

1<sup>st</sup> International Congress on *Mechanical models in structural engineering*.  
University of Granada (Spain), December 2011.

**1<sup>ST</sup> INTERNATIONAL CONGRESS ON**  
***MECHANICAL MODELS IN STRUCTURAL ENGINEERING***

ISBN 84-15418-16-0  
Dep.Legal GR-4562/2011

1<sup>st</sup> International Congress on *Mechanical models in structural engineering*.  
University of Granada (Spain), December 2011.

**Congress President**

**Antonio Ramírez-Rodríguez**

*Director I+D Grupo Sacyr – Head R&D Sacyr*

**Organizing Committee**

**David López-Martín**

*University of Granada*

**Enrique Hernández-Montes**

*University of Granada*

**Scientific Committee**

**Luisa María Gil-Martín**

*University of Granada*

**Carlos Zanuy Sánchez**

*Technical University of Madrid*

**Mark Aschheim**

*Santa Clara University - California*

## Índice - orden de ponencias:

### Sesión 9.00 – 11.00. Moderador: Andrés Sáez

- Optimización de miembros estructurales de acero con secciones no compactas según EC3 ..... 1
- Análisis dinámico de estructuras en el dominio de la frecuencia ..... 15
- Refined-compression field theory for thin low-reinforced sandwich panels subjected to reversed cyclic horizontal loads ..... 27
- Fracture Mechanics of active material by BEM ..... 39
- Finite Element modeling of historical masonry constructions ..... 51

### Sesión 12.00- 14.00. Moderador: Enrique Hernández

- Application of operational modal analysis and modal updating technique for the validation and characterization of structural models ..... 61
- Ajuste del efecto de tensorrigidez del hormigón en los modelos constitutivos del acero ..... 69
- Introducción de un parámetro de degradación en el diseño a cortante de vigas de hormigón armado ..... 81
- Dominios de deformación referidos a la excentricidad de cálculo para el diseño óptimo de secciones rectangulares solicitadas a flexo-compresión ..... 93
- Estimación de la resistencia a cortante en elementos de hormigón armado sin armadura transversal sometidos a fatiga ..... 107

I<sup>st</sup> International Congress on *Mechanical models in structural engineering*.  
University of Granada (Spain), December 2011.

## Optimización de elementos estructurales de acero con secciones no compactas según EC3

### *Optimization of structural steel members with non-compact sections according to EC3*

J.F. Carbonell-Márquez<sup>1A</sup>, L.M. Gil-Martin<sup>1B</sup>

<sup>1</sup> Department of Structural Mechanics. University of Granada.  
Campus de Fuentenueva, 18072 Granada (Spain). E-mail: jfcarbonell@ugr.es<sup>1A</sup>#  
mlgil@us.es<sup>1B</sup>

**Palabras clave:** estructuras de acero, optimización estructural, secciones no compactas.

#### Resumen

Para el diseño de un elemento estructural tipo viga-columna se suelen seleccionar secciones doblemente simétricas, generalmente secciones laminadas tipo H o I. Sin embargo, ésta es sólo una de las muchas soluciones posibles y, por lo general, no será la sección óptima. Hernández-Montes et al. 2004, y Hernández-Montes et al. 2005, proponen los diagramas RSD (Reinforcement Sizing Diagrams) como un método para obtener la solución óptima para el armado longitudinal de una sección de hormigón sometida a flexión uniaxial y a compresión. Esta metodología ha sido extendida para secciones de acero compactas según el Eurocódigo 3 (EC3) por Gil-Martin et al. 2008, y esta comunicación procederá de manera similar para buscar soluciones no compactas, esto es, soluciones en clases 3 ó 4 según EC3, considerando todos los aspectos relacionados con la aparición de inestabilidades locales. Además, se introducirán las consideraciones especiales para tener en cuenta las inestabilidades globales relacionadas con la esbeltez del miembro.

**Keywords:** steel structures, structural optimization, non-compact section.

#### Abstract

In a designed structure, the chosen section for a member as a steel beam-column will be doubly-symmetric and it will correspond to one provided by a standard rolled steel section as H or I. However, this solution is just one of the big number of possible solutions and the optimal one may correspond to other section different from the symmetric one. Hernandez-Montes et al. 2004, and Hernández-Montes et al. 2005, proposed the Reinforcement Sizing Diagrams (RSD) as an approach for getting the optimal solution for the longitudinal reinforcing steel of a concrete section subjected to uniaxial bending and compression This methodology is extended for compact steel sections according to Eurocode 3 (EC3) by Gil-Martin et al. 2008 and this communication will proceed similarly for seeking non compact solutions, this is, sections corresponding to Class 3 or 4 according to EC3,

---

#Corresponding author: J.F. Carbonell-Márquez

1<sup>st</sup> International Congress on *Mechanical models in structural engineering*.  
University of Granada (Spain), December 2011.

considering all the aspects related with the appearance of local instabilities. Furthermore, special considerations are introduced to address the global instabilities associated with the slenderness of the steel element.

---

#Corresponding author: J.F. Carbonell-Márquez

## 1. Introducción

El presente estudio recoge el diseño óptimo de elementos viga-columna sometidos a flexión respecto al eje fuerte de la sección,  $M_{y,Ed}$  (el momento se considera positivo si comprime el ala superior) y a un axil  $N_{Ed}$ , que se supone inicialmente aplicado en el centro de gravedad del alma de la sección (Figura 1). El axil positivo es de tracción. Los distintos elementos de la sección se dimensionan para proveer suficiente resistencia para soportar las acciones anteriores y suficiente rigidez para prevenir el pandeo del elemento. Dado que en este trabajo se impone la condición de que las secciones pertenezcan a clases 3 ó 4 según EC3, la capacidad plástica de la sección no podrá ser desarrollada y habrá que tener en cuenta los fenómenos de pandeo local, así como las reducciones impuestas por la normativa de aquellos elementos de la sección que se encuentren en clase 4. Además, se impone una condición adicional relacionada con la rigidez para limitar las deflexiones a niveles aceptables. La optimización será llevada a cabo mediante técnicas RSD (Hernández-Montes et al. 2004 y Hernández-Montes et al. 2005).

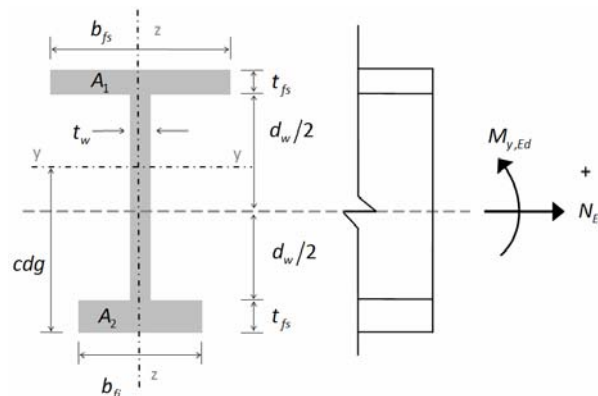


Figura 1. Nomenclatura y criterio de signos para las acciones exteriores

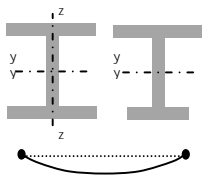
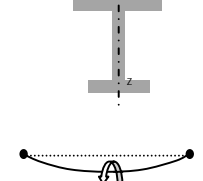
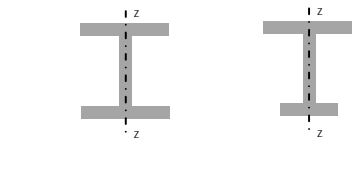
Elementos en compresión ( $N \neq 0$ , - - eje de pandeo)		Miembros en flexión, eje fuerte ( $N \neq 0$ , - - eje de pandeo)		Paneles sometidos a compresión
Pandeo por flexión	Pandeo por flexión y torsión	Pandeo Lateral		Pandeo local
			Para obtener elementos en Clases 3 y 4 el cociente ancho-espesor es limitado a un valor concreto	
Elementos sometidos a flexión y compresión: ecuación de interacción				
Ap. 6.3.1.3 EC 3. Parte 1-1.	Ap. 6.3.1.4. EC 3. Parte 1-1.	Ap. 6.3.2. EC 3. Parte 1-1.		Tabla 5.2. EC 3. Parte 1-1.

Tabla 1. Modos de pandeo considerados.

La Tabla 1 recoge los modos de inestabilidad, tanto locales como globales, considerados en el trabajo. Para el estudio de elementos sometidos tanto a flexión como a compresión, ha sido empleada la ecuación de interacción propuesta por el Método General incluido en EC3. Específicamente, aquí se analizan elementos biapoyados en sus extremos sin restricción al alabeo en dichos puntos (Figura 2).

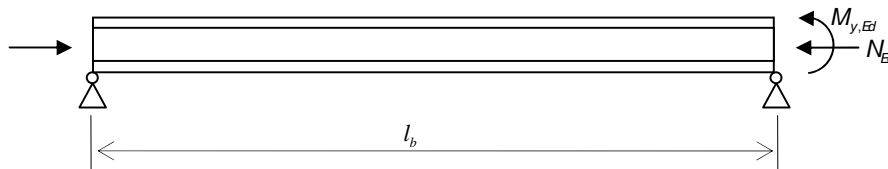


Figura 2. Condiciones del problema.

## 2. Predimensionamiento de la sección

El proceso parte de la adopción de un valor fijo para  $t_w$  y de un rango de valores para la altura del alma,  $d_w$ , y el espesor de las alas,  $t_f$ , el mismo para ambas alas. Las alas se predimensionan planteando el equilibrio de fuerzas que actúan en la sección, suponiendo que la carga axial está aplicada en el centro de gravedad del alma. La resistencia a flexión del alma se desprecia y las fuerzas soportadas por las alas se suponen aplicadas en ambos extremos del alma. Planteando la sumatoria de momentos en dichos extremos se obtiene:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot f_y \cdot d_w + M_{y,Ed} - N_{Ed} \cdot \frac{d_w}{2} &= 0 \\ A_2 \cdot f_y \cdot d_w + M_{y,Ed} + N_{Ed} \cdot \frac{d_w}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Introduciendo el valor correspondiente para  $t_f$  se obtienen los valores de  $b_{fs} = A_1/t_f$  y  $b_{fi} = A_2/t_f$ . Para evitar que se produzca pandeo local del ala comprimida en el ala, se impone la limitación propuesta por la Sección 8 de EC3, Parte 1-5:

$$\frac{d}{t_w} \leq k \frac{E}{f_y} \sqrt{\frac{d_w \cdot t_w}{A_1}} \Rightarrow b_f \leq \frac{k^2 \cdot E^2 \cdot t_w^3}{f_y^2 \cdot t_f \cdot d_w} \quad (2)$$

Dado que la sección ha de corresponder a clase 3 ó 4, el parámetro  $k$  tomará el valor de 0,55.

## 3. Tratamiento de inestabilidades locales y globales

Una vez obtenidas a partir del predimensionamiento las dimensiones de todas las chapas que componen la sección transversal se procede a realizar la clasificación de la misma atendiendo a las consideraciones especificadas por la Parte 1-1 de EC3, concretamente en su Tabla 5.2. La clasificación se lleva a cabo



para cada uno de los elementos comprimidos en la sección, siendo la mayor de las clases de estos elementos, la clase de la sección. Aquellos elementos que resulten en clase 4 son adecuadamente reducidos según el procedimiento descrito en la Sección 4-4 de EC3, Parte 1-5, determinando su área total eficaz,  $A_{\text{eff}}$ .

Para el tratamiento de las inestabilidades globales del elemento viga-columna se sigue la formulación proporcionada por EC3, que define la resistencia de diseño de un elemento a compresión, teniendo en cuenta el pandeo por flexión y por flexión y torsión, como:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi \cdot A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (3)$$

donde  $A = A_1$  para secciones en clase 3 y  $A = A_{\text{eff}}$  para secciones en clase 4, y  $\chi$  el factor de reducción por compresión pura correspondiente al modo de pandeo relevante.

Por otra parte, la resistencia a flexión del elemento teniendo en cuenta la inestabilidad por pandeo lateral viene dada en el EC3 por:

$$M_{b,Rd} = \frac{\chi_{LT} \cdot W_y \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad (4)$$

donde  $W_y = W_{el,y}$  es el módulo resistente elástico ó  $W_y = W_{\text{eff},y}$  o el módulo resistente elástico efectivo de la sección en Clase 3 ó 4 respectivamente y  $\chi_{LT}$  es el factor de reducción por pandeo lateral.

Una vez calculadas las resistencias del elemento tanto a flexión pura como a compresión simple, se plantea el Método General propuesto por EC3 para verificar la resistencia de un elemento flexo-comprimido frente a la combinación de pandeo lateral y flexión:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi \cdot N_{Rk} / \gamma_{M1}} + \frac{M_g}{\chi_{LT} \cdot M_{y,Rk} / \gamma_{M1}} = \frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} + \frac{M_g}{M_{b,Rd}} = \xi_N + \xi_M = \xi \leq 1 \quad (5)$$

En este trabajo, el coeficiente  $\xi$  ó factor de interacción será el factor clave a considerar durante el proceso de optimización. El momento exterior al que estará sometido el elemento vendrá dado por:

$$M_g = M_{y,Ed} + N_{Ed} e \quad (6)$$

donde  $e = \text{cdg} - (d_w/2 + t_f)$ , es la excentricidad del axil respecto del cdg de la sección transversal (i.e. distancia entre el cdg de la sección y la altura media del alma).

#### 4. Ajuste del diseño

Es claro que el predimensionamiento proporcionará secciones que, a priori y una vez realizadas las consideraciones relativas a las inestabilidades locales y globales, no resistirán las cargas exteriores impuestas. Tal y como se ha mencionado, la validez de la sección será evaluada a través del denominado factor de interacción  $\xi$ , debiendo este quedar dentro de unos límites impuestos previamente. En este trabajo los límites son:

$$0,95 \leq \xi \leq 1,00 \quad (7)$$

Para proporcionar una sección con área mínima que satisfaga la condición anterior, se aplica el siguiente procedimiento:

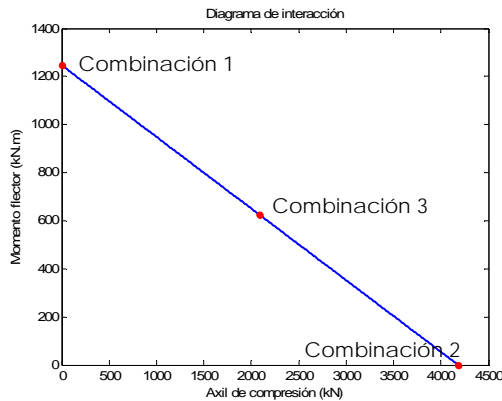
1. Si  $\xi < 0,95$ : la sección tiene exceso de capacidad. Los anchos de ambas alas son reducidos hasta cumplir  $0,95 \leq \xi \leq 1,00$
2. Si  $\xi > 1,00$ : la sección falla por inestabilidad. Para proporcionar suficiente resistencia, las áreas de las alas deben ser incrementadas en función de los valores del axil  $N_{Ed}$  y del momento global  $M_g$ :
  - a. Si  $M_g = M_{y,Ed} = 0$  ó  $N_{Ed} = 0$ , la sección resultará simétrica según Eq. (1) y ambas alas son incrementadas en la misma cantidad.
  - b. Si  $M_g \neq 0$  y  $N_{Ed} < 0$ , una de las dos áreas de las alas se incrementará para hacer mayor la excentricidad y disminuir el valor de  $M_g$ . Se consideran los siguientes casos:
    - i. Si  $M_g$  y  $N_{Ed}$  tienen el mismo signo, se aumenta el área del ala inferior.
    - ii. Si  $M_g$  y  $N_{Ed}$  tienen distinto signo, se aumenta el área del ala superior.

El proceso iterativo finalizará una vez que se cumpla la Eq. (7). No obstante, si para alguna sección en concreto  $\xi$ ,  $\xi_N$  ó  $\xi_M$  alcanzan un mínimo que es mayor que 1, la sección se descarta por imposibilidad de encontrar solución con los criterios expuestos.

#### 5. Ejemplos

El proceso de optimización expuesto en los puntos anteriores se ha aplicado a un elemento estructural metálico correspondiente a un perfil HEB600 con una longitud entre apoyos de 6 m. El elemento se supone arriostrado en ambos extremos. El área del perfil es  $A_T = 27000 \text{ mm}^2$  ( $b_{fc} = b_{ft} = 300 \text{ mm}$ ,  $t_{fc} = t_{ft} = 30 \text{ mm}$ ,

$t_w = 15,5$  mm,  $d_w = 540$  mm). El momento y la compresión de agotamiento, en condiciones de flexión pura y compresión simple, respectivamente son  $M_{b,Rd} = 1391,80$  kN.m y  $N_{b,Rd} = 4184,90$  kN, para las condiciones representadas en la Figura 2 (elemento biapoyado con momento aplicado en un apoyo). El acero empleado se supone de Grado 235 ( $f_y = 235$  N/mm<sup>2</sup>). La Figura 3 muestra el diagrama axil-flector correspondiente a la Eq. (5) para el HEB600, así como las combinaciones de carga también presentadas en la Tabla 2. El espesor de alma escogido para todas las secciones es  $t_w = 8$  mm. Los límites para la altura de alma son  $d_{wmin} = 200$  mm y  $d_{wmax} = 1000$  mm con un paso de 10 mm. Para el espesor de las alas se fijan los siguientes límites:  $t_{fmin} = 10$  mm,  $t_{fmax} = 40$  mm con un paso de 2 mm. Con todo esto, se obtienen 1296 secciones a analizar.



Combinación	$M_{y,Ed}$ (kN.m)	$N_{Ed}$ (kN)
1: Flexión pura	1391,80	0,00
2: Compresión simple	0,00	4184,90
3: Flexo-compresión	623,80	2092,50

**Tabla 2. Combinaciones de acciones exteriores estudiadas**

Figura 3. Diagrama de interacción correspondiente a HEB600, para  $f_y = 235$  N/mm<sup>2</sup>,  $I_b = 6$  m, y  $\psi = 0$

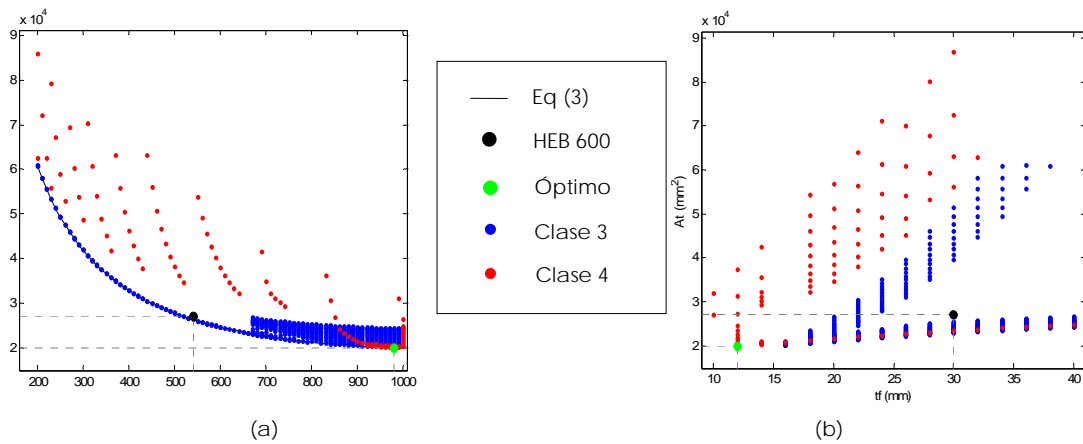
### 5.1. Combinación 1: flexión pura. $M_{y,Ed} = 1394,8$ kN.m

Para esta combinación de cargas, en la que el axil es nulo, las secciones obtenidas del predimensionamiento serán doblemente simétricas. De las 1296 combinaciones de  $t_f - d_w$  evaluadas, se obtienen 310 secciones en clase 3 y 94 en clase 4. La solución óptima obtenida consigue una reducción del área del 25,98% y tiene las siguientes características:

$$d_w = 980 \text{ mm}, t_f = 12, b_{fs} = 506, b_{fi} = 506, A_t = 19984 \text{ mm}^2$$

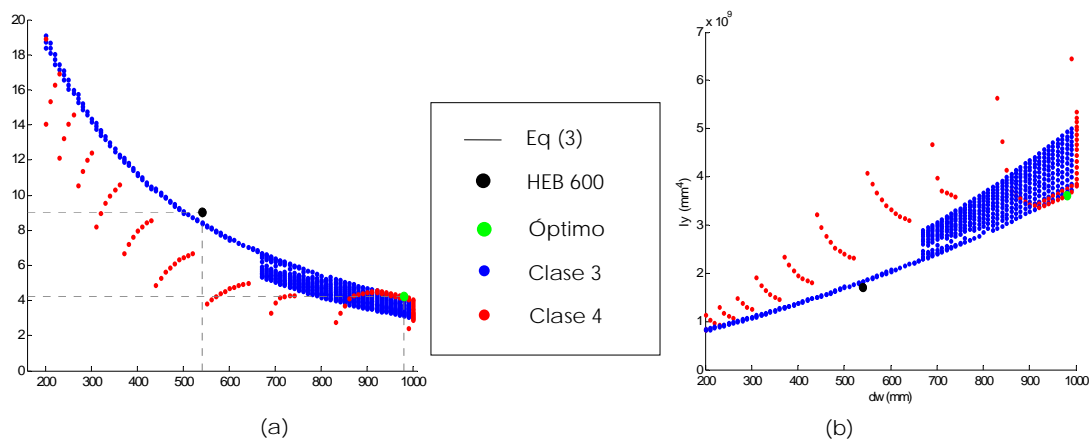
CLASE	COMPRESIÓN	FLEXIÓN
ALA SUP	-	4
ALMA	-	4

Tabla 3. Clase de las alas y el alma en compresión y flexión para la solución óptima



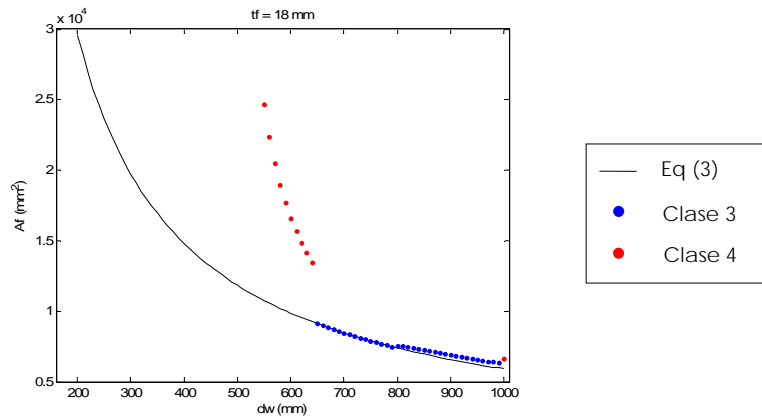
**Figura 4. (a) Área total respecto a la altura del alma; (b) Área total respecto al espesor del ala**

Las Figuras 4 (a) y (b) presentan el área total de las soluciones obtenidas en función de  $d_w$  y  $t_f$ , respectivamente. En estas figuras se han representado también la solución óptima y la sección inicial HEB600. La Figura 4 (a) muestra como, a medida que aumenta la altura del alma, el área total de la sección disminuye debido a que el ancho necesario de las alas es cada vez menor.



**Figura 5. (a) Deflexión del elemento respecto a la altura de alma de la sección; (b) Inercia con respecto al eje fuerte en función de la altura de alma de la sección**

La Figura 5 (a) muestra la deflexión máxima experimentada por el elemento estructural en función de la altura del alma de la sección. Dicha gráfica muestra tendencia decreciente para las secciones en clase 3 y creciente para las secciones en clase 4. Esta tendencia opuesta se debe a la evolución de la inercia, tal y como se aprecia en la Figura 5 (b). En la Figura 5 (b) se observa como la inercia aumenta a medida que lo hace la altura del alma en las secciones en clase 3 mientras que ocurre lo contrario para las secciones en clase 4.



**Figura 6. Área del ala superior –comprimida– de la sección en función de la altura del alma de la misma, para un valor del espesor de alas de 18 mm**

En la figura 6 se ha representado el área del ala superior en función de la altura del alma para un espesor de ala para el que existen soluciones en clase 3 y 4,  $t_f = 18$  mm. En la Figura 6 se aprecia que en secciones en clase 4 la disminución del área del ala superior a medida que aumenta la altura del alma es más acusada que para secciones en clase 3. Esto se debe a que para alas en clase 4, a medida que aumenta  $d_w$ , la esbeltez de las alas se reduce y, por tanto, el ancho eficaz de las alas,  $b_{feff}$ , tiende al ancho bruto,  $b_f$ , lo que resulta en un aprovechamiento del ala. Sin embargo, en el caso de las secciones en clase 3 apenas es necesario aumentar  $b_f$  respecto al ancho inicial estimado en el predimensionamiento.

En las Tablas 4 y 5 se resumen algunos de los valores obtenidos durante el proceso de optimización. De estas tablas se deduce que, a medida que aumenta  $d_w$  en secciones de clase 3 la inercia aportada por las alas  $I_{yf}$  sigue creciendo, a pesar de que las áreas de las alas sean menores. En cambio, en secciones de clase 4 el aumento de la altura del alma  $d_w$  implica una disminución de la inercia aportada por las alas  $I_{yf}$ , dando lugar a inercias totales menores y flechas mayores.

Clase 3		$t_f$ (mm) 18				
Sección	$d_w$ (mm)	$A_f$ (mm <sup>2</sup> )	$I_{yw}$ (mm <sup>4</sup> )	$I_{yf}$ (mm <sup>4</sup> )	$I_y$ (mm <sup>4</sup> )	Deflexión (mm)
1	730	8.118,00	$2,59 \cdot 10^8$	$2,27 \cdot 10^9$	$2,53 \cdot 10^9$	6,101
2	740	8.010,00	$2,70 \cdot 10^8$	$2,30 \cdot 10^9$	$2,57 \cdot 10^9$	6,004
$\Delta$	10	-108,00	$1,08 \cdot 10^7$	$3,01 \cdot 10^7$	$4,09 \cdot 10^7$	-0,097

**Tabla 4. Cálculos secciones en Clase 3**

Clase 4		$t_f$ (mm) 18				
Sección	$d_w$ (mm)	$A_f$ (mm <sup>2</sup> )	$I_{yw}$ (mm <sup>4</sup> )	$I_{yf}$ (mm <sup>4</sup> )	$I_y$ (mm <sup>4</sup> )	Deflexión (mm)
1	600	16.610,00	1,44 10 <sup>8</sup>	3,17 10 <sup>9</sup>	3,33 10 <sup>9</sup>	4,684
2	610	15.680,00	1,51 10 <sup>8</sup>	3,09 10 <sup>9</sup>	3,24 10 <sup>9</sup>	4,787
Δ	10	-930,00	7,32 10 <sup>6</sup>	-8,00 10 <sup>7</sup>	-7,26 10 <sup>7</sup>	0,103

Tabla 5. Cálculos secciones en Clase 4

### 5.2. Combinacion 2: compresión simple. $N_{ed}=4184,9$ kN

En este caso de carga, compresión simple, se obtienen 51 secciones en clase 3 y 885 en clase 4. De estas secciones, la solución óptima obtenida reduce el área del perfil HEB 600 en un 23,73% y corresponde a:

$$d_w = 270 \text{ mm}, t_f = 18, b_{fs} = 512, b_{fi} = 512, A_f = 20592 \text{ mm}^2$$

CLASE	COMPRESIÓN	FLEXIÓN
ALA SUP	3	-
ALMA	2	-

Tabla 6. Clase de las alas y el alma en compresión y flexión para la solución óptima

La Figura 7 (a) representa el área de la sección transversal en función de la altura del alma. Todas las secciones obtenidas son doblemente simétricas. Dicha Figura indica que, en el caso de compresión simple la solución óptima se obtiene para menores altura de alma y espesores de ala que los correspondientes al HEB600.

### 5.3. Combinacion 3: flexo-compresión. $M_{y,Ed}=623,8$ kN.m y $N_{ed}=2092,5$ kN

En la Figura 7 (b) se representan las posibles soluciones obtenidas a partir del proceso de optimización así las soluciones inicial y óptima. La solución óptima obtenida consigue una reducción del 25,71% del área correspondiente al HEB600 y corresponde a:

$$d_w = 650 \text{ mm}, t_f = 38 \text{ mm}, b_{fs} = 375, b_{fi} = 16, A_f = 20058 \text{ mm}^2.$$

CLASE	COMPRESIÓN	FLEXIÓN
ALA	1	1
ALMA	4	1

Tabla 7. Clase de las alas y el alma en compresión y flexión para la solución óptima

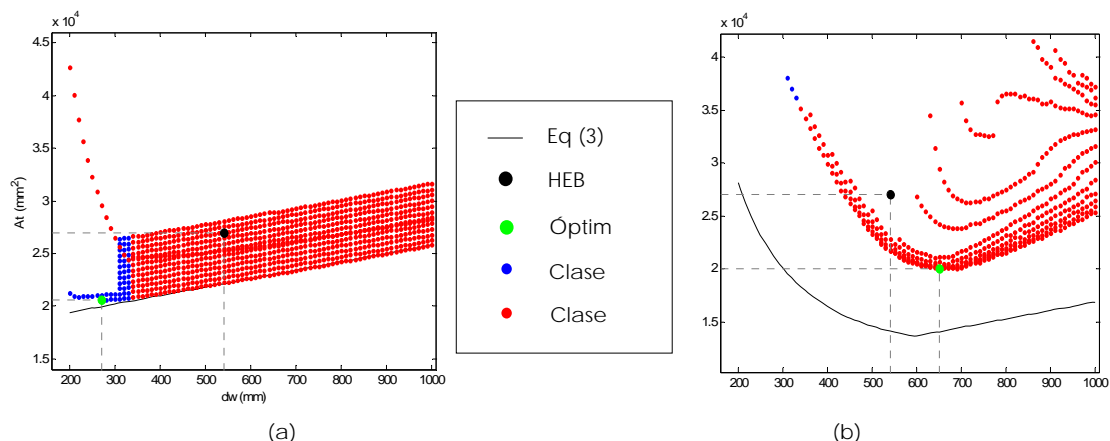


Figura 7. (a) Área total respecto a la altura del alma para la combinación 2. Óptimo obtenido con  $t_f = 18$  mm; (b) Área total respecto a la altura del alma para la combinación 3. Óptimo obtenido con  $t_f = 38$  mm

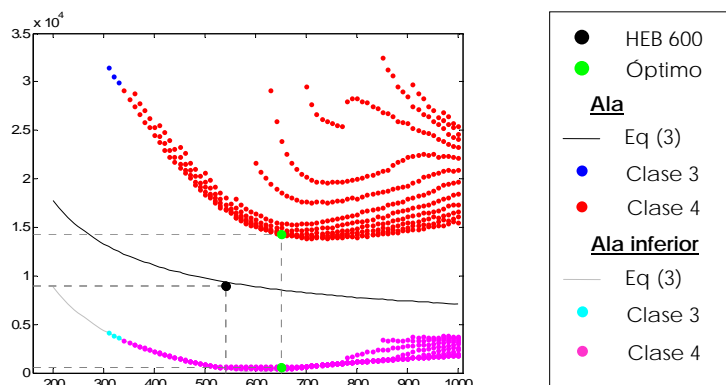


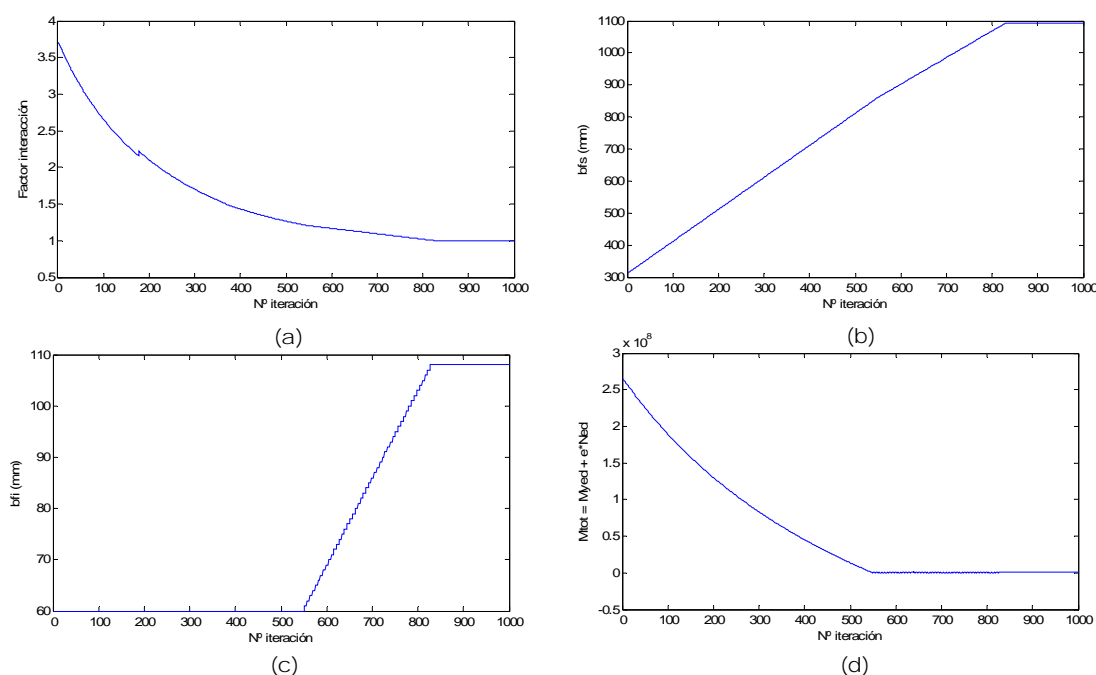
Figura 8. Área de las alas superior e inferior respecto a la altura del alma

En la Figura 8 se representan las áreas de ambas alas en función de la altura del alma. En esta figura se aprecia cómo para valores grandes de  $d_w$  el área del ala inferior aumenta respecto del valor obtenido en el predimensionamiento.

La comparación de las Figuras 7 (b) y 8 evidencia que la chapa que más influye en el área de la sección es el ala superior.

El crecimiento del ala inferior para valores elevados de  $d_w$  viene determinado por el cambio de sentido en el momento total  $M_g$ . Tal y como se ha explicado en el apartado 4, relativo al ajuste del diseño para el caso de flexo-compresión, el ala superior se aumenta con objeto de incrementar la excentricidad del axil y, por tanto, disminuir el momento total  $M_g$ . En la Figura 9 se ha representado la evolución del factor de interacción, de los anchos de ambas alas y del momento exterior que solicita al elemento durante el proceso de optimización para un caso de particular. En los gráficos se observa como, a medida que el ancho del ala

superior crece, el momento total  $M_g$  disminuye hasta que cambia de signo. Para evitar que siga creciendo en este sentido, se aumenta el ancho del otro ala a  $b_{fi}$ , provocando que, de nuevo,  $M_g$  cambie de signo. La Figura 9 muestra como para determinados anchos de ala el factor de interacción,  $\xi_{M_i}$ , se estabiliza .



**Figura 9. Evolución de una sección a lo largo del proceso de iteración para la sección transversal:  $d_w = 880$  mm,  $t_f = 24$  mm y  $t_w = 8$  mm: (a) Factor de interacción; (b) Ancho de ala superior; (c) Ancho de ala inferior; (d) Momento total**

En la Figura 10 (a) se han representado las áreas de las secciones transversales obtenidas en función de  $d_w$ , para  $t_f = 38$  mm (correspondiente a la sección óptima). La Figura 10 (a) muestra como medida que aumenta  $d_w$ , los valores obtenidos para  $b_{fs}$  a partir del predimensionamiento serán menores, con la consiguiente reducción de  $A$ . La gráfica correspondiente al área de la sección en función de la altura del alma presenta un mínimo; es decir, a medida que aumenta  $d_w$  disminuye el área hasta llegar a un valor de la altura del alma, por encima del cual el área vuelve a aumentar. Esto se debe a que para altos valores de la esbeltez del alma, ésta entra en clase 4 siendo menor el ancho eficaz cuanto mayor es su esbeltez(Figura 10 (b)) y, por tanto, es necesario aumentar las alas.

En la Figura 11 se representa la evolución de la deflexión máxima del elemento para los valores de  $d_w$  y  $t_f$  analizados. La explicación para la caída de la flecha viene dada por la estabilización del área del ala inferior a partir de cierta altura



de alma, lo que hace que la sección gane inercia a medida que aumenta  $d_w y$ , consecuentemente, que la flecha disminuya.

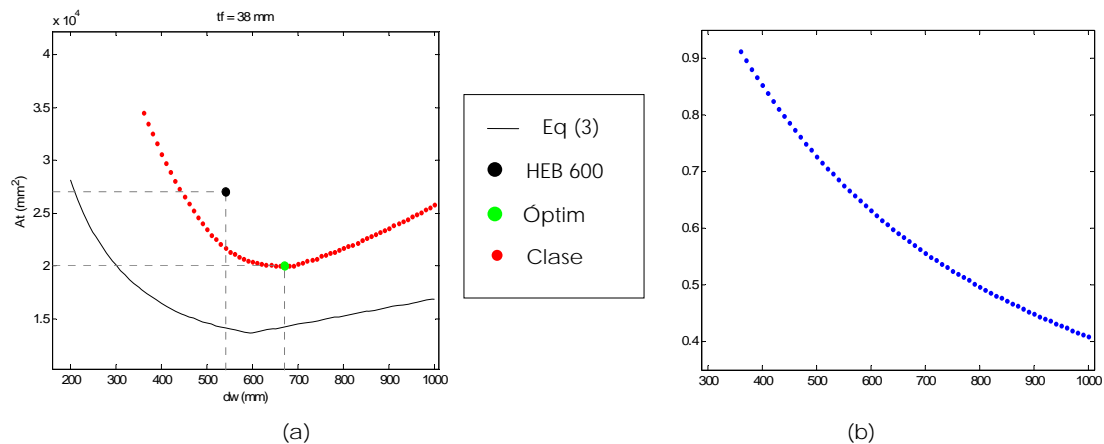


Figura 10. Área total respecto a la altura del alma para espesor de ala 38 mm

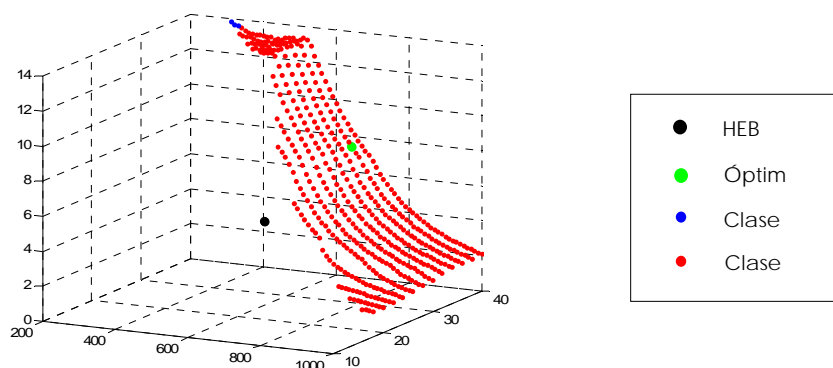


Figura 11. Deflexión de las soluciones en clases 3 y 4 obtenidas con el rango de valores adoptados para altura de alma y espesor de alas

## 6. Conclusiones

Tal y como se ha comprobado en los ejemplos expuestos en este trabajo, la sección óptima para un elemento tipo viga-columna difiere en numerosas ocasiones de los perfiles estándares normalmente empleados. De hecho, este estudio ha puesto de manifiesto que pueden conseguirse ahorros importantes en material. El procedimiento empleado ha demostrado ser una herramienta eficaz en la búsqueda de la sección óptima de un elemento metálico sometido a las condiciones de carga impuestas en el presente trabajo. El presente trabajo completa aquél realizado por Gil-Martín et al. 2008, quedando cubierto todo el rango de clases de secciones incluidas en EC3.

## Referencias

EC3. European Committee for Standardization. ENV1993-1-1. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1.1: General rules and rules for buildings. Brussels; 2005.

EC3. European Committee for Standardization. prEN1993-1-5. Eurocode 3. Design of steel structures. Part 1.5: Plated structural elements. Brussels; 2004.

EC3. Eurocódigo 3. Proyecto de Estructuras de acero. UNE-ENV 1993-1-1. Parte 1-1: Reglas generales y para edificación. AENOR; 1996.

Gil-Martín LM, Aschheim M, Hernández-Montes E. Proportioning of steel beam-column members based on RSD optimization methodology. *Engineering Structures* 2008; 30: 3003-3013.

Hernández-Montes E, Gil-Martín LM, Aschheim M. The impact of optimal longitudinal reinforcement on the curvature ductility capacity of reinforced concrete column. *Mag. Concrete Res.* 2004; 56 (9): 499-512.

Hernández-Montes E, Gil-Martín LM, Aschheim M. The design of concrete members subjected to uniaxial bending and compression using reinforcement sizing diagrams. *ACI Struct J* 2005; 102(1): 150-8.

