relación escalar.
- Prueba y error.

En la Tabla 7.31 mostramos las aproximaciones manifestadas en cada equipo, después detallamos cada una y ejemplificamos con trabajos de los estudiantes.

Tabla 7.31. *Estrategias mostradas en el reparto proporcional*

G1																
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E9	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E19	E20
RPr1	*			*	*	*		*			*	*	*	*	*	
RPr2	*	*							*							

G2									
	E1	E2	E3	E4	E5	E7	E10	E11	E12
RPr1		*		*	*	*	*	*	*
RPr2	*		*					*	*

Estrategias

RPr1: Detección y aplicación de la relación escalar
RPr2: Prueba y error

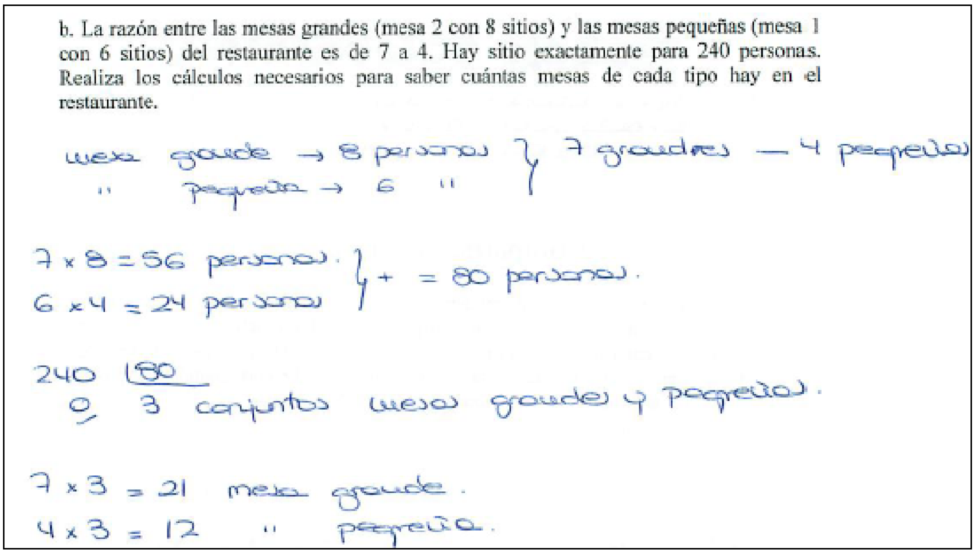
Nota: Los equipos E3, E9, E13 y E20 del G1 no resolvieron el segundo ejercicio de la T6.

RPr1. Detección y aplicación de la relación escalar

Observamos que en diez de los 16 equipos del G1 (E1, E4, E5, E6, E11, E14, E15, E16, e17 y E19) y en siete de los nueve equipos del G2 (E2, E4, E5, E7, E10, E11 y E12) los estudiantes siguieron un mismo esquema de resolución, hallando primero el total de personas que se sientan en un grupo de mesas grandes y pequeñas, esto es 80; posteriormente detectan que la relación escalar entre esta cantidad de personas y el aforo máximo es de tres. Aplican esta relación escalar para hallar directamente el total de mesas de cada tipo (21 grandes y 12 pequeñas) o retrocediendo en las acciones previas hallan primero el total de personas que se sientan en las mesas grandes y en las mesas pequeñas para dividir estas cantidades entre los sitios de cada mesa, hallando las mesas totales de cada tipo. Ejemplificamos este procedimiento con el trabajo del equipo E11 del G1:

B5: seis personas, ahora por cada 7 mesas grandes hay 4 pequeñas
A20: siete grandes, cuatro pequeñas…
B5: ahora ya, 7 por 8 que son 7 mesas grandes para 8 personas, 7 por 8 que son 56 personas, y con las pequeñas 6 por 4, 24 personas, entonces 56 más 24 personas son 80 personas por cada conjunto de 7 grandes y 4 pequeñas entonces como hay 240 personas en total si lo dividimos entre 80 personas salen 3 conjuntos de 7 mesas

grandes y 4 pequeñas…, 3 conjuntos de mesas grandes y pequeñas, y ahora dice que hay 7 por 3, 21 mesas grandes… y 4 por 3…
A20: mesas pequeñas, ya está.



b. La razón entre las mesas grandes (mesa 2 con 8 sitios) y las mesas pequeñas (mesa 1 con 6 sitios) del restaurante es de 7 a 4. Hay sitio exactamente para 240 personas. Realiza los cálculos necesarios para saber cuántas mesas de cada tipo hay en el restaurante.

mesa grande → 8 personas } 7 grandes — 4 pequeñas
" pequeña → 6 "

7 x 8 = 56 personas. } + = 80 personas.
6 x 4 = 24 personas

240 |80
0 3 conjuntos mesas grandes y pequeñas.

7 x 3 = 21 mesas grandes.
4 x 3 = 12 " pequeña.

Figura 7.48. Actuación Pr1 manifestada en el equipo E11del G1

RPr2. Prueba y error

Por otro lado hemos observado que en los equipos E1, E2 y E12 del G1 y en los equipos E1, E3, E11 y E12 del G2 los estudiantes manifestaron una estrategia de prueba y error o tanteo basada en la propiedad de la equivalencia de razones. Así fueron buscando razones equivalentes a 7:4, multiplicando los elementos de estas razones por las personas y sumando hasta llegar a completar los 240 sitios disponibles. Presentamos un ejemplo procedente del trabajo del equipo E11 del G2, mismo que recogemos en la Figura x.

A13: yo lo que hecho es una especie de gráfico, como sabemos que respectivamente la proporción va a ser de 7 a 4 ¿no?, de 7 con respecto a la mesa 2 y de 4 con respecto con la mesa 6, si multiplicamos el número de comensales por el número de mesas vamos a ir viendo la relación ¿no?, 7 por 8 igual 4 por 6, pero de todas maneras eso no nos sale para que la suma de total de comensales nos salga a 240, por lo tanto como sabemos que la relación siempre va ser constante de 7 a 4 pues será la misma relación que de 14 a 8, que de 21 a 12 entonces claro lo que hacemos es si hemos multiplicado antes 7 por 8 y 6 por 4 pues ahora multiplicaremos la siguiente relación 14 por 8 y 8 por 6 y volvemos a sumar a ver si nos da los 240…

Ideas erróneas manifestadas en la resolución del ejercicio (b)

Observamos que en cinco equipos del G2 (E1, E3, E5, E7 y E10) se manifestaron algunas ideas incorrectas al abordar el reparto proporcional, una de ellas se refiere al reparto del total de personas en mesas de un solo tipo, esto es, dividen 240 personas entre 8 (sitios en mesas tipo 1) ó entre 6 (sitios en mesas tipo 2), desde esta perspectiva concluyen que hay 30 ó 40 mesas de uno u otro tipo. Este error se mostró en los equipos E10, E5 y E7 del mismo grupo. Lo ejemplificamos a continuación con un fragmento de la conversación dada en el equipo E10.

A3: yo te digo como yo he pensado yo he dicho que si para 240 personas… mesas con 8 sitios, he puesto mesas con 8 sitios y mesas con 6 sitios, ¿no?, como en el restaurante le caben 240 personas pues la relación de 8 a 240 son, 3 por 8, 24, son 30, la relación de 6 sitios para 240 personas justo 40, debería haber 30 mesas grandes y 40 pequeñas, ahí es donde me he quedado…

En el equipo E3 surgió un largo intercambio entre los miembros del equipo y la profesora de la asignatura. Inicialmente la estudiante B12 expuso su manera de resolver el ejercicio y en el aporte manifestó un error de cálculo, no obstante rápidamente se detectó y corrigió. Posteriormente esta conversación giró en torno al aporte de la estudiante C12 quién sugirió utilizar una regla de tres para relacionar dos cantidades que no mantenían la misma relación. Las cantidades de mesas se relacionan bajo la razón 7:4, mientras que el total (240) y subtotal de personas que se sientan en cada tipo de mesas (168 en mesas tipo1 y 72 en mesas tipo 2) siguen la razón 7:3, por otro lado la razón que describe que por cada 8 personas que se sientan en una mesa tipo 1 hay 6 personas que se sientan en una mesa tipo 2, es 4:3. Como se puede observar con estas razones no es posible establecer una regla de tres que relacione cantidades de distinta magnitud. Una posibilidad es relacionar el total de personas que se sientan en un grupo de 7+4 mesas, según los tipos, y el aforo máximo con el total de mesas que debería haber, esto es $\frac{80}{11}=\frac{240}{x}, x=33$, y luego repartir 33 mesas según la razón 7:4. Mostramos un fragmento de la conversación dada en el equipo E3 para ejemplificar esta aproximación errónea.

C12: esto ya sabes que es el total de las mesas… pero que por ejemplo, me refiero a que ya sabes que del total 63,6 mesas son grandes y 36,4 que son chicas
Profesora: 63,6 por ciento que son grandes y 36,4 por ciento son chicas
B12: ahora me da que si 100% son 240, treinta y seis con seis (36,6) son…

En el equipo E1, del mismo grupo, se evidenció una interpretación errónea del cociente, al dividir 240 personas en grupos de 7 personas, esta división es cuotitiva y permite conocer la cantidad de mesas necesarias. Sin embargo, en el intercambio, dos estudiantes C1 y B1 corrigen al compañero D1 y subsanan la duda de A1 como se muestra a continuación.

A1: ¿7?...
D1: 7 son 7 personas
C1 y B1: 7 son las mesas

Resumen

En ninguno de los equipos se mostró un esquema de resolución basado en la propiedad de las proporciones que caracteriza a los repartos proporcionales.

En ambos grupos detectaron y aplicaron la relación escalar entre el total de personas de una unidad compuesta 7:4 y el total de personas del restaurante, este acercamiento presentó mayor frecuencia, se aplicó en diez de los 16 equipos del G1 y en siete de los nueve equipos del G2.

El tanteo o prueba y error se mostró con mayor frecuencia en el G2, se presentó en cuatro de los nueve equipos. Consideramos que esta estrategia refleja la aplicación de la equivalencia de razones y la consideración implícita de la razón 7:4 como una unidad compuesta.

Sólo el equipo E1 del G1 manifestó ambas aproximaciones de resolución, mientras que en el G2 se manifestaron en los equipos E11 y E12.

En cinco equipos del G2 se manifestaron errores al abordar la cuestión, de los cuales sólo uno manifestó la intención de aplicar una regla de tres para relacionar razones que no son equivalentes, en la conjetura previa habíamos planteado que era posible que esta idea se mostrara con mayor frecuencia sin embargo la situación ha sido la contraria.

7.6.1.4 Interpretaciones de la Razón en la T6

Algunas ideas asociadas a la noción de razón así como con las propiedades de la misma se mostraron durante el tratamiento que dieron los estudiantes a la Tarea 6. A partir de la observación de las conversaciones y trabajos escritos correspondientes al trabajo colaborativo de la misma logramos extraer actuaciones y razonamientos que dan cuenta de una u otra interpretación de la razón. Recogimos cinco interpretaciones relativas a la noción de razón, las indicamos a continuación:

- Por cada “a” hay “b”.
- Identificación de la razón con cociente o fracción.
- Detección de la relación multiplicativa implícita en la razón.
- Aplicación de propiedades o características de la razón.
- La razón es una relación aditiva.

En la Tabla 7.32 se recogen los equipos que ponen de manifiesto cada interpretación, a continuación se detalla en qué consisten y se dan ejemplos de dichas manifestaciones.

Tabla 7.32. *Interpretaciones de la razón en la Tarea 6*

G1	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E9	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E19	E20
IR1	*				*	*		*		*	*	*	*	*	*	
IR2		*	*		*		*		*	*	*					
IR3	*				*	*		*			*		*	*	*	
IR4	*	*	*						*	*	*					
IR5										*						
Ninguna				*												*

G2	E1	E2	E3	E4	E5	E7	E10	E11	E12
IR1	*	*	*		*	*	*	*	*
IR2		*				*		*	
IR3		*		*	*	*	*	*	
IR4				*		*	*	*	*
IR5						*			

Interpretaciones

IR1: Por cada “a” hay “b”
IR2: Identificación de la razón con cociente o fracción
IR3: Detección de la relación multiplicativa implícita en la razón
IR4: Aplicación de propiedades o características de la razón
IR5: La razón es una relación aditiva

IR1. Por cada “a” hay “b”

Esta interpretación se caracteriza porque en la lectura de la razón a:b se evidencia el uso de la expresión por cada "a" objetos de un tipo hay "b" objetos de otro tipo. En la resolución del ejercicio (b) de la Tarea 6 observamos una interpretación adecuada de la razón 7:4, considerándola como una relación extensible a otros pares. Reconocen que por cada 7 mesas de un tipo hay 4 de otro tipo.

A diferencia del trabajo realizado en la Tarea 2 “Preferencia en el refresco de cola”, en donde la razón no es entera e involucra una magnitud discreta, observamos que en las resoluciones del ejercicio (b) de la Tarea 6 no se refleja la idea de que la suma de los elementos de la razón 7 y 4 sea el total de las mesas. Consideramos que esta diferencia radica en el hecho de que en la Tarea 2 no se conoce el total de elementos comparados mientras que en la Tarea 6 sí se cuenta con esta información. A partir de esta observación consideramos que la concepción sobre la suma de los elementos de la razón está relacionada además del tipo de magnitud con el hecho de que se desconozca el total de elementos implicados en la comparación.

La interpretación por cada “a” hay “b” también se hizo presente en algunas actuaciones mostradas en la resolución de la primera parte de la Tarea 6; básicamente se mostró en las ocasiones en las que los estudiantes recurrieron a la estrategia de normalización para comparar las razones. Esta interpretación expresa una normalización de la razón ligada a la unidad (A. Fernández, 2001).

Observamos que esta interpretación se puso de manifiesto en diez equipos del G1 y en ocho equipos del G2.

Ejemplificamos esta interpretación con un fragmento del trabajo del equipo E10 del G2:

B3: vamos a ver, en una mesa grande se sientan 8 personas, si la relación es 7 a 4 eh… en una relación de uno a uno tendríamos en siete mesas entran 56 personas y en cuatro mesas entran 24 personas, ya tenemos una relación uno a uno ¿no? (A4: ahí serían 80)... ahora hay que completar relaciones hasta 240…

IR2. Identificación de la razón con un cociente o fracción

En esta interpretación incluimos actuaciones en las cuales los estudiantes dan un tratamiento de cociente a la razón, esto quiere decir que trabajan con el valor de la razón el cual procede de la división de los términos. También hemos considerado como parte de esta interpretación las actuaciones en las que se utiliza un lenguaje o procedimientos propios de las fracciones con significado parte-todo. Consideramos que aunque las razones en ciertas situaciones puedan visualizarse ya sea como un cociente o como una fracción, esta interpretación denota una ausencia de entidad de la razón pues se le identifica con estos otros subconstructos del número racional. Esta aproximación se evidenció en siete equipos del G1 y en tres equipos del G2.

En el siguiente ejemplo, procedente del trabajo del equipo E9 del G1, se muestra que la razón es considerada como un número resultado de la división de las cantidades a comparar.

B11: vamos a ver porque Daniel se debe sentar en la mesa 2 porque la razón es mayor es decir si divides, si divides el número de pizzas entre las personas que se sientan, pues si incluyes a Daniel, sale la razón sale mayor que si divides los de la mesa 1, entonces quedaría… pues si están en la mesa 1 ¿cuánto están?, son 4 pizzas, 5 y con Daniel, entonces serían 4 entre 6…

IR3. Detección de la relación multiplicativa implícita en la razón

En esta interpretación hemos considerado aquellos aportes de los estudiantes en los que se refleja que en relación a la razón 7:4 reconocen que la cantidad de mesas grandes es casi el doble de las mesas pequeñas, o que identifican la relación multiplicativa en la razón de personas 240:80. Así en sus intervenciones se expresa que una cantidad es el triple de la otra o en sentido inverso que una es la tercera parte de la otra. En términos generales se da muestra de que interpretan la relación multiplicativa que vincula las cantidades implicadas en una razón. Se ha presentado en ocho equipos del G1 y en seis equipos del G2. Ejemplificamos con un segmento del trabajo del equipo E17 del G1.

B13: a ver era, he puesto 8 por 7 luego 4 por 6, porque como cada 7 hay 4 pequeñas, entonces son ¿56?, entonces he sumado 56 más 24, 80, ahora 240 personas es el triple de 80, van a ver…

IR4. Aplicación de propiedades o características de la razón

En este grupo hemos considerado las actuaciones en las que los estudiantes hacen referencia a alguna propiedad o característica de la razón para resolver alguna de las situaciones de la Tarea 6. Hemos observado que en algunos equipos aplican la equivalencia de razones e (o) indican, basándose en la definición de la razón, que ha de tomarse mayor el antecedente que el consecuente de modo que el valor de la misma sea un número mayor que 1. Detectamos estos acercamientos en seis de los 16 equipos del G1 y en cinco de los nueve equipos del G2. Mostramos un ejemplo procedente del equipo E2 del G1.

D21: siete es a cuatro (7:4), como catorce es a ocho (14:8) como veintiuno es a 12 (B21: …es a ocho como veintiuno es a 12) pero claro ahí ya te están diciendo cuánto tiene cada uno, tú tienes que multiplicar y la respuesta te tiene que salir 240

IR5. La razón es una relación aditiva

Únicamente en el equipo E13 del G1 y en el equipo E7 del G2 se mostró la "estrategia aditiva" para comparar las razones. Observamos que en cada caso uno de los estudiantes del equipo mostró la idea de que dado que en las razones 4:6 y 6:8 la diferencia entre los elementos correspondientes es igual, entonces la cantidad de pizza que se consume en cada mesa sería la misma. Este acercamiento ha sido reportado en múltiples estudios con niños o adolescentes. Mostramos a modo de ejemplo una de las intervenciones del estudiante del equipo E13 del G1.

A9: la historia es esa, la historia es que yo de entrada le he dicho claro 4 a 6, esto es de 4 a 5, en principio es de 4 a 5 ó 6 a 7 pero como viene Daniel pasa a ser 4 a 6 y 6 a 8, y dije esto es parejo da igual que se siente pero sin haber hecho la división, ¿me entiendes?, digo claro se llevan 2, 4 a 6, 6 a 8, dos digo da igual que se siente…

Resumen

La interpretación adecuada de la razón *a:b* como relación (por cada "a" elementos hay "b"), se manifestó en diez de los 16 equipos del G1 y en ocho de los nueve equipos del G2. La aproximación aditiva de la razón sólo se manifestó en un equipo de cada grupo.

La identificación de la razón con otros subconstructos de los racionales como el cociente o fracción parte-todo se presentó en siete equipos del G1 y en tres equipos del G2. En el G1 esta interpretación podría estar relacionada con el hecho de que en la tarea de comparación aplicaron la división como procedimiento principal. Por su lado es posible que en el G2 la pauta de aplicar distintas formas de resolver la comparación influyera en la menor presencia de esta interpretación de la razón. Más de la mitad de los equipos de ambos grupos reconocieron la relación multiplicativa que está implícita en la razón, esto quiere decir que la lectura de la razón no es sólo literal. Observamos que seis de los equipos del G1 y cinco del G2 aplicaron alguna propiedad o mencionaron una característica de la razón, como la equivalencia de razones o que el valor de la razón ha de ser un número mayor que 1. En el G1, cuatro equipos mostraron tres o más interpretaciones, ocho equipos manifestaron dos, dos mostraron únicamente una interpretación y en dos equipos no se hizo explícita ninguna de las interpretaciones consideradas. En el G2, cuatro de los nueve equipos mostraron tres o más interpretaciones, tres equipos manifestaron dos, y dos equipos presentaron sólo una de las interpretaciones.

7.6.2 Resumen de las Actuaciones Manifestadas en la Tarea 6

En la Tabla 7.33 presentamos un resumen de los indicadores asignados a las actuaciones manifestadas por los estudiantes cuando participaron de la fase de trabajo colaborativo sobre la Tarea 6. En la Tabla se indica la cantidad de equipos (expresada porcentualmente) en los cuales se detectó cada concepción.

Tabla 7.33. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 6*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Comparación de Razones	CoR1	Dividir las cantidades de pizza y de personas.	98%	100%
	CoR2	Dividir las pizzas en un número fijo de porciones y repartir equitativamente.	19%	55%
	CoR3	Aplicar procedimientos de la comparación de fracciones.	6%	33%
	CoR4	Mostrar una resolución gráfica.	6%	0%
	CoR5	Normalizar las razones.	12%	33%
	CoR6	Suponer la equivalencia de las razones.	0%	11%
Errores	Error en CoR	Mostrar errores en los procedimientos aplicados en la comparación de razones.	31%	44%
	Error en RPr	Mostrar errores en el reparto proporcional.	0%	55%
Reparto Proporcional	RPr1	Detectar la relación escalar entre las cantidades de personas y usarla para determinar la cantidad de mesas de cada tipo o la cantidad de personas totales que se sienta en los dos tipos de mesas.	62%	78%
	RPr2	Prueba y error, tanteo.	19%	44%
Interpretaciones de la Razón.	IR1	Reconocer la razón 7:4 como una relación extensible a otros pares. Expresar que *por cada "a" objetos hay "b" objetos*.	62%	89%

Tabla 7.33. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 6*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
	IR2	Interpretar la razón 7:4 como cociente o división, o identificar la razón con una fracción.	44%	33%
	IR3	Reconocer la relación multiplicativa implícita en las razones 7:4 o 240:80.	50%	67%
	IR4	Reconocer o aplicar alguna propiedad de las razones, por ejemplo la equivalencia.	37%	55%
	IR5	Tratar la razón como una relación aditiva.	6%	11%

7.6.3 Logro de las Expectativas de Aprendizaje

En la descripción de la planificación de la T6 (Apartado 6.4.1.1) se indicó el trabajo sobre la misma posiblemente contribuirían a las competencias: *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones,* y *pensar y razonar*.

Logro del objetivo 11: Establecer la relación de orden entre dos razones.

Los estudiantes de ambos grupos aplicaron distintos procedimientos y estrategias para comparar las dos razones del primer ejercicio de la Tarea 6, todos los equipos lograron establecer la comparación. En el trabajo realizado en el G1 observamos casi un único procedimiento (división) en sus producciones tanto individuales como colaborativas, esto nos impulsó a cambiar las directrices de trabajo en el G2 y este cambio resultó en una mayor variedad de aproximaciones procedimentales. En el apartado "*Estrategias de comparación de razones*" (Apartado 7.6.1.1) detallamos cada uno de los procedimientos manifestados, y con base en esas actuaciones consideramos que los estudiantes evidenciaron la capacidad de comparar razones, en cuyo tratamiento se estimuló la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones,* y *pensar y razonar*, dado que la mayor parte de los equipos aplicaron la división consideramos que la competencia se ha trabajado en un nivel de reproducción. Sin embargo, aquellos equipos que aplicaron procedimientos que reflejan uso del razonamiento proporcional tales como CoR5 y CoR6 han trabajado la competencia en un nivel de conexión pues estos procedimientos no son rutinarios.

Adicional a la aplicación de procedimientos se ha requerido de la interpretación de los mismos en función de la relación de orden, en algunos, el razonamiento ha sido más complejo que en otros. Por ejemplo, si aplican la división de antecedente y consecuente, la interpretación adecuada de los cocientes es fundamental para aportar la respuesta correcta, en el caso de aplicar una estrategia de normalización es preciso elegir una unidad de reparto (nueva razón) e interpretar las condiciones de las dos mesas coordinando al mismo tiempo las dos cantidades implicadas (personas y pizzas), en vista de lo cual consideramos que la resolución de la Tarea 6 ha permitido trabajar sobre la competencia *pensar y razonar*, los indicadores de actuación los situamos en el grupo de conexión de tal competencia.

Logro del objetivo 12: Aplicar la noción de razón y sus propiedades para resolver problemas empleando diferentes estrategias.

En el ejercicio (b) de la Tarea 6 se trata de realizar un reparto proporcional, éste se ha descrito en la planificación de la cuarta sesión (Apartado 6.4.1.1). Las expectativas de la investigación se centraron en conocer los procedimientos o estrategias aplicadas por los futuros maestros. En el apartado "Tratamiento del reparto proporcional" (Apartado 7.6.1.3) presentamos una síntesis de los hallazgos detectados, en relación a los cuales destacamos que las resoluciones se ajustaron a dos esquemas: uno de prueba y error (basado en la equivalencia de razones) y otro que se basa en la interpretación de la razón 7:4 como una relación que atañe a múltiples pares de cantidades y en cuyo desarrollo aparece la identificación de la relación escalar que permite vincular las cantidades de personas en el restaurante. En ambas aproximaciones reconocemos que los estudiantes han aplicado distintos conocimientos asociados a la razón para resolver el problema, la resolución del mismo ha incitado a actuaciones que reflejan que se han trabajado las competencias *pensar y razonar* y *resolver problemas* en un nivel de conexión. Los cálculos realizados son rutinarios así que la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones,* y *pensar y razonar*, se ha trabajado en un nivel de reproducción.

7.6.4 Balance de la Tarea 6 "Compartiendo Pizza"

En relación con las fortalezas de la Tarea 6 destacamos que ha resultado eficaz para fortalecer la flexibilidad del conocimiento procedimental de los estudiantes en la tarea de comparar razones. Hemos observado que de 16 equipos del G1 solamente E3, E4, E6 y E17 manifestaron al menos dos resoluciones diferentes, no obstante destacamos que es posible que la cantidad de equipos con este tipo de actuación fuera mayor si se les hubiese pedido desde la primera fase que utilizaran más de un método de resolución. Esta pauta se les dio en el G2, en el mismo observamos que los equipos E2, E3, E5, E7, E10 y E11 (6 de 9) mostraron más de una forma de abordar la comparación de razones. En resumen, consideramos que para utilizar la tarea "Compartiendo Pizza" en el ámbito de la formación de maestros y con el objetivo de promover y (o) estudiar el razonamiento proporcional es preciso añadir al enunciado la indicación de mostrar al menos dos formas diferentes de resolución. Para ejemplificar esta fortaleza de la Tarea 6 mostramos a continuación un fragmento del trabajo del equipo E11 del G2.

B9: pues yo lo hecho de la forma más fácil posible con la división y me salía la… la mesa 2 ¿no?
A13: sí, la mesa 2, la mesa 2
B13: claro, has calculado en el supuesto que Daniel se siente en la mesa está compuesta por 6 personas, 4 pizzas para repartir entre 6 y eso daría cero con seis, seis,

seis… y un 7, y en el caso de que se sentara en la mesa 2 habría 8 personas para repartir 6 pizzas entre 8 y la división sería cero con setenta y cinco
B9: exactamente
B13: bueno yo lo hecho de otra forma, he propuesto el reparto de la mesa 1 como son 6 personas y hay 4 pizzas, he cogido 3 pizzas que es la mitad de las personas le he repartido media pizza a cada uno de los integrantes de la mesa y queda 1 pizza para repartir entre los seis, sin embargo en la mesa 2 he hecho el mismo procedimiento como hay 8 personas y hay 6 pizzas he cogido 4 y he repartido media a cada uno, y sobran 2 pa repartir entre los 8, entonces vemos que la proporción es mayor
A13: uno, uno a seis y dos a ocho
B13: uno a seis y dos a ocho
B9: ¿copio las dos formas?
B13: eso es lo que yo había visto antes, había visto que la relación era eh… de cuatro a seis y de seis a ocho y he sacado el mínimo común múltiplo, entonces sale a… 6 y 8 se multiplican entre sí, son 48, y multiplicamos ya luego los numeradores, los numeradores los multiplicamos cruzados, salía a 36 partido por 48 y treinta y algo partido por 48, se demostraba que la mesa 2 hay más trozos de pizza que en la 1…
B9: ¿apuntamos todas las formas?
B13: sí… la primera la de la división...

En la misma línea agregamos que la tarea por sí misma, sin la gestión adecuada, no permite conocer cualitativamente actuaciones en las que se evidencien indicadores del razonamiento proporcional como la detección y uso de relaciones escalares o aplicación de estrategias de compensación de razones. La tarea ha sido aplicada con éxito en estudios como el de Lamon (1996) donde los niños participantes no tenían un conocimiento procedimental como el de los futuros maestros participantes de nuestro estudio, los niños exhibieron distintas estrategias de comparación de razones en las cuales la división de números naturales no tuvo protagonismo.

Consideramos que es posible que la inclusión de razones que mantengan alguna de las relaciones entera (escalar o funcional), podría favorecer el uso de estrategias de comparación de razones distintas de la división.

La inclusión de razones que presentaran la misma relación aditiva entre los elementos de cada una (antecedente y consecuente), permitió conocer si los estudiantes basaban sus decisiones en un razonamiento absoluto (aditivo) o si de lo contrario usaban el razonamiento multiplicativo para establecer la comparación.

Creemos que el enunciando del ejercicio (b) de la Tarea 6 podría reformularse de modo más simple, sugerimos eliminar la etiqueta numérica de las mesas y sustituirla por letras (A y B, por ejemplo). Aunque solamente se indicó en uno de los equipos (E11 del G2) es posible que la razón 7:4 que describe la relación entre mesas tipo 2 y tipo 1 haya provocado cierto despiste en el orden de las multiplicaciones a realizar, tal y como lo manifiesta el estudiante A13 a continuación:

A13: ahí está otro fallo eh… nos los han puesto ahí pa que caigas, vaya, han puesto la proporción al revés o sea que han puesto la mesa 2 antes que la mesa 1, cuando he llegado ahí he tenido que borrar estaba multiplicando al revés…

La sugerencia para evitar este desvío de atención es cambiar el orden de las figuras en la primera parte de la tarea, de modo que las mesas tipo 1 sean las grandes y las mesas tipo 2 sean las pequeñas.

De acuerdo con las actuaciones mostradas en ambos grupos en la resolución de la Tarea 6, tenemos que no hay evidencia de que el carácter abierto de la misma les ocasionara dificultades para expresar los resultados, a diferencia de otras tareas en las que se ha requerido una argumentación verbal, ésta ha precisado de conocimientos de tipo procedimental por lo que los estudiantes no han tenido dificultad en la comunicación de los resultados o procesos de resolución.

7.6.5 Revisión de los Supuestos Relativos a las Posibles Actuaciones

En la planificación de la Tarea 6 (Apartado 6.4.1.1) enunciamos los supuestos en relación con las posibles actuaciones que manifestarían los estudiantes.

Con base en resultados de un trabajo nuestro anterior (Valverde, 2008), en el cual se estudió una tarea similar a la propuesta, creemos que los estudiantes que usen la división como método para comparar las razones del ejercicio (a) mostrarán errores en la elección de la mesa debidos a la incorrecta interpretación del cociente de la división, pues debido al uso de procedimientos sin razonamiento confunden si el cociente se refiere a pizzas por 1 persona o personas por 1 pizza. Consideramos que en el ejercicio (b), relativo a un reparto proporcional simple, los estudiantes posiblemente intenten aplicar una regla de tres entre las razones 7:4 (mesas grandes: mesas pequeñas) y 8:6 (cantidad personas que se sientan mesas grandes: cantidad personas que se sientan en las mesas pequeñas) que no son equivalentes.

De acuerdo con las actuaciones manifestadas en los trabajos colaborativos hemos confirmado el predominante uso de la división como procedimiento para comparar las razones, y en la aplicación de la misma se manifestó la interpretación inadecuada del cociente en los equipos E14, E15 y E19 del G1 y en los equipos E5 y E12 del G2, en todos los casos en que se mostró este error observamos que los estudiantes consideraron la relación personas:pizzas.

En la resolución de la segunda parte de la tarea observamos que únicamente en un equipo del G2 (E3) se manifestó la intención de utilizar una regla de tres para relacionar razones que no son equivalentes. De modo que nuestra suposición no es aceptable en tanto la mayor parte de los estudiantes no consideraron la regla de tres como una herramienta de resolución. Es necesario estudiar con mayor profundidad las variables que aparecen en los problemas de reparto proporcional y estudiar las actuaciones de los estudiantes en función de las mismas. Nuestra tarea investigadora en relación con este ejercicio ha sido exploratoria.

7.7 TAREA 7

7.7.1 Conocimientos Manifestados en la Resolución Colaborativa

Las actuaciones manifestadas por los futuros maestros en la resolución de la Tarea 7 se han organizado de acuerdo con las dos demandas principales de tarea. La primera parte relacionada con la interpretación y aplicación de la escala en la búsqueda de medidas de la maqueta B, la segunda demanda tiene que ver con el enunciado de una conjetura sobre la relación entre las razones de longitudes, área y volumen de figuras y cuerpos semejantes.

7.7.1.1 Interpretaciones de la Escala

En este apartado describimos las actuaciones que se han detectado en el trabajo colaborativo de la Tarea 7. Nos centramos en identificar las concepciones que muestran los estudiantes en relación con las escalas así como detectar si éstos incurren en la "ilusión de la linealidad" en situaciones de semejanza que requieran la interpretación de una escala.

Hemos agrupado las actuaciones manifestadas en los equipos en tres aproximaciones, a saber:

- Interpretación adecuada de la escala 1:5.
- Aplicación de la escala para hallar longitudes.
- Aplicación de la escala para hallar el área y (o) volumen.

En la Tabla 7.34 recogemos las aproximaciones manifestadas en cada equipo, posteriormente explicamos en qué consiste cada una y ejemplificamos con producciones de los estudiantes.

Tabla 7.34. *Interpretaciones de la escala*

G1

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E9	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E19	E20
IE1		*	*	*			*					*				*
IE2	*	*	*	*	*	*	*	*	*		*		*	*	*	
IE3		*							*					*		

G2

	E1	E2	E3	E4	E5	E7	E10	E11	E12
IE1		*		*	*				
IE2	*	*	*	*	*	*	*		*
IE3	*			*	*	*	*		

Interpretaciones

IE1: Interpretación adecuada de la escala 1:5.
IE2: Aplicación de la escala para hallar longitudes.
IE3: Aplicación de la escala para hallar el área y (o) volumen.

Nota: Los equipos E13 del G1 y E11 del G2 no resolvieron la Tarea 7.

IE1. Interpretación adecuada de la escala 1:5

En esta interpretación los estudiantes expresan que la escala 1:5 quiere decir que cada centímetro en la maqueta A equivale a 5 centímetros en la maqueta B. La hemos observado en seis equipos del G1 (E2, E3, E4, E9, E15 y E20) y en tres equipos del G2 (E2, E4 y E5). En las manifestaciones se explicita que esta relación se establece entre los centímetros, no obstante, como detallamos más adelante, en ocasiones esta relación la extienden a magnitudes que no se relacionan linealmente como lo es el área o volumen. Ejemplificamos la interpretación IE1 con un fragmento del trabajo del equipo E9 del G1.

B11: vamos a ver, pues en el primer ejercicio tenemos que… partiendo de que la escala es 1 a 5 ¿no? (A19: sí, sí), pues… partiendo que es 1 a 5 cada centímetro de la maqueta "A" son 5 en la "B", pues se multiplican lo que mide cada… largo y ancho por 5, ya está. En la segunda frase también se multiplica por 5 porque la relación es la misma, la escala es 1 a 5 ¿no?, pero la conjetura no sabemos cómo ponerla...

IE2. Aplicación de la escala para hallar longitudes

La interpretación adecuada de la escala también se evidenció en el uso correcto de la misma para calcular las medidas del largo, ancho y perímetro de los cuadriláteros en la maqueta B. Conociendo los datos de la maqueta A y a partir de la escala 1:5 observamos que los estudiantes recurrieron a la multiplicación para calcular los datos correspondientes en la maqueta B. Se manifestó en trece equipos del G1 y en los ocho equipos del G2 que sí resolvieron la tarea. La ejemplificamos con un fragmento del equipo E2 del G2.

B14: ahora el Palacio de la Alhambra… como sabemos que la relación es de…
A14: uno a cinco, ahí hay muchos que caen…
C14: por cada centímetro de la maqueta A son cinco…
B14: de la otra, como tenemos de la maqueta A de largo 15, multiplicamos por 5 y son 75 centímetros
C14: 75, 25, 200, y 1875 de área, sí

IE3. Aplicación de la escala para hallar el área y (o) volumen

Como se ha descrito en el análisis cognitivo uno de los casos más conocidos de uso indebido de la linealidad es el relacionado con los problemas sobre el efecto el agrandamiento o reducción de una figura sobre su área o su volumen. El principio que gobierna este tipo de problemas es bien conocido: un aumento o reducción de cualquier figura geométrica (cuadrado, círculo, cubo, figura irregular,…) por un factor r, multiplica las longitudes por un factor r, las áreas por un factor r^2 y los volúmenes por un factor r^3.

La inclusión del área y volumen como datos desconocidos en la primera parte de la Tarea 7 obedece a nuestro interés por conocer si los estudiantes utilizaban la misma escala para hallar las medidas de tales cantidades, esto es si incurrían en el fenómeno de la ilusión de linealidad o si por el contrario los estudiantes analizaban de alguna manera que el crecimiento del área o del volumen no seguía la misma razón de ampliación que relaciona las longitudes en las dos maquetas.

Tal fenómeno se evidenció en las producciones orales y (o) escritas de los equipos E2, E12 y E17 del G1 y en los equipos E1, E4, E5, E7 y E10 del G2. Se mostró en la resolución de la primera parte (tablas) y en los intentos por enunciar la conjetura en la segunda parte de la tarea. Mostramos un fragmento del trabajo del equipo E12 del G1.

B14: a ver he dicho que sabiendo el largo y el ancho puedes calcular el área entonces la segunda figura va crecer en relación proporcional a la primera atendiendo a que la escala es uno, cinco
C14: ¿ponemos eso?
B14 y C14: sabiendo el largo el ancho…
B14: podemos hallar el área de la primera figura… ¿no?, podemos hallar el área, ya está… pues se queda en el aire, sabiendo el largo y ancho podemos saber que el área de la segunda figura crecerá de manera proporcional y directa en relación a la primera figura y sabiendo que la escala es 1, 5…, parece conjetura ¿o no?

No obstante, indicamos que en el G2 el trabajo colaborativo y las intervenciones tanto de la investigadora como de la profesora colaboradora contribuyeron a que los estudiantes detectaran y reflexionaran acerca de esta interpretación. En la mayoría de los casos se les preguntó por la manera de calcular el área de un rectángulo, situación que les produjo un conflicto ya que al aplicar la fórmula usual obtenían un resultado distinto, a partir de este contraste se vieron motivados a reelaborar el trabajo realizado.

En la Figura 7.49 presentamos un ejemplo procedente de la producción escrita del equipo E10 del G2, en la misma se observa cómo los estudiantes inicialmente calcularon el área aplicando la escala líneal. Sin embargo, es evidente que durante el intercambio colaborativo corrigieron ese error.

		Largo	Ancho	Perímetro	Área
Patio de los Arrayanes	Maqueta A	15 cm	5 cm	40 cm	75 cm^2
	Maqueta B	75cm	25cm	700 cm	~~375 cm²~~ 1875 cm^2
Terraza Torre de Comares	Maqueta A	6 cm	6 cm	24 cm	36 cm^2
	Maqueta B	30cm	30cm	120cm	~~180 cm²~~ 900 cm^2

Figura 7.49. Actuación IE3 manifestada en el equipo E10 del G2

Hemos observado que los estudiantes participantes en nuestro estudio que reflejaron la aproximación *IE3* aplicaron la proporcionalidad directa de forma espontánea y natural, además hemos detectado que las deficiencias en relación con el uso razonado de las fórmulas para calcular el área limitaron la detección de las relaciones y enunciado de la conjetura.

Resumen

En seis de los quince equipos del G1 y en tres de los ocho equipos del G2 se explicitó el significado de la escala 1:5, en los intercambios orales manifestaron que significa que cada centímetro de la maqueta A equivale a 5 centímetros de la maqueta B. La mayor parte de los equipos de ambos grupos (trece en G1 y seis en G2) utilizaron la escala adecuadamente para hallar las medidas de las longitudes de la maqueta B.

En relación con el fenómeno de la ilusión de linealidad hemos observado que se manifestó sólo en tres equipos del G1 (E2, E12 y E17), y en cinco equipos del G2 (E1, E4, E5, E7 y E10). Es de destacar que uno de los equipos del G1 y dos de los equipos del G2 manifiestan el fenómeno de ilusión de linealidad a pesar de que interpretan adecuadamente la escala señalando que la misma relaciona longitudes de las maquetas.

Nos ha sorprendido la baja presencia de este fenómeno en los equipos del G1, sin embargo sospechamos que en el trabajo individual se mostró con mayor frecuencia y que posiblemente la dinámica colaborativa ha contribuido a que los estudiantes detecten esta concepción errónea. Aunque se mostró en más de la mitad de los equipos del G2 consideramos que las intervenciones de la profesora y de la investigadora contribuyeron a que los estudiantes tomaran consciencia de esta concepción.

7.7.1.2 Relaciones entre Razones de Longitud, Superficie y Volumen de Figuras y Cuerpos Semejantes

En este apartado describimos las actuaciones de los estudiantes que se han identificado en el trabajo colaborativo de la Tarea 7. Se centra en describir y analizar las conjeturas que sobre las relaciones entre razones lograron mostrar los estudiantes.

Hemos codificado las producciones de los estudiantes según 5 tipos de actuaciones en la tarea de enunciar una conjetura, éstas son:

- No enuncian la conjetura.
- Enuncian la conjetura con errores de expresión.
- Enuncian la conjetura correctamente.
- Enuncian una afirmación cierta sobre las cantidades.
- Enuncian una afirmación falsa sobre las cantidades.

En la Tabla 7.35 presentamos las actuaciones mostradas en cada equipo, posteriormente describimos cada una y ejemplificamos con producciones de los estudiantes.

Tabla 7.35. *Actuaciones manifestadas al enunciar la conjetura de la Tarea 7*

G1																
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E9	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17	E19	E20
C1		*		*			*	*			*		*			*
C2	*					*								*	*	
C3	*		*		*							*				
C4																*
C5		*							*							

G2									
	E1	E2	E3	E4	E5	E7	E10	E11	E12
C1									
C2		*	*			*	*		
C3	*		*			*			*
C4	*		*	*					
C5				*	*				

Actuaciones

C1: No enuncian la conjetura.
C2: Enuncian la conjetura “deslizando el foco de atención” o con errores de expresión.
C3: Enuncian la conjetura correctamente.
C4: Enuncian una afirmación cierta sobre las cantidades, no pertinente.
C5: Enuncian una afirmación falsa sobre las cantidades

Nota: Los equipos E13 del G1 y E11 del G2 no resolvieron la Tarea 7.

C1. No enuncian la conjetura

Observamos que siete de los quince equipos del G1 que resolvieron la primera parte de la Tarea 7 no lograron enunciar la conjetura. Aunque previamente la investigadora expuso, de modo general, en qué consiste enunciar una conjetura indicamos que los estudiantes de estos equipos expresaron que no sabían cómo abordar esta demanda. Tal y como se expuso en el análisis preliminar, esta situación motivó a la investigadora a intervenir y estimular de modo más directo el trabajo colaborativo que se desarrollaría en el G2, en el cual todos los equipos abordaron esta tarea. Mostramos lo expresado en el equipo E9 del G1.

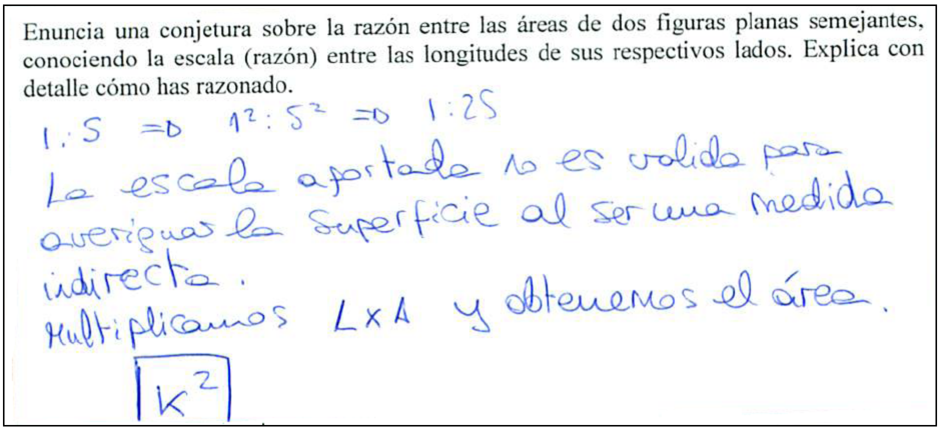
B11: vamos a ver, pues en el primer ejercicio tenemos que… partiendo de que la escala es 1 a 5 ¿no? (A19: sí, sí), pues… partiendo que es 1 a 5 cada centímetro de la maqueta “A” son 5 en la “B”, pues se multiplican lo que mide cada… largo y ancho por 5, ya está. En la segunda frase también se multiplica por 5 porque la relación es la misma, la escala es 1 a 5 ¿no?, pero la conjetura no sabemos cómo ponerla.

C2. Enuncian la conjetura “deslizando el foco de atención” o con errores

En este tipo de actuaciones observamos que los estudiantes detectan la relación que se da entre la razón de los lados y la razón de las áreas, no obstante enuncian una idea que omite esta vinculación y expresan una proposición relativa al área de la maqueta B, en sus aportes señalan que para obtener este dato hay que multiplicar el área de la maqueta A por 25 que es el cuadrado de 5. Esta actuación se manifestó en los equipos E1, E6, E17 y E19 del G1 y en el equipo E2 del G2. Ejemplificamos con un fragmento del trabajo del equipo E6 del G1.

C18: bueno, volvemos a explicar lo que hemos dicho antes porque parece ser que no hemos pulsado bien el Rec, y vamos a ver si hacemos otra menos mal porque aquí se montó un… impresionante, vamos a ver… en longitudes lo que hemos hecho ha sido multiplicar por 5, en el área pues hemos multiplicado las dos longitudes el ancho por el largo, salen 1875 que si lo explicamos bien es el área multiplicada por el cuadrado de cinco y para el volumen es exactamente igual pero elevado al cubo

En la Figura 7.50 presentamos un ejemplo de la actuación C2, éste procede de la producción escrita del equipo E1 del G1.


Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

$1:5 \Rightarrow 1^2:5^2 \Rightarrow 1:25$

La escala aportada no es valida para averiguar la superficie al ser una medida indirecta.

Multiplicamos $L \times A$ y obtenemos el área.

$\boxed{k^2}$

Figura 7.50. Actuación C2 manifestada en el equipo E1 del G1

En esta clase de actuaciones también ubicamos aquellas en las que los estudiantes enuncian la conjetura con errores derivados de la aritmética, provienen de la incorrecta interpretación de los símbolos, las operaciones o relaciones entre ellos (Rodríguez, 2011). En las actuaciones manifestadas observamos que los estudiantes indican el *doble* cuando se refieren al *exponente dos (elevar al cuadrado)*. Esta actuación se presentó en los equipos E2, E3, E7 y E10 del G2. Mostramos lo expresado en el equipo E3 del G2.

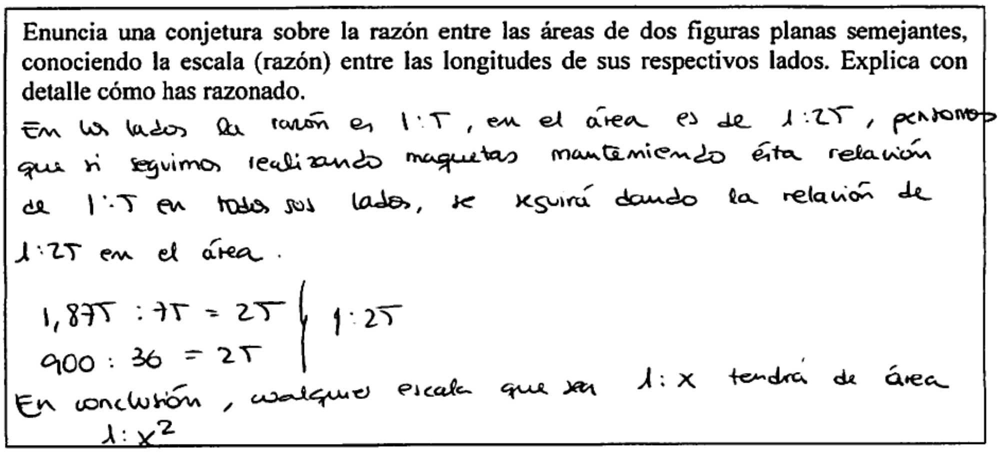
B12: la razón entre estos es 5 y entre éste y éste es 25
Profesora: vale, entonces ya sabéis, aquí habéis visto que la razón es 25 bueno 1, 25 y aquí es 1,5, vale entonces ¿qué relación hay entre esta razón y ésta?
B12: que es el doble ¿no?
Profesora: ¿es el doble?
A12: no, no es el doble

C3. Enuncian la conjetura correctamente

Observamos que cuatro de los quince equipos del G1 que resolvieron la tarea (E1, E3, E5 y E15) y cuatro de los ocho equipos del G2 (E1, E3, E7 y E12) enunciaron correctamente la conjetura, aunque con poca precisión en muchos de los casos dado que también hacen referencia al procedimiento que permitiría hallar el área o el volumen. En las producciones que hemos designado como correctas se evidencia la detección de la relación entre las razones de lados y áreas, así como la presencia de una expresión oral, verbal o simbólica que vincula ambas razones. Mostramos como ejemplo un fragmento del trabajo oral del equipo E3 del G1.

B2: …vamos hacer la conjetura, la conjetura que yo hecho es que el área de la maqueta "A" partido el área de la maqueta "B" en el caso del Patio de los Arrayanes que es 75 partido 1875 es igual que el área de la maqueta "A" partido el área de la maqueta "B" de la terraza de la Torre de Comares que es 36 partido 900, y siempre da 0,04 lo que es lo mismo que decir 4 partido 100, esto lo podemos reducir y queda 1 partido 25 y si nos damos cuenta 1 partido 25 es la escala al cuadrado, 1 al cuadrado partido 5 al cuadrado que es igual a 1 partido cinco al cuadrado todo, como vemos la conjetura es que aplicas en el área la escala de reducción al cuadrado, no la escala al cuadrado.

Hemos observado que únicamente el equipo E7 del G2 expresó la conjetura de modo general, haciendo referencia a otros casos y utilizando representaciones simbólicas algebraicas para expresarla. A continuación mostramos en la Figura 7.51 la producción escrita de este equipo.



Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

En los lados la razón es 1:5, en el área es de 1:25, pensamos que si seguimos realizando maquetas manteniendo ésta relación de 1:5 en todos sus lados, se seguirá dando la relación de 1:25 en el área.

1,875 : 75 = 25
900 : 36 = 25
1:25

En conclusión, cualquier escala que sea 1:x tendrá de área 1:x^2

Figura 7.51. Actuación C3 manifestada en el equipo E7 del G2

C4. Enuncian una afirmación cierta sobre las cantidades

Observamos que en los equipos E20 (G1) y E1, E3 y E4 (G2) se aportaron algunas afirmaciones centradas en un aspecto o relación de las cantidades y no sobre la relación entre las razones, por este motivo consideramos que estas afirmaciones no son pertinentes. Entre las ideas expuestas señalan que las cantidades son múltiplos de 5, que terminan en 5 o indican relaciones entre los factores que se multiplican para obtener el área. Ejemplificamos este tipo de actuaciones con un fragmento del trabajo del equipo E1 del G2.

D1: niñas yo aquí he dicho que si, si tú sumas cinco veces cinco te da esto, claro y aquí igual si sumas 5 veces 6 te da 30…
A1: claro porque va multiplicado por 5
D1: pues eso es una verdad, vale
C1: (ríe) eso no es una conjetura…

C5. Enuncian una afirmación falsa sobre las cantidades

Durante los intercambios dados en los equipos E2, E12 del G1 y E4, E5 del G2 se manifestaron algunas afirmaciones falsas basadas en la suposición de que las medidas de las áreas se relacionan linealmente al igual que las medidas de los lados. Consideramos que la raíz de tales afirmaciones se encuentra en el uso de la escala 1:5

para calcular todas las medidas, es decir se basa en la ilusión de linealidad. Ejemplificamos con el trabajo mostrado en el equipo E12 del G1.

C14: ¿ponemos eso?
B14 y C14: sabiendo el largo el ancho…
B14: podemos hallar el área de la primera figura… ¿no?, podemos hallar el área, ya está… pues se queda en el aire, sabiendo el largo y ancho podemos saber que el área de la segunda figura crecerá de manera proporcional y directa en relación a la primera figura y sabiendo que la escala es 1, 5…, parece conjetura ¿o no?

Resumen

La tarea de enunciar una conjetura sobre la relación entre la razón de las longitudes y la razón de las áreas resultó difícil para los equipos de ambos grupos. Esta dificultad se evidenció mayormente en el G1 pues 7 de los equipos no lograron expresar tal relación. Esta situación demandó una mayor intervención de la investigadora y de la profesora de la asignatura durante el trabajo en el G2, y se produjeron mejores expresiones de la conjetura.

Cuatro equipos de cada grupo enuncian una conjetura deslizando el foco de atención esto quiere decir que la enuncian sobre la relación entre las áreas y no sobre las razones solicitadas, o la enuncian inadecuadamente debido a un error derivado de la aritmética indicando el doble para referirse al cuadrado.

Observamos que cuatro equipos de cada grupo enuncian la conjetura correctamente. En el equipo E20 del G1 y en los equipos E1, E3 y E4 los estudiantes identifican alguna característica de las cantidades y enuncian la conjetura en términos de esa cualidad, por ejemplo, dicen que las cantidades son múltiplos de 5.

En dos de los quince equipos del G1 que resolvieron la tarea y en dos de los ocho equipos del G2 observamos que los estudiantes enuncian como conjetura una afirmación falsa relativa a las cantidades.

7.7.2 Resumen de las Actuaciones Manifestadas en la Tarea 7

A continuación, en la Tabla 7.36, se presenta una síntesis de las actuaciones manifestadas por los estudiantes en la resolución de la Tarea 7. En la Tabla se indica la cantidad de equipos (expresada porcentualmente) en los cuales se detectó cada concepción

Tabla 7.36. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 7.*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
Interpretaciones de la Escala	IE1	Afirmar explícitamente que la escala 1:5 indica que cada centímetro de la maqueta A corresponde a 5 centímetros de la maqueta B.	37%	33%
	IE2	Aplicar la escala para hallar las	81%	89%

Tabla 7.36. *Actuaciones manifestadas en la resolución de la Tarea 7.*

Categoría	Indicadores	Descripción de Indicadores	G1	G2
		longitudes de los lados y del perímetro de la maqueta B.		
	IE3	Aplicar la escala 1:5 para hallar el área y el volumen requeridos en la maqueta B. Esta aplicación es una manifestación de la *ilusión de la linealidad*.	19%	55%
Conjetura sobre las relaciones entre razones de longitudes, área o volumen de cuerpos o figuras semejantes	C1	No se enuncia la conjetura, se manifiesta desconocimiento de cómo abordar la tarea.	44%	0%
	C2	Enunciar la conjetura "deslizando el foco de atención" o con errores de expresión o con errores en la comunicación de la misma. Detectar la relación, pero no expresarla adecuadamente.	25%	44%
	C3	Enunciar la conjetura sobre la relación entre las razones correctamente.	25%	44%
	C4	Enunciar una afirmación cierta, pero no pertinente, sobre las cantidades y no sobre la relación entre las razones.	6%	33%
	C5	Expresar alguna relación o afirmación falsa sobre las cantidades.	12%	22%

7.7.3 Logro de las Expectativas de Aprendizaje

En la planificación de la Tarea 7 (Apartado 6.4.1.1) se describen las expectativas de aprendizaje relacionadas con la misma así como las competencias matemáticas que podrían verse contribuidas gracias a la dinámica de trabajo de aula realizada. Se había previsto que, con base en las posibles actuaciones en esta tarea (T7), se favorecieran las competencias *pensar y razonar*, *modelizar*, *comunicar*, y *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones*. La contribución a la competencia argumentar-justificar la tratamos en el apartado 7.10.3.

Logro del objetivo 26: Extraer información de modelos reducidos, mapas o dibujos a partir de la interpretación de la escala.

En el apartado "Interpretaciones de la escala" (Apartado 7.7.1.1) presentamos tres acercamientos mostrados por los estudiantes relacionados con la interpretación y aplicación de la escala. La interpretación IE1 se ha detectado en aquellos equipos en los que ha mostrado explícitamente que la escala relaciona las longitudes de ambas maquetas, esta interpretación es reflejo del significado de la razón como relación funcional, en este caso modelizada por la expresión $f(x) = 5x$. Se hizo presente en el 37,5% de los equipos del G1 y en el 33,3% de los equipos del G2. Aunada a esta interpretación se ha mostrado, en logro del mismo apartado, que más del 80% de los equipos de ambos grupos aplicaron la escala para determinar la medida de las longitudes correspondientes. Con base en este dato consideramos que se ha logrado la expectativa de aprendizaje 26. Las actuaciones que se han recogido en la aproximación IE1 (Apartado 7.7.1.1) muestran que se han trabajado las competencia *pensar y razonar*, y *modelizar* en un nivel de reproducción. Las actuaciones descritas en el acercamiento IE2 (Apartado 7.7.1.1) evidencian que los estudiantes han empleado las fórmulas de cálculo de área y las operaciones por lo que el tratamiento del primer ejercicio ha fomentado el trabajo sobre la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones* en un nivel de reproducción.

Logro de objetivo 29: Explorar la relación entre la razón de los lados[88] de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes.

Recordamos que debido a la limitación de tiempo en el desarrollo de la cuarta sesión en el G2 la investigadora tuvo que reducir el trabajo sobre la Tarea 7 a la resolución de la primera parte, concerniente a la expectativa de aprendizaje 29. Aunque en el G1 los equipos tuvieron tiempo para trabajar ambas partes de la tarea hemos observado que pocos equipos abordaron la elaboración de la conjetura de la segunda parte, en la que se trata la relación entre la razón de las longitudes y la razón de los volúmenes, vinculada a la expectativa de aprendizaje 30. En vista de la descompensación en la cantidad de información recogida en relación con la segunda parte de la tarea hemos decidido estudiar únicamente el logro del objetivo 29.

Las actuaciones mostradas en la tarea de elaborar una conjetura sobre la relación entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes promovió indiscutiblemente la exploración de este principio, aunque esto no implica que los estudiantes hayan logrado elaborar y describir la conjetura. En el apartado "*Relaciones entre razones de longitud,…*" (Apartado 7.7.1.2) describimos las actuaciones manifestadas en los equipos, destacamos que los acercamientos C2, C3 y C4 evidencian los esfuerzos de los estudiantes por detectar relaciones verdaderas entre las cantidades o entre las razones en cuestión. En el G1, uno o varios de estos tres acercamientos se mostraron en nueve de los 16 equipos (56,25%) y en el G2 se manifestaron en siete de los nueve equipos (77,7%). La búsqueda de relaciones entre las cantidades o entre razones evidenció la puesta en escena de la competencia *pensar y razonar* en un nivel de reflexión debido a que se requirió una generalización de tales relaciones.

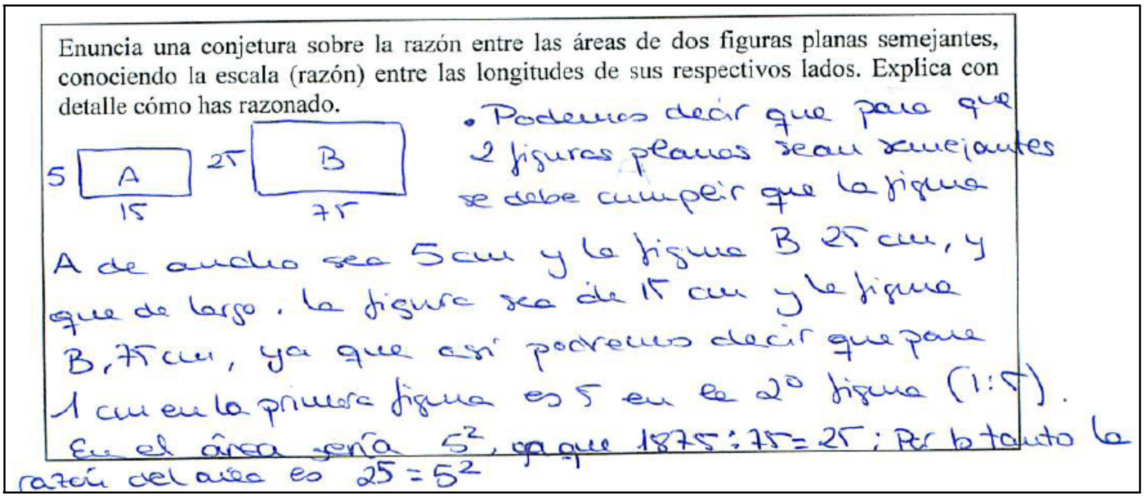
Durante el trabajo sobre la Tarea 7, la variedad de acercamientos mostrados en el intento de enunciar la conjetura relativa a la relación entre la razón de los lados de figuras semejantes y la razón de las áreas correspondientes, es una evidencia de la

[88] Nos referimos a las medidas de los lados.

dificultad que esta demanda supuso para los futuros maestros (Apartado "*Relaciones entre razones de longitud,…*", Ver Tabla 7.35).

En el G2 el 44% de los equipos logró describir adecuadamente una conjetura sobre la relación entre las razones. En todos los equipos identificamos intercambios productivos de ideas matemáticas que condujeron a la expresión de la conjetura. No obstante, reconocemos que tales intercambios y éxito en la tarea estuvieron determinados por las intervenciones de la profesora de la asignatura y de la investigadora quienes plantearon a los equipos preguntas orientadas a difuminar el fenómeno de ilusión de linealidad que obstruía la observación de las relaciones entre las razones y en consecuencia la expresión de la conjetura. En los equipos representados en el 44% indicado se trabajó la competencia *comunicar* en un nivel de reflexión dada la complejidad de la relación implicada en la conjetura.

En el G1, únicamente detectamos tres intercambios productivos de ideas matemáticas, es decir, aunque se hayan dispuesto las condiciones para trabajar la competencia *comunicar* hemos observado que en las producciones orales de este grupo no se reflejan actuaciones que la evidencien. Posiblemente la falta de familiaridad con este tipo de tareas ha incidido en las actuaciones manifestadas. No obstante, en los trabajos escritos de todos los equipos de este grupo se muestran intentos de enunciar la conjetura y esto nos motiva a pensar que la competencia *comunicar* se promovió en un nivel de reflexión dada la complejidad de la relación que debían expresar. Mostramos un ejemplo de la resolución escrita del equipo E15 del G1.


Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

5 A 15 — 25 B 75

• Podemos decir que para que 2 figuras planas sean semejantes se debe cumplir que la figura A de ancho sea 5 cm y la figura B 25 cm, y que de largo. la figura sea de 15 cm y la figura B, 75 cm, ya que así podremos decir que para 1 cm en la primera figura es 5 en la 2° figura (1:5). En el área sería 5², ya que 1875 : 75 = 25 ; Por lo tanto la razón del área es 25 = 5²

Figura 7.52. *Resolución del ejercicio (b) de la I Fase manifestada en el equipo E15 del G1*

7.7.4 Balance de la Tarea 7 "El Palacio Real de la Alhambra"

Con la Tarea 7 procuramos estudiar la presencia del fenómeno de la ilusión de la linealidad en las producciones de los estudiantes, además esta tarea posibilitó conocer las actuaciones de los estudiantes en relación con la elaboración de conjeturas sobre las relaciones entre las razones de longitudes, área y volumen en figuras u objetos semejantes.

La resolución de la primera parte de la tarea permitió desvelar la aplicación inadecuada, por parte de los estudiantes, de la relación 1:5 para obtener el área de la figura, y del volumen del estanque. El trabajo colaborativo así como las intervenciones de la investigadora y de la profesora hicieron posible que los estudiantes que incurrieron en la ilusión de linealidad replantearan su posicionamiento. Consideramos que para provocar un conflicto en el razonamiento de los estudiantes ha sido necesaria la gestión de la investigadora, de la profesora y de la dinámica de trabajo; es decir por sí sola la tarea no posibilita solventar esta concepción errónea.

En el caso de que con esta tarea se pretenda abordar y tratar la ilusión de linealidad será preciso no sólo incluir más casos particulares sino dirigir el proceso de búsqueda de las razones e incitar a los estudiantes a usar otros conocimientos sobre el área y volumen para confirmar o rechazar las cantidades halladas, si es que han usado la escala para este fin.

En relación con la segunda parte de la Tarea 7 "El Palacio Real de la Alhambra", consideramos que es posible que un cambio en el enunciado o en la presentación de la información de la tabla, orientado a dirigir la búsqueda de las razones sobre las cuales ha de enunciarse la conjetura, podría favorecer el desempeño de los estudiantes ante esta demanda.

Aunque los estudiantes de ambos grupos no manifestaron dudas relacionadas con las representaciones de la tarea, sugerimos explicitar que las mismas no están hechas según la escala 1:5, y que sólo se han incluido con el fin de ilustrar la situación planteada en la tarea.

Observamos que en dos equipos del G2 (E5 y E10) los estudiantes intentaron buscar relaciones entre los dos casos presentados, la Torre de Comares y el Patio de los Arrayanes. Consideramos que si se separan las tablas correspondientes a cada caso se evitaría esta actuación y se mejoraría la tarea. Mostramos como ejemplo lo expresado en el equipo E10.

D3: aquí la conjetura en 15 centímetros… va a ser cinco veces más
B3: es proporcional…
A3: pero ¿qué relación sigue con la Torre de Comares?
B3: lo, lo… pues que…
A3: que uno es rectangular y el otro es cuadrado…

La resolución de la Tarea 7 les resultó muy difícil, a pesar de la actuación de la investigadora quien expuso qué es una conjetura y trató un ejemplo contando con la participación de los estudiantes. Consideramos que la dificultad mostrada se debe a que no han tenido la suficiente experiencia en este tipo de tareas.

7.7.5 Revisión de los Supuestos Relativos a las Posibles Actuaciones

En el apartado 6.4.1.1, sobre la planificación de la Tarea 7, enunciamos los supuestos planteados en relación con las posibles actuaciones que podrían manifestar los estudiantes ante la misma.

Hemos observado que los estudiantes utilizaron la misma escala para obtener el área y volumen en la Tarea 7, esta actuación se presentó en dos equipos del G1 y en cinco equipos del G2, sin embargo sospechamos que tuvo una alta frecuencia en el trabajo individual realizado en la primera fase de la dinámica de aula, la confirmación de esta suposición requiere del análisis de todas las producción individuales, tarea que ha quedado como una perspectiva de trabajo futuro de la investigación. La situación observada en el trabajo de los equipos nos permite aceptar parcialmente la suposición planteada antes de la intervención en relación con la ilusión de linealidad.

En la conjetura enunciamos la posibilidad de que los estudiantes buscaran relaciones aditivas entre las cantidades de la maqueta A y las aplicaran al determinar las medidas de la maqueta B. Sin embargo, no hemos detectado esta actuación en los equipos y en consecuencia no podemos aceptar esta suposición.

Consideramos que las producciones colaborativas en la tarea de la conjetura fueron elaboradas a partir de los aportes de los miembros del equipo, tras una revisión superficial de las producciones individuales no observamos un aporte individual completo y correcto, fue durante la fase colaborativa cuando los estudiantes unieron esfuerzos para intentar enunciarla. Las intervenciones de la investigadora en el G1 y de ésta y la profesora en el G2 contribuyeron a mejorar los intentos manifestados en los equipos. Sin embargo, será necesario estudiar las entregas individuales posteriores a la sesión para confirmar si después del trabajo colaborativo y de la puesta en común hubo o no mejoría en las producciones individuales de los estudiantes. Pero como se ha indicado ésta es una tarea que ha quedado como una perspectiva de trabajo futuro y de continuación de esta investigación.

7.8 Resumen del Conocimiento Matemático Puesto de Manifiesto

En los esquemas de las Figuras 7.53, 7.54, 7.55 y 7.56 se presenta una síntesis de las concepciones detectadas en las resoluciones colaborativas de las tareas. Se han relacionado con los focos de contenido considerados en la planificación de la intervención, mismos que surgieron del análisis de contenido desarrollado en el Capítulo 4.

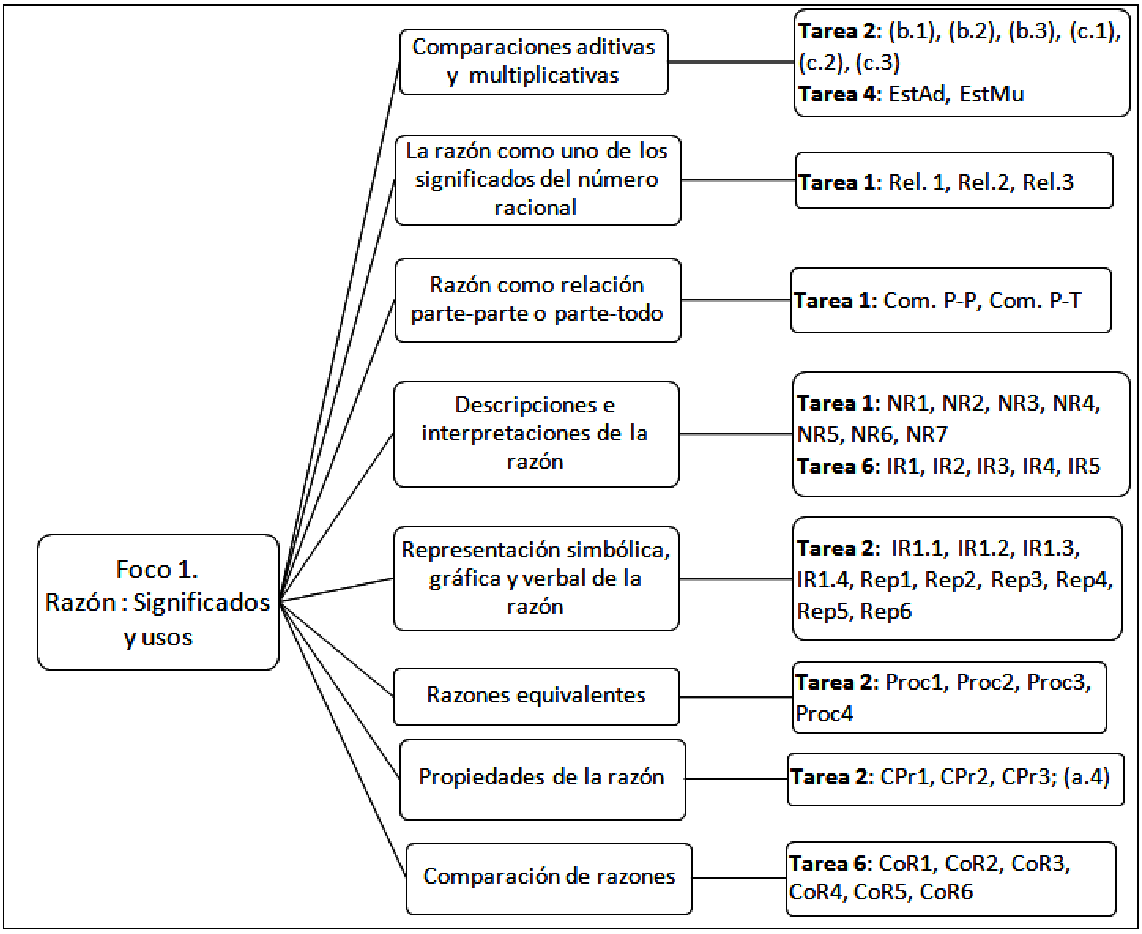


Figura 7.53. Vinculación de las actuaciones detectadas en la resolución de las tareas y los contenidos del foco 1 “Razón: significados y usos”

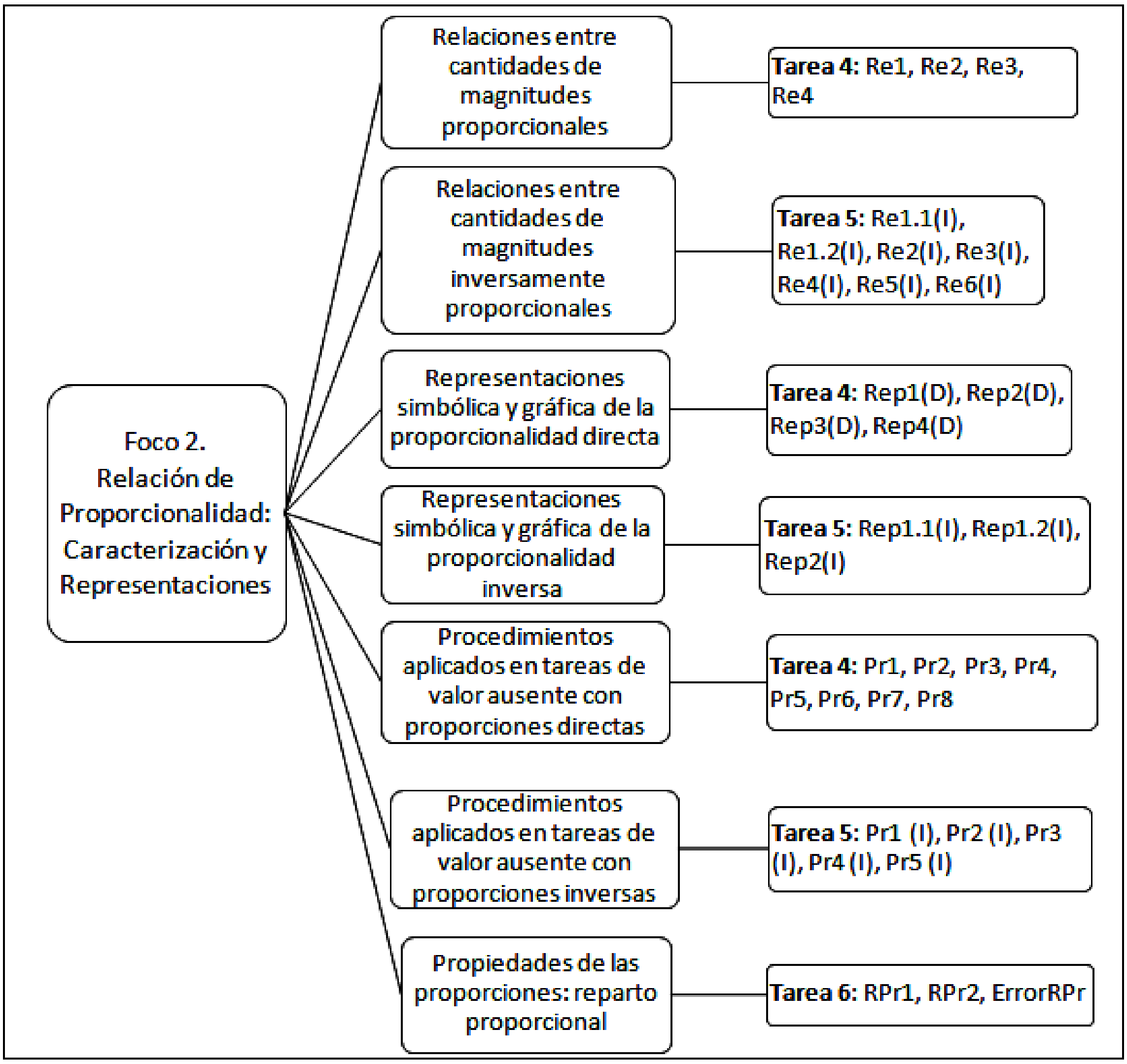


Figura 7.54. Vinculación de las actuaciones detectadas en la resolución de las tareas y los contenidos del foco 2 “Relación de proporcionalidad…”

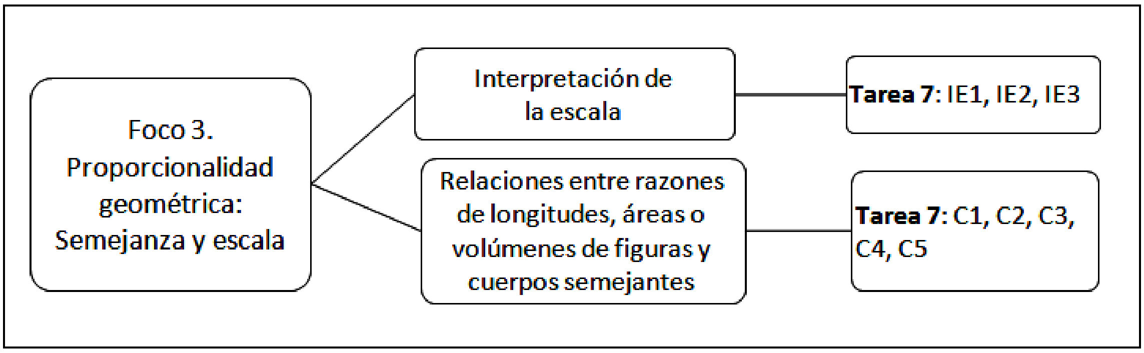


Figura 7.55. Vinculación de las actuaciones detectadas en la resolución de las tareas y los contenidos del foco 3 “Proporcionalidad geométrica: semejanza y escala”

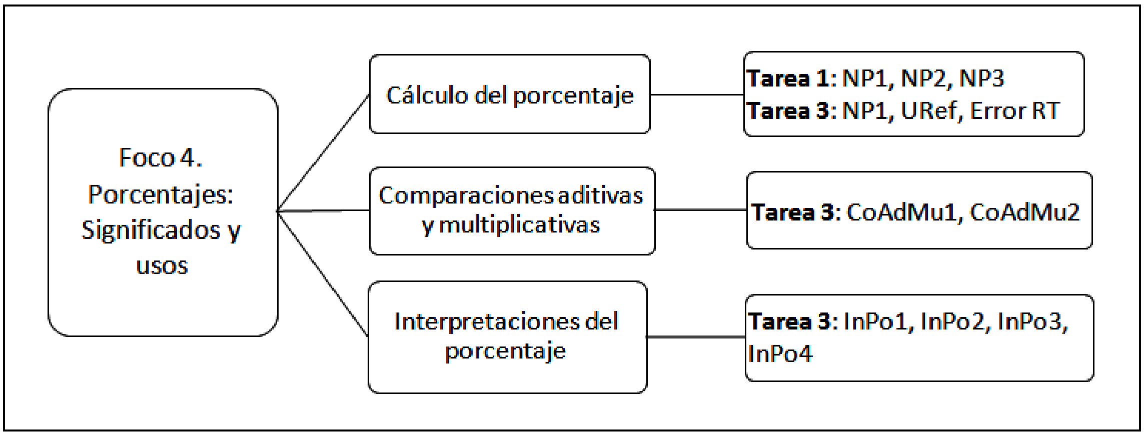


Figura 7.56. Vinculación de las actuaciones detectadas en la resolución de las tareas y los contenidos del foco 4 "Porcentajes: significados y usos"

7.9 Papel de la Investigadora en la Institucionalización de los Conocimientos

Las actuaciones de la investigadora-docente constituyen otra de las dimensiones de análisis del experimento de enseñanza desarrollado. En la planificación de las sesiones se había programado una serie de diapositivas que incluían conocimientos comunes y especializados del contenido con el objetivo de ser abordados durante la puesta en común de las tareas. En la planificación de las puestas en común se contemplaron otros conocimientos además de aquellos puramente matemáticos requeridos en la resolución de las tareas, orientados a unificar conceptos y establecer relaciones entre los mismos ya que no se esperaba que los estudiantes por si solos y a través de la resolución de las tareas lograran llegar a este nivel de reflexión.

7.9.1 Aportaciones de la Investigadora en la 1ª Sesión

Respecto a la Unidad de Referencia en la Tarea 1

Los aportes relacionados se presentaron en la puesta en común de la Tarea 1. En el G1, la investigadora fue constatando a lo largo de la fase individual y colaborativa, que los estudiantes habían centrado su atención en la comparación entre las regiones cultivadas y el total de regiones (parte-todo) por lo que en la puesta en común intentó conocer si alguno había hecho la comparación desde otra perspectiva.

I: alguien más, ¿algún otro aporte?...
I: ¿otra relación más que hayan observado? (ningún alumno responde)…

Ante la ausencia de otros aportes decidió exponer la posibilidad de comparar las dos partes entre sí (comparación parte-parte), tal y como se solicita en la instrucción de la tarea.

I: … no es que estas ideas están incorrectas… son correctas desde un punto de vista… si nos centramos en comparar las partes cultivadas o no cultivadas con el todo (señala con la mano la representación). Ahora el ejercicio tenía una indicación que estaba subrayada y era comparar las regiones cultivadas (señala con la mano) con respecto a *las no cultivadas ...para comparar la región cultivada y la no cultivada, es decir una relación parte-parte (escribe en la pizarra), si tomamos una de las partes como el todo, ... si consideramos que el todo son las tres partes que están sin cultivar la pregunta es ¿qué tanto es la región cultivada en relación con la no cultivada? (señala en la diapositiva ambas regiones)...dos tercios ,¿lo pueden ver? (dibuja en la pizarra por separado ambas regiones, Figura 6.2), estos dos si yo los sobrepongo encima de esto puedo observar que lo cultivado corresponde a dos terceras partes de lo no cultivado, vean que es diferente y estoy usando otra fracción, vamos poco a poco, aquí yo digo la región cultivada corresponde a dos terceras partes de la región sin cultivar…*

Durante la puesta en común en el G2, la intervención de la investigadora se centró en estimular a los estudiantes para que llegaran a identificar la relación entre las partes, por ejemplo en uno de sus aportes indica:

I: ...si se considera otro todo, en este caso las regiones no cultivadas, la fracción corresponde a dos tercios, agrega la parte cultivada corresponde a dos terceras partes de lo no cultivado.

Consideramos que el hecho de mostrar a los estudiantes que se puede establecer otro tipo de relación enriquece la manera en la que éstos han abordado tareas como la desarrollada, así que creemos que sí se promovió la comprensión de la unidad de referencia en una comparación. En el caso del porcentaje y la razón también se hizo hincapié en la posibilidad de comparar las dos partes.

Respecto a la Razón en la Tarea 1

La Tarea 1ofrece la posibilidad de promover aspectos elementales de este concepto matemático, de modo que el aporte de la investigadora se centró en la aproximación intuitiva a la definición, formas de representar o expresar la razón, idea de equivalencia de razones, relaciones entre la razón y otros subconstructos de los racionales, en este sentido ejemplificó algunas diferencias entre las fracciones y las razones. A continuación mostramos dos fragmentos que ejemplifican las contribuciones dadas por la investigadora durante la puesta en común en cada uno de los grupos (Anexos G y H).

En el G1 expuso las siguientes ideas:

I: Ahora en el caso (c)…una fracción como acaba de decir antes admite diferentes significados. Uno de ellos, y en el que nos centramos aquí, es la razón, ¿qué es una razón?, podemos verla como una expresión que podemos representar así como una fracción en donde comparamos dos cantidades,… cuando tenemos una razón establecemos una comparación multiplicativa entre dos cantidades, vamos a ver, si digo por ejemplo con palabras uno de cada tres españoles hacen ejercicio (escribe en la pizarra) esta relación la podemos representar mediante una fracción, uno de cada tres, lo podemos representar de esta manera usando dos puntos (pone 1:3) que es la forma más convencional de usarla, uno de cada tres, o uno es a tres, o con palabras, admite diferentes representaciones y el significado es establecer una comparación entre dos grupos, yo puedo decir uno de cada tres hacen ejercicio o puedo decir dos de cada ¿qué? (alumnos responden seis),…

Más tarde, en el G2 dijo:

I:…con esto nada más quisiera señalar a modo de resumen de que en situaciones de la vida cotidiana fracciones, porcentajes, decimales y razones (proporciones) son diferentes descripciones de algo que, en cierto sentido, podemos considerar como lo mismo. Por ejemplo: Pepe se comió 3/5 de una barra de chocolate, 3 de cada 5 conductores diariamente están en atascos de tráfico... Fracciones, porcentajes, decimales y razones (proporciones) tienen en común que representan una comparación, entre lo que está siendo descrito y una "unidad" de referencia…

Respecto a la Unidad de Referencia en la Tarea 2

El estudio de esta categoría de análisis es más evidente en el desarrollo de la tarea 1, de ahí se desprende que la observación de la misma aparezca con mayor detalle en el análisis de la puesta en común de la Tarea 1.

No obstante durante la puesta en común de la Tarea 2, en el G2, la investigadora intervino para promover la comprensión de la unidad de referencia en una comparación multiplicativa. Lo hizo cuestionado la participación del estudiante C14, cuando le dice "*la relación que hay, ¿con respecto a qué?*", el estudiante dice que se refiere a lo que más se bebe, a la preferencia en el refresco. Luego recalca la idea cuestionándole por el total, pregunta al estudiante *¿cuál es el cien por cien que permitiría hallar ese porcentaje*?, él responde que esa cantidad depende de la cantidad de personas que hayan participado en la encuesta y le indica que ese sería el total.

Respecto a la Razón en la Tarea 2

A partir de lo observado durante el desarrollo del trabajo individual y en equipos, la investigadora intervino en la puesta en común con el fin de promover la comprensión de la razón e intentó clarificar las siguientes ideas:

- Interpretación de la expresión "la razón es 3 a 2".
- Razones equivalentes.
- A partir de la razón no se infiere directamente el total de elementos comparados.

En el G1 la investigadora propuso preguntas a los estudiantes, con la idea de implicarlos en la dinámica de revisión, sin embargo indicamos que aunque ellos se mantuvieron receptivos y atentos, la participación fue escasa, únicamente el estudiante A9 intervino con mayor frecuencia.

Cuando pregunta por el significado de la expresión "tres a dos", el estudiante A8 le responde correctamente diciendo que tres prefieren un refresco y dos prefieren el otro, ante lo cual ella lo valida diciendo:

I: …hay ***tres*** *que prefieren un refresco y* ***dos*** *que eligen el otro (dibuja en la pizarra un conjunto con cinco elementos, tres círculos y dos equis), ¿de acuerdo?, eso es lo que* ***significa****…*

El tratamiento de la equivalencia inicia con algunas preguntas, a las que el estudiante A8 responde.

I: … ¿no puedo expresarlo de otra forma?..., pues sí… yo también podría decir que ***es lo mismo o equivalente*** *a decir que la razón entre quienes prefieren un refresco u otro*

***es de seis a cuatro,** seis es a cuatro **(escribe 6:4) es equivalente a decir tres es a dos,** ¿por qué?...*
A8: porque se duplica…

El planteamiento de preguntas, por parte de la investigadora, pretende generar la participación de los estudiantes, no obstante, la respuesta dada por A8 es escueta y el resto de estudiantes no aportan ideas ante lo que la investigadora interviene primero destacando que la amplificación puede hacerse multiplicando por cualquier número positivo, posteriormente se refiere al significado de las razones equivalentes:

*I: … ¿es **equivalente** a decir que **doce** prefieren Bola Cola y **ocho** Cola Nola?, sí es equivalente,…**hemos multiplicado por cuatro** o hemos cuadruplicado…, ahora si sigo **amplificando**… puedo pensar en **cualquier número** por ejemplo cinco mil setecientos trece…*
*I: …situación de **equivalencia…**, de equivalencia ¿en qué sentido?, en el **sentido de la relación** que estoy estableciendo, en **el valor** inclusive… el **valor racional** de esto que es **uno con cinco…**, entonces **es lo mismo decir tres es a dos que decir seis es a cuatro…**, **puedo decir seis es a cuatro o también puedo decir tres es a dos**, normalmente usamos los **números más pequeños o más simplificados para expresar esa comparación…***

Durante la puesta en común la investigadora insistió en derribar la concepción “si la razón es $a:b$ entonces hay $a+b$ elementos”. Inició preguntando directamente, tal y como se ejemplifica en el fragmento.

*I:…la razón es una afirmación mediante la cual comparamos dos cantidades, una cantidad “a” y una cantidad “b” de elementos, ahora a partir de la razón **¿podemos saber cuántos elementos en total hay, o se están comparando?***

Con la idea de ayudarlos en la búsqueda de la respuesta se refiere la misma razón 3:2 y les sugiere un ejemplo pero utilizando otra situación, la distribución de personas que comen sano o no en España, en este caso se da un intercambio con el estudiante A9 quien muestra llegar a comprender que a partir de la razón no se puede saber con certeza el total de elementos, mostramos el extracto de la conversación:

I: … si dicen en España la relación entre quienes consumen comida sana y los que no, es de tres a dos personas
A9: no se sabe cuántos en total…
*I: ¿cuántos fueron en total?, no sabemos, sabemos que del total hay como una partición, hay una relación, **de tres es a dos**, quienes comen sano y quienes no…*
*A9: **si nos dieran el total sí podríamos comprobar** que si… que realmente hay en esa relación…*
*I: es importante, si tuviéramos el total…, y tengo la razón pues sí puedo hacer la partición, sí puedo repartir, de qué forma reparto, de ésta **tres es a dos, por cada tres cojo dos, por cada tres cojo dos, voy haciendo esos grupitos**, la razón me dice cómo agrupo o cómo comparo no me dice cuántos hay en total...*

Posteriormente recurrió a dar contraejemplos para verificar que la concepción sobre la suma de los elementos de la razón no es verdadera en general. Les presentó una tabla en la que aparecen los datos de 4 encuestas diferentes, con distinta cantidad de personas encuestadas pero en las que se mantiene la misma relación entre quienes prefieren el refresco Bola Cola y los que eligen la bebida Cola Nola (Figura 6.8). El objetivo era mostrar que la razón 3:2 puede describir la relación multiplicativa entre distintos pares de cantidades y además que el total de elementos no corresponde necesariamente a la suma del antecedente y consecuente.

Después de comentar la tabla y de señalar las razones por las cuales las tres afirmaciones de la tarea no corresponden necesariamente a los resultados de la misma encuesta, concluyó diciendo:

I: …la razón ***no me dice cuántos elementos hay****, por ejemplo aquí tengo la razón tres es a dos, ¿pero cuántos elementos tenía?, doscientos cincuenta,* ***la razón no*** *necesariamente…,* ***nos dice en total cuántos elementos*** *están siendo comparados…*

En el G2 la investigadora intervino aportando algunas ideas concretas sobre la razón. Les indica que la razón informa acerca de la forma en que se distribuyen esos dos grupos de personas, por cada tres personas que eligieron Bola Cola había otras dos personas que eligieron Cola Nola. Además definió la razón como a continuación "*la razón es una expresión que nos permite comparar multiplicativamente dos conjuntos, establezco una relación multiplicativa entre ellos, por cada tres hay dos…*"

En otro momento de la puesta en común la investigadora escribió en la pizarra la razón 3:2 y les preguntó a los estudiantes ¿es posible saber cuántas personas fueron encuestados?, varios estudiantes responden que sí es posible y la estudiante C10 indica "*en el segundo dice el número de personas…*". La investigadora aprovechó la participación de la estudiante y les planteó, que si ambas afirmaciones eran equivalentes como ya habían dicho anteriormente, ¿por qué ellos consideran que a partir de la segunda expresión se puede extraer el total de personas mientras que no es posible hacerlo a partir de la 1ª afirmación? Los cuestionamientos planteados estuvieron orientados a promover la comprensión de la razón, especialmente se centraron en darle tratamiento a la concepción relativa a que la razón se puede utilizar para conocer el total de elementos comparados.

En seguida, la investigadora explicó la noción de razones equivalentes, indicó que si dividen el antecedente y el consecuente lo que encuentran es el valor racional de la razón y que como en las dos primeras afirmaciones este valor coincide pues las razones son equivalentes. Posteriormente mostró la tabla de la Figura 6.8 con cuatro posibles encuestas en las que la razón es la misma pero el total de la población no, explicó que las tres afirmaciones podrían o no extraerse de la misma encuesta y que en general no es posible usar la razón para determinar el total de elementos que se comparan.

7.9.2 Aportaciones de la Investigadora en la 2ª Sesión

Respecto a la Razón y el Porcentaje en la Tarea 3

En la puesta en común desarrollada en el G1 la investigadora intervino con el objetivo de promover la comprensión de la noción de razón y su relación con el porcentaje.

En la revisión del primer ejercicio las participaciones de los estudiantes reflejaron distintos planteamientos de la regla de tres, en vista de la situación la investigadora dedicó un corto tiempo a analizar el paralelismo entre ambos procedimientos; como las relaciones que se establecen en la regla de tres son comparaciones multiplicativas (razones) consideramos que esta aportación promueve la comprensión de la razón.

A continuación la investigadora concluye que la pregunta matemática que está detrás de esta cuestión es *¿qué porcentaje es 678 de 6049?*, la cual se puede abordar desde distintas perspectivas y que la regla de tres es sólo una de ellas. Expone tres formas de abordar la cuestión anterior, en la primera forma usa la estimación mediante una tabla de valores.

Posteriormente muestra otra manera de hallar el porcentaje de 6049 que corresponde a 678. En esta estrategia mediante razones equivalentes llega a mostrarles que $\frac{678}{6049}=\frac{11{,}20}{100}$ e indica que la expresión quiere decir que 678 corresponde a un 11,20% de 6049. Finalmente muestra una representación gráfica de la relación entre el porcentaje y la cantidad de CO_2 del año 1990 (Ver Figura 6.15). En esta estrategia explica el significado que tiene multiplicar o dividir al calcular un porcentaje. Complementa las ideas anteriores diciendo que el porcentaje es una forma estandarizada de expresar una razón, esta idea ya la había introducido.

Consideramos que la exposición de estas estrategias amplía el conocimiento procedimental y conceptual relativo al cálculo de porcentajes dado que tales estrategias no sólo se presentaron sino que también se justificaron, en consecuencia se ha promovido la comprensión del porcentaje.

En la revisión del ejercicio (c) la investigadora abordó la situación planteada diciendo que el aumento o crecimiento puede verse desde dos perspectivas, indicó que ninguna es más correcta que la otra. Señaló que la comparación aditiva se basa en la resta y la relativa requiere de la comparación del crecimiento aditivo respecto a la cantidad inicial. Con este razonamiento pretendía sentar las bases para esclarecer los logros de cada tipo de comparación, pero no hubo tiempo suficiente para tratar esta idea con mayor profundidad.

En el G2 la investigadora intervino durante la corta puesta en común para establecer algunas relaciones entre los diferentes esquemas de planteo de la regla de tres realizadas por los estudiantes. Dado el limitado aporte de la investigadora, consideramos que con este grupo y durante esta fase de la dinámica de trabajo, no se promovió la comprensión de la razón y su relación con el porcentaje.

Respecto a la Proporcionalidad Directa en la Tarea 3

En la revisión del ejercicio (a) en el G1 la investigadora propuso una alternativa a la regla de tres para determinar un porcentaje, esta estrategia se basa en la estimación. Mediante una tabla de valores para llegar a concluir que 678 es aproximadamente un 11% de 6049 (Figura 6.13). Aprovecha para introducir la idea de proporcionalidad directa indicando la relación escalar entre porcentajes y cantidades de CO_2, luego indica la relación funcional o razón constante entre cantidades.

7.9.3 Aportaciones de la Investigadora en la 3ª Sesión

Respecto a la Razón y las Relaciones de Proporcionalidad en la Tarea 4

En este apartado describimos intervenciones en las cuales la investigadora participó aportando explicaciones, ejemplos-contraejemplos, argumentaciones, ampliaciones del tema, cuestionamientos reflexivos, todos relacionados con la proporcionalidad y con la intención de provocar en los estudiantes una reconsideración del trabajo realizado.

En la puesta en común en el G1, la investigadora intervino en doce ocasiones. Durante la revisión del primer ejercicio los estudiantes fueron aportando ideas relativas a las relaciones detectadas, cuando uno de ellos señala la invarianza del producto cruzado de pares de cantidades correspondientes, la investigadora aprovechó para decir que esta es la propiedad fundamental de las proporciones. Durante el posterior desarrollo de la sesión detalló la misma. Con el propósito de promover la comprensión de las relaciones de proporcionalidad, en este caso directa, la investigadora se dedica a mostrar algunas de las relaciones numéricas, que se habían previsto en la planificación de la sesión, y que caracterizan una relación de proporcionalidad directa (Figura 6.18). Debido a que la relación funcional apareció con mayor frecuencia en las resoluciones de los estudiantes, la investigadora aborda la relación escalar entre cantidades de la misma magnitud y sus correspondientes, la muestra mediante ejemplos de una tabla en la que sintetiza algunas de las posibles relaciones.

Después de las intervenciones dadas en la resolución del primer ejercicio, procede a resumir las dos relaciones que se han detectado hasta ese momento, dice: *"…tomo una cantidad la multiplico por 13 y me da el número de bacterias, segunda relación, si tomo una cantidad de tiempo cualquiera la multiplico por un número cualquiera entonces las cantidades correspondientes también se multiplican o se dividen por ese mismo número, ¿estamos de acuerdo?…"*.

Posteriormente, con la idea de promover la comprensión de la razón y el papel de las mismas en la caracterización de las relaciones de proporcionalidad directa, continúa recordando que ésta es una comparación multiplicativa entre dos cantidades. Luego les muestra las diapositivas preparadas para que observen lo que sucede con la razón entre las cantidades correspondientes de las dos magnitudes y lo que sucede al considerar la razón entre dos cantidades que son de la misma magnitud y sus correspondientes. Agrega que estas dos ideas relativas a las razones son otra forma de reescribir las primeras relaciones que detectaron.

Siguiendo el objetivo de promover la comprensión de relaciones de proporcionalidad directa rrecurre a un contraejemplo, la relación estatura-peso, diciendo que no es cierto que al doblarse la edad se doble el peso también, entre otras características indica que quizás conforme una aumenta la otra va aumentando pero no de una forma directamente proporcional.

Sintetiza las ideas previas diciendo e insistiendo en que para afirmar que una relación es de proporcionalidad directa deben de verificarse o cumplirse las condiciones: (1) cuando se multiplica o divide una cantidad, de tiempo en este caso, por un número cualquiera, la cantidad de bacterias que le corresponde queda multiplicada o dividida por el mismo número, y (2) existe un único número que al multiplicarlo por los días permite obtener el número de bacterias. Finaliza este resumen agregando la caracterización de la relación en función de las razones entre y en la misma magnitud. En este momento aporta dos ideas sobre la razón, por un lado señala que el valor de la razón por convención es mayor que 1 pero que se puede considerar el inverso de esa razón, o hablar de la razón inversa y retoma la idea de equivalencia de razones, indica que son aquellas que tienen el mismo valor numérico y presenta un ejemplo de la tarea, luego calcula el producto cruzado diciendo que esta es otra manera de comprobar la equivalencia.

La investigadora se vale de la revisión de la representación simbólica de la relación para establecer la conexión de esta representación con la noción de función lineal. En seguida, y con la idea de continuar promoviendo la comprensión de las relaciones de proporcionalidad, hace un resumen relativo a las formas de representar la relación de proporcionalidad directa. Indica que hasta el momento se ha visto la representación verbal y la representación simbólica algebraica, agrega diciendo que en el siguiente ejercicio la representarán gráficamente. Al llegar a la revisión de la representación gráfica surgió un intercambio de ideas entre algunos estudiantes y la investigadora en relación con la definición del dominio de la función y sobre la naturaleza discreta de la magnitud “número de bacterias” lo cual derivó en una gráfica de puntos. Aunque fueron pocos los estudiantes que se implicaron en este intercambio reconocemos el potencial de la tarea para provocar la reconstrucción de ideas asumidas tal y como ha sido la naturaleza continua de las magnitudes.

A sabiendas del predominio del razonamiento aditivo que han mostrado los estudiantes en las sesiones previas, y con base en lo observado en las fases de trabajo individual y colaborativo de la cuarta tarea la investigadora se centra en mostrar una manera de abordar el crecimiento de las bacterias desde la perspectiva relativa, a partir de la intervención del estudiante A15, quien indica que ha que tomar en cuenta la medida inicial. La investigadora justifica por qué la bacteria A creció un 120% mientras que la B creció un 150%.

Finaliza la puesta en común indicando que si en el guión del tema, el examen o cuando estén trabajando con los niños tienen que verificar qué tipo de relación hay entre dos magnitudes, directa o inversa, deben de pensar en todas las pautas trabajadas en la sesión y no guiarse por la idea de que “conforme una aumenta la otra también o que si una disminuye la otra también”.

En el G2 la investigadora intervino en nueve ocasiones. Al inicio de la puesta en común se dedicó a exponer cómo estudiantes de primaria, de secundaria e inclusive universitarios se limitan a dar descripciones mínimas de las relaciones de proporcionalidad las cuales se basan en el crecimiento simultáneo de los valores de dos magnitudes, comenta que esta es una característica evidente que cumplen las cantidades en la tabla de la tarea, expone el contraejemplo relativo al peso y la edad.

Seguidamente conecta las relaciones detectadas en la tabla con la noción de razón, diciendo que éstas se pueden describir también en términos de las razones. En esta oportunidad recuerda que una razón es una comparación multiplicativa entre dos cantidades. Muestra las diapositivas en las que se consideran las razones entre magnitudes y en la misma magnitud (Figura 6.19) y resume lo observado indicando que en las relaciones de proporcionalidad directa la razón entre las cantidades es constante, el valor de esa razón se llama constante de proporcionalidad, además indica que el valor de la razón entre cantidades de la misma magnitud y el valor de la razón de las cantidades correspondientes es el mismo número.

Posteriormente cuestiona al grupo preguntando ¿para afirmar que la relación entre el tiempo y el número de bacterias es de proporcionalidad directa es suficiente decir que conforme una aumenta la otra también lo hace?, los estudiantes responden que no, la investigadora agrega diciendo que han de verificar las condiciones siguientes: cuando se multiplica o divide una cantidad de una de las magnitudes, en este caso las bacterias o el tiempo, la cantidad correspondiente se obtiene al multiplicar o dividir por el mismo número, si se dobla el tiempo las bacterias se doblan, si se triplican igual, si se busca la quinta parte las bacterias también se obtienen dividiendo por cinco. En resumen, indica que existe un único número que al multiplicarlo por los días permite obtener las bacterias, en la tarea ese número es 13 y se llama constante de proporcionalidad, agrega la caracterización de la proporcionalidad en función de la razón entre las cantidades de magnitudes distintas y la razón en la misma magnitud. Puntualiza que el valor de la razón es un número mayor que 1, de ahí que se tome en el antecedente la cantidad mayor, pero que sin embargo es común y útil utilizar la razón inversa.

En cuanto a la promoción de ideas relativas a la representación gráfica y simbólica de la relación decide comentarles intuitivamente que la magnitud tiempo es continua y que el conjunto de las bacterias es discreto y que si a esa descripción simbólica algebraica se le definen los conjuntos de salida y llegada se obtendría una función lineal. A diferencia de los intercambios dados en el G1, los estudiantes del G2 no reaccionaron con preguntas o dudas centradas en esta información, quizás esto se deba a que la investigadora no ahondó en el tema ni insistió en detalles lo cual hizo a propósito con la idea de no desviar los intereses investigadores propuestos para esta sesión. Para finalizar la revisión de todos los ejercicios de la 1ª fase se resumieron las ideas principales asociadas a cada representación de la relación de proporcionalidad directa: verbal, simbólica o mediante una fórmula y gráfica mediante una línea recta.

En la revisión de la segunda fase de la tarea, relativa al crecimiento absoluto y relativo de la longitud de dos bacterias, la participación de un estudiante (B7) sugirió a la investigadora la posibilidad de conectar el aporte del alumno con una de las estrategias multiplicativas que se habían previsto para mostrar que la bacteria B creció más. De modo que expuso lo siguiente:

I: "… cero coma cero once (0`11) que fue lo que creció A es igual que cero coma cero cinco (0`05) más cero coma cero cinco (0`05) más cero coma cero uno (0`01) (escribe 0`11 = 0`05+0`05+0`01), ¿sí o no?, 0`05 más 0`05 más 0`01 nos da 0`11, esto fue efectivamente lo que creció (señala con una llave 0`05+0`01), si sumo estas dos me da

0`06, pero entonces estoy viendo que la bacteria A creció un 100%, duplicó, como dice Román, su longitud y un poquito más, qué tanto poquito más es esto de lo inicial (señalando el 0`01), 0`01 de esto (señala 0`05) es una quinta parte, si hablamos en términos de porcentaje la quinta parte sería el 20%, ¿de acuerdo?, entonces esto es un 20% y aquí un 100% (escribe debajo de 0`05+0`01), o sea que creció un 120%...”

Aplicando el mismo razonamiento concluye que la bacteria B creció un 150%, cierra la revisión de ejercicio indicando la importancia de abordar ambos tipos de comparaciones en la formación de los niños.

Respecto a la Estructura de la Proporción y la Regla de Tres en la Tarea 4

Uno de los principios que guió la planificación de la tercera sesión correspondió a la necesidad de promover la comprensión de la regla de tres, dada la problemática generada por el uso, sin sentido, y abuso de tal procedimiento en los distintos niveles escolares. Esta situación ha sido documentada en múltiples estudios (A. Fernández, 2001; Freudenthal, 1983; Lamon, 2007; Modestou y Gagatsis, 2007; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel, 2005).

En esta sección presentamos evidencias sobre el papel de la investigadora como promotora del uso de la relación funcional (constante de proporcionalidad) y (o) el operador escalar en lugar de la regla de tres en tareas de “valor faltante”, así como de la comprensión de la “regla de tres”.

En el G1, durante la revisión del primer ejercicio, los estudiantes aportan las relaciones que detectaron de manera individual y durante el trabajo colaborativo. Entre las que mencionan están la relación funcional, la estimación y la invarianza del producto cruzado. Ante ésta última idea la investigadora señala que tal relación está en la base de la propiedad fundamental de las proporciones (más adelante se centra en este aspecto). No obstante, dado que ningún estudiante reconoció las relaciones escalares la investigadora procedió a referirse a las mismas, indicó relaciones como el doble, triple, la mitad y la tercera parte.

La investigadora expuso el caso de las razones, externas e internas, como un tipo peculiar de relación que caracteriza la relación de proporcionalidad directa. Esto permitió establecer vínculos entre las nociones que se venían estudiando en las sesiones previas. Además agregó que las razones constituían otra forma de expresar las relaciones funcionales y escalares detectadas. A raíz de los aportes relativos a las razones, la investigadora retomó la idea de equivalencia de razones, indica que son aquellas que tienen el mismo valor numérico y presenta un ejemplo de la tarea, luego calcula el producto cruzado diciendo que esta es otra manera de comprobar la equivalencia. Durante esta intervención explica que la “regla de tres” se basa en esta propiedad.

Para promover el uso de la relación escalar en la resolución el ejercicio (b.1) la investigadora sugiere el uso del par (5, 65) para determinar ¿en cuántos días hay 650 bacterias? y pregunta ¿cómo se pueden usar los datos?, además les dibuja una flecha que relaciona las cantidades en la misma magnitud, luego mediante algunas preguntas conduce a que el operador 10 que relaciona a 65 y 650 puede usarse para hallar la cantidad que le corresponde a 5, esto es 50 bacterias. En este momento el estudiante C18 dice que eso es la regla de tres. La investigadora se ocupa de mostrar la diferencia que hay en el fondo de ambos procedimientos y señala la relevancia de preocuparse por comprender tal regla y de enseñarla con sentido, dice:

I: …lo que quiero decir es que razonen esto, en la regla de tres ¿qué hacemos?, en general qué se hace con los niños, éste por éste entre éste (señala los números 5, 650 y 65)… ¿por qué éste por éste entre éste?… mientras que si razono con los estudiantes y reconocemos que en las relaciones de proporcionalidad directa cuando una cantidad se aumenta un número de veces y la correspondiente también, tiene sentido que aquí yo diga ¡claro! aquí va 50 porque tengo que aumentar diez veces el número de días, muchas veces la regla de tres cuando se trabaja está desprovista de una justificación o de algún razonamiento, lo que quiero es ir a esto, que la usamos indiscriminadamente sin verificar si la relación es de proporcionalidad directa o no, esta es una de las cuestiones que al salir de aquí pues quisiera que piensen…

En esta tercera sesión la investigadora intervino durante los trabajos colaborativos con el fin de promover la comprensión de tales nociones (uso de relación escalar, regla de tres). Así observamos en las producciones orales de los equipos E1, E7 y E18 cómo la investigadora les corrige cuando ellos creen que hacer una división es lo mismo que la regla de tres (E18), les sugiere que hay muchos otros procedimientos que permiten hallar la cuarta proporcional (E1) e intenta guiar el razonamiento de la estudiante C9 del equipo E7 quien ha dado muestras de reconocer al menos parcialmente relaciones escalares, mostramos el intercambio dado:

C9: mira he visto que en 3 días tenemos 39 ¿no?, por ejemplo en el día 12 son 156 y aumenta 117 desde el tercer día vemos que 39 por 3…
I: veamos que esta es una relación muy importante, esta que está viendo Cristina, pero bueno una cuestión es cómo lo escribes, cómo lo dices de forma general, porque esta es una relación que se cumple
C9: y en los 15 días por lo mismo vemos…
I: ¿cuál es la relación entre 3 y 12?, ya la viste entre 39 y 156, aquí está… bueno aquí en el…, bueno veamos qué pasa con sus correspondientes
B6: pero no Gabriela, es que es lo mismo que aumentar 13 bacterias al día ir multiplicando…
C9: pero yo no multiplico, yo resto
I: no, ella está viendo otra cosa, ella lo está viendo linealmente, horizontalmente porque ésta relación de 13 es así (verticalmente) ella lo que está viendo es el 3…
B6: con el 12
I: con el 39, pero más bien lo está viendo abajo entre 39 y 78, está viendo esta relación entre estos dos, bueno el 9 no está pero lo está completando, y luego le digo que trate de observar estos dos (se refiere al 3 y al 12)
C9: es por 2, 78 es 39 por 2
I: si hay una relación entre este y este, ¿qué pasa con sus correspondientes?
C9: lo mismo por 3, por 4, mira por 4, la resta 195…
I: sí, pero mi pregunta Cristina es qué pasa con los correspondientes tiempos, tú me estás diciendo qué pasa con dos cantidades de bacterias, ahora ¿qué pasa con los que le corresponden?

En el G2, durante la revisión del primer ejercicio, la investigadora muestra las relaciones entre las cantidades que se planificaron, entre las cuales destaca la relación escalar, las razones internas y externas, una de las ideas que la lleva a mostrarles el uso de la relación escalar es promoverla como una forma alternativa a la regla de tres en tareas de valor ausente.

En este grupo la investigadora enlaza la caracterización de la relación de proporcionalidad directa con el uso y significado de la "regla de tres", señala que ésta ha de aplicarse únicamente si se ha verificado que la relación entre las cantidades es de proporcionalidad directa luego indica que es un procedimiento que se ha mecanizado pero que se basa en la propiedad de la equivalencia de razones, escribe dos formas comunes mediante las que se suele expresar la regla de tres:

$$\frac{39}{3} = \frac{65}{x} \qquad \begin{array}{l} 39 \rightarrow 3 \\ 65 \rightarrow x \end{array}$$

La investigadora comenta que cuando se plantean estas expresiones lo que se está diciendo es que la relación multiplicativa entre 39 y 3, que es 13, es la misma que hay entre 65 y el número que se desea averiguar, insiste en que al aplicar las condiciones que describen la proporcionalidad directa es posible llegar a conceder significado a lo que se hace en la regla de tres.

Al igual que se hizo en el G1, para promover el uso de la relación escalar en la resolución el ejercicio (b.1), la investigadora sugiere el uso del par (5, 65) para determinar ¿en cuántos días hay 650 bacterias?, comenta la estrategia a través de la Figura 6.23.

Indica que si se considera la relación entre las cantidades del mismo tipo (relación escalar) es posible averiguar el dato que corresponde a 5 sin necesidad de usar la regla de tres. Señala que ha decidido usar el par (5, 65) y la cantidad de bacterias de 650 porque entre 65 y 650 hay una relación evidente, que es "por 10", por lo que la cantidad de días buscada se hallará multiplicando 5 por 10. En la revisión del siguiente ejercicio (b.2) la estudiante A4 participó sugiriendo el uso de la estrategia escalar.

Durante el trabajo colaborativo del equipo E10 los estudiantes dedicaron casi todo el tiempo en explorar tipos de relaciones, asociando días de la semana a cantidades de bacterias, estos patrones fueron improductivos. Ante la situación, la investigadora interviene intentando promover el reconocimiento de la relación escalar, a continuación mostramos el fragmento correspondiente:

A3: nada es que yo pensaba que podía haber una relación, un patrón de medida… si yo le asigno a los días de la semana me van coincidiendo en algunos
I: creo que estás viendo un patrón pero no lo estas describiendo correctamente, esto ¿qué es?, una relación, ¿cuál es? (señala dos pares de cantidades)
A3: eso es lo que intentamos averiguar
I: es muy sencilla, ¿cuál es?
A3: el doble, igual esto dobla (3 y 6), esto dobla (5 y 10), aquí doblan y aquí doblan también…

I: pero por ejemplo que sé yo, 3 y 12, 3 y 12 no es el doble pero tienen otra relación ¿cuál es?
A3: claro es cuatro…
I: bueno y entre estos dos, fíjense a ver si es el cuádruple
A3: sí
I: bueno y ya está, porque la tienen, sólo es la forma… hay que describirla, lo que pasa es que ya vamos a revisar…

7.9.4 Aportaciones de la Investigadora en la 4ª Sesión

<u>Respecto a la Razón en las Tareas 6 y 7</u>

En ambos grupos, antes de iniciar el trabajo individual de la Tarea 6, la investigadora hizo una recapitulación de ideas relativas a la razón entre las cuales están: (a) la definición y ejemplificación de la razón, (b) la distinción que hay entre comparaciones aditivas y multiplicativas, (c) se hizo hincapié en el valor de la razón y el papel de la división como operación que permite conocer este valor, (d) además se retomó la equivalencia de razones y la razón inversa. Consideramos que esta intervención inicial constituye una acción concreta en la que se promovió la comprensión de la razón.

Mientras los equipos trabajaban en la resolución de la Tarea 6 la investigadora atendió dudas de los estudiantes y en algunas de estas intervenciones se dio la ocasión de promover la comprensión de la razón. En el equipo E13 del G1 se manifestó la estrategia aditiva en la comparación de razones, ante lo que la investigadora les señaló el error basándose en la diferencia entre una comparación aditiva y una multiplicativa. El estudiante indica que al realizar la división ya lo habían notado. En el trabajo colaborativo de la misma tarea, en el G2, la investigadora promovió la comprensión de las cantidades intensivas durante el trabajo de dos equipos E12 y E5. Mostramos el intercambio dado con el equipo E13 del G1.

I: pero, ¿por qué creen que estas dos fracciones son iguales?, eso es lo importante
A9: la historia es esa, la historia es que yo de entrada le he dicho claro 4 a 6, esto es de 4 a 5, en principio es de 4 a 5 ó 6 a 7 pero como viene Daniel pasa a ser 4 a 6 y 6 a 8, y dije esto es parejo da igual que se siente pero sin haber hecho la división, ¿me entiendes?, digo claro se llevan 2, 4 a 6, 6 a 8, dos digo da igual que se siente…
I: a eso… es importante, el error que estas cometiendo es creer que son iguales porque la diferencia entre 4 y 6 es dos y 6 y 8 también, pero que la diferencia entre dos pares de números sea la misma no significa que multiplicativamente quepa el mismo número de veces, por eso…
A9: ya, ya… bueno ya al dividir nos hemos dado cuenta que no, que conviene más que se siente en la 2 porque…

Durante la puesta en común de la Tarea 6 se aportaron estrategias de comparación de razones distintas de la división. Consideramos que visualizar la resolución desde distintas perspectivas contribuye a la flexibilidad (Berk et al., 2009) en el uso de procedimientos matemáticos en el ámbito del razonamiento proporcional, promoviendo así conocimientos de tipos procedimental relativos a la razón. Esta intervención versó sobre la amplificación de razones, suma de razones, suposición de razones equivalentes y la división de pizzas en un número fijo de porciones.

En la puesta en común de la segunda parte de la Tarea 6, relativa al reparto proporcional se hizo hincapié en la relación escalar que existe entre el total de personas, 240, y la cantidad de personas que pueden sentar en un conjunto de mesas grandes y pequeñas, cuya relación es de 7:4. Los estudiantes reconocieron que una cantidad es el triple de la otra y extendieron la misma relación a la cantidad de mesas, de cada tipo, que es necesaria para sentar a todas las personas. En la revisión del mismo ejercicio se indicó a los estudiantes que la razón 7:4 significa que por cada 7 mesas grandes hay 4 pequeñas. Por lo tanto consideramos, con base en los aportes de la investigadora, que se promovió la interpretación de la razón y el uso de la relación escalar.

Durante el trabajo colaborativo de este ejercicio en el G2, la investigadora intervino en los equipos E4 y E7, en el primero sugirió la búsqueda de la relación multiplicativa entre las cantidades de personas y en el otro equipo les cuestiona por qué han extendido la relación escalar detectada entre las personas a la cantidad de mesas e incita a los estudiantes para que se refieran a la razón adecuadamente. Mostramos el intercambio dado con el equipo E7 del G2.

I: aquí lo que quisiera que me explicaran es por qué multiplicaron por 3, ustedes detectaron este 3…
B10: sí
I: pero ¿por qué también se lo traen aquí?
B10: porque es que lo que pasa… lo que hemos sumado según la de esta lo hemos multiplicado ¿no?...
C10: es la relación entre las dos cantidades
I: ahí está
B10: hemos multiplicado el 7 por el 8 y el 4 por el 6, (I: ¿y qué obtengo ahí?) 80, y según la razón, el total, según la razón es 80, pues hemos visto que 240 y 80 son múltiplos y las 240 la hemos dividido 80, pa ver cuánto se le ha multiplicado a esa razón pa ver…
C10: no mira, 80 es la razón que existe entre las personas, pero están pidiendo la razón entre las mesas porque la razón entre las personas…
I: pero 80 no es una razón es un número de personas que se sientan en un grupo de 4 y 7 mesas…
B10: el total de la razón esa
C10: claro, lo que me refiero es que yo comparo, lo primero que hacemos es que comparamos las personas, es lo que me refiero, y luego hacemos esto pero para sacar las mesas entonces yo hecho… para mí es la razón entre las personas que hay, y luego hacemos…
I: aquí eso sí es una razón, ¿estás viendo la razón entre 240 y 80?
C10: claro y esa es la razón de las personas y ahora vamos hacer la razón de las mesas que es lo que nos piden

Antes de iniciar la Tarea 7, la investigadora intervino en ambos grupos con el objetivo de recordar la noción de figuras planas semejantes e introducir la escala. En esta revisión se aludió al uso de las escalas en distintas situaciones de la vida cotidiana y se definió la misma como la razón de semejanza entre las longitudes de la figura original y su representación. Consideramos que con estos aportes se pretendía promover la aplicación de la razón en una situación geométrica.

La revisión de la Tarea 7 permitió abordar el significado de escala y la relación que se verifica entre la razón de los lados en figuras semejantes y la razón de las áreas o volúmenes. Las actuaciones individuales y de muchos equipos reflejaron la presencia del fenómeno de la ilusión de la linealidad pues aplicaron la misma escala para calcular medidas que nos relacionan linealmente (área o volumen). Consideramos que la intervención de la investigadora durante la puesta en común de la Tarea 7 pudo favorecer la comprensión de la noción de escala y en consecuencia de la razón, y que se valió de la verificación gráfica a través de unidades cuadradas para estimular a los estudiantes a que enunciaran la conjetura relativa a la relación entre razón de longitudes y razón de áreas en figuras semejantes, el caso de la relación entre razón de longitudes y volumen se trabajó de la misma manera aunque con menor detalle por falta de tiempo.

Respecto a la Comparación de Razones en la Tarea 6

En un estudio previo (Valverde, 2008), se observó el predominio del uso de la división para conocer el valor de la razón y así comparar las cantidades correspondientes de la misma manera en que se comparan número reales; este procedimiento es correcto y posibilita resolver la situación de comparación, no obstante, está desprovisto de evidencias de uso del razonamiento proporcional.

Bajo las consideraciones previas se decidió planificar estrategias de comparación de razones, distintas de la división, en las cuales se pusieran en marcha capacidades de razonamiento proporcional tales como: uso de relaciones escalares, equivalencia de razones, estrategias de compensación de antecedentes o consecuentes así como la interpretación de la situación en términos de una razón particular, esto es la normalización (Freudenthal, 1983).

Tales estrategias y procedimientos se expondrían durante la fase de puesta en común de la Tarea 6. No obstante, lo sucedido durante el trabajo del G1 llevó a cambiar las pautas de trabajo en el G2. En el trabajo individual y colaborativo de la Tarea 6 en el G1 se manifestó el predominio de uso de la división como procedimiento para resolver la tarea de comparación de razones, esta situación incitó a la investigadora a cambiar las directrices de trabajo en el G2; en éste se demandó, durante el trabajo colaborativo, que la tarea debía resolverse al menos de dos formas diferentes. Consideramos que esta acción evidencia que la investigadora suscitó el uso de otras formas de comparar las razones.

La exposición de las estrategias planificadas (Apartado 6.4.1.1, punto “Planificación de la puesta en común de la Tarea 6”) se llevó a cabo durante la puesta en común de la Tarea 6, en ambos grupos (Anexo I). En estas intervenciones, la investigadora abordó una a una las estrategias planificadas, algunos estudiantes expresaron dudas que fueron tratadas. Se les justificó este trabajo señalando que como futuros maestros de primaria han de ser conscientes de que los niños piensan de muy diversas maneras y que, como docentes, no pueden cerrarse a una única forma de resolver un problema, la investigadora destaca la importancia de desarrollar la capacidad de abordar una misma tarea matemática desde diferentes perspectivas. A modo de ejemplo mostramos un fragmento de la intervención de la investigadora en el G1.

I: …una de ellas es amplificar, si en la mesa 1 hay una razón de 6:4, por cada 6 personas hay 4 pizzas, podemos pensar en triplicar esa cantidad, cuando uno triplica una razón obtiene una razón equivalente, eso lo hemos visto en las primeras sesiones, triplicando las 6 personas me daría 18 y triplicando las 4 pizzas, da 12, ahí obtengo una nueva razón que es 18 a 12, 18:12 es una razón equivalente a 6:4, ¿estamos claros ahí? porque como aumento el número de pizzas aumento también el número de personas, en el caso de la mesa 2 que son 8 personas y 6 pizzas lo duplico, ¿por qué lo duplico?..., porque si aquí obtuve 12 pizzas y como mi objetivo es igualar los antecedentes o los consecuentes, si yo tengo en las 2 mesas el mismo número de pizzas o el mismo número de personas es muy fácil comparar, ¿de acuerdo?, entonces eso es lo que buscamos con esta estrategia, aquí entonces duplicamos las dos cantidades y me da 16 personas y 12 pizzas, claro como ahora tengo el mismo número de pizzas simplemente veo donde hay menos personas y ahí es donde se come más, esta estrategia es la de igualar antecedentes o consecuentes por medio de la amplificación. Otra forma, sumando razones…

Aunque en el trabajo individual y colaborativo del G1 los estudiantes abordaron la resolución principalmente desde la división, consideramos que la puesta en común les posibilitó conocer alternativas para la comparación de razones. La pauta de trabajar la tarea de distintas maneras favoreció la búsqueda y discusión de alternativas de resolución en el G2, las mismas se reflejaron en los intercambios orales y en las producciones escritas. Con base en lo expuesto, creemos que la investigadora suscitó el uso de otras estrategias de comparación de razones diferentes de la división, en las cuales ha estado implícito el razonamiento proporcional.

Búsqueda de Relaciones de la Tarea 7

Reconocemos que varias aportaciones de la investigadora están orientadas a promover la búsqueda de relaciones entre cantidades así como las capacidades implicadas en la expresión de conjeturas sobre tales relaciones.

En ambos grupos antes de iniciar la Tarea 7 expuso a los estudiantes, de modo general, en qué consiste una conjetura, ejemplificó mediante la Conjetura de Goldbach, misma que enunció con ayuda de los aportes de los estudiantes. En el ejemplo indicó la relevancia de observar y buscar regularidades o patrones en la situación, además, cuando los estudiantes sugerían que “los números pares se pueden poner como la suma de dos números primos” les cuestiona las condiciones de los números pares y primos sobre los cuales enuncian la conjetura. En esta intervención introductoria se muestra la intención de la investigadora de promover las capacidades implicadas en la tarea de conjeturar.

Posteriormente, durante la puesta en común, la investigadora recurrió a los casos de la tarea y a otro adicional para orientar a los estudiantes en el enunciado buscado. Se valió de la división de las figuras en unidades cuadradas y mediante el conteo rápido se visualizó que el área y volumen no crecen el mismo número de veces que la longitud de los lados. La investigadora les cuestionó sobre los datos buscados y sobre las razones de lados y áreas, la relación entre las mismas se representó simbólica y gráficamente. En resumen, mediante los recursos citados la investigadora procuró promover la búsqueda de relaciones entre las razones y facilitar a los estudiantes la labor de enunciar la conjetura.