## Análisis dinámico de estructuras en el dominio de la frecuencia

Alejandro de Miguel <sup>1A</sup>, Pablo de la Fuente <sup>1B</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid.

Calle Profesor Aranguren s/n, 28040 Madrid (España).

E-mail: [alejandro.demiguel.tejada@alumnos.upm.es](mailto:alejandro.demiguel.tejada@alumnos.upm.es)<sup>1A</sup> ; [pdlaf@caminos.upm.es](mailto:pdlaf@caminos.upm.es)<sup>1B</sup>

**Palabras clave:** Análisis dinámico, Dominio de la frecuencia, Sistemas discretos, Transformada de Fourier, Corrección de la respuesta.

### Resumen

El análisis estructural en el dominio de la frecuencia se postula, como un método alternativo al dado a través del dominio del tiempo, en la evaluación de la respuesta dinámica de sistemas estructurales con comportamiento lineal.

Especialmente importante será su aplicación en situaciones tales como: análisis experimental de estructuras y estudio del problema de interacción dinámica suelo-fluido-estructura.

En el presente artículo se realiza una comparación de la respuesta dinámica de un sistema estructural, efectuada en los dominios del tiempo y de la frecuencia, evaluando las diferencias existentes entre ambos métodos. Así mismo se resaltarán la importancia que conlleva la aplicación del método de análisis en el dominio de la frecuencia en problemas en los que, a priori, no se puedan determinar ni las frecuencias, ni los modos propios del sistema, y por tanto haya que descartar la utilización del método de superposición modal (dominio del tiempo) en la obtención de la respuesta.

### 1. Introducción

El análisis dinámico de diversas construcciones en el ámbito de la ingeniería civil, ha adquirido una gran importancia en la actualidad debido a una gran variedad de factores. Por una parte, la realización de estructuras cada vez más esbeltas hace que los periodos propios de éstas aumenten. Por otra parte las velocidades alcanzadas por algunos vehículos hacen que se generen fuerzas de carácter dinámico. Estas y otras circunstancias hacen que sea insuficiente el análisis estático tradicional llevado a cabo en las estructuras, y consecuentemente que el análisis dinámico cobre especial importancia en determinadas fases del diseño de las mismas.

Tradicionalmente se ha abordado la dinámica estructural, mayorando las cargas dinámicas a las que se veía sometida una estructura, pero diversas exigencias; crecientes en nuestros días, como el confort, conocimiento de los coeficientes de seguridad..., hacen del análisis dinámico una herramienta fundamental para resolver el problema.

Ante esta perspectiva, se han desarrollado procedimientos de análisis y perfeccionado otros para su aplicación concreta en problemas dinámicos de la ingeniería civil.

Uno de estos procedimientos es el análisis de la respuesta en el dominio de la frecuencia, cuya efectividad en el análisis de sistemas lineales fue más patente a partir del desarrollo, por parte de Cooley y Tukey en 1965, del algoritmo conocido como transformada rápida de Fourier.

## 2. Análisis estructural en el dominio de la frecuencia

Al plantear el equilibrio según los grados de libertad de un sistema discreto o bien a partir de una formulación variacional se obtienen las ecuaciones del movimiento, constituidas por un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden, con sus correspondientes condiciones iniciales:

$$M\{\ddot{x}\} + C\{\dot{x}\} + K\{x\} = \{p(t)\} \quad (2.1)$$

La respuesta de un sistema lineal se puede obtener en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. En el dominio del tiempo, se puede abordar mediante el método de superposición modal o bien utilizar métodos directos de integración, en los que se aproxima un problema de valor inicial mediante esquemas numéricos.

En el método de superposición modal la respuesta se obtiene al desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales, una vez expresada la solución como combinación de los modos de vibración del sistema. Cuando el amortiguamiento es proporcional, al desacoplar el sistema de ecuaciones se obtienen  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma:

$$M_i \ddot{Y}_i + C_i \dot{Y}_i + KY_i = \{a\}_i^T \{p(t)\} = P_i(t) \quad (2.2)$$

La solución particular de cada una de estas ecuaciones proporciona la respuesta estacionaria, la cual está definida por la integral de Duhamel:

$$Y_i(t) = \frac{1}{M_i \omega_{di}} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\omega_i \xi_i (t-\tau)} \sin \omega_{di} (t-\tau) d\tau \quad (2.3)$$

En la expresión (2.3):

$\omega_i$ : frecuencia propia asociada al modo  $i$ .

$\omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ : frecuencia amortiguada correspondiente al modo  $i$ .

$\xi_i$ : razón de amortiguamiento correspondiente al modo  $i$ .

Si las condiciones iniciales, movimiento y velocidad no son nulas, a la expresión (2.3) debemos añadir la solución de la homogénea de la ecuación (2.2).

La obtención de la respuesta en el dominio de la frecuencia es otra forma, muy distinta de abordar el problema. Se trata de utilizar la transformada de Fourier, en sus dos versiones, directa e inversa.

En la mayoría de los casos prácticos, la transformada de Fourier se utiliza en la forma discreta, reemplazando de esta manera, las integrales por cálculos numéricos equivalentes de áreas. De hecho, la eficiencia de los desarrollos de Fourier en el dominio de la frecuencia, es más acusada en aquellos casos en los que la excitación se especifica con valores numéricos en intervalos regulares de tiempo, que en aquellos, en los que la excitación se define a través de funciones continuas.

Con la aparición del algoritmo transformada rápida de Fourier, en el año 1965, se cambia por completo la perspectiva del análisis dinámico de estructuras en el dominio de la frecuencia, debido a que se acorta en una gran magnitud el número de operaciones implicadas en el cálculo.

Además, la evaluación de la respuesta en el dominio de la frecuencia, se presenta como un método efectivo en el análisis de sistemas estructurales con amortiguamiento no proporcional y en sistemas en los que las características físicas dependen de la frecuencia de vibración

Un aspecto que caracteriza el análisis en el dominio de la frecuencia, es su relación con el análisis experimental de estructuras, mediante el que se pueden determinar algunas características dinámicas del sistema continuo ensayado: frecuencias propias, modos de vibración razones de amortiguamiento, etc.

### 3. Sistemas dinámicos de un grado de libertad

En el presente documento, se pretende obtener la respuesta que experimenta un sistema estructural, ante la acción de una excitación dinámica determinada. Esta obtención se realizará a través de los dominios del tiempo y de la frecuencia. En este proceso se pondrán en juego diversos factores que resaltarán las diferencias existentes entre ambos métodos.

Se define la transformada continua de Fourier de una función  $p(t)$  como:

$$P(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (3.1)$$

De una forma análoga, se puede expresar la transformada continua e inversa de Fourier de una función  $P(\Omega)$ , como:

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \quad (3.2)$$

De esta forma se dice que  $p(t)$  y  $P(\Omega)$  constituyen un par de transformadas de Fourier.

En aplicaciones prácticas de análisis dinámico de estructuras, usualmente, se trabaja con valores discretos y con periodos de tiempo finitos, dentro de los cuales se quiere conocer la respuesta. Por esto se sustituyen las funciones continuas de las expresiones (3.1) y (3.2) por las funciones discretas siguientes:

$$P(n\Delta\Omega) = \sum_{m=0}^{N-1} p(m\Delta t) e^{-2\pi i m \frac{n}{N} \Delta t}$$

$$p(m\Delta t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} P(n\Delta\Omega) e^{2\pi i m \frac{n}{N} \Delta\Omega}$$

El cálculo de la respuesta en el dominio del tiempo, viene dado por la denominada integral de convolución. La convolución de dos funciones  $g(t)$  y  $h(t)$  se escribe  $h(t) * g(t)$  y se representa a través de la siguiente expresión:

$$u(t) = g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Donde:

$g(\tau)$ : magnitud del impulso en un instante  $\tau$ .

$h(t - \tau)$ : influencia que un impulso unitario en  $\tau$  tiene sobre la respuesta en  $t$ .  
Conocida también como función respuesta a impulso unitario.

La anterior expresión de la integral de convolución se puede expresar de manera discreta de la forma:

$$u(m\Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n\Delta t) h((m - n)\Delta t) \Delta t$$

El cálculo de la respuesta en el dominio de la frecuencia se basa en la obtención de las transformadas de Fourier de las funciones que intervienen en la convolución.

La aplicación de las transformadas discretas para la evaluación de la respuesta de sistemas lineales puede resumirse como sigue:

1. Se obtiene la transformada discreta de la carga aplicada  $g(m\Delta t)$ .
2. Se obtiene la transformada discreta de la función respuesta a impulso unitario  $h(m\Delta t)$ .
3. Se realiza el producto de las dos transformadas anteriores, obteniendo la función de respuesta, dependiente de la frecuencia.
4. Se realiza la transformada inversa de la anterior función de respuesta, obteniendo de esta manera, la función de respuesta en el dominio del tiempo.

Los dos primeros pasos requieren de la utilización de funciones periódicas. La elección del periodo de las mismas hace que la solución aportada en el dominio de la frecuencia se ajuste más o menos a la solución obtenida en el dominio del tiempo.

La elección de periodos largos, implica que la respuesta en el dominio de la frecuencia converge con la respuesta en el dominio del tiempo, pero a su vez esto conlleva tiempos de cálculo mayores.

La elección de periodos cortos hace que la respuesta en el dominio de la frecuencia sea divergente con respecto a la respuesta en el dominio del tiempo. En este caso es necesario aplicar un método de corrección que haga que la

respuesta obtenida en el dominio de la frecuencia sea muy parecida a la obtenida en el dominio del tiempo.

Antes de ver los métodos de corrección de la respuesta en el dominio de la frecuencia, conviene hacer una breve referencia al fenómeno del aliasing, dado que al trabajar con valores discretos, puede producirse una distorsión en los resultados obtenidos.

En procesamiento de señales, el aliasing es el efecto que hace que señales continuas distintas, se hagan indistinguibles cuando se las muestrea digitalmente. Cuando esto sucede, la señal original no puede ser reconstruida de forma unívoca a partir de la señal digital.

Partiendo de valores discretos, el intervalo de muestreo de señales temporales viene dado por  $\Delta t$ . Si se muestrean  $N$  puntos de la señal temporal, el periodo de la función temporal discreta a la que se realizará la transformada de Fourier vendrá dado por la expresión  $N\Delta t$ .

Definiendo la frecuencia cíclica  $f = \frac{n}{2\pi}$ , se puede escribir  $\Delta f = \frac{\Delta n}{2\pi}$ , por tanto sabiendo que la frecuencia circular es la inversa del periodo,  $\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$ , llegando a la expresión  $\frac{\Delta n}{2\pi} = \frac{1}{N\Delta t}$

Partiendo de la anterior expresión se define la frecuencia de Nyquist como  $\frac{N\Delta n}{2} = \frac{\pi}{\Delta t}$ . Esta frecuencia de Nyquist, debe ser elegida lo suficientemente amplia de manera que la frecuencia más alta significativa en la función temporal, esté representada.

En el caso de funciones discretas puede suceder, además, que éstas sean limitadas en banda o que no lo sean. En las funciones limitadas en banda, el aliasing se puede evitar si  $\Delta t$  se elige de manera que la frecuencia de Nyquist sea mayor que la frecuencia más alta que contenga la función a muestrear.

Para funciones que no estén limitadas en banda, el aliasing ocurrirá siempre que se realice el muestreo de la función temporal. Sólo se puede reducir el efecto del mismo, tomando  $\Delta t$ , lo suficientemente pequeño.

Es importante resaltar que en el caso particular de análisis en el dominio de la frecuencia, la función respuesta a impulso unitario  $h(t)$ , es una función no limitada en banda, y como consecuencia de esto, afectada por el efecto del aliasing. Para ello se sustituye dicha función  $h(t)$ , por una función auxiliar  $\bar{h}(t)$  con el objeto de minimizar en todo lo posible los indeseados efectos del aliasing.

Por tanto, en el desarrollo de los cálculos en el dominio de la frecuencia, se sustituye la función:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_d t} \text{sen}\omega_d t$$

por la expresión auxiliar:

$$\bar{h}(t) = \frac{e^{-\xi\omega_d t} \left\{ \frac{\text{sen}(\omega_d t) - e^{-\xi\omega_d T_p} \text{sen}(\omega_d(t-T_p))}{1 - 2e^{-\xi\omega_d T_p} \cos(\omega_d T_p) + e^{-2\xi\omega_d T_p}} \right\}}$$

#### 4. Métodos de corrección de la respuesta

##### Basándose en las condiciones iniciales

Este método se basa en la superposición de una respuesta artificial, que se genera al intentar ajustar la respuesta aproximada, obtenida en el dominio de la frecuencia, a las condiciones iniciales reales de desplazamiento y velocidad. Se parte de la base de asumir desplazamientos y velocidades nulas para la respuesta real en un tiempo  $t = 0$ .

En forma de ecuación quedaría:

$$u(m\Delta t) = \bar{u}(m\Delta t) + \eta_1(m\Delta t) + \eta_2(m\Delta t)$$

Donde:

$u(m\Delta t)$ : respuesta corregida.

$\bar{u}(m\Delta t)$ : respuesta aproximada obtenida en el dominio de la frecuencia.

$\eta_1(m\Delta t)$ : función de corrección basada en la condición inicial de desplazamiento.

$\eta_2(m\Delta t)$ : función de corrección basada en la condición inicial de velocidad.

##### Basándose en la aplicación de un par de pulsos fuerza

En este método, la resolución del problema se obtiene aplicando dos fuerzas periódicas de tipo impulsivo y de una magnitud apropiada al final del periodo de tiempo en el que se quiere obtener la respuesta.

Conceptualmente es un método muy parecido al anterior ya que la idea sigue siendo generar una respuesta artificial que corrija la respuesta aproximada obtenida en el dominio de la frecuencia.

La diferencia con respecto al método basado en las condiciones iniciales radica en el procedimiento para calcular la respuesta artificial, debido a que con el método de la aplicación de pulsos fuerza correctores, no es necesario conocer las frecuencias propias del sistema estructural.

De una forma gráfica, éste último método se puede esquematizar a través de la figura 4.1



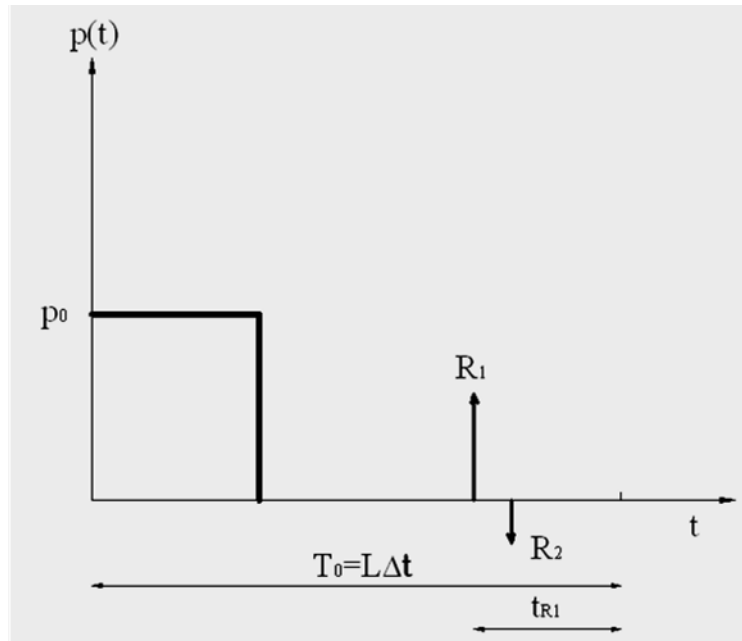


Figura 4.1: Esquema general de colocación del par de pulsos fuerza

La respuesta corregida viene dada por la expresión:

$$u(m\Delta t) = \bar{u}(m\Delta t) + R_1 \bar{u}_1 + R_2 \bar{u}_2$$

## 5. Sistemas de n grados de libertad

Si se conocen las frecuencias propias y modos de vibración, y la matriz de amortiguamiento es proporcional, es posible desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales y aplicar el método de superposición modal para obtener la respuesta estacionaria del sistema discreto de n grados de libertad. Cada una de estas ecuaciones es de la forma indicada en (2.2) y por tanto, susceptible de aplicar lo anteriormente expuesto para sistemas de un grado de libertad.

Cada una de las ecuaciones reflejadas en (2.2) representan el modelo matemático correspondiente al modelo dinámico de un grado de libertad sometido a una carga  $P_i$ , definido por una masa  $M_i$ , constante elástica  $K_i$ , y amortiguamiento,  $C_i$ .

Se considera una situación en la que no se conocen previamente las frecuencias propias, ni los modos de vibración del sistema dinámico. Si se tiene en cuenta el sistema de ecuaciones diferenciales reflejado en (2.1) y se designa mediante  $\{X(\Omega)\}$  a la transformada de Fourier de la respuesta estacionaria  $\{x(t)\}$ , en los distintos grados de libertad y mediante  $\{P(\Omega)\}$ , a la transformada de Fourier de la matriz de cargas,  $\{p(t)\}$ , en los diferentes grados de libertad, al tomar transformadas de Fourier en ambos miembros de (2.1), resulta:

$$(-\Omega^2 M + iC\Omega + K)\{X(\Omega)\} = \{P(\Omega)\} \quad (5.1)$$

Designando por  $\Lambda$  a la matriz  $(-\Omega^2 M + iC\Omega + K)$  y  $H(\Omega) = \Lambda^{-1}$ , la ecuación matricial (5.1) se expresa:

$$\{X(\Omega)\} = H(\Omega)\{P(\Omega)\} \quad (5.2)$$

$H(\Omega)$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ , denominada matriz compleja de respuesta en frecuencia o matriz de flexibilidad dinámica.

Los elementos,  $\{H_k\}$ , de la columna  $k$  de la matriz  $H(\Omega)$  permiten definir la respuesta, en los distintos grados de libertad, a la acción  $e^{i\Omega t}$  en el grado de libertad  $k$ . En efecto, si se considera la acción  $e^{i\Omega t}$  actuando en el grado de libertad  $k$ :

$$\{p(t)\} = \{U_k\}e^{i\Omega t}; \{U_k\}^T = (0, 0, \dots, 1^k, \dots, 0, 0)$$

La respuesta estacionaria en (2.1) se puede expresar:

$$\{x(t)\} = \{F_k\}e^{i\Omega t}$$

Por tanto:

$$\{\dot{x}(t)\} = i\Omega\{F_k\}e^{i\Omega t}, \{\ddot{x}(t)\} = -\Omega^2\{F_k\}e^{i\Omega t}$$

Sustituyendo en (2.1) y simplificando:

$$(-\Omega^2 M + i\Omega C + K)\{F_k\} = \{I_k\} \quad (5.3)$$

La solución del sistema de ecuaciones anterior nos proporciona los  $n$  valores complejos de la matriz  $\{F_k\}$ .

Considerando para  $k$  valores comprendidos entre  $1$  y  $n$ :

$$(-\Omega^2 M + i\Omega C + K)F(\Omega) = I \quad (5.4)$$

Siendo  $I$  la matriz idéntica de orden  $n$ , y por tanto,  $F(\Omega)$ , la matriz inversa de:

$$A = (-\Omega^2 M + i\Omega C + K)$$

es decir, la matriz  $H(\Omega)$ .

El conjunto de elementos de cualquier columna  $k$  de la matriz  $H(\Omega)$  contienen suficiente información sobre las frecuencias propias del sistema y sobre los modos de vibración, determinados por las amplitudes donde  $H_{jk}$  alcanza máximos, así como sobre el amortiguamiento correspondiente a cada modo.

Asimismo  $H(\Omega)$  se puede expresar en función de los modos de vibración del sistema:

$$H(\Omega) = [a]H^*(\Omega)[a]^T \quad (5.5)$$

Siendo  $[a]$  una matriz cuadrada cuyas columnas definen los modos de vibración del sistema y  $H^*(\Omega)$  una matriz diagonal, cuyo elemento  $j$  es:

$$H_j^*(\Omega) = \frac{1}{K_j} \frac{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_j}\right)^2 - 2i\zeta_j \frac{\Omega}{\omega_j}}{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_j}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta_j \frac{\Omega}{\omega_j}\right)^2} \quad (5.6)$$

Donde,  $\omega_j$  es la frecuencia natural asociada al modo  $\{a\}_j$  y  $\xi_j$  la correspondiente razón de amortiguamiento modal.  $K_j$  es la rigidez reducida en el modo j, definida por:

$$K_j = \{a\}_j^T K \{a\}_j$$

## 6. Comparación de la respuesta en ambos dominios

### Sistemas con un grado de libertad

En sistemas de un grado de libertad, se hace interesante obtener la respuesta (en movimientos), debida a una acción de tipo impulsivo; en el dominio del tiempo y compararla con la obtenida en el dominio de la frecuencia.

Esta última se calculará teniendo en cuenta distintos periodos de truncado, de esta manera se podrá apreciar cómo cuanto mayor valor tengan los periodos, menor será el efecto desfavorable que induce el aliasing y como consecuencia, más se acercará la respuesta en el dominio de la frecuencia a la dada en el dominio del tiempo.

Se considera un sistema de un único grado de libertad, amortiguado y excitado mediante una carga de tipo impulsivo.

Los periodos de truncado de las series discretas que intervienen en el cálculo en el dominio de la frecuencia son de 3s., 5s., 10s. y 30s. respectivamente (ver figura 6.1). Son periodos representativos en los que las respuestas en el dominio del tiempo, representada en color azul, y la obtenida en el dominio de la frecuencia, representada en color rojo, convergen hacia un único punto, según aumente el periodo escogido.

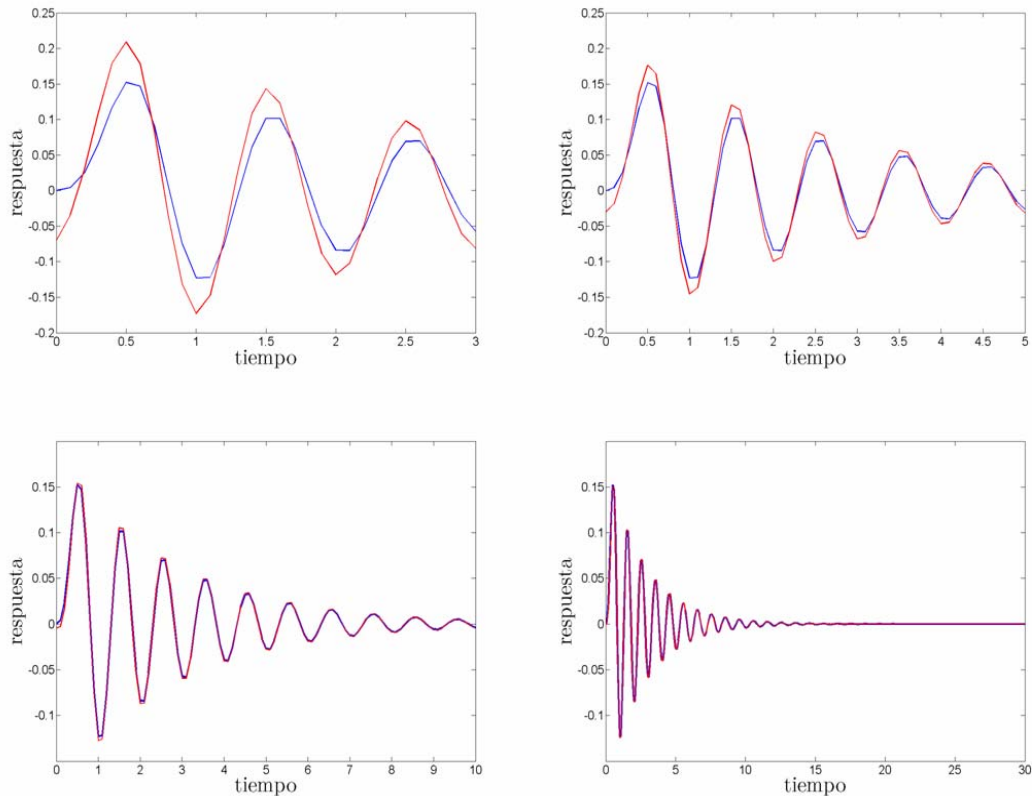


Figura 6.1: Evolución comparativa de respuestas dominio del tiempo (azul)-dominio de la frecuencia (rojo), para periodos de truncado de 3s., 5s., 10s., y 30s.

Tal y como puede apreciarse en la figura 6.1, el hecho de aumentar el periodo de truncado implica una mayor aproximación de la respuesta en el dominio de la frecuencia a la obtenida en el dominio del tiempo.

Por el contrario hay que destacar que periodos de truncado más grandes, implican mayores tiempos de cálculo y como consecuencia una mayor ineficiencia en el procedimiento. Por esta razón, se hace necesario aplicar una corrección de la respuesta, a través de los métodos explicados anteriormente, que hagan que la respuesta en el dominio de la frecuencia se aproxime a la obtenida en el dominio del tiempo, sin tener que operar con elevados periodos de truncado en las funciones implicadas.

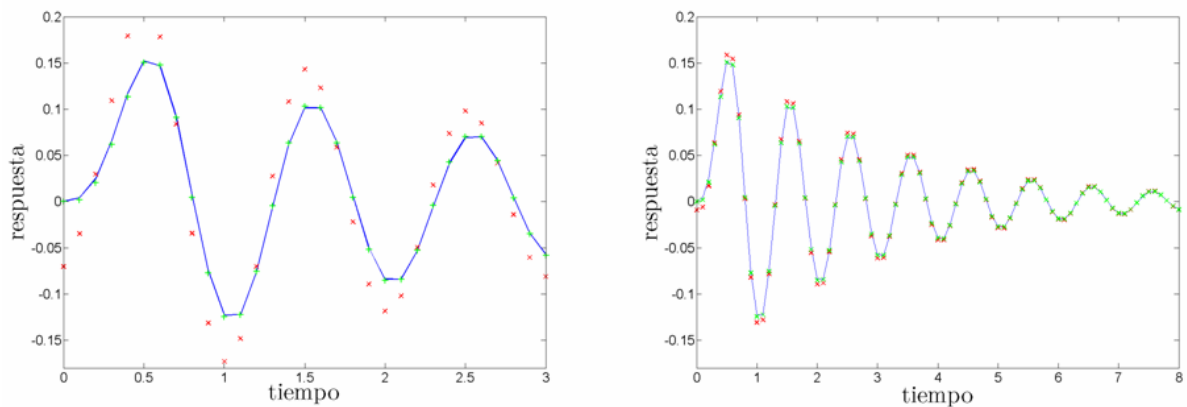


Figura 6.2: Evolución comparativa de respuestas dominio del tiempo (azul)-dominio de la frecuencia (rojo)-respuesta corregida (verde), para periodos de truncado de 3s. y 8s.

En la figura 6.2, se aprecia el grado de aproximación (con respecto al dominio del tiempo) que se consigue al trabajar en el dominio de la frecuencia, aplicando una corrección en la respuesta, basada en las condiciones iniciales.

### **Sistemas con n grados de libertad**

En sistemas de n grados de libertad se actúa de manera similar al caso anterior, con la complejidad añadida que supone el considerar un mayor número de puntos en el análisis.

En este caso se procede a realizar la comparación de la respuesta (en movimientos), de un sistema no amortiguado de dos grados de libertad, sometido a una acción dinámica de tipo impulsivo. Se obtiene, en primer lugar la respuesta en el dominio del tiempo. Posteriormente se obtiene en el dominio de la frecuencia pero a través de dos hipótesis bien diferenciadas: la primera, en la que tanto las frecuencias propias como los modos propios pueden ser determinados. La segunda, en la que se resuelve el problema sin obtener ni frecuencias ni modos propios, y por tanto sin recurrir al método de superposición modal. En ambas hipótesis se realiza la corrección de la respuesta, necesaria para trabajar en el dominio de la frecuencia, tal y como se ha visto en puntos anteriores.

En la figura 6.3, se muestra la obtención de la respuesta en desplazamientos obtenida de tres formas diferentes:

- En color azul y traza discontinua, queda representada la respuesta obtenida a través del dominio del tiempo.
- En color rojo y traza continua, se representa la respuesta corregida obtenida en el dominio de la frecuencia teniendo en cuenta los modos y las frecuencias propias.
- Finalmente, en color verde y traza continua, se representa la respuesta corregida obtenida en el dominio de la frecuencia sin considerar ni frecuencias ni modos propios de vibración.

Este último caso es realmente significativo, ya que permite obtener la respuesta de un sistema, en el que a priori no son conocidos ni las frecuencias propias, ni los modos propios del mismo. En aplicaciones prácticas es común este tipo de situaciones, sobretodo en los casos en los que los parámetros físicos son dependientes de la frecuencia.

Como puede comprobarse, es un método en el que la respuesta difiere sensiblemente de la obtenida a través de las dos primeras formas. Aún con esto, el grado de aproximación conseguido es realmente bueno, tal y como se puede observar en la figura 6.3.

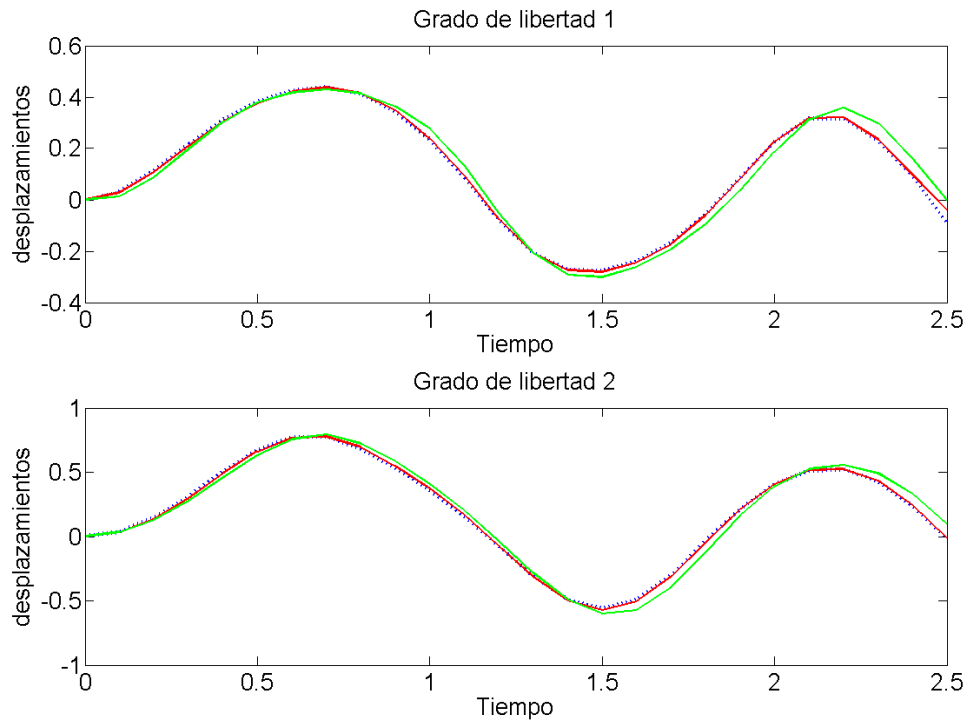


Figura 6.3: Evolución comparativa de respuestas dominio del tiempo-dominio de la frecuencia, para un sistemas de dos grados de libertad y para un periodo de obtención de la respuesta de 2.5s.

## Referencias

- [1] Allemang, R.J., and Brown, D.L., "Modal analysis and Testing," Chapter 21 in *Shock and Vibration Handbook*, Fourth Edition (Edited by Cyril M.Harris), MacGraw-Hill, New York,1996.
- [2] Barbat, A.H y Canet,J.M., *Estructuras sometidas a acciones sísmicas. Cálculo por ordenador*, 2ª edición, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona, 1994.
- [3] Byeong Hwa Kim, Norris Stubbs, Taehyo Park. "Anew method to extract modal parameters using output-only responses". *Journal of sound and vibration* 282 (2005) 215-230.
- [4] Chopra, A.K., *Dynamics of Structures*, Second Edition, Upper Saddle River, New Jersey,2001.
- [5] Clough,R.W., and Penzien,J.*Dynamics of Structures*, MacGraw-Hill, New York,1975.
- [6] Cooley,J.W., and Tukey,J.K., "An algorithm for the machine Calculation of Complex Fourier Series," *Mathematics of Computation*,19,1965,pp.297-301.
- [7] Francis W. Sears-Mark W. Zemansky (Versión española de Albino Yusta Almazara), Madrid, 1975.
- [8] Humar,J.L. *Dynamics of Structures*. Prentice\_Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1990.
- [9] Veletsos, A.S., and Ventura, C.E., "Dynamic Analysis of Structures by the DFT Method," *Journal of Structural Engineering*,ASCE,111,1985,pp.2625-2642.

## Refined-compression field theory for thin low-reinforced sandwich panels subjected to reversed cyclic horizontal loads

M.Palermo<sup>1A,#</sup>, L.M. Gil-Martin<sup>2A</sup>, E. Hernandez-Montes<sup>2B</sup>, T. Trombetti<sup>1B</sup>, M. Aschheim<sup>3</sup>,

<sup>1</sup> Department DICAM, University of Bologna, 40136 Bologna, Italy.

E-mail: michele.palermo7@unibo.it<sup>1A</sup>; tomaso.trombetti@unibo.it<sup>1B</sup>

<sup>2</sup> E.T.S., Ingenieros de Caminos, University of Granada, 18072 Granada, Spain.

E-mail: mlgil@ugr.es<sup>2A</sup>; emontes@ugr.es<sup>2B</sup>

<sup>3</sup> Department of Civil Engineering, Santa Clara University, Santa Clara, CA 95050

E-mail: maschheim@scu.edu<sup>3</sup>

**Keywords:** Sandwich Reinforced Concrete Panel, Straw bale walls, Experimental tests, Compression-field theories, tension stiffening, embedded bars model.

### Abstract.

Refinements to modified compression-field theory has been recently proposed in order to better predict the behaviour of reinforced concrete members subjected to in-plane shear and axial stresses, leading to the so-called refined-compression field theory, RCFT. This theory is based on the continuum mechanic approach, i.e. satisfy compatibility, equilibrium and constitutive equations in terms of average (i.e. "smeared") stresses and strains. The original refinement proposed by RCFT, with respect to the two fundamental theories for reinforced concrete member subjected to shear, i.e. the Modified Compression-Field Theory, MCFT, and the Rotating-Angle Softened Truss Model, RA-STM, deals with the introduction of an embedded bar model based on the tension stiffening in concrete. In this paper further refinements are proposed with reference to two different typologies of thin low-reinforced sandwich panels subjected to reversed cyclic lateral loads: (a) reinforced concrete sandwich panels produced by "Nydion Costruzioni s.p.a."; (b) cement-stucco plastered straw bale walls; a total of 4 full-scale "Nydion panels" and 3 full-scale straw-bale walls were tested. The predictions of the RCFT are compared with the experimental data as well as with the predictions given by the MCFT and RA-STM.

### Introduction.

---

# corresponding author: M. Palermo

---

In the last decades several new construction technologies have been the objective of large experimental campaigns aimed at investigating the load-deformation behaviour of such a systems in order to develop structural solutions able to reach multiple performance objective such as: (i) high structural performance; (ii) high energetic requirements, (iii) use of renewable sources; (iv) economic sustainability. This paper is focused on the study of the load-deformation response of two new typologies of low reinforced structural walls: (i) thin reinforced concrete sandwich panels produced by the Italian company "Nydion Costruzioni" [1]; (ii) plastered straw bale walls tested by the Ecological Building Network [2]. Both structural typologies were tested in shear in order to provide a structural characterization of the wall's behaviour for design purposes.

### **Compression-field theories.**

Shear response of reinforced concrete member has been the objective of several researches since the end of 19th century when Ritter [3] presented the 45° truss model for reinforced cracked concrete members subjected to shear, extended to torsion by Morsch [4] . It was soon pointed out that the 45° truss analogy, neglecting the contribution of concrete in tension, leads to conservative results when compared with experimental evidence. Based on the equal principle angle hypothesis [5] several models have been proposed aimed to predict the response provided by experimental tests. Among others, the most relevant theories are the MCFT (Modified Compression-Field Theory [6]) and the RA-STM (Rotating-Angle Softened-Truss Model [7]).

Recently, refinements to MCFT has been introduced [8] leading to the so called Refined Compression-Field Theory, RCFT. This theory is based on the continuum mechanic approach, as well as the MCFT and RA-STM, thus formulating equilibrium and compatibility in terms of average (i.e. "smeared") stresses and strains related by appropriate constitutive equations. The RCFT proposes a more rational constitutive equation for the steel bare embedded in concrete based on equilibrium consideration with the tension stiffening model to account for the average post-cracking tensile concrete strength.

### **Specimens' characteristics and tests results.**

Three full-scale "Nydion" low reinforced sandwich panels and three cement-stucco plastered straw bale walls were tested. For both the wall's typology a similar test protocol was adopted: the walls were subjected to reversed cyclic horizontal forces imposed through increasing levels of horizontal displacement applied at the top of the wall by an hydraulic actuator. A constant axial force was applied to each wall simulating the effect of the floor weight. Figure 1 a and b provides the



drawing plan of the specimens. Figure 2 provides the recorded cyclic response and the envelop of the cyclic response of one “Nydion” panel and one straw bale wall tests.

The main characteristics of the specimens are as follows:

- “Nydion” Panels: The dimensions of each panel were 300 x 300 cm, with a thickness equal to 18 cm (i.e. a central polystyrene layer of 10 cm plus two external layers of 4 cm of reinforced shotcrete). The base reinforcement consisted of 5 x 5 cm Ø 2.5 mm electro-welded wire mesh, while additional reinforcement were added (i) at the edges of the wall (2 Ø 12 longitudinal bars and Ø8 @ 50 cm U-shaped transversal bars) and (ii) to connect the walls to the foundation (Ø8 @ 50cm steel runners). A reinforced concrete beam (cross section equal to 18 x 25 cm, longitudinally reinforced with 2+2Ø16 longitudinal bars, transversally reinforced with Ø10 @ 15cm stirrups, and connected to the wall with Ø8@ 50cm runner bars) was placed at the top of each panel in order to allow a uniform horizontal and vertical loads distribution. Concrete measured compressive strength was 26 MPa, while the nominal yield stress of reinforcing bar was 450 MPa. Three different values of axial load were applied (i.e. N=50 kN; N=100 kN; N=250 kN).
- Plastered straw bale walls: Internally, each wall was similar, with six straw bale courses stacked in a running bond. Each course was the width of two bales, a nominal 2.4-m (8-foot) width per course. The nominal height of each wall, from bottom of bale to top of bale, was also 2.4 m (8 feet). All the specimens were built with the same cement-stucco plaster (thickness of 3.75 cm, i.e. 2 in). The stucco used Portland cement and lime as a binder, and had a compressive strength varying from 1.1 MPa to 2.0 MPa (i.e. 1850 psi to 2200 psi depending on the curing time). Different reinforcement and details were adopted for each of the three specimens. Three different reinforcement's levels were adopted: (i) “low” reinforcement consisting of 17-gauge (approximately 1 mm diameter) chicken wire mesh, provided both for reinforcement and to assist with stucco application; (ii) “medium” reinforcement consisting of a 5 cm x 5 cm (2 in. x 2 in.) x 14 gauge (approximately 1.6 mm diameter) welded wire mesh, stapled at every wire intersection along a line at the at the bottom into a 4x4 sill and at the top into the header beam; (iii) “high” reinforcement consisting of the same base reinforcement of the “medium” reinforcement supplemented with additional anchorage of the lowest course of bales, additional cross ties, and spikes added to anchor the header beam into the top course of straw. Rupture steel tension was equal to 530 MPa.

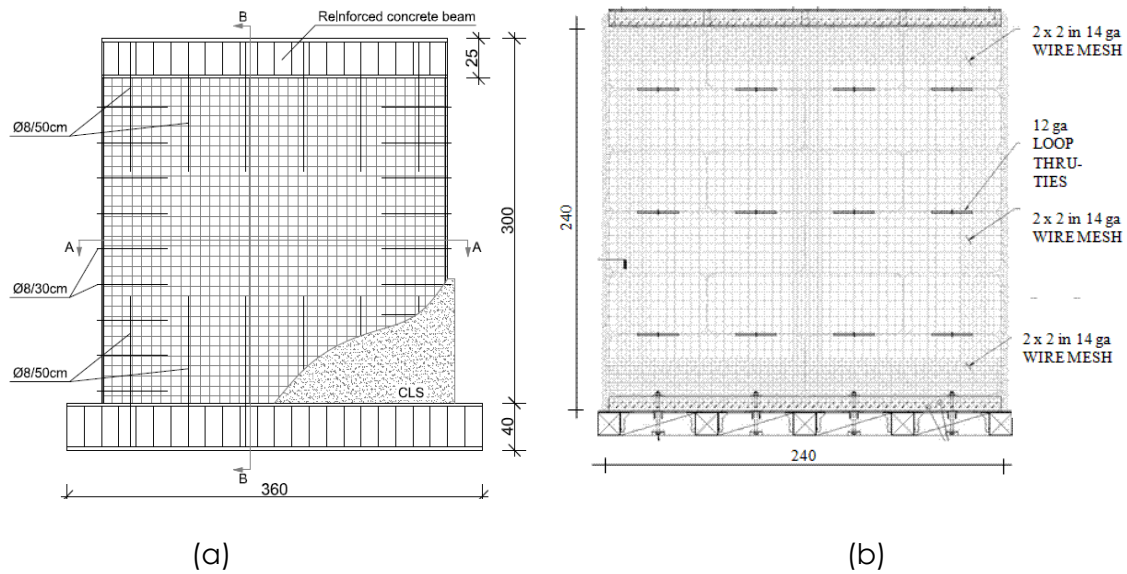


Figure 1: Drawing plan of the specimens: (a) Nydion panel; (b) Straw bale wall.