Durante el trabajo colaborativo de los equipos E5 y E20, del G1, la investigadora intervino con el objetivo de promover la búsqueda de relaciones entre las razones en cuestión. De igual manera intervino en los equipos E7 y E10, del G2, con ayuda de la profesora de la asignatura. Mostramos como ejemplo una de las intervenciones dadas en el equipo E10 del G2.

A3: Gabriela no sé si es así pero si 15 es a… yo me he guiado un poco, nos estamos guiando, si 15 es a 75, 6 es a 30 que es…
I: vemos que entre los lados aquí hay una relación, ¿cuál es la relación entre 15 y 75?...

7.9.5 Resumen del Papel de la Investigadora en la Institucionalización de los Conocimientos

En este apartado se presenta un resumen de los aportes de la investigadora durante la puesta en común de las tareas. Hemos detectado que además de los conocimientos del contenido (comunes y especializados) planificados, la investigadora aportó espontáneamente otro tipo de conocimientos concernientes al aprendizaje de los niños, los cuales ejemplificamos después de la Figura 7.57. Considerando el marco de referencia desde el cual hemos descrito el conocimiento matemático para la enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008) este tipo de intervenciones corresponden al conocimiento del contenido y de los estudiantes, el cual se sitúa dentro del dominio del conocimiento didáctico del contenido (CDC).

En la descripción de la puesta en común de las sesiones se han codificado los fragmentos relativos a los aportes de la investigadora según éstos correspondan a conocimiento del contenido matemático **(CCM)** o conocimiento didáctico del contenido **(CDC)** (Hill, Ball y Schilling, 2008). Se ha medido la frecuencia de los fragmentos codificados con **(CCM)** y **(CDC)**. Los resultados de la codificación aparecen en el Anexo M.3. En la Figura 7.57 se presenta la síntesis de la información recogida.

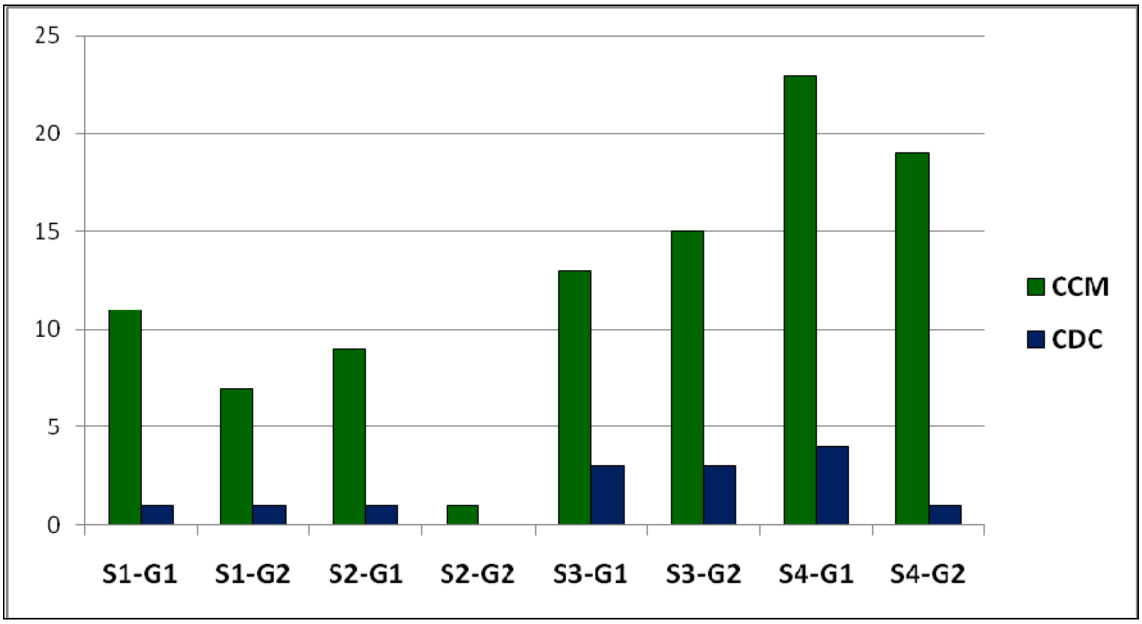


Figura 7.57. Frecuencia de conocimientos aportados en cada sesión (S) y grupo (G)

Sesión 1

En relación con la codificación de los fragmentos relativos a los aportes de la investigadora hemos observado que en la revisión de las tareas de la 1ª sesión, en ambos grupos, prevalecieron aquellos aportes referentes al conocimiento matemático asociado a la noción de razón (Figura 7.57).

En la puesta en común de la tarea 1, en ambos grupos, se aportó un conocimiento de tipo didáctico orientado a promover la relevancia de incorporar en la enseñanza primaria otros significados de la fracción además de la relación parte-todo y a motivar a los estudiantes de magisterio para que continúen reforzando sus conocimientos en beneficio de la enseñanza que recibirán sus futuros estudiantes, lo recogemos a continuación.

I: …en resumen, que la fracción puede significar diferentes cosas y que una de ellas uno de los significados es la razón, que se utiliza en diferentes situaciones cotidianas, ya vamos a ver en el siguiente problema un ejemplo concreto muy bonito, pero que a veces lo dejamos de lado y que también tenemos que poner un interés como maestros de comprenderlo para después enseñarlo a los niños y si no lo comprendemos bien preocuparnos por seguirlo trabajando poco a poco porque muchas veces nos quedamos aquí en la parte todo y hay que tratar los otros significados de las fracciones.

Destacamos que en la puesta en común de la Tarea 2 no se aportaron conocimientos didácticos explícitos, consideramos que esto obedeció a la complejidad de las ideas matemáticas implicadas en la misma, lo cual demandó de la investigadora intervenciones relativas principalmente al conocimiento matemático. La disminución de aportes matemáticos dados en el G2 refleja la decisión descrita en el rediseño de la planificación para este grupo relativa a concretar y puntualizar las intervenciones con el objetivo de optimizar la puesta en común.

Sesión 2

En la Figura 7.57 se observa que la puesta en común en el G2 fue limitada en ambos tipos de conocimientos debido a la restricción de tiempo causada por el retraso de los estudiantes y por el exceso de tiempo utilizado por algunos equipos en el trabajo colaborativo. En el G1 predominaron los aportes de tipo matemático y, aunque no ha formado parte de los objetivos de la intervención, la investigadora contribuyó con un comentario relativo al conocimiento didáctico del contenido orientado a la reflexión sobre alternativas al uso de la regla de tres en la enseñanza primaria, lo mostramos a continuación: "*… esta es otra forma de justificar de dónde sale ese 11,20% o sea la regla de tres no es el único procedimiento, mi idea aquí es que no nos quedemos con la regla de tres como la regla de oro sin saber por qué funciona ya que en el trabajo con los niños será fundamental contar con otras alternativas distintas a la regla de tres, o sea hay otras relaciones que se cumplen y vamos ir afinando esto un poco más*".

Sesión 3

Destacamos que hubo un equilibrio en la cantidad de aportaciones proporcionadas en ambos grupos (Figura 7.57). En el G2 la investigadora intervino un poco más que en el G1 motivada por el objetivo de agilizar la puesta en común y con el propósito de poner a prueba la Tarea 5 "Permanencia activa de un fármaco". Como se comentó anteriormente, este propósito no se logró a cabalidad. En ambos grupos, los aportes didácticos se relacionaron con las ideas de promover, desde la educación primaria, la comprensión de la regla de tres y de la verificación intuitiva de condiciones que caracterizan la relación de proporcionalidad directa o inversa. Además se señaló la relevancia de trabajar en educación primaria las comparaciones aditivas y multiplicativas entre cantidades de una manera paralela, aporte que está sustentado en posturas de investigadores destacados (Lamon, 2007).

Ejemplificamos a continuación uno de los aportes de corte didáctico expresado por la investigadora durante la puesta en común de la Tarea 4 en el G1.

I: …lo que quiero decir es que razonen esto, en la regla de tres qué hacemos, en general qué se hace con los niños, éste por éste entre éste (señala los números 5, 650 y 65)… ¿por qué éste por éste entre éste?… mientras que si yo razono con los estudiantes y reconocemos que en las relaciones de proporcionalidad directa cuando una cantidad se aumenta un número de veces y la correspondiente también, tiene sentido que aquí yo diga ¡claro! aquí va 50 porque tengo que aumentar diez veces el número de días, muchas veces la regla de tres cuando se trabaja está desprovista de una justificación o de algún razonamiento, lo que quiero es ir a esto, que la usamos indiscriminadamente sin verificar si la relación es de proporcionalidad directa o no, esta es una de las cuestiones que al salir de aquí pues quisiera que piensen…

Sesión 4

Destacamos que en la revisión de ambas tareas hubo un predominio de contribuciones al conocimiento matemático (CCM). Tales aportes se centraron en promover la comprensión de distintos procedimientos de resolución de una tarea, fortalecer la comprensión de la noción de razón y en suscitar la comprensión de las relaciones entre longitudes, áreas y volúmenes de figuras u objetos semejantes, mostrando argumentos orientados a difuminar las ideas subyacentes al fenómeno de la ilusión de la linealidad.

En el G1 se aportaron reflexiones didácticas en la revisión de las dos tareas, sin embargo en el G2 únicamente se dieron en la revisión de la tarea “Compartiendo pizza”. En tales aportes se hizo alusión a la relevancia de abordar la resolución de una tarea desde distintas perspectivas, se indicó que tal capacidad incide en la calidad de la enseñanza de la matemática que en un futuro ejercerán. En la revisión de la tarea “El Palacio Real de la Alhambra”, en el G1, la investigadora señaló la importancia de seguir mejorando las capacidades de observación de regularidades y formulación de conjeturas como una forma de fortalecer conocimientos que han de fomentarse desde temprana edad en la educación primaria, a continuación recogemos este aporte.

I: … no es difícil, yo sé que no están acostumbrados a escribir conjeturas, a observar relaciones pero es importante seguir entrenando estas capacidades y fomentar en los niños durante el trabajo en primaria que vean relaciones… si llegamos y le damos la fórmula o la ley, en los triángulos semejantes, en los cuadrados semejantes si la razón entre los lados es k entre las áreas es k cuadrado, qué aprendizaje puede haber detrás de eso, pasa como cuando nos cuentan una historia y se nos olvida, pero si ellos se ponen a calcular, a buscar relaciones, a incomodarlos… porque es una forma de incomodar a la gente, yo sé que los incomodo cuando les pido que busquen relaciones o que escriban una conjetura es pedirles que por ustedes mismo traten de producir eso, porque para mí sería muy sencillo llegar y decirles esto de una vez pero la idea no es que yo se los diga sino que ustedes puedan observarlo…

7.10 Metodología de Trabajo en el Aula

Como se describió en el marco de referencia (Apartado 4.3.2) la metodología de trabajo en el aula contempla la dinámica que establece la resolución de las tareas en cuatro fases (individual – colaborativa – puesta en común – individual) y la elección de trabajar los contenidos a través de la resolución de problemas.

En relación con esta dimensión de análisis hemos centrado nuestro interés en describir cómo ha sido el proceso de familiarización con esta dinámica, estudiar si la metodología de trabajo contribuyó a la estimulación de las competencias matemáticas de carácter transversal: *resolver problemas*, *comunicar*, y *argumentar–justificar* y describir las fortalezas y debilidades que supone la fase de resolución colaborativa. Presentamos el análisis de esta dimensión de acuerdo con estos tres aspectos.

7.10.1 Habituación a la Metodología de Trabajo

Consideramos que el éxito o fracaso de cualquier dinámica de trabajo reside, en gran parte, en qué tan informados estén los participantes acerca de su papel en el desarrollo de la misma y en la motivación que la dinámica les produzca. En este apartado describimos cómo ha sido el proceso de familiarización con la dinámica de trabajo en cada sesión.

Desde que iniciaron las clases de la asignatura Matemáticas y su Didáctica la investigadora asistió a las clases de ambos grupos, como observadora y participante de esas lecciones, tuvo entonces la oportunidad de ir conociendo a la mayoría de los estudiantes y de trabajar con ellos, como una compañera más, principalmente en la resolución de las prácticas de la asignatura. Por lo anterior, destacamos que ya existía un contacto entre la investigadora y los estudiantes de los dos grupos, quienes en su mayoría tenían conocimiento del trabajo que en su momento se llevaría a cabo con la investigadora.

En la 1ª sesión, se pide a los estudiantes que se sienten cerca de sus compañeros de las prácticas de la asignatura, pues aunque trabajan inicialmente de forma individual después lo harán de forma colaborativa. En este primer momento se observa que hay equipos en los que solamente hay una persona motivo por el cual la investigadora decide que si el resto de sus compañeros no han asistido se sienten o se ubiquen con otros compañeros.

En relación con el desarrollo de la dinámica de trabajo colaborativo indicamos que en los dos grupos se fue explicando cada una de las fases, se atendieron las consultas y se explicó con detalle las pautas a seguir (Ver Apartados 6.1.2, 6.2.2, 6.3.2 y 6.4.2).

Algunos estudiantes expresaron sorpresa durante el trabajo colaborativo al ver que la tarea que debían trabajar en equipo era exactamente la misma que habían desarrollado individualmente. Por ejemplo, en el equipo E11 del G1:

A5: ¡es lo mismo tía!
B5: es lo mismo que el ejercicio otro pero juntas...

De manera general los estudiantes que llaman a la investigadora le piden la aprobación sobre lo que han hecho preguntándole ¿está bien así?, ésta les dice que durante la puesta en común ya revisarán sus ideas. Cuando la mayoría de los equipos llegaron a un 'acuerdo' o cuando el tiempo predeterminado pasó, la investigadora solicitó a uno de los grupos presentar su respuesta (o respuesta parcial) como base para la discusión general. En esta fase se esperaba que los alumnos complementaran, aceptaran o criticaran la respuesta dada.

Aunque la investigadora explicó de qué iba el trabajo, durante el desarrollo de la sesión fueron surgiendo dudas elementales pero cuya aclaración contribuyó a la aceptación de las normas establecidas en la misma. Por ejemplo, durante la puesta en común de la Tarea 1, un estudiante no tiene claro qué debe hacer:

A9: Una preguntilla sólo, esto por ejemplo ¿ya lo anotamos?, esto que se ha puesto en la pizarra ¿lo anotamos como respuesta?
I: Pep ha dicho otra cosa que es importante, yo todavía no he dicho que sea la respuesta correcta, esto es lo que ella expuso, ahora la siguiente parte es ver si estamos de acuerdo o no, si lo hicieron diferente o lo entendieron diferente y ya después yo me encargaré de hacer una conclusión
A9: y esa ya la podemos escribir (I asienta con la cabeza)

En resumen, la Tarea 1 se desarrolló con éxito en los dos grupos, los estudiantes siguieron las instrucciones de trabajo individual, colaborativo y participaron en la puesta en común.

Antes de iniciar la segunda tarea la investigadora señaló de nuevo las pautas para el trabajo individual, recalcándoles la relevancia de ceñirse a un trabajo meramente personal, recordando que no deben de preocuparse por hacerlo mal, que deben hacer el máximo esfuerzo por no ver lo que hace su compañero. Durante la Tarea 2 observamos que los estudiantes realizaron la I fase de una manera totalmente individual.

Posteriormente, la investigadora indicó algunas pautas con el fin de mejorar el trabajo en equipos. Por ejemplo, hablar solo una persona a la vez, respetar las opiniones de los otros aunque éstas no parezcan que son del todo correctas, si es posible, llegar a un acuerdo y no imponer respuestas a los compañeros, sino dar argumentos de por qué son válidos los aportes dados.

Durante este tiempo los estudiantes plantearon a la investigadora dudas relativas al carácter abierto de las cuestiones. Por ejemplo, preguntan si en las partes (b) y (c) podrían dar la misma respuesta o decir que ninguna de las afirmaciones valía para ellos, también la llaman buscando la aprobación de las respuestas que han elaborado. Durante el trabajo colaborativo no mostraron asombro por encontrarse de nuevo con la misma tarea, es decir, mostraron que habían afianzado las normas definidas en la dinámica de trabajo.

En la III fase de la dinámica, referente a la puesta en común de la resolución de la tarea, observamos que en los dos grupos los estudiantes participaron voluntariamente. Ellos expusieron las ideas discutidas en su equipo de trabajo. Posteriormente, la investigadora intervino con el objetivo de promover la comprensión de la razón y algunas de sus propiedades.

En cada grupo, la investigadora cerró la sesión solicitándoles que hicieran de nuevo las tareas fuera de clase y de manera individual (esta es la IV fase de la dinámica), con el fin de que reflexionaran acerca de lo que se había expuesto durante la puesta en común y en el trabajo en equipo.

En relación con la 2ª sesión, en ambos grupos, antes de iniciar el trabajo, la investigadora dedicó unos minutos para recordar las pautas de la dinámica de trabajo, primero individual, luego colaborativamente y posteriormente se pasaría a la puesta en común de la resolución de la tarea. En términos generales, los estudiantes se ajustaron mejor al tiempo y pautas del trabajo individual, es decir, no mostraron mayor interés por averiguar de qué forma estaba trabajando el compañero más cercano. La fase de trabajo colaborativo se desarrolló sin dificultades, en el G2 un par de equipos tardaron más tiempo que el establecido para desarrollar su trabajo.

La puesta en común de la tarea se realizó de manera satisfactoria en el G1. No obstante, debido a razones ajenas a la investigación, no se logró desarrollar en el G2.

En el G1, los estudiantes A9, C9 y B6 expresan a la investigadora opiniones positivas relacionadas con la dinámica de trabajo. Señalan como ventaja el compartir con los compañeros sus ideas y luego de nuevo revisarlas en la puesta en común, para estos estudiantes es importante poner en común las respuestas para así mejorar los intentos realizados en las dos primeras fases.

Indicamos que durante la 3ª sesión los estudiantes de ambos grupos se comportaron con normalidad ante las demandas de la dinámica de trabajo en el aula, es decir no observamos dudas relativas a la manera de proceder en cada momento. En la planificación de la tercera sesión expusimos las razones por las cuales la investigadora asumiría mayor participación durante la puesta en común de las tareas.

La 4ª sesión, en ambos grupos, se inició retomando las características de las diferentes fases de trabajo en las que los estudiantes participarían, se les insistió en la importancia de trabajar individualmente durante la 1ª fase y de ajustarse al tiempo establecido. En esta sesión, los estudiantes de ambos grupos, no manifestaron dudas relacionadas con las acciones a seguir en cada fase de la metodología. En resumen, durante el desarrollo de la 4ª sesión los estudiantes ya estaban habituados a las distintas fases de la metodología de trabajo en el aula.

7.10.2 Competencias Matemáticas que se han Estimulado con la Metodología de Trabajo

En la planificación de las sesiones se consideró que la dinámica de trabajo colaborativo posiblemente motivaría en los estudiantes la manifestación de razonamientos para compartir y fundamentar sus resoluciones, viéndose posiblemente estimuladas las competencias *argumentar-justificar y comunicar.* Además se indicó que la elección de estudiar los contenidos a través de la resolución de problemas, y no desde una metodología expositiva, posiblemente incidiría en la competencia *resolver problemas.* A continuación reflexionamos sobre la estimulación de tales competencias con base en el trabajo realizado.

Resolver Problemas

La metodología de trabajo desarrollada en la experimentación se basa en el estudio de los contenidos *a través* de la resolución de problemas. Previamente a la implementación no se abordó de manera detallada el estudio de la razón o de la proporcionalidad (Ver Descripción del Trabajo en la Asignatura, Anexo D), acuerdo al que se llegó con los profesores de la asignatura con el fin de que a partir de la resolución de las tareas individual y colaborativamente y de la puesta en común, fuera posible estudiar algunos contenidos asociados a la razón y a la proporcionalidad.

Señalamos que se han trabajado 7 tareas que se caracterizan por centrarse en distintos focos de contenido, involucrar situaciones diferentes, considerar distintos valores de variables que afectan las actuaciones de los individuos en el campo del estudio de la razón y la proporcionalidad (tipo de razón, tipo y cantidad de magnitudes, representaciones, tipo de situación, etc.…), distintos niveles de complejidad que están asociados a los procesos cognitivos que demanda la resolución de cada una, inclusión de cuestiones de carácter abierto (Ver Planificación de las tareas en el Capítulo 6).

En resumen los estudiantes se han enfrentado a la resolución de tareas que involucran diferentes situaciones del mundo y que consideran algunos contextos asociados a la razón y a la proporcionalidad. Las actuaciones manifestadas evidencian que los estudiantes han recurrido a una amplia variedad de vías de razonamiento y resolución, sustentamos esta afirmación en la cantidad de indicadores que hemos usado para describir las resoluciones de las tareas (Ver *Resumen del conocimiento matemático puesto de manifiesto*, Apartado 7.8). Desde la perspectiva expuesta anteriormente consideramos que la "resolución de problemas" como metodología de trabajo en el aula ha estimulado la competencia *resolver problemas* (OCDE, 2004).

Comunicar

De acuerdo con Rico y Lupiáñez (2008) "*la competencia comunicar se centra sólo en los aspectos que se relacionan con la expresión de los escolares y de la forma en que se comunican. Esta competencia incluye, por tanto, expresarse de diferentes formas, sobre un contenido matemático, tanto de manera oral como escrita*" (p. 246). A la luz del referente citado indicamos que como parte de la dinámica de trabajo los estudiantes debían intercambiar sus razonamientos con los demás miembros de su equipo para así en conjunto construir la mejor resolución posible para la tarea. En tales intercambios los estudiantes expresaban las resoluciones que dieron en su trabajo individual en consecuencia tuvieron que presentar sus ideas matemáticas a los demás compañeros, explicar procedimientos aplicados o construir, en conjunto, algún conocimiento relacionado con una de las nociones implicadas.

En el análisis de las fortalezas y debilidades de la dinámica colaborativa hemos caracterizado los "intercambios productivos", estos segmentos evidencian momentos en los cuales los estudiantes comunicaron ideas matemáticas.

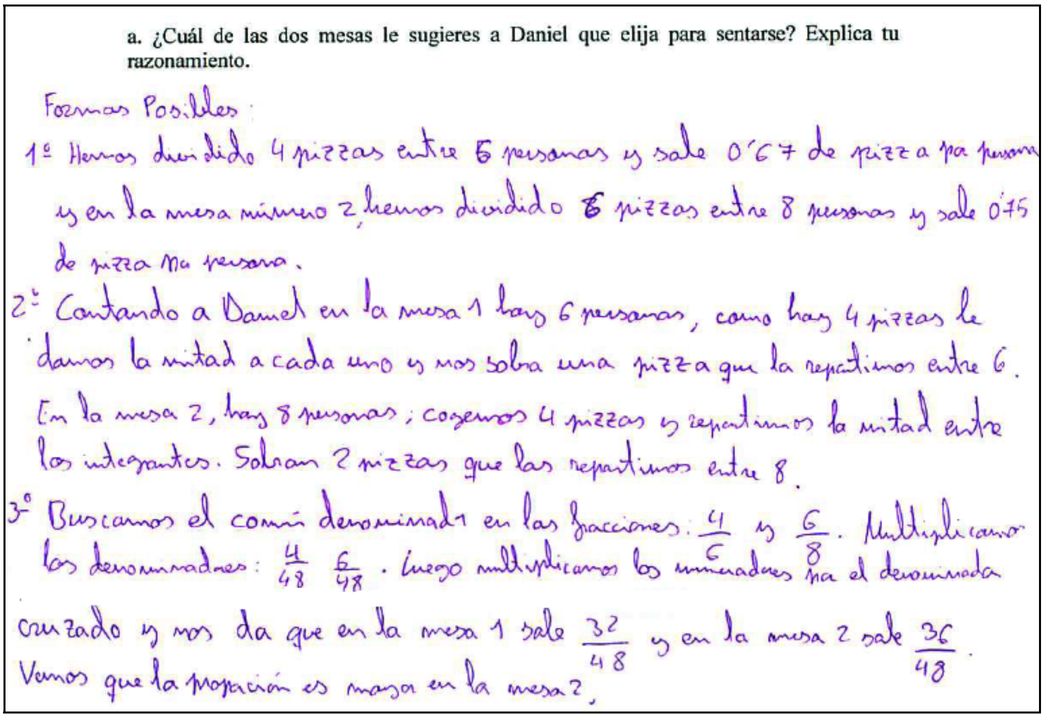
En la primera sesión los intercambios giraron en torno a las tres nociones: fracción, porcentaje y razón. Las explicaciones dadas en los intercambios productivos también se tuvieron que plasmar en el papel lo cual motivó a comunicar sus razonamientos. En estos registros observamos que utilizan el lenguaje usual de cada noción acompañado de la descripción del todo que han usado como unidad de referencia, por ejemplo "*dos quintos del total del terreno*". La síntesis de los intercambios productivos se ha presentado en el apartado "*Balance sobre el Trabajo Colaborativo Desarrollado en la 1ª Sesión*" (Apartado 7.10.2). Consideramos que el trabajo sobre esta tarea promovió la competencia *comunicar.* Prueba de esto se encuentra en cada una de las transcripciones de los trabajos en equipos de ambos grupos (Anexo E.1 y F.1).

La dinámica de trabajo colaborativo desarrollada durante el trabajo sobre la Tarea 2 promovió el intercambio de ideas matemáticas entre los miembros de los equipos, los cuales también se tuvieron que llegar a plasmar en el papel. En el apartado "*Balance sobre el Trabajo Colaborativo Desarrollado en la 1ª Sesión*" (Apartado 7.10.2) indicamos los equipos de cada grupo en los cuales se manifestaron intercambios productivos entre los estudiantes, también se ejemplifica uno de estos intercambios. En ambos grupos se han mostrado en el 50% de los equipos, por lo tanto consideramos que gracias a la tarea propuesta y la dinámica seguida los estudiantes se han situado en un entorno propicio que ha favorecido la competencia matemática de comunicar.

La descripción de los intercambios productivos recogidos en el punto "*Balance sobre el Trabajo Colaborativo Desarrollado en la **2ª** Sesión*" (Apartado 7.10.2) evidencia que los estudiantes han experimentado interacciones en las cuales varios compañeros intervinieron con sus ideas matemáticas para construir la mejor solución posible, alguno de los compañeros corrigió una idea inadecuada sugerida por otro o en las que se mostraron argumentaciones matemáticas a favor o en contra de lo expuesto en el equipo. En estos momentos la competencia *comunicar* se vio necesariamente estimulada. Destacamos que se dieron en cuatro de cinco equipos del G1 (80%) y en cuatro de seis equipos del G2 (66,6%).

En la resolución de la Tarea 4, al igual que en las demás, los estudiantes han expresado sus razonamientos matemáticos oralmente y por escrito, en vista de esto el trabajo realizado ha favorecido la competencia matemática de *comunicar*. Los intercambios productivos, descritos en el punto "*Balance sobre el Trabajo Colaborativo Desarrollado en la **3ª** Sesión*" (Apartado 7.10.2), se manifestaron en los equipos de ambos grupos, únicamente un equipo del G1 no dio muestras de esto.

Durante la cuarta sesión, como lo evidencia la Tabla 7.37, en doce equipos de G1y en nueve del G2 se manifestaron intercambios orales productivos, de los cuales se muestran ejemplos después de la misma tabla. Ejemplificamos el trabajo realizado sobre la competencia *comunicar* con la resolución escrita del primer ejercicio de la Tarea 6 aportada por el equipo E11 del G2.



a. ¿Cuál de las dos mesas le sugieres a Daniel que elija para sentarse? Explica tu razonamiento.

Formas Posibles:

1º Hemos dividido 4 pizzas entre 6 personas y sale 0'67 de pizza pa persona y en la mesa número 2, hemos dividido 6 pizzas entre 8 personas y sale 0'75 de pizza pa persona.

2º Contando a Daniel en la mesa 1 hay 6 personas, como hay 4 pizzas le damos la mitad a cada uno y nos sobra una pizza que la repartimos entre 6.
En la mesa 2, hay 8 personas; cogemos 4 pizzas y repartimos la mitad entre los integrantes. Sobran 2 pizzas que las repartimos entre 8.

3º Buscamos el común denominador en las fracciones: $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{8}$. Multiplicamos los denominadores: $\frac{4}{48}$ $\frac{6}{48}$. Luego multiplicamos los numeradores pa el denominador cruzado y nos da que en la mesa 1 sale $\frac{32}{48}$ y en la mesa 2 sale $\frac{36}{48}$.
Vemos que la proporción es mayor en la mesa 2.

Figura 7.58. Resolución escrita de la Tarea 6 del equipo E11 del G2

En el desarrollo de la Tarea 7 de la cuarta sesión en el G2 (Apartado 6.4.2) describimos que las intervenciones de la investigadora y de la profesora de la asignatura incidieron notablemente en la reflexión sobre la ilusión de linealidad manifestada inicialmente en cinco de los nueve equipos, en consecuencia estas intervenciones suscitaron una mayor comunicación oral de ideas matemáticas entre los equipos, esta afirmación se apoya en el hecho de que se han detectado intercambios productivos en seis de los nueve equipos (Tabla 7.37). Ejemplificamos a continuación cómo la intervención de la profesora incita a los estudiantes a mejorar la comunicación de ideas matemáticas.

C12: pero vamos a ver, estas son…, pones que éstas son uno, cinco y éstas son 1 a 25, y ahora hay que hacer de esto a esto pues 25 entre 5, 5, pues la relación ésta es a cinco más, ¿cómo a 5 al cuadrado?...
A12: 5 cuadrado, 25…
C12: pues entonces área es, área es igual a 1 a 5 cuadrado o a 1, 25,… profesora mira esto estaría ya bien, si esto es 1 a 5 y esto es 1 a 25, el área la razón sería 1 a 5 cuadrado
Prof.: es que ¿qué queréis decir?, no entiendo eso
B12:… esto son centímetros cuadrados y estos son centímetros sin cuadrar
C12: por eso la razón es igual que ésta pero al cuadrado
Profesora: pues vale, ponedlo
C12: ponemos que es lo mismo pero al cuadrado, porque estamos hablando ya de área y de centímetros cuadrados
A12: el área usa la escala, la misma pero multiplicado por… perdón, la misma pero al cuadrado, usa la misma escala pero elevado al cuadrado

Argumentar y Justificar

En nuestro trabajo se ha asumido que una justificación es una razón o conjunto de razones, expresadas verbalmente, gestualmente o por escrito, que se dan en clases de matemáticas para sustentar enunciados con contenido matemático y para promover un grado de adhesión y convencimiento hacia él (Rigo, 2009; Rigo et al., 2011). También compartimos la visión de Krummheuer (1995), Yackel y Cobb (1996) quienes consideran que una argumentación puede ser la explicación intencional del razonamiento de una resolución y que este proceso es un fenómeno social. Sin embargo, consideramos que tal explicación debe obedecer al objetivo de convencer al otro.

Presentamos los hallazgos detectados en cada una de las tareas a excepción de la Tarea 5, debido a que la misma no se resolvió de manera colaborativa y en este trabajo se ha aceptado la argumentación como un fenómeno social que emerge en el proceso de discusión de las tareas matemáticas. Las argumentaciones analizadas en las tareas previas se han tomado de las transcripciones orales de los equipos, de modo que las unidades de registro que se han codificado son los aportes de cada miembro del equipo. En el caso de intentar analizar las argumentaciones aportadas en la resolución individual de la Tarea 5 nos encontramos con que la unidad de registro sería distinta a la definida para el análisis de las transcripciones orales, y el proceso de codificación y categorización exige la homogeneidad en los documentos analizados, motivo por el cual no se realiza ni se presenta un análisis de las justificaciones aportadas en esta tarea.

A continuación describimos las justificaciones que aportaron los estudiantes para maestro en el contexto de la resolución de las tareas matemáticas que se plantearon en la experimentación. Para describir los tipos de justificaciones mostradas por los estudiantes en la resolución colaborativa de las tareas desarrolladas en la experimentación hemos utilizado una adaptación del marco interpretativo propuesto en Rigo (2009), éste se ha descrito con detalle en el apartado 5.2.8.4.

En las Figura 7.59 y 7.60 se muestra la frecuencia con que se mostró cada uno de los tipos de justificaciones en la resolución de las tareas en el G1 y en el G2, respectivamente. Con base en el análisis que presentamos a continuación de las mismas consideramos que la dinámica de trabajo colaborativo promovió la competencia *argumentar-justificar*.

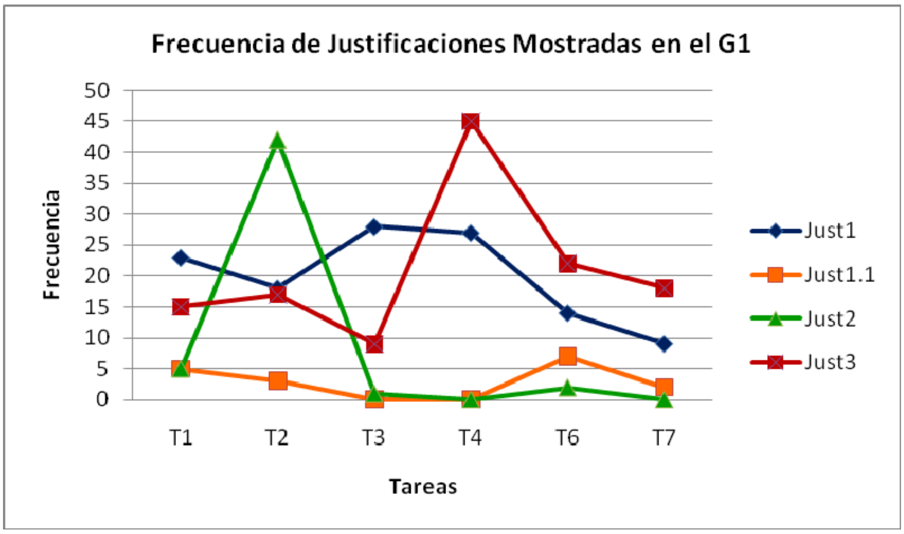


Figura 7.59. Frecuencia de cada tipo de justificaciones aportadas en la resolución colaborativa de las tareas en el G1

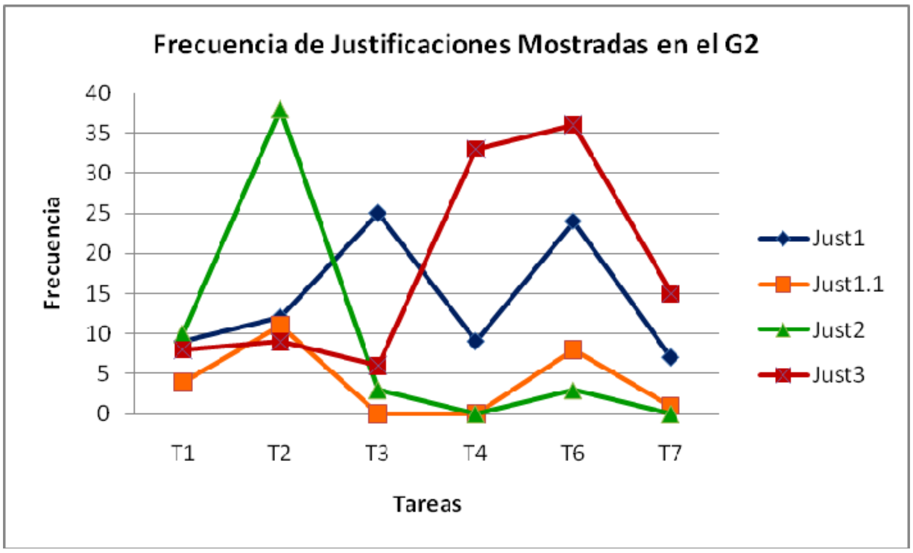


Figura 7.60. Frecuencia de cada tipo de justificaciones aportadas en la resolución colaborativa de las tareas en el G2

En los siguientes apartados describimos cada uno de los tipos de justificaciones consideradas en la investigación. Ejemplificamos con fragmentos extraídos de los intercambios orales dados en la resolución de la cada una de las tareas.

Just.1. Justificaciones basadas en argumentos matemáticos

Tarea 1

En el G1 prevalecieron las justificaciones basadas en razones matemáticas (Just. 1), de las cuales se manifestaron un total de 23. El equipo E13 mostró la mayor cantidad de argumentaciones de este tipo, seguido por el equipo E7 en donde se manifestaron cinco. En el G2 se presentaron un total de nueve argumentaciones basadas en conocimientos matemáticos, siendo el equipo E8 aquel en el que se mostró la mayor frecuencia con cuatro justificaciones.

El tipo de justificaciones manifestadas se caracterizan por ser concretas y centradas en el caso particular sobre el cual se emiten, esto significa que no son razones matemáticas de tipo general como podría ser una definición o teorema relativo a alguna de las nociones en cuestión, fracción, razón o porcentaje. Las mismas se fundamentan en las concepciones que los estudiantes poseen acerca de estas nociones, de modo que los argumentos ofrecidos para convencer a alguno de sus compañeros o emitidos como parte de las exigencias de la tarea y dinámica de clase son parciales e incompletos desde el punto de vista matemático. Por ejemplo, en el G1 el estudiante D9 del equipo E13 presenta su argumento desde su concepción de la razón, en su aportación resalta la diferencia en el uso del lenguaje para referirse a cada noción. Esta es una razón matemática incompleta en tanto el estudiante D9 se fundamenta sólo en un aspecto de la noción, la representación verbal y no en otros elementos que podrían ser más decisivos en la distinción entre la fracción con significado parte-todo, el porcentaje y la razón. Por ejemplo, que esta última considera relaciones del tipo parte-parte o que en la representación fraccionaria admite al cero como consecuente o a números no enteros.

D9: tú no mires esto, vale, esto no está ahí, tú tienes que quedarte con el concepto de lo que, de lo que es la razón que son cuatro partes de seis, serían cuatro partes de seis, tú en vez de ver esto aquí tú fíjate en esto cuatro a seis, vale
C9: ya, ya, ya
D9: tú fíjate que lo que es la razón es cuatro partes, vale, de las seis en total que hay, pero no te está diciendo cuatro sextos, vale, o seis sextos no, te está diciendo cuatro partes de seis partes que hay en total, no lo estás explicando ni en porcentajes ni en fracción, es cuatro de seis, hay seis partes en total y tú tienes que decir cuáles son distintas a las otras, cuales están cultivadas y cuáles no, son cuatro partes de seis las que hay esa es la razón, la relación que hay entre las dos porque unas están cultivadas y otras no y hay que decir la cantidad total que…

Destacamos que también se mostraron argumentaciones plausibles, cuyo fundamento matemático fue suficiente para convencer al otro y provocar un cambio en la posición asumida. Por ejemplo en el equipo E7 del G1, la estudiante A6 propone que el porcentaje de la región cultivada de la Tarea 1(ejercicio b) corresponde al 9% y lo no cultivado es un 91%, este razonamiento lo fundamentó procedimentalmente; ante esta idea la estudiante D6 mostró un argumento matemático en contra de la posición mostrada por A6, este se basa en el hecho de que la suma de las partes es el todo, lo mostramos a continuación.

D6: pero de ahí algo falla, porque no puede ser nueve por ciento… una parte, cuando el cien por cien son nueve, tiene que ser más de diez…

En este tipo de justificaciones y siguiendo a Krummheuer (1995), Yackel y Cobb (1996), incluimos las explicaciones intencionales del razonamiento en la resolución de la tarea. La intencionalidad viene dada por la necesidad de explicar el razonamiento, exigencia que se les ha demandado a los estudiantes como parte de la dinámica de trabajo colaborativo. Ejemplificamos este tipo de explicaciones con un fragmento del equipo E5 del G2.

C5: tenemos que explicar bien ha dicho…
B5: se encuentran dos partes cultivadas… y tres partes sin cultivar
C3: pero no se pondría…
C5: por tanto tenemos…
B5: y ahora expresado dos quintas partes ¿no?... en modo de fracción tenemos dos quintas partes
C5: del terreno cultivado
B5: del total del terreno, no, del total

Tarea 2

En los equipos E1, E2, E3, E5, E6, E7, E10 y E12 del G1 se manifestaron en total 18 justificaciones basadas en razones matemáticas y en los equipos E1, E2, E3, E4, E5 y E8 del G2 se presentaron 12. Los equipos que mostraron cuatro o más argumentaciones de este tipo fueron E1 y E2 del G1 y el equipo E4 del G2. El ejemplo que a continuación se muestra refleja que la estudiante C10 del E4 (G2) defiende la elección de la primera afirmación de la tarea centrándose en el hecho de que la noción de razón describe una relación que contempla a múltiples pares de cantidades, su argumento convence al resto del equipo.

C10: (escribe)…de las dos refrescos… que hay, el número… son cada tres de Bola Cola dos son de Cola Nola, mira esto es lo que he puesto yo mira la primera porque hace una relación de los dos refrescos diciéndonos que haya el número que haya de personas cada tres de Bola Cola dos son de Cola Nola, ese es el resultado, es que eso es concluyente, te da haya las personas que haya siempre va haber esta relación...
A10: siempre va haber más Bola Cola que Cola Nola porque va haber tres de Bola Cola y dos de Cola Nola
C10: claro, por supuesto
B10: vale

Tarea 3

Este tipo de justificaciones ha sido el más frecuente, en ambos grupos. En el G1 se manifestaron 28 argumentaciones y en el G2 se expresaron 25. Algunas de estas justificaciones se expresaron en torno al cálculo del porcentaje del ejercicio (a), las mismas se manifestaron para convencer a otro (s) miembro (s) del equipo, es decir no surgieron como parte de las exigencias del ejercicio. Mostramos un ejemplo procedente del equipo E1 del G1.

F1: mira tú tienes el 6049 que es la cantidad total, es el 100%, ¿sí?
D1: ¿por qué no has cogido la otra cantidad?
F1: porque la otra cantidad es lo que ha aumentado, la otra cantidad es el total, tú tienes que averiguar la diferencia, el 11% esto…, entonces tú coges ahora si esto es el 100% esto es "x", es la regla de tres y ya multiplicas esto por 100 y lo divides entre esto

Destacamos que la mayor parte de estas justificaciones se manifestaron, en ambos grupos, en la resolución del ejercicio (b), en éste debían aportar un argumento explícito a favor o en contra de la opinión de una persona que afirmaba *"El descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) es mayor que el descenso del porcentaje de la emisión en toda la Unión Europea (4%). Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea"*. Estas argumentaciones se fundamentaron en la idea de que el porcentaje de la UE es el promedio de los porcentajes de los países que lo componen y este porcentaje lo que representa es el cambio porcentual en las emisiones de CO_2 en un periodo de tiempo. Hemos considerado que tal argumento se sustenta en conocimiento matemático. No obstante, es una justificación que tiene cabida en un caso particular pues es posible, en términos generales, que las cantidades de emisiones de la UE en 1990 y 1998 correspondan a un promedio de las cantidades de emisiones de CO2 de los países integrantes, el porcentaje de emisiones de la UE no es el promedio de los porcentajes de los países que la componen (Ver Planificación de la Tarea 3). Extraemos el siguiente ejemplo del trabajo del equipo E5 del G1.

C13: eh… no estamos de acuerdo con Luisa… porque se puede dar el caso de que en Alemania se haya disminuido un 16% sin embargo en otros países de la Unión Europea la disminución sea menor o incluso se haya aumentado el porcentaje de CO_2, como lo hacen global… o sea tú imagínate que en España aumenta un 4% en Alemania baja un 16 pues haces la ponderación pues…

Tarea 4

En el G1 se manifestaron 27 argumentaciones basadas en razones matemáticas, éstas se expresaron en 11 de los 15 equipos. En el G2 se presentaron en total 9 argumentos de este tipo, los mismos se hicieron presentes en los equipos E7, E10 y E11. Por ejemplo en el equipo E3 del G1 el estudiante B2 sustenta su aportación en el reconocimiento de la relación escalar entre cantidades homogéneas.

B2: Johny (D9) ha dicho que es la mitad de 50 ¿no?, 25 días es la mitad entonces…
D2: yo hecho 25 por 13…
B2: también es la otra… como 25 días es la mitad de 50 entonces habría la mitad…si en 50 días hay 650 bacterias pues en la mitad de días habría la mitad de bacterias

Tarea 6

Las argumentaciones basadas en conocimientos matemáticos las hemos detectado en los equipos E2, E4, E6, E9, E12, E13 y E14 del G1 y en los equipos del G2 excepto en E1 y

E5. Hemos detectado en estas argumentaciones que se hace alusión al concepto, a la representación o alguna de las propiedades de la razón. Para ejemplificar extraemos el fragmento del equipo E9 del G1.

B11: vamos a ver porque Daniel se debe sentar en la mesa 2 porque la razón es mayor es decir si divides, si divides el número de pizzas entre las personas que se sientan, pues si incluyes a Daniel, sale la razón sale mayor que si divides los de la mesa 1, entonces quedaría… pues si están en la mesa 1 ¿cuánto están?, son 4 pizzas, 5 y con Daniel, entonces serían 4 entre 6…

Una parte importante de este tipo de justificaciones las hemos detectado en la resolución del ejercicio (b) de la Tarea 6. En este ejercicio los estudiantes expresaron argumentaciones operatorias acompañadas de argumentos matemáticos, como la propiedad de equivalencia de razones, que justifican la elección y utilización de las operaciones realizadas. Mostramos un ejemplo procedente del trabajo del equipo E11 del G2.

A13: yo lo que hecho es una especie de gráfico, como sabemos que respectivamente la proporción va ser de 7 a 4 ¿no?, de 7 con respecto a la mesa 2 y de 4 con respecto con la mesa 6, si multiplicamos el número de comensales por el número de mesas vamos a ir viendo la relación ¿no?, 7 por 8 igual 4 por 6 pero de todas maneras eso no nos sale para que la suma de total de comensales nos salga a 240, por lo tanto como sabemos que la relación siempre va ser constante de 7 a 4 pues será la misma relación que de 14 a 8, que de 21 a 12 entonces claro lo que hacemos es si hemos multiplicado antes 7 por 8 y 6 por 4 pues ahora multiplicaremos la siguiente relación 14 por 8 y 8 por 6 y volvemos a sumar a ver si nos da los 240…

Tarea 7

Este tipo de justificaciones se manifestaron en los equipos E1, E3 y E5 del G1 y en los equipos E3, E7 y E10 del G2, con una frecuencia total de nueve y siete argumentaciones respectivamente. Detectamos que los estudiantes justifican los procedimientos aplicados para calcular las medidas de las maquetas basándose en el significado de la escala como una razón, es decir como una relación multiplicativa entre las longitudes, además reconocemos en estas argumentaciones que los estudiantes hacen alusión explícita a un conocimiento matemático sobre el cual sustentan su aportación. Ejemplificamos con el trabajo del equipo E10 del G2, interpretamos que el estudiante B3 expresa que las áreas no son proporcionales debido a que no guardan la misma relación que las longitudes y consideramos que este argumento es suficiente para convencer a sus compañeros.

D3: ah bueno… los lados de la maqueta A y de la maqueta B de la Torre, luego…
B3 y A3: son proporcionales
D3: no eso sí, los lados sí pero el área no…
B3: no es proporcional porque no es 5 veces más

Just.1.1. Justificaciones basadas en argumentos matemáticos no válidos

Tarea 1

En ambos grupos se manifestaron argumentaciones basadas en argumentos matemáticos no válidos, éstas han sido codificadas por *Just1.1*. En el G1 se presentaron cinco en total (E1, E5 y E10), y en el G2 (E8, E7 y E5) se mostraron en total cuatro justificaciones de este tipo. Ejemplificamos con una de las argumentaciones dadas en el equipo E5 del G1, ésta es falsa ya que los estudiantes identifican una parte diferenciada de una unidad con una razón unitaria del tipo (1/100), es decir, identifican la cantidad absoluta y la cantidad porcentual.

C5: nosotros tenemos ochenta por ciento, en total hay 80% sin cultivar y 10% cultivado
C3: el 80 porque…
C5: hay 9
C3: hay 9 y…
B5: era el 80% y el 10%
C5: el terreno total es un 90% y hay 10% cultivado…
B5: y 80% sin cultivar
C3: ¿no tenemos que decir que se compone del 90%?, del cual que el 80 está sin cultivar y el 10 sembrado
B5: eso es lo que ha dicho ella ¿no?
C3: pero ¿si reflejamos eso?
B5: tenemos un 90%...
C5: tenemos un 90% de terreno donde un 10%...
C3: está cultivado…
C5: y 80% está sin cultivar

Tarea 2

En el G1 se manifestaron únicamente tres argumentos matemáticos no válidos, estos se presentaron en los equipos E2, E4 y E10. En el G2 este tipo de justificaciones se evidenció en los equipos E2, E4, E5 y E8, y en total se expresaron once justificaciones basadas en razones no válidas desde el punto de vista de las matemáticas. En ambos grupos encontramos que el origen común de la mayor parte de tales argumentaciones ha sido la concepción relativa a la suma de los elementos de la razón (Concepción CPr3, Apartado 7.2.1.3). En el equipo E4 del G2 el estudiante C10 argumenta la elección de la segunda afirmación de la tarea con base en la idea de que al sumar los elementos de esa razón es posible conocer el total de personas encuestadas, a continuación mostramos el fragmento correspondiente.

C10: mira, mira que yo he puesto en mi pregunta que la (a), pero yo si me refiero a lo que es que me den datos precisos con ésta (se refiere a la (b)) sabemos el total de personas que hay sumándolas, es a lo que me refiero, pero si es así es ésta razón pues esa, la primera, me entiendes, pero si a mí me están pidiendo el total de personas que prefieren una cosa que la otra pues ésta te va estar diciendo claramente cuántos prefieren esto y cuántos prefieren esto, te está dando los resultados, si era eso, si se debe a eso, si se refiere a una encuesta pues lo más adecuado es poner eso, está claro…

Tarea 3 y Tarea 4

No detectamos este tipo de justificaciones en las producciones orales de los equipos de los dos grupos en las tareas 3 y 4.

Tarea 6

En los equipos E13 y E2 del G1 se expresaron en total siete argumentos de este tipo, y en el G2 se presentaron en los equipos E4, E5, E7 y E10, en este último grupo se manifestaron ocho en total. La mayor parte de estos argumentos se fundamentan en la aplicación del razonamiento aditivo para comparar las cantidades de pizzas y personas en cada mesa. Ejemplificamos con un fragmento del trabajo del equipo E13 del G1.

A9: la historia es esa, la historia es que yo de entrada le he dicho claro 4 a 6, esto es de 4 a 5, en principio es de 4 a 5 ó 6 a 7 pero como viene Daniel pasa a ser 4 a 6 y 6 a 8, y dije esto es parejo da igual que se siente pero sin haber hecho la división, ¿me entiendes?, digo claro se llevan 2, 4 a 6, 6 a 8, dos digo da igual que se siente…

Tarea 7

En el equipo E12 del G1 y en el E7 del G2 se mostraron argumentos basados en razones no válidas, estas se fundamentan en la idea de que el área de ambas maquetas aumenta de manera proporcional a las longitudes de las mismas, es decir se basan en la ilusión de la linealidad. Mostramos el fragmento del equipo E12 del G1.

B14: podemos hallar el área de la primera figura… ¿no?, podemos hallar el área, ya está… pues se queda en el aire, sabiendo el largo y ancho podemos saber que el área de la segunda figura crecerá de manera proporcional y directa en relación a la primera figura y sabiendo que la escala es 1, 5…, parece conjetura ¿o no?

Just2. Justificaciones basadas en fuentes extra-racionales

Tarea 1

Tanto en el G1 como en el G2 se presentaron argumentaciones “basadas en motivos” (Rigo, 2009; Rigo et al., 2011). En el G1 se mostraron en los equipos E2, E7 y E13, y en total se presentaron cinco justificaciones de este tipo. En el G2 se manifestaron en cinco de los equipos (E3, E4, E5, E6 y E8) y en total se expresaron diez argumentaciones de esta clase. A modo de ejemplo mostramos cómo la estudiante D6 del equipo E7 del G1 se basa en “la exactitud” de su resolución, utiliza este argumento para convencer al resto del equipo. Según Rigo (2009) este tipo de intervenciones o razones prácticas obedecen a una sub cultura que es promovida en distintas dimensiones del currículo escolar en la cual ideas como “la respuesta exacta” es comúnmente aceptada y utilizada para promover convencimiento.

D6: yo lo he puesto más exacto, he puesto el cien por cien son nueve entonces el uno por ciento que es el que esta cultivado bueno eh… la parte que está cultivada saldría el once coma once por ciento y sin cultivar estaría el ochenta y ocho coma ochenta y nueve por ciento, siendo más exacto…

Reconocemos que en el G2 algunas de las argumentaciones mostradas se sustentaron en la autoridad de la docente quien en otra sesión de clase expuso algunos ejemplos para ilustrar la noción de razón. Esa experiencia aportó a los estudiantes seguridad para expresar el razonamiento y fue utilizado para convencer a los demás compañeros de equipo. Mostramos un ejemplo procedente del trabajo del equipo E3 del G2.

C12: pues vamos hacerle caso a nuestro ídolo Antonio (A12), pero explícanoslo, que aquí hay que entenderlo
A12: vamo a ver, ¿no te acuerdas que la profesora puso el ejemplo de los pasos de cebra?
C12: sí
A12: que si no sé cuántos de cada no sé cuántos accidentes son producidos por los peatones…
C12: es verdad
B12: sí
A12: por eso me acordé
B12: pues venga entonces te creemos
C12: pues entonces sería…
A12: cuatro de cada seis trozos de cultivo, regiones de campo…

Otras argumentaciones de este tipo manifestadas en el G2 se fundamentaron en otras situaciones del entorno en las cuales los estudiantes reconocen algún tipo de analogía con la noción de razón o porcentaje. Ejemplificamos con un fragmento del trabajo del equipo E6.

C9: es cuatro de seis… entonces ¿qué opináis?
A9: es que a ver, de todas formas cuando dice que es razón es relacionar una cantidad con otra no lo entiendo del todo bien, pero es como las apuestas…

Tarea 2

En ambos grupos se evidenció un predominio de justificaciones basadas en fuentes extra-racionales, así en el G1 se mostraron un total de 42 argumentaciones y en el G2 se presentaron 38, éstas se manifestaron en todos los equipos. Ante las tres primeras cuestiones de la tarea, mismas que requerían de la exposición explícita de una justificación, observamos que los estudiantes se apoyaron en situaciones familiares o experiencias previas para decidir si las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta o para valorar la eficacia de éstas en la expresión de los resultados de la encuesta. En los apartados "Aplicación de la razón en una situación cotidiana" y "Aplicaciones de las propiedades de la razón" (Apartados 7.2.1.2 y 7.2.1.4) hemos descrito detalladamente las justificaciones expresadas en los equipos cuando éstos resolvieron las primeras tres cuestiones de la tarea. En síntesis, las argumentaciones mostradas se basan en la habituación y en razones prácticas (Rigo, 2009). Ejemplificamos este tipo de argumentaciones con un fragmento del trabajo del equipo E6 del G1, éste refleja cómo los estudiantes hacen referencia a la forma habitual en la que los anuncios publicitarios ofrecen un producto, en sus aportes no se distingue ningún argumento matemático a favor o en contra de las afirmaciones de la encuesta.

C4: tú cuando ves publicidad en ningún momento te pone superamos en… cinco mil productos a los otros
B4: sí, yo sí escuchado más de no sé cuantos miles de personas han elegido la cuenta no sé qué…
A4: sí, la cuenta…
C4: sí, la cuenta, la cuenta, pero lo de… yo siempre he visto tres de cada… cuatro personas eligen Ausonia en vez de…

Tarea 3

En ambos grupos se manifestaron pocas argumentaciones basadas en fuentes extra-racionales, pues en el G1 solo se mostró una y en el G2 se presentaron tres. Estas justificaciones no obedecen a una lógica racional, ni giran en torno a un objeto matemático, sino que se manifiestan con el objetivo de promover convencimiento en los otros y de conseguir cierto bienestar (en este caso cumplir con la resolución de la tarea). Mostramos a modo de ejemplo un argumento de este tipo expuesto en el equipo E1 del G2.

D1: no estamos de acuerdo y ponemos porque por un lado está representado ¿no? (A1: Alemania) por una parte está representada Alemania, por una parte… por una parte está representada Alemania… porque es una parte, porque es una parte importante, ponemos porque… porque es un porcentaje importante ¿no?...

Tarea 4

No detectamos este tipo de justificaciones en las producciones orales de los equipos de los dos grupos.

Tarea 6

En los equipos E2 y E14 del G1 y en el equipo E7 del G2 se manifestaron algunos razonamientos basados en fuentes extra-racionales. Por ejemplo en el equipo E7 del G2 se expresó un argumento por autoridad (Rigo, 2009); en éste reconocemos que el estudiante C7 sostiene su resolución tomando como respaldo a la docente-investigadora en lugar de proponer un argumento matemático.

C7: yo es que como ella ha dicho, como antes que iba primero el más grande luego el pequeño pues lo hecho al revés…

Just3. Justificaciones basadas en las operaciones y los algoritmos

Tarea 1

En la mayor parte de los equipos del G1 (E1, E2, E3, E4, E6, E7, E8, E11, E12 y E13) y en la mitad de los equipos del G2 (E1, E2, E3 y E8) se manifestaron justificaciones basadas en alguna operación o procedimiento conocido, los estudiantes argumentan la validez de su aporte basándose en la confianza que se le concede a este tipo de conocimientos procedimentales. En el G1 se mostró un total de quince argumentaciones de esta clase, siendo el segundo tipo más frecuente en este grupo, y en el G2 se presentaron ocho. Ejemplificamos con el trabajo del equipo E8 del G1.

C7: y ahora ¿qué?, ... en el ejercicio (b) tenemos un noveno, si nueve novenos es el cien por cien un noveno será "x", por tanto multiplicamos cien por uno y partido nueve y como resultado nos da que tenemos un once coma uno por ciento del total, del… de la región cultivada, ¿qué piensas?
B7: yo pienso lo mismo pero en vez de regla de tres yo lo que hecho un noveno de cien y he multiplicado lo mismo, uno por cien partido por nueve y me ha dado el mismo resultado y ya está…
A7: yo también

Tarea 2

Este tipo de justificaciones se presentó en los equipos E3, E4, E5, E7, E8, E9 y E12 del G1, y en los equipos E1, E2, E3, E5 y E8 del G2. Con una frecuencia de 17 y 14 argumentaciones, respectivamente en el G1 y en el G2. Las mismas se mostraron, en la mayor parte de los equipos, durante el tratamiento de la primera cuestión de la tarea, cuyo tratamiento requería de la aplicación de la equivalencia de razones y del concepto de razón como relación multiplicativa; sin embargo la evocación de tales conocimientos se sustituyó en algunos equipos por argumentos basados en las operaciones que relacionan las cantidades de las afirmaciones. Ejemplificamos tales argumentaciones con el trabajo del equipo E3 del G1, el mismo ilustra cómo el estudiante C2 se basa en las operaciones para justificar que las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta.

D2: ¿por qué?
C2: porque he realizado yo las operaciones hace un rato…
D2: sí, pero, ¿por qué?
C2: porque esto menos esto da esto, esto dividido entre tres da esto y esto dividido entre dos da esto, ¿qué te parece eh…

Tarea 3

En el G1 se expusieron nueve argumentaciones de este tipo, las mismas se mostraron en todos los equipos, excepto en el equipo E7. En todos los equipos del G2, excepto en el equipo E5, se evidenciaron justificaciones basadas en la confianza que se le concede a ciertos conocimientos procedimentales como lo es la regla de tres para justificar cómo se obtiene un porcentaje, esta ha sido la demanda del ejercicio (a) e indicamos que todas las justificaciones de este tipo se han expresado en la resolución del mismo. Presentamos un ejemplo del trabajo del equipo E3 del G1.

A9: a ver, a ver, explícalo bien, has hecho la regla de tres, ¿pero a qué se lo has aplicado?... porque yo no lo veo
B2: mira lo que hecho es al máximo le resto el mínimo.... el mínimo es 100%, el mínimo los 6049 es el 100%, pues tienes que ver cuánto aumentado de ese 100%, así 6049 es el 100%, seiscientos… la diferencia que hay es "x"

Tarea 4

Las argumentaciones operatorias (Rigo, 2009) han sido las más frecuentes en ambos grupos. En el G1 se manifestaron 45 y en el G2 se expresaron 33. Se hicieron presentes en todos los equipos menos en el E6 del G1. Cuando los estudiantes afrontaron la explicación relativa a las relaciones detectadas entre las cantidades (ejercicio a) hemos observado que la mayoría sustentó las mismas en las operaciones realizadas, y en la búsqueda de valores de una cuarta proporcional (ejercicios b y c), sustentaron su razonamiento en la fórmula que relaciona ambas magnitudes. Mostramos un ejemplo del equipo E4 del G1.

A10: yo lo hecho también así basándome en una fórmula que es el número de bacterias dividido entre el número de tiempo siempre da 13...
C11: claro, entonces por eso si divides 650 entre 13 te da el número de días que sería el divisor de la división…
A10: ¡claro!

Tarea 6

Este tipo de justificaciones ha sido la más frecuente en ambos grupos, en el G1 encontramos un total de 22 argumentaciones y en el G2 detectamos 36, en este último se manifestaron en todos los equipos y en el G1 se expresaron en todos los equipos menos en el E13. Consideramos que la diferencia entre las cantidades de argumentaciones de este tipo mostradas en los dos grupos podría explicarse en la decisión tomada en el rediseño de la planificación de la cuarta sesión para el G2 debido a que en este grupo se pidió a los estudiantes que resolvieran la Tarea 6 de varias maneras y que explicaran el razonamiento seguido en cada caso. Mostramos un fragmento del trabajo del equipo E10 del G2.

A3: yo hecho lo siguiente, yo he repartido, como son 6, he repartido pizzas enteras, entonces por cada dos he puesto una pizza entera, son 3 pizzas, entonces han tocado a media pizza cada uno y luego la siguiente pizza la he repartido entre los 6, o sea le ha tocado a cada uno más o menos igual, un trocito (B3: 6 trozos), sí de 6 trozos, exacto, aquí comen media y un trocito, media y un sexto de pizza
B3: media más un sexto
A3: y aquí tocan a más, tocan, porque hecho lo mismo, tienen 1, 2, 3, 4… tienen 2 pizzas para repartir, tocan a un poco más, así lo hecho…

Tarea 7

En diez equipos del G1 (E1, E3, E4, E5, E6, E9, E12, E14, E16 y 20) y en seis equipos del G2 (E1, E2, E3, E4, E5 y E10) se manifestaron argumentaciones basadas en las operaciones o en las fórmulas de cálculo de perímetro, área o volumen. En el equipo E3 del G1 el estudiante explica al resto del equipo dos maneras de calcular el área de la maqueta B, mostramos el fragmento que lo ejemplifica.