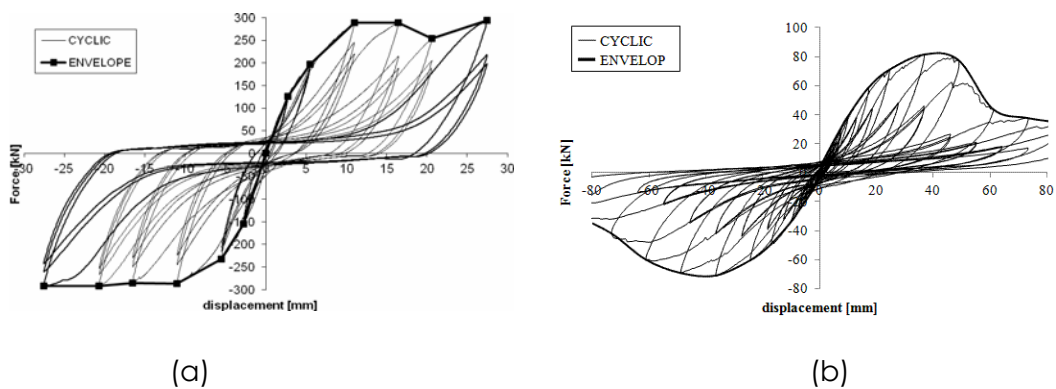
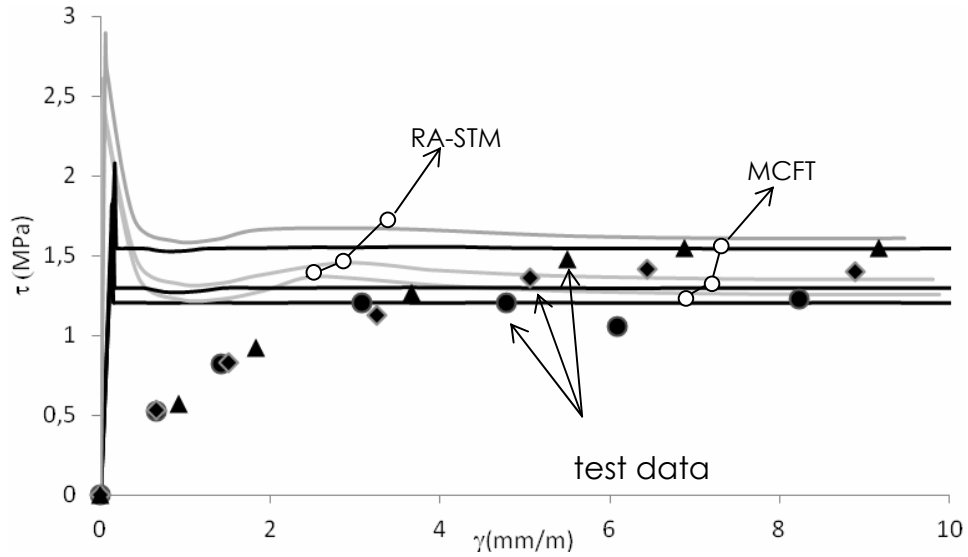


Figure 2: recorded cyclic response and envelop response: (a) Nydion panel; (b) Straw bale wall.

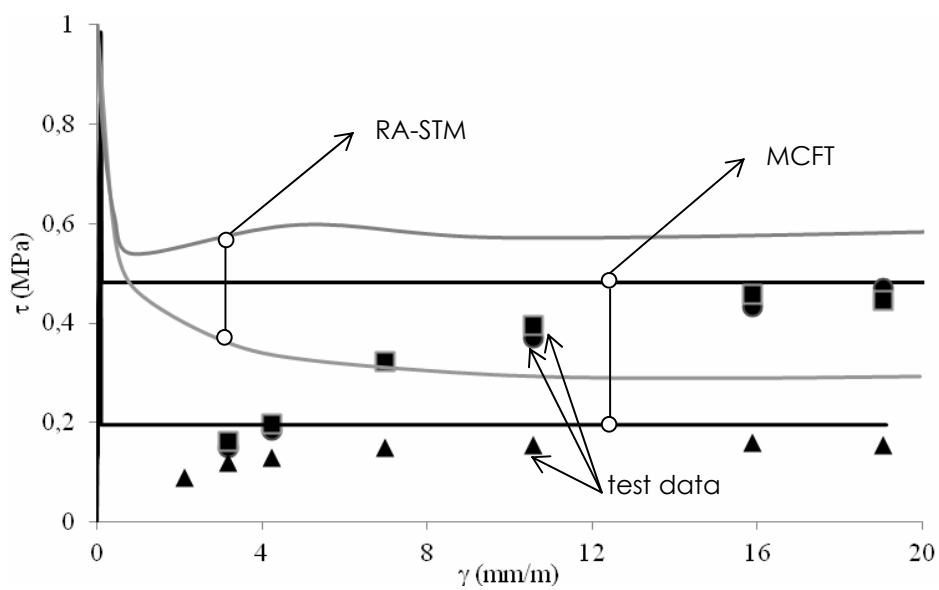
**MCFT and RA-STM predictions of the panels' response.**

Figure 3 provides the prediction of the shear-deformation response of the specimens given by the MCFT and the RA-STM. Inspections of the graphs clearly show that for both the walls' typology the two actually fundamental shear theories are not able to describe the observed load-deformation behaviour. In details the predictions appear substantially higher at low values of drift, while the shear at high drift (i.e. the design shear for ultimate limit states) is better captured. The reason of this large overestimation lies on the post-cracking concrete contribution due to the tension stiffening that from tests' evidences appear to be considerably less than

that predicted by the commonly adopted tension stiffening models, calibrated based on experimental tests performed on standard reinforced concrete panels.



(a)



(b)

Figure3: MCFT and RA-STM prediction versus experimental data.

### Adapting the RCFT for low reinforced structural walls.

The Refined Compression-Field Theory, RCFT, as well as MCFT and RA-STM theories, is based on the continuum mechanic approach. The fundamental assumptions of the continuum mechanic approach applied to reinforced concrete members are [6]:

- Stresses and strains can be considered in terms of average values estimated over a length large enough to include several cracks;
- The angle of inclination of the principal stresses coincides with the angle of inclination of the principal strains;
- Perfect bond between concrete and steel reinforcement is assumed in average sense.

Under these assumptions the following set of equations can be formulated:

- Compatibility equations, obtained from Mohr's circle (see Figure 4 a):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -\varepsilon_2 \cos^2 \theta + \varepsilon_1 \sin^2 \theta \\ \varepsilon_v &= -\varepsilon_2 \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \cos^2 \theta \\ \gamma_{xv} &= 2(\varepsilon_x - \varepsilon_2) / \tan \theta\end{aligned}\tag{1 a, b, c}$$

where:

x and v indicate the vertical and horizontal directions, respectively, as it is shown in Figure 11, this criterion coincides with the typically adopted sign criteria [9]; subscripts 1 and 2 indicate the directions of the principal tensile and compressive stresses and strains in the concrete, respectively;  $\theta$  indicates the inclination of the compressive concrete strut with respect to the x direction.  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_v$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , are the axial strains in the x, v, 1 and 2 directions, respectively, while  $\gamma_{xv}$  is the shear strain.

From Equations 1a and 1b the "crack" angle  $\theta$  can be derived as:

$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_2}{\varepsilon_v - \varepsilon_2}\tag{2}$$

Equilibrium equations, obtained from equilibrium conditions in Figure 4, are:

$$\begin{aligned}V &= (f_1 + f_2) \sin \theta \cos \theta t L \\ n_v A_{sv} f_{sv} &= (f_2 \sin^2 \theta - f_1 \cos^2 \theta) t H \\ N &= (f_2 \cos^2 \theta - f_1 \sin^2 \theta) t L - n_x A_{sx} f_{sx}\end{aligned}\tag{3 a, b, c}$$

where:

$V$  and  $N$  are the external applied shear and axial load as it is shown in Figure 4;  $f_1$  and  $f_2$  are the internal tensile and compressive stresses on concrete, respectively;  $f_{sx}$  and  $f_{sv}$  are the tensile stresses in the reinforcement  $L$ ,  $H$ ,  $t$  are the length, the height and the thickness of the tested panels, respectively;  $A_{sx}$  and  $A_{sv}$  are the area of the steel bars while  $n_x$  and  $n_v$  indicate the total number of steel bars along the  $x$  and  $v$  direction, respectively.

Equilibrium and compatibility equations are related by appropriate laws. The next sections present the materials' constitutive laws proposed for the studied wall's typologies.

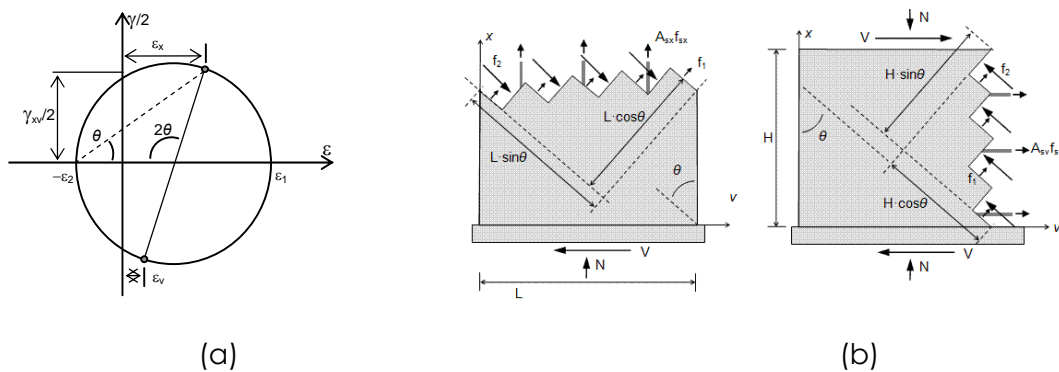


Figure 4: (a) Mohr's circle of strains; (b) Free body diagrams.

### Materials' Constitutive laws for "Nydion" sandwich panels.

The following constitutive laws are proposed for "Nydion" sandwich panels:

Concrete in tension (based on the tension stiffening model proposed by Bents [10]):

$$f_1(\varepsilon_1) = \begin{cases} E_c \varepsilon_1 & \text{for } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{\alpha f_{cr}}{1 + \sqrt{\frac{M \varepsilon_1}{20}}} & \text{for } \varepsilon_1 > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (4)$$

Reinforcement embedded in concrete (based on RCFT [8]):

$$f_s(\varepsilon_s) = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \text{for } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{y,av} \\ f_y - \frac{\kappa A_{c,ef}}{A_s} \frac{\alpha f_{cr}}{1 + \sqrt{\frac{M \varepsilon_s}{20}}} & \text{for } \varepsilon_s > \varepsilon_{y,av} \end{cases} \quad (5)$$

Numerical values of coefficients  $\alpha$  and  $k$  have been obtained through a numerical procedure (pondered square least) and are listed in Table 1.

### Materials' Constitutive laws for plastered straw bale walls.

Cement-stucco plaster in tension (based on the tension stiffening model proposed by Bents [10]):

$$f_1 = \begin{cases} E_c \varepsilon_1 & \text{for } \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{cr} \\ \frac{\alpha_1 f_{cr}}{1 + \sqrt{\frac{M}{20}} \varepsilon_1} & \text{for } \varepsilon_1 > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (6)$$

Reinforcement embedded in cement-stucco plaster (based on RCFT [8]):

$$f_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \text{for } \varepsilon_s \leq \varepsilon_{y,av} \\ f_y - \frac{\kappa A_{c,ef}}{A_s} \frac{\alpha_2 f_{ctm}}{1 + \sqrt{\frac{M}{20}} \varepsilon_s} & \text{for } \varepsilon_s > \varepsilon_{y,av} \end{cases} \quad (7)$$

Numerical values of coefficients  $\alpha_1$ , and  $\alpha_2$  have been obtained through a numerical procedure (pondered square least) and are listed in Table 2. Numerical values of  $k$  versus  $\varepsilon_1$  are plotted in Figure 5.

Table 1:  $\alpha$  coefficient values for the three different applied axial load N

	N= 50 kN	N= 100 kN	N= 250 kN
$\alpha$	0.20	0.13	0.00

Table 2.  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  values obtained for the three specimens.

	Wall 1	Walls 2-3
$\alpha_1$	0.05	0.10
$\alpha_2$	0.10	0.50

### RCFT predictions of the load-deformation response of the tested specimens.

Figure 6 shows the load-deformation response of the tested specimens obtained from the adjusted RCFT using the above proposed constitutive equations (Equations 4 to 7). Figure 6 clearly shows that the proposed RCFT leads to a very accurate fitting of the experimental data and thus it is able to predict the full load-deformation response of the specimens. On the contrary, as was shown above, MCFT and RA-STM are only able to predict the ultimate shear strength.

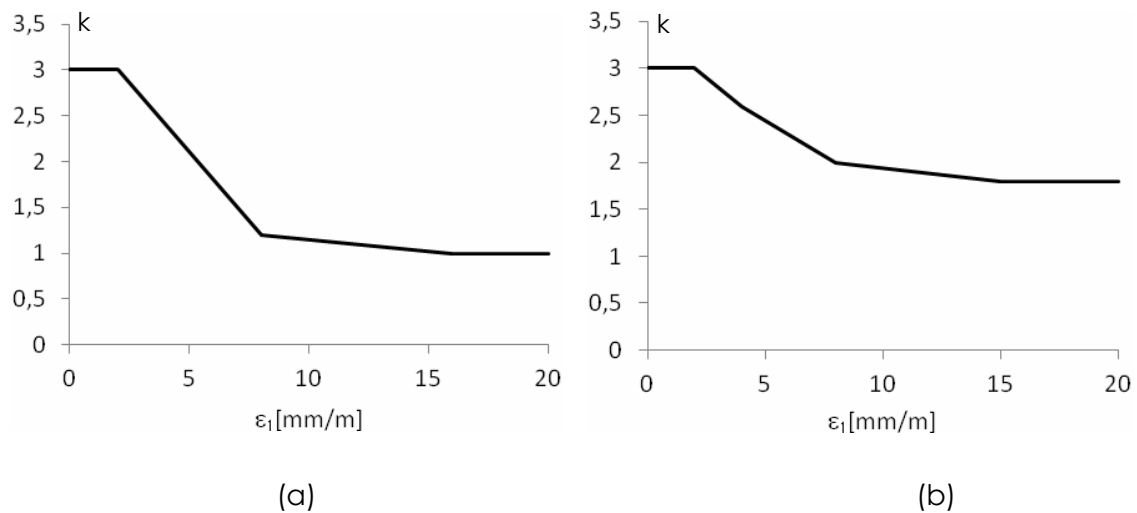
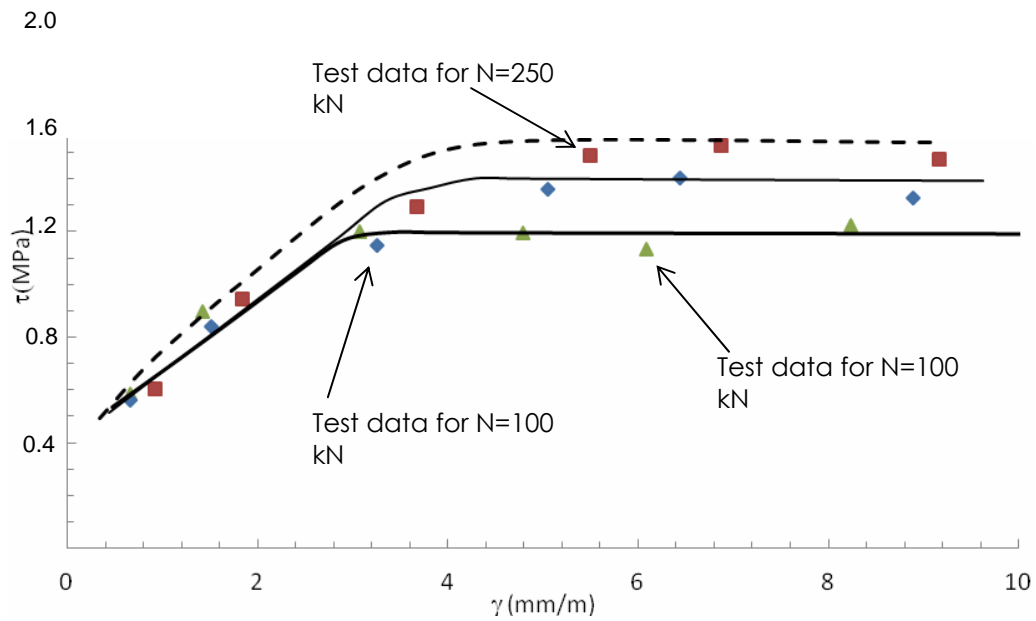
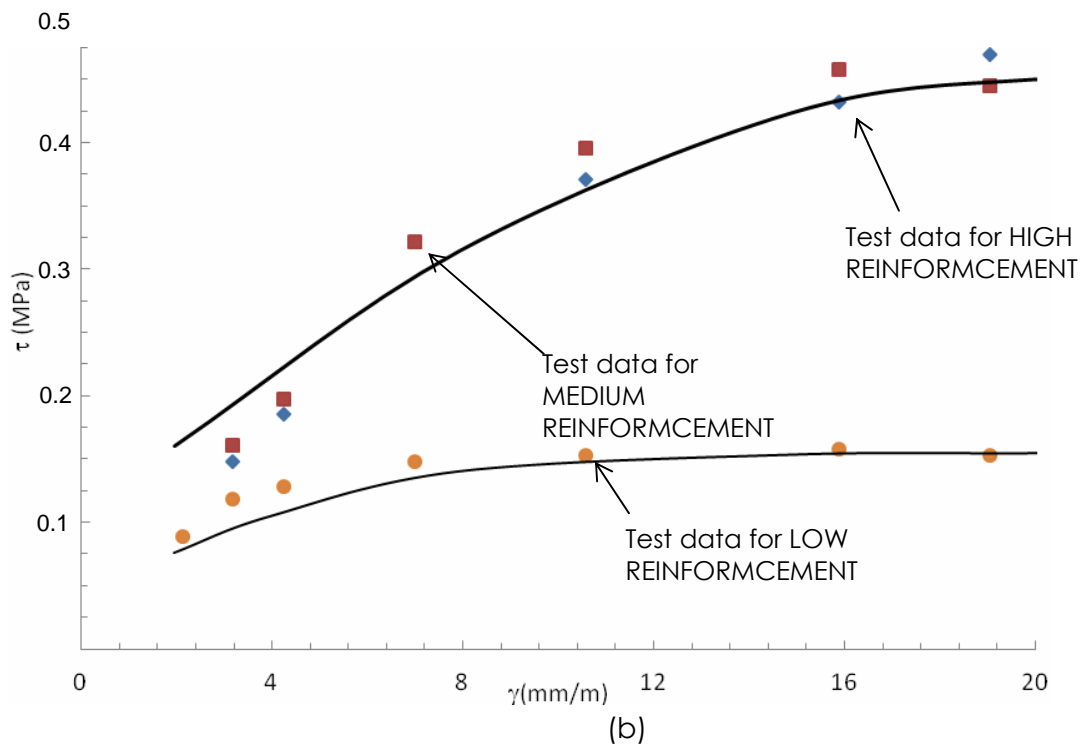


Figure 5: k values versus  $\epsilon_1$ : (a) "medium" and "high" reinforcement; (b) "low" reinforcement.



(a)



(b)

Figure 6: RCFT load-deformation prediction: (a) "Nydition" panels; (b) plastered straw bale walls.



## **Conclusions.**

In this paper refinements to Compression-Field Theory have been proposed aimed at accurately predicting the response of low reinforced concrete sandwich panels and plastered straw bale walls subjected to in plane shear and axial load. Experiments showed that the response of such structural walls cannot be described by the actual most relevant shear theories, i.e. MCFT and RA-STM. The proposed refinements deal with the average concrete or cement-stucco plaster tensile stress-strain relation that, from test evidences, appear to sudden degrade after reaching cracking condition. Also a refinement for the model of the embedded bar has been introduced on the base of the proposed tension stiffening model for concrete. The so-introduced refinements allows the RCFT to accurately fit the experimental data and thus to accurately predict the full load-deformation behaviour of the tested thin low-reinforced concrete panels.

## References.

[1] <http://www.nidyon.net>.

[2] <http://ecobuildnetwork.org/>.

[3] Ritter, W., Die Bauweise Hennebique (Construction Techniques of Hennebique), Schweizerische Bauzeitung, Zürich, Feb. 1899.

[4] Mörsch, E., Der Eisenbetonbau (Reinforced Concrete Construction), Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart, West Germany, 1922, 460 pp.

[5] Wagner H.(1929). "Ebene Blechwandträger mit sehr dünnem Stegblech" (Metal beams with very thin webs). Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Vol.20, No.8, Berlin (Germany).

[6] Vecchio F.J. and Collins M.P. (1986). "The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear". Journal of the American Concrete Institute, V.83, No.2, 219-231.


[7] Belarbi A. and Hsu T.T.C. (1994). "Constitutive Laws of Concrete in Tension and Reinforcing Bars Stiffened by Concrete". ACI - Structural Journal, V.91, No.4, 465-474.

[8] Gil-Martín L.M., Hernández-Montes E., Aschheim M.A. and Pantazopoulou S.J. (2009). "Refinements to Compression Field Theory with Application to Wall-Type Structures". ACI - Special Publication No.265, 123-142.

[9] Eurocode 2, (1991). Design of concrete structures. Part 1-1.: General rules and rules for buildings, European Committee for Standardization, Bruxelles, Belgium.

[10] Bentz E.C. (2005). "Explaining the Riddle of Tension Stiffening Models for Shear Panel Experiments". ASCE - Journal of Structural Engineering, V.131, No.9, 1422-1425.

## Fracture mechanics of active material by BEM

E. Rodríguez-Mayorga<sup>1A</sup>, P. Alba<sup>2A</sup>, M. Wünsche<sup>3</sup>, F. García-Sánchez<sup>2B</sup> , A. Sáez<sup>1B</sup>

<sup>1</sup> Department of Continuum Mechanics, Structural Analysis and Soil Engineering. University of Seville.

Av. Reina Mercedes 2, E-41012 Seville (Spain). E-mail: espe@us.es<sup>1A</sup>; andres@us.es<sup>1B</sup>

<sup>2</sup> Department of Civil Engineering. University of Malaga.

C/ Dr. Ortiz Ramos s/n, E-29071 Malaga (Spain). E-mail: pedroalba@uma.es<sup>2A</sup>; fgsanchez@uma.es<sup>2B</sup>

<sup>3</sup> Department of Civil Engineering. University of Siegen.

Paul-Bonatz-Str. 9-11, D-57076 Siegen (Germany). E-mail: wuensche@bauwesen.uni-siegen.de<sup>3</sup>

**Keywords:** active materials, cracks, fracture mechanics, BEM.

### Abstract.

The increasing demand for high performance control design of engineering devices together with recent advances in material science have given rise to the so-called smart or adaptive systems. Intelligent structures, whose dynamics may be monitored and modified by distributed or continuous sensors and actuators, are finding wider applications in many industrial fields like aerospace, aeronautic, automotive, biomedical, and micro- (MEMS) and nano-systems (NEMS) design. Such applications rely on the use of active materials showing multifield coupling properties. These active or smart materials are sensitive to influences from the external environment, adjusting their size or shape to adapt to changes in that environment. For example, piezoelectric (PE) ceramics exhibit electro-mechanical coupling properties: electric current will be excited when the material suffers a mechanical loading and vice versa. Other types of active materials that are receiving increasing attention are the magneto-electroelastic (MEE) multiphase composite materials that exhibit an inherent coupling among the mechanical, electric and magnetic fields.

Understanding and properly modeling the failure mechanisms of these materials is crucial to the advancement of the modern intelligent systems. Fracture mechanics plays therefore a key role, since defects such as cracks will inevitably appear in the material either during manufacturing or in service, leading not only to a decrease in the structural component strength and service life, but also modifying the transfer between mechanical and non-mechanical energy, so that inadequate control actions could be adopted on the basis of the measured electric/magnetic potentials. In this paper we review the application of the Boundary Element Method (BEM) to the numerical simulation and analysis of fracture phenomena in PE and MEE active materials under combined mechanical, electric and/or magnetic loadings.

## 1. Fracture analysis in multi-field materials.

It is well known that materials who exhibit coupling between mechanical, electrical and/or magnetic properties have a high tendency to develop cracks for two main reasons:

- The internal structures of such materials are manipulated in order to get a range of the coupling phenomena high enough for industrial purposes. This manipulation, the so called polling, generates defects in the materials. These defects can be cracks or, otherwise, can initiate cracks during the life of the component.
- Materials showing those coupled behaviors are very brittle, moreover, in the case of MEE ones, they are composed of brittle phases with quite different mechanical properties. Both factors, the brittleness and the coexistence of phases increment the probability to nucleate and develop cracks.

It is, then, evident the importance of characterizing properly fracture parameters in such materials. It is crucial as well the knowledge about the manner in which some boundary conditions of the problems can affect the evolution of the cracks, in particular as electric and magnetic fields are concerned, since these factors can be definitive in the durability of the components.

Taking into account the advantages of the BEM in linear fracture problems, our works started developing a hypersingular approach of the BEM for 2D problems fracture problems involving anisotropic materials (García, et al., 2004). These works extended the ideas presented for isotropic materials in (Sáez, et al., 1995). Soon the formulation was reformulated for piezoelectric materials and recently we have devoted our efforts to MEE ones.

## 2. Hypersingular BEM. Fundamental solutions.

The numerical treatment of a crack assumes that both crack faces coincide at the same position in the space. Depending on the formulation, this idea can imply the mathematical degeneration of the governing equations. Overcoming this difficulty, sub-domains technique, ad-hoc fundamental solutions or hypersingular (or dual, depending on the authors) formulations can be found throughout the literature about BEM.

According to its applicability, the most advantageous of these formulations is, without doubt, the hypersingular one. Nevertheless it requires the computation of hypersingular integrals, i.e., integrals whose kernel tends to zero, inside the integration region, as a function of  $1/x^n$ , with  $n > 1$ , when  $x$  tends to zero. The computation of this kind of integrals is an involved task that consumes most of the efforts in this type of approaches.

In the classical BEM formulation we use the displacement boundary integral equation -DBIE- what, in absence of volume forces, leads to (1).

$$c_{ij}u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})p_j(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad (1)$$

where

- $\mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x})$  are the displacements of the fundamental solution, i.e., the displacement in a generic point  $\mathbf{x}$  when a unit load is actuating at a point  $\xi$  known as source point.
- $\mathbf{p}^*(\xi, \mathbf{x})$  are the tractions of the fundamental solutions, obtained by differentiating the displacements and applying the behavior law of the material.
- $\Gamma$  is the boundary of the domain under consideration.

- $c_{ij}$  is the free term. It is a term computed from the geometry around the source point:  $c_{ij} = 1$  if  $\xi$  is a point inside the domain or  $c_{ij} = 1/2$  if  $\xi$  is a smooth point of  $\Gamma$ .
- $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  and  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  are the unknowns of the problems. When they are computed all over the boundary they can be obtained for every point in the domain applying Eq. (1).

In a general case  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  and/or  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  or any of their components, are known at different zones of the boundary. Hence the discretization of the boundary, and the subsequent application of Eq. (1) at every point of the boundary, should be enough to generate a linear system of equations to determine tractions or displacements where they are not known.

Once this step has been fulfilled, the solution for the whole domain can be obtained applying again Eq. (1) at any point of the domain.

As it has been stated, in fracture problems the coincidence of the crack faces gives rise to a degeneracy of the problem because the equations resulting from application Eq. (1), at both faces, are the same. To solve this problem, different equations must be used over each face of the cracks (Hong H., 1988; Watson, 1896).

By means of derivation of Eq. (1), and the subsequent application of the behavior law of the material, a new set of equations can be applied over one crack face: the tractions boundary integral equations -TBIE-, Eq. (2).

$$p_j(\xi) + \int_{\Gamma} s_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} d_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma, \quad (2)$$

where  $d_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})$  and  $s_{ij}^*(\xi, \mathbf{x})$  come, respectively, from the derivatives of displacements and tractions of the fundamental solution.

In the hypersingular formulation the DBIE -Eq. (1)- is applied over the external boundaries and one of the crack faces, while the TBIE -Eq. (2)- is considered over the other crack face. Alternatively, if the crack opening displacements (COD), instead of the displacements, are used as unknowns over the cracks, the DBIE can be used over the external boundaries and TBIE over just one of the crack faces. The last one is the formulation developed by the authors of the present work (García, et al., 2004).

At any event, it is clear that fundamental solutions play an essential role in the described process. The fundamental solutions used for anisotropic, piezoelectric and MEE behavior laws have similar mathematic structures.

Simplifying drastically, for the sake of brevity, we can state that for the analyzed cases, i.e., anisotropic, piezoelectric and MEE; the displacements have the form showed in Eq. (3).

$$\mathbf{u}^*(\xi, \mathbf{x}) \propto \mathbf{\Lambda}_1 \ln(z_x - z_\xi) \quad (3)$$

In Eq. (3),  $\mathbf{\Lambda}_1$  is a tensor containing material properties information,  $z_x - z_\xi$  is the distance, in the complex plane, of the complex counterparts of the source and field points. The way in which the real plane is mapped to the complex one is, as well, related with the material properties.

It should be noticed that for piezoelectric and MEE problems the displacements and tractions vectors contain electric and/or magnetic analogous variables.

At any event, the key question is that when the integration is computed over the element containing the source point the kernel of its integral –see Eq. (1)- is weakly singular, i.e., tends to infinite like  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x$ . Hence the rest of kernels in Eqs. (1) and (2) have a higher order of singularity, as follows:

$$\mathbf{p}^*(\xi, \mathbf{x}) \propto \frac{\Lambda_2}{z_x - z_\xi}; \quad \mathbf{d}^*(\xi, \mathbf{x}) \propto \frac{\Lambda_3}{z_x - z_\xi}, \quad (4)$$

lead to strong singularities, i.e., tends to infinite like  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$ ; while the kernels

$$\mathbf{s}^*(\xi, \mathbf{x}) \propto \frac{\Lambda_4}{(z_x - z_\xi)^2}, \quad (5)$$

are hypersingular because tend to infinite like  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2$ .

In Eqs. (4) y (5) the tensors  $\Lambda_i$  with  $i = 1, 2, 3, 4$ ; are tensors related with material properties.

In order to compute these integrals two approaches have been implemented

- A collocation method using discontinuous quadratic elements supported by a regularization technique that allows shifting the singularities to integrals with known analytical solution. In this way, only regular integral must be computed numerically, see (García-Sánchez, et al., 2005) for details.
- A Galerkin method, using continuous elements, that permits analytical integration even over the hyperingular kernels as detailed in (Wünsche, et al., 2009).

In both cases special shape functions are used over crack tip elements in order to capture properly the behavior of the displacements in this zone. By doing so, the computations of intensity factors for stresses, electrical displacements and magnetic induction can be made in a simple but very accurate manner.

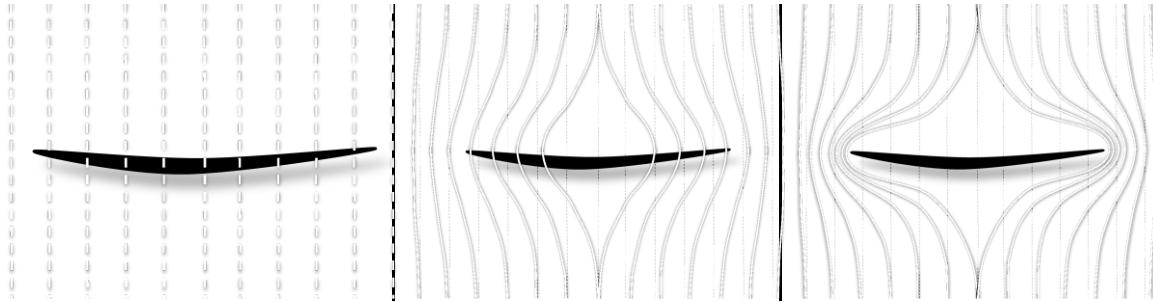
### 3. Crack faces boundary conditions.

From a mechanical point of view the cracks may be considered as traction free and, hence, the formulation of the problem results linear; or the possible contact between crack faces may be included in the model, thus leading to a mechanical nonlinear boundary condition.

From an electrical or magnetic perspective, the consideration of the crack faces boundary conditions (CFBC) is not so clear. They can be formulated in a linear or no linear manner. Both have been used in the literature since this problem has attracted the attention of many researchers.

In the linearized formulation two extreme cases can be considered: permeable or impermeable cracks. The first one consists in the assumption that the presence of the crack does not distort either the electrical or the magnetical fields. The last one assumes the contrary consideration: those fields are not able to cross the crack.

A more realistic CFBC is the so-called semipermeable that consider that the field cross the crack depending on the electrical/magnetic properties of the medium inside the crack. This consideration makes the formulation of the problem no linear. Those CFBCs are depicted in figure 1 .



**Figure 1.** Sketch of electric/magnetic CFBCs. Permeable (left), impermeable (right) and semi-permeable (center).

#### 4. Dynamic Fracture.

The dynamic fundamental solutions for isotropic and piezoelectric behaviors were presented, respectively, in (Wang & Achenbach, 1994) and (Wang & Zhang, Ch., 2005). Later, the one for MEE materials was presented in (Rojas-Díaz, et al., 2008).

Different approaches have been developed by the authors of this work, to get frequency-domain and time-domain results.

In (Sáez, et al., 2006) responses for different cracks under time-harmonic waves loading were presented as a function of the exciting frequency. The validation of the approach was done, with excellent results, by mean of time domain results obtained, in that work, via frequency domain results and the subsequent application of the FFT algorithm.

In (García-Sánchez, et al., 2008) the hypersingular BEM is used, together with Lubich's quadratures, in order to get time domain results using a Lapace-domain fundamental solution. The results of that work showed a high stability of this formulation with results quite independent on the used time step. Later in (Wünsche, et al., 2009) this formulation was compared with another one based on a Galerkin approach for spatial discretization and direct time integration, which is more advantageous in terms of computational costs.

In (Rojas-Díaz, et al., 2010; Rojas-Díaz, et al., 2009; Rojas-Díaz, et al., 2011) dynamic fracture of MEE materials were analyzed. In the first two works the analysis was devoted to frequency-domain. In the paper of 2009 a study of interaction cracks analyzes how the presence of close cracks affects the behaviors of the intensity factors with exciting frequency. In the last paper, the hypersingular BEM and Lubich's quadratures have been successfully applied to the transient analysis of fracture in MEE materials.

All the above referenced work have been developed assuming linear hypothesis. In the very recent works of the authors, this hypothesis has been reconsidered, assuming semipermeable electromagnetic crack face boundary conditions. The motivation of this no linear study is double: the consideration the electric or magnetic contribution of the medium present in the crack, the consideration of contact possibility between crack-faces during the transient period. In (Wünsche, et al., 2011; Wünsche, et al., 2012; Rojas-Díaz, et al., 2012) this analysis can be observed in detail and important conclusions can be drawn from them.

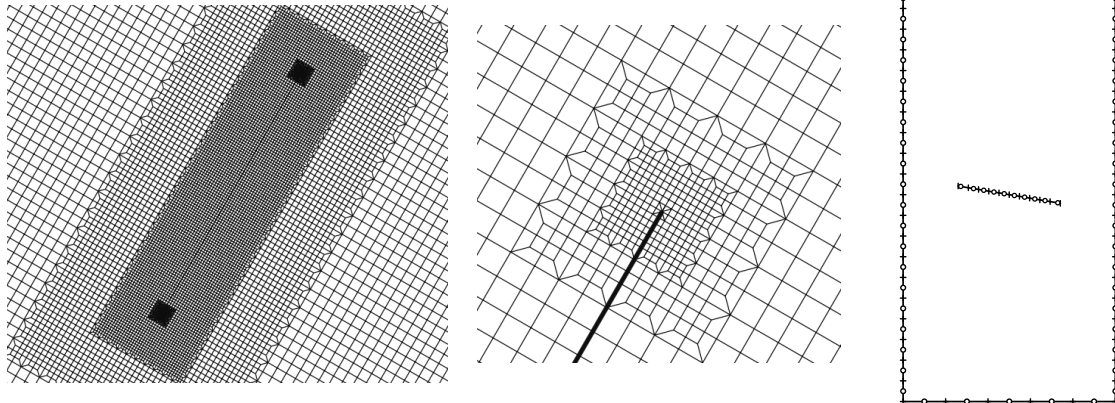
#### 5. Some numerical results.

Next some representative results obtained using hypersingular BEM for static and dynamic fracture problems over anisotropic and MEE materials are showed.

### 5.1. Experimental validation.

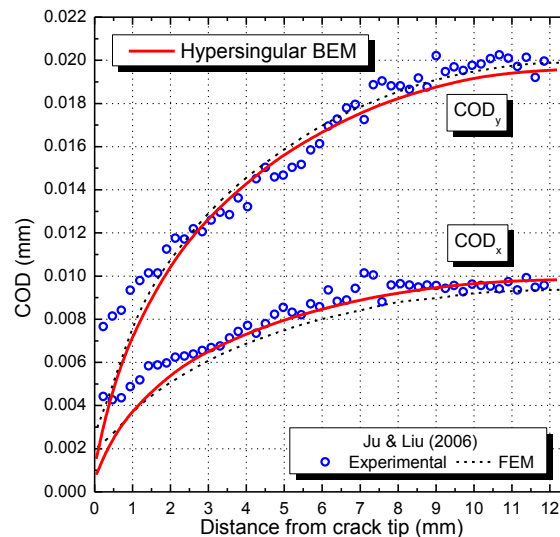
Experimental results of COD in a  $[0_3/90/0_3/90/0_3/90/0_3]$  12 K-carbon-fiber/epoxy composite plate with an inclined central crack were presented in (Ju & Liu, 2007). A finite element computation was, as well, realized for comparison purposes in this work. This problem has been analyzed by the authors using the hypersingular BEM.

Figure 2 shows the FEM mesh (left and center) used in (Ju & Liu, 2007) in comparison with the one, made up of 60 quadratic elements, used in hypersingular BEM (right).



**Figure 2.** Left: FEM mesh used in (Ju & Liu, 2007). Center: Mesh detail around tip crack. Right: BEM mesh used in this work in order to apply the hypersingular approach.

In figure 3 the excellent agreement between our results and the experimental ones can be observed. The saving of computational cost is clear.

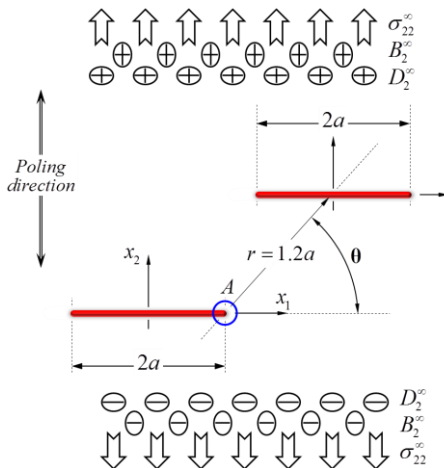


**Figure 3.** Experimental and numerical results for crack opening displacements in a  $[0_3/90/0_3/90/0_3/90/0_3]$  12 K-carbon-fiber/epoxy composite plate with an inclined central crack.

### 5.2. Interaction cracks in a MEE solid under static loads.

Two parallel cracks with different positions are analyzed under combined mechanical, electrical and magnetic loads, as shown in figure 4 left. The used material is a composite made of  $BaTiO_3$  as piezoelectric phase and  $CoFe_2O_4$  as magnetoelastic one. Its properties, for a volume fraction of 50%, appear in figure 4 right.