B2: y obtenemos el perímetro, es otra forma hacerlo y de comprobar que efectivamente son 200 centímetros, después el área también hay dos formas de hacerlo, como es multiplicar el largo por el ancho o bien multiplicando 5 al cuadrado por 75 centímetros, 5 al cuadrado porque la escala es 1 partido cinco entonces multiplicaríamos 75 por la misma escala pero al cuadrado.

7.10.3 Fortalezas y Debilidades de la Dinámica de Trabajo Colaborativo

Una de las fases de la metodología de trabajo en el aula ha sido la fase colaborativa, momento durante el cual los estudiantes reunidos en equipos debían de reconstruir la resolución de la tarea tomando en consideración los aportes individuales.

Fortalezas

En la 1ª sesión el trabajo inició con una fase individual en la que los estudiantes reflexionaron sobre la resolución de la tarea y sobre sus conocimientos, este primer momento fue un recurso primordial para el trabajo colaborativo, momento en el cual los estudiantes retomaron lo hecho anteriormente y lo compartieron con el resto de compañeros, fuera su aporte adecuado o inadecuado. Consideramos, por lo tanto, que el desarrollo de la fase individual fue positivo para el posterior despliegue de ideas durante la fase colaborativa.

Durante la 2ª fase observamos cómo algunos equipos siguen mejor que otros las directrices dadas por la investigadora quien les insta a elaborar la "*mejor solución posible*" a partir de las contribuciones de todos los miembros del equipo. Consideramos que los equipos que manifestaron una buena dinámica de la fase colaborativa fueron aquellos en los que participan o toman en cuenta a todos los miembros. Además la variedad de ideas, soluciones o aproximaciones matemáticas enriquece la dinámica de trabajo de un equipo. Si todos los aportes son correctos los estudiantes tienen la oportunidad de ver otras formas de abordar la tarea y si algunos aportes no son correctos también tienen la oportunidad de contribuir en la comprensión matemática de otros (Hitt, 2007). Las investigaciones realizadas por Dubinsky, Hagelgans, Reynolds, Schwingendorf, Shahin, Vidakovic y Wimbish (1995)[89], ponen de manifiesto que la participación en un grupo colaborativo ayuda a fomentar, en los estudiantes, el pensamiento reflexivo sobre sus métodos de resolución de problemas. También, contribuye a que el alumnado se haga menos dependiente del profesor, llegando a tener una mejor voluntad para explorar problemas, particularmente para examinar problemas nuevos y no rutinarios e intentar explicar las ideas a sus compañeros.

Otro elemento que marca la buena dinámica de trabajo colaborativo de un equipo sobre otro es que evidencie que el intercambio de opiniones matemáticas dadas permite que se desvanecieran ideas erróneas manejadas por algunos miembros del equipo. En este sentido, los investigadores indicados anteriormente aseveran que la interacción social ofrece oportunidades para advertir que otros pueden llegar a diferentes conclusiones. Estas diferencias pueden ocasionar conflictos entre los individuos del grupo. Dichas contradicciones sirven para contextualizar las diferencias cognitivas y conducir a la coordinación que puede resolver el conflicto.

[89] Citados en Páez (2004)

En síntesis como fortaleza indicamos que la dinámica de trabajo ofrece la posibilidad de que se generen *intercambios productivos* entre los estudiantes. Para el análisis de las sesiones hemos caracterizado tales intercambios como aquellos en los cuales:

- dos o más integrantes intervienen para elaborar una respuesta,
- algún miembro corrige una idea errónea o inadecuada aportada por otro compañero,
- se evidencian distintos puntos de vista en relación con la resolución de algún ejercicio.

En el grupo G1 observamos que al tratar la noción de razón, los equipos E2, E5, E7 y E13 mostraron mayor variedad de acercamientos. Respecto al porcentaje observamos que en los equipos E5, E7, E8 y E13 surgieron distintas posiciones que motivaron el intercambio entre los miembros y únicamente los equipos E2, E7 y E13 evidenciaron distintas relaciones entre la razón, el porcentaje y la fracción.

Observamos que en los equipos E7 y E13 surgieron algunas ideas incorrectas que fueron refutadas por otros compañeros, esto permitió que quien se equivocara o desconociera el tema, rectificara su posicionamiento. Presentamos un fragmento de la conversación del equipo E7, observamos que el estudiante A6 plantea que lo cultivado es un 9% y lo no cultivado un 91%, pero D6 cuestiona su idea y a partir de esto A6 llega a ver que ha cometido un error en la división.

A6: cero coma cero nueve o sea un nueve por ciento, un nueve por ciento cultivado y un noventa y uno por ciento sin cultivar
D6: a mí no me sale eso… un qué, un nueve por…
A6: un noveno… he multiplicado cien por uno y lo he dividido por nueve…
D6: pero… una parte tiene que ser más
B6: pero tiene que salir igual, ¿no?
A6: …he hecho un noveno de cien por cien…, y esto es igual a cien por uno partido de nueve, esto igual a cero coma cero nueve que es un nueve por ciento
D6: pero de ahí algo falla, porque no puede ser nueve por ciento una parte, cuando el cien por cien son nueve, tiene que ser más de diez…
F6: sería un noventa y uno por ciento… ¿no?
D6: no, es menos, porque una parte cultivada no puede ser nueve por ciento, tiene que ser más de diez por ciento
F6: ah ¡claro!, es verdad

Un aspecto positivo de la dinámica fue que la investigadora impulsó a los estudiantes en la búsqueda de explicaciones o argumentos que respaldaran de alguna forma el trabajo realizado. En tres de los equipos, alguno de los miembros recordó a sus compañeros que debían explicar lo que habían hecho.

Equipo E2
B21: pero tienes que explicar cómo has sacado eso ¿no?
Equipo E3
D2: pero hay que explicarle por qué esto, ¿no?
Luego
D2: ¿has explicado lo de la razón?, ¿o no?
Equipo E6

B4: el concepto de fracción se representaría como numerador dos, la zona cultivada y denominador cinco las zonas totales
C4: pero sería, o sea la explicación sería que ponemos arriba el dos porque son las partes cultivadas y ponemos abajo el cinco porque son las partes cultivadas y no cultivadas del campo
Luego en el mismo equipo
C4: bueno venga, la explicación de esto sería… que como solamente una de las nueve partes está cultivada, para pasarla a porcentaje multiplicamos por cien

En el grupo G2 observamos que los equipos E2, E3, E4, E6 y E8 mostraron dos acercamientos distintos en relación con la noción de razón. En relación con el porcentaje únicamente el equipo E8 mostró dos aproximaciones procedimentales para calcularlo. En relación con las relaciones entre las tres nociones (fracción, razón y porcentaje) observamos que sólo en el equipo E4 se presentan dos acercamientos. Las situaciones y equipos nombrados representan momentos en los cuales la dinámica de trabajo colaborativo fue efectiva, dado que uno de los objetivos que se persigue con este tipo de trabajo es el intercambio de ideas entre los miembros del equipo.

Por ejemplo en el equipo E7 observamos cómo los estudiantes se dan cuenta de otras formas de abordar la tarea:

C7: por lo tanto serían dos quintos ¿no?
A7: (escribe) por lo… ah yo eso no lo puse
D7: yo tampoco lo he puesto eso… he puesto de cinco partes del campo dos…
A7: sí yo también… ¿no?, utilizamos la fracción, (escribe) por lo tanto sería dos quintos, ¿no?

Presentamos un fragmento del trabajo del equipo E1 con el cual ejemplificamos cómo esta dinámica favorece intercambios en los cuales los estudiantes se explican o ayudan entre sí a dilucidar alguna idea poco comprendida.

D1: ah…. pero es que aquí no hay diez partes, es lo que a mí me lía
A1: por eso, hay nueve, entonces por eso no es el diez por ciento, es el once coma once
D1: ah, vale, vale, vale…

En el trabajo colaborativo desarrollado durante la resolución de la Tarea 2, destacamos que en cuatro de los ocho equipos del G2 (E2, E3, E4 y E7) y en seis de los doce equipos del G1 (E1, E2, E3, E6, E7 y E10), se manifestaron intercambios productivos entre sus miembros, los cuales son evidencias de las fortalezas de esta dinámica de trabajo. Como ejemplo mostramos un fragmento del trabajo del equipo E4 (G2) en el que se evidencia el papel que juega uno de los integrantes ayudando a que otra compañera comprenda las ideas expuestas por él.

A12: tienen la misma relación porque aquí te sobra 1 y aquí también es como si te sobrara 1 porque, porque… por la división ésta
C12: no lo entiendo de que te sobra 1
A12: vamo a ver, aquí la relación es 3 a 2 ¿no?, y aquí también es 3 es a 2 ¿no?...
C12: sí
A12: pues entonces por ejemplo una unidad…
C12: que cada uno vale 5713
A12: ¡sí claro!

En la 2ª sesión identificamos igualmente la presencia de intercambios productivos entre los estudiantes. En el G1 observamos que en cuatro de los cinco equipos (E1, E3, E5 y E7) se dieron intercambios productivos, siendo el equipo E1 el que mostró mayor frecuencia de tales interacciones. Mostramos un extracto del trabajo dado en el mismo, se evidencia el intercambio de ideas sobre lo que significa el 100% en la situación.

B1: pero ¿el otro es el total de qué?, ¿y esto por qué no es el total?, porque si son dos años distintos…
D1: tienes que averiguar el total de los dos
F1: tú tienes el 100%...
B1: ay sí Ángel pero me refiero…
F1: y tienes que saber cuánto ha subido con respecto a ese tiempo, y lo que ha subido es el 11%, es lo que es 678, si tú coges la otra cantidad no ha subido nada
B1 y D1: ah vale…

En el G2 detectamos que en cuatro de los seis equipos (E1, E2, E3 y E9) se mostró al menos un intercambio productivo entre sus miembros. Siendo el equipo E9 en el que se manifestaron con mayor frecuencia. Ejemplificamos los intercambios dados en el G2 con un fragmento del trabajo del equipo E9, en este participan tres de los miembros y se evidencia cómo abordan el cálculo del porcentaje mediante distintas técnicas, establecen paralelismos entre éstas y emiten juicios de valoración sobre las mismas.

A9: eh… yo lo que hice fue dividir la cantidad de 1990 con la cantidad de 1998 y multiplicarlo por cien, y si es así tomo como referencia el 90 que es la cantidad menor, me saldría un 111% y el aumento sería del 11% en relación con el 100, es decir en el 98 ha aumentado un 11% en relación con el 100 de 1990, también se puede hacer al revés y te daría el 89% o sea porque tomas la referencia la medida mayor del 98, te sale el 89% y se lo restas al 100%, y da el 11% también
B6: eso es más lioso
A9: bueno yo hice las dos maneras
B6: también se puede hacer con una regla de tres
D9: así lo hecho yo
A9: de todas formas lo estoy resolviendo como si fuera una regla de tres también
B6: claro pero la regla de tres es menos lioso porque si tú coges esto que es el 100% el de 1990 ¿no?, el otro es "x", entonces tú lo que haces es multiplicar eh… 6049 por 100 y lo divides entre…, lo de 1998 por cien y lo divides entre lo de 1990 y te sale el 111%
A9: es lo mismo, es lo mismo
B6: es lo mismo pero no es tan lioso, es más fácil

Otra fortaleza de la dinámica de trabajo se refiere a que ésta demanda la explicación de las respuestas, en todo caso los estudiantes tienen que ofrecer argumentos que fundamenten las resoluciones hechas. Consideramos que tal exigencia promueve en los estudiantes el desarrollo de competencias genéricas (trabajo en equipo) y matemáticas (comunicación, argumentación).

En tres de los cinco equipos del G1 (E1, E3 y E7) y en dos de los seis equipos del G2 (E4 y E5), se manifestaron cuestionamientos relacionados con las respuestas aportadas. Por ejemplo mostramos un segmento del trabajo del equipo E5 del G2.

C5: da una explicación razonada…
C3: razonada, yo creo que es lo de la media, ¿no?

Una de las fortalezas de la dinámica de trabajo que hemos venido documentando en los análisis de las sesiones previas y que hemos observado igualmente en la 3ª aplicación del diseño ha sido el compromiso que han mostrado algunos estudiantes por ofrecer justificaciones o razonamientos que fundamenten las respuestas dadas. Destacamos que con este aspecto no nos referimos a los tipos de argumentos o de justificaciones, ni a su validez sino a la práctica que les insta a explicar lo que se hace. En ocho de los quince equipos del G1 (E1, E2, E3, E5, E7, E14, E15 y E17) y en cuatro de los siete equipos del G2 (E1, E2, E3 y E10) los estudiantes manifestaron que debían de explicar el por qué de su trabajo. Mostramos como ejemplo un fragmento del trabajo del equipo E14 del G1:

D6: qué ponemos en el (b1)…
C6: ¿cómo?, que ¿qué ponemos?
D6: sí, porque hay que poner el razonamiento
C6: ah… porque, nada, como la razón entre el tiempo y el número de bacterias es 13 pues que para calcular el número de días hay que dividir y al contrario en el siguiente ejercicio para calcular el número de días hay que multiplicar por 13…, y ya está

Durante la 3ª sesión hemos detectado que en todos los equipos de ambos grupos, excepto en el E18 del G1, los estudiantes se vieron implicados en algún tipo de intercambio productivo. En el G1 los equipos E3, E7, E12 y E15 mostraron como mínimo tres intercambios de este tipo. En el G2 fueron más frecuentes, los equipos E10 y E11 con cuatro, el equipo E1 presentó cinco, los equipos E3 y E7 con siete y nueve intercambios respectivamente. Mostramos un fragmento de la producción oral del equipo E10 del G2:

D3: venga vamos a seguir (lee el enunciado) Intenta utilizar estrategias o técnicas diferentes a la "regla de tres" para averiguar el número de días que han transcurrido hasta el número de bacterias sea de 650…. En diez días 130 bacterias, ¿no?, en 15 días…
C3: pero estáis haciendo la regla de tres
D3: no estoy haciendo la suma, te explico
C3: a ver, ¿cómo sería?
D3: así en 10 días 130 bacterias, en 20 días pero lo voy sumando…

Considerando la información procedente de la 4ª sesión indicamos que, en relación con la resolución de la Tarea 6, hemos detectado que en la mayor parte de los equipos del G1, excepto en tres de ellos (E9, E16 y E20), y en todos los equipos del G2, los estudiantes participaron en algún tipo de intercambio productivo de ideas. En relación con la resolución de la Tarea 7 se evidencia la baja frecuencia con que se dieron este tipo de intercambios en el G1. Por su lado en el G2, se presentaron intercambios productivos en todos los equipos debido a las intervenciones de la profesora colaboradora y de la investigadora quienes guiaron a los estudiantes en beneficio de la expresión de la conjetura objeto de la Tarea 7.

En la Tabla 7.37 mostramos la frecuencia con que se presentaron los intercambios productivos en los equipos de ambos grupos, en la resolución de las tareas 6 y 7.

Tabla 7.37. *Frecuencia de intercambios productivos en las Tareas 6 y 7.*

	Tarea 6				
	1	2	3	4	Más de 4
G1	E4, E11, E12, E13, E15, E19.	E3, E5, E17	E2, E6		E14
G2		E2, E4, E12	E1, E5	E3, E11	E7, E10
	Tarea 7				
	1	2	3	4	Más de 4
G1	E1, E5, E14				
G2	E2, E5	E3	E7	E10	E1

Como se observa en la tabla, en el trabajo colaborativo de los equipos del G1 no se manifestó más de un intercambio productivo, mismo que tuvo lugar sólo en tres de los equipos. En el G2 se presentó en la mayoría de los equipos y con mayor frecuencia, creemos que esta situación se debe a que la investigadora y la profesora de la asignatura intervinieron durante el trabajo colaborativo con el afán de estimular la búsqueda de relaciones y de conducir los intentos de los estudiantes al elaborar la conjetura. Aunque no es nuestro objetivo establecer comparaciones entre los grupos creemos conveniente señalar que la decisión de cambiar pautas de trabajo y de intervenir con mayor fuerza en el G2 se debe a la experiencia vivida con el G1.

Mostramos a modo de ejemplo uno de los intercambios dados en el equipo E14 del G1, durante la resolución de la Tarea 6. En este fragmento se refleja que el estudiante D6 da una respuesta errónea, misma que es detectada por su compañero C6, quien le expresa a qué se debe el supuesto error.

A14: y aquí en la mesa 2 he puesto 6 pizzas entre… en vez de 7 personas pues si le sumaba Dani 8 personas, hecho la división y aquí me ha salido cero con seis…
C6: periodo
A14: periodo, y aquí cero setenta y cinco
C6: a mí también, entonces se quedaría en la mesa 2 porque…
D6: a mí me ha salido en la mesa 1...
C6: es que son… tienes que dividir las pizzas entre las personas

Mostramos otro ejemplo de interacción productiva en la que se muestra el papel de los miembros del equipo explicando el trabajo realizado a sus compañeros y de cómo este intercambio les permite darse cuenta de que algo no va bien pues haciendo procedimientos distintos deberían obtener la misma respuesta. El ejemplo procede del trabajo del equipo E5 del G2, en la Tarea 7.

B6: pero es que esto no me cuadra así
A6: pero es que hay que multiplicarlo todo por 5 y esto por… 6 por 5, 30, ¿es que cómo lo has hecho antes?
B6: porque yo he calculado el área, como toda la vida, haciéndolo con la fórmula…
A6: claro ¿pero has puesto el área de este aquí?

B6: no, el área de haber calculado esto por esto
A6: ah…

<u>*Debilidades*</u>

En el trabajo desarrollado en la 1ª sesión en ambos grupos (G1 y G2) observamos durante la 1ª fase el impulso de los estudiantes de comentar entre ellos el trabajo individual antes de pasar a la 2ª fase del trabajo en equipo. No obstante, este aspecto mejoró al trabajar en la 2ª tarea.

En la planificación de la sesión se había considerado que la constitución de los equipos sería la misma que en las prácticas de la asignatura, no obstante en la mayoría de los equipos algunos de los miembros no estaban presentes, por lo cual fue necesario permitir otros agrupamientos.

Las grabaciones de los trabajos en equipo evidencian que en la mayoría de subgrupos se dio un intercambio de aportaciones de todos los integrantes aunque en algunos equipos como E10 del G1 la conversación constituyó un monólogo, esto a pesar de eran seis integrantes, el estudiante A12 asumió la descripción completa de la resolución de la tarea, el resto de los compañeros simplemente asintió respecto a lo que él dijo, sólo al finalizar se escucha el aporte del compañero B12, o sea este equipo no siguió la dinámica de trabajo colaborativo.

Otro caso de una dinámica inadecuada se presentó en el equipo E4 (del G1), en la grabación se observa que las estudiantes no trataron de construir la "mejor solución posible" a partir de las ideas de todas, dos de ellas leyeron las respuestas a los dos primeros ejercicios, únicamente al llegar al ejercicio (c) de la razón surge por parte del estudiante A10 una inferencia sobre la relación entre las cantidades, idea que B10 aprueba y repite.

La cantidad de estudiantes presentes (48 en el G1 y 27 en el G2), no fue un obstáculo para llevar a cabo el trabajo colaborativo, sin embargo consideramos que para optimizar la dinámica es preciso pedirles para las próximas sesiones que se agrupen en equipos de 4 estudiantes máximo.

En la planificación de la sesión se había estimado el tiempo que se dedicaría a cada una de las fases del trabajo. Sin embargo, aunque para la puesta en común de la Tarea 1se había previsto unos 15 minutos, ésta tomó más de 25 minutos. Por esta razón no se pudieron desarrollar otras ideas que la investigadora había preparado, entre las cuales destacamos la relación que existe entre la fracción, el porcentaje y la razón, qué tienen en común y en qué se diferencian tales nociones, cuál de éstas es más utilizada en ciertas situaciones del contexto, finalmente tampoco logró reflexionar sobre las relaciones procedimentales que hay entre las fracciones, porcentajes, notación decimal y razón.

Señalamos como debilidad el que la investigadora no tuvo tiempo de comentar algunas ideas que se habían planificado para la puesta en común de la Tarea 2, tales como: otras maneras de comparar los resultados de popularidad de los refrescos, distinguir entre comparaciones aditivas y multiplicativas y no poder referirse a otras situaciones cotidianas en las que se aplica la noción de razón.

A partir de la observación de cuestiones referentes a la dinámica de trabajo han surgido algunas preguntas que intentaremos considerar al realizar el análisis de las producciones individuales de algunos estudiantes.

- ¿qué elementos de la puesta en común han sido retomados por los estudiantes en la posterior resolución individual de la tarea?
- ¿se han modificado los conocimientos matemáticos mostrados individualmente en el trabajo posterior fuera de clase?

Respondemos estas cuestiones en el *Estudio de Casos* (Capítulo 8).

Entre las debilidades detectadas en el trabajo realizado en la 2ª sesión señalamos que podría haberse dado intercambios en los que todos los miembros del equipo manejaron una idea errónea. Esta debilidad podría estar relacionada con la conformación de los equipos. No obstante, desde la concepción del experimento se ha seguido el criterio de respetar los equipos ya existentes, con el objetivo de no alterar las condiciones dentro de las que se desarrollaba la asignatura. Las hemos detectado únicamente en dos equipos del G2.

Detectamos que en el equipo E4 del G2, una de las estudiantes limitó en distintas ocasiones las opiniones de sus compañeros de equipo, su papel dominante se llegó a imponer en el trabajo colaborativo.

B10: ponle la otra forma pa que…
C10: da igual si te pide por porcentajes, no pongas de más que te pueden suspender por poner de más…

En el equipo E1 del G2, se evidencia que en ocasiones los miembros del equipo presentan dificultades que no se llegan a mejorar dado que los otros miembros expresan que tampoco poseen suficientes conocimientos para tratarlas.

D1: es que…esto de la matemática…es que no entiendo esto, es de lógica…
C1: ni idea…

En el trabajo desarrollado en la 3ª sesión hemos observado que en el equipo E7 del G1 y en el E7 del G2 se han manifestado algunas actuaciones que podríamos valorar como debilidades de la dinámica. En ambos casos ante la propuesta de uno de los miembros del equipo, el resto de sus compañeros ignora lo dicho de modo que no prestan mayor atención a la idea planteada. No obstante, esta debilidad podría deberse a una variable que no hemos controlado la cual ha sido la conformación de los equipos de trabajo, en los cuales entran en juego diferencias cognitivas, psicológicas o de personalidad que influyen en la forma en que se desarrolla la interacción entre los miembros del equipo. Como ejemplo mostramos lo sucedido en el equipo E7 del G2:

B7: entonces, "2A" es igual a cero con uno, cero con once menos cero con uno es igual a cero con cero ocho, "2B" es igual a cero con cero ocho, cero con uno menos cero con cero ocho…
A7: yo no tengo ni idea de lo que estás haciendo

C7: yo tampoco
A4: no
B7: cero con cero ocho, espera, igual a cero con cero dos, esta diferencia es más pequeña que ésta…

Hemos señalado algunas actuaciones de los estudiantes, durante el trabajo colaborativo, como debilidades, no obstante consideramos que nuestra elección de investigar en grupos naturales de formación de maestros trae consigo una serie de situaciones y variables que no se pueden controlar.

Como ya hemos descrito en el análisis de otras sesiones, durante la 4ª sesión algunos equipos no lograron detectar ni superar concepciones erróneas manifestadas por los miembros, cuando todos manifestaron no saber cómo se resuelve una tarea. Es posible que ninguno contara con las herramientas cognitivas requeridas para abordar el problema. En la resolución de la Tarea 6, observamos esta situación en el equipo E13 del G1, E12 y E5 del G2. En la resolución de la Tarea 7 observamos que no se señalaron concepciones erróneas manifestadas por otros miembros en los equipos E2, E9, E12 y E16 del G1, y en el equipo E4 del G2. A modo de ejemplo mostramos un fragmento del trabajo del equipo E12 del G1, en la Tarea 7.

D8: ¿ahí qué hay que poner?
B14: a ver he dicho que sabiendo el largo y el ancho puedes calcular el área entonces la segunda figura va crecer en relación proporcional a la primera atendiendo a que la escala es uno, cinco
C14: ¿ponemos eso?
B14 y C14: sabiendo el largo el ancho…
B14: podemos hallar el área de la primera figura… ¿no?, podemos hallar el área, ya está… pues se queda en el aire, sabiendo el largo y ancho podemos saber que el área de la segunda figura crecerá de manera proporcional y directa en relación a la primera figura y sabiendo que la escala es 1, 5…, parece conjetura ¿o no?

En tres equipos del G1 (E15, E16 y E20) y en el equipo E5 del G2 se manifestaron actuaciones en las que los miembros no siguieron las pautas del trabajo en equipo. Por ejemplo, en E20 del G1 uno de los estudiantes no se toma con responsabilidad el trabajo y obstruye las intenciones de los otros miembros.

C1: ¿por qué la razón de aquí…?
B18: es que el área sería esto por esto, ¿no?
C2: si te das cuenta te da lo mismo o parecido
B18: no, no puede ser
C2: ¿cómo no puede ser?, es cuestión de ver, Patri ¿cómo se saca el área?, o Rosa, o Francis…
B18: ¿cómo era?... ¡que va no sacamos conjetura!
C2 sigue bromeando y no trabaja ni permite que el grupo trabaje.
C2: yo he dicho mi conjetura lo que pasa es que no te gusta (B18: ¿cuál?) que terminan en lo mismo, está claro, que no te enteras Jesús…

Resumen

El proceso de habituación a la dinámica de trabajo constituida por cuatro fases a lo largo de las cuales se ha de resolver la misma tarea fue asimilada por los estudiantes sin mayores dificultades desde la primera sesión. La explicación de las pautas que debían de seguir en el trabajo individual y colaborativo fueron expuestas al inicio de cada sesión y durante el desarrollo de la misma. Una de las pautas dadas en clase que han contribuido al análisis de la información ha sido el establecer que hable una persona a la vez, que respeten las intervenciones de sus compañeros y que digan su nombre al empezar la grabación en audio del trabajo colaborativo; estas decisiones han derivado en grabaciones de voz de buena calidad, en las que ha sido posible distinguir los participantes involucrados y que han recogido una gran cantidad de información útil para el análisis.

Hemos destacado los intercambios productivos como una de las fortalezas del trabajo colaborativo, éstos se identificaron en todas las sesiones y en trabajo de prácticamente todos los equipos participantes. Tales intercambios se caracterizaron por la construcción colectiva de una respuesta, el debate de procesos de resolución y la superación, al menos momentánea, de concepciones inadecuadas que sobre el contenido matemático manifestó alguno de los miembros del equipo. El trabajo en equipo posibilitó conocer distintos acercamientos, razonamientos y procedimientos de resolución de las tareas lo cual pudo haber incidido en el enriquecimiento de la posterior resolución individual de la tarea.

Señalamos que una posible debilidad de la dinámica la observamos en la conformación de algunos de los equipos en los que ninguno de los miembros se mostró capaz de resolver alguno de los ejercicios, sin embargo ésta ha sido una variable que no es posible controlar cuando se antepone el interés de estudiar entornos de aprendizaje naturales tal y como ha sido en nuestro caso.

Una circunstancia que condicionó el desarrollo de la metodología de trabajo ha sido el tiempo, la fase que se ha visto más afectada ha sido la puesta en común de las tareas pues no fue posible abordar la resolución de todos los ejercicios ni aportar todos los conocimientos que se habían planificado para esta fase; la decisión de delimitar la puesta en común se tomó con el objetivo de no restringir el tiempo que dedicaron los estudiantes a resolver la tarea de manera individual y colaborativa.

Se han expuesto varios argumentos que nos permiten afirmar que el estudio de los contenidos a través de la metodología de resolución de problemas y la fase de dinámica colaborativa, han hecho posible la estimulación de las competencias matemáticas de resolver problemas, comunicar y argumentar–justificar.

Capítulo 8. Estudio de Casos

El estudio de casos que presentamos se centra en el análisis de las modificaciones en los conocimientos matemáticos mostradas por los estudiantes en las dos fases de trabajo individual, el realizado al inicio de cada sesión y el trabajo individual realizado sobre la misma tarea fuera de clase. Considerando este objetivo indicamos que el estudio de casos que realizamos es un análisis cognitivo del individuo (Simon, 2012).

8.1 EL CASO DEL ESTUDIANTE B2 (G1)

En el Anexo N.1 aparecen los protocolos de trabajo individual del estudiante B2. El análisis se realiza atendiendo a cada uno de los ejercicios de la tarea y se presenta en el mismo orden con el que aparecen en la misma. Con el objetivo de ilustrar algunos de los cambios manifestados mostramos fragmentos procedentes de las resoluciones del estudiante.

8.1.1 Tarea 1 "Fracción, Razón y Porcentaje"

En la Tabla 8.1 recogemos una síntesis de las modificaciones relativas al conocimiento matemático manifestado por B2 en la resolución de la Tarea 1. Como se muestra todas las modificaciones fueron positivas y se caracterizan por la inclusión de una mayor cantidad de indicadores que no corresponden a concepciones inadecuadas.

Tabla 8.1. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B2, Tarea 1*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Comp. P-P	1	2	+
Comp. P-T	2	3	+
NP1	0	1	+
NR2	1	1	*
Total de Modificaciones			+3

Resolución del ejercicio (a)

En el trabajo individual realizado en clase el estudiante B2 describe la comparación entre la cantidad de campos cultivados y el total de campos del terreno, es decir establece una relación parte-todo y la representa mediante las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$. En la resolución posterior de la tarea el estudiante expresa que otra forma de describir la comparación es "superponer" las partes cultivas en las no cultivadas. Aunque no hace mención explícita a la fracción $\frac{2}{3}$ como descripción de la relación entre los dos tipos de campos, cultivados y no cultivados, consideramos que su actuación evidencia un proceso gráfico que permite visualizar la relación parte-parte. Este procedimiento lo aportó la investigadora durante la puesta en común. En las Figuras 8.1 y 8.2 presentamos el fragmento del trabajo de B2 que ilustra la modificación descrita anteriormente.

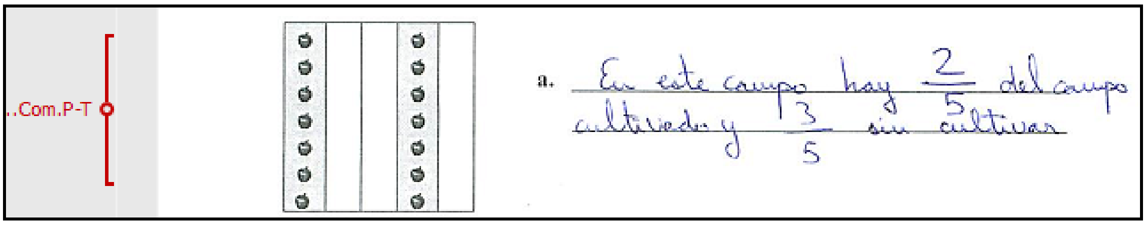


Figura 8.1. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T1 (Caso B2)

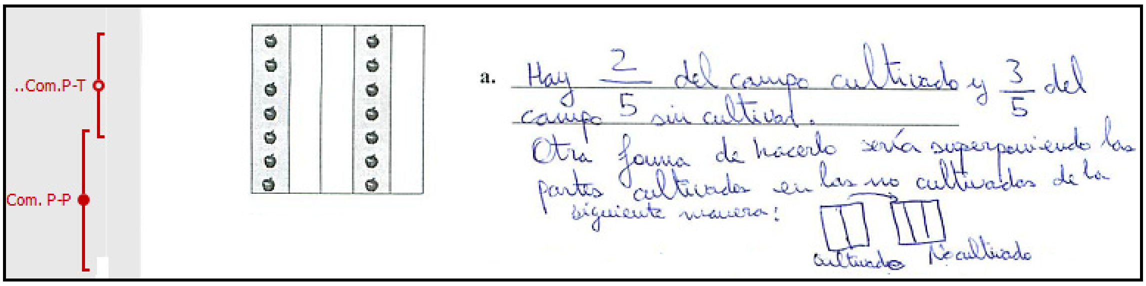


Figura 8.2. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T1 (Caso B2)

<u>*Resolución del ejercicio (b)*</u>

En el trabajo inicial el estudiante describe la relación parte-todo aplicando la noción de porcentaje (Comp. P-T), la modificación en la resolución de este ejercicio estuvo dada por la presencia de la regla de tres (NP1) en la segunda entrega del trabajo individual. Aunque este cambio no es significativo en cuanto al tipo de relación manifestada, evidencia el interés del estudiante por mostrar los conocimientos que ha aplicado y que sustentan la respuesta aportada.

<u>*Resolución del ejercicio (c)*</u>

Inicialmente el estudiante B2 expresa únicamente la relación entre los campos cultivados y no cultivados (Comp. P-P) y en la entrega posterior indica que también es posible afirmar que por cada 6 regiones cultivadas (todo) hay cuatro campos cultivados y dos sin cultivar (partes), la modificación en la resolución del ejercicio se pone de manifiesto por la presencia posterior de la relación parte-todo (Comp. P-T). En las dos resoluciones individuales el estudiante muestra, en relación con la noción de razón, el mismo acercamiento NR2 el cual se caracteriza por el uso de los términos "por cada" "x" es "y" entre otros, el mismo ha sido descrito con detalle en el Capítulo 7.

8.1.2 Tarea 2 "Preferencia en el Refresco de Cola"

De manera general señalamos que las modificaciones mostradas en la resolución de los ejercicios (b) y (c) de la Tarea 2 se contabilizan solo una vez pues los indicadores correspondientes son excluyentes. Esto significa que si en el trabajo individual en clase el estudiante eligió la opción (b.1) pero en el trabajo fuera de clase eligió la opción (b.2), sólo se ha manifestado un cambio (sustitución) y no dos modificaciones como podría interpretarse en la tabla de síntesis a razón de la presencia de un indicador y la desaparición del otro, debido a esta razón colocamos un único signo correspondiente a las filas que contienen indicadores de actuaciones relacionadas con estos ejercicios. En relación con el ejercicio (a) asumimos la misma postura en el caso de que se muestren sustituciones entre los indicadores (a.1) y (a.3) que corresponden a concepciones inadecuadas sobre la interpretación de las afirmaciones expuestas en la tarea.

El estudiante resuelve todos los ejercicios de la Tarea 2 en las dos fases de trabajo individual. En términos generales, manifiesta cinco modificaciones en los indicadores del conocimiento matemático asociado a la resolución de esta tarea. En la Tabla 8.2 mostramos una síntesis de las modificaciones manifestadas por B2 en la resolución de la Tarea 2.

Tabla 8.2. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B2, Tarea 2*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
(a.3)	1	0	+
b.1	0	1	+
b.2	1	0	
c.1	0	1	+
c.3	1	0	
CPr.1	1	2	+
CPr.3	2	3	–
Rep1	1	1	*
Rep2	1	1	*
Total de Modificaciones			+4 y –1

Resolución del ejercicio (a)

En el trabajo inicial B2 manifiesta que las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta y lo explica indicando que la primera razón aparece de forma simplificada. Sin embargo, no indica de dónde proviene esta simplificación o cómo se relaciona con las otras afirmaciones. También manifiesta que la segunda razón expresa el total de personas que prefieren uno u otro refresco y que la tercera afirmación se refiere a la diferencia entre las dos cantidades de personas, actuación que justifica la asignación de los indicadores (a.3) y CPr.3 (éstos se han descrito con detalle en el capítulo anterior). No obstante, recordamos que la concepción CPr.3 se refiere a la suma de los elementos de la razón para obtener el total de elementos de la comparación. Tal concepción se ha presentado de distintas formas y en el caso del estudiante B2 se evidencia cuando éste afirma "*la segunda da la razón total, es decir, el total de entrevistados que prefieren una con respecto al total que prefieren la otra*".

Posteriormente, en la segunda entrega de la Tarea 2, detectamos que el estudiante B2 expresa que las tres afirmaciones no tienen por qué proceder de la misma encuesta. Esta es una modificación que destacamos pues es el único estudiante que muestra esta respuesta, la misma no se ha codificado con un indicador especifico debido a que es una actuación puntual. El estudiante B2 sustenta su respuesta señalando "*por ejemplo en el primer caso los entrevistados podrían ser 5 personas mientras que en la segunda afirmación podrían ser 28565*", actuación que seguimos identificando con la concepción de la suma de los elementos de la razón (CPr.3) aunque reconocemos que el uso de la expresión "*podrían ser*" constituye un elemento que difumina parcialmente la presencia de tal concepción.

Resolución del ejercicio (b)

En el tratamiento de esta cuestión el estudiante señala inicialmente que la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre los dos refrescos era la segunda afirmación (b.2) argumentando que la misma muestra el total de personas que prefieren cada refresco, motivo por el cual se asignó a tal actuación la concepción CPr.3.

En la resolución posterior detectamos una modificación en su trabajo pues, en éste, B2 elige la primera afirmación (b.1) como la que mejor describe la comparación. Además sustenta su posición indicando "*porque es la razón reducida entre los que prefieren Bola Cola y Cola Nola, es decir, todas las demás razones se reducen a esa*", este argumento refleja la presencia de una concepción sobre la equivalencia de razones (CPr.2). La modificación evidenciada es positiva pues el cambio en la elección de afirmación pone de manifiesto la interpretación de la razón como una relación que puede describirse mediante distintos pares de representantes y que en la situación dada la razón 3:2 es la reducida. Sin embargo, consideramos que esta idea contrasta con la presencia de la concepción CPr.3 en la resolución del ejercicio (a).

Resolución del ejercicio (c)

El estudiante B2 modifica la elección de la afirmación que podría resultar más efectiva para utilizar en un anuncio publicitario, en el trabajo individual realizado en clase elige la tercera afirmación (c.3) argumentando que un número grande como 5713 impresiona a la gente, posteriormente en el trabajo realizado, fuera de clase, señala que es la primera afirmación (c.1) lo cual constituye una modificación positiva en tanto el estudiante acoge a la razón como una expresión eficaz de la comparación. No obstante, B2 sustenta la elección expresando que la razón 3:2 permite comprobar rápidamente la diferencia entre los que prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola, actuación que nuevamente se ve matizada por la concepción CPr.3 pues implícitamente el estudiante asume que los elementos de la razón, 3 y 2, corresponden al total de personas que han elegido cada uno de los refrescos.

Resolución del ejercicio (d)

En la primera resolución individual de B2 detectamos la presencia de dos representaciones simbólicas de la relación, las razones equivalentes (Rep1) y el porcentaje (Rep2) ambas relacionadas con la propiedad de la equivalencia de razones (CPr.1). En la resolución posterior, el estudiante recupera las representaciones simbólicas usando ahora la representación fraccionaria de las razones en lugar de la representación mostrada inicialmente *a:b*. Manifiesta una modificación pues expresa que se pueden utilizar otras razones "*que parezca que la diferencia es mayor como* $\frac{6}{4},\frac{9}{6},\frac{12}{8}\ldots$" en esta idea reconocemos la presencia de la concepción CPr.3 pues la utilización de distintos representantes, para expresar la razón, no incide en el total de elementos comparados y por ende tampoco en la diferencia entre el tamaño de cada una de las partes comparadas. En las Figuras 8.3 y 8.4 presentamos el fragmento del trabajo de B2 que ilustra la modificación descrita anteriormente.

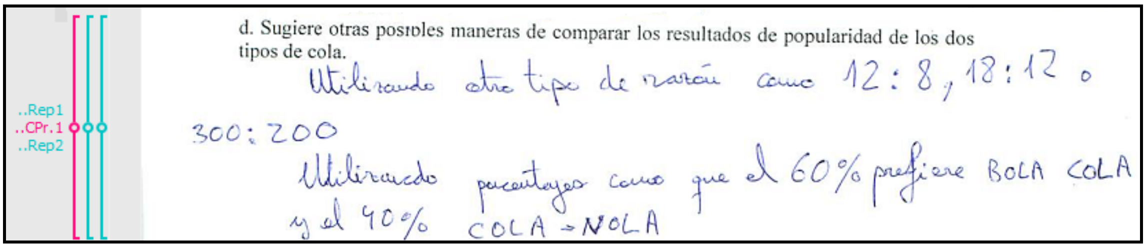


Figura 8.3. Resolución inicial del ejercicio (d) de la T2 (Caso B2)

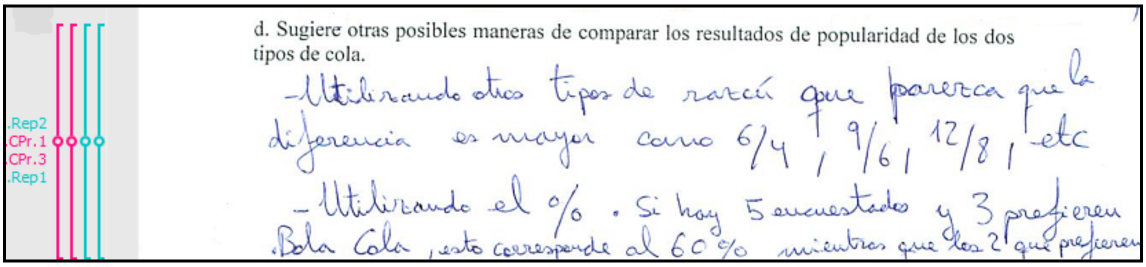


Figura 8.4. Resolución posterior del ejercicio (d) de la T2 (Caso B2)

8.1.3 Tarea 3 "Los Niveles de CO_2"

El estudiante B2 muestra una modificación en la resolución de la Tarea 3 realizada fuera de clase. Este cambio ha sido positivo ya que manifiesta un indicador relativo al porcentaje, que complementa los conocimientos matemáticos mostrados en la primera entrega de la tarea. En la Tabla 8.3 presentamos una síntesis de los indicadores asignados a las actuaciones manifestadas por B2, posteriormente describimos el desarrollo de los ejercicios.

Tabla 8.3. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B2, Tarea 3*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
NP1	1	1	*
URef	0	1	+
InPo2	1	1	*
CoAdMu2	1	1	*
Total de Modificaciones			+1

<u>*Resolución del ejercicio (a)*</u>

Tal y como se aprecia en la Figura 8.5, el estudiante B2 aplica la regla de tres para justificar cómo se obtiene el 11% correspondiente al aumento de emisiones en Estados Unidos, el esquema de regla de tres seguido le permite mostrar directamente la obtención de tal porcentaje. En el trabajo posterior (Fig. 8.6) observamos que se ha dado una modificación en cuanto B2 aporta una descripción para sustentar los procedimientos aplicados. En su explicación se evidencia el reconocimiento explícito de la unidad de referencia señalando que el 100% corresponde a la cantidad de emisiones del año 1990. Se ha asignado el indicador URef, mismo que se hemos utilizado para codificar esa actuación. En la resolución posterior B2 expresa "*Ahora comprobamos qué % corresponde 678 del 100% que es 6049*" expresión que pone de manifiesto que el uso que hace B2 de la regla de tres no es sólo instrumental.

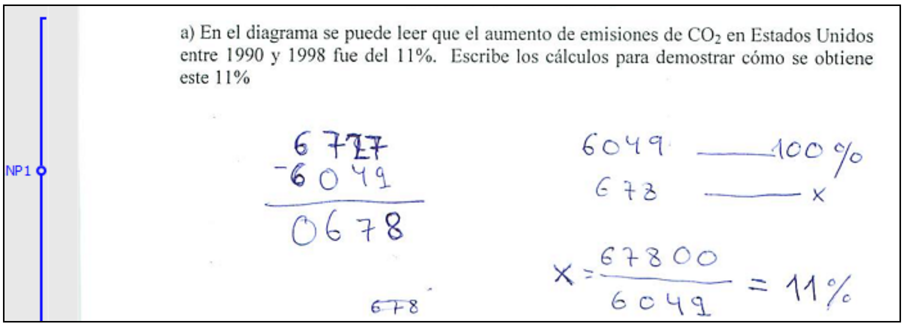


Figura 8.5. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T3 (Caso B2)

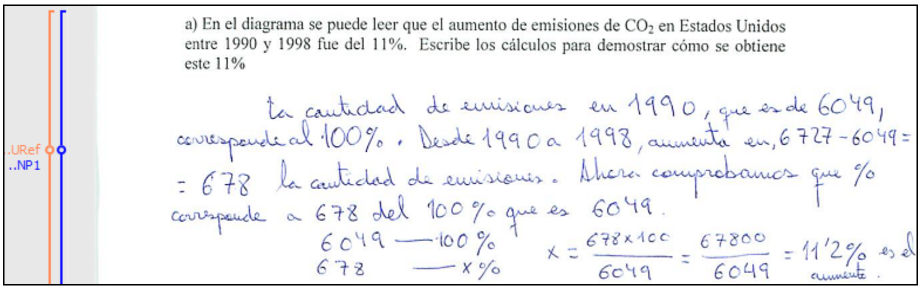


Figura 8.6. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T3 (Caso B2)

Resolución del ejercicio (b)

En este ejercicio B2 no muestra modificaciones en su respuesta, en ambas entregas señaló que el porcentaje en las emisiones de la Unión Europea es la media de todos los países que la componen. En el trabajo posterior agrega que en Alemania puede haber un descenso del 16% (-16%) y en otras regiones como en los Países Bajos darse un ascenso del 8% que hacen que la media de la UE se quede en un -4%. Esta concepción sobre el porcentaje se ha descrito con detalle en la planificación de la Tarea 3 y en el análisis retrospectivo de la segunda sesión en el Capítulo 7.

Resolución del ejercicio (c)

Inicialmente B2 señala que Luisa y Antonio sugieren respuestas diferentes a la cuestión sobre qué país ha tenido el mayor aumento en las emisiones de CO_2 debido a que cada uno observa elementos distintos en la representación gráfica, específicamente indica que Luisa se fija en las barras y Antonio en los porcentajes. Esta actuación la designamos con CoAdMu2 debido a que consideramos que el razonamiento expuesto no da muestras de que reconoce que cada uno da respuestas diferentes porque son las dos posibles acercamientos a la cuestión, una perspectiva aditiva y otra multiplicativa y en el caso de la tarea son distintos países porque un mayor aumento absoluto no implica un mayor aumento relativo.

En la segunda resolución de la tarea B2, además de lo expuesto anteriormente, señala que Luisa se fija en lo que cada país ha “incrementado o disminuido” mientras que Antonio se fija en el porcentaje, añade que Luisa considera la media absoluta y Antonio toma en cuenta la media relativa. Este acercamiento no es exactamente el mismo que muestra en la primera entrega de la tarea, no obstante, es muy similar pues la única modificación expuesta se refiere a la inclusión de los términos “media absoluta” y “media relativa”. En ambas resoluciones lo que B2 evidencia es qué hacen Luisa y Antonio para dar esas respuestas y no por qué es posible aportar esas dos respuestas o por qué estas dos personas no coinciden en sus percepciones, la respuesta está en la unidad de referencia de cálculo del porcentaje y en el hecho de que mayor aumento absoluto no implica necesariamente mayor aumento relativo.

Es posible que la menor cantidad de modificaciones manifestadas por B2 se expliquen en la limitación de tiempo dedicada a la resolución de las cuestiones (b) y (c) en la puesta en común, espacio durante el cual la revisión se centró en las diferentes formas de abordar la resolución del ejercicio (a).

8.1.4 Tarea 4 “Crecimiento de Bacterias”

De manera general señalamos que las modificaciones mostradas en la resolución del ejercicio (d) de la Tarea 4 se contabilizan solo una vez, debido a que la representación gráfica se ha catalogado con indicadores excluyentes, motivo por el cual la modificación se refiere a la sustitución de un indicador por otro.

En relación con el trabajo inicial del estudiante B2 encontramos que el trabajo posterior en la Tarea 4 se caracteriza por la presencia de una mayor cantidad de indicadores en la resolución de los ejercicios, detectamos un total de cinco modificaciones las cuales se recogen en la Tabla 8.4. Posteriormente describimos estos cambios en el marco de la resolución de cada ejercicio.

Tabla 8.4. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B2, Tarea 4*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re1	1	1	*
Re3	1	1	*
Re5	0	1	+
Pr1	0	1	+
Pr3	1	1	*
Pr5	0	1	+
Pr6	1	1	*
Rep1 (D)	1	1	*
Rep4 (D)	1	0	+
Rep5 (D)	0	1	
EstAd	1	1	*
EstMu	0	1	+
Total de Modificaciones			+5

Resolución del ejercicio (a)

La relación aditiva entre las cantidades de días y de bacterias (Re1) estuvo presente en las dos resoluciones de B2, en esta relación considera la diferencia entre las cantidades de las dos magnitudes y con base en ésta el estudiante B2 deduce que el crecimiento diario ha sido de 13 bacterias. Adicionalmente en los dos trabajos individuales B2 hace referencia a la relación funcional entre las cantidades de las dos magnitudes (Re3) cuando indica que "*la razón es 13/1, trece bacterias cada día*". La misma relación se refleja cuando B2 hace referencia a la constante de proporcionalidad indicando que "*el número de bacterias en un día dividido por este día es siempre 13,* $\frac{65}{5}=\frac{78}{6}=\frac{130}{10}=13$", reconocemos que estas afirmaciones son expresiones que se desprenden de la relación $f(x)=13x$.

La modificación en la resolución del ejercicio (a) viene dada por la presencia de una nueva relación en el trabajo realizado por B2 fuera de clase. Describe que el producto cruzado de dos casillas consecutivas es el mismo y lo ejemplifica con los casos $5\times 78=6\times 65=390$, esta relación es una descripción intuitiva de una relación que se desprende de la propiedad fundamental de las proporciones, la cual se ha designado en nuestro estudio con Re5 y que no ha sido detectada en las producciones orales del trabajo de los equipos. La modificación manifestada por B2 podría obedecer al intercambio surgido durante la puesta en común de la tarea, momento durante el cual se abordó la propiedad fundamental de las proporciones.

Resolución del ejercicio (b)

En las dos partes del ejercicio (b) el estudiante aplica las relaciones escalares para hallar las cantidades solicitadas (codificadas con Pr3 y Pr6), estas actuaciones se manifestaron en las dos resoluciones del estudiante B2 y las mismas indican que el estudiante B2 ha razonado proporcionalmente (Lamon, 2007). La resolución realizada fuera de clase evidencia que, además de tales indicadores, el estudiante incluyó la multiplicación y división por la constante de proporcionalidad, actuaciones designadas con Pr1 y Pr5. Posiblemente el intercambio dado en el trabajo de equipos o durante la puesta en común favoreció que el estudiante B2 mostrara más de un procedimiento, alternativo a la regla de tres, para hallar valores ausentes en una cuarta proporcional.

Resolución del ejercicio (c)

En este ejercicio no manifiesta modificaciones sustanciales, pues en ambas resoluciones expresa la relación entre las magnitudes simbólicamente a través de la fórmula $B = 13n$, si bien en la fase inicial usa la letra N para hacer referencia al número de bacterias y posteriormente usa la letra B. Adicionalmente, en el trabajo hecho fuera de clase manifiesta detalles relacionados con las magnitudes y sus condiciones, escribe que la variable “n” número de días ha de ser un número natural mayor o igual a tres e indica que entre las dos magnitudes existe una función lineal, esta consideración surgió durante la puesta en común.

Resolución del ejercicio (d)

Las condiciones de la situación de la Tarea 4 relativas a la naturaleza discreta de la magnitud número de bacterias y a la consideración de $n \in N, n \geq 3$, discutidas durante la puesta en común, fueron recogidas por el estudiante B2 en la resolución posterior de la tarea. Inicialmente el estudiante B2 muestra un trazo continuo de recta desde el origen y luego representa la relación en un gráfico de puntos a partir de $n = 3$, misma que acompaña con la explicación “*no tiene sentido unir los puntos ya que el número de bacterias pertenece al conjunto de los números naturales, por lo que nunca puede haber 53,5 bacterias, por ejemplo*”, estos cambios se aprecian en las Figuras 8.7 y 8.9.

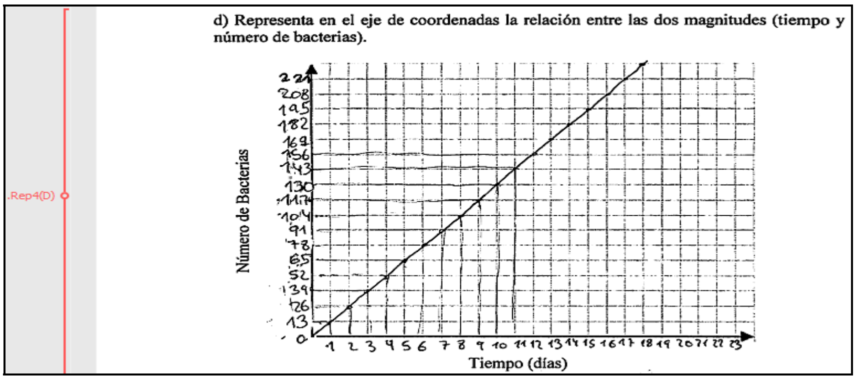


Figura 8.7. Resolución inicial del ejercicio (d) de la T4 (Caso B2)

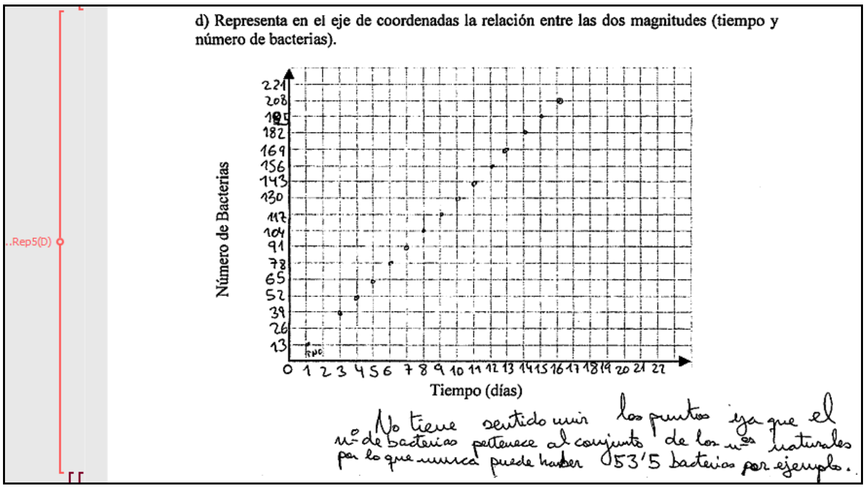


Figura 8.8. Resolución posterior del ejercicio (d) de la T4 (Caso B2)

Resolución de la segunda fase de la T4

En este ejercicio, inicialmente, B2 únicamente manifiesta la aplicación de la estrategia aditiva (EstAd) para comparar el crecimiento de las dos bacterias pasados los cinco días. En la entrega posterior apreciamos que además de esta estrategia el estudiante considera la posibilidad de establecer una comparación multiplicativa (EstMu), mediante el porcentaje, e indica que la diferencia relativa en el caso de la bacteria A es del 120% mientras que en la bacteria B es del 150%.

8.1.5 Tarea 5 "Permanencia Activa de un Fármaco"

No hubo puesta en común ni trabajo colaborativo de la T5 motivo por el cual es posible que prácticamente no se dieran modificaciones en la resolución de esta tarea. En la Tabla 8.5 se muestra que el único cambio se debe a la aplicación posterior del procedimiento Pr3 (I) el cual corresponde al uso de una relación escalar para hallar uno de los valores de la proporción inversa. Después de la tabla hacemos referencia a la resolución desarrollada por B2 en ambas entregas de la T5.

Tabla 8.5. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B2, Tarea 5*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re1.1(I)	1	1	*
Re2(I)	1	1	*
Pr1(I)	3	3	*
Pr3(I)	1	0	–
Rep1.1(I)	1	1	*
Rep3.1(I)	1	1	*
Total de Modificaciones			–1

Resolución del ejercicio (a)

El estudiante B2 describe la relación funcional entre las dos magnitudes, de manera verbal, haciendo alusión a la constancia del producto de las cantidades (Re1.1(I)). También detecta la relación escalar entre las cantidades de la misma magnitud, codificado por Re2 (I), y la describe diciendo que al doblar una cantidad de tiempo las cantidades correspondientes de medicamento se reducen a la mitad. Las dos actuaciones manifestadas describen la estructura de la proporcionalidad inversa.

Resolución de los ejercicios (b) y (c)

Los dos ejercicios son de valor ausente motivo por el cual los estudiamos conjuntamente. La única modificación se presentó en la resolución del ejercicio (b.2) pues en el trabajo individual realizado en clase por B2 detectamos que recurrió, además de la división por la contante de proporcionalidad Pr1(I), a la relación de inversos multiplicativos que cumplen los operadores escalares (Pr3 (I)), haciendo uso específico de los pares (24,5) y (240, 0.5). Esta actuación no se manifestó en el trabajo posterior por lo que la modificación es negativa.

Resolución del ejercicio (d)

La expresión simbólica de la relación entre las magnitudes no sufrió modificaciones sustanciales pues en ambas fases del trabajo individual la puso de manifiesto a través de la igualdad $C_m = \frac{120}{x}$. En el trabajo en clase señala que C_m significa cantidad de medicamento, mientras que en el trabajo posterior además de la explicación de esta etiqueta indica que 120 es la constante que se obtiene al multiplicar las cantidades de las dos magnitudes.

Resolución del ejercicio (e)

En ambas resoluciones el estudiante B2 muestra una representación gráfica adecuada de la relación entre tiempo y cantidad de medicamento, no hay modificaciones de ningún tipo.

8.1.6 Tarea 6 "Compartiendo Pizza"

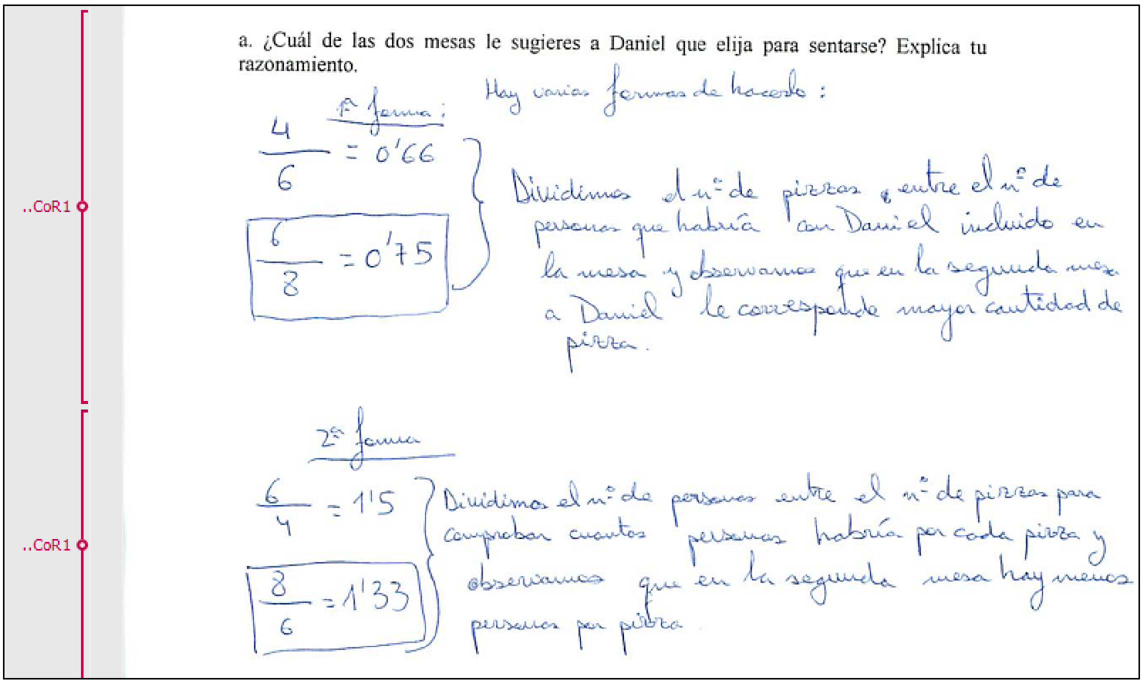
En la Tabla 8.6 mostramos una síntesis de las modificaciones relativas al conocimiento matemático manifestado por B2 en la resolución de la Tarea 6. Como se muestra todas las modificaciones fueron positivas y se caracterizan por la inclusión de mayor cantidad de indicadores que no corresponden a concepciones inadecuadas.

Tabla 8.6. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B2, Tarea 6*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
CoR1	1	2	+
RPr1	0	1	+
RPr2	1	1	*
IR1	1	1	*
IR3	0	1	+
IR4	1	1	*
Total de Modificaciones			+3

Resolución del ejercicio (a)

Aunque el estudiante utiliza el mismo procedimiento para comparar las razones, CoR1, que corresponde a la división de las cantidades de los dos conjuntos en cada una de las mesas, hemos detectado que en el trabajo posterior aplica este procedimiento en los dos sentidos posibles: $pizza : personas$ y $personas : pizza$, por lo que consideramos como una modificación positiva no sólo la atención de la relación en los dos sentidos sino también la interpretación adecuada de los valores de la razón en cada caso, ilustramos esta modificación en la Figura 8.9.



..CoR1

..CoR1

a. ¿Cuál de las dos mesas le sugieres a Daniel que elija para sentarse? Explica tu razonamiento.

Hay varias formas de hacerlo:

1ª forma:

$\frac{4}{6} = 0'66$

$\boxed{\frac{6}{8} = 0'75}$

Dividimos el nº de pizzas entre el nº de personas que habría con Daniel incluido en la mesa y observamos que en la segunda mesa a Daniel le corresponde mayor cantidad de pizza.

2ª forma

$\frac{6}{4} = 1'5$

$\boxed{\frac{8}{6} = 1'33}$

Dividimos el nº de personas entre el nº de pizzas para comprobar cuantas personas habría por cada pizza y observamos que en la segunda mesa hay menos personas por pizza.

Figura 8.9. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T6 (Caso B2)

Resolución del ejercicio (b)

En las dos resoluciones de la tarea el estudiante B2 utiliza el procedimiento descrito por el indicador RPr2, éste se refiere a un proceso de prueba y error y ha sido expuesto en el análisis retrospectivo de la cuarta sesión, en el Capítulo 7, complementariamente a este procedimiento B2 manifiesta la aplicación de la propiedad de razones equivalentes (IR4) y la consideración de la razón 7: 4 como una relación extensible a otros pares de cantidades de mesas (IR1).

En el trabajo individual resuelto fuera de clase hemos detectado que además del procedimiento descrito anteriormente el estudiante B2 manifiesta el esquema de resolución designado por RPr1 mediante el cual se determina la relación escalar entre las cantidades de personas y se aplica a la cantidad de mesas en cuestión. En este procedimiento el estudiante reconoce la razón 240:80 como una relación multiplicativa entre las cantidades ya que afirma que una cantidad es el triple de la otra, este tipo de actuaciones las hemos vinculado al indicador IR3.

8.1.7 Tarea 7 "El Palacio Real de la Alhambra"

En la Tabla 8.7 mostramos una síntesis de los indicadores manifestados por el estudiante B2 en las dos resoluciones individuales de la T7. Como se muestra en la tabla únicamente apreciamos una modificación positiva, ésta se ha dado en la elaboración de la conjetura sobre la relación entre las razones de longitud, área y volumen de figuras y cuerpos semejantes (ejercicio (b) de ambas fases de la tarea).

Tabla 8.7. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B2, Tarea 7*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
IE2	2	2	*
C2	2	0	+
C3	0	2	
Total de Modificaciones			+1

Resolución del ejercicio (a) de cada Fase

El primer ejercicio de la I y II fase de la tarea estaba centrado en la aplicación de la escala para determinar las medidas de las longitudes, superficie y volumen, mismas que debían colocarse en una tabla. En la resolución de estos ejercicios no observamos ninguna modificación, el estudiante determina correctamente las medidas solicitadas aplicando la escala 1:5 para hallar las longitudes y las fórmulas para hallar el área y volumen.

Resolución del ejercicio (b) de cada Fase

En el primer intento de elaboración de la conjetura observamos que B2 no expresa verbalmente la relación entre las razones de las longitudes (la escala) y el área, no obstante en su trabajo se evidencia que ha detectado la relación, pues la expresa de manera simbólica a través de la igualdad entre la razón de las áreas y la escala al cuadrado (Figura 8.10). A este tipo de actuaciones le hemos designado el indicador C2. El trabajo posterior evidencia una modificación positiva pues el estudiante retoma la conjetura a la que se llegó durante la puesta en común. Dado que es una expresión adecuada de la relación entre las razones la hemos codificado con C3 (Figura 8.11).

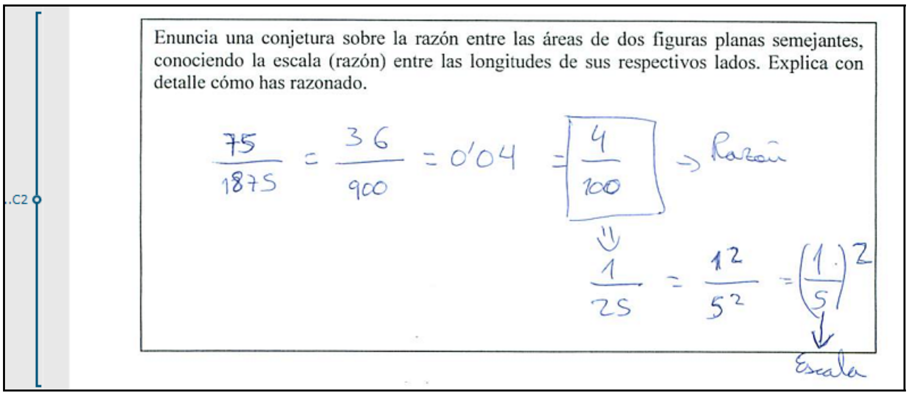


Figura 8.10. Resolución inicial del ejercicio (b) de la I Fase de la T7 (Caso B2)

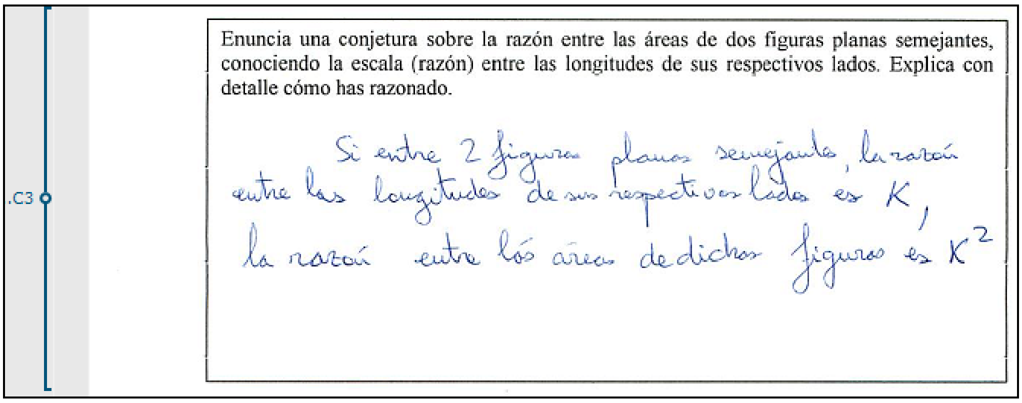


Figura 8.11. Resolución posterior del ejercicio (b) de la I Fase de la T7 (Caso B2)

8.2 El Caso de la Estudiante D6 (G1)

En el Anexo N.2 aparecen los protocolos de trabajo individual de la estudiante D6. El análisis se realiza atendiendo a cada uno de los ejercicios de la tarea y se presenta en el mismo orden con el que aparecen en la misma. Con el objetivo de ilustrar algunos de los cambios manifestados mostramos fragmentos procedentes de las resoluciones de la estudiante.

8.2.1 Tarea 1 "Fracción, Razón y Porcentaje"

En la Tabla 8.8 mostramos una síntesis de las modificaciones relativas al conocimiento matemático manifestado por D6 en la resolución de la Tarea 1. Las tres modificaciones fueron positivas.

Tabla 8.8. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de D6, Tarea 1*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Comp. P-P	0	3	+
Comp. P-T	3	0	+
NR1	1	0	+
Total de Modificaciones			+3

<u>*Resolución del ejercicio (a)*</u>

En el trabajo realizado en clase la estudiante D6 describe la comparación atendiendo la relación parte-todo y la expresa usando la representación simbólica de las fracciones, hizo referencia a la relación entre cada una de las partes y el todo. En la resolución de este ejercicio al igual que en los otros dos (b) y (c) observamos que la descripción de la comparación se ha establecido atendiendo la relación parte-parte, misma que considera una de las partes como el todo. En el caso del ejercicio (a) señala que la región cultivada corresponde a $\frac{2}{3}$ partes de la región sin cultivar.

<u>*Resolución del ejercicio (b)*</u>

Como describimos en el punto anterior la actuación de la estudiante se modificó debido a que en el trabajo individual realizado fuera de clase describe las tres comparaciones desde la perspectiva de la relación parte-parte. En el caso del ejercicio (b) esta modificación se aprecia cuando inicialmente expresa que “el 11% del campo está cultivado de naranjas, el 88,89% del campo está sin cultivar” (Figura 8.12) y posteriormente indica que “el cultivo de naranjas corresponde a un 12,5% de la región no cultivada” (Figura 8.13)

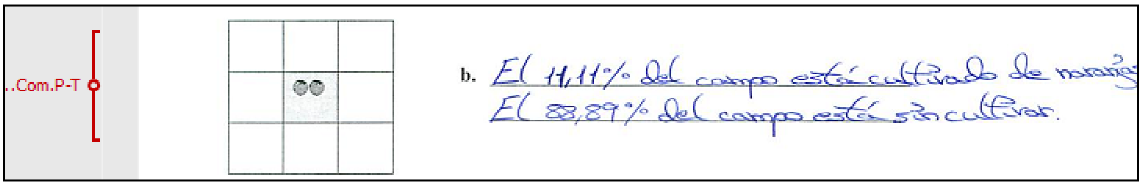


Figura 8.12. Resolución inicial del ejercicio (b) de la T1 (Caso D6)

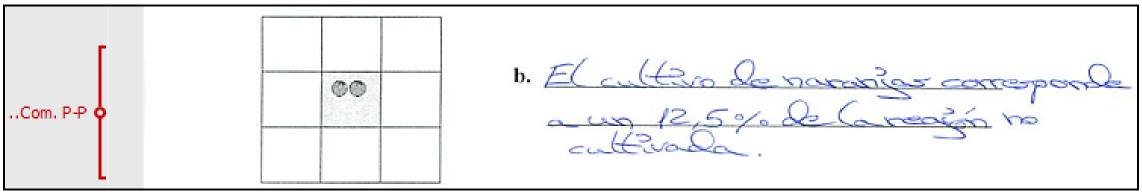


Figura 8.13. Resolución posterior del ejercicio (b) de la T1 (Caso D6)

<u>*Resolución del ejercicio (c)*</u>

La modificación descrita en los ejercicios (a) y (b) también se hizo presente en la resolución del último ejercicio. En el trabajo individual realizado en clase la estudiante describe la relación entre la parte y el todo ya que hizo referencia a la cantidad de campos cultivados y totales que hay, en su actuación reconocemos que la estudiante se refiere a la razón como una descripción cuantitativa de las partes y el todo (NR1), representa esta relación con la fracción $\frac{4}{6}$.

En la resolución realizada después de la intervención en el aula observamos que D6 manifiesta “*la razón entre los terrenos cultivados y no cultivados es de 4:2*” en la que reconocemos que ha establecido la relación entre las partes (Comp. P-P) haciendo uso de la representación simbólica de la razón.

8.2.2 Tarea 2 “Preferencia en el Refresco de Cola”

La estudiante D6 manifiesta cuatro modificaciones en la resolución posterior de esta tarea, de las cuales dos han sido negativas y dos positivas. En la Tabla 8.9 mostramos una síntesis de mismas, después describimos la resolución mostrada en cada ejercicio atendiendo a los cambios expuestos.

Tabla 8.9. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de D6, Tarea 2*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
(a.1)	0	1	*
(a.3)	1	0	
(b.1)	1	0	–
(b.2)	0	1	
(c.3)	1	1	*
CPr.3	1	0	+
IR1.1	0	1	+
Rep3	1	1	*
Rep6	1	0	–
Total de Modificaciones			+2 y -2

Resolución del ejercicio (a)

La estudiante D6 plantea, en la resolución hecha en clase, que las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta porque la tercera afirmación es la diferencia entre quienes prefieren cada marca de refresco, a tal actuación le asignamos el indicador (a.3). Adicionalmente en este trabajo observamos la presencia de la concepción relativa a la suma de los elementos de la razón (CPr.3) cuando la estudiante indica "*la encuesta se ha realizado entre 28565 personas*", este es un dato que se desconoce y que la estudiante ha obtenido sumando los elementos de la razón expuesta en la segunda afirmación del enunciado de la tarea.

En el trabajo realizado fuera de clase observamos que la estudiante continúa aseverando que las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta, sin embargo el argumento dado ha cambiado pues sugiere que las tres afirmaciones son formas distintas de decir lo mismo, indicador (a.1). Hemos mostrado en la Tabla 8.9 que no se ha dado modificación ya que aunque la estudiante aporta un motivo distinto al expuesto inicialmente, esta explicación no es un acercamiento adecuado a la resolución del ejercicio pues carece de la aplicación de propiedades de la razón y de otros conocimientos matemáticos relacionados con las comparaciones aditivas y multiplicativas (Ver Planificación de la Tarea 2)

Resolución del ejercicio (b)

La estudiante D6 modifica su elección sobre la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la encuesta. Inicialmente expone que era la primera afirmación y posteriormente elige la segunda afirmación. Aunque ambas expresiones se refieren a razones equivalentes y por lo tanto aluden a la misma relación consideramos que la aplicación de la razón más simple, permite visualizar con mayor rapidez de qué manera se distribuyen las cantidades comparadas así como establecer una comparación más eficazmente.

<u>*Resolución del ejercicio (c)*</u>

No se han manifestado modificaciones en la resolución de este ejercicio pues la estudiante en ambos trabajos expresa que la tercera afirmación (c.3) es la más eficaz para utilizar en un anuncio publicitario, justifica su elección en ambos casos diciendo que esta afirmación es más "*entendible*" para las personas, en el apartado "*Análisis de las actuaciones en la pregunta (c)*" (Apartado 7.2.1.2), hemos expuesto nuestra posición en relación con este tipo de actuaciones.

<u>*Resolución del ejercicio (d)*</u>

En las dos resoluciones individuales de la estudiante D6 observamos que sugiere las fracciones que describen la relación parte-todo como alternativa a la representación mediante la razón. La única modificación se nota en el hecho de que en la primera resolución añade una representación gráfica de las fracciones tomando como referencia un "todo" de 5 personas y utilizando el modelo de área, esta representación no la muestra en el trabajo posterior, en vista de esta diferencia consideramos la modificación negativa. En las Figuras 8.14 y 8.15 ilustramos las resoluciones de la estudiante D6 a la cuestión (d) de la Tarea 2.

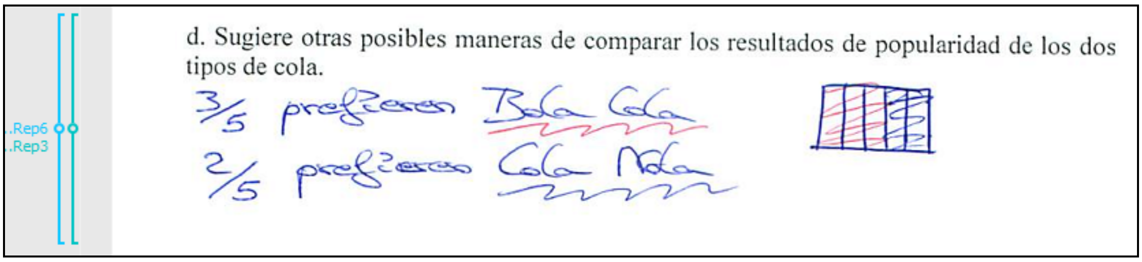


Figura 8.14. Resolución inicial del ejercicio (d) de la T2 (Caso D6)

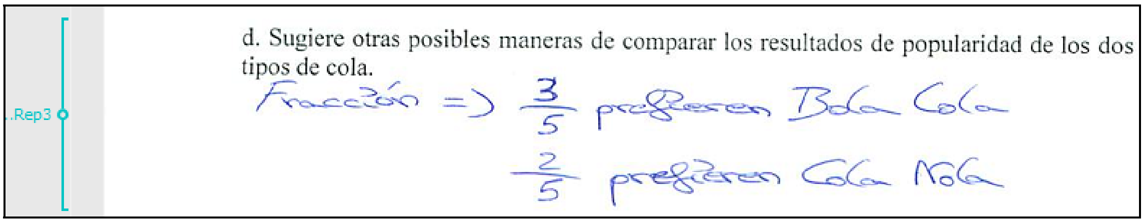


Figura 8.15. Resolución posterior del ejercicio (d) de la T2 (Caso D6)

8.2.3 Tarea 3 "Los Niveles de CO_2"

La estudiante D6 no manifiesta ninguna modificación en la resolución de la Tarea 3. En la Tabla 8.10 mostramos los indicadores expuestos por D6 en ambos trabajos individuales, en la misma se aprecia que no hubo cambios. Posteriormente describimos la resolución de cada ejercicio.

Tabla 8.10. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de D6, Tarea 3*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
NP1	1	1	*
InPo2	1	1	*
CoAdMu2	1	1	*
Total de Modificaciones			0

Resolución del ejercicio (a)

La estudiante D6 aplica la regla de tres para justificar la obtención del porcentaje en cuestión. Reconocemos que el esquema aplicado no permite obtener directamente el porcentaje del 11,20% pues de acuerdo con la relación establecida es preciso realizar una resta posteriormente.

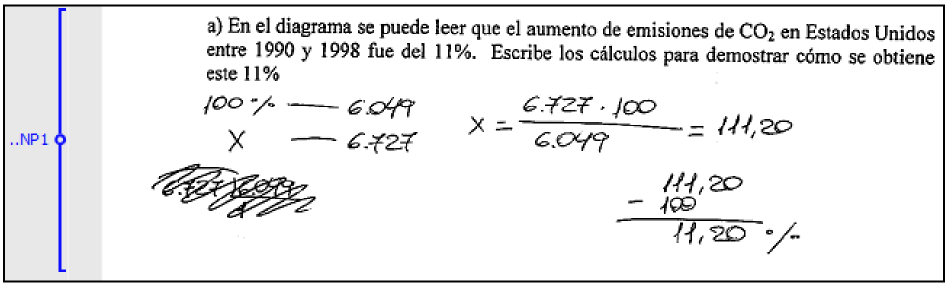


Figura 8.16. Resolución del ejercicio (a) en los dos trabajos individuales de la T3 (Caso D6)

Resolución del ejercicio (b)

En las dos resoluciones la estudiante evidencia la interpretación del porcentaje de la Unión Europea como resultado de la media de los porcentajes de los países integrantes (InPo2). En el trabajo hecho fuera de clase expone "*No estoy de acuerdo con Luisa. La situación es posible ya que la Unión Europea está compuesta por muchos países y aunque Alemania baje sus emisiones un 16% habrá otros países que las bajen menos incluso que las aumenten*". En su respuesta se presenta implícitamente la idea de "compensar" como intuición de la media. Aunque D6 podría estar haciendo referencia a que las cantidades absolutas de emisiones de tales países afectan al porcentaje de la UE consideramos que su explicación no ilustra suficientemente esta perspectiva sino que por el contrario ella reafirma lo expuesto en su trabajo inicial en donde hace referencia a que los cambios en los porcentajes de los países de la UE inciden en el porcentaje de emisiones de esta región.

Resolución del ejercicio (c)

En los dos trabajos individuales la estudiante D6 indica cuál ha sido el foco de atención sobre el que Luisa y Antonio se basan para dar la respuesta acerca de qué país ha tenido el mayor aumento en las emisiones de CO_2. Indica que Luisa ha considerado los millones de toneladas (diferencia absoluta) mientras que Antonio ha tomado en cuenta el aumento expresado en porcentajes. Este tipo de actuaciones se han categorizado como CoAdMu2 y se caracterizan porque carecen de una explicación sobre la clave de la cuestión y es que aunque Estados Unidos haya aumentado mayor cantidad que Australia, ésta es relativamente menor considerando la cantidad de referencia.

8.2.4 Tarea 4 "Crecimiento de Bacterias"

En el trabajo posterior de la Tarea 4 realizado por D6 detectamos cuatro modificaciones, tres positivas y una negativa. En la Tabla 8.11 se recogen los indicadores que caracterizan la actuación de la estudiante en los dos trabajos individuales.

Tabla 8.11. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de D6, Tarea 4*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re2	0	1	+
Re3	1	1	*
Re4	1	0	–
Pr1	1	1	*
Pr5	1	1	*
Rep1 (D)	1	1	*
Rep4 (D)	1	0	+
Rep5 (D)	0	1	
EstAd	1	1	*
EstMu	0	1	+
Total de Modificaciones			+3 y -1

<u>*Resolución del ejercicio (a)*</u>

En la primera resolución individual de la tarea se observa que la estudiante detecta la relación funcional entre las dos magnitudes y la describe verbalmente señalando que "*el número de bacterias que hay es igual al número de días que han pasado por trece*" (Re3). Describe el tipo de covariación de las cantidades cuando indica "*conforme pasan los días el número de bacterias aumenta*" como una aproximación intuitiva al comportamiento estrictamente creciente de la función lineal (Re4). En el trabajo posterior observamos que ha modificado su resolución pues además de la actuación catalogada por Re3 se observa que la estudiante detecta y describe la relación escalar entre las cantidades de la misma magnitud (Re2), además hace referencia a la constancia de las razones externas y a la invarianza del valor de pares de razones internas descripciones alternativas de la relación funcional entre las magnitudes (Re3). En el trabajo posterior no describe la covariación de las cantidades (Re4). En las Figuras 8.17 y 8.18 se muestran las actuaciones descritas.

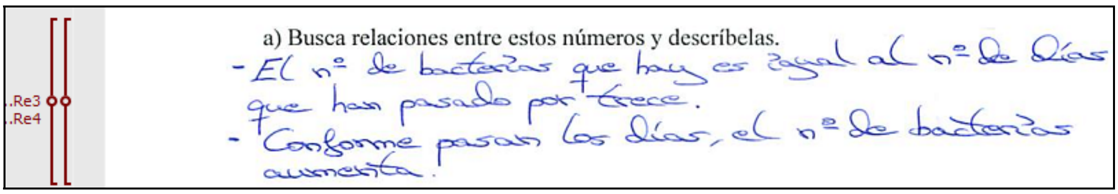
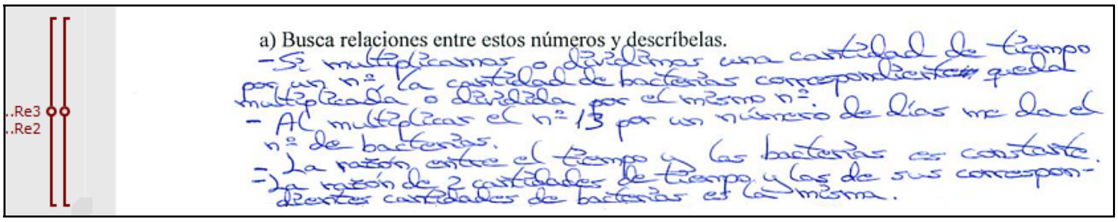


Figura 8.17. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T4 (Caso D6)


..Re3
..Re2

a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.
-Si multiplicamos o dividimos una cantidad de tiempo por un nº la cantidad de bacterias correspondiente queda multiplicada o dividida por el mismo nº.
- Al multiplicar el nº 13 por un número de días me da el nº de bacterias.
- La razón entre el tiempo y las bacterias es constante.
- La razón de 2 cantidades de tiempo y las de sus correspondientes cantidades de bacterias es la misma.

Figura 8.18. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T4 (Caso D6)

Resolución del ejercicio (b)

La estudiante no manifiesta modificaciones en la resolución de los ejercicios de valor ausente, para hallar los datos recurre a la división y a la multiplicación por la constante de proporcionalidad.

Resolución del ejercicio (c)

En el trabajo inicial la estudiante expresa simbólicamente la relación entre las magnitudes a través de la fórmula $X = n \times 13$, posteriormente la representa mediante la igualdad $B = 13 \times n$. Consideramos que el cambio en la elección de la letra que usa para representar la variable "Cantidad de Bacterias" no es una modificación.

Resolución del ejercicio (d)

Apreciamos una modificación positiva en las representaciones gráficas de la relación mostradas en los dos trabajos individuales de la estudiante D6. Inicialmente traza una línea recta que pasa por el origen (Rep4 (D)), ésta no sería inadecuada si las dos magnitudes fuesen continuas y si no hubiera restricciones sobre el dominio de la función. En el trabajo posterior la estudiante muestra una gráfica de puntos a partir de $n = 3$, actuación que hemos catalogado como Rep5 (D).

Resolución de la segunda fase de la T4

En el trabajo inicial la estudiante responde que las dos bacterias habían crecido lo mismo. Conclusión que obtiene comparando las cantidades desde la perspectiva aditiva, es decir, resta las dos medidas de la longitud de cada bacteria (EstAd). En el trabajo posterior indica que el aumento absoluto es el mismo pero que el relativo no lo es para lo cual aplica una regla de tres relacionando la medida inicial de la longitud de cada bacteria con el 100% y buscando el porcentaje correspondiente al crecimiento absoluto, esta actuación se corresponde con la perspectiva multiplicativa de la comparación de cantidades (EstMu), ésta modificación podría deberse a los intercambios y aportaciones dadas durante la puesta en común.

8.2.5 Tarea 5 "Permanencia Activa de un Fármaco"

En la Tabla 8.12 se muestra que el único cambio se debe a la detección inicial de la relación Re3 (I) correspondiente a la relación escalar, la misma no se manifestó en el trabajo posterior. El mínimo de cambios manifestado por B2 evidencia que posiblemente la limitación de tiempo de la puesta en común incidió en esta situación.

Después de la tabla describimos la resolución desarrollada por D6 en ambas entregas de la T5.

Tabla 8.12. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de D6, Tarea 5*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re1.1 (I)	1	1	*
Re3 (I)	1	0	–
Re5 (I)	1	1	*
Pr1 (I)	3	3	*
Rep1.1 (I)	1	1	*
Rep3.1 (I)	1	1	*
Total de Modificaciones			-1

Resolución del ejercicio (a)

La única modificación que manifiesta la estudiante en la resolución de la Tarea 5 se encuentra en la descripción de las relaciones entre las cantidades de las dos magnitudes inversamente proporcionales. En ambos trabajos individuales detecta la relación funcional entre la cantidad de medicamento y el tiempo transcurrido y la describe verbalmente (Re1.1 (I)). En las dos resoluciones señala que al dividir en cruz el cociente que se obtiene es el mismo (Re5 (I)). Esta relación se deriva de la estructura multiplicativa que caracteriza a los operadores escalares en este tipo de proporcionalidad. Sin embargo, la estudiante no manifiesta este fundamento. La modificación la encontramos en la ausencia del indicador Re3 (I) en el trabajo posterior de la estudiante D6, su actuación contempla la descripción intuitiva de la relación de orden entre las cantidades de las dos magnitudes. En las Figuras 8.19 y 8.20 ejemplificamos las actuaciones de la estudiante.

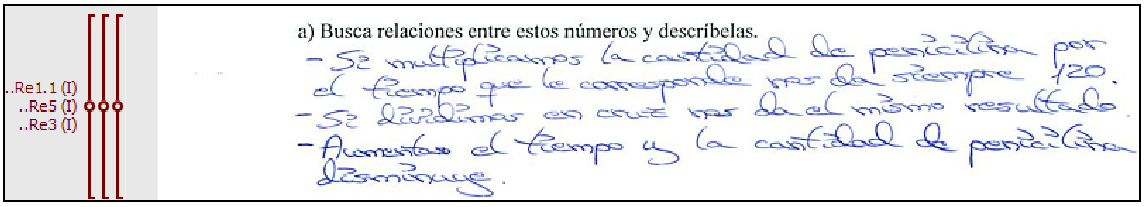


Figura 8.19. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T5 (Caso D6)

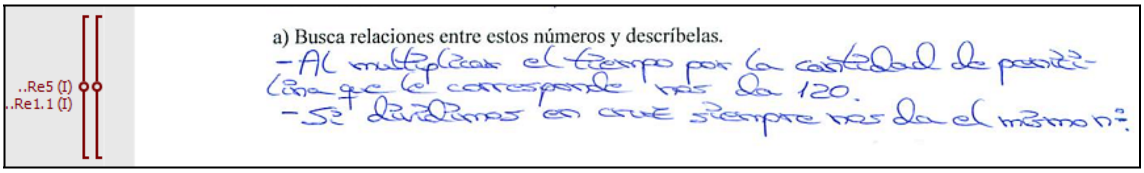


Figura 8.20. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T5 (Caso D6)

Resolución de los ejercicios (b) y (c)

En los ejercicios de valor ausente observamos que la estudiante razona basándose en la relación funcional existente entre las magnitudes. Como el producto de las cantidades es constante divide 120 entre el tiempo o la cantidad de medicamente según lo que tenga que hallar.

Resolución del ejercicio (d)

La representación simbólica mostrada en ambas tareas corresponde al cociente de la constante entre la cantidad de tiempo, la estudiante la expresa como se recoge a continuación $M = \frac{120}{x}$. Se le ha asignado el indicador Rep1.1 (I).

Resolución del ejercicio (e)

La representación gráfica esbozada por la estudiante es adecuada (Rep3.1 (I)). La mayoría de los estudiantes restringe la representación a los pares de cantidades suministrados en el enunciado de la tarea. No hay modificaciones en la resolución de este ejercicio.

8.2.6 Tarea 6 "Compartiendo Pizza"

En la Tabla 8.13 mostramos una síntesis de las modificaciones manifestadas por D6 en la resolución de la Tarea 6. Después de la tabla describimos el trabajo realizado sobre el cual se han mostrado tales cambios.

Tabla 8.13. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de D6, Tarea 6*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
CoR1	1	1	*
Error CoR	1	0	+
RPr1	1	1	*
IR1	1	0	–
IR3	1	1	*
Total de Modificaciones			+1 y -1

Resolución del ejercicio (a)

En el trabajo individual, hecho en el aula, la estudiante aplica la división entre las cantidades de personas y pizzas para conocer el valor racional de cada una de las razones (CoR1), posteriormente con base en esos números sugiere que en la primera mesa se come más pizza. La respuesta de la estudiante obedece a una interpretación inadecuada del cociente de las divisiones, en ambos casos obtiene la cantidad intensiva personas/1pizza y si hay más personas para una pizza pues se come menos cantidad. Esta explicación debía haberla llevado a decantarse por la segunda mesa (Error CoR). En la resolución posterior de la tarea observamos una modificación en la actuación descrita anteriormente pues la estudiante vuelve a aplicar la división pero en este caso invierte el orden de las cantidades y obtiene en el cociente la cantidad intensiva pizza/1persona por lo que la interpretación mostrada es adecuada, consideramos que esta modificación es positiva y se puede apreciar en las Figuras 8.21 y 8.22 en las que se muestra la resolución hecha por D6 en el ejercicio (a).

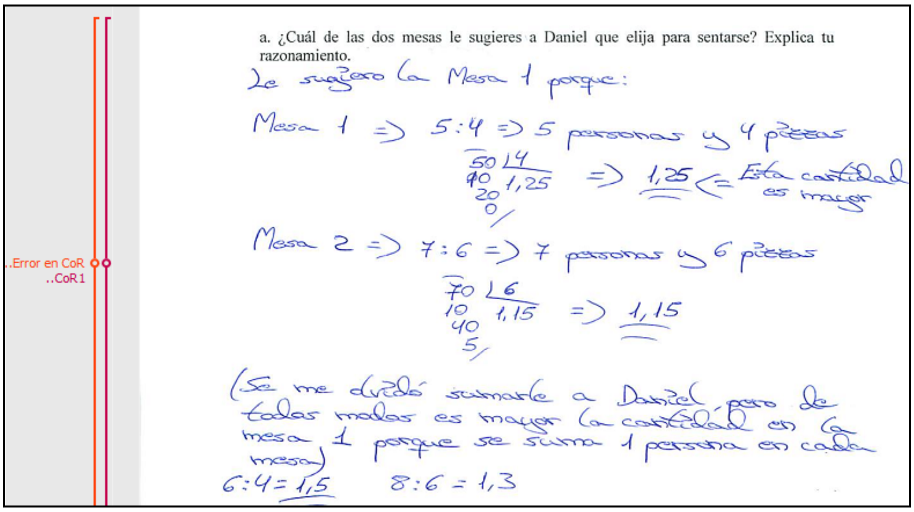


Figura 8.21. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T6 (Caso D6)

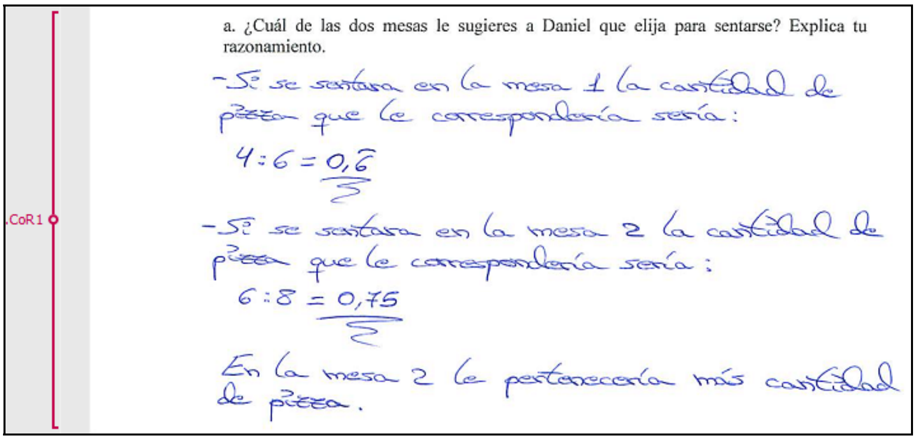


Figura 8.22. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T6 (Caso D6)

<u>*Resolución del ejercicio (b)*</u>

En los dos trabajos sobre la T6 la estudiante aplica el esquema de resolución que hemos descrito a través de RPr1 (Ver Apartado 7.6.1.3). En ambos casos reconoce la relación multiplicativa entre las cantidades de personas (IR3). En relación con la interpretación de la razón observamos que en la primera resolución la estudiante explicita el significado de la razón 7:4 al indicar "*cada 7 mesas grandes hay 4 pequeñas*", también agrega "*80 personas, suponiendo que sólo hay 7 mesas grandes y 4 pequeñas*". En estos aportes observamos que la estudiante reconoce el carácter de relación dinámica de la razón (IR1), esta actuación no la expresa en el trabajo posterior.

8.2.7 Tarea 7 "El Palacio Real de la Alhambra"

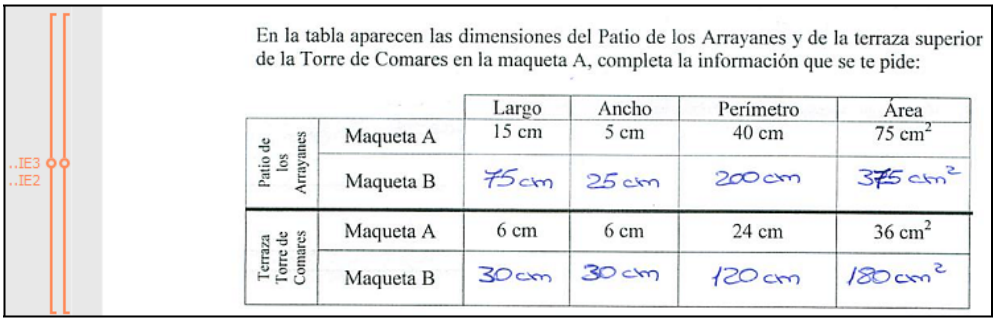
En la Tabla 8.14 mostramos una síntesis de los indicadores manifestados por la estudiante D6 en las dos resoluciones individuales de la T7. Como se muestra en la tabla detectamos dos modificaciones positivas, las cuales han tenido lugar en las dos partes de cada fase de la tarea.

Tabla 8.14. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de D6, Tarea 7*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
IE2	2	2	*
IE3	2	0	+
C2	2	0	+
C3	0	2	
Total de Modificaciones			+2

Resolución del ejercicio (a) de cada Fase

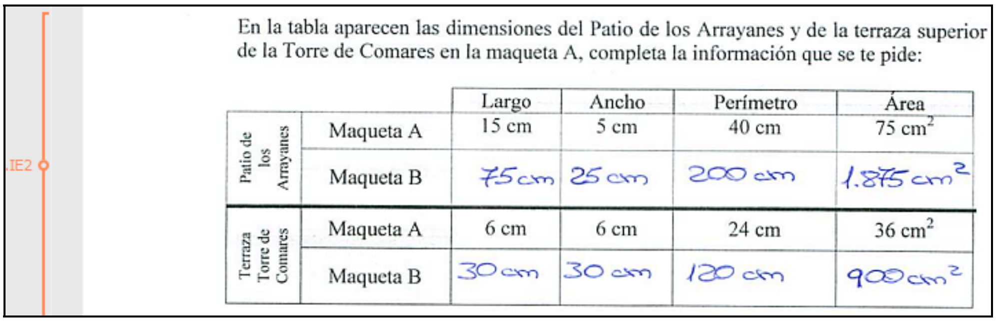
En ambos trabajos la estudiante aplica la escala para obtener la medida de las longitudes de la maqueta B (IE2). En la primera resolución evidencia la aplicación de la relación lineal 1:5 para determinar la medida del área del Patio de los Arrayanes y de la Torre de Comares; de la misma manera en el ejercicio (a) de la segunda fase aplica la escala para hallar el volumen del estanque de agua. Estas actuaciones son evidencias de la presencia del fenómeno de la ilusión de linealidad (IE3). En el trabajo posterior observamos que la estudiante no da muestra de esta actuación, lo cual constituye una modificación positiva. En las Figuras 8.23 y 8.24 presentamos el trabajo realizado por D6 en ambas entregas.



En la tabla aparecen las dimensiones del Patio de los Arrayanes y de la terraza superior de la Torre de Comares en la maqueta A, completa la información que se te pide:

		Largo	Ancho	Perímetro	Área
Patio de los Arrayanes	Maqueta A	15 cm	5 cm	40 cm	75 cm^2
	Maqueta B	75 cm	25 cm	200 cm	375 cm^2
Terraza Torre de Comares	Maqueta A	6 cm	6 cm	24 cm	36 cm^2
	Maqueta B	30 cm	30 cm	120 cm	180 cm^2

Figura 8.23. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T7 (Caso D6)



En la tabla aparecen las dimensiones del Patio de los Arrayanes y de la terraza superior de la Torre de Comares en la maqueta A, completa la información que se te pide:

		Largo	Ancho	Perímetro	Área
Patio de los Arrayanes	Maqueta A	15 cm	5 cm	40 cm	75 cm^2
	Maqueta B	75 cm	25 cm	200 cm	1.875 cm^2
Terraza Torre de Comares	Maqueta A	6 cm	6 cm	24 cm	36 cm^2
	Maqueta B	30 cm	30 cm	120 cm	900 cm^2

Figura 8.24. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T7 (Caso D6)

Resolución del ejercicio (b) de cada Fase

En el trabajo inicial la estudiante elabora dos casos particulares sobre los cuales se basa para describir la relación que observa entre las áreas (Fase I) o volúmenes correspondientes (Fase II). En el caso de las áreas dibuja dos rectángulos cuya razón de semejanza es dos, luego calcula el área de cada uno y concluye que el área mayor es cuatro veces el área menor, justifica esto indicando que se debe a que cada medida se ha ampliado dos veces y el producto de esas dos ampliaciones es cuatro. En el caso de los volúmenes procede de la misma manera, considera dos prismas de base cuadrada cuya razón entre las aristas es de 1:5 y después de calcular el volumen de cada uno concluye que el volumen de la segunda figura es 125 veces mayor que el de la primera. Observamos que la estudiante explora el principio que relaciona las razones de estas magnitudes y logra describir una relación entre las áreas o volúmenes vinculada directamente con la que se pedía en el enunciado del ejercicio, por lo anterior se le asignó el indicador C2, caracterizado en el Capítulo 7 (Apartado 7.7.1.2).

En el trabajo posterior la estudiante modifica su trabajo y lo centra específicamente en las razones entre áreas, longitudes o volúmenes, describe la conjetura de forma adecuada (C3) evidenciando que ha considerado los aportes que se han expuesto durante la puesta en común de la tarea, su actuación refleja una modificación positiva.

8.3 El Caso del Estudiante B7 (G1)

En el Anexo N.3 aparecen los trabajos individuales de la estudiante B7. En los siguientes apartados describimos la resolución mostrada por la estudiante en cada uno de los ejercicios de las tareas. Ilustramos algunas de las modificaciones manifestadas con segmentos procedentes de las resoluciones de la estudiante.

8.3.1 Tarea 1 "Fracción, Razón y Porcentaje"

En la Tabla 8.15 se recogen los indicadores asignados a las producciones individuales de la estudiante. En vista de las actuaciones manifestadas detectamos dos modificaciones en su trabajo posterior, una positiva y una negativa.

Tabla 8.15. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B7, Tarea 1*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Com. P-P	0	2	+
Com. P-T	3	1	–
NR1	1	1	*
Total de Modificaciones			+1 y -1

Resolución del ejercicio (a)

La estudiante modifica su respuesta inicial ya que en la primera entrega indica la relación entre cada una de las partes y el todo (Comp. P-T) utilizando la noción de fracción, posteriormente señala de manera incompleta la relación entre las partes (Comp. P-P). Expresa solamente "$\frac{2}{3}$ *de la región no cultivada*" sin especificar a qué hacen referencia los dos tercios.

Resolución del ejercicio (b)

En este ejercicio la modificación se evidencia en el tipo de comparación establecida, en el trabajo inicial expresa mediante porcentajes la comparación entre la parte cultivada y el total de regiones de cultivo, de la misma manera lo hizo con las partes no cultivadas. En el trabajo posterior la estudiante hace referencia a la relación entre la parte cultivada y las partes no cultivadas, expresa la comparación en los dos sentidos, esto es tomando como “todo” los campos sin cultivar y luego tomando como “todo” la parte cultivada. En las Figuras 8.25 y 8.26 presentamos las actuaciones de la estudiante.

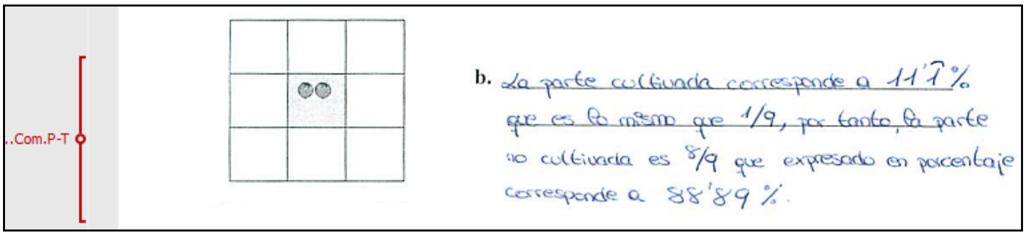


Figura 8.25. Resolución inicial del ejercicio (b) de la T1 (Caso B7)

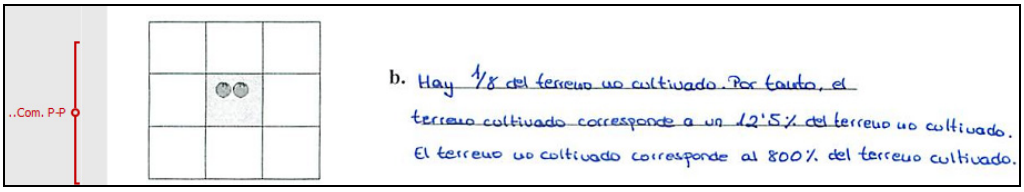


Figura 8.26. Resolución posterior del ejercicio (b) de la T1 (Caso B7)

Resolución del ejercicio (c)

En la primera resolución del ejercicio la estudiante describe la relación entre las partes y el todo, perspectiva que no modifica en la segunda resolución (Comp. P-T). También inicialmente refleja la concepción que considera a la razón como una descripción cuantitativa de las partes (NR1) y posteriormente indica “*hay cuatro partes cultivadas de seis, por lo tanto la relación es de 4:6*” en relación a lo cual consideramos que aunque haga uso de la representación simbólica de la razón continúa poniendo de manifiesto la misma concepción de la razón.

8.3.2 Tarea 2 “Preferencia en el Refresco de Cola”

En la Tabla 8.16 presentamos una síntesis de las actuaciones mostradas por la estudiante en ambos trabajos individuales sobre la Tarea 2. Hemos detectado tres modificaciones positivas en su resolución posterior, mismas que describimos a continuación de la tabla.

Tabla 8.16. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B7, Tarea 2*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
(a.2)	1	1	*
(b.1)	0	1	+
(b.2)	1	0	
(c.1)	1	1	*
IR1.1	0	2	+
CPr.1	1	1	*
CPr.3	1	0	+
Total de Modificaciones			+3

Resolución del ejercicio (a)

En el tratamiento de este ejercicio no se manifestó ninguna modificación. En ambas resoluciones la estudiante considera que las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta y se basa en una relación multiplicativa que ha detectado entre las cantidades involucradas en las dos razones (a.2). Tal relación consiste en que el cociente de 17139 entre tres y de 11426 entre dos es el mismo (5713), esta es una consecuencia de la equivalencia de las razones 3: 2 y 17139:11426, y aunque la estudiante no exprese explícitamente este fundamento reconocemos en su actuación la presencia implícita de la propiedad (CPr.1).

Resolución del ejercicio (b)

En el trabajo inicial la estudiante elige la segunda afirmación como la más adecuada para expresar la comparación entre las dos marcas de refresco (b.2), sustenta su decisión alegando que al hacer la resta de los elemento se puede conocer la diferencia en la cantidad de personas que prefieren uno u otro refresco, la cual aparece en la tercera afirmación. Esta respuesta evidencia la creencia de que los elementos de la razón hacen referencia al total de cada una de las partes comparadas y, por consecuencia, al total de elementos del conjunto sobre el cuál actúa la relación. Esta actuación se ha vinculado con la concepción CPr.3. En el trabajo posterior modifica su elección ya que dice que la primera afirmación es la que mejor describe la comparación, señala que ésta afirmación indica que en un grupo de cinco personas, tres prefieren una marca y dos prefieren la otra, interpretación adecuada de la razón (IR1.1). No es del todo claro que esta actuación refleje la presencia de la concepción CPr.3 pero tampoco creemos que esté totalmente exenta de su presencia, ante esta dualidad decidimos no catalogarla con este indicador, y en consecuencia se da una modificación en relación con el trabajo inicial.

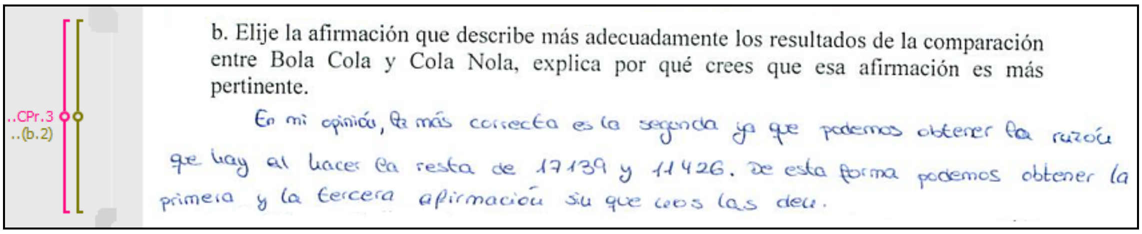

..CPr.3
..(b.2)
b. Elije la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.
En mi opinión, la más correcta es la segunda ya que podemos obtener la razón que hay al hacer la resta de 17139 y 11426. De esta forma podemos obtener la primera y la tercera afirmación sin que nos las den.

Figura 8.27. Resolución inicial del ejercicio (b) de la T2 (Caso B7)

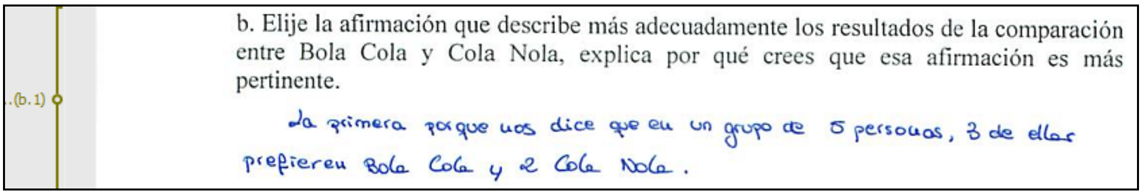

..(b.1)
b. Elije la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.
La primera porque nos dice que en un grupo de 5 personas, 3 de ellas prefieren Bola Cola y 2 Cola Nola.

Figura 8.28. Resolución posterior del ejercicio (b) de la T2 (Caso B7)

Resolución del ejercicio (c)

En las dos resoluciones la estudiante afirma que el primer enunciado es el más eficaz para utilizar en un anuncio publicitario (c.1), se trata del que considera la razón 3:2. Apoya su postura indicando que es "*la más fácil de divulgar y de comprender ya que de* *esta forma sabemos que de un grupo de 5 personas, 3 prefieren Bola Cola y 2 Cola Nola*". Observamos así una modificación en la respuesta de la estudiante pues se evidencia que interpreta la razón adecuadamente (IR1.1) afirmando que hay tres que prefieren un tipo de refresco y dos que prefieren el otro, aunque se limite a un grupo de 5 personas.

Resolución del ejercicio (d)

La estudiante no resuelve este ejercicio en los dos trabajos individuales.

8.3.3 Tarea 3 "Los Niveles de CO_2"

En la Tabla 8.17 se aprecia que la estudiante no manifiesta ninguna modificación en su trabajo posterior. A continuación de la tabla describimos el trabajo realizado en las dos resoluciones individuales de la estudiante B7.

Tabla 8.17. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B7, Tarea 3*

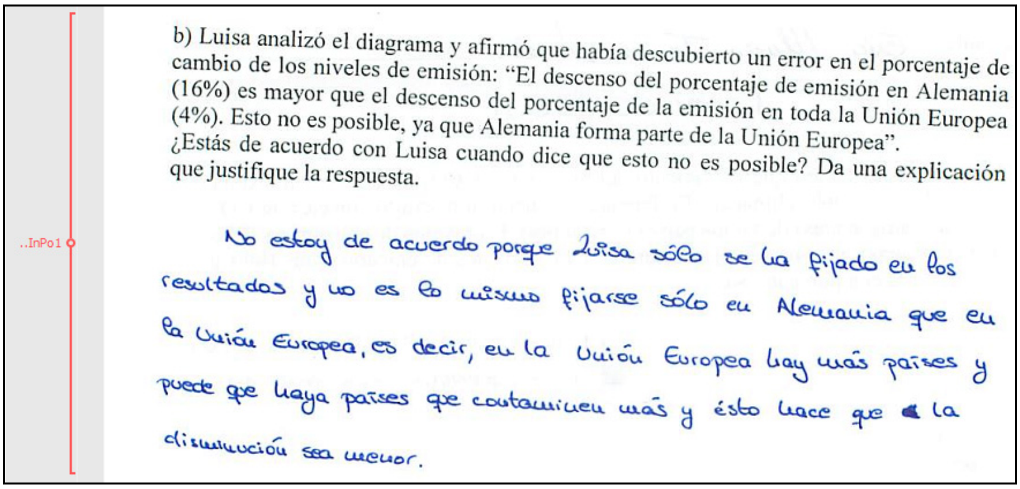
Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
NP1	1	1	*
InPo1	1	1	*
CoAdMu2	1	1	*
Total de Modificaciones			0

Resolución del ejercicio (a)

La estudiante aplica la regla de tres (NP1) siguiendo el esquema (a) descrito en el análisis retrospectivo de la sesión 2 (Apartado 7.3.1.1), el mismo le permite mostrar de manera directa la obtención del porcentaje correspondiente al aumento en las emisiones de CO_2 de Estados Unidos.

Resolución del ejercicio (b)

En los dos trabajos individuales detectamos la posibilidad de que la estudiante haya interpretado adecuadamente el porcentaje de las emisiones de la Unión Europea pues no evidencia de manera explícita la concepción que considera al porcentaje como la media de los porcentajes de los países integrantes. En su explicación hace referencia genérica a que el aumento en las emisiones de CO_2 provocado por otros países podría incidir sobre la UE, pero no señala si este aumento es absoluto o relativo. En la Figura 8.29 mostramos la actuación descrita.


..InPo1

b) Luisa analizó el diagrama y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) es mayor que el descenso del porcentaje de la emisión en toda la Unión Europea (4%). Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea". ¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique la respuesta.

No estoy de acuerdo porque Luisa sólo se ha fijado en los resultados y no es lo mismo fijarse sólo en Alemania que en la Unión Europea, es decir, en la Unión Europea hay más países y puede que haya países que contaminen más y ésto hace que la disminución sea menor.

Figura 8.29. Resolución posterior del ejercicio (b) de la T3 (Caso B7)

<u>*Resolución del ejercicio (c)*</u>

Tampoco muestra ninguna modificación en el tratamiento de este ejercicio, en ambas respuestas la estudiante indica que las personas actúan de manera distinta, una mirando las barras del gráfico y otro considerando los porcentajes (CoAdMu2).

8.3.4 Tarea 4 "Crecimiento de Bacterias"

La estudiante B7 muestra cinco modificaciones positivas en su trabajo posterior, en la Tabla 8.18 presentamos los indicadores sobre los cuales se han manifestado tales cambios. A continuación de la tabla describimos el trabajo realizado por la estudiante.

Tabla 8.18. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B7, Tarea 4*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re2	0	1	+
Re3	1	1	*
Re5	0	1	+
Pr1	1	1	*
Pr4	0	1	+
Pr5	1	1	*
Rep1 (D)	0	1	+
Rep3 (D)	1	0	
Rep4 (D)	1	1	*
EstAd	1	1	*
EstMu	0	1	+
Total de Modificaciones			+5

<u>*Resolución del ejercicio (a)*</u>

En las dos entregas del trabajo individual la estudiante describe la relación funcional entre las magnitudes (Re3). Primero lo hace de manera verbal y después la expresa combinando palabras y símbolos, como puede apreciarse en las Figuras 8.30 y 8.31. La modificación en la resolución del ejercicio se deriva de la exposición por parte de B7 de otras relaciones entre las cantidades. Describe la relación escalar cuando indica "*si multiplico por un número las cantidades también se multiplican por el mismo*". En la tabla señala esta relación entre algunos pares de cantidades (Re2). Señala la equivalencia de las razones mediante la expresión de dos razones y el trazo de dos flechas cruzadas que indican usualmente la igualdad del producto (Re5), si bien nombra esta relación como "*fracciones equivalentes*", actuación que podemos explicar considerando que los estudiantes han tenido más experiencia con el estudio de las fracciones a lo largo de su proceso formativo.

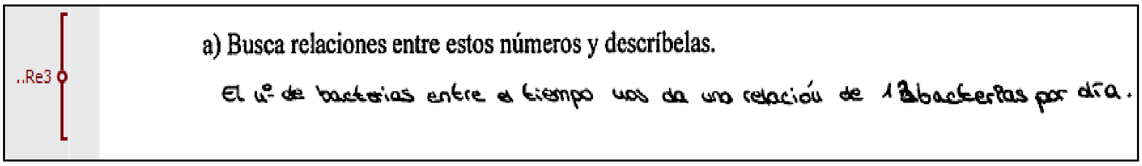


Figura 8.30. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T4 (Caso B7)

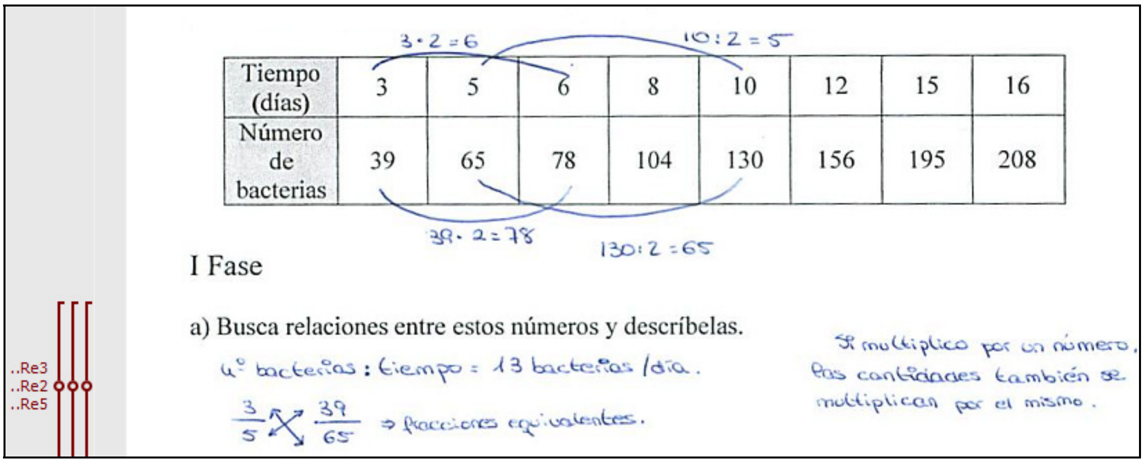


Figura 8.31. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T4 (Caso B7)

Resolución del ejercicio (b)

La estudiante plantea la igualdad de la división Euclídea $D = d \cdot c + r$, luego sustituye los datos $D = 650, d = 13, r = 0$, realiza la división (Pr1) en el ejercicio (b.1) y en el ejercicio (b.2) realiza la multiplicación (Pr5). La modificación la encontramos en el trabajo posterior en donde además del procedimiento descrito anteriormente la estudiante señala que las cantidades pueden averiguarse por tanteo o completando la tabla hasta 650 (Pr4), esta actuación corresponde a la estrategia de construcción progresiva o "building-up strategy" (Lamon, 1993).

Resolución del ejercicio (c)

No se muestra modificaciones sustanciales en la resolución de este ejercicio, en ambas resoluciones la estudiante expresa la relación funcional entre las magnitudes con una ligera diferencia, en la resolución inicial combina palabras y símbolos pues indica $n^{o}\,\text{de bacterias} = n \cdot 13$ (Rep3 (D)), posteriormente solamente utiliza símbolos $B = 13 \cdot n$, además señala que la relación es una función lineal (Rep1 (D)).

Resolución del ejercicio (d)

La estudiante no modifica la representación gráfica de la relación. En ambas resoluciones traza una línea recta continua (Rep4 (D)), no considera la naturaleza discreta del conjunto de las bacterias y en su gráfica refleja que la relación inicia el primer día pues su trazo se origina en el par (1,13).

Resolución del ejercicio (a) de la II Fase

En el primer trabajo individual la estudiante muestra únicamente la comparación aditiva de las cantidades (EstAd), después de realizar la resta entre las medidas de cada bacteria concluye "*las dos bacterias han crecido lo mismo en cinco días*". En el trabajo realizado después de la intervención en el aula la estudiante manifiesta la perspectiva aditiva y la multiplicativa pues además de la diferencia indica el crecimiento relativo que han tenido las dos bacterias del 120% y 150% (EstMu), sin embargo, no aporta una respuesta en la que evidencia que interpreta adecuadamente estos datos. Evidentemente ha recuperado lo que se ha expuesto en la puesta en común de la Tarea pero no podemos afirmar que la estudiante percibe la diferencia entre estas dos vías de comparación de cantidades.

8.3.5 Tarea 5 "Permanencia Activa de un Fármaco"

Como se aprecia en la Tabla 8.19 la estudiante manifiesta solamente una modificación en su trabajo posterior sobre la Tarea 5, la misma se presentó en la resolución del ejercicio (a) y la detallamos después de la tabla.

Tabla 8.19. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B7, Tarea 5*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re1.1(I)	1	0	+
Re1.2(I)	0	1	
Pr4(I)	3	3	*
Rep1.1(I)	1	1	*
Rep3.1(I)	1	1	*
Total de Modificaciones			+1

Resolución del ejercicio (a)

La modificación manifestada por la estudiante la encontramos en la expresión de la relación funcional entre las magnitudes, en el primer trabajo expresa la relación combinando palabras y símbolos "cantidad de penicilina x tiempo = 120" (Re1.1(I)). Después describe la misma relación a través de la fórmula $ml \cdot h = 120 ml / h$, en la que señala el cociente de las unidades "ml / h" expresión que no es adecuada en el producto de las medidas cuyo resultado es una constante no una cantidad intensiva. La expresión simbólica de la relación funcional se ha catalogado por Re1.2 (I).

Resolución de los ejercicios (b) y (c)

En la resolución de los tres ejercicios de valor ausente no observamos ninguna modificación. En todos los casos la estudiante aplica la regla de tres inversa (Pr.4(I)) utilizando como referencia la relación entre la unidad (1 hora) y la cantidad inicial de medicamento. Aunque en los ejercicios (b.1) y (c) este procedimiento la conduce a una respuesta correcta, observamos que en la resolución del ejercicio (b.2) la aplicación de esta regla es incorrecta pues en lugar de dividir 120 por la cantidad de medicamento la estudiante multiplica lo cual nos permite confirmar que el uso de este procedimiento es mecánico, sin razonamiento o fundamento que guíe cada paso a seguir. En las Figuras 8.32 y 8.33 presentamos las actuaciones de la estudiante.

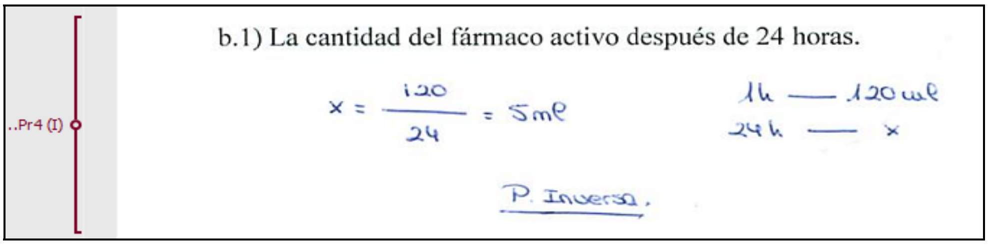


Figura 8.32. Resolución posterior del ejercicio (b.1) de la T5 (Caso B7)

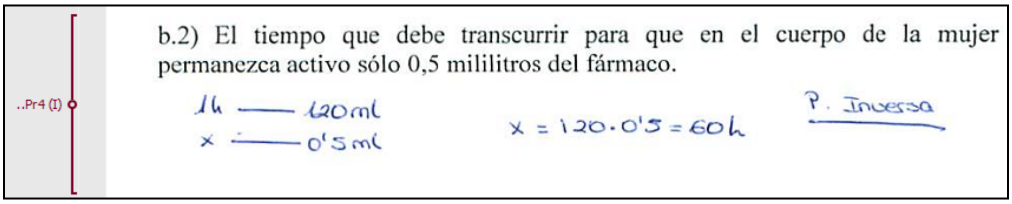


Figura 8.33. Resolución posterior del ejercicio (b.2) de la T5 (Caso B7)

Resolución del ejercicio (d)

En los dos trabajos representa la relación simbólicamente mediante la igualdad $M=\dfrac{120}{x}$ (Rep1.1 (I)), describe al lado de la misma el significado de cada variable y señala que el 120 procede de la relación detectada en el ejercicio (a).

Resolución del ejercicio (e)

Las dos representaciones gráficas de la relación son adecuadas, en ambas se refleja que la estudiante considera únicamente los valores de la tabla con lo que se evidencia que no reconoce cómo es el comportamiento de la relación cuando aumenta la cantidad de horas.