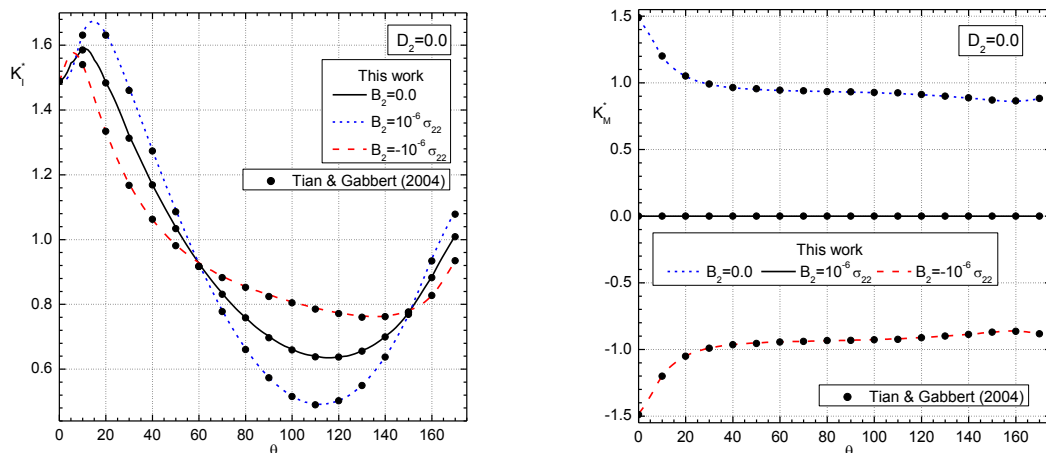
**BaTiO<sub>3</sub>-CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>**

$C_{11} = 226.0 \text{ GPa}$ ,  $C_{12} = 125.0 \text{ GPa}$ ,  $C_{22} = 216.0 \text{ GPa}$ ,  
 $C_{66} = 44.0 \text{ GPa}$   
 $e_{16} = 5.8 \text{ C/m}^2$ ,  $e_{21} = -2.2 \text{ C/m}^2$ ,  $e_{22} = 9.3 \text{ C/m}^2$   
 $h_{16} = 275.0 \text{ N/(Am)}$ ,  $h_{21} = 290.0 \text{ N/(Am)}$ ,  $h_{22} = 350.0 \text{ N/(Am)}$   
 $\epsilon_{11} = 5.64 \text{ C}^2 / (\text{GNm}^2)$ ,  $\epsilon_{22} = 6.35 \text{ C}^2 / (\text{GNm}^2)$   
 $\gamma_{11} = 297.0 \text{ N/(MA}^2)$ ,  $\gamma_{22} = 83.5 \text{ N/(MA}^2)$   
 $\beta_{11} = 0.005367 \text{ N/(GAV)}$ ,  $\beta_{22} = 2.7375 \text{ N/(GAV)}$

**Figure 4.** Experimental and numerical results for crack opening displacements in a  $[0_3/90/0_3/90/0_3/90/0_3]$  12 K-carbon-fiber/epoxy composite plate with a inclined central crack.

Numerical results presented in (Tian & Gabbert, 2004) are used as reference. Figure 5 left shows the normalized<sup>1</sup> stress intensity factors (SIF) and magnetic induction intensity factors (right) computed at tip A as a function of the relative positions of the cracks, governed by the angle  $\theta$ .

The agreement between our results and the ones in the reference is excellent.



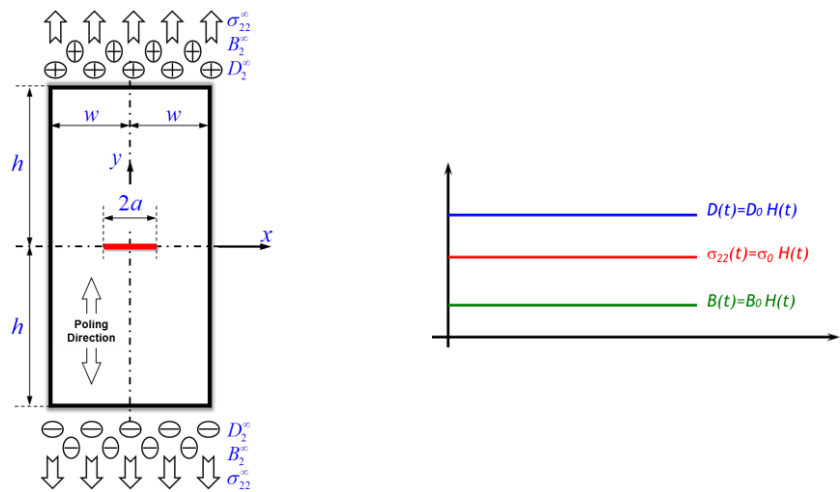
**Figure 5.** Results for crack opening displacements in a  $[0_3/90/0_3/90/0_3/90/0_3]$  12 K-carbon-fiber/epoxy composite plate with a inclined central crack.

**5.3. MEE plate with central straight crack under impact loading.**

Next the transient evolution of the intensity factors in a MEE plate with a straight crack in the center is analyzed, figure 6 outlines this case. The considered loads are mechanical, electrical and magnetic impacts, i.e., loads varying with time as a Heaviside function as shown in figure 6 right.

<sup>1</sup> Throughout the paper intensity factors for an isolated crack in an unbounded domain are used as normalization factors.

For the sake of brevity only results for SIF as a function of the normalized time<sup>2</sup> are next presented. To the best knowledge of the authors, no previous results can be found in the literature for this problem.

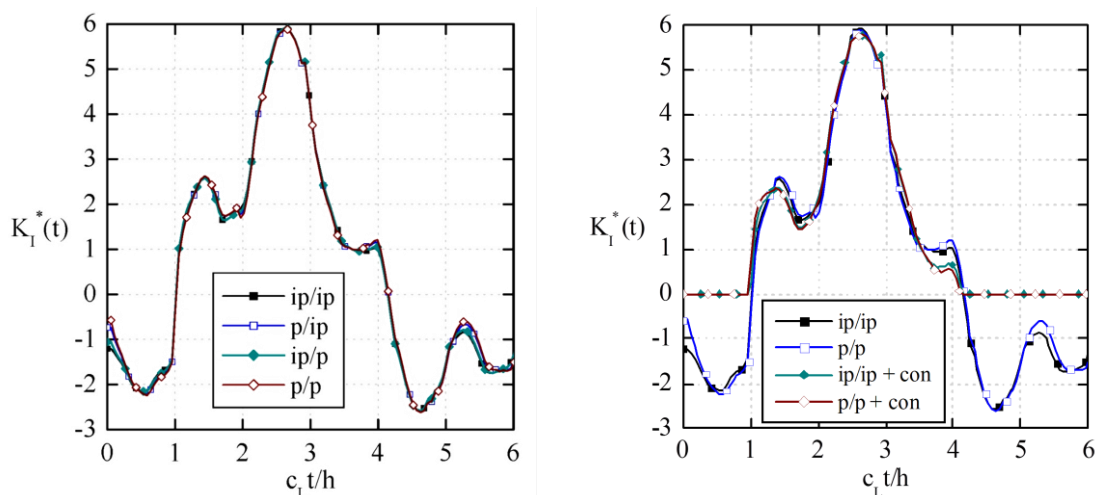


**Figure 6.** Sketch of rectangular cracked plate under combined impacts.

Analyzing this problem, linear and no linear considerations have been made. Magnetic and/or electric, permeable, impermeable and semipermeable CFBCs have been considered. Likewise the influence of the contact between crack faces has been presented.

Figure 7 left shows that the consideration of permeable or impermeable crack faces has an almost negligible influence over mode-I SIF. This parameter has a bigger influence over electric and magnetic intensity factors, see (Wünsche, et al., 2012) for details.

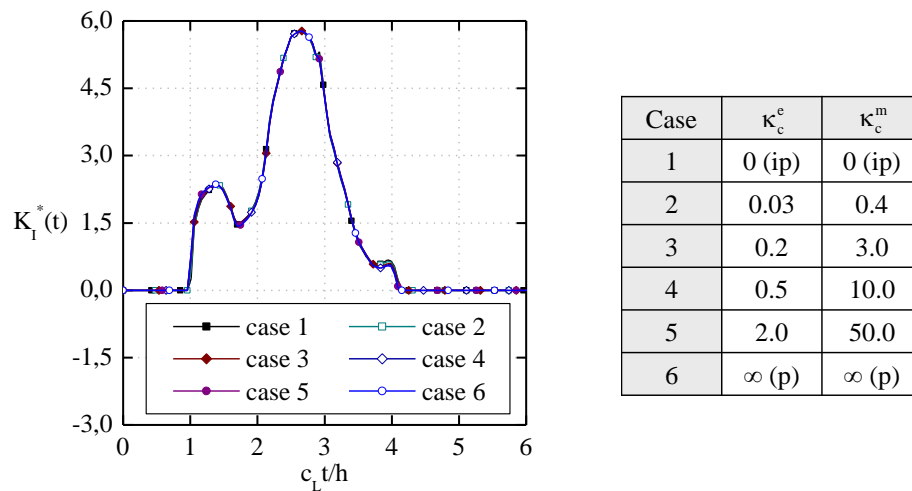
On the right, in figure 7, the influence of contact considerations can be observed. The influence is clear in the zones with negative mode-I SIF if this consideration is not taken into account. Nevertheless, its influence in the rest of the transitory period is not very important and almost negligible in the maximum observed SIF overshoot.



**Figure 7.** Left: Normalized mode-I SIF vs. normalized time considering permeable (p) and impermeable (ip) electrical and magnetic CFBC. Right: Influence of the contact CFBC (con).

<sup>2</sup> The time spent for primary waves crossing half plate is used as normalization factor.

Figure 8 shows the poor influence of the permeability of the medium inside the crack over the mode-I SIF. In (Wünsche, et al., 2012) the bigger influence over the rest of the intensity factors can be observed.



**Figure 8.** Influence of the permeability  $\kappa$  of the medium inside the crack. The values varying between 0 and  $\infty$ , i.e., between impermeable and permeable CFBC.

## 6. Conclusions.

The hypersingular formulation of the BEM has been proven as general, efficient and accurate in the analysis of linear and non linear fracture in anisotropic, piezoelectric and MEE 2D problems.

The numerical troubles dealing with no regular integrals can be overcome by means of a regularization process using a collocation method for the spatial discretization without restrictions about the shape of the elements or using analytical integration over linear elements using a Galerkin formulation.

In dynamics of fracture under harmonic loads, both above mentioned methods have shown high reliability and precision.

The dual formulation in combination with direct time integration or Lubich's quadratures lead to a very powerful numerical tool for the study of transient problems as, for example, how the application of an electrical current, or a magnetic field, influences the overshoot in the SIFs.

Including non linear effects has made possible to observe, for instance, as the overshoot in the SIFs has a negligible dependence of the medium inside of crack. Of course this consideration reverses if we observe the overshoot of electrical or magnetic intensity factors although it is not so clear their influence in the crack growth.

In the same way the maximum of this parameter shows low dependence of the correctness of contact considerations for the analyzed cases.

## Acknowledgments

This work is supported by the Spanish Ministry of Science and Innovation under project DPI2010-21590-C02-02 and by the Junta de Andalucía under project P09-TEP-5054. The financial support is gratefully acknowledged.

## 7. Bibliografía

- [1] Wang, C.-Y. & Achenbach, J., 1994. Elastodynamic fundamental solutions for anisotropic solids. *Geophysics journal international*, Volume 118, pp. 384-392.
- [2] García, F., Sáez, A. & Domínguez, J., 2004. Traction boundary elements for cracks in anisotropic solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 28, p. 667–676.
- [3] García-Sánchez, F., Sáez, A. & Domínguez, J., 2005. Anisotropic and piezoelectric materials fracture analysis by BEM. *by BEMComputers and Structures*, Volume 83 , p. 804–820.
- [4] García-Sánchez, F., Zhang, Ch. & Sáez, A., 2008. 2-D transient dynamic analysis of cracked piezoelectric solids by a time-domain BEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 197, p. 3108–3121.
- [5] Hong H., C. J., 1988. Derivations of integral equations of elasticity. *Journal of engineering mechanics, ASCE*, Volume 114, pp. 1028-1044.
- [6] Ju, S. & Liu, S., 2007. Determining stress intensity factors of composites using crack opening displacement. *Composite Structures*, Volume 81, p. 614–621.
- [7] Rojas-Díaz, R., Denda, M., García-Sánchez, F. & Sáez, A., 2012. Dual BEM analysis of different crack face boundary conditions in 2D magnetoelastoelectroelastic solids. *European Journal of Mechanics A/Solids* , Volume 31, pp. 152-162.
- [8] Rojas-Díaz, R., García-Sánchez, F. & Sáez, A., 2010. Analysis of cracked magnetoelastoelectroelastic composites under time-harmonic loading. *International Journal of Solids and Structures*, Volume 47 , p. 71–80.
- [9] Rojas-Díaz, R. et al., 2011. Fracture analysis of plane piezoelectric/piezomagnetic multiphase composites under transient loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 200, p. 2931–2942.
- [10] Rojas-Díaz, R., García-Sánchez, F., Sáez, A. & Zhang, Ch., 2009. Dynamic crack interactions in magnetoelastoelectroelastic composite materials. *International Journal of Fracture*, Volume 157, pp. 119-130.
- [11] Rojas-Díaz, R., Sáez, A., García-Sánchez, F. & Zhang, Ch., 2008. Time-harmonic Green's functions for anisotropic magnetoelastoelectroelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Volume 45, p. 144–158.
- [12] Sáez, A., Gallego, R. & Domínguez, J., 1995. Hypersingular quarter-point boundary elements for crack problems. *International journal of numerical methods in engineering*, Volume 38, pp. 1681-1701.
- [13] Sáez, A., García-Sánchez, F. & Domínguez, J., 2006. Hypersingular BEM for dynamic fracture in 2-D piezoelectric solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 196, p. 235–246.
- [14] Tian, W.-Y. & Gabbert, U., 2004. Multiple crack interaction problem in magnetoelastoelectroelastic solids. *European Journal of Mechanics A/Solids*, Volume 23, pp. 599-614.
- [15] Wang, C.-Y. & Zhang, Ch., 2005. 3-D and 2-D dynamic Green's functions and. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 29, p. 454–465.
- [16] Watson, J., 1896. Hermitian cubic and singular elements for plane strain. In: Banerjee & Watson, eds. *Developments in boundary element methods 4*. Barking, U.K.: Elsevier applied science publishers.

- [17] Wünsche, M., Sáez, A., García-Sánchez, F. & Zhang, Ch., 2012. Transient dynamic crack analysis in linear magnetoelastic solids by a hypersingular time-domain BEM. *European Journal of Mechanics A/Solids*, Volume 32, pp. 118-130.
- [18] Wünsche, M. et al., 2009. On two hypersingular time-domain BEM for dynamic crack analysis in 2D anisotropic elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 198, p. 2812–2824.
- [19] Wünsche, M. et al., 2011. Dynamic crack analysis in piezoelectric solids with non-linear electrical and mechanical boundary conditions by a time-domain BEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 200, p. 2848–2858.



## Finite Element modelling of historical masonry constructions

M. Cámara<sup>1A</sup>, V. Compán<sup>1B,#</sup>, E. Rodríguez-Mayorga<sup>1C</sup>

<sup>1</sup>Department of Continuum Mechanics, Structural Analysis and Soil Engineering. University of Seville.  
Av. Reina Mercedes 2, E-41012 Seville (Spain), E-mail: mcamara@us.es; compan@us.es; espe@us.es

**Keywords:** masonry, finite element analysis, plasticity, shells, German Baroque.

### Abstract.

There is a growing interest in developed societies towards preservation of heritage in general and historical masonry structures in particular. Characterizing the structural behaviour of ancient masonry structures is a complex task: we shall mention here the facts that normally one finds uncertainties in the material properties and difficulties in assessing the structural conditions or constructive process with limited ability to inspect the interior of the structure. Furthermore, such constructive process may influence the structural behaviour to an extent that identifying the load paths may not be obvious.

One of the valuable tools that come into play when assessing the structural behaviour of ancient masonry structures is nonlinear finite element (FEM) modelling. Previous works by different authors have proven FEM as a general and efficient method to approximate the load bearing and displacement capacity of historical masonry structures. In this paper we present several 3-D FEM models developed to analyze masonry shells of German Baroque. The use of double curved single layer domes allowed these Baroque architects to build masonry shells thinner than never before, with domes as thin as twenty centimetres with or without ribs. Vaults composed by sectors of sphere and cylinder give rise to a varied show of complex traces never seen after Muslim domes. The FEM numerical models are built with ABAQUS, assuming that masonry is a homogeneous material with corresponding appropriate properties and using an element that includes a smeared crack analogy for cracking in tension zones and a plasticity algorithm that accounts for the possibility of crushing in compression zones. Such element is intended for the analysis of concrete structures but it may be extended to the analysis of masonry structures satisfactorily, as previous studies reveal. Valuable conclusions can be drawn from the obtained FEM results.

### INTRODUCTION

In the 18th Century, and mainly in Central Europe, the basis in the design of ecclesiastical buildings allows the research in the field of double curvature surfaces to span great spaces. The result was amazing, because masonry roofs with low thickness and able to span more than 14 meters with a very low bending were built.

The definition and the building of these new forms were mainly possible due, on one hand, to the great knowledge about the woodwork, a knowledge that allows to build complex formworks, and, on the other hand, the great experience on masonry constructions, as a legacy of previous generations.

We present here the Chapel of the Residenz in Würzburg- Germany (1720) [1], (Fig.1). It was designed by Balthasar Neumann [3]. It is spatially organized by the composition of three longitudinal cells connected through another two transversal ones. The intersection of these cells is solved by a warped rib that is, for its part, the intersection between two cylinders with different





Fig.1. View from the inside of the Chapel of the Residenz in Würzburg [2].

diameters. The vaults are 30 centimeters-thin brick masonry surfaces, developed only in a single layer, and are reinforced in their base increasing the thickness in 15 centimeters. They also present secondary radial nerves with a section of 45x45 cm that are built at the same time that the vaults do. The surfaces between these nerves are single 30cm-thin shells without any kind of reinforcement (Fig.2).

One of the most attracting aspects of these buildings is the great slenderness of the walls, 15.2m in height, 1.5m in thickness and with holes in more than the 50% of the façade surface.

For the structural analysis, we have chosen a tridimensional volumetric model to detect the stress distribution as precisely as possible. The finite elements model has been made “as it”, that is, we have removed everything that was ornamental and nothing that was structural. The model has been made using planimetry of the building checked in situ (Fig. 3 y 4).

Scientific community has made great efforts to determine a constitutive model that could better represent the structural behavior of masonry. The research by Paulo Lourenço in his PhD (1995) is one of the most widespread studies [4]. But now, for more general analysis, constitutive models that were created to simulate non-linear concrete are used [5]. It has been demonstrated



Fig.2. The extrados of the construction of the Chapel of the Residenz in Würzburg.

that these models are valid to simulate both, brick and stone masonries, because, on one hand, they present an elastic and linear behavior in tension until fracture occurs (brittle fracture, in this case) and, on the other hand, an elastoplastic behavior with ductile fracture in compression. In this sense, we can quote the analysis of the Santa Maria all’Impruneta basilica [6].



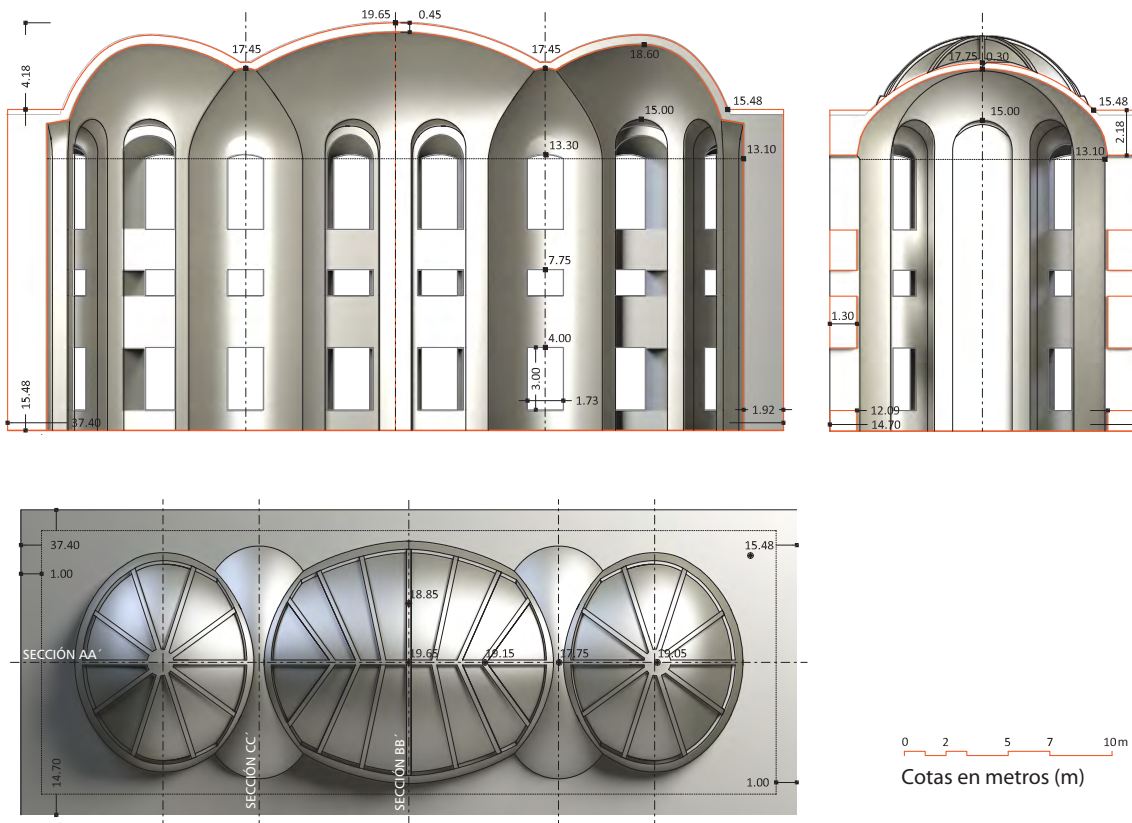


Fig.3. Elevation and longitudinal and transversal sections.

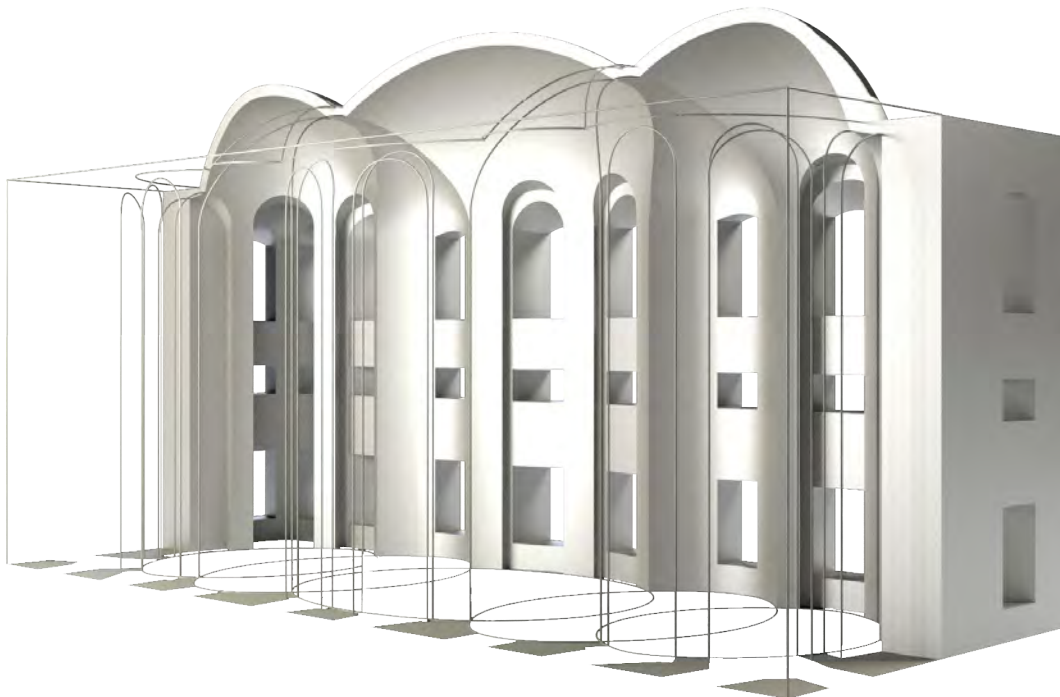


Fig.4. 3D model of the geometry for the application of the Finite Element Method.

For our structural analysis, we have used ABAQUS v.6.9-1 as computer application , and the “Concrete Damage Plasticity” (Fig. 5 y 6) as the material for the model [7], [8].

Mechanical properties of brick masonry present a great uncertainty level due to multiple factors [9]. Their determination is especially difficult for historical buildings, where structural tests of the material are hard to be achieved. In our case, we have opted to check through model material properties proposed by another authors [10], [11].

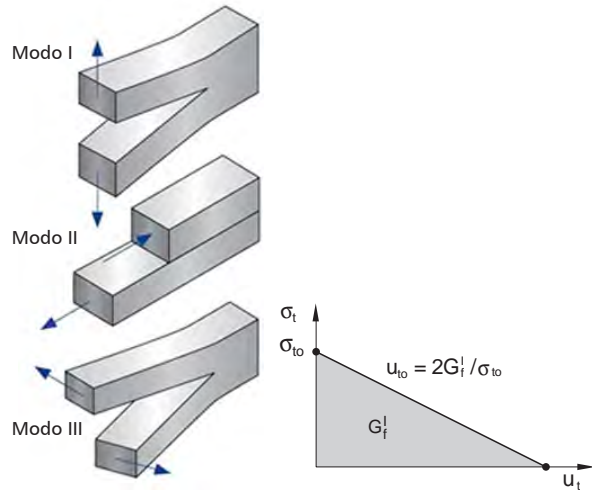
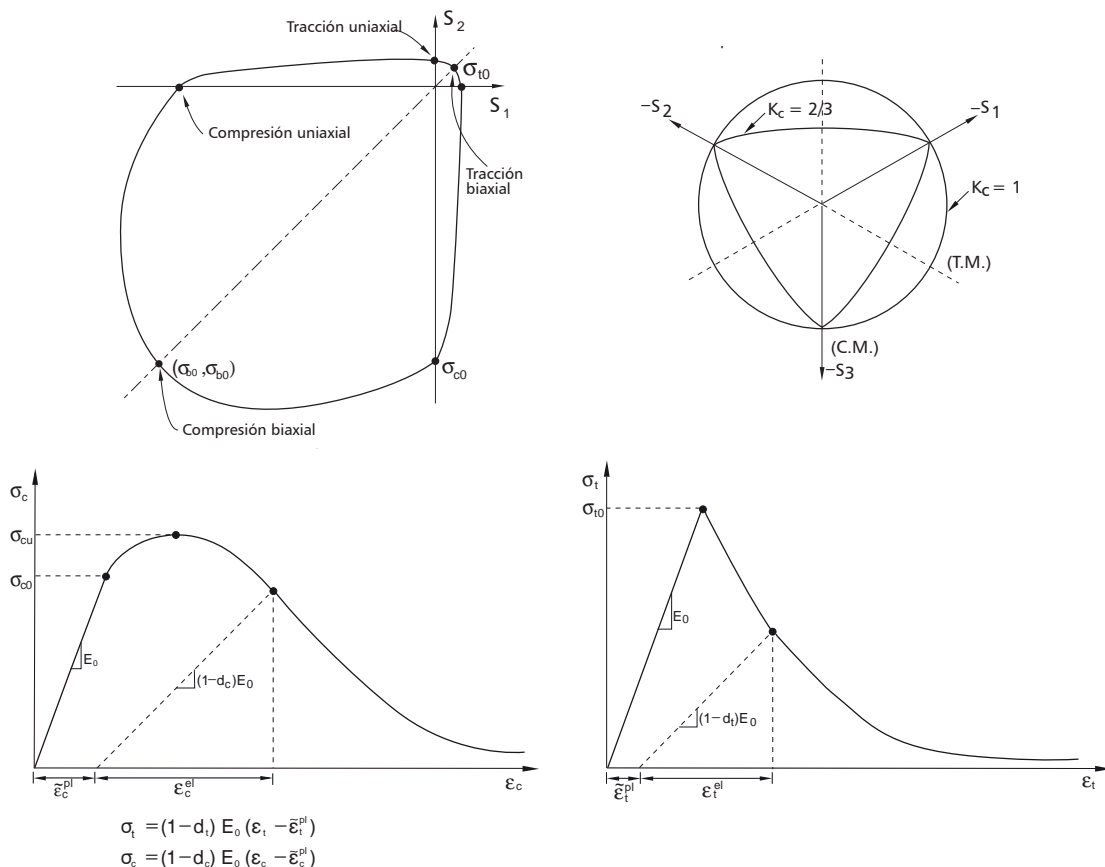


Fig.5. Definition of fracture energy.

Material properties (Fig. 8) are determined from the compression resistance ( $f_c$ ), establishing its modulus of elasticity as  $E=1000 f_c$  and the tension resistance as  $f_t= 0.1 f_c$  [12].

We have made a study of sensibility (Fig. 7), through which we demonstrate that tension resistance values lower than 0.2 MPa are not acceptable, a limit value a little higher than that more conservative and commonly used of 0.1 MPa [6], [13].

Fig.6. Constitutive model: Concrete Damaged Plasticity.



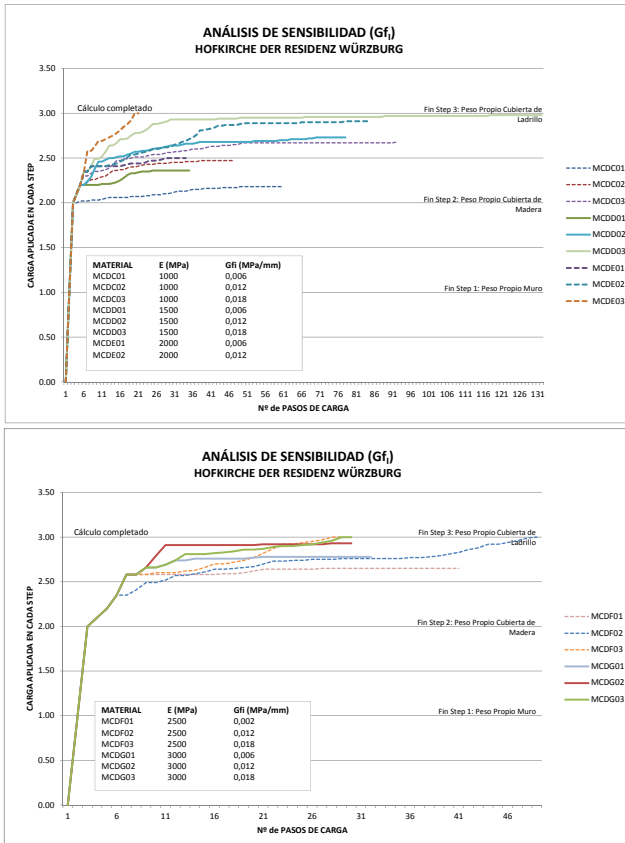


Fig.7. Sensibility analysis of the convergence.

Fig.8. Properties of the material.

ANALYSIS A1	$\rho$	E	$\nu$	$f_c$	$f_t$	$G_f$
	(Kg/m <sup>3</sup> )	(N/mm <sup>2</sup> )		(N/mm <sup>2</sup> )	(N/mm <sup>2</sup> )	(N/mm <sup>2</sup> /mm)
	1700	2,00E+9	0,16	2	0.2	0.018

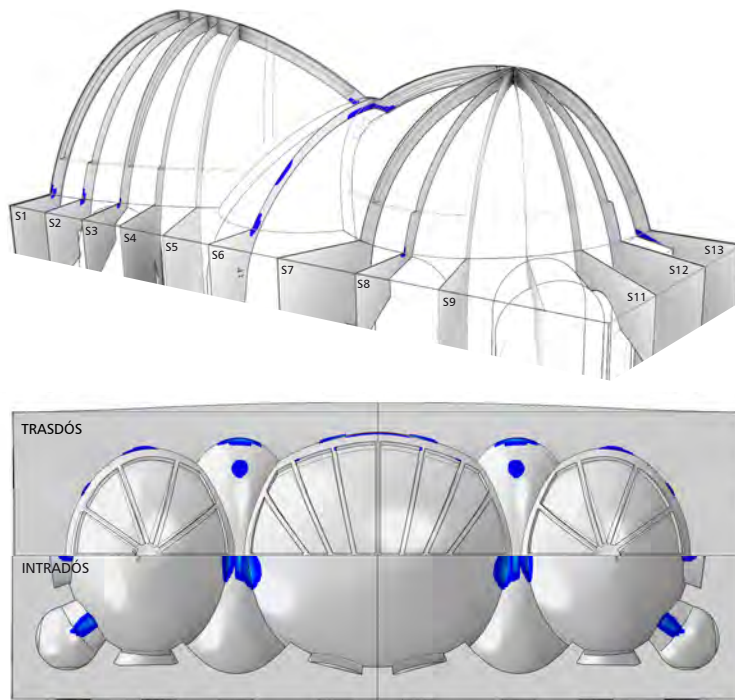


Fig.9. ANALYSIS A1. Equivalent plastic deformation.

The analysis of the equivalent plastic deformation demonstrates that plasticity only occurs because of tension stresses. The most penalized zones are the transversal vaults, as we show in Fig. 9, S6. These zones present the greatest damage and signs of global failure, due to the beginning of five plastic hinges.

However, this damage that the structural analysis reflects, has no corresponding to real fractures of the masonry. The masonry is intact. This is due to the constructive solution: bricks arranged like a fish spine with more mortar (so a more plastic material at these zones) and with a central line that allows the redistribution of tension stresses and turns them into compressions to the warped ribs, avoiding that the failure could spread (Fig. 16).

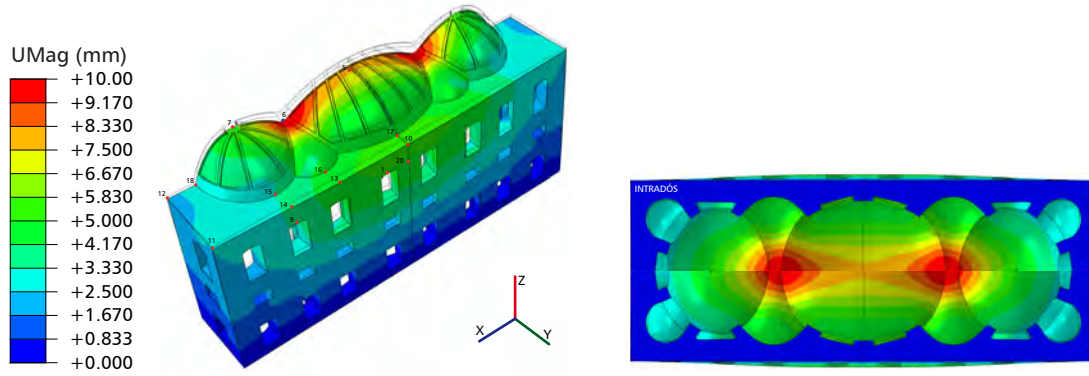


Fig.10. ANALYSIS A1. Maximum displacements UMag (mm).

On the other hand, the maximum vertical displacements (Figs.10 y 11) are situated at the keystone of the transversal vaults and the maximum horizontal ones are at the base of the main vault. The position of these displacements matches with the lessest stiff zones, a low stiffness due to either, the form (like in the case of the transversal vault) or the great slenderness (like occurs at the zone of the walls).

Regarding to the elastic and linear analysis, the increasing of the displacements due to the tensional redistribution is not substantial in this example.

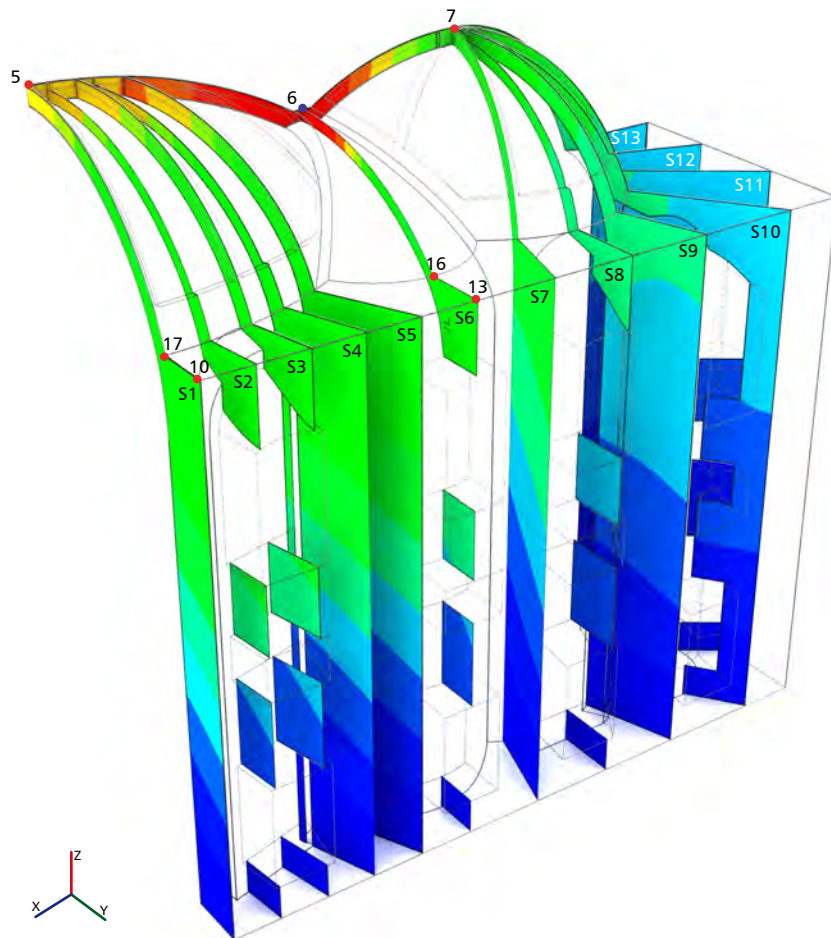


Fig.11. ANALYSIS A1. Maximum displacements UMag (mm). Transversal Sections.



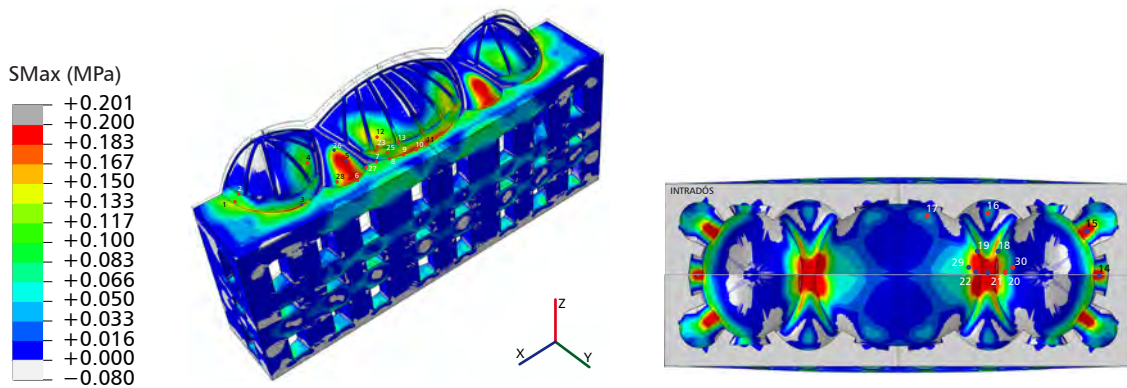


Fig.12. ANALYSIS A1. Maximum principal tension SMax (MPa).

As we can see in the (Fig. 12) , maximum principal stresses, or tension stresses (SMax), haven't got a uniform distribution. In the main vault, maximum tensions are produced in the extrados, while in lateral ones they are produced in the intrados. On other hand, and with an elastic and linear analysis, the transversal vaults are in tension in both, the extrados and the intrados, with values around 0.3MPa. Attract also our attention tensions through meridians at zones closer to the base of the vaults, opposite to the structural behavior of conventional hemispheric domes, whose tensions follow their parallels.

As a first approximation to the results obtained with a non-linear analysis (Fig.13), we can appreciate that the tension surfaces have increased, but with a relatively low level of failure. The resistance loss is now concentrated at the base of the main vault and the transversal ones. The tension surface is bigger at the keystone of the transversal vaults. This surface doesn't get the failure, with tension values of 0.2MPa.

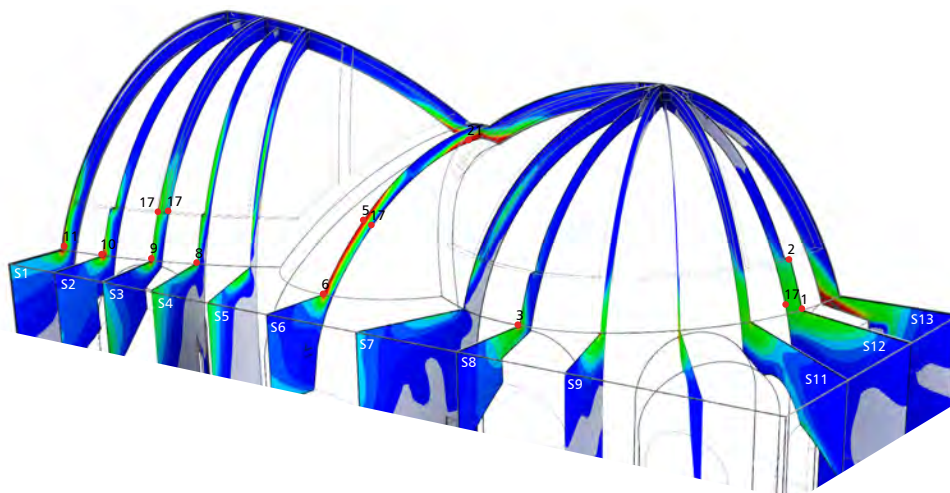


Fig.13. ANALYSIS A1. Maximum principal tension SMax (MPa). Detail of the roof.