8.3.6 Tarea 6 "Compartiendo Pizza"

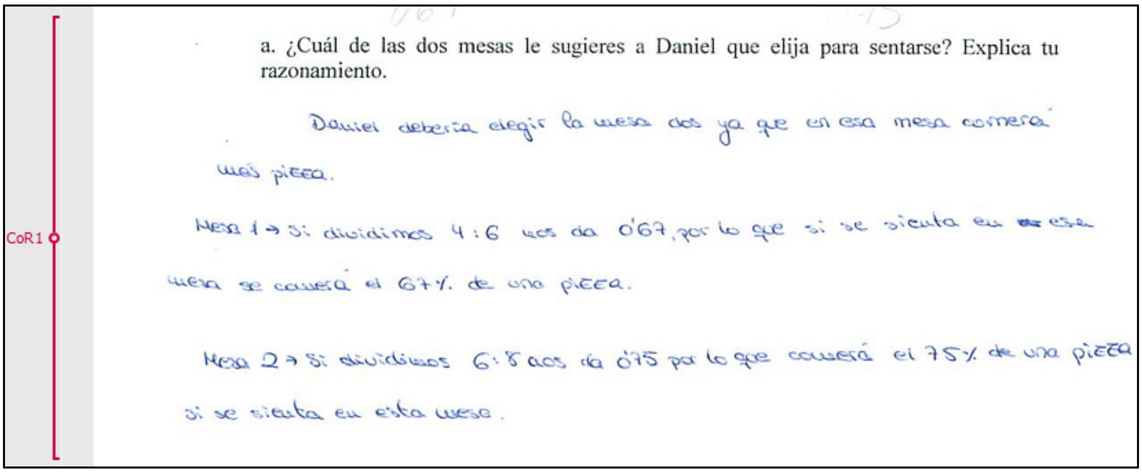
En la Tabla 8.20 se recogen las modificaciones manifestadas en el trabajo posterior de la Tarea 6, cuatro de éstas son positivas y se han dado en el marco del primer ejercicio relativo a la comparación de razones, el otro cambio ha sido negativo y se ha mostrado en la resolución del ejercicio (b).

Tabla 8.20. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B7, Tarea 6*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
CoR1	1	1	*
CoR2	0	1	+
CoR3	0	1	+
CoR5	0	1	+
CoR6	0	1	+
RPr1	1	1	*
IR1	1	0	–
IR3	1	1	*
Total de Modificaciones			+4 y -1

Resolución del ejercicio (a)

Para determinar cuál de las dos mesas ofrece la situación más favorable para comer pizza la estudiante recurre a la división de los elementos de cada razón para después comparar los valores racionales de las mismas (CoR1). Este acercamiento carece de indicadores del razonamiento proporcional pues la división elimina el carácter de relación y convierte el problema en una comparación de números decimales. En el trabajo posterior observamos que la estudiante B7 describe cuatro maneras adicionales para abordar la comparación de razones (CoR2, CoR3, CoR5 y CoR6), éstas se discutieron durante la puesta en común y constituyen alternativas que se basan principalmente en la normalización de razones (estrategias para igualar antecedentes o consecuentes) una descripción de las mismas se presenta en la planificación de la Tarea 6.


CoR1

a. ¿Cuál de las dos mesas le sugieres a Daniel que elija para sentarse? Explica tu razonamiento.

Daniel debería elegir la mesa dos ya que en esa mesa comerá más pizza.

Mesa 1 → si dividimos 4 : 6 nos da 0'67, por lo que si se sienta en esa mesa se comerá el 67% de una pizza.

Mesa 2 → si dividimos 6 : 8 nos da 0'75 por lo que comerá el 75% de una pizza si se sienta en esta mesa.

Figura 8.34. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T6 (Caso B7)

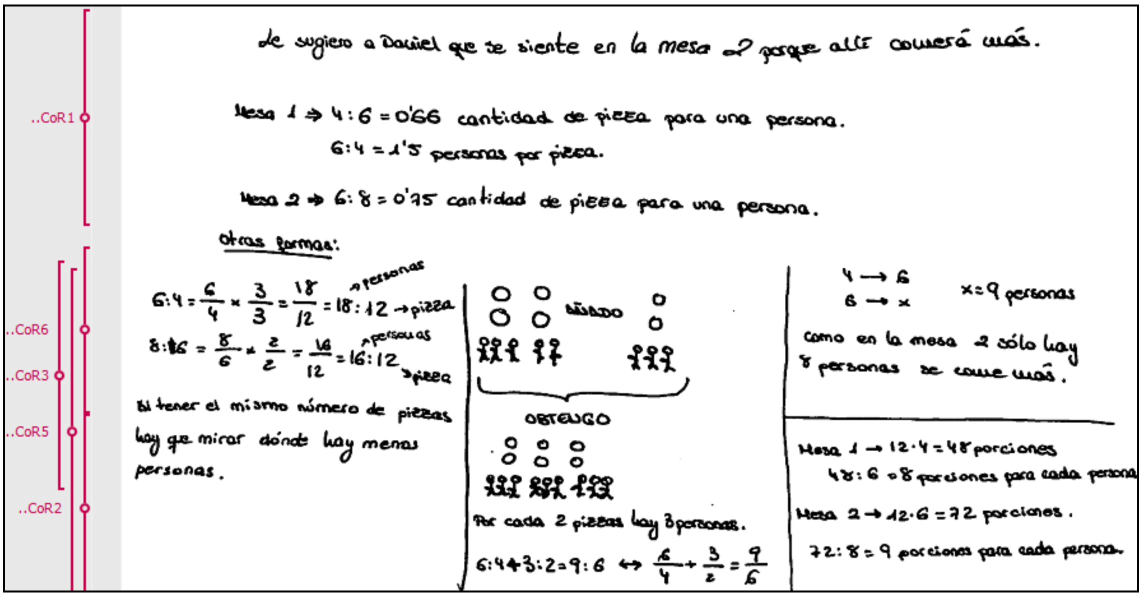


Figura 8.35. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T6 (Caso B7)

Resolución del ejercicio (b)

En ambas resoluciones la estudiante muestra el esquema descrito por el indicador (RPr1) mismo que ha sido detallado en el apartado “Actuaciones en el reparto proporcional” (Apartado 7.6.1.3). La modificación la detectamos en la ausencia del indicador IR1 en la resolución posterior del ejercicio, este indicador corresponde a la descripción explícita del significado de la razón 7:4. En ambos trabajos la estudiante identifica la relación multiplicativa entre las cantidades de personas y la extiende a las cantidades de los dos tipos de mesas (IR1).

8.3.7 Tarea 7 “El Palacio Real de la Alhambra”

Las modificaciones manifestadas en la resolución de la última tarea se aprecian en el ejercicio (b) relativo al enunciado de una conjetura sobre la relación entre las razones de longitud, área o volumen.

Tabla 8.21. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B7, Tarea 7*

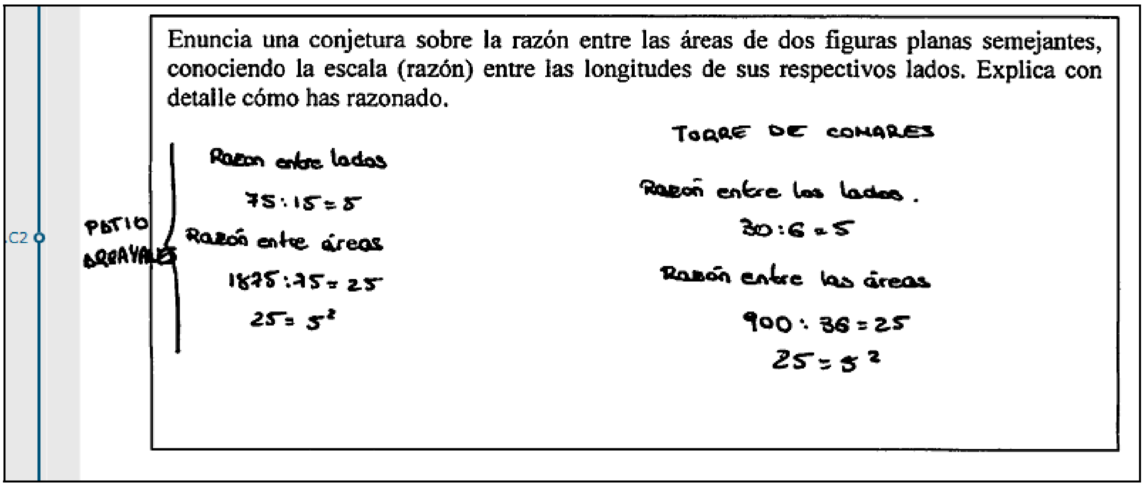
Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
IE2	2	2	*
C2	0	1	+
C3	0	1	+
Total de Modificaciones			+2

Resolución del ejercicio (a) de cada Fase

En esta parte no manifiesta ningún cambio, la estudiante aplica la escala 1:5 para hallar las longitudes de la maqueta B y las fórmulas conocidas para calcular el área y volumen solicitados (IE2).

<u>*Resolución del ejercicio (b) de cada Fase*</u>

La modificación es evidente en tanto que en el trabajo inicial la estudiante no resuelve esta parte de la tarea mientras que posteriormente sí lo hace. En su trabajo posterior apreciamos que la estudiante busca la razón entre los lados y entre las áreas para cada uno de los casos particulares suministrados en el enunciado de la tarea, no obstante, aunque parece que ella percibe la relación entre ambas razones, pues escribe $25 = 5^2$, no describe la conjetura verbalmente de una manera integral. Este tipo de actuación se ha catalogado como C2. En el caso del ejercicio (b) de la segunda fase observamos que sí logra describir verbalmente la conjetura, ya que además de buscar las razones correspondientes a las longitudes de las aristas y a los volúmenes de los dos estanques escribe "*en dos prismas semejantes cuya razón entre las aristas es k, la razón entre los volúmenes es k^3*", enunciado que ha recuperado de la puesta en común.


C2

Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

PATIO ARRAYANES

Razon entre lados

75:15=5

Razón entre áreas

1875:75=25

$25=5^2$

TORRE DE COMARES

Razón entre los lados.

30:6=5

Razón entre las áreas

900:36=25

$25=5^2$

Figura 8.36. Resolución posterior del ejercicio (b) de la T7 (Caso B7)

8.4 EL CASO DE LA ESTUDIANTE C3 (G2)

En el Anexo N.4 aparecen los protocolos de trabajo individual de la estudiante C3. El análisis se presenta siguiendo el mismo esquema utilizado en los estudios de casos anteriores.

8.4.1 Tarea 1 "Fracción, Razón y Porcentaje"

En la Tabla 8.22 mostramos una síntesis de las modificaciones manifestadas por la estudiante C3 en la resolución de la Tarea 1.

Tabla 8.22. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C3, Tarea 1*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Com. P-P	1	1	*
Com. P-T	2	3	+
NP3	1	0	+
NR1	1	0	–
NR2	0	1	+
Total de Modificaciones			+3 y -1

Resolución del ejercicio (a)

En el trabajo inicial la estudiante describe una relación entre el total de campos y los campos cultivados, sin embargo no hace uso de las representaciones verbales o simbólicas de la fracción. En el trabajo realizado fuera de clase la estudiante describe la comparación entre las regiones cultivadas, no cultivadas y el total mediante fracciones, lo hace estableciendo tanto la relación parte-parte como la relación parte-todo. La descripción de la relación parte-parte no es específica pues la estudiante indica en la fracción a qué corresponde el numerador y el denominador, sin embargo, se echa en falta la descripción de la relación mediante una frase completa como "*las regiones cultivadas corresponden a* $\frac{2}{3}$ *de las regiones no cultivadas*".

Resolución del ejercicio (b)

La estudiante C3 describe la relación entre las regiones no cultivadas y el total mediante el 80% y la relación entre las regiones cultivadas y el total con el 1%. En esta actuación se aprecia una interpretación inadecuada del porcentaje (NP3). Esta concepción revela la consideración de los datos absolutos como normalizados, por un lado equiparando el valor de 10% a cada región sin cultivar y posteriormente indicando que una región cultivada es el 1%. En la resolución posterior la estudiante no manifiesta el indicador NP3 pero tampoco describe la relación entre las partes porcentualmente, en su lugar describe la relación entre la parte cultivada y el todo de manera verbal, consideramos esta modificación positiva. En las Figuras 8.37 y 8.38 presentamos las actuaciones de la estudiante en este ejercicio.

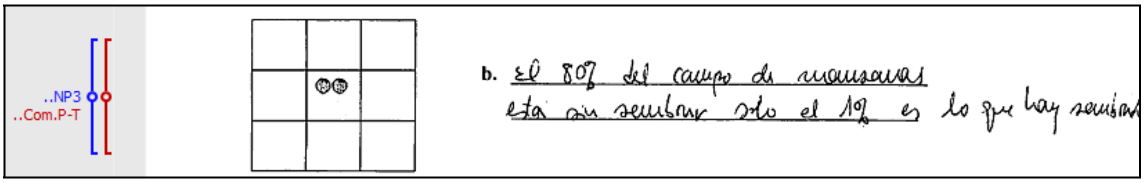


Figura 8.37. Resolución inicial del ejercicio (b) de la T1 (Caso C3)

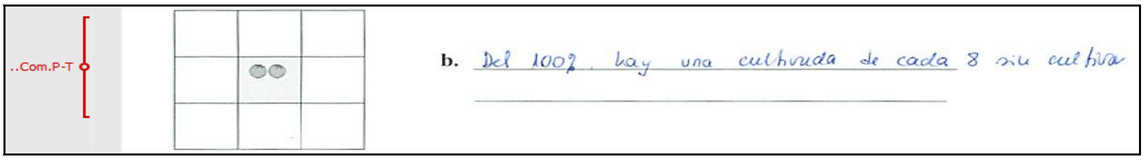


Figura 8.38. Resolución posterior del ejercicio (b) de la T1 (Caso C3)

Resolución del ejercicio (c)

En la primera resolución del ejercicio (c) la estudiante C3 describe la relación entre las partes expresando "*hay el doble de sembrado en comparación de lo no sembrado*", en esta afirmación se evidencia la interpretación de la razón como descripción cuantitativa de las partes (NR1) con la peculiaridad de hacer mención a la relación multiplicativa entre las partes y no a la cantidad de partes que hay de cada tipo.

En la resolución posterior la estudiante centra su resolución en la relación parte-todo (Com. P-T), utiliza la representación de la razón 4:6 e indica "*de cada seis cuatro están cultivadas*" actuación que ejemplifica el indicador NR2, éste se describe en el apartado 7.1.1.1; en vista de lo expuesto por la estudiante C3 consideramos que hubo una doble modificación en la resolución de este ejercicio.

8.4.2 Tarea 2 "Preferencia en el Refresco de Cola"

En la resolución posterior de la Tarea 2 la estudiante muestra dos modificaciones positivas, en la Tabla 8.23 se recogen los indicadores mostrados en las dos resoluciones individuales de C3.

Tabla 8.23. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C3, Tarea 2*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
(a.5)	1	0	*
(a.1)	0	1	
(b.1)	1	1	*
(c.3)	1	0	+
(c.1)	0	1	
IR1.3	2	1	*
Rep2	0	1	+
Rep6	1	1	*
Total de Modificaciones			+2

Resolución del ejercicio (a)

En ambas resoluciones la estudiante manifiesta acercamientos que no conducen a una respuesta acertada del ejercicio. A la primera respuesta se le ha asignado el indicador (a.5) debido a que es genérica y carece de algún argumento que la sustente, cambia la segunda respuesta indicando que las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta debido a que son equivalentes (a.1). Consideramos que no se ha dado ninguna modificación en tanto que ambos acercamientos no conducen a un tratamiento adecuado de la pregunta.

Resolución del ejercicio (b)

En la entrega inicial la estudiante sugiere que la primera afirmación es la que mejor describe la comparación entre las personas que prefieren uno u otro refresco (b.1), en la explicación aportada por C3 se evidencia la interpretación de la razón 3:2 catalogada como IR1.3 (Ver Apartado 7.2.1.1) misma que hace referencia a la consideración de dos elementos en un conjunto de tres. En el trabajo posterior continúa eligiendo la primera afirmación como la más adecuada. En su razonamiento expone "*ésta es donde se visualiza mejor*", en este caso no muestra la interpretación IR3.

Resolución del ejercicio (c)

En este ejercicio modifica la elección mostrada inicialmente, la tercera afirmación (c.3), por la primera afirmación (c.1). En la elección de la tercera afirmación asevera que la misma indica la cantidad exacta de personas que prefieren la Bola Cola, sin considerar respecto a qué cantidad se ha obtenido esa diferencia. En el trabajo posterior señala que la primera afirmación es más fácil de divulgar porque "*no implica apenas razonamiento, solo debe comparar 3:2, de cada tres personas dos prefieren Bola Cola*", en esta respuesta reconocemos la presencia de la interpretación IR3.

Resolución del ejercicio (d)

En el trabajo inicial la estudiante representa gráficamente (Rep6) lo que para ella significa 3:2, de tres elementos o tres partes toma dos, desde la perspectiva supuesta consideramos que su concepción contempla a la fracción $\frac{2}{3}$. Esta actuación la hemos descrito con el indicador IR1.3 (Ver Figura 8.39). En el trabajo posterior representa la relación 3:2 mediante los porcentajes 60% y 40% y presenta un diagrama circular dividido según esta proporción (Ver Figura 8.40).

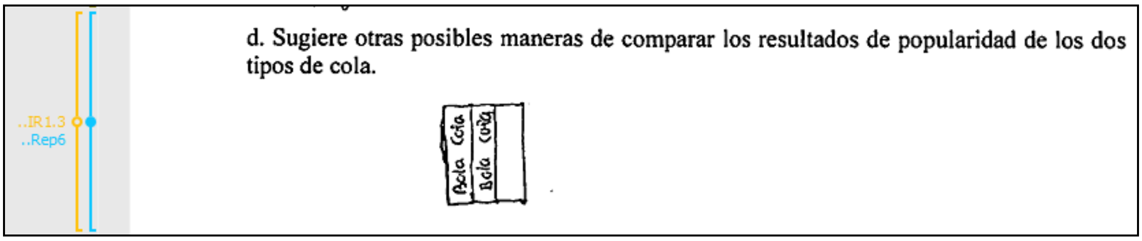


Figura 8.39. Resolución inicial del ejercicio (d) de la T2 (Caso C3)

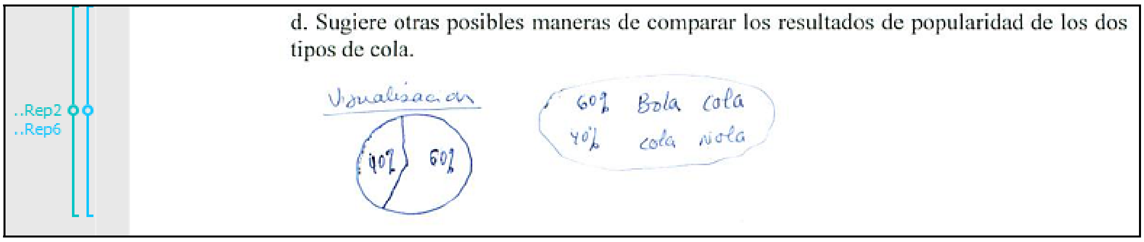


Figura 8.40. Resolución posterior del ejercicio (d) de la T2 (Caso C3)

8.4.3 Tarea 3 "Los Niveles de CO_2"

La estudiante C3 manifiesta solo una modificación en la resolución de la Tarea 3, la misma se presentó en la resolución del ejercicio (a) el cual describimos después de la Tabla 8.24.

Tabla 8.24. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C3, Tarea 3*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
NP1	0	1	+
InPo2	0	1	*
CoAdMu2	1	1	*
Total de Modificaciones			+1

Resolución del ejercicio (a)

En la primera resolución de la Tarea 3 observamos, tal y como lo evidencia la Figura 8.41, que la estudiante manifiesta no saber cómo hacer el ejercicio. En la resolución posterior manifiesta tres esquemas distintos de resolución basados en la regla de tres (NP1), estos se discutieron durante la puesta en común. Aunque esta manifestación no significa necesariamente que la estudiante haya comprendido las vinculaciones expuestas en relación con las tres aproximaciones, consideramos que la estudiante C3 ha tenido la oportunidad de conocer o recordar cómo obtener un porcentaje; en todo caso la modificación ha sido positiva.

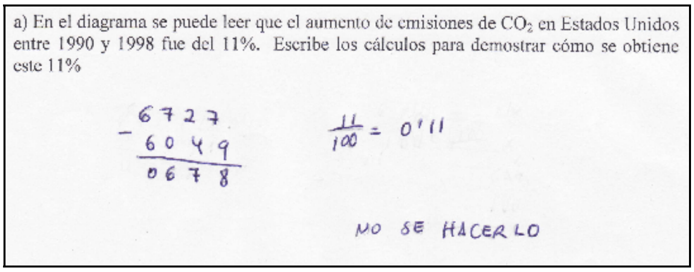


Figura 8.41. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T3 (Caso C3)

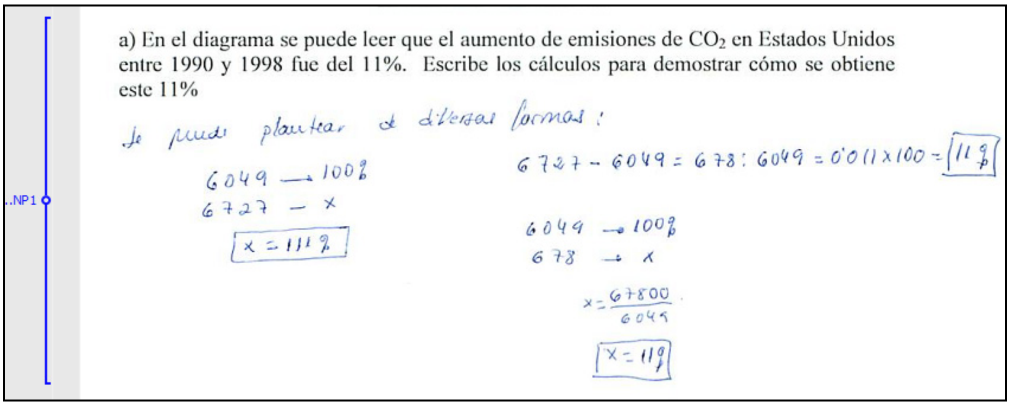


Figura 8.42. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T3 (Caso C3)

Resolución del ejercicio (b)

En la primera entrega de la tarea la estudiante plantea "*Es posible que Alemania aunque forme parte de la UE esté comparada con el resto de países*", no la hemos catalogado porque consideramos que esta respuesta carece de alguna interpretación sobre el porcentaje en cuestión. En la resolución posterior la actuación de la estudiante es un ejemplo de la interpretación InPo2, misma que considera al porcentaje como resultado de una media de otros porcentajes.

Resolución del ejercicio (c)

No hay modificación en la resolución del ejercicio (c), en ambos trabajos señala lo que ha hecho Antonio y Luisa para dar las respuestas distintas (CoAdMu2). La estudiante no explica o conjetura acerca de las razones matemáticas que respaldan la postura asumida por cada una de estas personas.

8.4.4 Tarea 4 "Crecimiento de Bacterias"

La estudiante modifica sustancialmente la resolución posterior de la Tarea 4, detectamos 11 modificaciones positivas. En el trabajo inicial la estudiante no resuelve tres de los ejercicios, y en los que sí resuelve no refleja actuaciones basadas en el razonamiento proporcional. En la Tabla 8.25 recogemos los indicadores detectados en los trabajos de C3 y las modificaciones observadas, después de la misma detallamos el tratamiento dado por la estudiante a cada ejercicio.

Tabla 8.25. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C3, Tarea 4*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re1	1	0	+
Re2	0	1	+
Re3	0	1	+
Pr1	0	1	+
Pr3	0	1	+
Pr4	2	0	+
Pr5	0	1	+
Rep1 (D)	0	1	+
Rep5 (D)	0	1	+
EstAd	0	1	+
EstMu	0	1	+
Total de Modificaciones			+11

Resolución del ejercicio (a)

En la primera resolución del ejercicio (a) la estudiante describe las relaciones aditivas que ha detectado entre las cantidades de tiempo y de bacterias (Re1). En la tabla del enunciado señala la diferencia entre cantidades adyacentes de cada magnitud, identifica que entre días pares consecutivos la diferencia es de 26 unidades mientras que en días consecutivos la diferencia es 13, comete el error de considerar que entre 3 y 5 días hay una diferencia de 1 día. Observamos que a pesar de detectar esa relación no la comunica adecuadamente pues indica "*en los días pares se mantiene el mismo número de bacterias (26) y en días impares 3, 5, 15, 16 se mantiene el mismo número de bacterias (13)*", señala en esa clase al 16 que no es impar por lo que interpretamos que se refiere a las cantidades consecutivas. En el trabajo posterior la estudiante recupera la descripción verbal de la relación de proporcionalidad directa expuesta en la revisión grupal de la tarea, entre las características señala la relación funcional (Re3) y la relación escalar (Re2).

Resolución del ejercicio (b)

Detectamos que en el trabajo inicial sobre el ejercicio (b.1), de valor ausente, la estudiante intenta construir una tabla de proporcionalidad como la del enunciado de la tarea pues intenta mantener la misma distancia entre las cantidades de tiempo. Aplica la suma repetidamente para completar las cantidades de bacterias, actuación que corresponde a la estrategia "building up" (Pr4), sin embargo, no llegó hasta la cantidad de 650 bacterias. En el trabajo posterior la estudiante utiliza la relación entre las magnitudes $\frac{B}{13}=t$ y realiza la división (Pr1), además manifiesta un procedimiento basado en la relación escalar entre las cantidades de bacterias 65 y 650 (Pr3). Estas modificaciones se pueden apreciar en las Figuras 8.43 y 8.44.

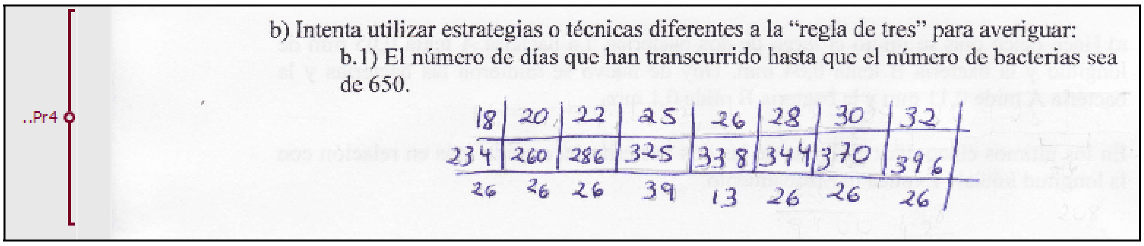


Figura 8.43. Resolución inicial del ejercicio (b.1) de la T4 (Caso C3)

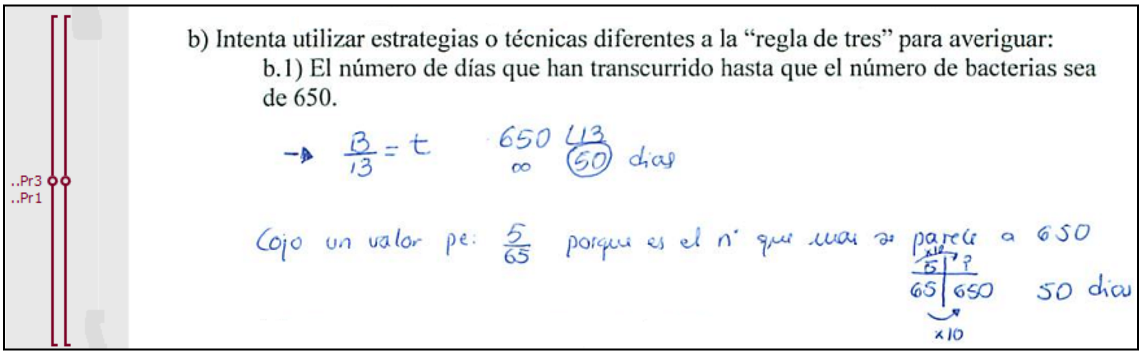


Figura 8.44. Resolución posterior del ejercicio (b.1) de la T4 (Caso C3)

En el ejercicio (b.2) la estudiante inicialmente da la respuesta (325) sin mostrar la aplicación de algún procedimiento que sustente ese resultado. Consideramos que posiblemente ha obtenido la respuesta de la tabla de proporcionalidad que elaboró para la resolución del ejercicio (b.1). En el trabajo posterior multiplica la cantidad de días por la constante de proporcionalidad (Pr5). El abandono de la estrategia building up y la adopción de procedimientos multiplicativos basados en la relación funcional constituyen una modificación positiva en el trabajo de C3.

Resolución del ejercicio (c)

Este ejercicio no lo resuelve en la primera aplicación de la tarea posiblemente debido a una limitación de tiempo. En la entrega posterior expresa la relación de manera simbólica a través de la fórmula $b=13\cdot n$, indicando el significado de cada variable (Rep1 (D)).

<u>Resolución del ejercicio (d)</u>

En el trabajo inicial no representa gráficamente la relación entre las magnitudes. Posteriormente esboza la gráfica adecuadamente considerando que las cantidades de bacterias están dadas en números naturales y que la relación se cumple a partir del tercer día (Rep5 (D)).

<u>Resolución del ejercicio (a) de la II Fase</u>

La estudiante no resuelve este ejercicio en la sesión. En el trabajo fuera de clase observamos que resuelve el ejercicio considerando las perspectivas, aditiva y relativa, discutidas en la puesta en común. En la Figura 8.45 presentamos la resolución manifestada por la estudiante C3.

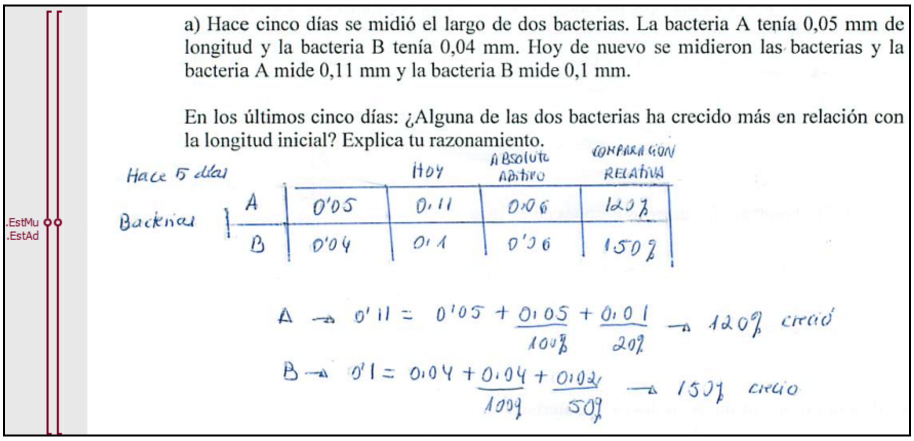


Figura 8.45. Resolución posterior del ejercicio (a) de la II Fase de la T4 (Caso C3)

8.4.5 Tarea 5 "Permanencia Activa de un Fármaco"

En la Tabla 8.26 recogemos los indicadores detectados en las resoluciones mostradas por la estudiante C3 en la Tarea 5, identificamos cinco modificaciones, tres positivas y dos negativas. Después de la tabla describimos el trabajo realizado en cada ejercicio.

Tabla 8.26. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C3, Tarea 5*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re1.1 (I)	1	1	*
Re2 (I)	0	1	+
Re3 (I)	1	0	–
Pr1 (I)	2	1	–
Pr2 (I)	0	2	+
Rep1.1 (I)	1	1	*
Rep1.2 (I)	0	1	+
Rep3.2 (I)	0	1	*
Total de Modificaciones			+3 y -2

Resolución del ejercicio (a)

En el primer trabajo detectamos que la estudiante describe verbalmente, y con algunos errores de comunicación, la relación funcional entre las magnitudes pues indica "*al dividir la cantidad de penicilina (120) entre cualquier número de horas transcurridas se obtiene la reducción exacta entre ambas cantidades*" (Re1.1 (I)). Así mismo en esta resolución describe intuitivamente la relación de orden que satisfacen las cantidades en este tipo de proporcionalidad (Re3 (I)). En la Figura 8.46 presentamos la resolución inicial del ejercicio (a). En el trabajo posterior la estudiante recoge la descripción de las relaciones funcional (Re1.1 (I)) y escalar (Re2 (I)) expuestas durante la breve puesta en común de la tarea.

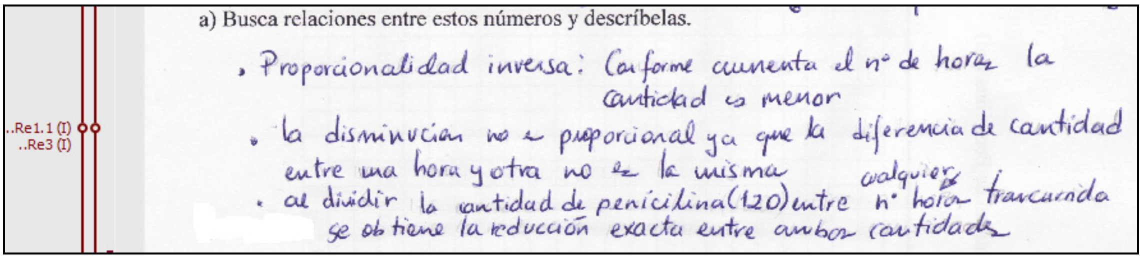


Figura 8.46. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T5 (Caso C3)

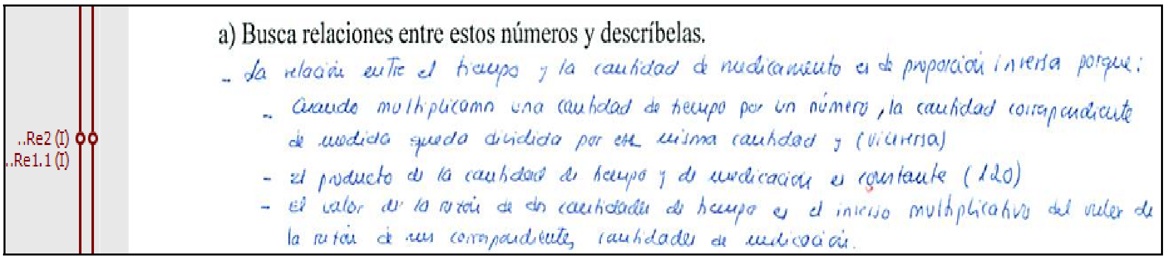


Figura 8.47. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T5 (Caso C3)

Resolución de los ejercicios (b) y (c)

En los dos trabajos individuales determina de la misma manera la cantidad de fármaco activo después de 24 horas, aplicando la división de la constante 120 entre el tiempo (Pr1 (I)). No detectamos ninguna modificación en este ejercicio. Aplica también la división en la resolución de la parte (b.2) en la que se debía determinar la cantidad de tiempo conociendo que la cantidad de fármaco activo es de 0,5 ml. En la primera entrega no logra realizar la división entre un número decimal con éxito. En la entrega posterior lo resuelve correctamente mediante la sustitución y despeje en la ecuación $x \cdot p = 120$ con x la cantidad de tiempo (Pr2 (I)), posiblemente en esta ocasión contó con la ayuda de una calculadora para efectuar la división.

Mientras que en la primera entrega de la tarea no resuelve el ejercicio (c) observamos que en el trabajo posterior lo resuelve aplicando el mismo procedimiento mostrado en el ejercicio (b.2).

Resolución del ejercicio (d)

La representación simbólica de la relación manifestada por C3 en la primera entrega de la tarea es de la forma $b = \dfrac{120}{n}$, indica que n representa las horas y b la cantidad de medicamento (Rep1.1 (I)). En el segundo trabajo sobre este ejercicio detectamos que la estudiante expresa la relación mediante la fórmula del cociente y del producto constante de las cantidades (Rep1.2 (I)).

Resolución del ejercicio (e)

Mientras que en el trabajo inicial la estudiante no representa gráficamente la relación, en el trabajo posterior realiza un trazo punteado de la gráfica (Rep3.2 (I)). Es posible que el tratamiento dado durante la revisión de la gráfica de la Tarea 4 haya influido en la estudiante C3 de modo tal que ésta considere que no se debe realizar un trazo continuo de las gráficas, es decir que haya generalizado lo hecho en la Tarea 4 a la Tarea 5.

8.4.6 Tarea 6 "Compartiendo Pizza"

En las dos resoluciones manifestadas por C3 en la Tarea 6 se evidencian modificaciones sustanciales. El trabajo inicial se caracteriza por la presencia de dos indicadores relativos a acercamientos inadecuados de la comparación de razones y del reparto proporcional. En el trabajo posterior tales acercamientos han sido sustituidos por procedimientos que permiten resolver las situaciones planteadas. En la Tabla 8.27 presentamos un resumen de las actuaciones puestas de manifiesto por C3 en ambas resoluciones de la tarea.

Tabla 8.27. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C3, Tarea 6*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
CoR1	0	1	+
CoR3	0	1	+
RPr1	0	1	+
IR1	0	1	+
IR3	0	1	+
Error en CoR	1	0	+
Error en RPr	1	0	+
Total de Modificaciones			+7

Resolución del ejercicio (a)

La estudiante expresa la relación entre las cantidades de personas y pizzas en cada mesa mediante las razones 5:4 y 7:6. La respuesta mostrada en la primera entrega del trabajo señala la necesidad de agregar 1 pizza más en el caso de que Daniel esté ausente o de 2 pizzas en el caso de que esté presente con el fin de ser "equitativo" en el reparto de las pizzas. En este aporte detectamos que la estudiante razona con base en la diferencia de las dos cantidades, acercamiento que no conduce a la resolución de la cuestión planteada.

En el trabajo posterior la estudiante determina el valor de las razones 4:6 y 6:8 mediante la división (CoR1), con base en la comparación de los cocientes concluye que en la mesa 2 corresponde mayor cantidad de pizza por persona. Expresa que otra forma de resolver la situación es simplificando e igualando consecuentes (CoR3), de este modo obtiene las expresiones $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$, sin embargo, no interpreta verbalmente lo obtenido en el marco de la situación.

Resolución del ejercicio (b)

En el trabajo inicial la estudiante aplica varias reglas de tres que relacionan cantidades que no son directamente proporcionales como lo son las cantidades de cada tipo de mesa que siguen la razón 7:4 y las cantidades de personas totales 240 en relación con alguna de las cantidades de personas que se ubican en cada tipo de mesa. Esta actuación refleja un uso instrumental y sin sentido de la regla de tres (Ver Figura 8.48). La resolución posterior se ajusta al esquema (RPr1), identificando el significado de los elementos de la razón 7:4 (IR1) y de la relación multiplicativa entre la cantidad total de personas y la cantidad de personas que se ubican en una grupo de 7 y mesas (IR3). Este esquema de resolución se detalla en el apartado 7.6.1.3.

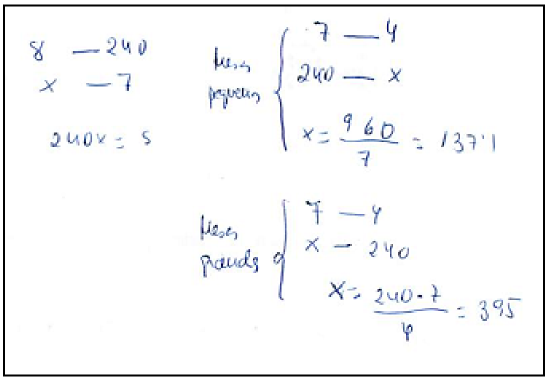


Figura 8.48. Resolución inicial del ejercicio (b) de la T6 (Caso C3)

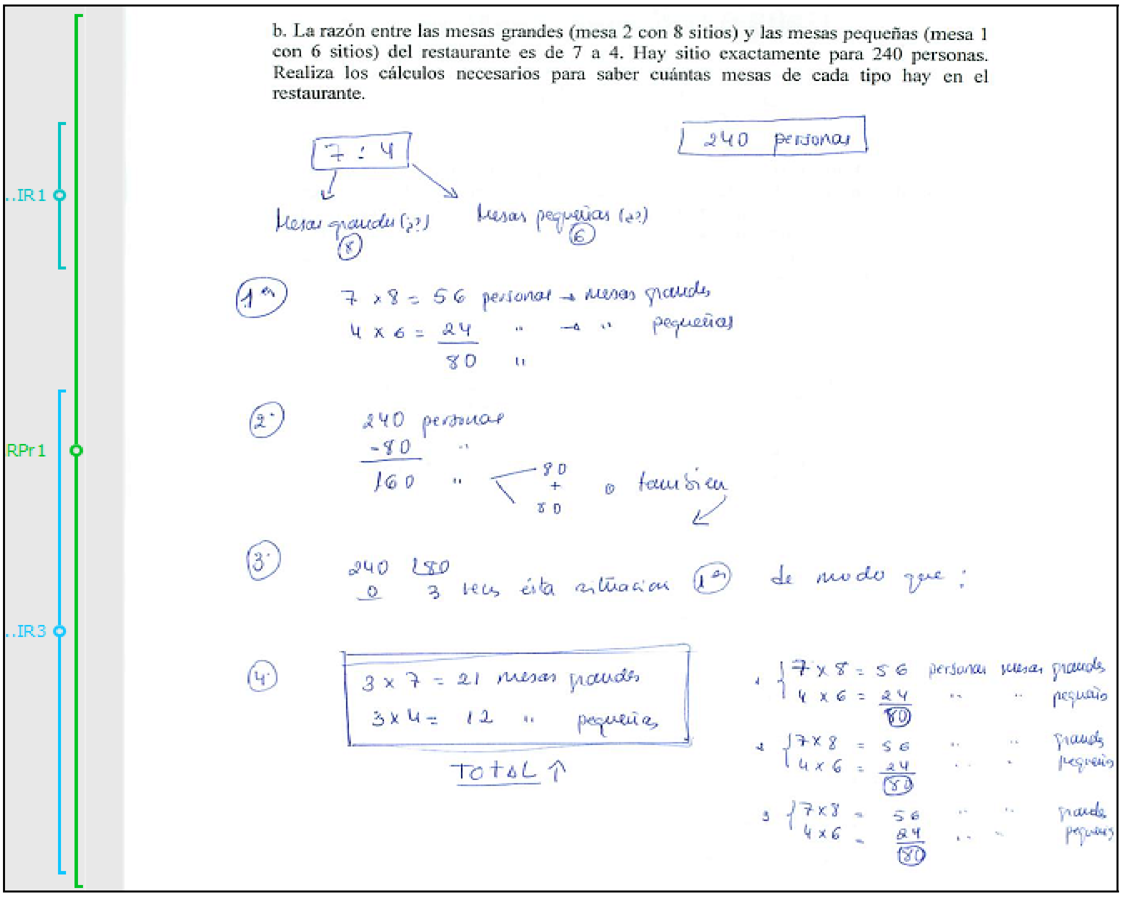


Figura 8.49. Resolución posterior del ejercicio (b) de la T6 (Caso C3)

8.4.7 Tarea 7 "El Palacio Real de la Alhambra"

En la Tabla 8.28 recogemos los indicadores correspondientes a las actuaciones detectadas en los trabajos individuales de la estudiante C3. Identificamos cuatro modificaciones en su trabajo posterior, tres positivas y una negativa. La modificación negativa refleja una inconsistencia en la resolución de la tarea, después de la tabla detallamos en qué consiste esta actuación la cual se dio en el marco del ejercicio (a) de la I Fase.

Tabla 8.28. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C3, Tarea 7*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
IE1	0	1	+
IE2	2	2	*
IE3	0	2	–
C3	1	2	+
C2	1	0	+
Total de Modificaciones			+3 y -1

<u>*Resolución del ejercicio (a) de cada Fase*</u>

En el trabajo hecho en la sesión la estudiante aplica la escala 1:5 para determinar la medida de las longitudes solicitadas (IE2), completa las casillas del área y volumen (en la II Fase) correctamente. En el trabajo realizado fuera de clase observamos que la medida del área relativa a la Torre de Comares refleja que se ha obtenido mediante la aplicación de la escala 1:5 actuación que pone de manifiesto el fenómeno de ilusión de linealidad (IE3). Consideramos que esta actuación expresa una inconsistencia del trabajo de C3 quien en las dos resoluciones de la tarea logra expresar la conjetura con éxito indicando que "*cualquier escala que sea* $1:x$ *la razón del área será* x^2". En las Figuras 8.50 y 8.51 presentamos las dos resoluciones manifestadas por C3.

..IE2

		Largo	Ancho	Perímetro	Área	
Patio de los Arrayanes	Maqueta A	15 cm	5 cm	40 cm	75 cm^2	
	Maqueta B	75 cm	25 cm	200 cm	1875 cm^2	}25
Terraza Torre de Comares	Maqueta A	6 cm	6 cm	24 cm	36 cm^2	
	Maqueta B	30 cm	30 cm	120 cm	900 cm^2	}25

Figura 8.50. Resolución inicial del ejercicio (a) de la I Fase de la T7 (Caso C3)

..IE2

..IE3

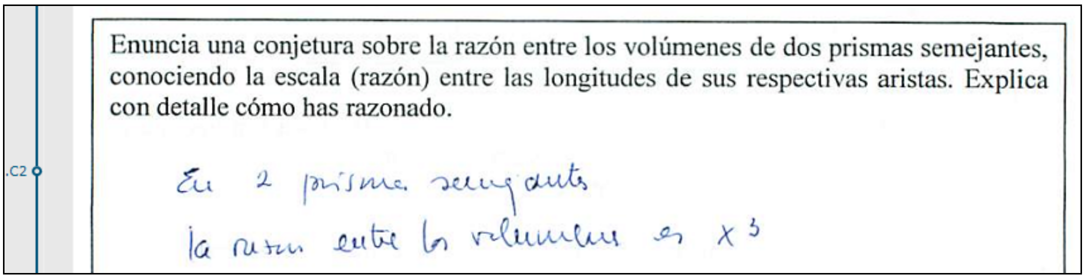
		Largo	Ancho	Perímetro	Área
Patio de los Arrayanes	Maqueta A	15 cm	5 cm	40 cm	75 cm^2
	Maqueta B	75	25	200	1875 cm^2
Terraza Torre de Comares	Maqueta A	6 cm	6 cm	24 cm	36 cm^2
	Maqueta B	30	30	120	180 cm^2

Figura 8.51. Resolución posterior del ejercicio (a) de la I Fase de la T7 (Caso C3)

Resolución del ejercicio (b) de cada Fase

La expresión de la conjetura correspondiente a la I Fase, en ambas entregas de la tarea, goza de un grado de éxito destacable (C3). En el primer trabajo la estudiante indica "*si la razón respecto al largo, ancho, perímetro es 5, al comparar ambas maquetas en cada uno de los 2 casos, si continuaran haciendo maquetas la razón continuaría siendo 5. Luego si comparamos las áreas de ambos casos la razón es 25 y es así porque el área es* m^2 *(5x5=25), cualquier escala que sea* $1:x$ *la razón del área será* x^2 ". En el trabajo posterior enuncia la conjetura de la I Fase de manera correcta (C3) aunque como ya se describió en el apartado anterior la estudiante C3 evidencia una clara inconsistencia pues en la tabla de cantidades aplica la escala 1:5 para obtener el área de la Torre de Comares. Con esos datos no es posible llegar a conclusión descrita en la conjetura ya que la razón de las áreas también sería 5.

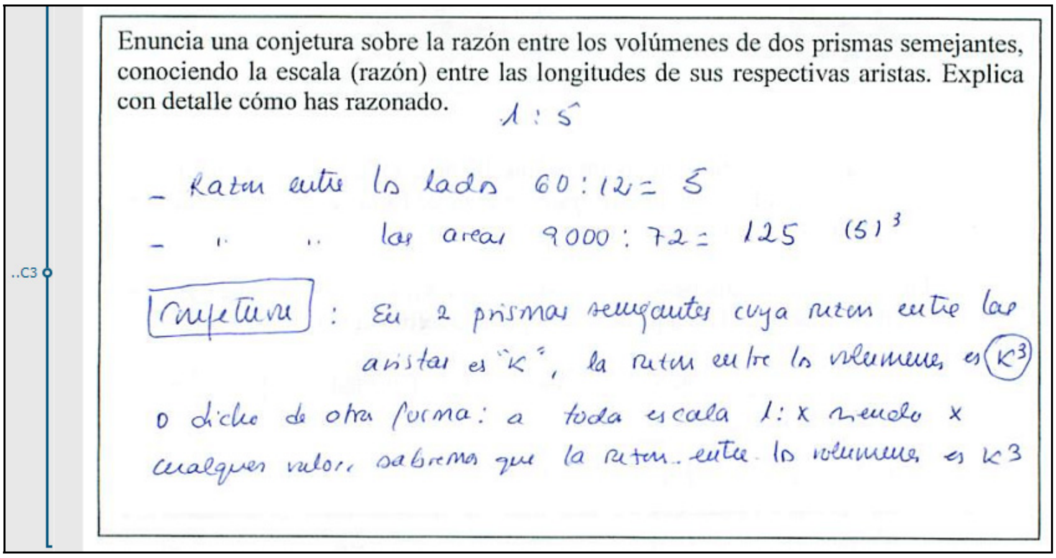
En el trabajo inicial sobre la conjetura de la II Fase expresa la relación detectada de manera incompleta (C2), pues no señala las condiciones o elementos de partida. Por ejemplo, la escala, a partir de los cuales concluye que "*en dos prismas semejantes la razón entre los volúmenes es* x^3" (Figura 8.52). En relación con la conjetura de la II Fase puesta de manifiesto en el trabajo posterior no se observa ninguna inconsistencia entre las medidas detectadas y la conjetura expresada, misma que es enunciada correctamente (C3) y presentamos en la Figura 8.53.



Enuncia una conjetura sobre la razón entre los volúmenes de dos prismas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivas aristas. Explica con detalle cómo has razonado.

En 2 prisma semejantes
la razon entre los volumenes es x^3

Figura 8.52. Resolución inicial del ejercicio (b) de la II Fase de la T7 (Caso C3)



Enuncia una conjetura sobre la razón entre los volúmenes de dos prismas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivas aristas. Explica con detalle cómo has razonado. 1 : 5

- Razon entre los lados 60 : 12 = 5
- " " las areas 9000 : 72 = 125 $(5)^3$

Conjetura : En 2 prismas semejantes cuya razon entre las aristas es "k", la razon entre los volumenes es k^3

o dicho de otra forma: a toda escala 1 : x siendo x cualquier valor, sabremos que la razon entre los volumenes es k^3

Figura 8.53. Resolución posterior del ejercicio (b) de la II Fase de la T7 (Caso C3)

8.5 El Caso del Estudiante B14 (G2)

En el Anexo N.5 aparecen los protocolos de trabajo individual del estudiante B14. El análisis se presenta en los siguientes apartados siguiendo la misma estructura de los casos anteriores.

8.5.1 Tarea 1 "Fracción, Razón y Porcentaje"

En la Tabla 8.29 mostramos una síntesis de los indicadores que hemos identificado en los trabajos individuales así como de las modificaciones manifestadas por el estudiante en la resolución de la Tarea 1. Las cuatro modificaciones fueron negativas.

Tabla 8.29. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B14, Tarea 1*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Com. P-T	3	2	–
NP1	1	0	–
NR2	1	0	–
NR4	0	1	–
Total de Modificaciones			-4

Resolución del ejercicio (a)

Inicialmente el estudiante describe la relación entre cada una de las partes (regiones cultivadas y no cultivadas) con respecto al total de campos de cultivo, utiliza la representación simbólica de las fracciones (Com. P-T). En el trabajo posterior el estudiante intenta recuperar la descripción de la relación entre las partes expuesta durante la puesta en común ya que utiliza las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{2}$, sin embargo la descripción manifestada carece de sentido pues el estudiante no se indica la parte que toma como referencia en la comparación, expresa "*existen* $\frac{2}{3}$ *de manzanas cultivadas*".

Resolución del ejercicio (b)

En la primera entrega muestra la aplicación de la regla de tres para determinar el porcentaje que corresponde a las relaciones 1:9 y 8:9 (NP1), mismas que describen la relación entre cada una de las partes y el todo (Com. P-T). En el trabajo posterior responde de la misma manera con la diferencia de que no muestra la aplicación de la regla de tres.

Resolución del ejercicio (c)

En los dos trabajos el estudiante B14 describe la relación parte-todo (Com. P-T), la modificación la detectamos en los acercamientos que sobre la interpretación de la razón pone de manifiesto el estudiante. En la entrega inicial utiliza los términos "de cada" para referirse a la razón (NR2), mientras que en la resolución posterior recurre a la representación simbólica de las fracciones $\frac{4}{6}$ y $\frac{2}{6}$ (NR4).

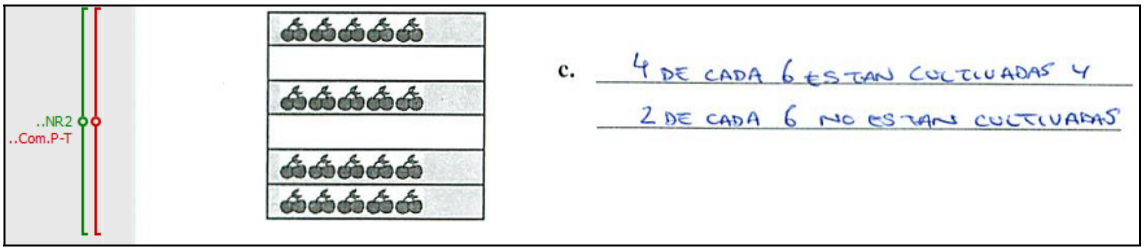


Figura 8.54. Resolución inicial del ejercicio (c) de la T1 (Caso B14)

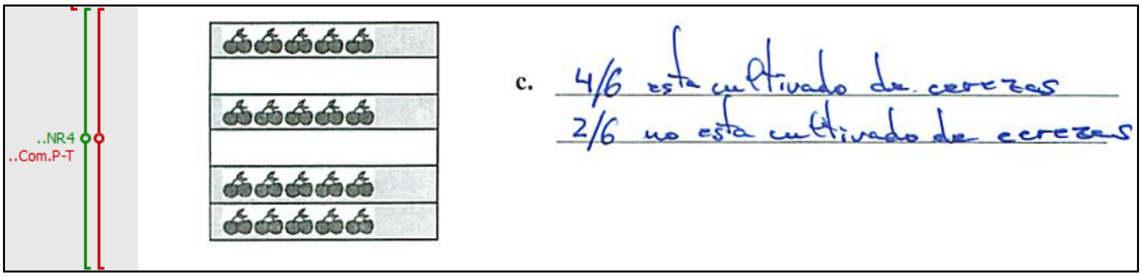


Figura 8.55. Resolución posterior del ejercicio (c) de la T1(Caso B14)

8.5.2 Tarea 2 "Preferencia en el Refresco de Cola"

Hemos detectado dos modificaciones negativas y una positiva en la resolución posterior de la Tarea 2, en la Tabla 8.30 presentamos los indicadores asignados a los dos trabajos de B14.

Tabla 8.30. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B14, Tarea 2*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
(a.1)	1	0	*
(a.3)	0	1	
(a.4)	0	1	+
(b.1)	1	0	–
(b.3)	0	1	
(c.1)	1	0	–
(c.3)	0	1	
Rep5	1	1	*
Total de Modificaciones			+1 y -2

Resolución del ejercicio (a)

En la primera resolución el estudiante indica que las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta porque expresan de distinta forma la misma cantidad, actuación codificada por (a.1). En el trabajo posterior manifiesta de nuevo que las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta pero ahora basándose en la relación de equivalencia entre las razones de las dos primeras afirmaciones (a.4) y en la creencia de que la cantidad de la tercera afirmación es la diferencia de las cantidades expuestas en la segunda razón (a.3). Ninguno de los motivos expuestos por B14 conduce a un tratamiento acertado de la cuestión (a). Ésta precisa, entre otros conocimientos, de la aplicación de propiedades de la razón (Ver Planificación de la Tarea 2).

Resolución del ejercicio (b)

Inicialmente el estudiante B14 señala que la afirmación que mejor describe la comparación entre las cantidades es la primera, que contempla la razón 3:2 (b.1). Justifica su elección expresando que de esta manera es más simple apreciar "*la diferencia entre ambos*". En el trabajo realizado después elige la tercera afirmación (b.3), en relación a la cual indica "*nos dice que sobre un total, sea el que sea, 5713 más personas prefieren esa bebida*". Como hemos argumentado en el análisis retrospectivo de las sesiones Capítulo 7 esta afirmación es la que menos información aporta en tanto que se desconoce la cantidad total de personas que prefieren uno u otro refresco motivo por el cual no es una afirmación que describa adecuadamente la comparación de las cantidades y en consecuencia su elección resulta ser una modificación negativa.

Resolución del ejercicio (c)

En el trabajo realizado en clase y fuera de clase el estudiante manifiesta las mismas respuestas que las aportadas en el ejercicio (b).

Resolución del ejercicio (d)

En las dos resoluciones el estudiante sugiere la misma expresión para comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola. Hemos asignado el indicador Rep5 debido a que el porcentaje mostrado procede de un cálculo incorrecto del mismo. Creemos que posiblemente aplicó una relación estructurada por la proporción $3:2::100:x$, designando a una de las partes como el 100%.

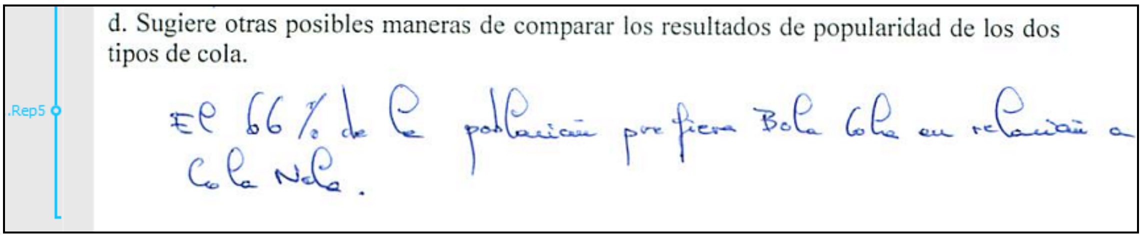


Figura 8.56. Resolución inicial del ejercicio (d) de la T2 (Caso B14)

8.5.3 Tarea 3 "Los Niveles de CO_2"

El estudiante no muestra modificaciones en la resolución de la Tarea 3. En la Tabla 8.31 se aprecia que se manifestaron los mismos indicadores de actuaciones durante la sesión de clase y después de la misma. Después de la tabla describimos las actuaciones manifestadas por el estudiante.

Tabla 8.31. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B14, Tarea 3*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
NP1	1	1	*
CoAdMu2	1	1	*
Total de Modificaciones			0

Resolución del ejercicio (a)

El estudiante manifiesta el esquema (c) de la aplicación de la regla de tres (Apartado 7.3.1.1), asumiendo como referente 6727 y obteniendo que la menor cantidad, 6049, corresponde a un 89% de 6727. En la Figura 8.57 presentamos la resolución mostrada por B14.

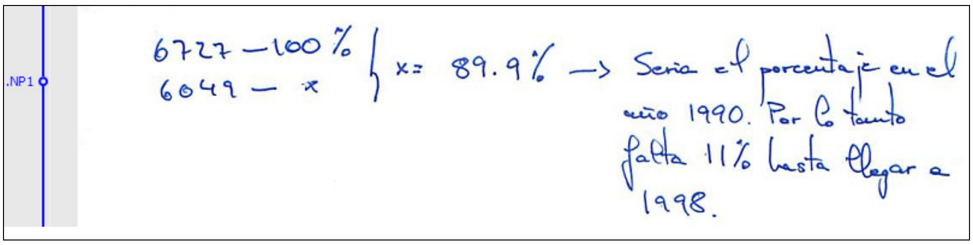


Figura 8.57. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T3 (Caso B14)

Resolución del ejercicio (b)

En la primera entrega del trabajo el estudiante no resuelve este ejercicio y en la resolución posterior responde "*sí, ya que en las emisiones de la UE se encuentra*

Alemania". Consideramos que la respuesta carece de elementos sobre la interpretación del porcentaje motivo por el cual no se ha codificado con ninguno de los indicadores relativos a este aspecto.

Resolución del ejercicio (c)

En ambos trabajos B14 hace referencia a los datos sobre los que Luisa y Antonio han fijado la atención para responder cuál país o región ha tenido el mayor aumento en las emisiones de CO_2. Esta actuación carece de fundamentación sobre por qué estas personas han dado dos respuestas distintas y por este motivo se le ha asignado el indicador CoAdMu2. El estudiante no evidencia argumentos relacionados con que una mayor diferencia en las cantidades de CO_2 no resulta necesariamente en un mayor aumento porcentual de las mismas.

8.5.4 Tarea 4 "Crecimiento de Bacterias"

En la Tabla 8.32 recogemos los indicadores de actuaciones detectadas en las dos resoluciones de la Tarea 4 realizadas por el estudiante B14. Identificamos seis modificaciones en el trabajo posterior, cinco de las cuales son positivas.

Tabla 8.32. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B14, Tarea 4*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re1	1	0	+
Re3	0	1	+
Pr2	0	1	+
Pr4	1	0	+
Pr5	1	1	*
Pr8	2	0	+
Rep3 (D)	1	1	*
Rep4 (D)	1	1	*
EstAd	0	1	–
Total de Modificaciones			+5 y -1

Resolución del ejercicio (a)

El estudiante detecta que cada día aumenta el número de bacterias en 13 unidades, llega a esta relación realizando restas de las cantidades de bacterias y días (Re1). En el trabajo posterior relaciona multiplicativamente las cantidades de las dos magnitudes mediante la descripción de la relación funcional $N^o \text{ de Días} \times 13 = N^o \text{ de Bacterias}$ (Re3).

Resolución del ejercicio (b)

En el trabajo inicial del ejercicio (b.1) observamos que B14 aplica dos procedimientos para calcular la cantidad de días después de los cuales hay 650 bacterias. Uno se refiere a la regla de tres considerando la relación entre la unidad simple (1,13) y el par (x, 650), el estudiante no ha seguido la instrucción que limitaba el uso de este procedimiento y por este motivo designamos esta actuación con el indicador Pr8. El otro procedimiento aplicado se basa en la construcción de la tabla de proporcionalidad mediante la suma reiterada de cantidades, estrategia "building up" (Pr4), con la particularidad de que la construye consecutivamente hasta la cantidad de 10 días y de inmediato agrega el par (50, 650); este último par pudo obtenerlo a partir de la regla de tres o de la observación de la relación escalar entre 65 y 650, sin embargo no tenemos evidencia de esta última suposición. Resuelve el ejercicio (b.2) aplicando la regla de tres (Pr8) como en el caso anterior y también multiplicando por la constante (Pr5).

En el trabajo realizado fuera de clase resuelve el ejercicio (b.1) sustituyendo los datos en la expresión simbólica de la relación y despejando la incógnita relativa a la cantidad de días (Pr2), y en el ejercicio (b.2) aplica de nuevo la multiplicación por la contante (Pr5). En las Figuras 8.58 y 8.59 presentamos el trabajo del estudiante mostrado por el estudiante.