According the obtained results, we can confirm that the transversal vault is the responsible of the maintenance of the stability of the whole. It is the most sensitive to both, changes in the form and in the material properties. This is the zone in which the tension stress level has been the most modified: the 110% in the extrados and the 30% in the intrados. The rest of the model has very low stress level, specially the walls.

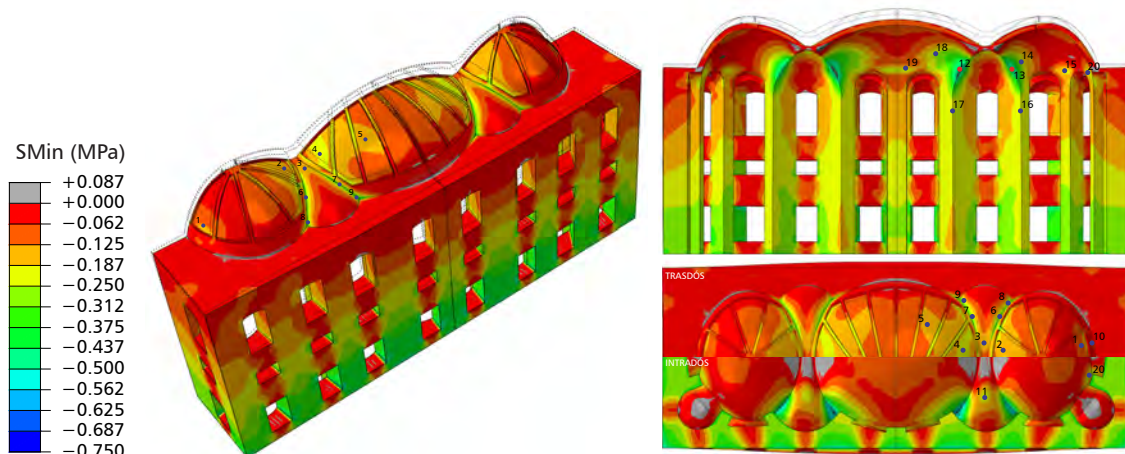


Fig.14. ANALYSIS A1. Maximum principal compression SMin (MPa).

Regarding compressions, we must tell that there are no notable values. We find approximate values of 0.8 MPa (Fig.14, 15) and, therefore, they are values away from the estimate resistance  $f_c=2.0$  MPa. More interesting are the ways that this kind of stresses follows to the foundations. Compression isostatic lines tend to go to the warped ribs. We can even see that the main vault has practically no compression isostatic lines through its meridians.

Stress transferring to foundations occurs through the pilaster walls, with values that aren't greater than 0.3 MPa. There is almost no stress transferring through the lintels. If we had made a study in which we had included horizontal loads (we only work here with gravitational ones), lintels would have worked as bracing elements.

Maximum compressions in the main vault are situated in its keystone, opposite to the case of the lateral ones, in which maximum compressions are mainly at their base. So, we can determine that the behavior of the whole is close to two vaults whose surfaces largely rest on two warped ribs like a structural skeleton. The only zone whose structural behavior is close to a typical hemispherical dome is the most remote zone from the transversal vault, due to its situation: far from the most deformable zone of the roof and close to the most rigid zone of the walls. Tension stress distribution has generated a notable increase of compressions (until the 7%) at the zones that we cited before. Anyway, the global stress state is not critical since the stresses of the structure are so many lower than its estimate resistance of 2.0 MPa.

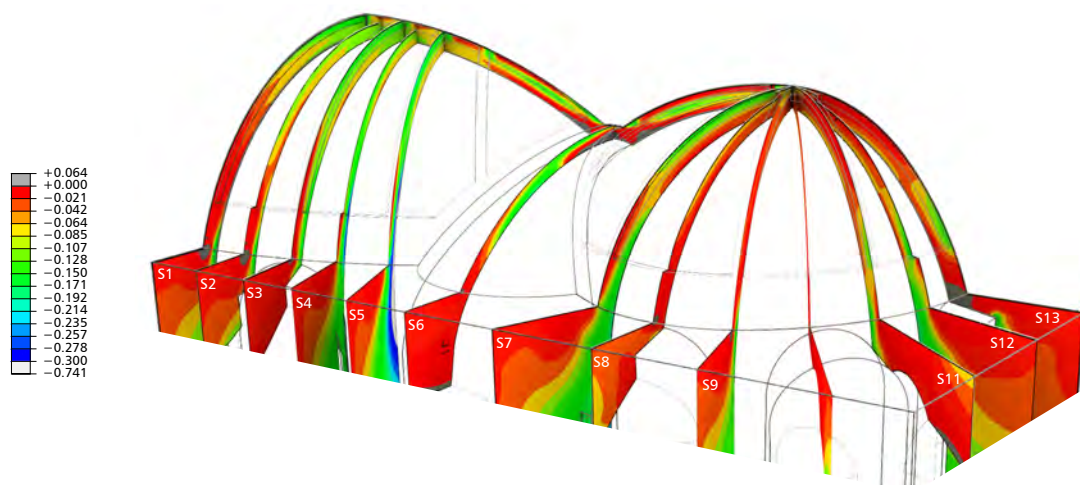


Fig.15. ANALYSIS A1. Maximum principal compression SMin (MPa). Detail of the roof.

## CONCLUSIONS

As a conclusion, we can determine that the structural model and the material used for it are valid and reflect the real behavior of the building of the case study. This can only be questioned at the base of the transversal vaults, where appear high levels of tension that could be reflected in fractures in the masonry. However, it is solved by a specific constructive solution that makes these problematic zones more plastic.



Fig.16. Detail of the construction: (a) Bricks arranged like a fish spine in the transversal vaults, (b) Connection between one of the lateral vault and the wall.

## REFERENCE

- [1] Norberg- Schulz, C. 1993 Kilian Ignaz Dientzenhofer y el barroco bohemio. Oikos Taus. 84-0809-9
- [2] Christian F. Otto. 1979 Space into Light. MIT Press Series. 0-262-15019-0
- [3] Wilfried Hansmann. 2003 Balthasar Neumann. Dumont. 3-8321-7167-3
- [4] Lourenço, P.B. 1996 Computational Strategies for Masonry Structures. Delf University Press.
- [5] Willam KJ, Warnke ED. 1975 Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete. Proceedings of international association for bridge and structural engineers (ISMES), Bergamo, Italy.
- [6] Michele Betti, Andrea Vignoli. 2011 Numerical assessment of the static and seismic behaviour of the basilica of Santa Maria all'Impruneta (Italy). Construction and Building Materials. Elsevier. 0950-0618
- [7] Dassault Systèmes. Abaqus Analysis User's Manual. Vol. 3: Materials. Apart. 19.6.3. Dassault Systèmes Simulia Corp. Providence. RI, USA.
- [8] Lubliner J., Oliver J., Oller, E. 1989 A Plastic-Damage Model for Concrete. International Journal of Solids Structures Vol.25. Pergamon Press. 0020-7683-89
- [9] Giordano A., Mele E. , De Luca A. 2002 Modelling of historical masonry structures: comparison of different approaches through a case study. Engineering Structures 24. Elsevier. 0141-0296
- [10] Egermann, R. 1989 Die Entwicklung der Ziegelherstellung und ihr Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften von Mauerziegeln. Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke. Ernst & Sohn, Berlin .
- [11] Neuwald-Burg, C., Bohne, D. 1996 Trag- und Verformungsverhalten historischen Ziegelmauerwerks. Erhalten historisch bedeutsamer Bauwerke, Ernst & Sohn, Berlin.
- [12] EC06. 2003 Design of masonry structures. prEN 1996-1-1:2002. Brussels, Belgium.
- [13] Karoly, K. 2002 Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen. Institut für Baustatik der Universität Stuttgart. Bericht Nr. 38. 3-00-010491-7





## **Application of operational modal analysis and model updating technique for the validation and characterization of structural models**

J.F. Jiménez-Alonso<sup>1A,#</sup>, A. Sáez<sup>1B</sup>

<sup>1</sup> Department of Continuum Mechanics, Structural Analysis and Soil Engineering. University of Seville.  
Av. Reina Mercedes 2, E-41012 Seville (Spain). E-mail: jfjimenez@us.es<sup>1A</sup>; andres@us.es<sup>1B</sup>

**Keywords:** operational modal analysis (OMA), model updating, finite element method (FEM).

### **Abstract.**

Modelling the behaviour of structural elements has traditionally relied on mathematical models that attempt to incorporate as much detail as possible, in order to properly describe the actual behaviour of such structural elements. Among the existing numerical methods, the finite element method (FEM) is the most widespread. However, despite of its great potential and the availability of increasingly powerful computers, we may still find significant differences between the actual behaviour of the structures and the one predicted by the FEM calculation model. In the case of civil engineering structures, these differences are normally due to changes in the stiffness of the structural elements, caused by nonlinear behaviour of materials, or to an inadequate definition of the boundary conditions. In this context, several methods for the calibration of FEM models from experimental data have been suggested in recent years, coming from different areas of mechanics.

Normally, due to the large amount of information that they provide and their sensitivity to changes in the stiffness of the structural elements, the dynamic characteristics of the structure (natural frequencies, mode shapes and damping) are taken as experimental parameters to measure in order to update the FEM model. In recent years, operational modal analysis (OMA) has received increasing attention. OMA allows determining the dynamic properties of the structure using ambient vibration as excitation, which is an undoubted advantage given the difficulty to artificially excite large civil engineering structures.

Once the dynamic parameters of the structure are experimentally determined, one may proceed to update the FEM model by, for example, a simple optimization of the mean square error between the analytical and experimental parameters. The number and type of variables to consider, as well as the method for solving the problem of optimization, define the main area of research in this topic. The potential applications of this technique are large, from simple behavioural validation of structural elements to determination of parameters characterizing the behaviour of a given material, load identification or even detection of flaws in structural health monitoring applications.

In this paper, some of the applications so far developed by our Group at the Department of Continuum Mechanics and Structural Analysis at the School of Architecture of Seville are presented.

---

# corresponding author: J.F. Jiménez-Alonso

## 1. Introduction.

Nowadays, the finite element method is used to perform structural design and numerical analysis. The method allows simulating the physical behaviour of the structure and can be used to predict the response to service loads, to assess the structural integrity and to study the impact of different design modifications.

The finite element package software, with the available computational capabilities, allows the construction of models with a high level of detail. However, there're always uncertain variables, whose values determine, sometimes in a relevant way, the behaviour of the structure.

In the case of civil engineering structures, uncertainties can arise, for example, the value of the modulus of elasticity of the constituent materials, in the value of the stiffness of the springs used to simulate the supporting conditions or the value of the stiffness of the structural joints.

The ambient vibration tests allow, through the use of highly sensitive sensors and application of appropriate identification techniques, obtaining fairly accurate estimations of the natural frequencies and modes of vibration of the structure.

Thus, a possible approach, to improve numerical models, is introducing changes that approximate the frequencies and mode shapes obtained experimentally. The changes, needed to improve the correlation between numerical and experimental results, can be made in terms of the structural sensitivity of the engineer. However, it's possible to use an alternative mathematical algorithm that allows an automatic and more optimized adjustment.

For newly constructed structures, the adjustment of the finite element model, previously conducted at the project level, allows, after the construction work and conducting an environmental test, validate or correct the assumptions made in the project. This adjusted model is an initial scenario, which over its lifetime, can be compared with the results of further dynamic testing or a continuous monitoring system.

The adjustments necessary to adapt the reference model to the new dynamic features of the structure correspond to the degradations that the structure has suffered during the studied period (provided that there were no significant changes in environmental conditions).

In rehabilitation studies, the use of this procedure allows to obtain a numerical model that realistically characterize the behaviour of the structure to rehabilitate, which allows testing different reinforcement solutions.

In the reception phase of the work, the method allows verifying if the results are consistent with the provisions made during the project.

In this article, a brief description of the different approaches that can be taken to implement the adjustment of numerical models, based on experimental characterization of the dynamic behaviour of the structure, is presented.

---

# corresponding author: J.F. Jiménez-Alonso

## 2. Technical comparison of numerical and experimental results.

Before adjusting the finite element model, its results should be compared with the ones obtained experimentally. In that sense, it's necessary to establish procedures to identify and quantify these differences. These procedures allow the identification of the areas that causes the major discrepancies, facilitating the subsequent optimization process.

$$MAC_{j,K} = \frac{(\varphi_j^T \cdot \varphi_k)^2}{(\varphi_j^T \cdot \varphi_j) \cdot (\varphi_k^T \cdot \varphi_k)} \quad (1)$$

$$COMAC(i) = \frac{\left( \sum_{j=1}^{m_s} \varphi_j^i \cdot \varphi_j^i \right)^2}{\sum_{j=1}^{m_s} (\varphi_j^i)^2 \cdot \sum_{j=1}^{m_s} (\varphi_j^i)^2} \quad (2)$$

where  $\varphi_k$  is an analytical mode,  $\tilde{\varphi}_k$  is an experimental mode,  $m_s$  is the number of comparable modes, and  $\varphi_j^i$  is the modal component of mode  $j$  associated with the degree of freedom  $i$ .

Each experimental mode will correspond to the numeric mode which presents a major index of MAC. The other COMAC index quantifies the disparities associated with a certain degree of freedom, allowing detect areas of the analytical model poorly modelled.

## 3. Model updating of finite element model.

### 3.1. Different proposals for dynamic model updating.

The finite element models updating, based on the results of dynamic tests can be carried out from two perspectives, whereas the modal parameter estimation is made considering only the output.

The *direct method* based on modal parameters, makes the updating of the finite element models based on the comparison of natural frequencies and experimental and numerical modal configurations. The numerical model fitting is made through the introduction of alterations in the elements of the stiffness or mass matrix. The direct manipulation of the elements of the stiffness or mass matrix has the advantage of allowing an adjustment of the model with experimental data through a direct algorithm that doesn't require any iteration. But it has three disadvantages. First, a reduction in the number of degrees of freedom of the theoretical model has normally to be made, because the number of degrees of freedom instrumented is usually less than the analytical one. Second, the updating process of the matrixes is carried out, without involving a physical meaning of the resulting state. Third, no changes can be related to structural parameters so it's difficult to control the results.

The *iterative method* based on modal parameters, makes the updating between the identified modal parameters obtained experimentally and numerically, through the introduction of changes in several structural parameters chosen by the user. Thus, the resulting modifications of the algorithm will controllable easily, because the same ones have a well defined physical meaning. By the fact, that the modified parameters aren't linearly related to the modal parameters, the

---

# corresponding author: J.F. Jiménez-Alonso

adjustment process needs to use optimization algorithms for nonlinear problems, so it's not avoid to use an iterative process.

### 3.2. The sensitivity-based updating algorithms

The updating of the finite element model is performed by minimizing the differences between numerical and experimental results. The function constructed with this objective is usually defined as a least squares problem.

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m [z_j(\theta) - \tilde{z}_j]^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^m r_j(\theta)^2 = \frac{1}{2} \cdot \|r(\theta)\|^2 \quad (3)$$

where  $z_j(\theta)$  are amounts resulting from the numerical model, which relies on the variables of the model  $\theta$  (physical parameters of the structure, such as modulus or stiffness of the support bearings), and they will be subject to the fitting, the elements  $\tilde{z}_j$  represent the same quantities obtained experimentally. The differences between experimental and analytical parameters are designated residues  $r_j(\theta)$ . It's advisable that the number of residues  $m$  will be greater than the number of variables adjusted  $\theta$ . In some cases, it may be interesting to set different weights  $w_j$  for each of the residues by changing the shape of the above function. Both residues (frequencies and modes) are obtained on a relative form according to the following formulation.

$$r_f(\theta) = \frac{\lambda_j(\theta) - \tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_j}, j = 1, 2, \dots, m_f \quad (4)$$

where  $\lambda_j(\theta)$  and  $\tilde{\lambda}_j$  are the eigenvalues of the structure, which are directly related to natural frequencies.

$$r_s(\theta) = \frac{\phi_j^l(\theta)}{\phi_j^r(\theta)} - \frac{\tilde{\phi}_j^l}{\tilde{\phi}_j^r}, j = 1, 2, \dots, m_f \quad (5)$$

where  $\phi_j^l$  and  $\phi_j^r$  are the components of numerical vibration mode  $j$ , and  $\tilde{\phi}_j^l$  and  $\tilde{\phi}_j^r$  are the components obtained experimentally.

### 4. Operational modal analysis.

The methods available to perform the identification of modal parameters of dynamic systems based on their response to ambient excitation are usually classified as frequency domain or time domain methods.

**Frequency domain methods** start from output spectrum or half-spectrum matrices previously estimated from the measured outputs. These methods can be either *non-parametric* or *parametric*. The nonparametric frequency domain methods are simpler and therefore were the first ones to be used. Among these, the *Peak-Picking* method is the most well-known, being still widely applied nowadays in dynamic testing of civil engineering structures, as it is the most adequate method to make a first check of the quality of collected data and get a first insight into the system dynamic properties.

---

# corresponding author: J.F. Jiménez-Alonso

The *Frequency Domain Decomposition (FDD)* or *Enhanced Frequency Domain Decomposition (EFDD)* methods are a slightly more sophisticated non-parametric frequency domain method that overcomes some of the limitations of the Peak-Picking method. Alternatively, the identification in the frequency domain can be based on the fitting of a model to the output spectrum or half-spectrum matrix, from which the modal parameters are extracted in a second phase. Among this class of methods, the most commonly used in civil engineering applications is the *poly-least squares complex frequency domain method (p-LSCF)*.

The similarity between the mathematical expressions of the transfer function and of the output half-spectrum of a system excited by white noise, is in correspondence with the similarity, in the time domain, between the output correlations of a system excited by white noise and the impulse responses. This was explored in the early ages of operational modal analysis based on **time domain methods**, in order to adapt the already existing techniques for the analysis of impulse responses recorded in the context of forced vibration tests.

Nowadays, the available time domain methods for operational modal analysis are essentially based on two types of models: discrete-time stochastic state-space models and auto-regressive moving average (ARMA) or just auto-regressive (AR) models. These last models are not so frequently used by the civil engineers community.

The formulations that use state-space models, designated *stochastic subspace identification (SSI) methods*, constitute the parametric approach that is more commonly adopted for civil engineering applications. The model can be identified either from correlations (or covariances) of the outputs; *Covariance driven stochastic subspace identification SSI-COV*; or directly from time series collected at the tested structure by the use of projections; *data driven stochastic subspace identification SSI-DATA*. These two methods are very closely related. Still, the SSI-COV has the advantage of being faster and based on simpler principles, whereas the SSI-DATA permits to obtain some further information with a convenient post-processing, as for instance, the decomposition of the measured response in modal contributions.

All the output-only modal identification methods assume that the ambient excitation, known to provide multiple inputs with wide band frequency content, is a zero mean white noise. As this assumption is not fully realistic, the true excitation can be considered as the output of a linear filter subjected to a white noise, which means that the identified modal parameters are not only associated with the tested structure but also with the imaginary system that produced the real excitation. Generally, in practice, it is possible to separate the modal parameters associated with the structural system from the others that may be due to the excitation, since it is known that the vibration modes of civil engineering structures have usually low damping and smooth mode shapes with real components.

In the application developed as an example, a method in the frequency domain (EFDD) will be compared with another in the time domain (SSI-DATA).

---

# corresponding author: J.F. Jiménez-Alonso

## 5. Optimization problem.

The objective function formulated above, which results from the application of the method of least squares, must be minimized through an optimization algorithm.

There are two main groups of optimization algorithms: *local optimization algorithms* that allow the location of the local minimum closest to the point of departure, and *global optimization algorithms* that are able to identify an absolute minimum.

The *local optimization algorithms* are based on a starting point, defined by the user, and from the same one, other points are gotten iteratively, based on the derivatives of the objective function that gradually approaching the solution. These algorithms don't determine an absolute minimum of the function, but a relative one closer to the starting point.

The *global optimization algorithms* are more robust, as the final solution doesn't depend on the point of departure, because unlike local optimization algorithms, the same ones are capable of, on its way to absolute minimum, passing the local minimum. The three most common global optimization methods are genetic algorithms GA, simulated annealing SA and coupled local minimizers CLM.

The genetic algorithms, GA, are based on an analogy with the natural evolution. In natural evolution, the members of a population compete with each other to survive and reproduce; individuals that survive, have a genetic code that put them at an advantage over the others members. This natural process of optimization is an inspiration for the construction of mathematical algorithms.

In the application developed in this paper, the classic genetic algorithms are used to optimize the objective function.

## 6. Application: Model updating of a slender footbridge.

**Structure.** The footbridge is a light cable-stayed structure of two spans (37.00+9.00 m) with a steel deck. In the following figures (1 and 2) the finite element model of the structure is shown with its two first vertical bending modes.

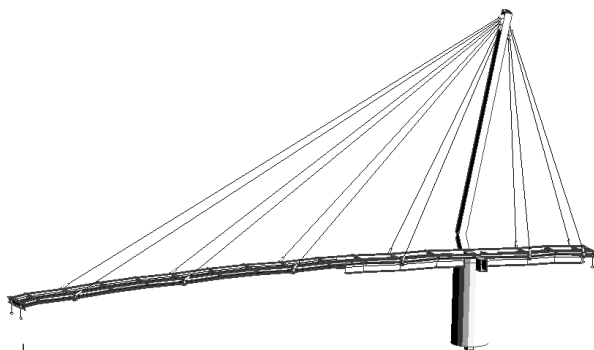


Figure 1. Finite Element Model.

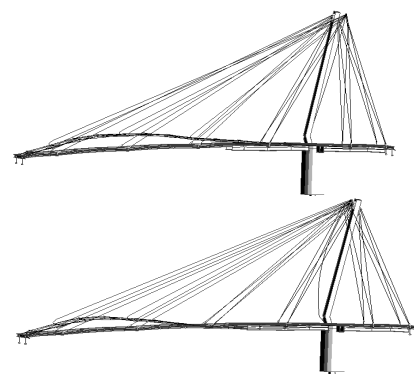


Figure 2. First two analytical vertical modes.

---

# corresponding author: J.F. Jiménez-Alonso

**Experimental data.** The measurements are conducted in operational conditions (pedestrian passages and wind action). The EFDD and SSI-UPC are used to extract the modal data from the vibration data. The modal shapes are measured along two gridlines, one at each longitudinal side 2x11 points are used. The first four modes are identified and used for the updating process (figures 3 and 4).

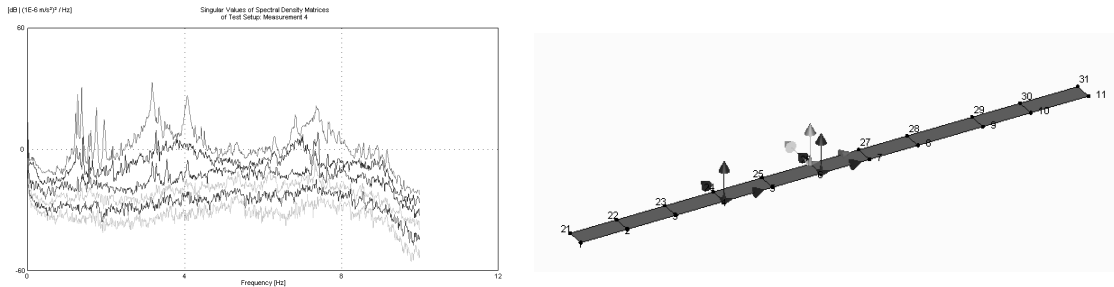


Figure 3. Half spectrum estimation and ambient test organization.

	Hz	Characterization
Mode 1	3.138	First vertical bending mode
Mode 2	4.068	First lateral bending mode
Mode 3	6.810	First torsional mode
Mode 4	7.345	Second vertical bending mode

f [Hz]		SSI-UPC			
		3.138	4.068	6.810	7.345
EFDD	3.136	0.9999	0.0031	0.0315	0.0067
	4.070	0.0031	0.9999	0.0625	0.0002
	6.810	0.0336	0.0625	0.9956	0.0282
	7.335	0.0037	0.0002	0.0350	0.9956

Figure 4. Identified modes and validation of EFDD and SSI-UPC methods.

**Variables of the updating process.** For updating the finite element model, the frequencies of the two vertical identified modes are considered and as physical variables the horizontal stiffness of the first support and the rotation stiffness of the central pier.

The application of the method of optimization to the objective residual function adjusts the form of the vibration modes of the structure. It's presented in the following figures (5 and 6) the process of fitting the model, where *EXP* refers to experimental modes, *NUM1* original numerical modes and *NUM2* the final numerical ones.

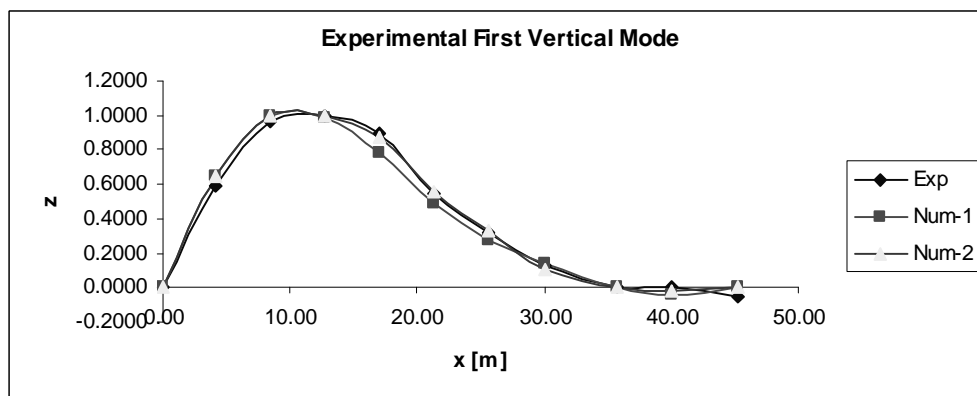


Figure 5. First Vertical Mode Experimental versus Numerical.

# corresponding author: J.F. Jiménez-Alonso

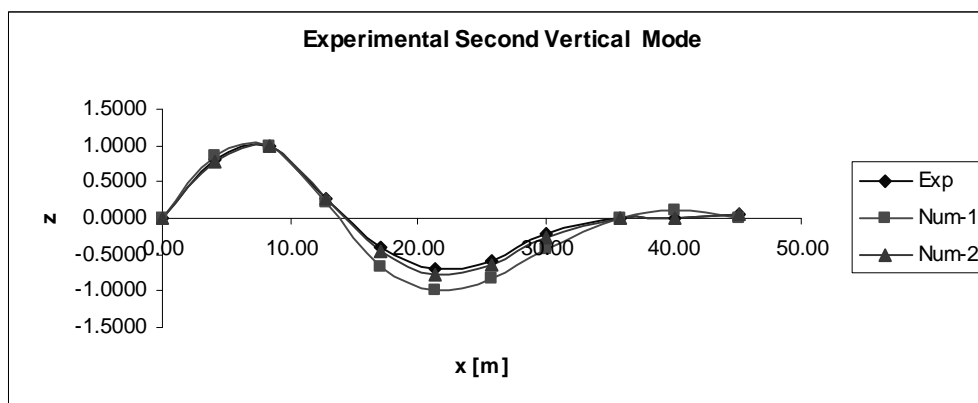


Figure 6. Second Vertical Mode Experimental versus Numerical.

## 7. Conclusions.

In this paper, the different techniques to compare the experimental and numerical results are presented, having highlighted its utility for rapid identification of differences between the two results.

Secondly, the different available approaches for adjustment of finite element models and those ones obtained experimentally are presented.

Thirdly, the basic steps of the iterative method are described. The objective function is optimized by the use of an implementation of the genetic algorithms.

Finally, as an example of the methodology, a finite element model updating of a slender cable-stayed footbridge is carried out.

## References

- Maia N., Silva J., "Theoretical and Experimental Modal Analysis", Instituto Superior Técnico, Portugal, Research Studies Press, LTD,1997, ISBN 0-86380-208-7.
- Magalhaes, F., "Operational Modal Analysis for Testing and Monitoring of Bridges and Special Structures", Ph. D. Thesis, Universidade do Porto, Faculdade de Engenharia, 2010.
- Peeters B., "System Identification and Damage Detection in Civil Engineering", Ph.D. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2000.
- Friswell, M.I., Mottershead, J.E., "Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, Kluwer Academic Publishers. ISBN 0-7923-3441-0, 1995.
- Teughels, A., "Inverse Modelling of Civil Engineering Structures Based on Operational Modal Data", Ph. D. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2003.
- Maeck J., "Damage Assessment of Civil Engineering Structures by Vibration Monitoring", PhD Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2003.
- Zivanovic, S., Pavic, A. Reynold, P., "Finite element modelling and updating of a lively footbridge: The complete process", Journal of Sound and Vibration, 2006.
- Caetano E., Cunha A., Hoopah W. and Raoul J., "Footbridge Vibration Design", CRC Press, Taylor&Francis Group, 2009, ISBN 978-0-415-49866-1.

---

# corresponding author: J.F. Jiménez-Alonso



1<sup>st</sup> International Congress on Mechanical models in structural engineering.  
University of Granada (Spain), December 2011.

## **Ajuste del efecto de tensorrigidez del hormigón en los modelos constitutivos del acero**

### **(Fixing the Tension Stiffening Effect in the Steel Constitutive Model)**

A.M. Hernández-Díaz<sup>1A,#</sup>, M.D. García Román<sup>2</sup>, L.M. Gil-Martín<sup>1B</sup>, E. Hernández-Montes<sup>1C</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Mecánica de Estructuras. Universidad de Granada.  
Campus de Fuentenueva s/n, E.T.S Ingenieros de Caminos, 18072 Granada (España). E-mail:  
amhd@ugr.es<sup>1A</sup>; mlgil@ugr.es<sup>1B</sup>; [emontes@ugr.es](mailto:emontes@ugr.es)<sup>1C</sup>

<sup>2</sup> Departamento de Matemática Fundamental. Universidad de La Laguna.  
Avda. Astrofísico Fco. Sánchez s/n, E.T.S Ingeniería Civil e Industrial, 38206 S/C de Tenerife  
(España). E-mail: mroman@ull.es

**Palabras clave:** Teorías de Campo de Compresiones, modelo constitutivo del acero, área de tensorrigidez, adherencia hormigón-acero.

#### **Resumen.**

Los modelos constitutivos del acero basados en la tensorrigidez del hormigón suponen una importante simplificación en el diseño a cortante de elementos de hormigón armado al no ser necesaria la realización de comprobaciones locales de equilibrio entre acero y hormigón a nivel de grieta. Actualmente las normativas de hormigón estructural proponen un valor para el área efectiva de tensorrigidez que depende únicamente de la cuantía de acero embebida en hormigón. Sin embargo, existen otros parámetros de diseño que también influyen en la tensorrigidez del hormigón, tales como el límite de cedencia del acero, la resistencia a tracción del hormigón o el coeficiente de adherencia hormigón-acero. En el estudio que aquí se presenta se ha comprobado cómo a partir de un cierto valor del área efectiva de tensorrigidez, el modelo constitutivo del acero se vuelve inconsistente (i.e., deja de tener solución real), lo que obliga a rediseñar el elemento de hormigón armado a fin de poder aplicar el modelo constitutivo de la armadura. La principal aportación de esta comunicación es la de corregir, mediante un coeficiente que depende de los parámetros antes citados, el área de tensorrigidez que se utiliza actualmente, de forma que el modelo constitutivo del acero sea operativo bajo cualquier hipótesis de diseño. Para ello, se ha recurrido al análisis mediante métodos algebraicos de las condiciones de consistencia de dicho modelo. Los resultados obtenidos se aplican a dos casos experimentales ampliamente estudiados. Finalmente, la rectificación del área de

---

# corresponding author: A.M. Hernández-Díaz

1<sup>st</sup> International Congress on Mechanical models in structural engineering.  
University of Granada (Spain), December 2011.

tensorrigidez conlleva una mejora en la respuesta resistente del acero -haciéndola más uniforme- y permite generalizar el uso de los modelos constitutivos del acero basados en el efecto de tensorrigidez.

**Keywords:** Compression Field Theories, steel constitutive model, tension stiffening area, bond effect.

**Abstract.**

Steel constitutive models based on tension stiffening effect represent a significant simplification at shear design of reinforced concrete members because checking the local equilibrium at crack between steel and concrete is made no longer necessary. Technical codes propose an expression for the tension stiffening area which only depends on the amount of steel embedded in concrete. Nevertheless, there are other design parameters which also affect concrete tension stiffening, such as yielding stress of steel, the tensile strength of concrete or the coefficient which models the bond effect between steel and concrete. In this work we show that after a given value of tension stiffening area the steel constitutive model becomes inconsistent (i.e., it has not real solution), being necessary to re-design the reinforced concrete member in order to apply the constitutive model. In this paper we propose to fix the value of tension stiffening area by including the above-mentioned design parameters in order to the steel constitutive model becomes operative for any design hypothesis. With this aim, we have analyzed, using algebraic methods, the conditions under which the steel constitutive model is consistent. Analytical results have been applied to two widely known experimental cases. Finally, the proposed adjustment to the tension stiffening area improves the response of steel constitutive model –by making it more uniform- and contributes to extend the use of steel constitutive models based on tension stiffening effect.

**Introducción.**

La Teoría Modificada del Campo de Compresiones (TMCC) asume para el acero un modelo constitutivo *bi-lineal*, en el que el módulo de elasticidad es nulo una vez alcanzada la tensión de cedencia ( $f_y$ ) en grieta. Esto significa que no se tiene en cuenta la adherencia hormigón-acero. La TMCC tiene como complicación añadida la necesidad de llevar a cabo una comprobación en grieta, la cual considera la existencia de tensiones locales en la interfaz de la grieta a fin de equilibrar la tensión en el acero y garantizar que no se excede su tensión admisible.

La adherencia hormigón-acero es la responsable de la transmisión de esfuerzos de la armadura al hormigón que la envuelve. Considérese la pieza de la figura 1, que corresponde a un elemento prismático de hormigón de sección

transversal cuadrada, armado con una barra de acero longitudinal en el centro de la sección y sometido a un esfuerzo de tracción creciente. Cuando se comienza a aplicar la carga, la transferencia de esfuerzos de la armadura al hormigón tiene lugar a lo largo de toda la longitud de la barra, de manera que todo el hormigón está traccionado. Una vez se alcanza la resistencia a tracción del hormigón ( $f_{ct}$ ), éste se fisura y su tensión se anula en la sección de la grieta; no ocurre lo mismo en las secciones entre grietas donde, debido al efecto de *tensorigidez* [2], el hormigón sigue absorbiendo parte del esfuerzo a tracción al que se ve sometida la pieza (ver Fig. 1). Si después de la aparición de la primera grieta continuamos aumentando la sollicitación a tracción, la tensión que transmite el acero al hormigón también aumenta hasta que éste alcanza de nuevo el valor  $f_{ct}$  en otra sección distinta, produciéndose una nueva fisura. Este proceso continúa hasta que la distancia entre grietas sea tan pequeña que el acero sea incapaz de transmitir tensión al hormigón, o bien, hasta que la tensión media del acero ( $\sigma_{s,av}$ ) alcanza el valor de cedencia ( $f_y$ ).

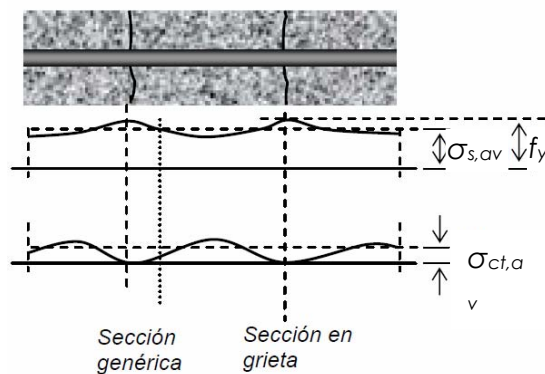


Figura 1: Barra sometida a tracción. El acero ha alcanzado la tensión de cedencia  $f_y$  en grieta.  
Fuente: [5]

A partir del instante en que se produce la primera grieta, la tensión media de tracción en el hormigón  $\sigma_{ct,av}$  disminuye, y será tanto menor cuanto mayor sea la fisuración del hormigón, esto es, a medida que la deformación media a tracción de la barra  $\epsilon_{ct}$  vaya aumentando. Según [3], la tensión media del hormigón en régimen de post-fisuración bajo cargas rápidas no cíclicas viene dada por

$$\sigma_{ct} = \frac{\alpha f_{ct}}{1 + \sqrt{500 \epsilon_{ct}}}, \quad (1)$$

1st International Congress on Mechanical models in structural engineering.  
University of Granada (Spain), December 2011.

donde  $a$  es el coeficiente de adherencia hormigón-acero, que toma el valor 1 para barras corrugadas, 0.7 para barras lisas, cables y cordones con muescas y 0 para barras sin adherencia.

El proceso descrito anteriormente pone de manifiesto la importancia del fenómeno de tensorrigidez del hormigón en la respuesta resistente de las armaduras. Gil Martín et al. [6] han planteado un tratamiento tenso-deformacional de las barras de acero que introduce el efecto de la rigidez tensional del hormigón, dando lugar a la denominada Teoría Unificada del Campo de Compresiones (TUCC). La TUCC propone la siguiente formulación para el modelo constitutivo del acero embebido en hormigón:

$$\sigma_{s,av} = \begin{cases} E_s \varepsilon_{ct} & \text{para } \varepsilon_{ct} < \varepsilon_{max} \\ f_y - \frac{A_c}{A_s} \sigma_{ct,av} & \text{para } \varepsilon_{ct} \geq \varepsilon_{max} \end{cases} \quad (2)$$

donde  $A_s$  es el área de la sección transversal de acero,  $A_c$  es el área efectiva de hormigón sometida a tracción,  $E_s$  el módulo de elasticidad del acero,  $f_{ct}$  es la resistencia a tracción del hormigón y  $\varepsilon_{max}$  es la deformación aparente de cedencia. La deformación  $\varepsilon_{max}$  representa la deformación media del elemento en el instante en que el acero alcanza la tensión de cedencia en grieta y se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$f_y A_s = E_s \varepsilon_{max} A_s + \kappa A_c \frac{\alpha f_{ct}}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_{max}}} \quad (3)$$

El Código modelo CEB-FIP 1990 [2] define el área efectiva de hormigón sometida a tracción  $A_c$  como el área rectangular en torno a la barra de acero a una distancia de su centro no mayor de  $7.5\varnothing$  -siendo  $\varnothing$  el diámetro de la barra-. Esta aproximación tiene el inconveniente de que el área efectiva  $A_c$  permanece constante a lo largo del proceso de deformación del elemento. Por esta razón, Gil Martín et al. [6] proponen un área eficaz de hormigón a tracción  $A_{c,ef}$  que resulta de corregir el área  $A_c$  mediante un parámetro  $\kappa$  denominado *degradación del hormigón*, de manera que  $A_{c,ef} = \kappa A_c$ .

En esta comunicación se realiza un análisis de consistencia del modelo constitutivo del acero en base al parámetro  $\kappa$  antes citado.

### Efecto de la tensorrigidez en el modelo constitutivo del acero

El estudio realizado durante la elaboración de este trabajo pone de manifiesto que el área de tensorrigidez  $A_c$  condiciona la solubilidad del modelo constitutivo del acero. En la Fig. 2 se representa la función

$$f(x) = f_y - E_s x - \frac{A_{c,ef}}{A_s} \frac{\alpha f_{ct}}{1 + \sqrt{500x}}$$

para distintos valores del factor  $\kappa$ ; las curvas representadas en la figura 2 corresponden a una barra de acero de 20mm de diámetro con un cerco de 10mm de diámetro y un recubrimiento libre de 30mm, lo que implica un área efectiva de hormigón ( $A_c$ ) en torno a la barra es igual a 40000 mm<sup>2</sup>, de acuerdo al criterio definido en [2]; la tensión de cedencia del acero ( $f_y$ ) es igual a 500 MPa y la resistencia media a tracción ( $f_{ct,m}$ ) del hormigón es igual a 2.56 MPa (en adelante, nos referiremos a este espécimen como ejemplo 1). Los ceros de la función  $f(x)$  son las soluciones de la ecuación (3).

Para determinados valores de  $\kappa$  la ecuación (3) tiene una única solución real positiva (p.ej.,  $\kappa=1.5$  en la Fig. 2) y por tanto no existe ambigüedad a la hora de determinar la deformación aparente de cedencia. Sin embargo, para otros valores de  $\kappa$ , o bien se pierde la unicidad de la solución ( $\kappa=1.75$  en la Fig. 2), o bien directamente la ecuación (3) no tiene solución real positiva ( $\kappa=2$  en la Fig. 2), volviendo inoperativo el modelo constitutivo del acero basado en la tensorrigidez del hormigón.