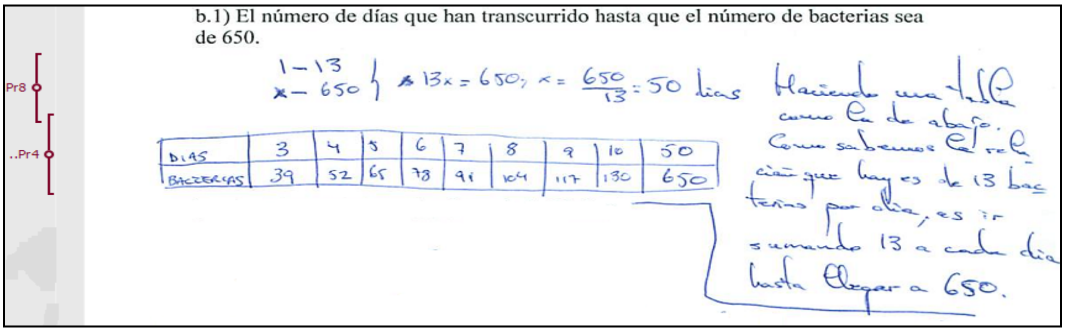


Figura 8.58. Resolución inicial del ejercicio (b.1) de la T4 (Caso B14)

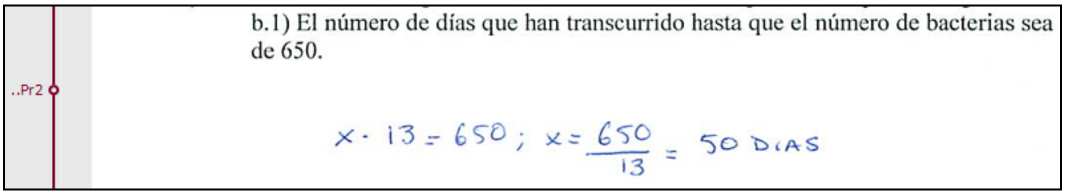


Figura 8.59. Resolución posterior del ejercicio (b.1) de la T4 (Caso B14)

Resolución del ejercicio (c)

En ambos trabajos representa la relación entre las magnitudes combinando símbolos y palabras mediante la expresión $N^{o}\ \text{de Días} \times 13 = N^{o}\ \text{de Bacterias}$(Rep3 (D)). No se ha dado ninguna modificación en este sentido.

Resolución del ejercicio (d)

En el caso de la representación gráfica tampoco identificamos cambios, en ambos trabajos el estudiante traza una recta continua desde el origen (Rep4 (D)).

Resolución del ejercicio (a) de la II Fase

En el trabajo inicial no resuelve este ejercicio y en el trabajo posterior da muestra de la aplicación de la estrategia aditiva ya que únicamente considera la diferencia entre las medidas de las longitudes de las dos bacterias (EstAd).

8.5.5 Tarea 5 "Permanencia Activa de un Fármaco"

El estudiante manifiesta únicamente una modificación en la resolución posterior de la Tarea 5, ésta tuvo lugar en la representación gráfica de la relación de proporcionalidad inversa. En la Tabla 8.33 se recogen los indicadores correspondientes a las actuaciones manifestadas por B14.

Tabla 8.33. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B14, Tarea 5*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re1.1 (I)	1	1	*
Pr2 (I)	3	3	*
Rep2 (I)	1	1	*
Rep3.1 (I)	0	1	+
Rep3.2 (I)	1	0	
Total de Modificaciones			+1

<u>*Resolución del ejercicio (a)*</u>

En ambos trabajos describe la relación funcional entre las magnitudes (Re1.1(I)), indicando "*siempre que multiplicamos el número de horas por la cantidad de penicilina nos sale la cantidad inicial*", describe esta relación mediante la expresión $n^{o}\ \text{de horas} \times \text{mililitros} = 120$.

<u>*Resolución del ejercicio (b) y (c)*</u>

El estudiante resuelve los ejercicios de valor ausente (b.1), (b.2) y (c) sustituyendo los datos en la expresión simbólica de la relación, despejando el dato deseado y realizando la división, esta actuación ha sido catalogada con el indicador Pr2 (I).

<u>*Resolución del ejercicio (d)*</u>

En las dos resoluciones expresa la relación entre las magnitudes combinando símbolos y palabras, esta actuación se ha catalogado con el indicador Rep2 (I) y la ilustramos en la Figura 8.60 con el trabajo expuesto por el estudiante.

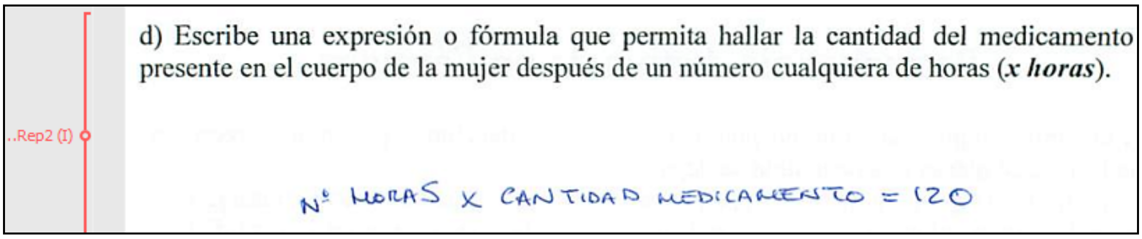


Figura 8.60. Resolución posterior del ejercicio (d) de la T5 (Caso B14)

<u>*Resolución del ejercicio (e)*</u>

La única modificación detectada se ha dado en el trazo de la representación gráfica de la relación, inicialmente el estudiante señala los puntos correspondientes a algunos de los pares ordenados de la tabla pero no los une (Rep3.2 (I)); esta actuación puede deberse a que el estudiante, después de la revisión de la Tarea 4, considere que en general no debe unir los puntos. Posteriormente en la segunda resolución muestra un trazo continuo de la gráfica (Rep3.1 (I)).

8.5.6 Tarea 6 "Compartiendo Pizza"

En la Tabla 8.34 mostramos los indicadores asignados a las actuaciones manifestadas por el estudiante en las dos resoluciones de la Tarea 6. Detectamos tres modificaciones positivas y una negativa, mismas que describimos después de la tabla en el marco de la descripción del trabajo del estudiante en cada ejercicio.

Tabla 8.34. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B14, Tarea 6*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
CoR1	1	1	*
CoR6	1	0	–
IR3	0	1	+
RPr1	0	1	+
Error en RPr1	1	0	+
Total de Modificaciones			+3 y -1

<u>*Resolución del ejercicio (a)*</u>

El estudiante aborda inicialmente la comparación de las razones desde dos procedimientos, la suposición de la equivalencia de razones (CoR6) y la división de los elementos de cada razón (CoR1). El primer procedimiento consiste en la aplicación de una regla de tres que relaciona la cantidad de pizzas y personas de cada mesa asumiendo que en cada situación se consume la misma cantidad de pizza por persona. No obstante, el estudiante no interpreta las cantidades de personas obtenidas en términos del consumo de pizza. Observamos dos condiciones que pudieron limitar la interpretación de los resultados obtenidos por B14 al aplicar este procedimiento: (1) etiquetar cada regla de tres como mesa 1 o mesa 2, cuando en los dos casos establece relaciones en las dos mesas, y (2) si hubiese considerado al chico en las mesas, en las razones 6 personas:4 pizzas y x personas:6 pizzas, el valor de la cantidad de personas buscada sería un número entero (9 personas) y la interpretación de la situación sería más natural. El fracaso en el intento de aplicar esta estrategia lo condujo posiblemente a buscar otra manera de abordar la cuestión, esta es la división de las cantidades y comparación de los valores de cada razón (CoR1). En el trabajo posterior observamos que muestra de nuevo la actuación descrita por el indicador CoR1.

En las Figuras 8.61 y 8.62 presentamos el trabajo realizado por el estudiante en ambas entregas de la Tarea 6.

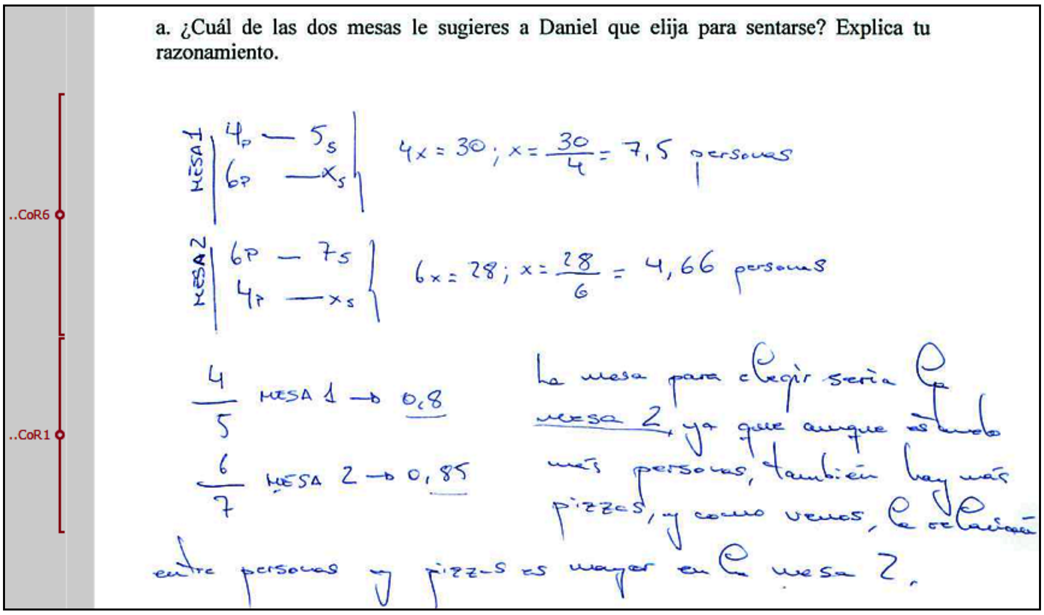


Figura 8.61. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T6 (Caso B14)

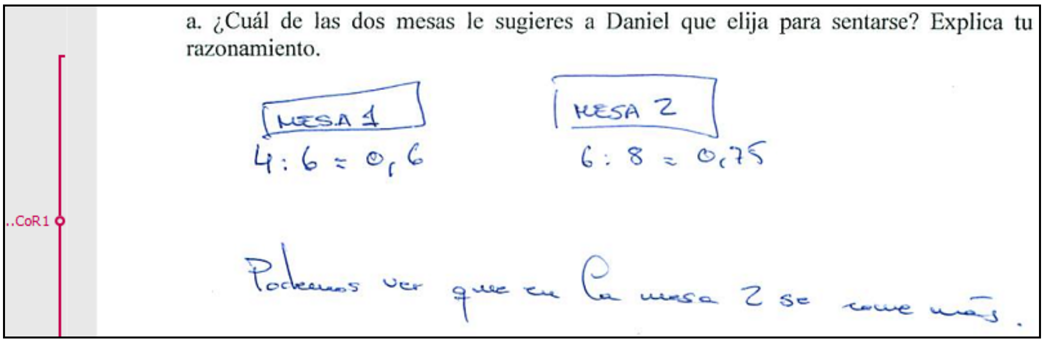


Figura 8.62. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T6 (Caso B14)

<u>*Resolución del ejercicio (b)*</u>

El estudiante resuelve este ejercicio durante la sesión realizando operaciones que no conducen a la respuesta. Observamos que busca el valor de la razón 8:7 la cual relaciona la cantidad de personas en una mesa grande con la cantidad de 7 mesas grandes, en cuyo caso el valor es la cantidad intensiva personas/1 mesa grande. Esta actuación estuvo seguida por una serie de operaciones que no tienen sentido en el tratamiento de la cuestión (Error en RPr).

Posteriormente en el trabajo realizado fuera de clase el estudiante manifiesta el esquema de resolución descrito por el indicador RPr1, además detectamos que reconoce la relación multiplicativa entre la cantidad total de personas y la cantidad de las mismas que se sientan en un grupo de 7 y 4 mesas, relación que extiende a las cantidades de mesas requeridas (IR3).

8.5.7 Tarea 7 "El Palacio Real de la Alhambra"

Identificamos tres modificaciones positivas y una negativa en el trabajo posterior del estudiante B14. En la siguiente tabla resumimos los indicadores asignados a sus actuaciones y las modificaciones manifestadas.

Debido a la limitación de tiempo durante el desarrollo de la cuarta sesión en el G2 se dio la consigna de resolver únicamente la I Fase de la tarea, sin embargo el estudiante B14 resuelve todos los ejercicios de ambas fases. En el trabajo posterior resuelve únicamente los ejercicios de la I Fase de la tarea, motivo por el cual centramos la descripción del trabajo únicamente sobre esta fase.

Tabla 8.35. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de B14, Tarea 7*

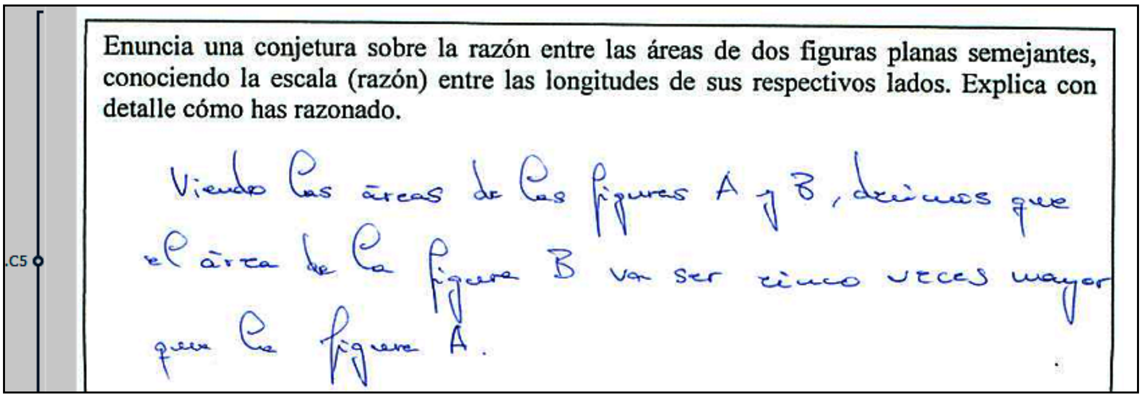
Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
IE2	2	1	–
IE3	1	0	+
C2	0	1	+
C5	2	0	+
Total de Modificaciones			+3 y -1

Resolución del ejercicio (a) de la I Fase

En ambas entregas de la tarea el estudiante aplica adecuadamente la escala 1:5 para calcular las longitudes de la maqueta B (IE2), sin embargo en el trabajo realizado en la sesión aplica la misma escala para determinar el área del Patio de los Arrayanes evidenciando así el fenómeno de ilusión de linealidad (IE3). En el trabajo posterior modifica la respuesta indicando la medida correcta de la superficie de los dos casos.

Resolución del ejercicio (b) de la I Fase

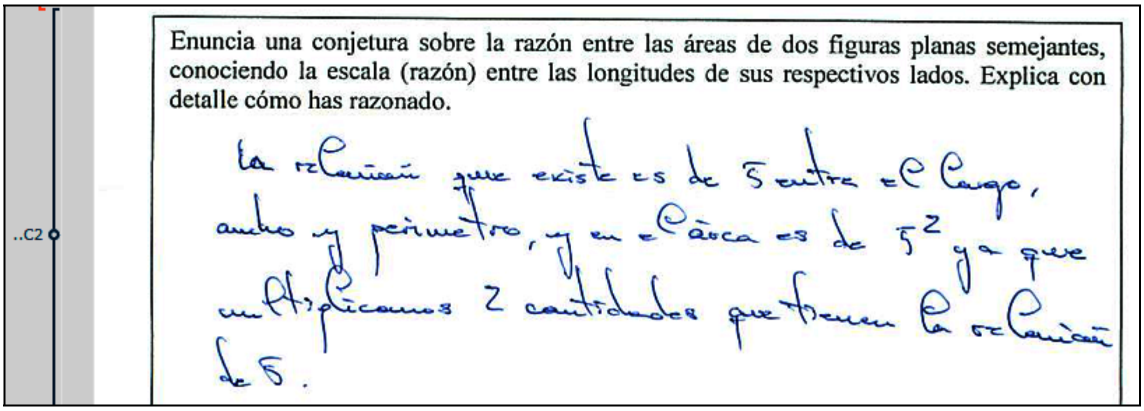
El desempeño mostrado en el trabajo inicial, en relación con el uso de la escala para calcular tanto longitudes como medidas de superficies, se evidenció en la expresión de la conjetura. En la misma, el estudiante hace referencia al crecimiento lineal de las áreas. La observación señalada por el estudiante no es válida y por este motivo la designamos con el indicador C5. En el trabajo posterior expone que la relación entre las longitudes "*es de 5*" mientras que la relación de las áreas "*es de 5^2*", esta actuación está catalogada como C2 debido a que el estudiante presenta debilidades en la comunicación de la idea. En las Figuras 8.63 y 8.64 ilustramos la descripción anterior con el trabajo mostrado por el estudiante.


C5

Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

Viendo las áreas de las figuras A y B, decimos que el área de la figura B va ser cinco veces mayor que la figura A.

Figura 8.63. Resolución inicial del ejercicio (b) de la I Fase de la T7 (Caso B14)


..C2

Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

La relación que existe es de 5 entre el largo, ancho y perímetro, y en el área es de 5^2 ya que multiplicamos 2 cantidades que tienen la relación de 5.

Figura 8.64. Resolución posterior del ejercicio (b) de la I Fase de la T7 (Caso B14)

8.6 El Caso de la Estudiante C1 (G2)

En el Anexo N.6 aparecen los protocolos de trabajo individual de la estudiante C1.

8.6.1 Tarea 1 "Fracción, Razón y Porcentaje"

En la Tabla 8.36 se aprecia que la estudiante no manifiesta ninguna modificación en el trabajo posterior de la Tarea 1. Después de la tabla describimos el trabajo desarrollado en cada ejercicio.

Tabla 8.36. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C1, Tarea 1*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Com. P-T	3	3	*
NR2	1	1	*
Total de Modificaciones			0

Resolución del ejercicio (a)

En la Figura 8.65 presentamos la respuesta aportada por la estudiante en este ejercicio, en la misma se observa que describe la relación entre cada una de las partes (regiones cultivadas y no cultivadas) y el todo (total de campos del terreno), expresa la comparación con la representación simbólica usual de las fracciones (Com. P-T).

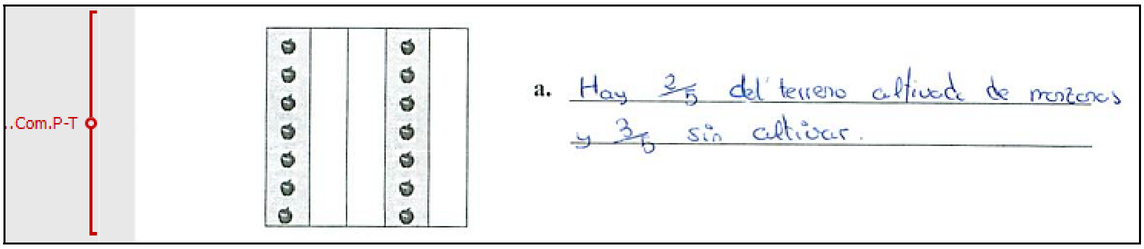


Figura 8.65. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T1 (Caso C1)

Resolución del ejercicio (b)

En los dos trabajos individuales señala que se ha cultivado el 11,11% del terreno, la estudiante no muestra la aplicación del procedimiento que la ha llevado a la respuesta.

El porcentaje expresa la relación entre la parte cultivada y el total de campos (1:9), motivo por el cual se le ha asignado el indicador Com. P-T.

<u>*Resolución del ejercicio (c)*</u>

No hay cambios en la descripción de la comparación del ejercicio (c) el cual demanda la aplicación de la noción de razón; la estudiante C1 indica "*4 de cada 6 partes del terreno están cultivadas de cerezas*". La respuesta refleja que ha establecido la comparación desde la perspectiva parte-todo (Com. P-T) que asociada al uso de los términos "de cada" derivan en la aproximación de la razón que se ha catalogado en el estudio como NR2.

8.6.2 Tarea 2 "Preferencia en el Refresco de Cola"

En la Tabla 8.37 se aprecia que la estudiante manifiesta dos modificaciones en la resolución posterior de la Tarea 2, en la misma recogemos los indicadores que se han asignado a las actuaciones expuestas por la estudiante C1.

Tabla 8.37. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C1, Tarea 2*

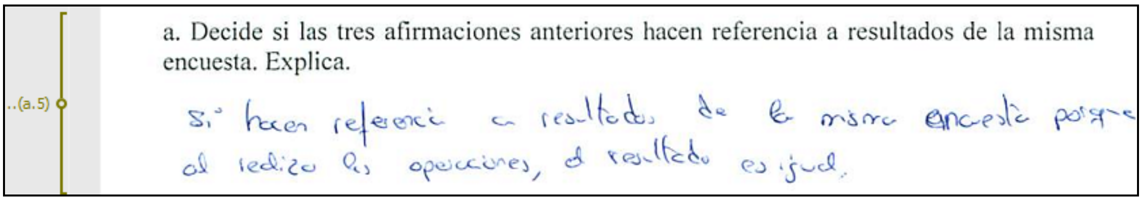
Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
(a.2)	0	1	+
(a.3)	0	1	*
(a.5)	1	0	
(b.1)	1	1	*
(c.1)	1	1	*
CPr.1	0	1	+
Rep5	1	1	*
Total de Modificaciones			+2

<u>*Resolución del ejercicio (a)*</u>

Aunque las justificaciones manifestadas por la estudiante en la resolución del primer ejercicio hayan sido diferentes en los dos trabajos individuales consideramos que no se ha dado ninguna modificación en tanto las ideas mostradas en el trabajo posterior, al igual que en el primero, no conducen a un tratamiento acertado de la cuestión.

En la primera resolución indica que fundamenta la respuesta en los resultados de las operaciones que ha realizado, sin embargo, esas operaciones no se muestran. Hemos asignado el indicador (a.5) a esta actuación.

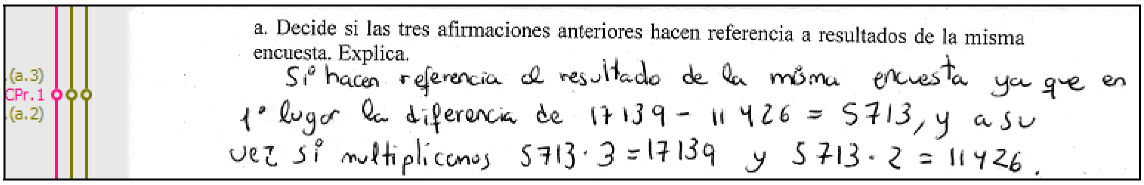
En el trabajo posterior indica de nuevo que las tres afirmaciones proceden de la misma encuesta pero en esta ocasión muestra las operaciones aplicadas a las cantidades de las afirmaciones. Indica que la diferencia de los elementos de la segunda razón 17139:11426 es 5713, la cantidad de la tercera afirmación (a.3). También relaciona multiplicativamente las cantidades de las dos razones equivalentes (a.2) con la cantidad de la diferencia expuesta en la tercera afirmación. Esta relación se desprende de la equivalencia de las razones 17139:11426 y 3:2 (CPr.1). Sin embargo, reconocemos que la estudiante no evidencia explícitamente que conozca la procedencia de tal relación. En las Figura 8.66 y 8.67 presentamos el trabajo mostrado por la estudiante.


..(a.5)

a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

Sí hacen referenci a resultados de la misma encuesta porque al realizo las operaciones, el resultado es igual.

Figura 8.66. Resolución inicial del ejercicio (a) de la T2 (Caso C1)


(a.3)
CPr.1
(a.2)

a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

Sí hacen referencia al resultado de la misma encuesta ya que en 1º lugar la diferencia de 17139 − 11426 = 5713, y a su vez si multiplicamos 5713 · 3 = 17139 y 5713 · 2 = 11426.

Figura 8.67. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T2 (Caso C1)

<u>*Resolución del ejercicio (b)*</u>

En las dos resoluciones manifiesta que la afirmación que mejor describe los resultados de la encuesta es la primera "*la razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2*" (b.1). Justifica su elección indicando que es más fácil de comprender dado que los números son más pequeños.

<u>*Resolución del ejercicio (c)*</u>

Al igual que en la resolución del ejercicio anterior no observamos modificaciones en la respuesta aportada por la estudiante en el ejercicio (c), en ambos trabajos indica que considera que la primera afirmación es la más efectiva para ser usada en un anuncio publicitario, sustenta su respuesta en el mismo argumento aportado en la resolución del ejercicio (b).

<u>*Resolución del ejercicio (d)*</u>

En las dos entregas de la Tarea 2 señala que los resultados de la encuesta se pueden expresar mediante porcentajes, pero no aporta los datos numéricos específicos de estos porcentajes, por este motivo hemos designado a esta actuación con el indicador Rep5.

8.6.3 Tarea 3 "Los Niveles de CO_2"

Las modificaciones detectadas en el trabajo posterior creemos que se dan debido a que la estudiante no resolvió los ejercicios (a) y (c) en la primera entrega de la tarea. En la Tabla 8.38 recogemos los indicadores asignados a las actuaciones manifestadas.

Tabla 8.38. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C1, Tarea 3*

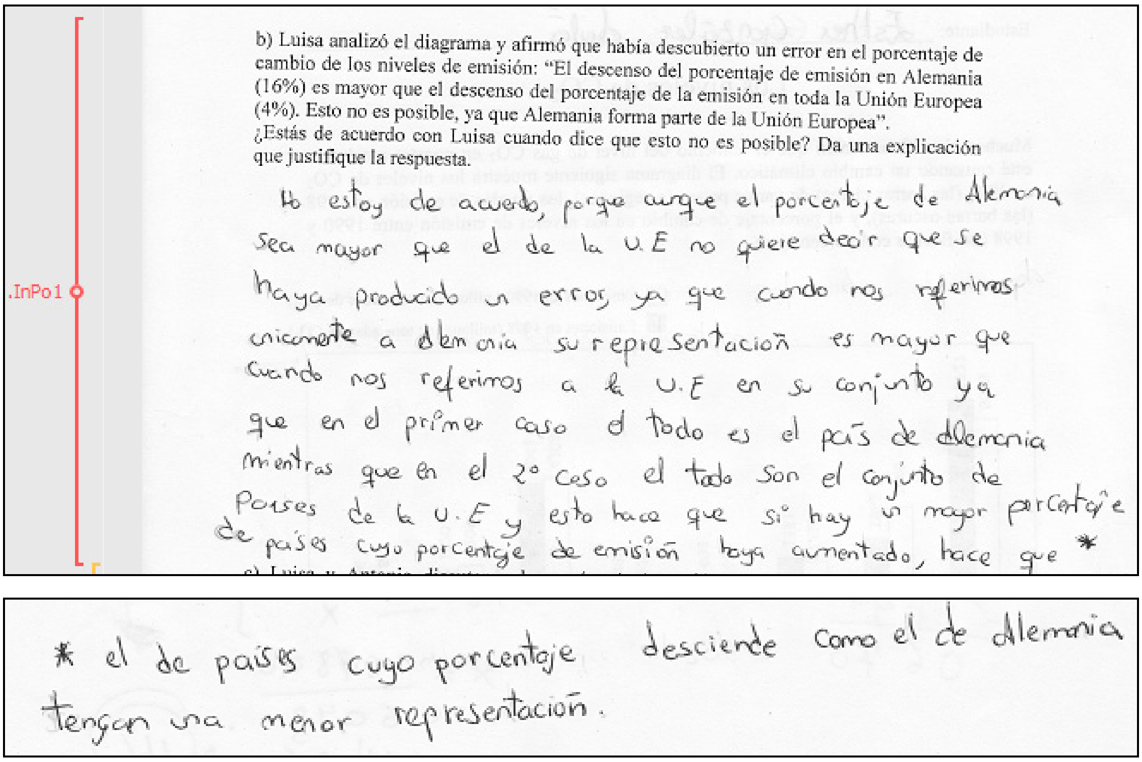
Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
NP1	0	1	+
InPo1	1	1	*
CoAdMu2	0	1	–
Total de Modificaciones			+1 y -1

<u>*Resolución del ejercicio (a)*</u>

Como se indicó anteriormente, en el trabajo realizado en la sesión la estudiante no resuelve el ejercicio argumentando que no sabía cómo hacerlo. En la entrega posterior observamos que aplica la regla de tres siguiendo el esquema (a), descrito en el análisis retrospectivo de la segunda sesión.

<u>*Resolución del ejercicio (b)*</u>

La respuesta aportada en ambas entregas de la tarea evidencia que la estudiante reconoce que los porcentajes de cambio de las emisiones de CO_2 de Alemania y de la Unión Europea se han calculado tomando como referencia diferentes cantidades, por este motivo hemos asignado el indicador InPo1 a la actuación mostrada por C1. En la Figura 8.68 presentamos la explicación aportada por la estudiante.



.InPo1

b) Luisa analizó el diagrama y afirmó que había descubierto un error en el porcentaje de cambio de los niveles de emisión: "El descenso del porcentaje de emisión en Alemania (16%) es mayor que el descenso del porcentaje de la emisión en toda la Unión Europea (4%). Esto no es posible, ya que Alemania forma parte de la Unión Europea".
¿Estás de acuerdo con Luisa cuando dice que esto no es posible? Da una explicación que justifique la respuesta.

No estoy de acuerdo, porque aunque el porcentaje de Alemania sea mayor que el de la U.E no quiere decir que se haya producido un error, ya que cuando nos referimos únicamente a Alemania su representación es mayor que cuando nos referimos a la U.E en su conjunto ya que en el primer caso el todo es el país de Alemania mientras que en el 2° caso el todo son el conjunto de Países de la U.E y esto hace que si hay un mayor porcentaje de países cuyo porcentaje de emisión haya aumentado, hace que *

* el de países cuyo porcentaje desciende como el de Alemania tengan una menor representación.

Figura 8.68. Resolución posterior del ejercicio (b) de la T3 (Caso C1)

<u>*Resolución del ejercicio (c)*</u>

En la primera entrega no resuelve el ejercicio. En el trabajo posterior la estudiante indica "*Puede ser que Luisa afirme que ha tenido un mayor aumento EEUU porque las cantidades son superiores mientras que Antonio basándose en los porcentajes afirma un mayor aumento en Australia*". En su respuesta no encontramos evidencia de la comprensión de que las respuestas de las dos personas no coinciden porque un mayor aumento absoluto en las cantidades de CO2 no implica necesariamente un mayor aumento porcentual de las mismas, esto depende de la cantidad que se tome de referencia. Por la razón expuesta decidimos asignar el indicador (CoAdMu2) a la actuación de C1.

8.6.4 Tarea 4 "Crecimiento de Bacterias"

En la Tabla 8.39 se muestra que identificamos una modificación en el trabajo posterior de la Tarea 4, ésta se ha dado en la resolución del ejercicio (c). Así mismo en la tabla recogemos los indicadores que caracterizan la resolución de la estudiante.

Tabla 8.39. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C1, Tarea 4*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re1	1	1	*
Pr1	1	1	*
Pr4	1	1	*
Pr5	1	1	*
Rep1 (D)	0	1	+
Rep5 (D)	1	1	*
EstAd	1	1	*
Total de Modificaciones			+1

Resolución del ejercicio (a)

En las dos resoluciones la estudiante detecta, a partir de procedimientos aditivos, que el crecimiento diario es constante (Re1).

Resolución del ejercicio (b)

En los dos ejercicios de valor ausente la estudiante aplica la relación detectada en el ejercicio (a), de este modo en el (b.1) divide la cantidad de bacterias entre la constante (Pr1) y en el (b.2) multiplica por el mismo valor (Pr4), en este último ejercicio también sugiere que pueden efectuarse sumas repetidas hasta llegar a la cantidad de bacterias correspondiente a 25 días (estrategia *building up*, Pr5).

Resolución del ejercicio (c)

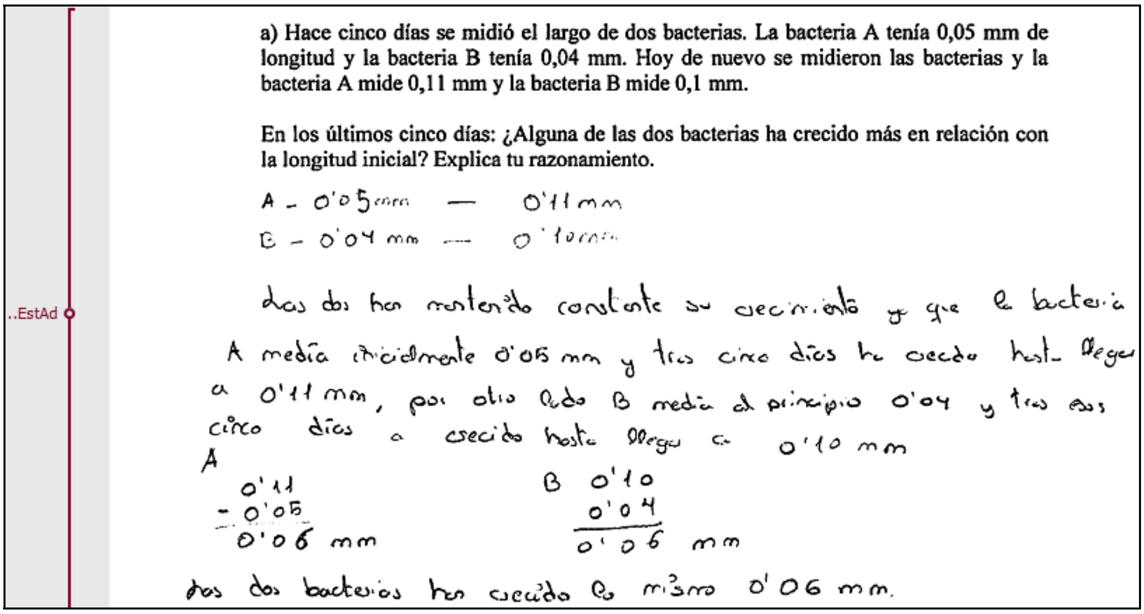
En el primer trabajo individual no resuelve este ejercicio. En el trabajo posterior representa la relación entre las cantidades mediante la expresión $n \cdot 13 = y$, indicado al lado la cantidad representada por cada variable (Rep1 (D)).

Resolución del ejercicio (d)

Hemos considerado que la representación gráfica de la relación no se ha modificado ya que en los dos casos ha trazado los puntos correspondientes a los pares de cantidades motivo por el cual se les ha asignado el indicador (Rep5 (D)), aunque en la primera entrega haya considerado que la relación se origina en el par (1, 13).

Resolución del ejercicio (a) de la II Fase

La estudiante determina el crecimiento absoluto de cada bacteria mediante la diferencia de las dos medidas, como obtuvo el mismo resultado concluyó que ambas habían crecido lo mismo. Esta actuación ejemplifica la aplicación de la estrategia aditiva y en consecuencia se le ha asignado el indicador (EstAd). En la Figura 8.69 mostramos el fragmento del trabajo realizado por la estudiante en este ejercicio.


..EstAd

a) Hace cinco días se midió el largo de dos bacterias. La bacteria A tenía 0,05 mm de longitud y la bacteria B tenía 0,04 mm. Hoy de nuevo se midieron las bacterias y la bacteria A mide 0,11 mm y la bacteria B mide 0,1 mm.

En los últimos cinco días: ¿Alguna de las dos bacterias ha crecido más en relación con la longitud inicial? Explica tu razonamiento.

A - 0'05mm — 0'11mm
B - 0'04 mm — 0'10mm

Las dos han mantenido constante su crecimiento ya que la bacteria A medía inicialmente 0'05 mm y tras cinco días ha crecido hasta llegar a 0'11 mm, por otro lado B medía al principio 0'04 y tras esos cinco días a crecido hasta llegar a 0'10 mm

A
0'11 − 0'05 = 0'06 mm

B
0'10 − 0'04 = 0'06 mm

Las dos bacterias han crecido lo mismo 0'06 mm.

Figura 8.69. Resolución inicial del ejercicio (a) de la II Fase de la Tarea 4 (Caso C1)

8.6.5 Tarea 5 "Permanencia Activa de un Fármaco"

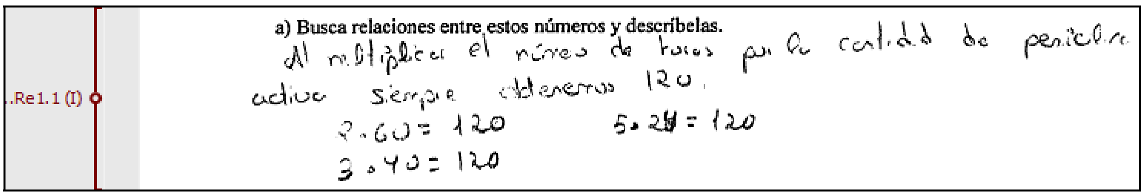
Hemos detectado una modificación positiva en el trabajo posterior de la Tarea 5, la misma se ha dado en la resolución del ejercicio (a) y la describimos a continuación de la Tabla 8.40.

Tabla 8.40. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C1, Tarea 5*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
Re1.1 (I)	0	1	+
Pr4 (I)	3	3	*
Rep3.1 (I)	1	1	*
Total de Modificaciones			+1

Resolución del ejercicio (a)

En el primer trabajo realizado sobre la Tarea 5 la estudiante no resuelve el ejercicio (a), posteriormente a partir de la consideración de algunos casos describe verbalmente la relación funcional entre las cantidades de las dos magnitudes (Rep1.1 (I)) tal y como se puede observar en la Figura 8.70.


..Re1.1 (I)

a) Busca relaciones entre estos números y descríbelas.

Al multiplicar el número de horas por la cantidad de penicilina activa siempre obtenemos 120.

2·60 = 120   5·24 = 120
3·40 = 120

Figura 8.70. Resolución posterior del ejercicio (a) de la T5 (Caso C1)

<u>*Resolución de los ejercicios (b) y (c)*</u>

En los tres ejercicios de valor ausente (b.1), (b.2) y (c) detectamos que la estudiante aplica la “regla de tres inversa” a la que le hemos asignado el indicador Pr4 (I). En los primeros dos ejercicios toma como referencia el par (1, 120) y en el ejercicio (c) considera el par (60,120). En el tratamiento del mismo toma las cantidades de tiempo medidas en minutos de ahí que en lugar de 1,5 horas utilice la equivalencia en minutos (90). En la Figura 8.71 presentamos la resolución expuesta por C1 en el ejercicio (c).

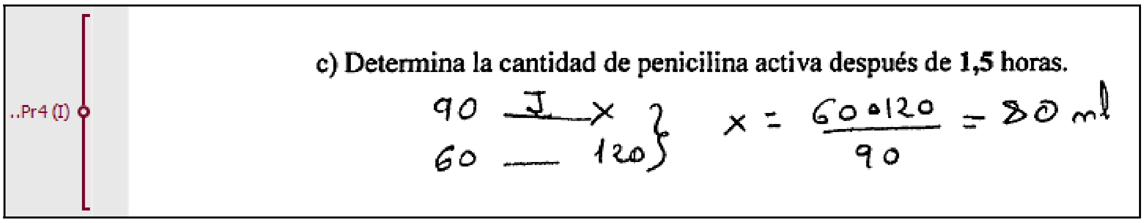


Figura 8.71. Resolución posterior del ejercicio (c) de la T5 (Caso C1)

<u>*Resolución del ejercicio (d)*</u>

En los dos trabajos individuales no aporta ninguna representación simbólica de la relación entre las magnitudes de la situación.

<u>*Resolución del ejercicio (e)*</u>

La representación gráfica mostrada en las dos resoluciones es correcta (Rep3.1 (I)), destacamos que la estudiante traza un punto que marca el principio de la relación en (1,120) y una flecha en la parte inferior de la gráfica que sugiere el comportamiento decreciente de la misma.

8.6.6 Tarea 6 “Compartiendo Pizza”

En la primera entrega de la tarea la estudiante no resuelve el ejercicio (b) de la tarea situación que explica la modificación indicada en la Tabla 8.41, después de ésta describimos el trabajo manifestado por C1.

Tabla 8.41. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C1, Tarea 6*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
CoR1	1	1	*
RPr2	0	1	+
Total de Modificaciones			+1

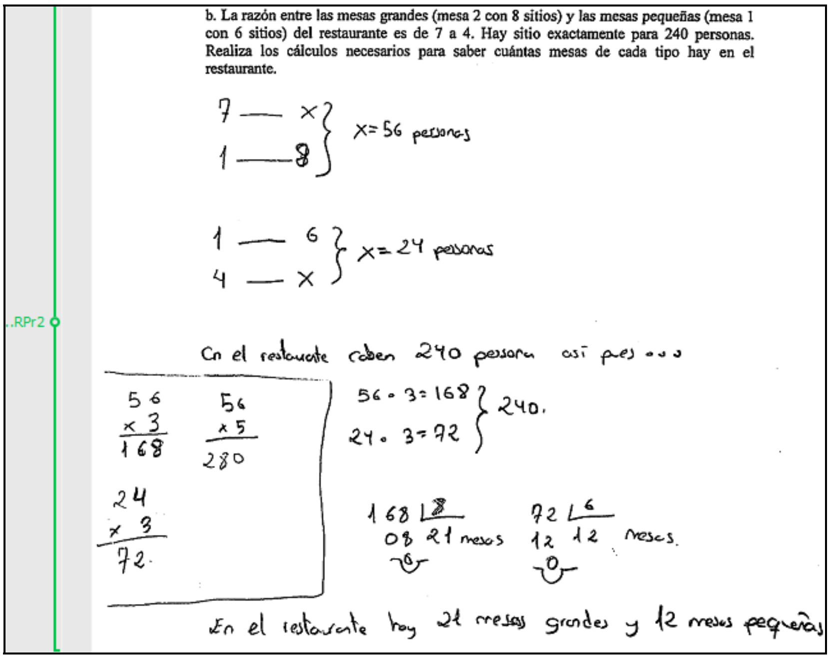
<u>*Resolución del ejercicio (a)*</u>

En los dos trabajos la estudiante aplica el mismo procedimiento para comparar las razones (CoR1), éste consiste en la división de las cantidades de personas y mesas y posterior comparación de los números obtenidos en el cociente. En el análisis de contenido expusimos que la reducción de la razón a un número desviste a la noción de su entidad como relación (A. Fernández, 2001).

Resolución del ejercicio (b)

En la primera entrega no resuelve este ejercicio. En la resolución posterior observamos que la estudiante primero averigua mediante una regla de tres simple la cantidad de personas que se ubican en 7 mesas grandes y 4 mesas pequeñas, respectivamente 56 y 24 personas, después sigue un procedimiento de tanteo para calcular y ajustar las cantidades de personas que se sientan en los grupos de mesas grandes y pequeñas hasta llegar a las 240. Es decir, la estudiante C1 halla dos cantidades que sumadas dan 240 pero que guardan la relación 56:24, a continuación divide las cantidades de 168 y 72 personas entre los sitios de cada tipo de mesa obteniendo las cantidades de mesas requeridas. Este tipo de actuaciones las hemos catalogado con el indicador RPr2.

En la Figura 8.72 presentamos la resolución mostrada por la estudiante.



b. La razón entre las mesas grandes (mesa 2 con 8 sitios) y las mesas pequeñas (mesa 1 con 6 sitios) del restaurante es de 7 a 4. Hay sitio exactamente para 240 personas. Realiza los cálculos necesarios para saber cuántas mesas de cada tipo hay en el restaurante.

7 — x, 1 — 8 ; x = 56 personas

1 — 6, 4 — x ; x = 24 personas

RPr2

En el restaurante caben 240 personas así pues …

56 × 3 = 168 ; 56 × 5 = 280 ; 24 × 3 = 72

56 · 3 = 168, 24 · 3 = 72 } 240.

168 : 8 = 21 mesas ; 72 : 6 = 12 mesas.

En el restaurante hay 21 mesas grandes y 12 mesas pequeñas

Figura 8.72. Resolución posterior del ejercicio (b) de la T6 (Caso C1)

8.6.7 Tarea 7 "El Palacio Real de la Alhambra"

En la Tabla 8.42 se aprecia que la estudiante muestra tres modificaciones positivas, las mismas se han detectado en el enunciado de la conjetura de la I Fase de la Tarea 7.

Tabla 8.42. *Modificaciones detectadas en el trabajo individual de C1, Tarea 7*

Indicadores	Trabajo en Clase	Trabajo Fuera de Clase	Modificaciones
IE2	1	1	*
C3	0	1	+
C4	0	1	+
C5	1	0	+
Total de Modificaciones			+3

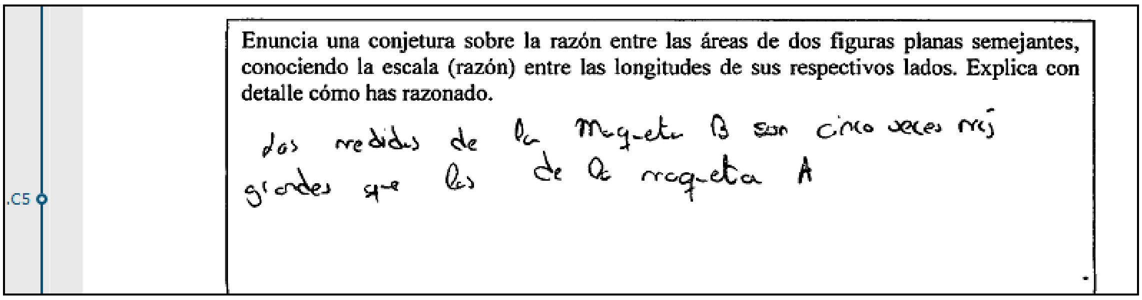
Resolución del ejercicio (a) de cada Fase

En las dos entregas de la tarea aplica adecuadamente la escala 1:5 para calcular las longitudes requeridas de la maqueta B (IE2). Calcula las medidas del área y volumen aplicando las fórmulas correspondientes.

Resolución del ejercicio (b) de cada Fase

En el trabajo hecho durante la sesión resuelve únicamente el ejercicio (b) de la I Fase. En el mismo expone una afirmación sobre la relación entre las medidas de ambas maquetas que no es válida (C5), se muestra en la Figura 8.73. Tal afirmación constituye una inconsistencia en el trabajo de C1 ya que ella completa correctamente las medidas de las magnitudes en la tabla del ejercicio (a), a partir de las cuales no se puede concluir que todas las medidas de la maqueta B sean cinco veces más grandes que las de la maqueta A. Es posible que en el enunciado de la conjetura la estudiante esté haciendo referencia únicamente a la longitud.

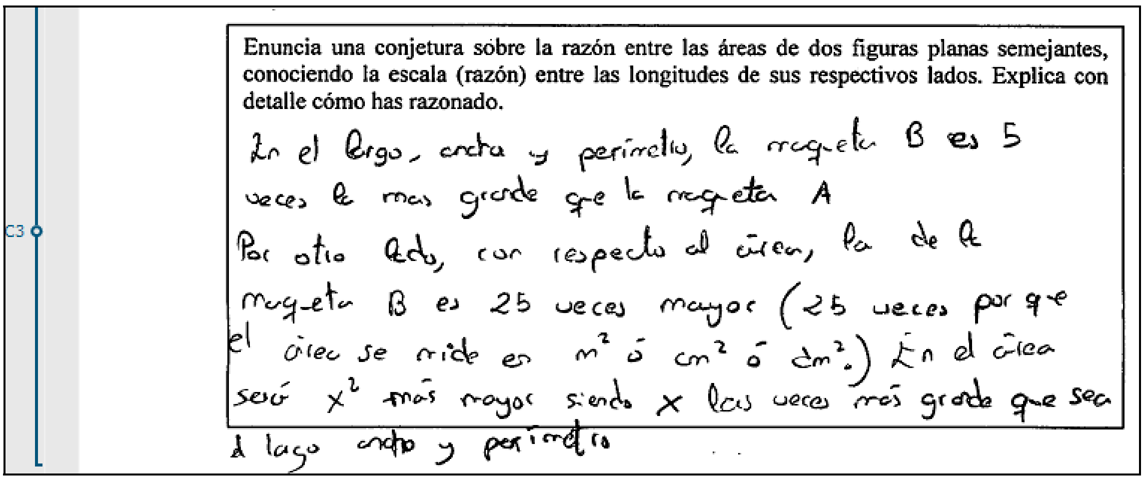
En el trabajo posterior la estudiante enuncia una conjetura que consideramos adecuada (C3) ya que aunque no apunta explícitamente hacia la razón, hace referencia a la relación multiplicativa entre las longitudes y el área mediante el uso de expresiones cotidianas de la razón como lo es "*veces más grande*". En las Figuras 8.73 y 8.74 mostramos las dos resoluciones expuestas por la estudiante.


.C5

Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

las medidas de la maqueta B son cinco veces más grandes que las de la maqueta A

Figura 8.73. Resolución inicial del ejercicio (b) de la I Fase de la T7 (Caso C1)


C3

Enuncia una conjetura sobre la razón entre las áreas de dos figuras planas semejantes, conociendo la escala (razón) entre las longitudes de sus respectivos lados. Explica con detalle cómo has razonado.

En el largo, ancho y perímetro, la maqueta B es 5 veces la más grande que la maqueta A
Por otro lado, con respecto al área, la de la maqueta B es 25 veces mayor (25 veces porque el área se mide en m^2 ó cm^2 ó dm^2) En el área será x^2 más mayor siendo x las veces más grande que sea el largo ancho y perímetro

Figura 8.74. Resolución posterior del ejercicio (b) de la I Fase de la T7 (Caso C1)

La estudiante resuelve el ejercicio (b) de la II Fase únicamente en el trabajo realizado después de la intervención. En este ejercicio describe una relación entre las longitudes de las dos maquetas, la hemos codificado con el indicador (C4) porque aunque es una afirmación verdadera en este caso no es pertinente su presencia.

8.7 SÍNTESIS DEL ESTUDIO DE CASOS

En la Tabla 8.43 mostramos un resumen de la frecuencia de las modificaciones positivas y negativas detectadas en los trabajos individuales de los alumnos que han formado parte del estudio de casos.

Tabla 8.43. *Frecuencia de modificaciones detectadas en los trabajos individuales de los seis estudiantes del estudio de casos*

	B2		D6		B7		C3		B14		C1	
Tarea 1	+3		+3		+1	-1	+3	-1		-4		
Tarea 2	+4	-1	+2	-2	+3		+2		+1	-2	+2	
Tarea 3	+1						+1				+1	-1
Tarea 4	+5		+3	-1	+5		+11		+5	-1	+1	
Tarea 5		-1		-1	+1		+3	-2	+1		+1	
Tarea 6	+3		+1	-1	+4	-1	+7		+3	-1	+1	
Tarea 7	+1		+2		+2		+3	-1	+3	-1	+3	

Conclusiones sobre cada caso

El estudiante B2 del G1 modificó al menos un aspecto del trabajo inicial realizado en cada una de las 7 tareas ya que en todas ellas detectamos modificaciones, solamente identificamos una modificación negativa en el trabajo posterior sobre la Tarea 2 y sobre la Tarea 5. En todas las tareas manifestó modificaciones positivas lo cual nos informa de un aumento en la cantidad de indicadores de actuaciones que corresponden a concepciones adecuadas y de la superación de concepciones inadecuadas, en el caso de que haya mostrado alguna en el trabajo inicial. Este aumento en la cantidad de indicadores Tipo A se puede interpretar como un enriquecimiento de las resoluciones posteriores.

La estudiante D6 del G1 no modificó ningún aspecto de la resolución de la Tarea 3. En cuatro de las seis tareas en las que sí identificamos modificaciones hemos observado que la estudiante modificó la resolución tanto en sentido positivo como negativo. En las tareas 1 y 7 las modificaciones fueron positivas.

La estudiante B7 del G1 tampoco modificó ningún aspecto de la resolución de la Tarea 3. En las tareas 1 y 6 identificamos una modificación negativa las cuales se explican por una pequeña disminución en la cantidad de indicadores asignados a las resoluciones mostradas por la estudiante.

La estudiante C3 del G2 modificó la resolución posterior de todas las tareas. Es destacable la cantidad de modificaciones identificadas en el trabajo sobre las tareas 4 y 6, la resolución original de éstas se caracteriza por la baja cantidad de indicadores asignados a las actuaciones mostradas, es decir inicialmente la estudiante mostró resoluciones "pobres", desprovistas de conocimientos matemáticos o sin resolver, las resoluciones posteriores recogen los conocimientos expuestos y discutidos durante la puesta en común de esas tareas. En las tareas 1, 5 y 7 identificamos modificaciones negativas, de las cuales llamó nuestra atención la inconsistencia detectada en la resolución de la Tarea 7.

El estudiante B14 no modificó ningún aspecto de la resolución de la Tarea 3. En cinco de las seis tareas en las que sí identificamos modificaciones hemos observado que el estudiante modificó la resolución tanto en sentido positivo como negativo. En la resolución de la Tarea 1las cuatro modificaciones fueron negativas y se deben a la disminución en el número de indicadores correspondientes a una concepción adecuada mostrada en el trabajo inicial, esto nos permite decir que la primera resolución fue más rica en exposición de conocimientos que la segunda.

La estudiante C1 no modificó el trabajo sobre la Tarea 1y únicamente en la Tarea 3 identificamos una modificación negativa, la misma se explica por la presencia de un indicador tipo B en la resolución posterior de la tarea el cual no se había identificado en el primer trabajo. En las seis tareas identificamos modificaciones positivas.

Conclusiones de corte general

Los seis estudiantes modificaron la resolución posterior de al menos 6 de las tareas. Tres estudiantes no modificaron la Tarea 3 y una alumna no modificó la tarea 1.

Los seis estudiantes del estudio de casos manifestaron pocas modificaciones en la resolución de las tareas 3 y 5. Consideramos que el tiempo que se dedicó a la puesta en común de tales tareas no fue suficiente para abordar con mayor detalle los aspectos centrales de las mismas. La puesta en común de la Tarea 3 se centró en la revisión del ejercicio (a) (Ver Desarrollo de la 2ª sesión, Apartado 6.2.2), mientras que la puesta en común de la Tarea 5 se realizó parcialmente (Ver Desarrollo de la sesión 3, Apartado 6.3.2).

En el desarrollo del estudio de casos y de nuestro estudio hemos actuado bajo el supuesto de que las modificaciones en el conocimiento expuesto por los estudiantes en los dos trabajos individuales pueden deberse a múltiples razones: (1) el nivel de compromiso de cada estudiante con su aprendizaje que contribuye a poner mayor atención al trabajo hecho en clase y que en experiencias futuras puede aplicar, (2) el tiempo transcurrido entre las dos facetas de trabajo individual, (3) la experiencia vivida en el trabajo colaborativo y la puesta en común de las tareas, (4) la ayuda externa de otra persona ajena a la experimentación, (5) la consulta en libros de texto de los conocimientos requeridos, etc. No consideramos que los cambios manifestados se deban exclusivamente a la dinámica seguida en el aula, pero sí consideramos que la misma es una de las posibles influencias que actuaron sobre esas modificaciones.

De los 107 indicadores utilizados para describir el conocimiento matemático expuesto oralmente en los equipos durante la fase de trabajo colaborativo hemos utilizado 80 para analizar las resoluciones individuales escritas de los estudiantes que han formado parte del estudio de casos, lo cual corresponde aproximadamente a un 75% del conjunto de descriptores de partida. Con base en este dato consideramos que la riqueza de análisis es mucho mayor en el análisis de los trabajos en equipo debido a los intercambios orales suscitados, mientras que disminuye en los estudios de caso debido a que el análisis se realiza sobre producciones escritas.

Capítulo 9. Conclusiones y Aportes de la Investigación

La investigación realizada y que se recoge en este documento, se ha centrado en los conocimientos y competencias matemáticas promovidas en una secuencia de trabajo en el aula que contempla el estudio de la razón y la proporcionalidad desde una perspectiva funcional y en la que han participado estudiantes de magisterio. También se han estudiado otros elementos que han formado parte de la experimentación son el papel de la investigadora-docente encargada de dirigir el proceso, las fortalezas y debilidades tanto de la dinámica de trabajo colaborativa seguida como de las tareas matemáticas utilizadas para la investigación y realizadas por los estudiantes.

En este capítulo final, se presentan las conclusiones que se derivan del desarrollo de esta investigación. Iniciamos la exposición de las mismas atendiendo a la consecución de los objetivos propuestos en el Capítulo 1 y describiendo simultáneamente las principales aportaciones de este trabajo. Seguidamente reflexionamos y aportamos algunas conclusiones relativas a la metodología de investigación. Finalmente presentamos las limitaciones de este estudio y recogemos las líneas abiertas que hemos ido señalando en los capítulos de análisis 7 y 8, y que constituyen perspectivas de continuación de la investigación.

9.1 Recapitulación de los Objetivos de la Investigación

Como se ha expuesto en el Capítulo 1, el problema de nuestra investigación se sintetizó en dos preguntas a las cuales se llegó después de plantear la necesidad de estudiar, de forma sistemática, la creación, puesta en práctica y análisis de una intervención de enseñanza orientada a contribuir en el proceso de adquisición de la competencia matemática de los futuros maestros de primaria, así como en el desarrollo del conocimiento matemático de los mismos. A continuación recogemos estas dos cuestiones:

1. ¿Cómo transcurre el proceso de diseño, puesta en práctica y análisis de una secuencia de trabajo en el aula? que:

- aborda la revisión y (o) reconstrucción de unos conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad,
- se fundamenta en un enfoque funcional de las matemáticas
- puesta en práctica mediante una dinámica de trabajo colaborativo y que
- se desarrolla en un entorno natural de formación inicial de futuros maestros de primaria.

2. ¿Cuál es la contribución, de esta secuencia, al desarrollo de competencias matemáticas de los futuros maestros de primaria?, enfocándonos en dos posibles fuentes de contribución:

- el trabajo realizado en los equipos como respuesta ante las demandas cognitivas de las tareas,
- y el papel de la metodología de trabajo en el aula en el fomento de estas competencias.

En consecuencia nos planteamos dos objetivos generales:

1. *Estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una "secuencia de trabajo en el aula" que aborda la revisión y (o) reconstrucción de conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad.*
2. *Investigar cómo contribuye la secuencia de trabajo en el aula en el proceso de desarrollo de la competencia matemática de futuros maestros de primaria, resolviendo problemas elaborados para el caso y utilizando una metodología de trabajo colaborativo.*

Ambos objetivos se abordaron metodológicamente a través de un experimento de enseñanza que posibilitó estudiar los conocimientos y competencias matemáticas de maestros de primaria en formación, a la vez que se promovió el desarrollo de las mismas.

El tratamiento del primer objetivo general se ha presentado en los capítulos 4, 6, 7 y 8. En el Capítulo 4 se sentaron todas las bases para el diseño de la intervención en el aula a través del desarrollo del análisis didáctico de la razón y la proporcionalidad. La concreción de este diseño así como la descripción de su puesta en práctica y análisis preliminar se trató en el Capítulo 6. El análisis retrospectivo de la información recogida se desarrolló en los capítulos 7 y 8.

En el Capítulo 7 se contempló el segundo objetivo general de la investigación, centrado en el estudio de la contribución de la experimentación a las competencias matemáticas de los estudiantes de magisterio. Se utilizó como referencia el trabajo de Rico y Lupiáñez (2008), en esta propuesta se sistematiza la vinculación entre dos niveles de expectativas de aprendizaje, los objetivos específicos y las competencias matemáticas. El procedimiento de vinculación definido ha posibilitado el estudio de las actuaciones manifestadas por los estudiantes desde el punto de vista de la consecución de los objetivos específicos y consecuentemente se han descrito las competencias que se han visto promovidas. Considerando la complejidad de los indicadores de actuación detectados en las producciones de los estudiantes hemos descrito el nivel al que se ha trabajado la competencia, reproducción, conexión o reflexión.

Nuestra investigación ha sido un estudio de naturaleza empírica que se ha preocupado por abordar algunas cuestiones sobre el aprendizaje de las matemáticas en un entorno natural de formación de maestros, en relación con unos contenidos específicos: la razón y la proporcionalidad. Como primer avance de los aportes de nuestra investigación deseamos resaltar que los resultados recogidos en los capítulos 7 y 8 proceden de sesiones de clase ordinarias en las que los estudiantes asistieron y participaron voluntariamente, no hubo una selección de ellos ni se incorporaron condiciones artificiales al proceso de estudio realizado.

9.2 CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON EL OG1

En este apartado describimos la consecución de los objetivos parciales que se han enunciado para concretizar el primero de los objetivos generales.

OG1. *Estudiar el proceso de elaboración, puesta en práctica y análisis de una "secuencia de trabajo en el aula" que aborda la revisión y (o) reconstrucción de conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad.*

El primero de los objetivos generales se ha abordado a través de un experimento de enseñanza, las fases contempladas para el desarrollo de este tipo de investigaciones delimitan las acciones a seguir cuando se está diseñando la intervención en aula, durante la intervención y en el análisis posterior de la misma.

Conclusiones en relación con los objetivos parciales

OP1.1. *Desarrollar un análisis didáctico de los contenidos razón y proporcionalidad para planificar el diseño de la secuencia de trabajo en el aula.*

El diseño de la secuencia de trabajo en el aula, siguiendo los principios de la metodología de investigación de los experimentos de enseñanza, precisó de la elección de un marco teórico sobre el que se fundamentara la toma de decisiones de modo tal que fuese posible articular un conjunto de sesiones coherentes con el interés de la investigación, en nuestro caso el desarrollo del conocimiento y de la competencia matemática de los futuros maestros. Encontramos en los fundamentos del estudio PISA (OCDE, 2004) los principios requeridos para cimentar la propuesta de trabajo de aula. En sintonía con el enfoque funcional de las matemáticas propuesto en el estudio PISA, consideramos el análisis didáctico (Gómez, 2007) como herramienta de planificación de los contenidos de las matemáticas escolares. Esta propuesta comprende diversos análisis que enfatizan el papel de las matemáticas en los fenómenos del mundo, por lo que la elección de la misma resultó apropiada para nuestro interés de elaborar un diseño de trabajo en aula que promoviera el desarrollo de las competencias matemáticas señaladas en el estudio.

El análisis didáctico de la razón y la proporcionalidad se ha presentado en el Capítulo 4 y en el Capítulo 5 se ha mostrado la utilidad del análisis didáctico en el marco del experimento de enseñanza y se han vinculado elementos de la metodología de investigación utilizada y del análisis didáctico, como lo ha sido el análisis de actuación y el análisis retrospectivo de las sesiones.