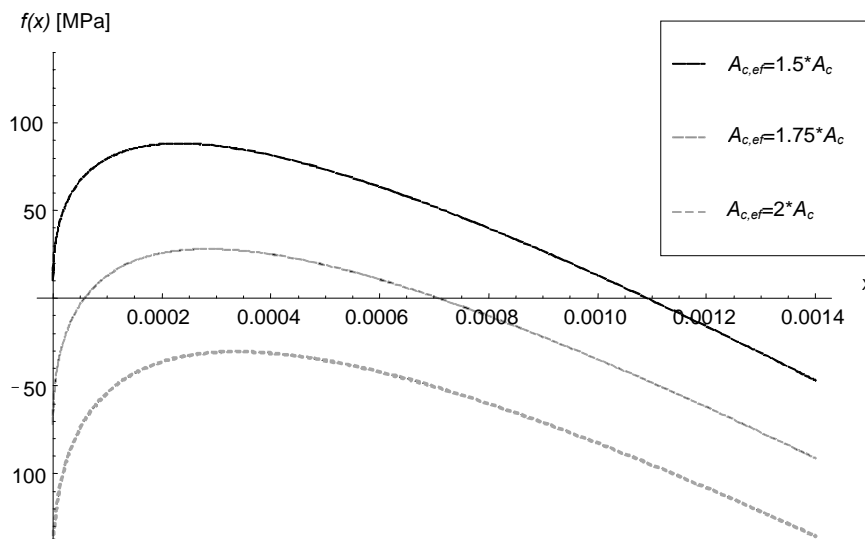


Figura 2: Solubilidad de la ecuación de cálculo de  $\varepsilon_{max}$  para diferentes valores del factor de degradación  $\kappa$ .

Datos:  $f_y=500\text{Mpa}$ ,  $f_{ct,m}=2.56\text{MPa}$ ,  $A_s=314.16\text{mm}^2$  (1  $\varnothing$  20),  $A_c=40000\text{mm}^2$

### Análisis de consistencia del modelo constitutivo del acero

Como se puede observar en la Fig. 2, siempre hay valores de  $\kappa$  para los que la ecuación (3) tiene una única solución real. De hecho, para  $\kappa=0$  la única solución es  $\varepsilon_{max} = \varepsilon_y = f_y/E_s$  (i.e., la deformación de cedencia del acero) y en este caso el modelo constitutivo del acero coincide con el modelo *bi-lineal* de la TMCC. En general, la solubilidad de la ecuación (3) en función de  $\kappa$  sigue el patrón que se describe a continuación (Fig. 2):

- para  $\kappa=0$  y valores inmediatamente superiores la ecuación tiene una única solución real positiva.
- A partir de determinado valor de  $\kappa$  la ecuación (3) tiene dos soluciones reales positivas, hasta que
- a partir de cierto valor límite, que denotaremos  $\kappa_{lim}$ , la ecuación no tiene solución real.

En el intervalo de valores de  $\kappa$  para los que la ecuación (3) presenta dos soluciones, el valor buscado de  $\varepsilon_{max}$  es la mayor de las dos, a fin de preservar la continuidad de  $\varepsilon_{max}$  en función de  $\kappa$ . Para aproximar numéricamente el valor de  $\varepsilon_{max}$  -en los casos en que la ecuación (3) tenga solución- mediante algún método iterativo (e.g., los métodos tipo Newton), se debe tomar una aproximación inicial mayor que  $\varepsilon_{max}$ , de manera que la sucesión que genera el método sea decreciente (Fig. 3). Esto permite garantizar que dicha sucesión converge a la mayor de las dos soluciones antes citadas, en lugar de a la menor. Dado que el valor de  $\varepsilon_{max}$  es desconocido a priori, una forma segura de garantizar la convergencia hacia la solución correcta consiste en tomar la deformación de cedencia del acero ( $\varepsilon_y$ ) como aproximación inicial en el método de Newton-Raphson, ya que el valor de  $\varepsilon_y$  acota superiormente al de  $\varepsilon_{max}$  para cualquier valor de  $\kappa$ .

Cuando el valor de  $\kappa$  aumenta excesivamente (esto es, cuando el valor del área eficaz de hormigón  $A_{c,ef}$  es muy alto), la ecuación (3) deja de tener soluciones reales haciendo impracticable el modelo constitutivo del acero. El valor límite  $\kappa_{lim}$  a partir del cual la ecuación deja de tener solución real positiva se puede calcular como el valor de  $\kappa$  tal que, en el punto  $x_0 > 0$  donde se anula la función

$$f(x) = f_y - E_s x - \frac{\kappa A_c}{A_s} \frac{\alpha f_{ct}}{1 + \sqrt{500x}},$$

también se anula su derivada  $f'(x_0)$ . Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones  $\{ f(x_0)=0, f'(x_0)=0 \}$  en las incógnitas  $\{ \kappa, x_0 \}$  se obtiene que el mayor valor de  $\kappa$  para el que la ecuación tiene solución es

$$\kappa_{lim} = \frac{A_s E_s}{A_c \alpha f_{ct}} \frac{\sqrt{(1+1500\varepsilon_y)^3 - 1} + 4500\varepsilon_y}{6750} \quad (4)$$

En la Fig. 4 se muestra cómo varía el modelo constitutivo del acero para diferentes valores del factor de degradación  $\kappa$ . Para  $\kappa=0$  se tiene el modelo bi-lineal del acero. Conforme aumenta el valor de  $\kappa$  (i.e., la contribución del hormigón a tracción), la tensión del acero disminuye. Para el ejemplo 1, el último valor de  $\kappa$  para el que la ecuación (3) tiene solución es  $\kappa_{lim}=1.87281$ . Para valores de  $\kappa$  mayores que  $\kappa_{lim}$  el modelo constitutivo del acero carece de sentido al no existir un valor real de la deformación aparente de cedencia; el resultado es un modelo constitutivo discontinuo (ver Fig. 4).

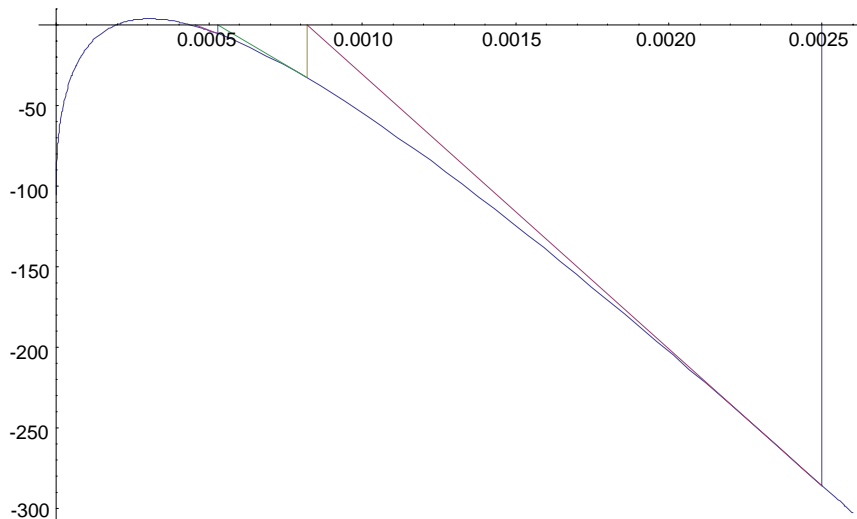


Fig. 3: Aplicación del método de Newton-Raphson para el cálculo de la deformación aparente de cedencia  $\varepsilon_{max}$  a partir de la ecuación (1). Aproximación inicial:  $x_0 = \varepsilon_s = 0.0025$ . Datos:  $f_y = 500 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct,m} = 2.56 \text{ MPa}$ ,  $A_s = 314.16 \text{ mm}^2$  (1  $\varnothing$  20),  $A_c = 40000 \text{ mm}^2$  ( $\kappa = 1.5$ ).

El valor límite  $\kappa_{lim}$  puede ser interpretado de varias maneras:

- Es el último valor de  $\kappa$  para el que el modelo constitutivo del acero es aplicable.
- Corresponde a la curva de *tensión mínima del acero*, dado que la contribución del hormigón es máxima cuando  $\kappa = \kappa_{lim}$ .
- Es el único valor de  $\kappa$  para el que la relación tensión-deformación es derivable en todo el intervalo de deformaciones, puesto que sólo para  $\kappa = \kappa_{lim}$  la rama plástica del modelo constitutivo del acero es tangente a la rama elástica. Por tanto,  $\kappa = \kappa_{lim}$  es el valor para el que la respuesta tenso-deformacional del acero es la más suave de todas las posibles.

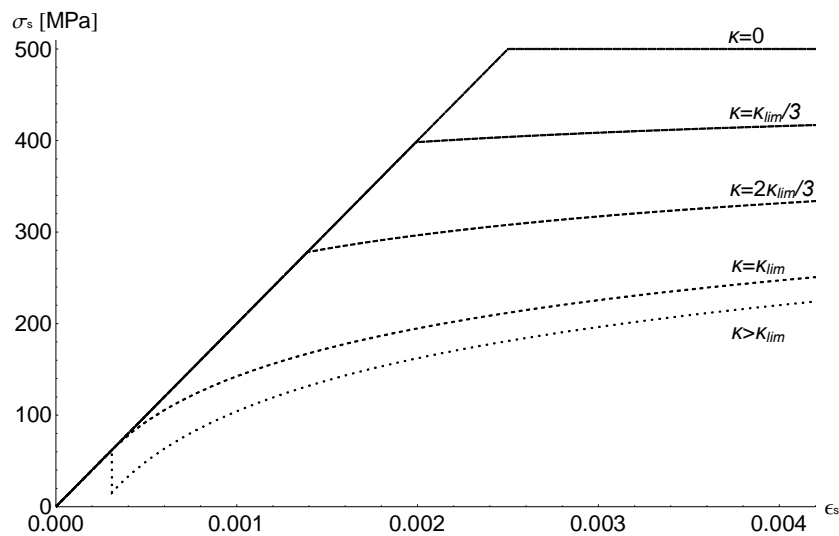


Figura 4: Modelo constitutivo del acero para distintos valores de  $\kappa$ .  
Datos:  $f_y=500\text{MPa}$ ,  $f_{ct,m}=2.56\text{MPa}$ ,  $A_s=314.16\text{mm}^2$  (1  $\varnothing$  20),  $A_c=40000\text{mm}^2$

### Aplicación a un caso práctico: el ensayo de Abersman-Conte (1973)

El modelo constitutivo del acero propuesto por la Tucc ha sido validado mediante su aplicación a un ensayo experimental ampliamente contrastado en el ámbito de las Teorías de Campo de Compresiones: el ensayo de Abersman-Conte [1]. La validación del modelo constitutivo del acero propuesto por la Tucc se ha realizado tomando como área eficaz de hormigón el área  $A_c$  calculada mediante el procedimiento descrito en el Código modelo [2], es decir, con  $\kappa=1$  (cf. [6]).

En la figura 5 se muestra el criterio establecido por el Código modelo CEB-FIP 1990 [2] en relación al cálculo del área de tensorrigidez del hormigón -área rectangular en torno a la barra a una distancia no mayor de  $7.5\varnothing$  de su centro-, mientras que en la figuras 6a y 6b se muestran las dimensiones de la sección transversal de la viga ensayada, así como las áreas efectivas de hormigón de las armaduras longitudinal y transversal resultantes de aplicar el criterio de tensorrigidez antes citado. Los valores del área efectiva para cada tipo de armadura se justifican a continuación:

#### 1. Características de la sección transversal:

- Recubrimiento libre lateral=13 mm
- Recubrimiento superior e inferior=25 mm
- Cercos de  $\varnothing$  9.5 mm cada 152 mm



1<sup>st</sup> International Congress on Mechanical models in structural engineering.  
University of Granada (Spain), December 2011.

- Barras longitudinales pasivas: 6 de  $\varnothing$  9.5 mm
- $f_{ct}$ : resistencia media a tracción del hormigón = 2 MPa
- $f_y$ : límite elástico del acero=367 MPa
- $E_s$ : módulo de elasticidad del acero= $2 \cdot 10^5$  MPa
- $\epsilon_y$ : deformación de cedencia del acero=0.001835
- $\alpha=1$  (barras corrugadas)

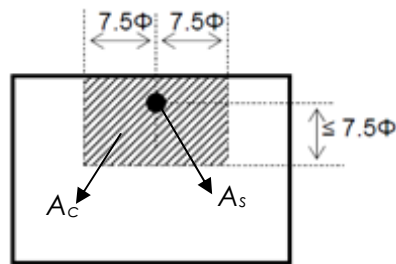


Figura 5: Área efectiva de hormigón a tracción  $A_c$  (MC CEB-FIP 1990). Fuente: [4]

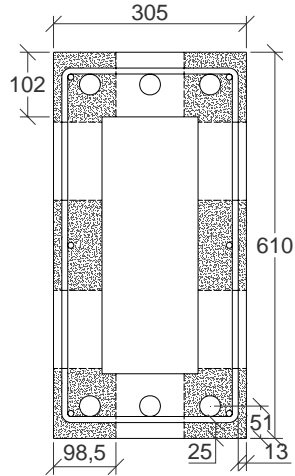


Figura 6a: Sección transversal de la viga del ensayo de Abersman y Conte (1973). Detalle de las áreas efectivas de la armadura pasiva longitudinal, según el criterio definido en el MC CEB-FIP 1990.

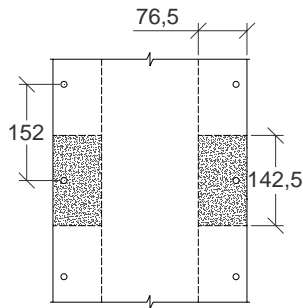


Figura 6b: Sección longitudinal de la viga del ensayo de Abersman y Conte (1973). Detalle de las áreas efectivas de la armadura pasiva transversal, según el criterio definido en el MC CEB-FIP 1990.

## 2. Áreas efectivas de hormigón a tracción:

- Área efectiva de hormigón para la armadura longitudinal (Fig. 6a) :

$$A_{c,l} = 4 \cdot ((13 + 9,5 + 8 \cdot 9,5) \cdot 102 + (25 + 9,5 + 8 \cdot 9,5 - 102) \cdot 76,5) + 76,5 \cdot 15 \cdot 9,5 \cdot 2$$

$$= 64591,5 \text{ mm}^2$$

- Área efectiva de hormigón para la armadura transversal (Fig. 6b):

$$A_{c,t} = 15 \cdot 9,5 \cdot 2 \cdot 76,5 = 21802,5 \text{ mm}^2$$

Luego, utilizando la expresión (4), se comprueba que el factor  $\kappa$  tiene como valor límite  $\kappa_{lim} = 1,42$  tanto para la armadura longitudinal como para la transversal. Por consiguiente, la viga de Abersman-Conte admite el modelo constitutivo del acero con el área efectiva de tensorrigidez sin corregir (i.e.,  $\kappa = 1$ ).

## Conclusiones

Los modelos constitutivos del acero basados en la tensorrigidez del hormigón presentan problemas de aplicabilidad debido a la inconsistencia de los mismos bajo determinadas hipótesis de diseño. En el modelo de comportamiento del acero propuesto por la TUCC el problema indicado es susceptible de corregirse mediante el ajuste de un parámetro intrínseco del propio modelo tenso-deformacional, denominado *parámetro*  $\kappa$ .

La disparidad de criterios que tradicionalmente ha existido en relación al área efectiva de hormigón a tracción hace que el parámetro  $\kappa$ , cuya razón de

1<sup>st</sup> International Congress on Mechanical models in structural engineering.  
University of Granada (Spain), December 2011.

ser es precisamente la de corregir el valor de dicha área, sea el más idóneo para realizar un ajuste del modelo constitutivo en relación a la problemática numérica antes comentada; además, operando de esta forma se evita afectar otros factores de diseño básicos como son la resistencia del material o las cuantías de armadura, lo que resulta de gran interés, ya que permite al usuario del modelo trabajar con la totalidad del rango de valores de diseño aceptado por normativa.

El ajuste realizado sobre el parámetro  $\kappa$  proporciona una ecuación relativamente sencilla y fácil de usar, que además garantiza la existencia y unicidad de un valor real positivo de la deformación aparente de cedencia del elemento ( $\varepsilon_{max}$ ) en función de factores de diseño a priori conocidos, como son la cuantía de acero, el límite de cedencia de éste o la resistencia del hormigón.

1<sup>st</sup> International Congress on Mechanical models in structural engineering.  
University of Granada (Spain), December 2011.

## Referencias

- [1] Arbersman, B., Conte, D.F. (1973) *The Design and Testing to Failure of a Prestressed Concrete Beam Loaded in Flexure and Shear*, BAsC thesis, Department of Civil Engineering, University of Toronto, 176 pp.
- [2] *Código modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Grupo Español del Hormigón y Asociación Técnica Española del Pretensado.
- [3] Collins, M.P., Mitchell D., (1991) *Prestressed Concrete Structures*, Prentice Hall, Nueva Jersey.
- [4] Eurocódigo 2 Proyecto de Estructuras de Hormigón UNE-ENV-1992 (Parte 1-1: Reglas Generales y Reglas de Edificación), AENOR
- [5] Hernández Montes, E., Gil Martín, L.M., (2007) *Hormigón Armado y Pretensado, Concreto Reforzado y Preesforzado*. Ed. TEP-190, Univ. Granada.
- [6] Gil Martín, L.M., Hernández Montes, E., Aschheim, M., Pantazopoulou, S. (2009) *Refinements to Compression Field Theory, with Application to Wall-Type Structures*. American Concrete Institute, ACI Special Publication (265 SP), pp 123-142.
- [7] Vecchio, F.J., Collins, M.P. (1986) The modified compression field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, *ACI Journal*, Vol. 83, No. 2, pp. 219-231.

## Introducción de un parámetro de degradación en el diseño a cortante de vigas de hormigón armado

### (Introducing a Degradation Parameter in the Shear Design of Reinforced Concrete Beams)

A.M. Hernández-Díaz<sup>1A#</sup>, L.M. Gil-Martín<sup>1B</sup>, M.D. García Román<sup>2</sup>, E. Hernández-Montes<sup>1C</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Mecánica de Estructuras. Universidad de Granada.  
Campus de Fuentenueva s/n, E.T.S Ingenieros de Caminos, 18072 Granada (España). E-mail:  
amhd@ugr.es<sup>1A</sup>; mlgil@ugr.es<sup>1B</sup>; [emontes@ugr.es](mailto:emontes@ugr.es)<sup>1C</sup>

<sup>2</sup> Departamento de Matemática Fundamental. Universidad de La Laguna.  
Avda. Astrofísico Fco. Sánchez s/n, E.T.S Ingeniería Civil e Industrial, 38206 S/C de Tenerife  
(España). E-mail: mroman@ull.es

**Palabras clave:** Teorías de Campo de Compresiones, adherencia hormigón-acero, parámetro de degradación, algoritmos evolutivos.

#### Resumen.

Las normativas de hormigón estructural plantean la resistencia a cortante de un elemento de hormigón armado como la suma de la contribución del hormigón más la contribución del acero de tal forma que ambas componentes son invariantes frente a la sollicitación a cortante. Puesto que se produce una degradación del hormigón cuando aumenta la deformación por cortante de la pieza, sería importante que las teorías actuales explicasen la variación de la resistencia a cortante en función de la deformación en piezas de hormigón armado. La Teoría Unificada del Campo de Compresiones plantea el equilibrio a tracción de la armadura considerando que, una vez que en la grieta se alcanza la deformación de cedencia del acero, la tensión en el acero afecta a toda el área de la barra mientras que la tensión de tracción en el hormigón afecta sólo a un área eficaz de tensorrigidez, cuantificada por un parámetro de degradación del hormigón ( $\kappa$ ). Los primeros estudios realizados al respecto sugieren que el área efectiva del hormigón a tracción movilizada en torno a la barra de acero disminuye cuando aumenta la deformación de tracción y/o disminuye la separación entre grietas. Así pues, la clave para definir la respuesta frente a cortante de un elemento es formular el valor del parámetro de degradación. Para ello, ha sido preciso adaptar el actual modelo analítico de las Teorías de Campo de Compresiones a fin de detectar bajo qué casos el modelo –conjunto de ecuaciones de equilibrio, compatibilidad y constitutivas– se vuelve inconsistente (i.e., carece de solución real). A continuación, se ha desarrollado un

---

# corresponding author: A.M. Hernández-Díaz

algoritmo evolutivo que utiliza el modelo adaptado para formular el parámetro  $\kappa$  como función de la deformación por cortante del hormigón. El resultado final del trabajo que aquí se presenta es, por un lado, un mejor conocimiento del modelo analítico de cortante que actualmente sostienen las Teorías de Campo de Compresiones, y por otro, una formulación del modelo constitutivo del acero más coherente con el mecanismo real de adherencia hormigón - acero.

**Keywords:** Compression Field Theories, bond-effect, degradation parameter, genetic algorithms.

### **Abstract.**

Structural codes estimate shear strength as the sum of concrete contribution plus the steel contribution, in such a way that both components are invariant under different levels of load. Since an increment of shear strain produces a degradation of concrete, it seems necessary that shear theories define the shear strength as a function of the strain in reinforced concrete members. The Refined Compression Field Theory (RCFT) explains that, once yield stress is reached at crack, tensile stress in concrete affects only a given value of the tension stiffening area, which may be quantified by means of a degradation parameter ( $\kappa$ ). A preliminary test about this aspect suggests that the tension stiffening area, surrounding the reinforcement bar, decreases when tensile strain increases or crack spacing decreases. Therefore, the key for defining the shear response of a reinforced concrete member is to formulate the degradation parameter. With this aim, we first have reworked the analytical model proposed by the Compression Field Theories (CFT's) in order to detect the design hypotheses for which the model –set of equilibrium, compatibility and constitutive equations- is consistent (i.e., the system has a real solution). Then, we have implemented a genetic algorithm which uses the above-mentioned reworked model in order to formulate the degradation parameter as a function of shear strain. The final result is, on one hand, a better approach about the way how analytical model of CFT's works, and on the other hand, to obtain a steel constitutive model closer to real bond mechanisms between steel and concrete.

### **Introducción.**

Las Teorías de Campo de Compresiones (TCC) predicen la resistencia a cortante de un elemento de hormigón armado, y su función de respuesta Carga vs. *Deformación*, mediante el planteamiento del siguiente sistema de ecuaciones:

a. 3 ecuaciones de equilibrio:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = (\tan \theta + \cot \theta) \frac{V}{z \cdot b_w} \quad (1)$$

$$A_{st}\sigma_{st} = (\sigma_2 \sin^2 \theta - \sigma_1 \cos^2 \theta) \cdot b_w s \quad (2)$$

$$A_{sx1}\sigma_{sx1} + A_{sx2}\sigma_{sx2} + \sigma_1 b_w z = \frac{V}{\tan \theta} \quad (3)$$

b. 2 ecuaciones de compatibilidad:

$$(\varepsilon_t - \varepsilon_2) \tan^2 \theta - (\varepsilon_x - \varepsilon_2) = 0 \quad (4)$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_t \quad (5)$$

c. 2 ecuaciones para el comportamiento del hormigón a compresión:

$$f_{2,max} = f_c \cdot \min \left\{ 1, (0.8 + 170\varepsilon_1)^{-1} \right\} \quad (6)$$

$$\sigma_2 = f_{2,max} \left( 2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} - \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_c} \right)^2 \right) \quad (7)$$

d. 1 ecuación de comportamiento del hormigón a tracción<sup>1</sup>:

$$\sigma_1 = \frac{\alpha f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_1}} \quad (8)$$

e. 3 relaciones tensión-deformación del acero, según el modelo constitutivo propuesto por la Teoría Unificada del Campo de Compresiones (TUCC) [5]: una para la armadura longitudinal inferior, otra para la armadura longitudinal superior, y una última para la armadura transversal.

$$\sigma_{sx1} = \begin{cases} E_s \varepsilon_x, & \varepsilon_x \leq \varepsilon_{max,x1} \\ f_{y,x1} - \frac{A_{c,x1}}{A_{s,x1}} \frac{\alpha_{x1} f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_x}}, & \varepsilon_x \geq \varepsilon_{max,x1} \end{cases} \quad (9)$$

$$\sigma_{sx2} = \begin{cases} E_s \varepsilon_x, & \varepsilon_x \leq \varepsilon_{max,x2} \\ f_{y,x2} - \frac{A_{c,x2}}{A_{s,x2}} \frac{\alpha_{x2} f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_x}}, & \varepsilon_x \geq \varepsilon_{max,x2} \end{cases} \quad (10)$$

$$\sigma_{st} = \begin{cases} E_s \varepsilon_t, & \varepsilon_t \leq \varepsilon_{max,t} \\ f_{y,t} - \frac{A_{c,t}}{A_{st}} \frac{\alpha_t f_{ct,m}}{1 + \sqrt{500\varepsilon_t}}, & \varepsilon_t \geq \varepsilon_{max,t} \end{cases} \quad (11)$$

siendo  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  las tensiones medias principales de tracción y compresión, respectivamente, en el hormigón, y  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son las deformaciones medias

<sup>1</sup> En el caso de cargas rápidas no cíclicas, se puede adoptar esta expresión como valor de la resistencia media a tracción del hormigón en régimen de post-fisuración [6]. Se ha prescindido de la rama elástica ( $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_{ct,m}$ ) al entenderse que en condiciones de agotamiento el hormigón ha alcanzado la fisuración, y por tanto,  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{ct,m}$ .

principales a tracción y compresión, respectivamente. Los subíndices 'x1', 'x2' y 't' se refieren a los tres tipos de armadura presentes: longitudinal inferior, longitudinal superior y transversal; en base a esto,  $A_{si}$  representa el área de la armadura tipo  $i$ ,  $\sigma_{si}$  representa la tensión media en la armadura tipo  $i$ ,  $A_{ci}$  representa el área efectiva de la armadura tipo  $i$ ,  $f_{y,i}$  es la tensión de cedencia de la armadura tipo  $i$ ,  $a_i$  es el coeficiente de adherencia hormigón-acero de la armadura tipo  $i$  y  $\varepsilon_{max,i}$  es la deformación aparente de cedencia de la armadura tipo  $i$  según el modelo propuesto por la TUCC;  $\theta$  es la inclinación de las bielas de compresión,  $V$  es el cortante de cálculo,  $z$  es el brazo mecánico a flexión,  $b_w$  es el ancho del alma,  $s$  es la separación entre estribos,  $\varepsilon_x$  y  $\varepsilon_t$  son, respectivamente, las deformaciones medias en las armaduras longitudinal y transversal,  $f_c$  es la resistencia a compresión del hormigón ensayado en probeta cilíndrica y  $\varepsilon_c$  es la deformación asociada a  $f_c$ ,  $f_{2max}$  es la resistencia máxima frente a aplastamiento por compresión del hormigón y  $f_{ctm}$  es la resistencia media a tracción del hormigón.

La base de la TUCC es el planteamiento del equilibrio a tracción considerando que una vez se alcanza la deformación de cedencia del acero en la grieta, la tensión en el acero afecta a toda el área de la barra ( $A_s$ ) mientras que la tensión de tracción en el hormigón afecta sólo a un área efectiva ( $A_c$ ). El Código modelo CEB-FIP 1990 [1] define la zona efectiva de hormigón sometida a tracción ( $A_c$ ) como el área rectangular en torno a la barra a una distancia no mayor de  $7.5\varnothing$  de su centro geométrico -siendo  $\varnothing$  el diámetro de la barra-. Esto implica que la zona de tensorrigidez del hormigón en torno a la barra de acero permanece constante a lo largo del proceso de deformación del elemento, al depender única y exclusivamente del diámetro de barra. Por esta razón, Gil Martín et al. [5] proponen un *área eficaz* de hormigón a tracción ( $A_{c,ef}$ ) que resulta de corregir el área efectiva de hormigón a tracción ( $A_c$ ) mediante un parámetro  $\kappa$  denominado de *degradación del hormigón* (en adelante, parámetro ' $\kappa$ '), tal que  $A_{c,ef} = \kappa A_c$ ; dicho parámetro de degradación debe ser formulado como una función de la deformación a tracción, entre otros parámetros, de tal manera que el área eficaz de hormigón ( $A_{c,ef}$ ) no es constante, sino que varía a medida que aumenta la degradación del hormigón, al igual que lo hace el reparto de tensiones de tracción entre hormigón y acero. Así pues, y en tanto no se demuestre lo contrario, la clave para definir en mejor medida la respuesta resistente del acero pasa por la formulación del parámetro  $\kappa$ .

### **Reducción del modelo de cortante.**

Mediante el método algebraico de eliminación/explicitación es posible reducir el sistema de ecuaciones (1)-(11) a un sistema equivalente de dos ecuaciones  $f=0$  y  $g=0$  en las incógnitas  $\varepsilon_t$  y  $\theta$ ; la función  $f$  corresponde al equilibrio de las armaduras longitudinales inferior y superior, mientras que la función  $g$  corresponde al equilibrio de la armadura transversal. Tales funciones toman



alguna de las expresiones que a continuación se indican en función de la hipótesis de comportamiento adoptada para cada tipo de armadura:

$$a) \quad f_{EE} [\theta, \varepsilon_1] = \frac{b_w \alpha f_{ctm} z}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} - V \cot \theta + (A_{sx1} + A_{sx2}) E_s \Omega$$

donde el subíndice "EE" indica que las armaduras longitudinales superior e inferior están en régimen elástico.

$$b) \quad f_{EP} [\theta, \varepsilon_1] = \frac{b_w \alpha f_{ctm} z}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} - V \cot \theta + A_{sx1} E_s \Omega + A_{sx2} f_{yx2} - \frac{\kappa A_{cx2} \alpha_{x2} f_{ctm}}{1 + \sqrt{500 \Omega}}$$

donde el subíndice "EP" indica que la armadura longitudinal inferior está en régimen elástico, mientras que la armadura longitudinal superior está en régimen plástico.

$$c) \quad f_{PP} [\theta, \varepsilon_1] = \frac{b_w \alpha f_{ctm} z}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} - V \cot \theta + A_{sx1} f_{yx1} + A_{sx2} f_{yx2} - \frac{\kappa f_{ctm} (A_{cx1} \alpha_{x1} + A_{cx2} \alpha_{x2})}{1 + \sqrt{500 \Omega}}$$

donde el subíndice "PP" indica que tanto la armadura longitudinal inferior como la longitudinal superior han alcanzado el régimen plástico.

$$d) \quad g_E [\theta, \varepsilon_1] = \frac{b_w \alpha f_{ctm} s}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} - \frac{V \cdot s}{z} \tan \theta + A_{st} E_s \Psi$$

donde el subíndice "E" indica que la armadura transversal permanece en régimen elástico.

$$e) \quad g_P [\theta, \varepsilon_1] = \frac{b_w \alpha f_{ctm} s}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}} - \frac{V \cdot s}{z} \tan \theta + A_{st} f_{yt} - \frac{\kappa A_{ct} \alpha_t f_{ctm}}{1 + \sqrt{500 \Psi}}$$

donde el subíndice "P" indica que la armadura transversal ha alcanzado el régimen plástico.

Siendo:

$$\Omega = \frac{\varepsilon_1 \tan^2 \theta + \lambda \varepsilon_c}{1 + \tan^2 \theta} \quad (\text{factor de comportamiento de la armadura longitudinal})$$

$$\Psi = \frac{\varepsilon_1 + \lambda \varepsilon_c \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (\text{factor de comportamiento de la armadura transversal})$$

con

$$\lambda = 1 - \sqrt{1 - \frac{\frac{V(\cot \theta + \tan \theta)}{b_w z} - \frac{f_{ctm} \alpha}{1 + \sqrt{500 \varepsilon_1}}}{\text{Min} \left\{ f_c, \frac{f_c}{0.8 + 170 \varepsilon_1} \right\}}}$$

Una vez realizada la reducción del sistema a sólo dos incógnitas, es posible proceder a la representación gráfica del mismo, a fin de obtener información a

priori sobre la ubicación y número de las soluciones. De esta forma se puede discriminar acerca de la consistencia o inconsistencia de este último de una forma fácil e inmediata. En la figura 1a se muestran las curvas formadas por los ceros de las funciones  $f$  y  $g$  cuando el cortante  $V$  toma el valor experimental de agotamiento  $V_{exp}=255230$  N del espécimen H 75/4 (Cladera et al., cf. [3]); en dicha figura se ha representado el valor del parámetro  $\kappa$  a partir del cual el sistema comienza a tener solución. La figura 1b corresponde también al espécimen H 75/4 y en ella se muestra el valor de  $\kappa$  a partir del cual el sistema deja de tener solución; en ambas figuras se ha supuesto régimen elástico para la armadura longitudinal inferior y superior, y régimen plástico para la armadura transversal (hipótesis de comportamiento denotada EEP). En la figura 2 se muestra el conjunto de soluciones  $(\varepsilon_1, \kappa)$  del sistema; esta curva la denominamos *curva de consistencia* del sistema. Como se puede observar en las figuras 1a y 1b, y en la figura 2, la solubilidad del sistema depende del parámetro  $\kappa$ , existiendo un intervalo  $[\kappa_{inicial}, \kappa_{final}]$  fuera del cual el sistema carece de solución. En la figura 2 se ha representado en color verde el conjunto de puntos  $(\varepsilon_1, \kappa)$  que verifican la hipótesis de comportamiento asumida (EEP), y en color rojo aquéllos que no la verifican.

Si se deshace la reducción practicada al sistema, es posible reconstruir toda la solución a partir del valor de  $\varepsilon_1$  y  $\theta$ , y calcular el valor teórico de la tensión en cercos  $\sigma_{st}$  asociado a cada uno de los puntos  $(\varepsilon_1, \kappa)$  que integran la curva de consistencia de la figura 2. Luego se calcula para cada punto la diferencia entre la tensión teórica  $\sigma_{st}$  y la tensión experimental en cercos ( $\sigma_{st,exp}$ ), y finalmente se determina un valor óptimo ( $\kappa_{opt}$ ) para el cual la diferencia  $|\sigma_{st} - \sigma_{st,exp}|$  es mínima.

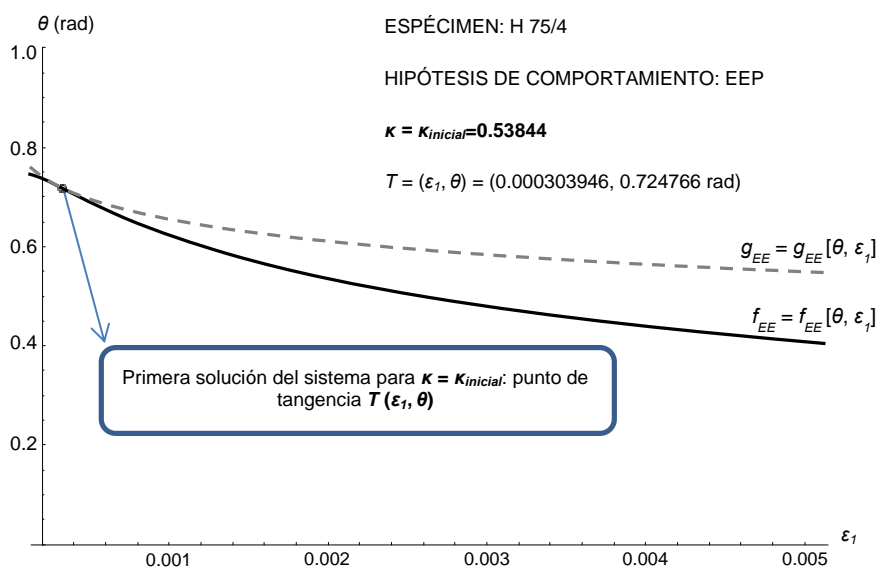


Figura 1a: Entrada de las curvas  $f=0$  y  $g=0$  en la región de consistencia del espécimen H75/4. Parámetros:  $V = 255230$  N;  $\kappa = \kappa_{inicial} = 0.53844$ ; hipótesis de comportamiento: EEP.

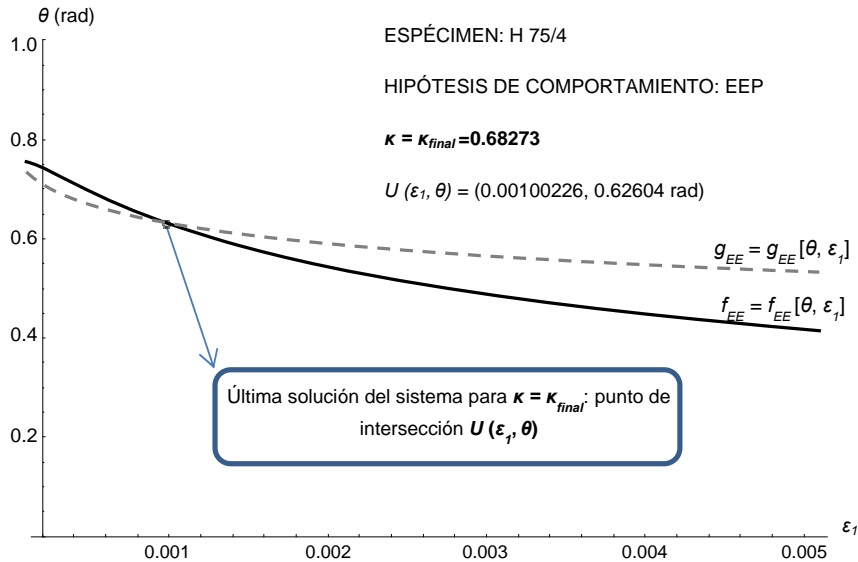


Figura 1b: Salida de las curvas  $f=0$  y  $g=0$  de la región de consistencia del espécimen H75/4. Parámetros:  $V = 255230$  N;  $\kappa = \kappa_{final} = 0.68273$ ; hipótesis de comportamiento: EEP.

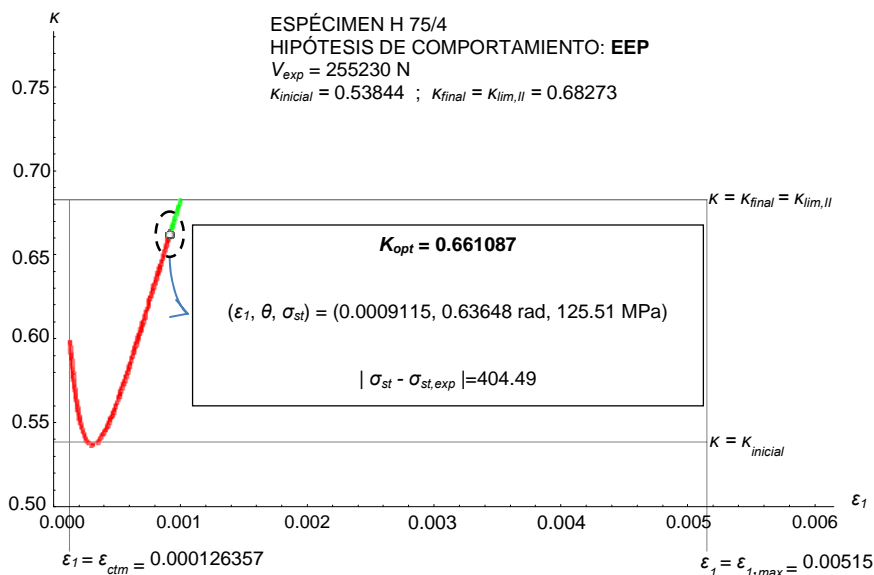


Figura 2: Curva de consistencia del sistema y par  $(\epsilon_1, K_{opt})$  del espécimen H75/4 para el que la respuesta del modelo de cortante es óptima.

El procedimiento antes descrito se ha aplicado a un conjunto de especímenes contenidos en la base de datos de Reineck et al. [6], los cuales han sido ensayados a cortante hasta alcanzar, bien la cedencia de la armadura transversal, bien el agotamiento a compresión del hormigón. El resultado obtenido

es una nube de puntos como la que se muestra en la figura 3, en la que se ha practicado un ajuste de la relación  $\kappa - \varepsilon_1$  mediante regresión por mínimos cuadrados; la función de regresión empleada es polinómica de grado 3.