Esta herramienta de planificación ha constituido un marco que ha permitido organizar y fundamentar muchos de los conocimientos que eran necesarios en el desarrollo del experimento de enseñanza. Se ha descrito el empleo del mismo en el diseño, rediseño y puesta en práctica de la propuesta de enseñanza, objeto del Capítulo 6 de este documento. Esta aplicación se ha plasmado en las decisiones que la profesora-investigadora ha tomado en relación con el aprendizaje de los estudiantes después de cada intervención y se ha utilizado como referente que permite estudiar los procesos de resolución manifestados por los participantes de la investigación en las tareas de razón y proporcionalidad consideradas en la experimentación.

En nuestra investigación también hemos utilizado las herramientas de exploración, organización y estudio de la información propuestas en el análisis didáctico, entre las cuales están los mapas conceptuales y las tablas de vinculación entre las expectativas de aprendizaje (Rico y Lupiáñez, 2008). Las mismas han resultado eficaces para visualizar las relaciones entre los componentes del análisis del contenido así como para mostrar la articulación entre los objetivos de instrucción y competencias matemáticas globales que se pretendían estimular en el experimento de enseñanza, y principalmente nos proporcionó la necesaria orientación para elegir las tareas que se trabajarían en el aula.

Es preciso señalar que el uso del análisis didáctico, como herramienta de planificación de procesos de instrucción en el marco de una investigación, se ve determinado por las circunstancias en las que se usa. Es decir, al finalizar las sesiones de experimentación el investigador se dedica a estudiar las dimensiones o unidades de su interés y no continúa necesariamente el ciclo del análisis didáctico de cara a la enseñanza de un nuevo contenido matemático. Es evidente que tanto el proceso de acopio de información para realizar el análisis de contenido como los procesos de análisis de la actuación que un investigador realiza, se distancian de aquellos que el profesor puede hacer, pero sin duda, lo que el investigador hace continúa siendo una aproximación a ese procedimiento *ideal* de planificación. Este procedimiento ha posibilitado el aprendizaje de la investigadora y contribuido en la formación didáctico-matemática de la misma, consideramos que constituye una herramienta en el crecimiento del conocimiento profesional no solo desde la perspectiva docente sino también desde el punto de vista de la investigación.

Consideramos que el diseño de la intervención constituye otro aporte de la investigación. Éste comprende la descripción detallada de las tareas, los objetivos específicos, la metodología de trabajo en el aula y otros elementos incluidos en la planificación de las sesiones. Constituye un material didáctico que puede ser usado en otros entornos de formación de maestros de educación primaria, incluso podrían aplicarse, como sugiere Ben-Chaim, Keret e Ilany (2012), en aulas de educación secundaria.

OP1.2. *Describir el conocimiento matemático puesto de manifiesto por los estudiantes en la resolución de las tareas durante el trabajo colaborativo, y en las dos fases de trabajo individual de algunos estudiantes*.

En la investigación se ha recogido una extensa cantidad de información contextualizada acerca de la comprensión y negociación de ideas matemáticas asociadas a la razón y la proporcionalidad por parte de estudiantes de magisterio. En el Capítulo 7 se describen 107 indicadores de actuación detectados en el análisis de las transcripciones orales del trabajo colaborativo en seis de las tareas y en el trabajo individual de la Tarea 5. Si bien es cierto que el estudio de Ben-Chaim, Keret e Ilany (2012), aborda aspectos del conocimiento de los futuros maestros que nosotros no hemos considerado, como es el conocimiento didáctico del contenido, resaltamos que, en relación al conocimiento matemático, estos investigadores se centran en estudiar la corrección o no de las respuestas dadas por los participantes de sus estudios. En este sentido, nuestra investigación aporta una rica descripción de actuaciones manifestadas por los estudiantes de magisterio en los diversos tipos de tareas realizadas.

Resaltamos, como aporte de la investigación, la descripción de actuaciones vinculadas al razonamiento proporcional y a la comprensión de la proporcionalidad en el contexto de la formación de maestros, pues en la literatura precedente encontramos la descripción de una gran variedad de actuaciones manifestadas por niños o estudiantes de secundaria y muy poca de maestros en formación. No obstante, en nuestro caso aunque estas descripciones se han utilizado para enmarcar las actuaciones de nuestros participantes, también hemos recogido otras actuaciones que no se han expuesto en tales investigaciones y cuya presencia se puede explicar no sólo por la evidente diferencia de edades sino también por las tareas matemáticas realizadas cuya resolución dio lugar a tales actuaciones. Ejemplo de esto es la variación en la manifestación de la estrategia building-up, descrita en el apartado 7.4.1.3.

Dado nuestro interés por estudiar las competencias matemáticas y los conocimientos manifestados por los participantes sobre contenidos de la razón y de la proporcionalidad hemos utilizado tareas matemáticas distintas a las tradicionalmente usadas para estudiar el razonamiento proporcional. Esto ha hecho posible recoger la descripción de actuaciones que no han sido expuestas en estudios previos. Por ejemplo, en relación con la interpretación de la razón en las tareas 2 y 6 presentamos distintos acercamientos sobre los significados que atribuyen los estudiantes de magisterio a las razones implicadas en tales tareas.

En el Capítulo 7 no nos limitamos a describir las actuaciones manifestadas por los futuros maestros, sino que también procuramos aportar marcos explicativos de tales actuaciones, los cuales no proceden únicamente de lo expuesto por otros investigadores en estudios previos sino que corresponden a conjeturas o explicaciones hipotéticas basadas en las variables de tareas o en otras variables que pueden incidir en las estrategias de resolución de las tareas y en los razonamientos expuestos por los futuros maestros. Un ejemplo de este tipo de conjeturas ha sido la detección de la concepción en la que los estudiantes a partir de la suma del antecedente y consecuente de una razón obtienen el total de elementos comparados. Afirmamos que esta concepción puede estar asociada al tipo de magnitud implicada (discreta), al hecho de que el todo es un dato desconocido y conjeturamos que la relación parte-todo podría constituir un obstáculo en la comprensión de la razón como relación dinámica, postura requerida en la resolución de la Tarea 2.

Se ha logrado contrastar las posibles actuaciones, supuestas y descritas en la planificación de las tareas, con las actuaciones manifestadas en la realidad, algunas de las cuales se cumplieron mientras que otras fueron imprevistas.

En el Capítulo 8 detectamos y analizamos las modificaciones en los conocimientos matemáticos mostradas por seis estudiantes en las dos fases de trabajo individual, el realizado al inicio de cada sesión y el trabajo individual realizado sobre la misma tarea fuera de clase. En relación al estudio de casos observamos que todos los estudiantes modificaron la resolución posterior de al menos 6 de las tareas, siendo las tareas 3 y 5 en las que detectamos menos cantidad de modificaciones, precisamente la puesta en común de estas dos tareas se vio afectada por la limitación de tiempo. Aunque no consideramos que los cambios manifestados se deban exclusivamente a la dinámica seguida en el aula, creemos que es posible que ésta haya incidido sobre esas modificaciones.

Como hemos expresado en el Capítulo 8, observamos una notable diferencia entre la cantidad de indicadores de actuación utilizados para describir la resolución colaborativa de las tareas y aquellos usados para describir las resoluciones individuales. Así la riqueza de análisis ha sido mayor en el estudio de los trabajos en equipo debido a los intercambios orales suscitados, mientras que disminuye en los estudios de caso debido a que el análisis se realiza sobre producciones escritas.

OP1.3. *Describir el papel de la investigadora como promotora del desarrollo del conocimiento matemático durante la fase de institucionalización.*

En los apartados 7.9 y 7.9.5 se han descrito los aportes matemáticos comunes y especializados que promovió la investigadora durante la puesta en común de la resolución de las tareas. Sin embargo, no distinguimos unos de otros debido a la dificultad que supone separarlos, consideramos que el conocimiento del profesor de matemática no puede disgregarse en partes en las que se evidencie solamente conocimientos matemáticos comunes o especializados. No obstante, siguiendo la caracterización propuesta de Hill, Ball y Schilling (2008), es más clara la distinción entre conocimientos matemáticos y conocimientos didácticos del contenido cuya frecuencia se describió en la Figura 7.57. En todo caso, subrayamos que los conocimientos promovidos durante la puesta en común de las tareas no fueron abordados de una manera directiva o impuestos sin la participación de los estudiantes, la investigadora dirigió la revisión de las tareas tomando en cuenta las aportaciones de los estudiantes y cuestionándolos.

En el análisis de las puestas en común identificamos otro tipo de aportes promovidos por la investigadora, éstos se centraron en *conocimientos del contenido y los estudiantes* (Hill, Ball y Schilling, 2008) pues sus intervenciones implicaron reflexiones relacionadas con las dificultades de aprendizaje de los niños en el dominio de la razón y la proporcionalidad. También se hizo alusión a cuestiones relativas a la enseñanza de estos contenidos. Destacamos que estos aportes no fueron planificados y cuya presencia se explica por la faceta docente que asume el investigador en los experimentos de enseñanza.

En todas las sesiones se procuró seguir el guión de conocimientos planificados. Sin embargo, como sucede en los espacios naturales de formación, las intervenciones de los estudiantes o la detección de dificultades no previstas en la planificación de las sesiones implicaron una distribución del tiempo distinta que, en ocasiones, no posibilitó tratar todos los aspectos del contenido planeados.

Aunque solamente tenemos constancia de las modificaciones en los conocimientos matemáticos de seis estudiantes, consideramos que es posible que las intervenciones de la investigadora durante la puesta en común hayan incidido en los cambios mostrados por éstos en las resoluciones realizadas individualmente fuera de clase.

OP1.4*. Identificar fortalezas y debilidades de la dinámica de trabajo colaborativo puesto en práctica.*

A lo largo de las sesiones observamos una implicación entusiasta y positiva de los estudiantes, en ambos grupos. A partir de los análisis previos realizados en medio de las sesiones y de los resultados que han surgido a partir de los análisis posteriores, consideramos que la dinámica de aula, estructurada en 4 fases para la resolución de la tarea, permitió revisar y en otros casos reconstruir los conocimientos matemáticos de los futuros maestros. Pudimos observar verdaderas potencialidades de la dinámica seguida en los intercambios entre los estudiantes. Por un lado el esfuerzo inicial que ha de hacer cada estudiante en torno a la resolución de la tarea contribuye a la posibilidad de aportar ideas durante la fase de trabajo colaborativo, sin este primer momento, la dinámica colaborativa podría ser un fracaso pues posiblemente sólo unos pocos asumirían el trabajo mientras otros copian o evaden la responsabilidad de aportar ideas en la colaboración.

En particular, algunas contradicciones y dificultades manifestadas y discutidas en la fase colaborativa podrían estar superadas. Sin embargo, para afirmar esta suposición es necesario analizar la reconstrucción personal de la resolución de la tarea posteriormente realizada, únicamente logramos estudiar 6 casos (dada la magnitud de esfuerzo y tiempo que hubiera supuesto hacerlo para todos). Por otro lado suponemos y esperamos que la experiencia de aula vivida por los estudiantes contribuya a enriquecer el conjunto de metodologías de enseñanza que en un futuro podrían aplicar en sus aulas de primaria.

Examinando la descripción que realizan los autores (Hitt, 2007; Hitt, Morasse y González, 2008; Hitt y Morasse, 2009) sobre lo que sucede en el aula de clase, podemos percibir que es demasiado estructurada y metódica para lo que realmente sucede allí. Por ejemplo, la experiencia nos ha mostrado que en las primeras sesiones los alumnos participan en la discusión con cierta timidez o no siempre todos los integrantes del pequeño grupo tienen alguna estrategia de resolución del problema.

A pesar de los beneficios observados, consideramos que este tipo de dinámica requiere la inversión de una cantidad de tiempo considerable, sin embargo creemos que esta condición no implica que no se utilice en la formación de maestros ocasionalmente. Los estudiantes manifestaron sentirse cómodos con la dinámica de trabajo seguida, pues les posibilitó revisar el trabajo realizado individualmente y en la misma sesión obtener una retroalimentación sobre los razonamientos aplicados.

Ha resultado particularmente positiva la colaboración de los profesores de la asignatura, quienes no solo apoyaron en la organización del trabajo desarrollado en aula sino que en ocasiones asumieron un papel activo de andamiaje durante la fase de trabajo en equipos.

OP1.5. *Identificar fortalezas y debilidades de las tareas matemáticas aplicadas.*

En el análisis del conocimiento matemático manifestado en la resolución colaborativa de las tareas recogemos un balance de las mismas en términos de fortalezas y debilidades. Las fortalezas que se han identificado responden principalmente a dos beneficios que pueden incidir positivamente sobre el aprendizaje de los estudiantes, éstas son: la estimulación de intercambios productivos y el impulso de diversos procedimientos y estrategias de resolución de las tareas. Es decir, que hayan promovido la flexibilidad en términos de Berk et al. (2009). Consideramos que las principales debilidades detectadas pueden superarse reformulando el enunciado (Tarea 1), incluyendo otro tipo de razones (Tarea 2) o graduando el nivel de dificultad de la misma (ejercicio *e* de la Tarea 4), en todos los casos presentamos sugerencias concretas de su mejora.

Cada tarea se presenta en una hoja de trabajo que constituye un recurso para trabajar algunos de los contenidos de razón y proporcionalidad en el aula de formación de maestros (Anexo B). Además, en el Capítulo 6 se aporta una detallada descripción de las variables matemáticas y didácticas que las caracterizan: contenidos matemáticos implícitos, propósito de la tarea, nivel de dificultad, objetivos específicos de aprendizaje que se promueven, competencias matemáticas que se pueden ver estimuladas, posibles errores o dificultades que pueden enfrentar los estudiantes, descripción de aspectos centrales de la resolución de las mismas así como sugerencias para la puesta en común de la resolución de las tareas.

En la experimentación se han incluido tareas de distintos tipos: introductorias, de valor ausente (directa e inversa), comparación, de escala y porcentaje, las cuales implican situaciones del entorno que han demandado la aplicación del conocimiento matemático para resolverlas. Desde este punto de vista consideramos que las tareas elegidas son coherentes con el enfoque funcional del conocimiento matemático sobre el que se fundamentó la experimentación; el proceso de selección de las mismas no fue arbitrario sino que fue producto del análisis didáctico realizado. Las tareas en las cuales los estudiantes han trabajado, no requieren solamente la aplicación de conocimientos matemáticos, sino también el uso del sentido común y del pronunciamiento de juicios de valor sobre las cuestiones planteadas.

En esta línea, reconocemos que la Tarea 2 ha sido la que ha permitido estudiar una mayor diversidad de actuaciones, dado el carácter abierto de la misma pues las cuestiones implicadas no admitían necesariamente una única respuesta, que tampoco debía ser de tipo numérica. No obstante, en esta tarea prevalecieron las justificaciones basadas en fuentes extra-racionales (Rigo, 2009), lo cual quiere decir que los estudiantes mostraron argumentos que en su mayoría carecen de la aplicación de conocimientos matemáticos.

Las tareas 4, 6 y 7 suscitaron una mayor cantidad de justificaciones basadas en las operaciones (Just3). A diferencia de las tareas 2 y 3, cuyo carácter es abierto, la resolución de estas tres tareas demanda la aplicación de procedimientos lo cual posiblemente ha incidido en el tipo de justificaciones manifestadas predominantemente por los estudiantes de magisterio participantes de nuestra investigación. La Tarea 1ha sido de tipo introductoria, y la función de la misma ha sido la de conectar el trabajo de la experimentación con lo que se venía haciendo en la asignatura, con la idea de no irrumpir drásticamente con el estudio de la razón ni desvincularlo con los significados de las fracciones, tema visto en la asignatura.

9.3 CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON EL OG2

OG2. *Investigar cómo contribuye esta secuencia* (de la que habla el OG1*) en el proceso de desarrollo de la competencia matemática de futuros maestros de primaria, resolviendo problemas elaborados para el caso y utilizando una metodología de trabajo colaborativo.*

El tratamiento de este objetivo general se realizó considerando dos posibles fuentes de contribución a la competencia matemática, las cuales se abordan en los dos objetivos parciales OP2.1 y OP2.2. Por un lado, se estudió la posible contribución a esta competencia basándonos en las actuaciones manifestadas por los estudiantes como respuesta a las demandas cognitivas de las tareas. Por otro lado, se estudió la contribución de la dinámica de trabajo colaborativo y de la metodología de resolución de problemas, esto es la gestión de la clase, al desarrollo de la misma. A continuación resumimos las conclusiones correspondientes a los objetivos parciales.

Conclusiones en relación con los objetivos parciales

OP2.1*. Describir las actuaciones de los estudiantes, manifestadas en la resolución de las tareas matemáticas, en términos de las expectativas de aprendizaje específicas y de las competencias matemáticas consideradas en cada sesión.*

Para describir las actuaciones de los estudiantes en términos de las expectativas de aprendizaje ha sido preciso organizar y estructurar sistemáticamente el trabajo que se realizaría en el aula durante las sesiones de experimentación. Esto se logró mediante el desarrollo del análisis didáctico descrito en el Capítulo 4. Decidir cuáles objetivos de aprendizaje eran prioritarios para incorporarlos en el diseño de la intervención no fue una tarea fácil, así como tampoco lo ha sido establecer la vinculación de esos objetivos con las competencias matemáticas. Sin embargo, justificamos esta vinculación en el mismo capítulo y el producto obtenido fue trascendental para analizar las actuaciones de los estudiantes desde el planteamiento establecido en esta investigación.

El marco teórico del estudio PISA ha resultado pertinente para nuestra investigación, la caracterización de la competencia matemática y los principios del enfoque funcional recogidos en el mismo han determinado la toma de decisiones en el diseño, puesta en práctica y análisis de la intervención. No obstante, destacamos que tuvimos la necesidad de introducir otra “visión” sobre la competencia *argumentar-justificar*, más flexible, que nos permitió estudiar los tipos de justificaciones manifestadas por los estudiantes de nuestro estudio.

Logramos contrastar las suposiciones planteadas en la planificación de las tareas y las actuaciones manifestadas en la realidad por los estudiantes. Observamos que aunque se había previsto, en el contexto de una tarea particular, que algunos objetivos específicos podrían contribuir a una o varias competencias, en la realidad, esta relación no se materializó del todo (la competencia no se promovió) o los indicadores de actuación identificados no eran coherentes con la complejidad de las tareas, esto quiere decir que aunque un ejercicio se haya catalogado como de reflexión los estudiantes la trabajaron en un nivel de reproducción. En síntesis, el estudio del logro de las expectativas de aprendizaje permitió extraer información acerca de la contribución de la experimentación al desarrollo de las competencias matemáticas y el procedimiento seguido ha sido eficaz para lograrlo.

En el análisis de los conocimientos matemáticos manifestados en la resolución de cada una de las tareas, detallados en el Capítulo 7, se recoge un apartado en el que se describen las competencias que se han visto promovidas y en qué nivel se ha hecho. Recordamos que los resultados descritos en relación con el logro de las expectativas de aprendizaje, objetivo y competencias, se han construido considerando las resoluciones colaborativas elaboradas por los equipos. Por lo que en ninguna parte de esta investigación se afirma que todos los estudiantes del equipo mostraron una capacidad particular y que en consecuencia se estimuló o promovió alguna de las competencias matemáticas en todos los miembros del equipo, en su lugar hemos aportado una panorámica relativa de los equipos en los que se mostraron actuaciones que evidencian el logro de las expectativas de aprendizaje planificadas.

Consideramos que el objetivo de promover la competencia matemática no se logrará de manera espontánea, sino que sólo se conseguirá si en los currículos de formación de maestros se presta tanta atención a los procesos de adquisición de los conocimientos como a los propios conocimientos y si los formadores de maestros se plantean su enseñanza de manera intencional y sistemática en las actividades de clase. Desde esta perspectiva consideramos que el proceso de formación, que tiene lugar en el aula, es el contexto ideal para el desarrollo de esta competencia.

La competencia matemática incorpora la conciencia, la gestión y el control de las propias capacidades y conocimientos desde un sentimiento de competencia o eficacia personal e incluye tanto el uso de estrategias de aprendizaje como la capacidad para cooperar, autoevaluarse y autorregular la propia actuación durante el aprendizaje.

Como ya hemos expuesto en los capítulos 1 y 3 la incorporación de competencias en los programas de formación de maestros afecta también a los procesos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar en este nivel educativo. Una de estas repercusiones tiene que ver con la idea de que para promover la competencia matemática es preciso diseñar y poner en marcha actividades matemáticas concebidas desde un enfoque funcional del conocimiento matemático. Sin embargo, con base en la experiencia vivida en esta investigación consideramos que para promover la competencia matemática de los futuros maestros se precisa más reflexión en el ámbito de la educación superior y tomar decisiones respecto a la manera de cómo se debe dirigir la formación de maestros de manera que éstos lleguen a ser matemáticamente competentes.

OP2.2. *Estudiar si la metodología de trabajo en el aula, desarrollada en la experimentación, ha contribuido en el desarrollo de las competencias matemáticas.*

En el apartado 7.11.3 aportamos las evidencias que nos permiten afirmar que la dinámica de trabajo colaborativo suscitó en los estudiantes la expresión de los razonamientos aplicados en la resolución de las tareas. Estos razonamientos fueron compartidos con sus compañeros de equipo y como describimos se estimularon las competencias *argumentar-justificar y comunicar*. La elección de estudiar los contenidos a través de la resolución de problemas y no desde una metodología expositiva incidió, valga la redundancia, en la competencia *resolver problemas.* Los estudiantes se enfrentaron a una variedad de tareas que no sólo implicaron distintos tipos de situaciones sino, que además, presentaban complejidad, contenidos estudiados, representaciones implicadas, entre otras, variables.

Es pertinente recalcar el papel de la fase inicial de trabajo individual, durante este momento los estudiantes se ven obligados a razonar, habilitan los conocimientos para resolver la situación o constatar que desconocen cómo resolverla. Llegado el momento del trabajo colaborativo ya han puesto en marcha razonamientos, adecuados o inadecuados, que podrá compartir con sus compañeros y en equipo construir la mejor resolución posible. Bajo estas circunstancias la dinámica promueve el intercambio de ideas matemáticas entre los miembros del equipo. En pocos casos observamos que alguno de los estudiantes no participara de la conversación suscitada en el equipo para resolver la tarea. En síntesis, hemos constatado que esta manera de resolver los problemas promueve las competencias *comunicar* y *argumentar-justificar*.

9.4 CONCLUSIONES EN RELACIÓN CON LA METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Consideramos que el experimento de enseñanza realizado ha posibilitado explorar una experiencia de enseñanza-aprendizaje alternativa. Se ha recogido una extensa cantidad de información contextualizada acerca de la comprensión y negociación de ideas matemáticas asociadas a la razón y la proporcionalidad, a partir de la cual se están elaborando algunos aportes teóricos acerca de este dominio de aprendizaje. Como afirman Cobb et al. (2003) la riqueza de estos estudios radica en que al estar basados en hechos empíricos son esenciales para la mejora de la educación.

Esta investigación se ha realizado desde un enfoque metodológico que procura relacionar la teoría y la práctica. En nuestro estudio hemos experimentado un continuo ir y venir entre ambas. Se recurría a la teoría para interpretar, entre otras, las actuaciones de los estudiantes y enmarcarlos dentro de comprensiones amplias relacionados con fenómenos del aprendizaje de la razón y la proporcionalidad. Por otro lado logramos describir y explicar, presumiblemente, actuaciones que no están recogidas en otras investigaciones.

La claridad de las acciones a realizar en cada fase del experimento ha contribuido en gran medida en la concepción, aplicación y análisis de la experiencia de aula. Tales acciones no han surgido por voluntad de las investigadoras sino que responden a una organización de lineamientos bien definidos en el diseño de este tipo de estudios.

La metodología de investigación seguida (experimentos TDE) conlleva, además del análisis previo y retrospectivo, el análisis del trabajo desarrollado socialmente y del expuesto individualmente. Esta doble perspectiva posibilita generar una panorámica más completa de lo sucedido en la experimentación, y de cómo funciona el diseño en ambas facetas.

Los análisis previos realizados después de las sesiones se centraron en la toma de decisiones en beneficio de la mejora del diseño y del aprendizaje de los estudiantes. Si bien en cierto en estos análisis surgieron elementos que nos iluminaron el camino a seguir en el análisis retrospectivo, al llegar a éste procuramos alejarnos de las primeras impresiones derivadas de los análisis preliminares.

La diferencia entre la riqueza de las producciones orales de los trabajos colaborativos y la presente en los trabajos escritos de los alumnos respaldan la elección metodológica de recoger informaciones a través de diferentes registros. Mientras que para el análisis retrospectivo de las sesiones utilizamos 107 indicadores de actuación relacionados con el conocimiento matemático puesto de manifiesto, en el análisis de las producciones escritas de los casos utilizamos 70 de éstos. Esta diferencia refleja la complejidad que encierra el análisis de producciones orales, éstas permiten conocer una mayor variedad de acercamientos. Sin embargo, reconocemos la dificultad que entraña la interpretación de este tipo de producciones.

En nuestro caso ha sido propicio el hecho de que la investigadora haya permanecido en el aula desde el primer día de clase y compartido con los estudiantes el trabajo de la asignatura. Además, esta permanencia permitió conocer la dinámica de trabajo seguida regularmente y conocer con detalle los contenidos y actividades matemáticas que se trataron entre las sesiones, lo cual permitió generar explicaciones sobre posibles influencias en las actuaciones manifestadas por los estudiantes (Anexo D). Por ejemplo, constatamos que el trabajo en la asignatura en relación con los números racionales se centra en el significado parte-todo y que este hecho sumado a la experiencia previa escolar puede explicar la constante identificación de la razón y la fracción parte-todo manifestada en la experimentación por los estudiantes de magisterio.

Ha sido positivo trabajar con dos grupos de formación inicial de maestros. Esta decisión metodológica hizo posible una doble puesta en escena del diseño elaborado, lo cual hizo posible la toma de decisiones en beneficio del aprendizaje de los estudiantes, y en consecuencia el diseño se reelaboró y mejoró después de cada intervención. No obstante, como resaltamos en el Capítulo 5, esta decisión derivó en la recogida y análisis de una amplia cantidad de información, lo cual nos motivó a usar el programa de análisis de datos cualitativos MAXQDA10.

La decisión de usar este software resultó especialmente pertinente dada la cantidad de información a analizar. A través de este programa se codificaron las transcripciones de las producciones orales en equipo, las transcripciones de las puestas en común y las producciones escritas de los estudios de caso. Además, a través de la herramienta "visualización de resultados" obtuvimos cuantificaciones en la hoja de cálculo de los indicadores relativos a las dimensiones de análisis definidas, por sesión, tarea o grupo (Anexos M y N). Destacamos la posibilidad que este software ofrece de recuperar rápidamente cualquier segmento o fragmento del trabajo de los estudiantes, sin duda esta opción ha sido de mucha utilidad para seleccionar los ejemplos que hemos elegido para ilustrar las actuaciones descritas en el Capítulo 7.

Se ha recogido información a través de distintos registros: producciones escritas, grabaciones de audio y videograbación. Esto ha incidido en la validez de los resultados reportados pues el registro en papel se usó para constatar las actuaciones que identificamos en las transcripciones del trabajo colaborativo y en sentido inverso.

9.5 LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Reconocemos que cuatro sesiones no son suficientes para estudiar y promover el desarrollo del conocimiento sobre razón y proporcionalidad y de las competencias matemáticas asociadas en el ámbito de la formación de maestros. Para incidir eficazmente en el aprendizaje de estos estudiantes se requiere más tiempo y dosificar gradualmente los contenidos considerados en las tareas. El estudio de la razón y proporcionalidad es un desafío dada la complejidad de ambas nociones, las cuales adoptan distintos significados en las matemáticas escolares.

La poca distancia temporal entre la 1ª y 2ª sesión implicó una acumulación de trabajo en corto periodo de tiempo para la investigadora, pues antes de cada sesión se hizo una revisión de la información recogida en la sesión previa. Sin embargo, esta condición posiblemente incidió favorablemente en los estudiantes quienes recordaron y usaron conocimientos que se discutieron en la sesión anterior.

Como es habitual en estos estudios, se recogió una extensa cantidad de información, y aunque hemos usado el programa de análisis de datos para organizar y cuantificar las codificaciones de las transcripciones, reconocemos que el proceso de interpretación es una tarea ardua que requiere de reflexión y de varias revisiones. En ocasiones, las primeras interpretaciones de las actuaciones de los estudiantes no fueron las más pertinentes lo que requirió de la reinterpretación conjunta de las mismas.

La complejidad de las nociones razón y proporcionalidad ha requerido de la búsqueda de diversos marcos de referencia para interpretar las actuaciones de los estudiantes, es decir, ha sido preciso considerar, además de las investigaciones centradas en el razonamiento proporcional, estudios centrados en el porcentaje o en la proporcionalidad geométrica. Ambos forman parte del campo conceptual multiplicativo en el que muchas de las relaciones entre los significados de los conceptos incluidos son difusas, y es la situación del entorno la que permite dibujar esas líneas diferenciadoras. Esta condición supone un desafío para el investigador cuya atención se centra en los significados o dificultades de aprendizaje de un contenido matemático poco acotado.

La decisión de explorar una variedad de tareas ha sido un intento por recoger un panorama general de las actuaciones de los estudiantes de magisterio sobre el contenido considerado. No obstante, esto ha dificultado el intento de trazar una trayectoria sobre el aprendizaje de los estudiantes a lo largo de las cuatro sesiones. Otra condición que incidió en la decisión de no estudiar la evolución de los conocimientos manifestados en los equipos obedeció precisamente a la asistencia irregular de estos estudiantes a la asignatura.

El tipo de investigaciones, como la que en este documento se presenta, requieren coordinar análisis sociales e individuales, condición que demanda la delineación de pautas para cada tipo de análisis, que aunque han de estar vinculados también han de dar respuesta a distintas cuestiones. En nuestra investigación el análisis de los trabajos en equipo se centra en el estudio de los conocimientos matemáticos negociados para resolver la tarea de forma exitosa, mientras que en el análisis cognitivo individual se centró en la identificación de modificaciones manifestadas en el trabajo realizado fuera de clase tomando como referente el trabajo realizado individualmente en la clase, lo cual es una manera de informar sobre la evolución, de un estudiante, en la resolución de la tarea.

La intervención de la investigadora como docente da lugar a cierta confusión en el momento de la intervención, al tener que prevalecer los intereses y objetivos de la investigación sobre otros, por ejemplo, los referentes al aprendizaje. Reconocemos que surge un dilema pues la investigadora procuró promover el aprendizaje en todas las sesiones pero en ocasiones fue preciso desatender alguna inquietud manifestada por los estudiantes con el objetivo de explorar otras cuestiones de la investigación previstas para esa sesión.

9.6 PERSPECTIVAS DE FUTURO

A partir del desarrollo de esta investigación han surgido nuevas cuestiones, cuyo tratamiento pueden considerarse como perspectivas futuras de investigación. Algunas de estas perspectivas se han mencionado en los capítulos 6, 7 y 8.

Complementar el diseño instruccional elaborado en esta investigación incorporando otras estrategias que permitan estudiar y promover el conocimiento didáctico del contenido, consideramos que el modelo de formación propuesto por Ben-Chaim, Keret e Ilany (2007, 2012) aporta un posible camino para ampliar y continuar el estudio que hemos realizado.

Entre las actuaciones manifestadas por los participantes de nuestra investigación identificamos la concepción CPr3 (*si a:b entonces hay a+b elementos*) e intuimos que la relación parte-todo podría ser un obstáculo para el reconocimiento del carácter dinámico de la razón. Con base en este resultado consideramos que una posible vía de continuación es estudiar cómo la comprensión sobre la relación parte-todo favorece u obstaculiza la comprensión de los demás subconstructos de los números racionales, en particular la comprensión de la razón. Es una vía de continuación que puede desarrollarse tanto en el nivel de secundaria como en el ámbito de la formación de maestros.

Como reflexionamos en el análisis preliminar de la segunda sesión, consideramos que el estudio e impulso de la comprensión del porcentaje requiere de una investigación propia. Consideramos que los insumos recogidos en el análisis didáctico de nuestra investigación constituyen una base inicial sobre la cual construir un nuevo diseño instruccional para tratar esta noción.

Analizar todas las producciones individuales, con el objetivo de esclarecer la contribución del trabajo colaborativo y de la puesta en común en las modificaciones que puedan haberse manifestado en el trabajo individual realizado fuera de clase. Así mismo, la confirmación de algunos supuestos enunciados en el análisis de la información en el Capítulo 7 requiere del análisis de las producciones individuales. Por ejemplo, en relación con la presencia de la ilusión de linealidad en la resolución de la Tarea 7, presumiblemente creemos que los estudiantes manifestaron frecuentemente esta concepción en su trabajo individual inicial y que ha sido el trabajo colaborativo el que ha incidido en que menos cantidad de equipos, que los esperados, la mostraran.

Una perspectiva futura es desarrollar investigaciones siguiendo la estructura de nuestro estudio pero centrado en otros contenidos matemáticos.

9.7 APORTES CIENTÍFICOS DE LA INVESTIGACIÓN

La estructura de este estudio constituye un aporte a la investigación centrada en los procesos de enseñanza-aprendizaje que tienen lugar en la clase de matemáticas. La coordinación del uso de las herramientas del análisis didáctico y de la metodología de los experimentos de enseñanza, se han mostrado eficaces para estudiar y promover el desarrollo del conocimiento matemático en el campo de la razón y la proporcionalidad, en el ámbito de la formación de maestros.

El diseño instruccional que se ha preparado comprende un conjunto de tareas, expectativas de aprendizaje y una metodología de trabajo en el aula que han sido producto de un proceso sistemático de organización de los significado de los contenidos razón y proporcionalidad. Este diseño constituye una base sobre la cual elaborar otro experimento de enseñanza que considere el desarrolle del conocimiento matemático y de las competencias matemáticas maestros de primaria en formación inicial, éste puede centrarse en un contenido matemático más acotado, como el porcentaje o la semejanza.

El trabajo que hemos realizado ha permitido enlazar las dimensiones práctica y teórica de la investigación en Didáctica de la Matemática, particularmente en relación con la centrada en los contenidos de la razón y la proporcionalidad. En este sentido consideramos que se ha avanzado en el estudio de los procesos de aprendizaje, en la construcción y reelaboración social e individual de concepciones matemáticas, en la identificación de actuaciones inadecuadas que surgen en este proceso y en la manifestación explícita de las fortalezas del diseño instruccional que se ha elaborado, implementado y analizado, desde una perspectiva funcional del conocimiento matemático.

Se ha logrado aportar marcos explicativos para las actuaciones de los estudiantes y conjeturas sobre posibles formas de abordar las dificultades detectadas en nuevas circunstancias, con lo que se ha logrado profundizar en la situación ocurrida durante la experimentación. Consideramos que aporta conocimiento que amplía los resultados recogidos en el campo de investigación relativo al proceso de enseñanza-aprendizaje de la razón y proporcionalidad, específicamente en el contexto de la formación de maestros de primaria, situación que se ha estudiado desde una perspectiva funcional a través de un conjunto de tareas que han sido elegidas con este propósito. Específicamente, las concepciones relacionadas con las interpretaciones de la razón, la descripción de procedimientos alternativos a la regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa e inversa, la concepción que consiste en relacionar la suma de los elementos de la razón con el total de elementos comparados, la identificación de actuaciones que reflejan el predominio de la relación parte-todo y sobre la que hemos conjeturado que obstaculiza el reconocimiento del carácter dinámico de la razón, y la caracterización de las justificaciones manifestadas por los estudiantes de magisterio en este contexto de trabajo.

Referencias

Alatorre, S. (2011). Numeralismo: Un asunto que incumbe a todo el mundo (Sí, también a usted a quien las matemáticas lo aturden). *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *16*(50), 961-986.

Alatorre, S. y Figueras, O. (2005). A developmental model for proportional reasoning in ratio comparison tasks. En Chick, H.L. y Vincent, J.L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 25-32). Melbourne: PME.

Allain, A. (2000). Development of an instrument to measure proportional reasoning among fast-track middle school students (Unpublished Master's thesis). North Carolina State University. Retrieved from http://repository.lib.ncsu.edu/ir/bitstream/1840.16/805/1/etd.pdf.

ANECA (2005). *Libro Blanco Título de Grado en Magisterio*. Descargado el 01/12/2010 de http://www.aneca.es/var/media/150404/libroblanco_jun05_magisterio1.pdf

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Ball, D. y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis y E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001) Research on teaching mathematics: The unsolved problems of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4th Ed., pp. 433-456). Washington, DC: AERA.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barab, S. A. y Kirshner, D. (2001). Methodologies for capturing learner practices occurring as part of dynamic learning environments. *The Journal of the Learning Sciences*, *10*(1-2), 5–15.

Bardin, L. (1986). *Análisis de contenido*. Madrid: Akal.

Beckmann, C., Wells, P., Gabrosek, J., Billings, E., Aboufadel, E., Curtiss, P., Dickinson, W., Austin, D., y Champion, A. (2004). Enhancing the mathematical understanding of prospective teachers: Using standards-based, grades K-12 activities. En R. R. Rubenstein y G. W. Bright (Eds.), *Perspective on the Teaching of Mathematics* (pp. 151-163). Reston, VA: NCTM.

Behr, M., Harel, G., Post, T., y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York, NY: Macmillan.

Behr, L., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp.91-126). Orlando, Florida: Academic Press.

Ben-Chaim, D., Fey, J.T., Fitzgerald, W., Benedetto, C., y Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics*, *36*(3), 247-273.

Ben-Chaim, D., Ilany, B. y Keret, Y. (2008). "Atividades Investigativas Autênticas" para o Ensino de Razão e Proporção na Formação de Professores de Matemática para os Níveis Elementar e Médio. *Bolema-Rio Claro*, *21*(31), 125-159.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: The impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 333-340.

Ben-Chaim, D., Keret, Y. e Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion. Research and teaching in mathematics teachers' education (Pre- an In-Service Mathematics Teachers of elementary and middle school classes)*. Rotterdam: Sense Publishers.

Berenson, S. y Nason, R. (2003). Using instructional representations of ratio as an assessment tool of subject matter knowledge. En N. Pateman, B. Dougherty, y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA* (Vol.2, pp. 283-287). Honolulu, HI: University of Hawaii.

Berk, D., Taber, S., Carrino, C. y Poetzl, C. (2009). Developing Prospective Elementary Teachers' Flexibility in the Domain of Proportional Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(3), 113-135.

Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor*. Madrid: Editorial CSS.

Bertaux, D. (1993). De la perspectiva de la historia de vida a la transformación de la práctica sociológica. En J. M. Marinas y C. Santamarina (Eds.), *La historia oral: Métodos y experiencias* (pp. 19-34). Madrid: Debate.

Bjorg, O. (2005). Girls journey towards proportional reasoning. En Chick, H.L. y Vincent, J.L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 225-232). Melbourne: PME.

Blomm, I. (2004). Promoting content connections in prospective secondary school teachers. En R. R. Rubenstein y G. W. Bright (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Mathematics* (pp. 164-279). Reston, VA: NCTM.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: "A psychological topology of teachers' professional knowledge". En R. Biehler, R. Scholz, R. SträBer y B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.73-88). Dordrecht: Kluwer Academic.

Brown, A. (1992). Design Experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141-178.

Brown, G. y Kinney, L. (1973). Let´s teach them about ratio. *Mathematics Teacher*, *66*, 352-355.

Cabrera, I. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: Propuesta de fases. *Pedagogía Universitaria*, *14*(3), 71-92.

Cáceres, P. (2003). Análisis cualitativo de contenido: Una alternativa metodológica alcanzable. *Revista de la Escuela de Psicología-Universidad Católica de Valparaíso*, *2*, 53-82.

Cai, J. y Sun, W. (2002). Developing students' proportional reasoning: A Chinese perspective. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios and proportions*. *2002 Yearbook* (pp. 193-212). Reston,VA: NCTM.

Cañadas, M. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Cano, E. (2008). La evaluación por competencias en la educación superior. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado*. *12*(3), 1-16.

Castro, E. (2011). *Proyecto docente para optar a catedrático de universidad*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representación y Modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona. Horsori.

Chapman, O. (2004). Helping preservice elementary teachers develop flexibility in using word problems in their teaching. En D. McDougall y A. Ross (Eds.), *Proceedings of the 26th North American Chapter of PME* (Vol. 3, pp.1175-1182). Toronto: OISE/UT.

Chapman, O. (2007). Facilitating preservice teachers' development of mathematics knowledge for teaching arithmetic operations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 341–349.

Clark, M., Berenson, S. y Cavey, L. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, *22*, 297–317.

Climent, N. y Carrillo, J. (2002). Developing and researching professional knowledge with primary teachers. En J. Novotná (Ed.), *European Research in Mathematics Education II* (Vol.1, pp. 269-280). Praga: Charles University.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. (2003). Investigating students' reasoning about linear measurement as a paradigm case of design research. En M. Stephan, J. Bowers, y P. Cobb (Eds.), *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context. Journal for Research in Mathematics Education Monograph* (No. 12, pp. 1-16). Reston, VA: NCTM.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education*. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 83–94.

Cobb, P. y Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, *31*, 175–190.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Collins, A., Joseph, D. y Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15-42.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). New York, NY: Cambridge University Press.

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231–266). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cramer, K. (2004). Facilitating teachers' growth in content knowledge. En R. R. Rubenstein y G.W. Bright (Eds.), *Perspectives on the teaching of mathematics* (pp. 180-194). Reston, VA: NCTM.

Cramer, K., y Post, T. (1993). Proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), 404-407.

Creamer, K., Post, T. y Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. En D.T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York: MacMillan Publishing.

D. Loder (2007). *What are ratio and proportion?* Recuperado Julio, 6, 2008 desde http://proportionalreasoning.blogspot.com/2007/03/what-are-ratio-and-proportion.html

Davis, R. (1988). Is "percent" a number? *Journal of Mathematical Behavior*, *7*, 299-302.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school student´s errors. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 311-334.

De Bock, D., Verschaffel, L. y Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, *35*, pp. 65–85.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning*, *4*, 65–89.

Delaney, S., Ball, D., Hill, H., Schilling, S. y Zopf, D. (2008). Mathematical knowledge for teaching: Adapting U.S. measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 171-197

Delgado, D., Olaya, L. y Velásquez, M. (n.d.). *Razón y proporción: Un análisis desde los procesos de unitización y formación (problema de las pizzas)*. Recuperado Febrero, 20, 2008 desde http://es.scribd.com/doc/66748685/unitizacion-y-normacion

diSessa, A. A. y Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 77-103.

Durmus, S. (2005). Identifying pre-service elementary school teachers' conceptualization levels of rational numbers. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri*, 5(2), 659-666. Recuperado Abril, 12, 2008 de la base de datos ProQuest Psychology Journals.

Esteve, J. (2009). La profesión docente ante los desafíos de la sociedad del conocimiento. En C. Vélaz de Medrano y D. Vaillant (Coords.), *Aprendizaje y desarrollo profesional docente* (pp. 17-29). Madrid: Organización de Estados Iberoamericanos.

Eurydice (2002). *Las Competencias Clave: Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria*. Bruselas: Unidad Europea de Eurydice y Madrid: CIDE.

Felip, J. y Castro, E. (2003). *Una propuesta de análisis de problemas sobre fracciones. Investigación en el Aula de Matemáticas. Resolución de Problemas*. Trabajo de Investigación Tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional un estudio con alumnos de primaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. España.

Fernández, A. (2002) Una actividad matemática organizada en el marco de los modelos teóricos locales: razón y proporción en la escuela primaria. En J. Murillo, P. Arnal, R. Escolano, J.M. Gairín y L. Blanco (Eds.), *Actas del VI Simposio de la SEIEM* (pp. 29-45). Logroño: Universidad de la Rioja.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria*. España: Universidad de Valencia.

Fernández, F. (2001). Proporcionalidad de magnitudes. En Castro, E. (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 533-556). Madrid: Síntesis.

Fernández, S. y Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Actas del XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 291-301). Lleida, Barcelona: SEIEM y Ediciones de la Universidad de Lleida

Fiol, M. y Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Editorial Síntesis.

Flores, P., Segovia, I. y Lupiáñez, J. (2008). Matemáticas y su didáctica en el marco del EEES. En Universidad de Cádiz (Ed.), *I Jornadas sobre experiencias piloto de implantación del crédito europeo en las universidades andaluzas* (pp. 471- 476). España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz

Flores, P., Segovia, I., Lupiáñez, J., Molina, M., Roa, R., Ruiz, F. y Cecilia, L. (2007). Competencias matemáticas y profesionales de los maestros. En M. Molina, P. Pérez-Tyteca y M. Fresno (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Competencias Matemáticas* (pp. 265-304). Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel. [Traducción de trabajo para uso interno. Luis Puig Espinosa. Universidad de Valencia].

Gagatsis, A. y Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, *6*, 24-58.

Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Gallardo, J. y González, J. L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. En P. Bolea, Mª. J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 57-77). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses-Universidad de Zaragoza.

García, J. y Bertrán, C. (1987). *Geometría y experiencias*. Granada: Alhambra.

Godino, J. (2002). La formación matemática y didáctica de maestros como campo de acción e investigación para la didáctica de las matemáticas: El proyecto Edumat-Maestros. En C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 175-186). España: Universidad de Alicante.

Godino, J. D. (2004). *Matemáticas para maestros*. Recuperado Abril, 10, 2008 desde http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/8_matematicas_maestros.pdf

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-292.

Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas (capítulo 2). En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gómez, P. (2009). Procesos de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 471-498.

Gómez-Chacón, I. (2006). Matemáticas: El Informe PISA en la práctica. Una acción formativa del profesorado. *Uno Revista de Didáctica de la Matemática*, *41*, 40-51.

González, J. y Wagenaar, R. (2003). *Tunning Educational Structures in Europe. Informe Final Fase Uno*. Bilbao: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.

Graeber, A. y Tirosh, D. (1988). Multiplication and division involving decimals: Preservice teachers' performance and beliefs. *Journal of Mathematical Behavior*, *7*, 263-280.

Graeber, A., Tirosh, D. y Glover, R. (1989). Pre-service teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(1), 95-102.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*, 443–471.

Greer, B. (1997). Modeling reality in the mathematics classroom: The case of word problems. *Learning and Instruction*, *7*, 293–307.

Greno, J. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal of Research in Mathematics Education*, *22*, 170-218.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Grupo Beta (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Editorial Síntesis.

Harel, G., y Behr, M. (1995). Teachers' solutions for multiplicative problems. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *3*, 31-51.

Harel, G., Behr, M., Post, T., y Lesh, R. (1994). Invariance of ratio: The case of children's anticipatory scheme for constancy of taste. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(4), 324-345.

Hart, K. (1981). Strategies and errors in secondary Mathematics: The addition strategy in ratio. *Proceedings of the fifth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education PME* (pp. 199-202). Columbus, OH. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Enviromental Education.

Hernández, R. (1994). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: In introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-17). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H., Schilling, S. y Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, *105*, 11-30.

Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371- 406.

Hill, H., Sleep, L., Lewis, J. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En Lester, F.K. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). USA: NCTM, Age Publishing.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto–réflexion. En M. Baron, D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Paris: Hermès.

Hitt, F. y Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, *10*(1), 1-30.

Hitt, F. y Morasse, C. (2009). *Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes.* Actas de CIEAEM-61, Montréal Québec. Recuperado Junio, 14, 2009 desde en http://math.unipa.it/~grim/cieaem/Proceedings_cieaem_QRDM_Montreal_09_orales_sub1-2.pdf

Hitt, F., Morasse, C. y González, A. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concept of covariation and spontaneous representations: A case study. En Figueras, O. y Sepúlveda, A. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 89-97). Michoacán, México: PME.

Ilany, B., Ben-Chaim, D. y Keret, Y. (2004). Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio and proportion in pre-service elementary education. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 81-88) Norway: Bergen University College.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books.

Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) (Ed.) (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Madrid: Editor.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) (2001). *TIMSS 1999 Mathematics Items. Released set for eighth grade*. Recuperado Julio, 2, 2009 desde http://timss.bc.edu/timss1999i/pdf/t99math_items.pdf

Izsák, A., Orrill, C., Cohen, A. y Brown, R. (2010). Measuring Middle Grades Teachers' Understanding of Rational Numbers with the Mixture Rasch Model. *The Elementary School Journal*, *110*(3), 279-300.

Kaput, J. (1987). Representations systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Karplus, R., Karplus, E. y Wollman, W. (1974). Intellectual development beyond elementary school. IV: Ratio, the influence of cognitive style. *School Science and Mathematics*, *74*, 476-482.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 219-233.

Kelly, A. E. y Lesh, R. A. (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Keret, Y., Ben-Chaim, D. e Ilany, B. (2003). A model using authentic investigative activities for teaching ratio and proportion in pre-service elementary education. En J. Novotná (Ed.), *Proceedings of SEMT`03 International Symposium Elementary Mathematics Teaching* (pp. 94–99). Faculty of Education, Charles University in Prague, Czech Republic.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. A. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus: OH:ERIC/SMEAC

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, (pp.162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics y Erlbaum.

Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología del análisis de contenido. Teoría y Práctica*. Barcelona: Paidós

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41-61.

Lamon, S. (1996). The development of unitizing: Its role in children´s partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 170-193.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte: NCTM, Information Age Publishing.

Lappan, G., Fey, J., Fitzgerald, W., Friel, S. y Phillips, E. (n.d.). *Connected Mathematics Project. Comparing and Scaling: Homework Examples from ACE*. Recuperado Enero, 9, 2009 desde http://connectedmath.msu.edu/parents/help/7/comparing_ace.pdf

Larios, V. (2000). "Constructivismo en tres patadas". *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, *1*, 2-8.

Lesh, R. A. y Kelly, A. E. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. (1984). Preparing teachers to tech rational numbers. *Aritmetic Teacher*, *31*(6), 54-56.

Llinares, S. (2003a). Matemáticas escolares y competencia matemática. En M.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de la Matemáticas para Primaria* (pp. 3-31). Madrid: Pearson Prentice Hall.

Llinares, S. (2003b). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de la Matemáticas para Primaria* (pp. 187-220). Madrid: Pearson Prentice Hall.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *51*, 92-101.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Lo, J. (2004). Prospective elementary school teachers' solutions strategies and reasoning for a missing value proportion task. En M.J. HØines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of 28th PME International Conference* (Vol. 3, 265-272). Bergen, Norway: Bergen University College.

Lo, J. y Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 28 (2), pp. 216-237.

Lobato, J., Orrill, C., Druken, B. y Jacobson, E. (2011, April). *Middle school teachers' knowledge of proportional reasoning for teaching*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA), New Orleans, LA. Abstract retrieved from http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/products/workshops/AERA2011/Lobato_Orrill_Druken_Erikson_AERA_2011.pdf

Luengo, J., Luzón, A. y Torres, M. (2008). Las reformas educativas basadas en el enfoque por competencias: una visión comparada. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, *12*(3), 1-10.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, *3*(1), 35-48.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Marín, A. (n.d.) *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: Organización y secuenciación*. Documento no publicado.

McLaughlin, S. (2003). *Effect of modeling instruction on development of proportional reasoning II: theoretical background*. Versión digital recuperada el 12/02/2008 de http://modeling.asu.edu/modeling/mclaughlins_propreas-ii_03.pdf

Ministerio de Educación y Ciencia (2001). Resolución de 25 de enero de 2001, de la Universidad de Granada, por la que se ordena la publicación de la adecuación del plan de estudios de Maestro-Educación Primaria, que se imparte en la Facultad de Ciencias de la Educación de esta Universidad. *BOE*, *39*, 5686-5696.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006a). Real Decreto 1513/2006 de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE*, *293*, 43053-43102.

Ministerio de Educación y Ciencia (2006b). Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE*, *5*, 677-773.

Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) (2007). Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *BOE*, *312*, 53747-53750.

Misailidou, C. (2008). Assessing and developing pedagogical content knowledge: A new approach. En O. Figueras y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.1-8). Morelia, México: PME.

Miyakawa, T., y Winslow, C. (2009). Didactical designs for students´ proportional reasoning: An “open approach” lesson and a “fundamental situation”. *Educational Studies in Mathematics*, *72*, 199-218.

Modestou, M. y Gagatsis, A. (2007). Students’ improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of “linearity”. *Educational Psychology*, *27*(1), 75-92.

Modestou, M. y Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), 36-53.

Molina, M. (2007). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75-88.

Moliner, M. (1986). *Diccionario de uso del español*. Madrid: Gredos.

Monteiro, C. (2003). Prospective elementary teachers’ misunderstandings in solving ratio and proportion problems. En Pateman, N., Dougherty, B. y Zilliox, J., (Eds.).

Proceedings of the 27th International Conference of the Psychology of Mathematics Education (Vol.3, pp.317-323). Honolulu, Hawaii.

Moss, J. y Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122-148.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation, standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 1. Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(2), 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 2. Problem-structure at successive stages. Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(2), 331-363.

Norton, S. (2005). The construction of proportional reasoning. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Melbourne, Australia: PME.

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación.

OCDE (2005a). Informe PISA 2003. *Aprender para el mundo de mañana*. Madrid: Santillana.

OCDE (2005b). *La Definición y Selección de Competencias Clave (DeSeCo). Resumen Ejecutivo*. Recuperado Junio, 20, 2011 desde http://www.deseco.admin.ch/bfs/deseco/en/index/03/02.html

OEI (2010). *Metas educativas 2021: La educación que queremos para la generación de los Bicentenarios*. Recuperado Enero, 30, 2011desde http://www.oei.es/metas2021.pdf

OEI y UNESCO (2010). *Metas Educativas 2021: Desafíos y Oportunidades. Informe sobre Tendencias Sociales y Educativas en América Latina 2010*. Recuperado Enero, 10, 2011 desde http://www.siteal.iipe-oei.org/informetendencias/informetendencias2010.asp

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts* *and operations in the middle grades*, (pp.53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oller, A. M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid.

Páez, R. (2004). *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y auto-reflexión*. Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México, DF.

Parker, M. y Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, 65 (4), 421-481.

Passaro, V. (2007). *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire*. Memoria del Trabajo Final de Maestría. Université du Québec à Montréal. Canadá.

Pelead, I., y Herschkovitz, S. (2004). Evolving research of mathematics teacher educators: The case of non standard issues in solving standard problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(4), 299-327.

Pérez, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. Tomo II. Técnicas de análisis de datos*. Madrid: La Muralla S. A.

Perrenoud, P. (2003). *Construir competencias desde la escuela* (2ª ed.). Chile, Providencia: Comunicaciones Noreste.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teacher's knowledge and practice. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 223-261). New York: Routledge.

Ponte, J. P. y Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista da Educação*, *11*(2), 145-163.

Post, T., Harel, C., Behr, M. y Lesh, R. (1988). Intermediate teachers` knowledgeof rational numbers concepts. En E. Fennema, T. Carpenter y S. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 194-217). Madison: Wisconsin Center for Education Research.

Prada, Mª. D. (1990). *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad*. Ágora: Málaga.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ICE- Horsori.

Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, *2*(3), 87-107.

Puig, L. y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Rapetti, M. (2003). Proporcionalidad. Razones internas y razones externas. *Revista Suma*, *44*, pp. 65-70.

Real Academia Española de la Lengua (RAE) (2001). *Diccionario de la Lengua Española*. Madrid: Espasa Calpe.

Reid, D. y Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, learning and teaching*. Rotterdam: Sense Publishers.

Rico, L. (Ed.) (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (1997b). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. . En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ICE - Horsori.

Rico, L. (1997c). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ICE-Horsori.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, *Extraordinario 2006*, pp. 275-294.

Rico, L. (2007). Competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. Avances de Investigación en Educación Matemática AIEM, Nº 1, 39-63.

Rico, L. y Castro, E. (1994). *Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico*. Recuperado Marzo, 6, 2008 desde http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/RicoL94-148.PDF

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, *58*, 7-23.

Rigo, M. (2009). *La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria*. Tesis doctoral no publicada. México DF, México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Rigo, M., Rojano, T. y Pluvinage, F. (2011). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas. *PNA*, *5*(3), 93-103.

Riley, K. R. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick, y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1055-1061). Columbus, OH: The Ohio State University.

Rivas, M. y Godino, J. (2010). Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. *EDUCERE Investigación Arbitrada*, *14*(48), 189-205.

Rodríguez, G. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Rodríguez, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación, verbal y simbólico por estudiantes de secundaria*. Trabajo de Fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ruiz, E. y Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el razonamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: El caso de Paulina. *Revista Latinoamericana en Educación Matemática*, *9*(2), 299-324.

Ruíz, F., Molina, M., Lupiáñez, J. L., Segovia, I. y Flores, P. (2009). Formación matemática del profesorado de primaria en la Universidad de Granada: Una adaptación al EEES. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *17*(1), 425-454.

Sáenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *25*(3), 355–366.

Sánchez, M.V. y Llinares, S. (1992). Prospective elementary teachers` pedagogical content knowledge about equivalent fractions. En Greslin, W. y Graham, K. (Ed.), *Proceedings XVI Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of New Hampshire (USA), Durham: N. H.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referents transforming arithmetics operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, (pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Mathematics Teachers of Mathematics.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Shavelson, R. J. y Towne, L. (2002). *Scientific research in education*. Washington, DC: National Academy Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Sierra, M. y Rico, L. (1997). Contexto y evolución histórica de la formación en matemática y su didáctica de los profesores de primaria. En J. Giménez, S. Llinares y Mª.V. Sánchez (Eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática* (pp.39-62). Granada: Comares

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*, 233-254.

Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Simon, M. A. (2012). Extending the coordination of cognitive and social perspectives. *PNA*, *6*(2), 43-49.

Simon, M. A. y Blume, G. (1994). Mathematical modeling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, *13*, 183-197.

Simon, M. A. y Blume, G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(1), 3-31.

Simon, M. A. y Schifter, D. (1991). Towards a constructivist perspective: An intervention study of mathematics teacher development. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 309- 331.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., Kinzel, M. y Smith, M. (2000). Characterizing a perspective underlying the practice of mathematics teachers in transition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(5), 579-601.

Singer, J. A. y Resnick L. B. (1992). Representations of proportional relationships: Are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics*, *9*, 55-73.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20-26.

Smart, J. (1980). The teaching of percent problems. *School, Science and Mathematics*, *80*, 187-192.

Socas, M. (1997). En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M.M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.125-154). Horsori: Barcelona.

Sosa, L. y Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en Bachillerato. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.) *Actas del XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 569-580). Lleida, Barcelona: SEIEM y Ediciones de la Universidad de Lleida

Sowder, J., Bezuk, N. y Sowder, L. (1993). Using Principles from Cognitive Psychology to Guide Rational Number Instruction for Prospective Teachers. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers* (pp. 239-261). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K, Helme, S., Steinle, Y., Baturo, A., Irwin, K. y Bana, J. (2001) Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *4*(3), 205-225.

Stake, R. (2005). *Investigación con estudio de casos* (3ra ed.) Madrid: Morata.

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, M. K., Silver, E. A. y Smith, M. S. (1998). Mathematics reform and teacher development: A community of practice perspective. En J. G. Greeno y S. V. Goldman (Eds.), *Thinking practices in mathematics and science learning* (pp. 17-52). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards…A Theory). Part I: The outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 327-348.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: Some thoughts on the long term learning process (Towards…A Theory). Part II: The outline of the long term learning process. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 75-94.

Tabak, I. (2004). Reconstructing context: Negotiating the tension between exogenous and endogenous educational design. *Educational Psychologist*, *39*(4), 225-233.

The Design Based Research Collective (DBRC) (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5-8.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(1), 5-25.

Tirosh, D. y Graeber, A. (1990a). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*, 98-108.

Tirosh, D. y Graeber, A. (1990b). Inconsistencies in preservice elementary teachers' beliefs about multiplication and division. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20*, 95-102.

Tirosh, D., Graeber, A. y Wilson, J. (1998). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Versión digital recuperada el 26/03/2008 de http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 401-412.

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181-204.

Turner, J. C. y Meyer, D. K. (2000). Studying and understanding the instructional contexts of classrooms: Using our past to forge our future. *Educational Psychologist*, *35*, 69–85.

UNESCO (2007). *Educación de calidad para todos: Un asunto de derechos humanos*. Documento de discusión sobre políticas educativas en el marco de la II Reunión Intergubernamental del Proyecto Regional de Educación para América Latina y el Caribe (EPT/PRELAC). Argentina: UNESCO, Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe. Recuperado Diciembre, 2, 2011 desde http://portal.unesco.org/geography/es/ev.php-URL_ID=7910&URL_DO=DO_TOPIC&URL_SECTION=201.html

Unidad Europea de Eurydice (2002). *Las Competencias Clave. Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación, Ciencia y Cultura.

Usiskin, Z. y Bell, M. (1984). Ten often ignored applications of rational number concepts. *Arithmetic Teacher*, *31*, 48-50.

Valverde, G. (2008). *Razonamiento Proporcional: Un análisis de las actuaciones de maestros en formación*. Trabajo final de máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, *23*(1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad. Indivisa, *Boletín de Estudios e Investigación. Monografía IV*, 115-135.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Orlando, FL: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Verschaffel, L., Janssens, S. y Janssen, R. (2005). The development of mathematical competence in Flemish preservice elementary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, *21*, 49-63

Vizcarra, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: Un estudio desde los modelos de medida y cociente*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Wheeler, M. (1983). Much ado about nothing: Pre-service elementary school teachers' concept of zero. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(3), 147-155.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996) Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Índice de Anexos

K.1.2 De la Tarea 2

K.1.3 De la Tarea 3

K.1.4 De la Tarea 4

K.1.5 De la Tarea 5

K.1.6 De la Tarea 6

K.1.7 De la Tarea 7

K.2 Producciones de los equipos

K.2.1 De la Tarea 1

K.2.2 De la Tarea 2

K.2.3 De la Tarea 3

K.2.4 De la Tarea 4

K.2.5 De la Tarea 6

K.2.6 De la Tarea 7

K.3 Producciones individuales fuera de clase

K.3.1 De la Tarea 1

K.3.2 De la Tarea 2

K.3.3 De la Tarea 3

K.3.4 De la Tarea 4

K.3.5 De la Tarea 5

K.3.6 De la Tarea 6

K.3.7 De la Tarea 7

L. Producciones Escritas de los Estudiantes del G2

L.1 Producciones individuales en clase

L.1.1 De la Tarea 1

L.1.2 De la Tarea 2

L.1.3 De la Tarea 3

L.1.4 De la Tarea 4

L.1.5 De la Tarea 5

L.1.6 De la Tarea 6

L.1.7 De la Tarea 7

L.2 Producciones de los equipos

L.2.1 De la Tarea 1