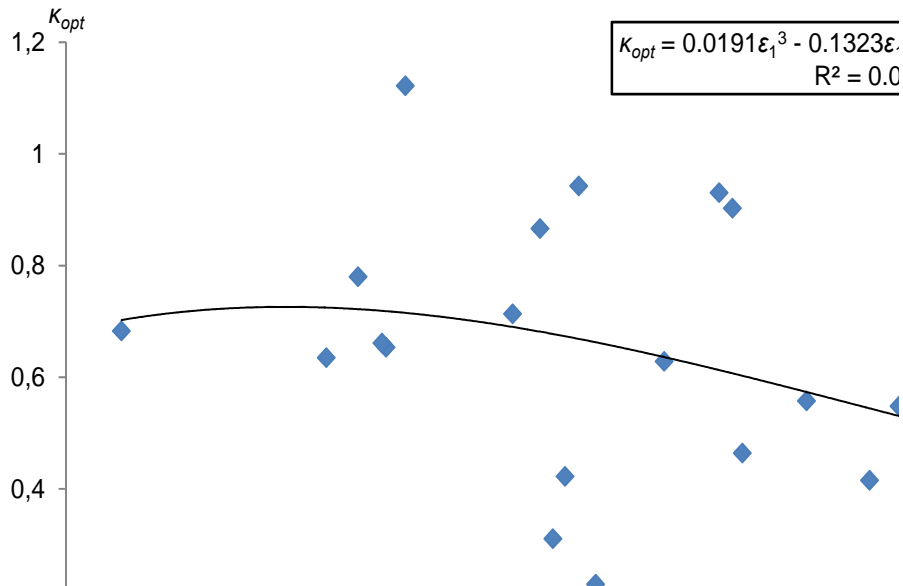


Figura 3: Curva de regresión polinómica cúbica de los pares óptimos  $(\varepsilon_1, \kappa_{opt})$  para los que la tensión en cercos es más próxima a la tensión de agotamiento experimental de los especímenes consistentes.

### **Ajuste del parámetro de degradación del hormigón por medio de algoritmos evolutivos.**

Los algoritmos genéticos son algoritmos evolutivos de búsqueda y optimización inspirados en los procesos naturales de reproducción de los seres vivos y de evolución de las especies [2]. Son métodos generales de optimización que desde su primer desarrollo en los años '70 del siglo XX hasta la actualidad han sido aplicados con éxito a numerosos problemas complejos.

Para el problema de determinar la relación entre el parámetro de degradación  $\kappa$  y la deformación principal a tracción  $\varepsilon_1$  se ha elegido la familia de funciones polinómicas cúbicas  $\{\kappa(\varepsilon_1) = a\varepsilon_1^3 + b\varepsilon_1^2 + c\varepsilon_1 + d; a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$  para expresar  $\kappa$  en términos de  $\varepsilon_1$ . Es posible que en el efecto de degradación del hormigón por cortante intervengan otros parámetros del sistema además de la deformación principal de tracción ( $\varepsilon_1$ ); no obstante, y en una primera aproximación al problema, consideramos la deformación a tracción suficientemente representativa. A partir de una población inicial de funciones de la anterior familia, y utilizando un indicador que mida la idoneidad de cada individuo para que su información genética pase a la generación siguiente, el algoritmo genético es capaz de evolucionar dicha población hasta obtener uno o varios individuos óptimos después de un número suficiente de generaciones.

El número de individuos que forman la población no varía de una generación a otra, de forma que se mantiene el tamaño de la población inicial. Este número se ha establecido en  $n=100$  individuos, siguiendo las estimaciones de DeJong y de Grefenstette (cf. [4]). La población inicial, o generación cero, debe contener individuos (funciones) cuya secuencia genética favorezca la obtención del óptimo global por el algoritmo genético, o cuanto menos logre que el mayor número posible de individuos sea consistente. Para ello, una buena parte de la población inicial se construye por adición de cadenas genéticas obtenidas mediante la generación aleatoria de bits (0 y 1), mientras que el resto de la población se cubre mediante la introducción manual de cierto número de cadenas generadas a partir de funciones  $\kappa(\varepsilon_1)$  cuyas gráficas intersectan al menos a una de las curvas de consistencia de cada espécimen.

El algoritmo genético ha sido implementado usando el lenguaje de programación del sistema de cálculo Mathematica®. Las probabilidades de mutación y crossover se han fijado en 0.5 y 0.8 respectivamente. Durante el ajuste del test se ha comprobado que 20 bits son suficientes para codificar de forma precisa cada coeficiente. Como consecuencia de la alta idoneidad de algunas funciones de la población inicial y el alto índice de dispersión de los puntos ( $\varepsilon_1$ ,  $\kappa_{opt}$ ) representados en la Fig. 3, la curva de idoneidad máxima de la población aumenta muy lentamente. La figura 4 muestra la evolución de las idoneidades media y máxima después de las primeras 50 generaciones de una ejecución del algoritmo. Aunque se aprecia un crecimiento en la idoneidad media de la población, la idoneidad máxima apenas aumenta (en este caso hasta el 19.1228%).

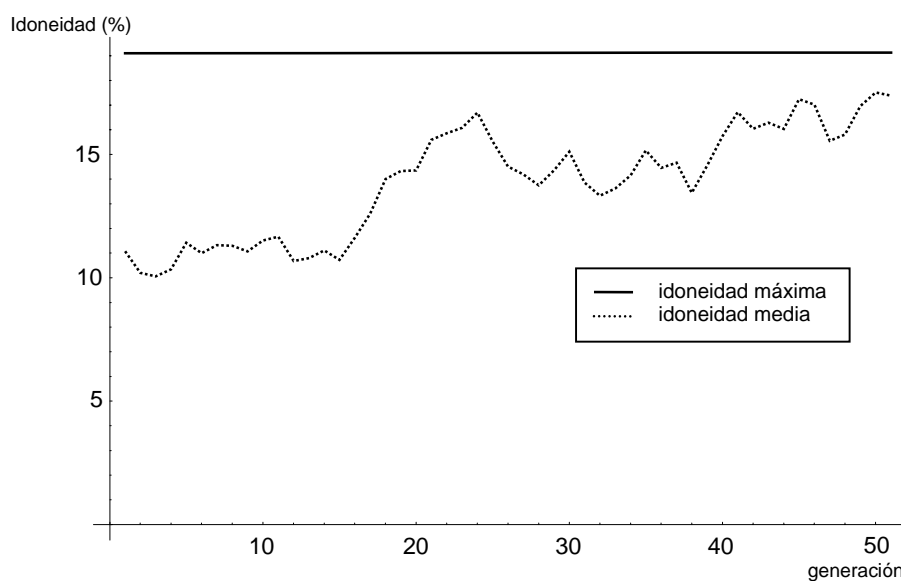


Figura 4: Evolución de las idoneidades media y máxima en la primera ejecución del algoritmo genético.

La función con idoneidad más alta calculada en las primeras 50 generaciones es la que tiene por coeficientes  $a=0.0298$ ,  $b=-0.4269$ ,  $c=0.4549$  y  $d=1.391$ . En la figura 5 se muestra la representación gráfica de esta función junto con el ajuste realizado al conjunto de puntos  $(\varepsilon_1, \kappa)$  obtenidos en [Gil-Martín et al., 2009] para la viga del ensayo de Abersman y Conte, y la nube de puntos  $(\varepsilon_1, \kappa_{opt})$  representado en la figura 3.

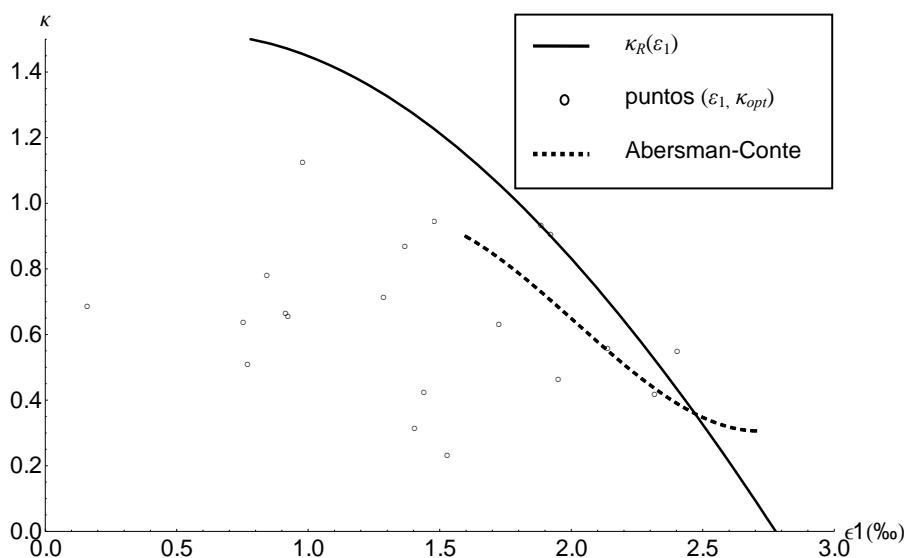


Figura 5: Curva de la función  $\kappa(\varepsilon_1)=a\varepsilon_1^3+b\varepsilon_1^2+c\varepsilon_1+d$  con  $a=0.0298$ ,  $b=-0.4269$ ,  $c=0.4549$  y  $d=1.391$ , obtenida como función de idoneidad máxima en la primera ejecución del algoritmo genético, y función de ajuste de los puntos  $(\varepsilon_1, \kappa)$  de Abersman-Conte.

## Conclusiones.

El parámetro  $\kappa$  que corrige el área efectiva de hormigón a tracción debe ser formulado como una función de la deformación a tracción, entre otros parámetros, de tal manera que el área efectiva de hormigón ( $A_c$ ) no sea constante, sino que varíe a medida que aumenta la degradación del hormigón, al igual que lo hace la tensión media de tracción en hormigón y acero. Ello ha sido posible gracias al diseño de un algoritmo genético el cual ha permitido:

- Por un lado, la incorporación del efecto de degradación del hormigón en el diseño a cortante de una viga de hormigón armado, para lo cual ha sido preciso la introducción en el modelo constitutivo del acero de

una relación algebraica entre el citado parámetro  $\kappa$  y la deformación a tracción  $\varepsilon_1$ .

- Por otro lado, optimizar la relación entre  $\kappa$  y  $\varepsilon_1$  en base a los datos experimentales disponibles, lo que se traduce en una mejora cuantitativa de la respuesta numérica del modelo de cortante.

La implementación del referido algoritmo ha requerido, con carácter previo, la reducción del modelo de cortante, lo que lleva aparejada una profunda caracterización de la región de consistencia del sistema general de ecuaciones de cortante. Por primera vez ha sido posible representar gráficamente el sistema de cortante y observar de forma directa la manera en que variables que juegan un papel central, como la deformación principal de tracción o el ángulo de inclinación de biela, condicionan la respuesta del sistema.

El diseño de una herramienta numérica capaz de incorporar el efecto de degradación del hormigón en la respuesta resistente del acero, así como optimizar dicho efecto -mejorando de esta forma la respuesta global del modelo de cortante- representa un avance importante en el estudio analítico de las Teorías de Campo de Compresiones y sirve de base para el desarrollo de futuros trabajos en este ámbito.

## Referencias.

- [1] *Código modelo CEB-FIP 1990 para hormigón estructural*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Grupo Español del Hormigón y Asociación Técnica Española del Pretensado.
- [2] Coley, D.A., (1999) *An Introduction to Genetic Algorithms for Scientists and Engineers*, World Scientific Publishing, Singapore.
- [3] Cladera Bohigas, A., Marí Bernat, A. (2002) *Shear Design of Reinforced High-Strength Concrete Beams*, Universidad Politécnica de Cataluña (Dpto. de Ingeniería de la Construcción), Barcelona.
- [4] Davis, L., (1991) *Handbook of Genetic Algorithms*, Van Nostrand Reinhold, New York.
- [5] Gil Martín, L.M., Hernández Montes, E., Aschheim, M., Pantazopoulou, S. (2009) *Refinements to Compression Field Theory, with Application to Wall-Type Structures*. American Concrete Institute, ACI Special Publication (265 SP), pp 123-142.
- [6] Reineck, K. - H., Kuchma, D. A., Fitik, B. (2011) *Formelsammlung für die Datenerhebungsdatei der Stahlbetonbalken mit Bügel (vsw-RC\_DS) unter Einzellasten*.



## DOMINIOS DE DEFORMACIÓN REFERIDOS A LA EXCENTRICIDAD DE CÁLCULO PARA EL DISEÑO ÓPTIMO DE SECCIONES RECTANGULARES SOLICITADAS A FLEXO-COMPRESIÓN.

D. López Martín<sup>1A#</sup>, L.M. Gil Martín<sup>1B</sup>, E Hernández Montes<sup>1C</sup>, Mark Aschheim<sup>2A</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Mecánica de Estructuras e I.H. Universidad de Granada. Campus de Fuentenueva, 18072 Granada (Spain). E-mail: dlopezm@ugr.es<sup>1A</sup>; mlgil@ugr.es<sup>1B</sup>; emontes@ugr.es<sup>1C</sup>

<sup>2</sup> Civil Engineering Department, Santa Clara University, 500 El Camino Real, Santa Clara, CA 95053, United States E-mail: maschheim@scu.edu<sup>2A</sup>

**Keywords:** hormigón, flexión compuesta, compresión compuesta, excentricidad, diseño, armado.

### Abstract.

El problema de diseño de secciones solicitadas a flexo-compresión es complejo e indeterminado. Se hace necesario añadir una condición para que el problema tenga solución. Las condiciones  $A_{s1} = A_{s2} = 0$ ,  $A_{s1} = 0$ ,  $A_{s2} = 0$ ,  $x = x_{lim}$  ó  $x = \infty$  conducen a un armado óptimo. Este trabajo presenta un diagrama de dominios referidos a la excentricidad de cálculo del cual se puede obtener la condición adicional a imponer y las ecuaciones que resuelven el problema. La solución es directa y sin tanteos. La simplicidad de las ecuaciones permite un cálculo manual.

### EL PROBLEMA DE DISEÑO.

El problema de diseño de secciones solicitadas a flexo-compresión es complejo y no exento de dificultades [1]. Las razones son fundamentalmente dos. La primera es que nos encontramos frente a un problema cuya solución es no lineal. La segunda es que en su primer planteamiento el problema es indeterminado, necesitándose añadir al menos una condición adicional para dar solución al problema.

Dada la dificultad del problema Messenger et al [2] sostienen que: "A mano no se puede resolver el problema de dimensionamiento...lo que conduce a tanteos". Sin embargo, en este trabajo se propondrá un método de cálculo manual y sin tanteos.

Otros, como Calavera [3], se limitan a proponer las ecuaciones que resuelven el problema según el dominio de agotamiento. Pero sin aclarar "a priori" cuáles se deben utilizar, lo que conduce a realizar tanteos. Además, tales ecuaciones se han deducido para la condición armaduras simétricas, lo cual es frecuentemente aplicable a pilares pero no a vigas.

En lo que sigue vamos a desarrollar un procedimiento de cálculo que especifique sin tanteos el modo de agotamiento de la sección y las ecuaciones a aplicar para obtener un valor exacto de las

---

# corresponding author: D. López Martín

armaduras necesarias y no necesariamente iguales. Las ecuaciones serán ajustadas a lo establecido en la normativa europea: el eurocódigo EC-2 y su trasposición a la normativa española la Instrucción EHE-08.

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\text{Equilibrio del flector} \quad M_d = U_c \left( \frac{h}{2} - 0.4x \right) + U_1 \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) + U_2 \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) \quad \dots[\text{Ec.1}]$$

$$\text{Equilibrio del axil} \quad N_d = U_c + U_1 + U_2 \quad \dots[\text{Ec.2}]$$

$U_c = f_{cd} \cdot 0.8 \cdot x \cdot b$  capacidad mecánica o resultante de las tensiones en el hormigón

$U_1 = \sigma_{s1} \cdot A_{s1}$  capacidad mecánica o resultante de las tensiones en la armadura inferior.

$U_2 = \sigma_{s2} \cdot A_{s2}$  capacidad mecánica o resultante de las tensiones en la armadura superior.

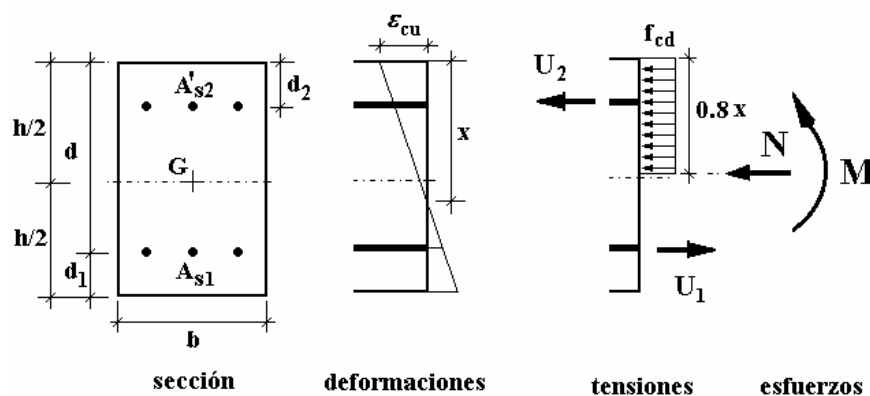
$\sigma_{s1}, \sigma_{s2}$  tensión en las armaduras inferior y superior respectivamente.

$A_{s1}, A_{s2}$  área transversal de las armaduras inferior y superior respectivamente.

$d_1, d_2$  recubrimiento de cálculo de las armaduras inferior y superior.

#### DISEÑO DE SECCIONES RECTANGULARES.

Este trabajo se limita a proponer un método de cálculo manual de armado óptimo para secciones transversales rectangulares utilizando los modelos de comportamiento de acero y hormigón más simples. Las áreas de las armaduras son la solución del problema de dimensionado.



**Figura 1.** Sección rectangular solicitada a flexo-compresión. Tensiones en el hormigón según diagrama rectangular.

# corresponding author: D. López Martín

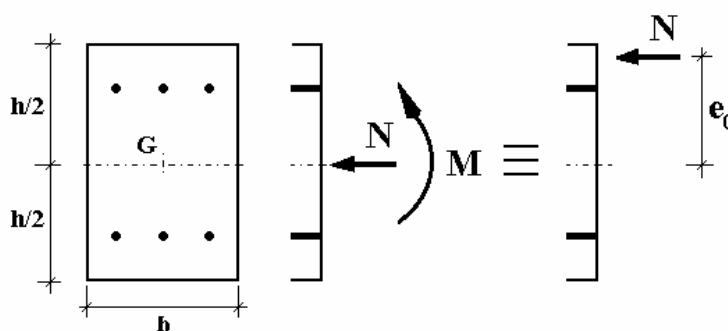
El problema es indeterminado, existiendo infinidad de soluciones de armado posible, aunque muchas de ellas lo son sin aprovechamiento máximo de las capacidades de la sección. Para que el problema sea resoluble se debe añadir una de las siguientes condiciones:

$$A_{s2} = 0 \text{ ó } x = x_{lim} \text{ máximo aprovechamiento del acero en tracción.}$$

$$A_{s1} = A_{s2} = 0, A_{s1} = 0 \text{ ó } x = \infty, \text{ máximo aprovechamiento del hormigón.}$$

Con cualquiera de estas condiciones se pretende una solución para el armado óptima o muy próxima a la óptima. Hoy día sabemos, por el "Teorema del armado óptimo en la flexión" enunciado por Hernández-Gil-Pasadas [4], que efectivamente la solución de armado óptimo para secciones a flexo-compresión es aquella en la que se verifica alguna de las condiciones anteriores.

Expresando las solicitaciones en forma de axil excéntrico Whitney [5] planteo el problema separadamente según el valor de la excentricidad. Así, quedó establecida la separación ya clásica entre grandes y pequeñas excentricidades



**Figura 2.** Flexo-compresión. El par es equivalente al axil excéntrico con excentricidad  $e_0 = M/N$  respecto al centro de gravedad (G) de la sección.

Tendremos gran excentricidad cuando en el agotamiento  $x \leq x_{lim}$  (máximo aprovechamiento de la armadura traccionada) y pequeña excentricidad con  $x > x_{lim}$  (máximo aprovechamiento del hormigón). Podemos traducir esta frontera expresada en términos de profundidad de la fibra neutra ( $x$ ) a otra expresada en términos de excentricidad ( $e_0$ ) con el estado de agotamiento mostrado en la **Figura 3** [6]. Se trata de una sección en agotamiento con  $x = x_{lim}$  y  $A_{s1} = 0$ , con la que se pretende el máximo aprovechamiento de la cabeza comprimida de hormigón sin perjuicio de la capacidad mecánica de la armadura inferior si la hubiera (flexión perfecta). En efecto, de ser  $A_{s1} \neq 0$ , como  $x = x_{lim}$  entonces  $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{yd}$  y en consecuencia  $\sigma_{s1} = f_{yd}$ .

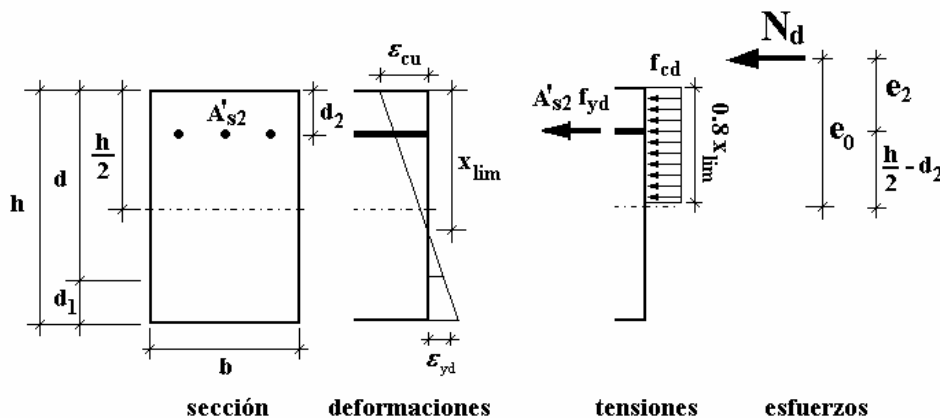
Si planteamos el equilibrio en la sección, tomando momentos en el c.d.g. de la armadura superior, tenemos:

---

# corresponding author: D. López Martín

$$e_o = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - \frac{f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b \cdot (0.4 x_{lim} - d_2)}{N_d} = e_{o\lim} \quad \dots \text{ [Ec.7]}$$

El valor de excentricidad que se obtienen de [Ec.7] lo denominamos  $e_{o\lim}$  y representa el valor de la excentricidad frontera tal que si  $e_o = M_d / N_d > e_{o\lim}$ , tendremos un problema de gran excentricidad. Entonces, para que exista equilibrio será necesaria armadura en posición inferior ( $A_{s1} \neq 0$ ) y estará solicitada a tracción con máximo aprovechamiento ( $x \leq x_{lim}$ ).



**Figura 3.** Sección rectangular solicitada a flexión flexión-compuesta con  $x = x_{lim}$  y sin armadura inferior. Tensiones en el hormigón según diagrama rectangular.

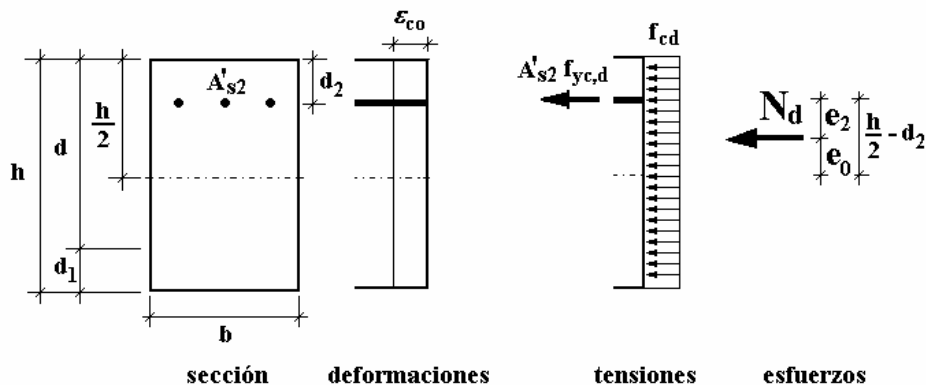
Por el contrario, si  $e_o = M_d / N_d \leq e_{o\lim}$ , tendremos un problema de pequeña excentricidad. Razonaríamos que, para que exista equilibrio, la armadura inferior debe estar en compresión lo cual es una contradicción, pues con  $x = x_{lim}$  esto es imposible. Se comprende que en esta situación el planteamiento debe ser diferente. La condición de flexión perfecta debe reemplazarse por la de máximo aprovechamiento de la sección de hormigón. Es decir, con  $0.8 x = h \rightarrow x \geq 1.25 h$ , con lo que el agotamiento se plantea en compresión compuesta.

Sin embargo, no siempre será necesario dimensionar con la sección completamente comprimida (compresión compuesta). Solamente cuando el axil  $N_d$  sea casi centrado será necesario proponer esta forma de agotamiento. Podemos plantear un nuevo agotamiento frontera, mostrado en la **Figura 4** [6].

En este caso, la combinación  $e_o - N_d$ , puede ser resistida con  $A_{s1} = 0$  y con toda la sección comprimida. Si planteamos el equilibrio en la sección, tomando momentos en el c.d.g. de la armadura superior, tenemos:

$$e_o = \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) - \frac{f_{cd} \cdot h \cdot b \cdot (h/2 - d_2)}{N_d} = e_{oh} \quad \dots \text{ [Ec.8]}$$

# corresponding author: D. López Martín



**Figura 4.** Sección rectangular solicitada a flexión compresión-compuesta con  $x = \infty$  y sin armadura inferior  $A_{s1} = 0$ .

El valor de excentricidad que se obtienen de [Ec.8] lo denominamos  $e_{oh}$ . Veamos el significado de este nuevo valor frontera. Si el axil está muy centrado, tendremos  $e_o = M_d / N_d < e_{oh}$ , entonces será imposible establecer el equilibrio, a no ser que tengamos armadura inferior comprimida ( $A'_{s1} \neq 0$ ). Por el contrario, si  $e_o = M_d / N_d \geq e_{oh}$ , entonces la armadura inferior no será necesaria. Es fácil comprobar que en todo momento  $e_{olim} > e_{oh}$ . Es decir, los diferentes planteamientos que se pueden dar al problema son excluyentes entre si.

Aún con el problema de gran excentricidad, si la condición impuesta era no superar  $x_{lim}$ , se nos pueden plantear dos situaciones. Hemos visto que en la situación  $x = x_{lim}$ , el flector máximo que puede resistir la sección sin armadura superior es el llamado momento límite:

$$M_{lim} = f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (d - 0.4 x_{lim})$$

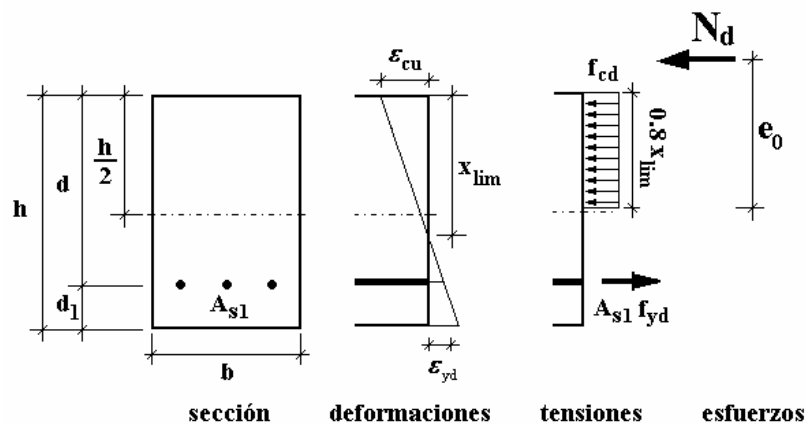
Pues bien, teniendo gran excentricidad si planteamos el equilibrio tomando momentos en el c.g.d. de la armadura de tracción puede ocurrir  $e_1 \cdot N_d = M_d < M_{lim}$ , en cuyo caso la sección se agotará con  $x < x_{lim}$ . O bien, puede ocurrir que  $e_1 \cdot N_d = M_d \geq M_{lim}$ , en cuyo caso impondremos la condición  $x = x_{lim}$  para no desaprovechar la armadura traccionada y será necesario disponer armadura superior ( $A_{s2} \neq 0$ ).

Del equilibrio (ver **Figura 5**):

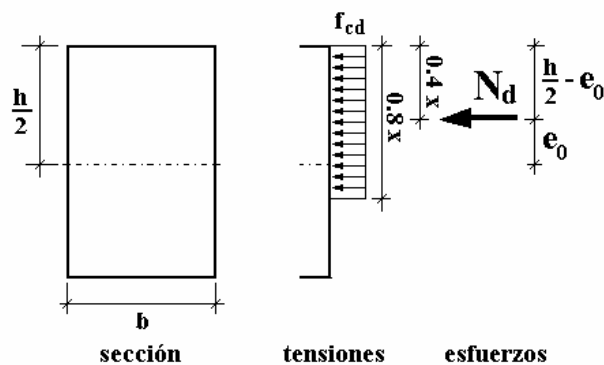
$$e_o = -\left(\frac{h}{2} - d_1\right) + \frac{f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (d - 0.4 x_{lim})}{N_d} = e_{o2} \quad \dots \text{ [Ec.9]}$$

El valor de excentricidad que se obtienen de [Ec.9] lo denominamos  $e_{o2}$ . Este será el valor de la excentricidad a partir del cual será necesaria la armadura superior y estará comprimida ( $A'_{s2} \neq 0$ ).

# corresponding author: D. López Martín



**Figura 5.** Sección rectangular solicitada a flexión flexión-compuesta con  $x = x_{lim}$  y sin armadura superior  $A_{s2} = 0$ . Tensiones en el hormigón según diagrama rectangular.



**Figura 6.** Sección rectangular solicitada a flexión flexión-compuesta sin armaduras  $A_{s1} = A_{s2} = 0$ . Tensiones en el hormigón según diagrama rectangular.

Es importante destacar que en flexo-compresión no siempre es posible dimensionar en agotamiento. En efecto, para cualquier valor de la excentricidad entre  $0 \leq e_0 < h/2$ , siempre que sea  $N_d \leq f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b$  la sección de hormigón puede resistir sin armaduras y con una tensión en el hormigón  $\sigma_c \leq f_{cd}$ . Observando la **Figura 6**, vemos que en la situación límite  $\sigma_c = f_{cd}$ :

$$N_d = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b \quad \text{y además:} \quad e_0 = \frac{h}{2} - 0.4 x$$

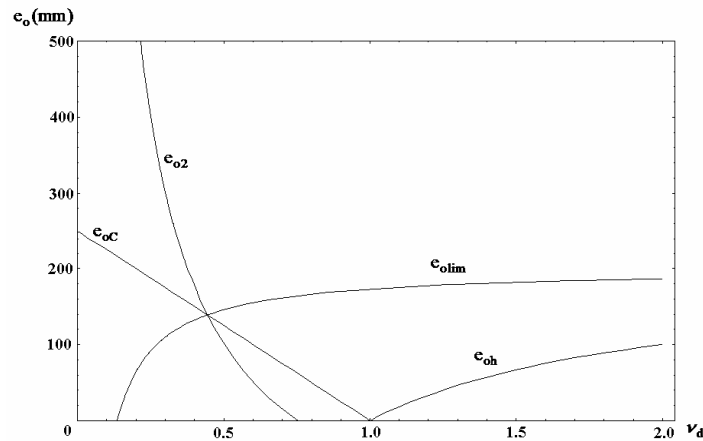
Despejando  $x$  en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda llegamos a:

---

# corresponding author: D. López Martín

$$e_o = \frac{1}{2} \left( h - \frac{N_d}{f_{cd} \cdot b} \right) = e_{oC} \quad \dots \quad [\text{Ec.10}]$$

El valor de excentricidad que se obtienen de [Ec.10] lo denominamos  $e_{oC}$ . Este será el valor de la excentricidad por debajo del cual no será necesaria ninguna armadura ( $A_{s1} = A_{s2} = 0$ ).



**Figura 7.** Valores de las diferentes excentricidades frontera en función del axil reducido para una sección de hormigón  $f_{ck}=25\text{MPa}$ , armada con acero B 500 y con  $h=500\text{mm}$ ,  $d_1=d_2=h/10$ .

Tras todo lo dicho ya podemos recapitular y decir que para dimensionar una pieza de hormigón armado en flexo-compresión deberemos plantear el equilibrio de la sección de alguna de las cinco formas que se muestran en la **Figura 8**. La elección de uno u otro caso esta determinada exclusivamente por el valor de la excentricidad. Estudiémoslos en detalle.

**Caso 0.** ( $e_o \leq e_{oC}$ ) La condición adicional será: sin armaduras ( $A_{s1} = A_{s2} = 0$ ), pues la sección bruta no se agota. Por el equilibrio de momentos y de fuerzas:

$$\sigma_c = \frac{N_d}{0.8 x \cdot b} = 0.64 \frac{N_d}{b (h - 2 e_o)} \leq f_{cd}$$

**Caso 1.** ( $e_o < e_{oH}$ ) La condición adicional será: toda la sección comprimida ( $x = \infty$ ). En consecuencia, serán necesarias ambas armaduras ( $A_{s1} \neq 0$  y  $A_{s2} \neq 0$ ). Las compresiones en el hormigón serán máximas. Planteamos el equilibrio, tomando momentos en el c.d.g. de la armadura superior:

$$U_1 = \frac{e_2 \cdot N_d - U_{CT} (h/2 - d_2)}{(d - d_2)}, \text{ con } U_{CT} = f_{cd} \cdot h \cdot b. \text{ Entonces: } A_{s1}' = \frac{U_1}{f_{yc,d}}$$

# corresponding author: D. López Martín

$$U_2 = N_d - (U_{CT} + U_1) \text{ y entonces: } As'_2 = \frac{U_2}{f_{yc,d}}$$

**Caso 2.** ( $e_{oh} \leq e_o \leq e_{olim}$ ) La condición adicional será que no se necesita armadura inferior ( $A_{s1} = 0$ ). En consecuencia, la sección estará total o parcialmente comprimida ( $1.25 h \geq x > x_{lim}$ ). Planteamos el equilibrio, tomando momentos en el c.d.g. de la armadura superior:

$$e_2 \cdot Nd = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b \cdot (0.4 x - d_2) \text{ ecuación de segundo grado que proporciona } x.$$

Conocida  $x$  calculamos:

$$U_C = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b, \quad U_2 = N_d - U_C \text{ y entonces: } As'_2 = \frac{U_2}{f_{yd}}$$

**Caso 3.** ( $e_o > e_{olim}$  y  $e_o > e_{o2}$ ) Ocurre que  $e_1 \cdot N_d = M_d > M_{lim}$ . Si queremos dimensionar con máximo aprovechamiento de la armadura traccionada, la condición adicional será:  $x = x_{lim}$ . En consecuencia, será necesaria armadura superior ( $A_{s2} \neq 0$ ). Planteamos el equilibrio, tomando momentos en el c.d.g. de la armadura inferior:

$$e_1 \cdot N_d = f_{cd} \cdot 0.8 x_{lim} \cdot b (d - 0.4 x_{lim}) + U_2 (d - d_2) = M_{lim} + U_2 (d - d_2)$$

De esta ecuación lineal obtenemos:

$$U_2 = \frac{e_1 \cdot N_d - M_{lim}}{(d - d_2)} \text{ y entonces: } As'_2 = \frac{U_2}{f_{yd}}$$

$$U_1 = U_C + U_2 - Nd \text{ y entonces: } As_1 = \frac{U_1}{f_{yd}}$$

**Caso 4.** ( $e_{olim} < e_o \leq e_{o2}$ )

También estamos en situación de gran excentricidad, pero con  $e_1 \cdot N_d = M_d \leq M_{lim}$ . Por tanto, la condición adicional será que no se necesita armadura superior ( $A_{s2} = 0$ ). En consecuencia, la sección agotada con máximo aprovechamiento de la armadura traccionada ( $x \leq x_{lim}$ ). Planteamos el equilibrio, tomando momentos en el c.d.g. de la armadura inferior:

$$e_1 \cdot N_d = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b (d - 0.4 x) \text{ ecuación de segundo grado que proporciona } x.$$

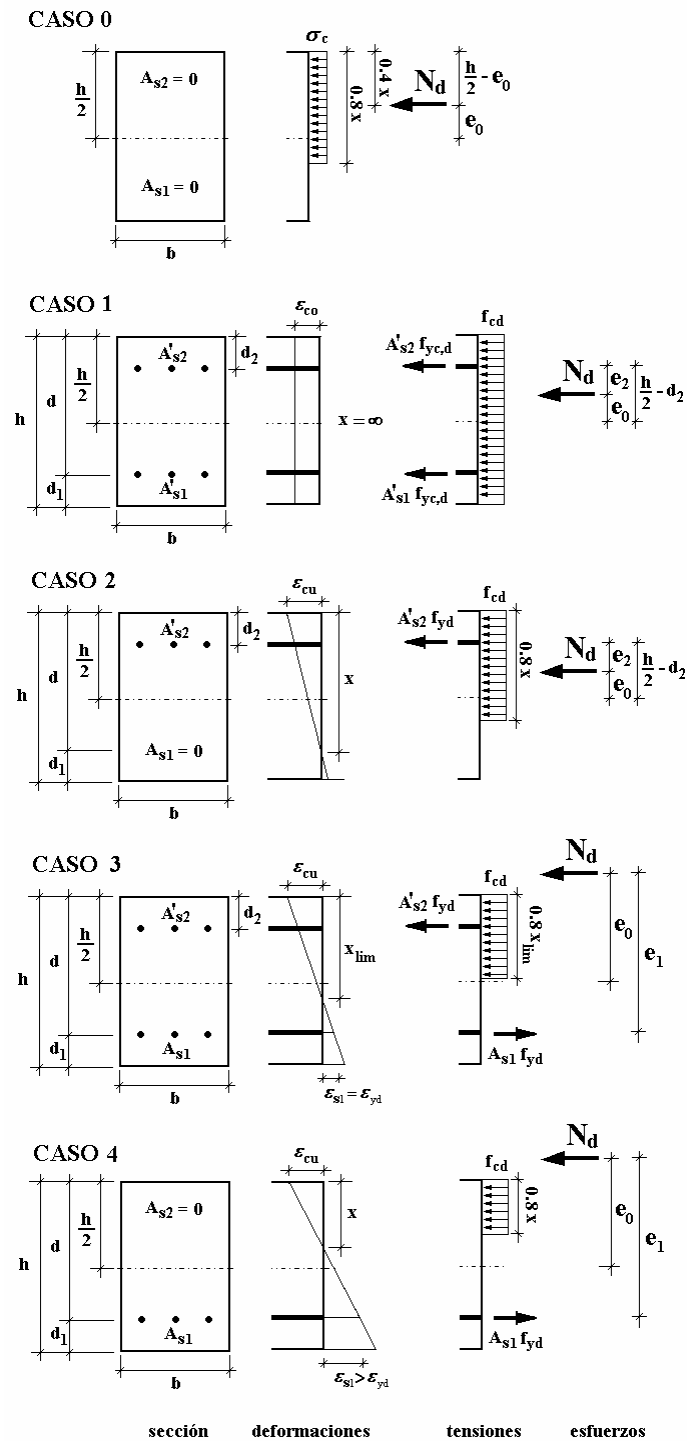
Conocida  $x$  calculamos:

$$U_C = f_{cd} \cdot 0.8 x \cdot b, \quad U_1 = U_C - Nd \text{ y entonces: } As_1 = \frac{U_1}{f_{yd}}$$

---

# corresponding author: D. López Martín



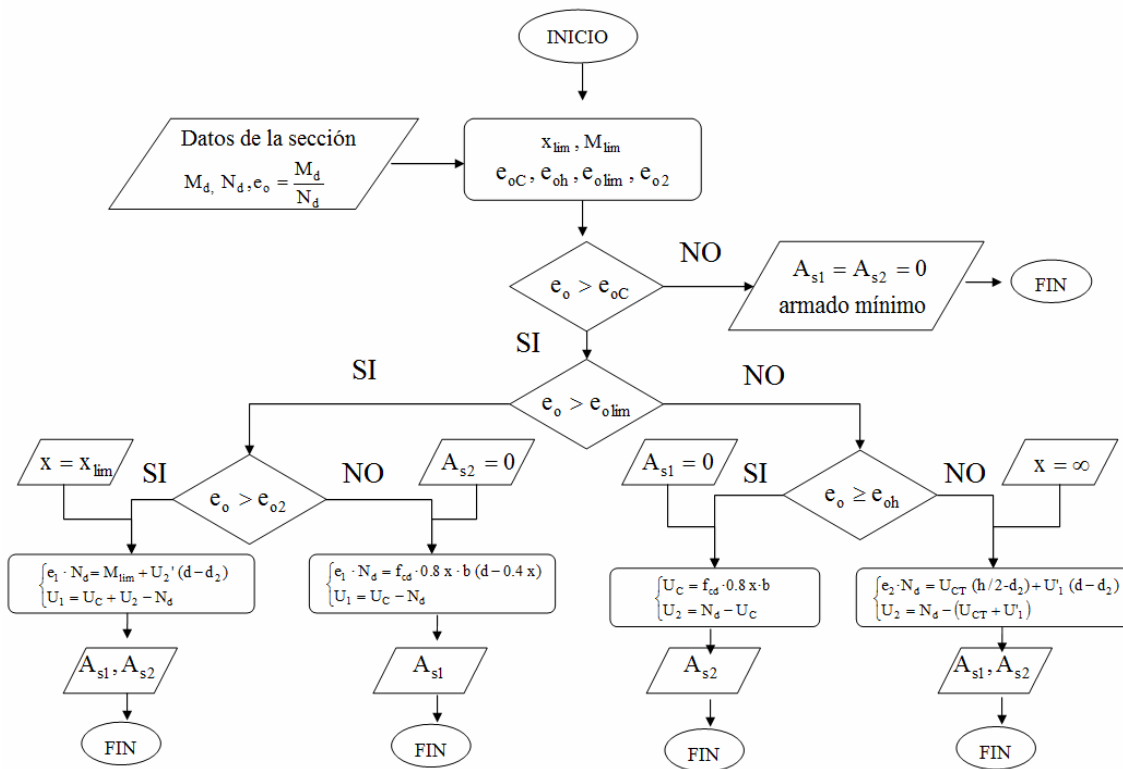


**Figura 8.** Esquemas de agotamiento con armado óptimo en secciones solicitadas a flexo-compresión.

# corresponding author: D. López Martín

Resumiendo, la solución al armado se podrá calcular con alguno de los planeamientos que se han mostrado como Caso 0, 1, 2, 3 y 4. Dependiendo de en cuál nos encontremos, se plantearán las condiciones adicionales:  $A_{s1} = A_{s2} = 0$ ,  $x = \infty$ ,  $A_{s1} = 0$ ,  $A_{s2} = 0$  ó  $x = x_{lim}$  respectivamente.

Conociendo estos cinco casos es posible abordar el cálculo de las armaduras para cualquier combinación  $e_o - N_d - M_d$  y obtener el armado óptimo. Bastará comparar  $e_o$  con los valores de excentricidad frontera  $\{e_{oC}, e_{oh}, e_{olim}, e_{o2}\}$  para saber el caso de aplicación. Como, ya se ha dicho, el caso será único y la solución también. El proceso puede ser descrito mediante el diagrama de flujo mostrado en la **Figura 9**. A partir de él es posible realizar el cálculo manualmente o desarrollar herramientas informáticas que realicen el cálculo. Pese a lo rutinario que puede llegar a ser este proceso, éste no deja de ser laborioso, pues antes de plantear las ecuaciones de equilibrio en la sección se debe discernir en cuál de los casos estamos y el hecho de utilizar diferentes ecuaciones dependiendo del caso puede dificultar la visión del problema en su conjunto.



**Figura 9.** Diagrama de flujo. Proceso de dimensionado de secciones solicitadas a flexo-compresión.

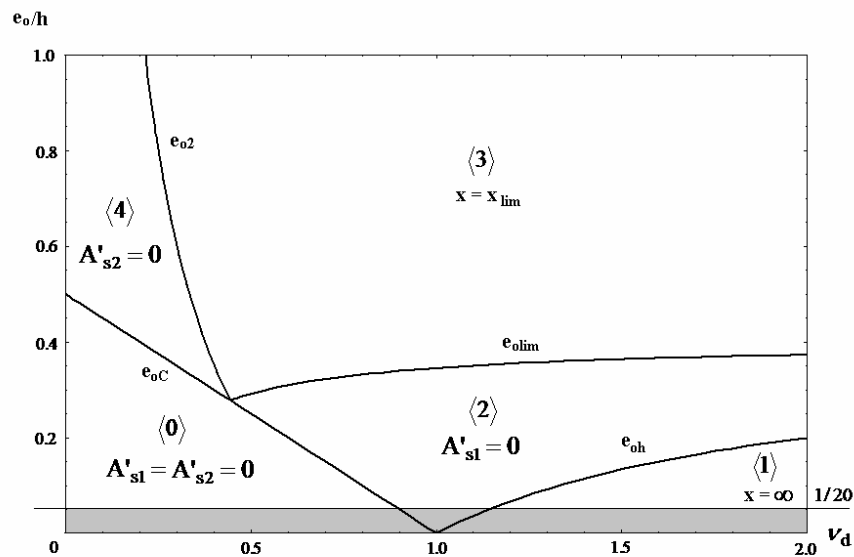
Una forma alternativa para conocer el caso de aplicación es consultar diagramas como el que se muestra en la **Figura 10**. Para crear este diagrama partimos de una representación como la de la **Figura 7**. Basándonos en los criterios de discriminación utilizados para establecer el caso de aplicación, es fácil saber que ramas de esas curvas son prescindibles y se eliminan. El resultando es

# corresponding author: D. López Martín

un gráfico compartimentado en cinco áreas:  $\langle 0 \rangle$ ,  $\langle 1 \rangle$ ,  $\langle 2 \rangle$ ,  $\langle 3 \rangle$  y  $\langle 4 \rangle$  separadas por las curvas de los valores frontera  $\{ e_{oC}, e_{oh}, e_{olim}, e_{o2} \}$ . Como consecuencia de la unicidad de la solución, dichas área no se solapan.

Llevando sobre este diagrama los valores de  $e_o - N_d$  transformados a valores adimensionales es inmediato conocer el caso de aplicación, la condición adicional a imponer y las ecuaciones que deben resolverse. Se excluye del diagrama la franja horizontal donde  $e_o/h < 1/20$ , de conformidad con lo que prescriben las normas EC-2 y EHE en materia de excentricidad de cálculo mínima.

La observación del diagrama de dominios permite comprender mejor como se comportan las secciones solicitada a flexo-compresión. En el diagrama se aprecia que ninguna recta vertical que se trace atraviesa más de dos o tres áreas de las cinco que tiene el diagrama. Es decir, para un axil de diseño y un sección de hormigón dados, es imposible que se puedan dar las cinco formas de agotamiento descritas con anterioridad variando simplemente el valor de su excentricidad.

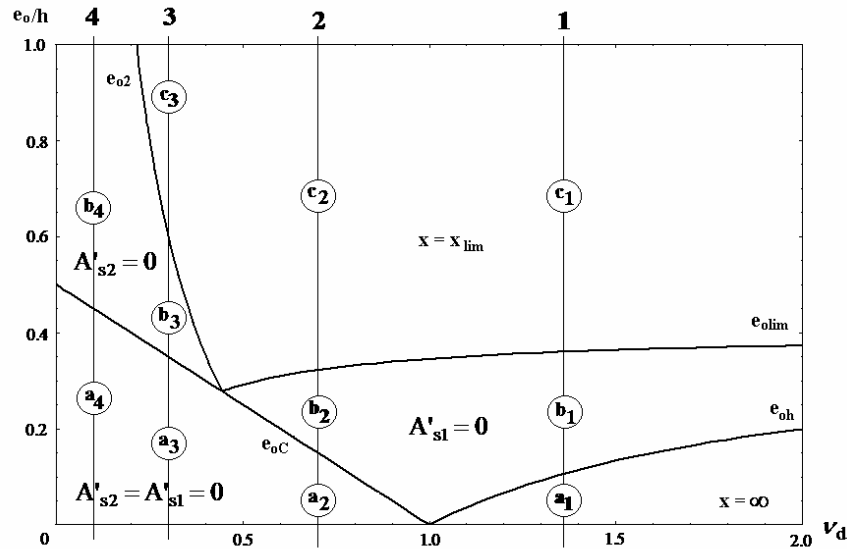


**Figura 10.** Diagrama  $e_o/h - \nu_d$ . Ejemplo para una sección de hormigón armada con acero B 500 y recubrimientos iguales  $d'=0.10h$ . Para cada caso se indica la condición adicional a utilizar.

Si nos fijamos en la vertical 1 de la **Figura 11** podemos ver que partiendo de una situación de compresión centrada a medida que aumenta el valor de las excentricidad la sección pasa por agotamiento con  $x = \infty$  ( $a_1$ ), luego por agotamiento con  $A'_{s1} = 0$  ( $b_1$ ) y finalmente con  $x = x_{lim}$  ( $c_1$ ). Es decir, la profundidad de la fibra neutra decrece según aumenta la excentricidad  $e_o$ . Pero en

# corresponding author: D. López Martín

todas se cumple que  $A'_{s2} \neq 0$ . Por tanto, para un valor de esfuerzo axial  $\nu_d > 1$  siempre será necesaria armadura superior con independencia de la excentricidad.



**Figura 11.** Diagrama  $e_o/h - \nu_d$ . Evolución del agotamiento con  $e_o$  para diferentes valores de  $\nu_d$ .

Observando las verticales 2, 3 y 4 de la **Figura 11** se aprecia que en principio se puede resistir cualquier axial  $\nu_d \leq 1$  sin armaduras hasta un cierto valor de excentricidad ( $a_2, a_3$  y  $a_4$ ). En el caso de  $0.8 x_{lim}/h \geq \nu_d \geq 1$ , a partir de dicho valor de la excentricidad se necesita armadura superior, al menos, ( $b_2$  y  $c_2$ ) y de ser  $\nu_d < 0.8 x_{lim}/h$ , entonces el agotamiento siempre se produce con  $x \leq x_{lim}$  con ( $c_3$ ) o sin ( $b_3$  y  $b_4$ ) armadura superior.

También se aprecia que trazando una recta horizontal por  $e_o/h = 0.50$ , el semi-espacio superior que resulta corresponde a los casos de gran excentricidad tal y como los definen Meseguer et al [2]. Sin embargo, vemos que no pocos caso que deben ser tratados como gran excentricidad quedan por debajo de dicha recta.

Un caso frecuente es el diseños de pilares con armado simétrico:  $A'_{s1} = A'_{s2} = 0$ . Esta condición, como todas las anteriores deshace la indeterminación del problema de diseño permitiendo el cálculo de las armaduras.

Cuando se trata de piezas solicitadas con pequeña excentricidad, que es la forma en que típicamente están solicitados los pilares, bastará con calcular el área de la armadura más solicitada ( $A_{s2}$ ) con el procedimiento ya descrito y disponer  $A_{s1} = A_{s2}$ .

# corresponding author: D. López Martín

## CONCLUSIONES

- Con el presente trabajo se ha pretendido recuperar un enfoque del problema de diseño a flexo-compresión basado en un concepto geométrico tan elemental como la excentricidad equivalente.
- Se ha recopilado y completado una formulación de valores de excentricidad frontera entre tipos diferentes de agotamiento como  $e_{oC}$  y  $e_{o2}$ , que se añaden a los ya conocidos  $e_{o\lim}$  y  $e_{oh}$ .
- Se propone un método de cálculo completo, pues permite dar la solución de armado para cualquier par de esfuerzo ( $M_d$ ,  $N_d$ ) que puede resistir la sección.
- El método de cálculo que se propone utiliza la excentricidad equivalente como la variable suficiente para caracterizar el modo de agotamiento de la sección. Es decir, que permite elegir la condición adicional, de entre cinco posibles, que se debe imponer y las ecuaciones de equilibrio que resuelven el problema.
- El método no plantea aproximaciones o simplificaciones destacables más allá de la elección de leyes de comportamiento sencillas para acero y hormigón.
- El procedimiento conduce en todos los casos a una solución única que es la de armado óptimo para la combinación ( $M_d$  -  $N_d$ ) que se ha de resistir y es coherente con el enunciado del **Teorema del armado óptimo en la flexión** de Hernández-Gil-Pasadas.
- El método está formulado para cualquier valor de los recubrimientos, incluso para  $d_1 \neq d_2$ .
- Se presenta un diagrama adimensional de dominios de armado óptimo, referidos a la excentricidad  $e_o$ , como alternativa al tratamiento analítico de la excentricidad. Este diagrama es único y común para todas las secciones rectangulares con iguales recubrimientos y tipo acero utilizado para armar.
- Este diagrama también tiene valor pedagógico. Su observación y estudio permite entender mejor los complejos mecanismos que gobiernan la respuesta de una sección de hormigón armado cuando es solicitada a flexo-compresión.
- En todo caso, la formulación es lo bastante sencilla como para no necesitar de la asistencia un ordenador, pudiéndose realizar el cálculo manualmente.
- Particularizar el procedimiento para armadura simetría, típica de pilares, es posible. El proceso de cálculo resulta más breve.

---

# corresponding author: D. López Martín

## BIBLIOGRAFIA

- [1] García-Ortega M. (1959). Cálculo de secciones de hormigón armado. I.T.C. y C. Madrid.
- [2] García Meseguer A., Morán Cabré F. y Arroyo Portero (2009). Jiménez Montoya Hormigón Armado. Editorial Gustavo Gili. Barcelona.
- [3] Calavera J. (2008). Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón en masa, armado y pretensado. Tomo 2. INTEMAC. Madrid.
- [4] Hernández-Montes, E., Gil-Martín L.M., Pasadas-Fernández M. y Aschheim M. (2008). "Theorem of optimal reinforcement for reinforced concrete sections". *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Vol 36. 509-521.
- [5] Whitney, C. S, y Cohen, E. (1956). "Guide for Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete". *ACI Journal*, v. 28, No. 5, Nov. (Proceedings V.53), pp. 445-490.
- [6] Rodríguez Martín L.F. (1980). Curso de hormigón armado según la EH-80. C.O. de Arquitectos de Madrid. Servicio de publicaciones. Madrid.
- [7] Aschheim M, Hernández-Montes E. y Gil-Martín L. (2007). "Optimal domains for strength desing of rectangular sections for axial load and momento acoording Eurocode 2". *Engineering structures*, v. 29 pp. 1752-1760
- [8] Hernández-Montes, E., Gil-Martín L.M. y Aschheim M. (2005). "Design of concrete members subjected to uniaxial bending and compression using reinforcement sizing diagrams". *ACI Structural Journal*. Vol. Enero-Febrero. 150-158.

---

# corresponding author: D. López Martín

## **Estimación de la resistencia a cortante en elementos de hormigón armado sin armadura transversal sometidos a fatiga**

Juan Manuel Gallego <sup>A,1</sup>, Luis Albajar <sup>B</sup>, Carlos Zanuy <sup>C</sup>

Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Grupo de Ingeniería Estructural.  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid.  
Calle Profesor Aranguren s/n, 28040 Madrid (España). E-mail: jmgallego@caminos.upm.es<sup>A</sup>;  
lalbajar@caminos.upm.es<sup>B</sup>; czs@caminos.upm.es<sup>C</sup>

**Palabras clave:** Fatiga, cortante, hormigón armado, vigas, normativa.

### **Resumen**

El actual planteamiento de las normativas existentes, basadas en las clásicas curvas S-N para abordar el estudio de la fatiga por cortante en elementos de hormigón armado sin cercos, no es el más apropiado ya que en algunos casos pueden obtenerse incoherencias en los resultados. Al comparar las diferentes expresiones propuestas tanto en el Eurocódigo-2 como en las dos últimas ediciones del Código Modelo, se aprecia que los resultados obtenidos están condicionados por el valor de la resistencia estática a cortante, que dependerá a su vez de la expresión utilizada para calcular este valor. Por ello es necesario desarrollar un modelo mecánico racional, contrastado experimentalmente, que permita evaluar el número de ciclos resistentes de estos elementos bajo sollicitaciones de fatiga en función de varios parámetros (abertura de la fisura diagonal, tipo y tamaño máximo del árido, resistencia a tracción del hormigón, cuantía y diámetro de armadura longitudinal, ...) y del deterioro de los mecanismos resistentes del esfuerzo cortante.

### **1. Introducción**

Las actuales exigencias que presentan las estructuras de obra civil hacen que cada vez sea más importante considerar el comportamiento mecánico a largo plazo de todos los elementos estructurales que la integran. Este comportamiento está muy ligado a la actuación de cargas repetidas, que junto con las acciones de tipo reológico son dos de los factores que más condicionan a este tipo de estructuras. La mayor parte de las estructuras construidas y existentes hoy en día están sometidas a la acción de cargas cíclicas. Entre los casos más ilustrativos de este tipo de acciones y estructuras destacan los viaductos de alta velocidad sometidos a cargas repetidas asociadas al paso de los trenes, las estructuras marítimas sometidas a la acción variable tanto del viento como del oleaje u otros elementos estructurales de menor dimensión como pueden ser las losas de transición de puentes o las traviesas de ferrocarril, ambos sometidos a acciones de fatiga.

Históricamente las acciones de fatiga han estado asociadas al mundo de los metales donde el problema ha sido muy estudiado, llegando a conseguir un gran conocimiento de este fenómeno. Sin embargo, cuando se tratan otros materiales como es el caso del hormigón armado se evidencia un importante vacío en las normativas existentes que simplemente se han limitado a extrapolar a este material los resultados obtenidos en el campo de las estructuras metálicas. Diversos trabajos y

---

<sup>1</sup> corresponding author: Juan Manuel Gallego

publicaciones [1,2,3] en los que se ha estudiado el comportamiento de elementos de hormigón armado sometidos a fatiga, muestran que no es adecuado utilizar en el hormigón conceptos provenientes de las estructuras metálicas como pueden ser las tradicionales curvas S-N o reglas de acumulación de daño lineal tipo Palmgren-Miner. Entre las principales conclusiones extraídas de los trabajos estudiados se evidencia un marcado carácter no lineal del daño por fatiga en el hormigón.

En la figura 1 se muestra una sección transversal tipo de un viaducto de carretera con sección cajón. Estos viaductos tienen una losa superior por donde discurre el tráfico, y que por lo general se construye sin armadura transversal. Este tipo de estructuras están sometidas a acciones de tipo cíclico como consecuencia del paso de los vehículos pesados.

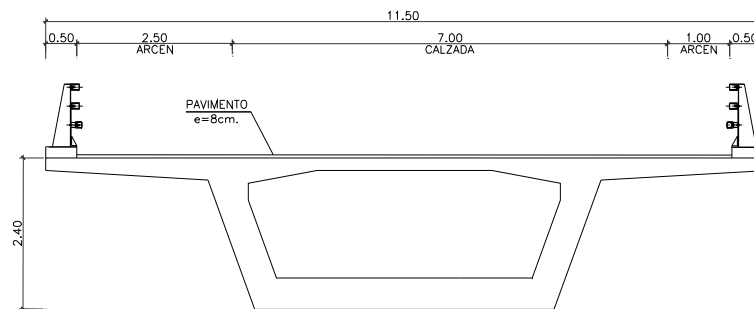


Figura 1: Sección transversal tipo de un viaducto de carretera.

Otro hecho que hace aún más importante este fenómeno, es el notable incremento de las solicitaciones sobre los viaductos tanto de carretera como de ferrocarril en los últimos años como consecuencia de las necesidades crecientes de la sociedad actual. Estas nuevas acciones, diferentes a las consideradas para el dimensionamiento inicial de la estructura, hacen que posiblemente muchas estructuras hayan experimentado un importante descenso en sus coeficientes de seguridad. Este incremento de las solicitaciones, unido al descenso de la capacidad resistente como consecuencia de la actuación de cargas cíclicas, hace que cada vez sea más importante conocer cómo se deterioran las propiedades mecánicas de los elementos que integran la estructura cuando estos están sometidos a cargas repetidas a lo largo del tiempo.

## 2. Descripción de la forma de rotura a cortante por fatiga

En cuanto al estudio de la fatiga por cortante en elementos de hormigón armado sin armadura transversal, son los trabajos desarrollados por Chang y Kesler [4,5] en el año 1958 los que con mayor detalle abordan el estudio de este fenómeno. Ambos autores llevaron a cabo una campaña experimental donde ensayaron un total de 64 vigas de hormigón armado sin armadura transversal bajo la acción de una carga cíclica, como puede verse en la figura 2. Las 64 vigas ensayadas presentan una misma geometría y disposición de cargas, variando entre cada una de ellas la cuantía y el diámetro de armadura longitudinal, la resistencia media del hormigón utilizado y la magnitud de las cargas cíclicas aplicadas. Las vigas ensayadas tenían una longitud ( $L$ ) de 1.524 metros, un canto útil ( $d$ ) de 0.136 metros, un ancho ( $b$ ) de 0.102 metros y una luz de cortante ( $a$ ) de 0.508 metros. De acuerdo con estos valores se tiene una esbeltez de cortante ( $a/d$ ) de 3.72.

Del total de las vigas 64 vigas ensayadas, 57 de ellas experimentaron una rotura por cortante siendo estas últimas clasificadas por Chang y Kesler en dos grupos. En todos los casos, durante los primeros ciclos del proceso se produce un mapa de fisuras de flexión que tiende a estabilizarse tras un



reducido número de ciclos. Una vez que la propagación vertical de las fisuras de flexión se estabiliza, la viga sigue resistiendo hasta un determinado número de ciclos en el que se produce una fisura diagonal en la sección crítica de la pieza, situada aproximadamente a un canto útil del punto donde la carga es aplicada. En este instante, algunas de las piezas ensayadas por Chang y Kesler colapsaron, no pudiendo resistir más ciclos de carga presentando de esta forma una rotura frágil e instantánea llamada "diagonal cracking". Sin embargo, gran parte de las vigas ensayadas fueron capaces de resistir un elevado número de ciclos adicional al acumulado hasta alcanzar el colapso de la pieza. Esta última forma de rotura fue denominada por los autores como "shear-compression".

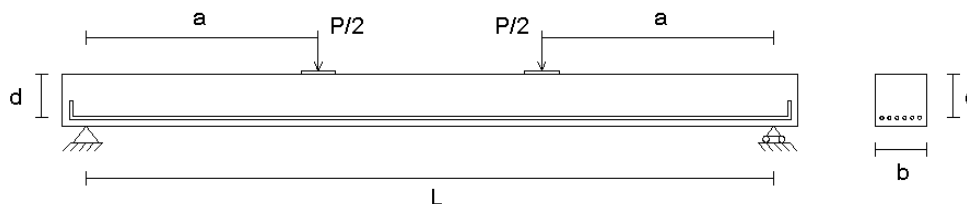


Figura 2: Ensayos Chang y Kesler. Geometría de las vigas ensayadas.

A diferencia del anterior tipo de rotura, la rotura del tipo "shear-compression" está asociada a la formación y a la propagación de una fisura diagonal que se forma a partir de la punta de una fisura previa de flexión. Esta fisura diagonal se propaga por un lado hacia la cabeza comprimida en dirección de la zona donde se introduce la carga y por otro lado horizontalmente hacia el apoyo de la pieza, siguiendo la dirección de la armadura longitudinal como puede verse en la figura 3. Durante el proceso de propagación, la abertura de la fisura diagonal crece con el del número de ciclos como consecuencia del deterioro de los mecanismos resistentes del esfuerzo cortante (resistencia a cortante de la cabeza comprimida, engranamiento o rozamiento entre áridos y efecto pasador). El agotamiento de la viga se produce cuando la profundidad de la cabeza de compresión es insuficiente para resistir las elevadas tensiones de compresión que se originan en ésta, produciéndose el estallido de la cabeza comprimida.

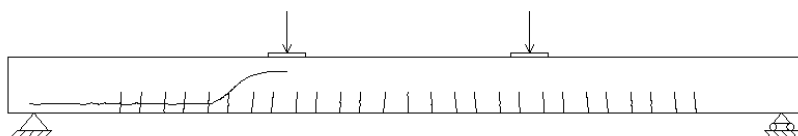


Figura 3: Forma clásica de rotura del tipo "shear-compression".

El aspecto más peligroso que presentan los dos tipos de rotura descritos, es que ambos pueden tener lugar en elementos que están dimensionados para presentar un tipo de fallo dúctil a flexión con plastificación de la armadura longitudinal bajo condiciones de carga estática, y que sometidos a cargas cíclicas pueden presentar una forma de rotura a cortante totalmente diferente a la esperada.

### 3. Planteamiento del problema en las principales normativas existentes

En este epígrafe se pretende mostrar el tratamiento que diferentes normativas hacen sobre el estudio de la resistencia a cortante en elementos de hormigón armado sin armadura transversal sometidos a cargas cíclicas.

#### 3.1 Instrucción Española del Hormigón Estructural (EHE-08)

La normativa española EHE-08 [6] se limita a indicar unos valores máximos de tensiones en el acero y en el hormigón para el caso de fatiga por tensiones normales, no entrando en ningún caso a

valorar la resistencia a fatiga por cortante en elementos de hormigón armado con o sin armadura transversal.

### 3.2 Código Modelo

Las dos últimas ediciones del Código Modelo aportan una comprobación basada en las curvas S-N. En ambas, se establece un valor del cortante máximo admisible (relativo a un cortante de referencia) asociado a un determinado valor del número de ciclos resistentes (N), es decir, el número total de ciclos resistentes de la viga depende del valor del cortante máximo aplicado ( $V_{m\acute{a}x}$ ) y del valor de la resistencia estática a cortante del elemento ( $V_{ref}$ ) como se indica en la expresión (1).

$$\log N = 10 \left( 1 - \frac{V_{m\acute{a}x}}{V_{ref}} \right) \quad (1)$$

La gran diferencia entre las dos últimas versiones del Código Modelo viene dada por la expresión utilizada para determinar la resistencia estática a cortante ( $V_{ref}$ ). En el caso de la versión del Código Modelo de 1990 [7], este valor se obtiene según se indica en la expresión (2).

$$V_{ref} = \frac{0.18}{\gamma_c} \xi (100 \rho f_{ck})^{1/3} b_w d \quad (2)$$

En la expresión (2),  $\xi = 1 + \sqrt{200/d[mm]} \leq 2$ ,  $\rho = A_s/(b_w d) \leq 0.02$ ,  $\gamma_c$  es el coeficiente de minoración de la resistencia del hormigón,  $f_{ck}$  es la resistencia característica del hormigón,  $b_w$  es el ancho del alma del elemento y  $d$  es el canto útil de la sección.

En la versión del Código Modelo de 2010 [8] también se hace referencia a la expresión (1) para determinar el número de ciclos resistentes, pero en este caso el valor de la resistencia estática a cortante del elemento ( $V_{ref}$ ) se obtiene de diferente forma. En el Código Modelo 2010 se establecen tres niveles de aproximación (nivel I, nivel II y nivel III) para obtener el valor de la resistencia estática a cortante de elementos de hormigón armado, variando desde la aproximación menos precisa (nivel I) hasta la aproximación más exacta (nivel III) fundamentada en la teoría del campo de compresiones modificado (método simplificado, [9]). Este código establece como cortante de referencia ( $V_{ref}$ ) el correspondiente al nivel I, que se obtiene según se indica en la expresión (3).

$$V_{ref} = k_v \sqrt{f_{ck} z b_w} \quad (3)$$

Para el caso de elementos sin armadura transversal el valor de  $k_v$  se obtiene a partir de la expresión (4), donde  $z$  representa el valor del brazo mecánico de la sección en milímetros. Para este nivel de aproximación se considera que el ángulo de inclinación de la biela comprimida ( $\vartheta$ ) es igual a  $36^\circ$ .

$$k_v = \frac{200}{(1000 + 1.3z)} \leq 0.15 \quad (4)$$

No parece lógico que la expresión de la curva S-N dependa de un valor genérico de la resistencia estática a cortante, ya que si se comparan las formulaciones aportadas por las dos últimas versiones del Código Modelo para valorar unos ensayos experimentales puede darse el caso de que se obtengan incoherencias en los resultados obtenidos. En las figuras 4(a) y 4(b) se muestran gráficamente los resultados obtenidos en los ensayos de Chang y Kesler junto con las correspondientes expresiones de las curvas S-N aportadas en las dos últimas ediciones del Código Modelo. En el eje de abscisas se representa (en escala logarítmica) el número de ciclos, y en ordenadas el cociente entre el máximo valor del cortante aplicado y el valor del cortante de referencia indicado en cada uno de los códigos.

En el caso del Código Modelo 1990 (figura 4(a)), los ensayos evaluados colapsan para valores del cortante máximo aplicado inferior al cortante estático resistente ( $V_{\text{máx}}/V_{\text{ref}} < 1$ ) aportado en la expresión (2), como era de esperar. De acuerdo con el Código Modelo 2010 (figura 4(b)), y al contrario de lo que pasaba en el caso anterior, son muy pocos los ensayos que colapsan para un cortante máximo aplicado inferior al cortante estático resistente aportado en la expresión (3), lo que quiere decir que según este código el valor del cortante máximo aplicado es mayor al cortante estático resistente ( $V_{\text{máx}}/V_{\text{ref}} > 1$ ), hecho que no es coherente con la realidad ya que la mayor parte de las vigas ensayadas son capaces de resistir un elevado número de ciclos.

En gran parte de los ensayos de Chang y Kesler la relación entre el máximo cortante aplicado y el cortante de referencia ( $V_{\text{máx}}/V_{\text{ref}}$ ) indicado por el Código Modelo 2010 es superior a 1.5, llegando a alcanzar en uno de los ensayos un valor superior a 2. Este hecho pone de manifiesto que la metodología empleada en las dos últimas versiones del Código Modelo, fundamentada en el uso de las curvas S-N para evaluar el número de ciclos resistentes de un elemento de hormigón armado sin armadura transversal, no es la forma más conveniente de hacerlo debido a que los resultados que se obtienen, además de ser demasiado conservadores, quedan condicionados por la expresión utilizada para estimar el cortante estático resistente.

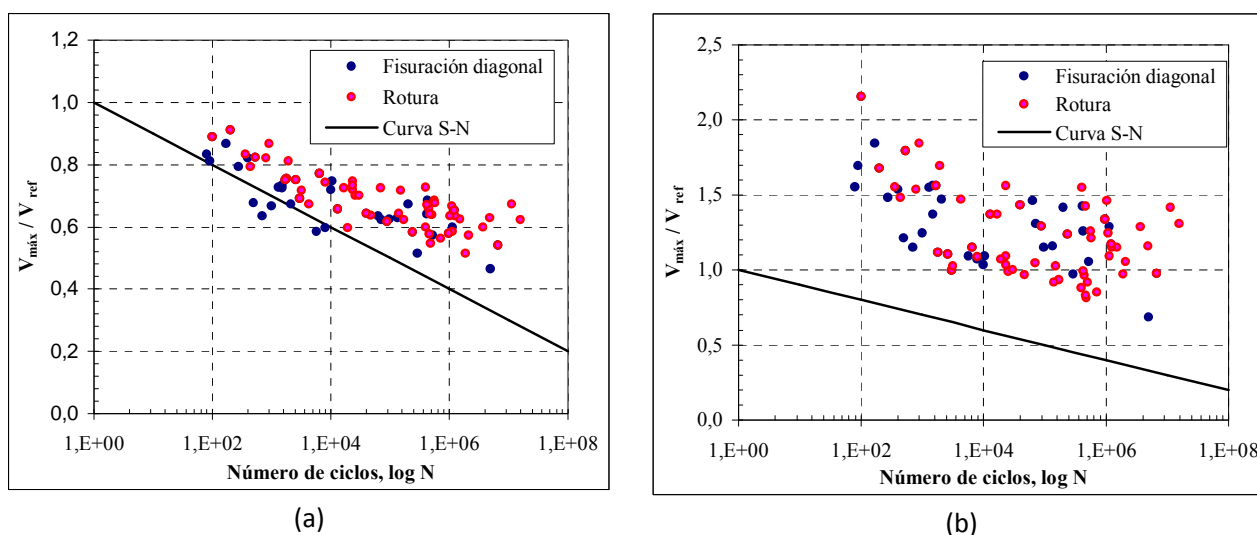


Figura 4: Ensayos de Chang y Kesler: (a) Código Modelo-1990; (b) Código Modelo-2010 (nivel I).

En la figura 5(a), se muestra la misma representación que en los dos casos anteriores pero tomando ahora como valor del cortante de referencia el correspondiente al nivel de aproximación III del Código Modelo 2010, que viene dado por la expresión (3). En este caso, la expresión empleada para estimar el valor del cortante de referencia se fundamenta en la teoría del campo de compresiones modificado (método simplificado, [9]), donde para el caso en el que no se disponga armadura transversal el valor de  $k_v$  se obtiene a partir de la expresión (5), siendo  $\epsilon_x$  la deformación de la armadura longitudinal en tracción determinada en la expresión (6), donde  $M$  y  $V$  representan el valor del momento flector y del esfuerzo cortante respectivamente en la sección crítica,  $E_s$  es el módulo de elasticidad del acero y  $A_s$  es el área de la armadura longitudinal en tracción. En la expresión (5),  $k_{dg} = 48/(16 + d_g) \geq 1.15$ , siendo  $d_g$  el tamaño máximo del árido en milímetros.

$$k_v = \frac{0.4}{(1 + 1500\epsilon_x)} \frac{1300}{(1000 + 0.7k_{dg}z)} \quad (5)$$

$$\varepsilon_x = \frac{(M/z) + V}{2E_s A_s} \quad (6)$$

Al igual que en el caso del nivel de aproximación I, existen algunos ensayos donde el cortante máximo aplicado es superior a la resistencia estática a cortante ( $V_{\text{máx}}/V_{\text{ref}} > 1$ ), lo que pone de nuevo en relieve el problema de emplear las curvas S-N.

Según los resultados experimentales de los ensayos de Chang y Kesler [4,5], las curvas S-N propuestas en las dos últimas versiones del Código Modelo aportan valores bastante conservadores en la estimación del número de ciclos resistentes para un determinado valor del cortante máximo aplicado.

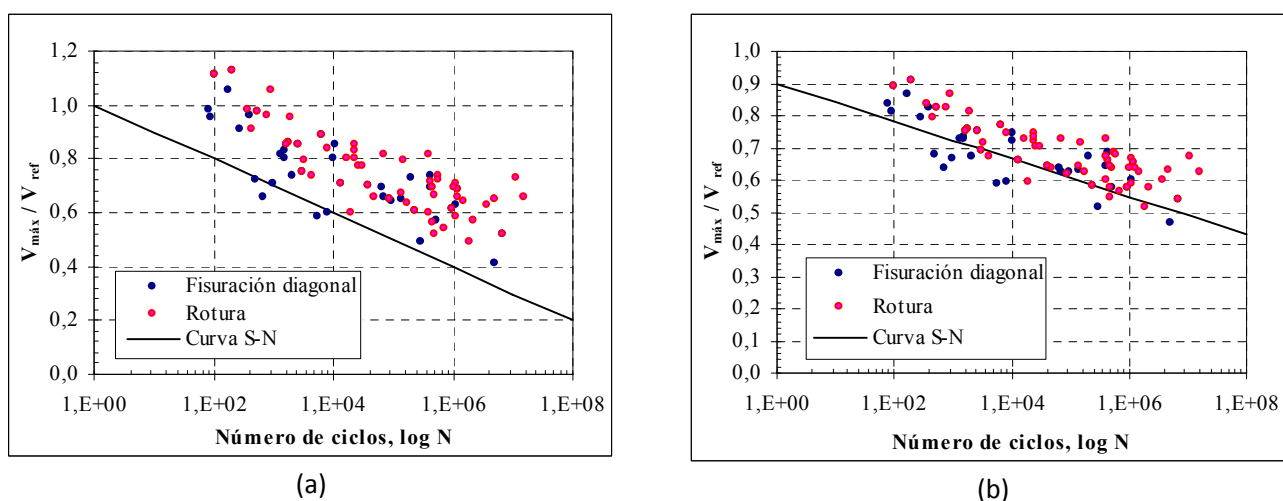


Figura 5: Ensayos de Chang y Kesler: (a) Código Modelo 2010 (nivel III); (b) Eurocódigo-2.

### 3.3 Eurocódigo-2

El Eurocódigo-2 [10] utiliza una metodología para limitar el cortante máximo aplicado basada en un diagrama de Goodman. La comprobación utilizada se obtiene a partir de la expresión (7), donde C y m son dos constantes que toman los valores de 0.9 y 15 respectivamente, N representa el número de ciclos que en este caso se considera iguala 5.000.000,  $V_{\text{Ed,máx}}$  el valor del cortante máximo aplicado,  $V_{\text{Ed,mín}}$  el valor del cortante mínimo aplicado y  $V_{\text{Rd,ct}}$  el valor de la resistencia estática a cortante determinada a partir de la expresión (2).

$$\frac{|V_{\text{Ed,máx}}|}{|V_{\text{Rd,ct}}|} = C + \frac{\log N}{m} \left( \frac{|V_{\text{Ed,mín}}|}{|V_{\text{Rd,ct}}|} - C \right) \quad (7)$$

Reemplazando los valores anteriores en la expresión (7) se llega a la inecuación (8), que es la que adopta el Eurocódigo-2, en la que el cortante máximo queda limitado exclusivamente por el valor del cortante mínimo aplicado y por la resistencia estática a cortante.

$$\frac{|V_{\text{Ed,máx}}|}{|V_{\text{Rd,ct}}|} \leq 0.5 + 0.45 \frac{|V_{\text{Ed,mín}}|}{|V_{\text{Rd,ct}}|} \leq 0.9 \quad (8)$$

En la figura 5(b) se representan gráficamente los ensayos de Chang y Kesler superpuestos a la curva S-N adoptada por el Eurocódigo-2 según la expresión (7). En este caso se ha tomado un valor de  $V_{\text{Ed,mín}}/V_{\text{Rd,ct}}$  igual a 0.02, considerado este como valor medio de los ensayos de Chang y Kesler [4,5].

#### 4. Propuesta de un modelo mecánico racional

A continuación se propone un modelo mecánico mediante el cual es posible estimar el número de ciclos resistentes hasta la formación de la fisura diagonal, partiendo del estado de tensiones que se tiene en la punta de la fisura de flexión en la que se inicia la fisura diagonal.

La fisura diagonal se produce a partir de una fisura vertical de flexión que se origina y estabiliza durante los primeros ciclos del proceso. Según los resultados experimentales observados, esta fisura crítica se forma a una distancia aproximada de un canto útil del punto de aplicación de la carga como puede verse en la figura 6.

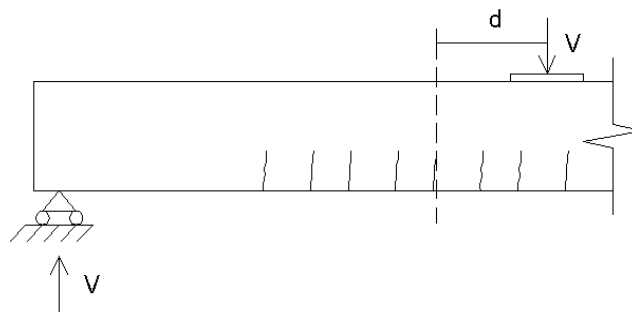


Figura 6: Luz de cortante. Posición de la sección crítica.

En la figura 7(a) se representa el plano de deformaciones de la sección crítica donde el punto A coincide con la posición de la fibra neutra ( $\epsilon=0$ ) y el punto B coincide con la punta de la fisura de flexión ( $\epsilon=\epsilon_{ct}$ ). En las figuras 7(b) y 7(c) se muestra la distribución de tensiones normales y tangenciales en esta misma sección, siendo el punto A (correspondiente a la fibra neutra) el de máxima tensión tangencial (con nula tensión normal) y el punto B el de máxima tensión normal de tracción (con nula tensión tangencial).

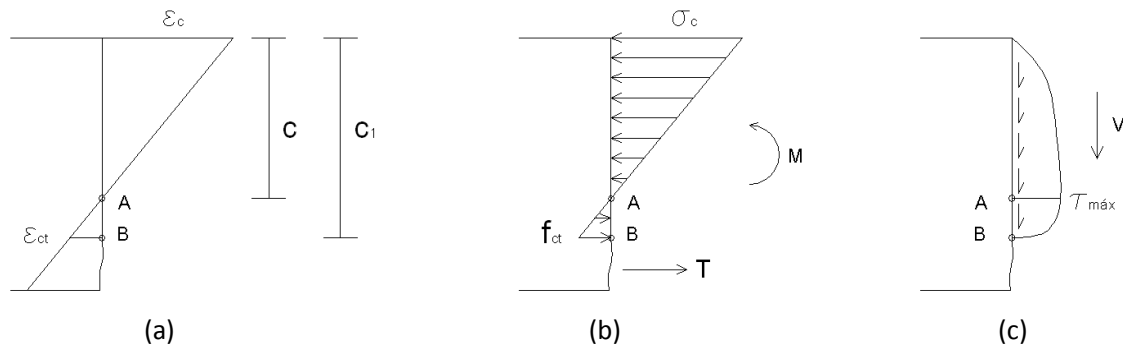


Figura 7: Análisis de la sección crítica: (a) Plano de deformaciones; (b) Distribución de tensiones normales; (c) Distribución de tensiones tangenciales.

La figura 8 representa el estado tensional de tres puntos representativos de la sección crítica. La figura 8(a) está asociada al punto A (fibra neutra), la figura 8(b) al punto B (punta de la fisura) y la figura 8(c) a un punto intermedio entre el A y el B donde la tensión normal de tracción es inferior a la resistencia a tracción del hormigón ( $\sigma < f_{ct}$ ) y la tensión tangencial es menor que la máxima tensión tangencial de la sección ( $\tau < \tau_{m\acute{a}x}$ ).

Para simplificar el proceso, se ha considerado la hipótesis de que la tensión principal de tracción pésima se produce en la fibra neutra de la sección fisurada, correspondiente a la figura 8(a). Representando dicho estado tensional a través del círculo de Mohr como se muestra en la figura

9(a), es posible determinar el valor de la tensión principal de tracción ( $\sigma_I$ ) en la punta de la fisura crítica de flexión. La orientación de las tensiones principales en la punta de la fisura, representada en la figura 9(b), es coherente con la geometría de la fisura diagonal (figura 3).

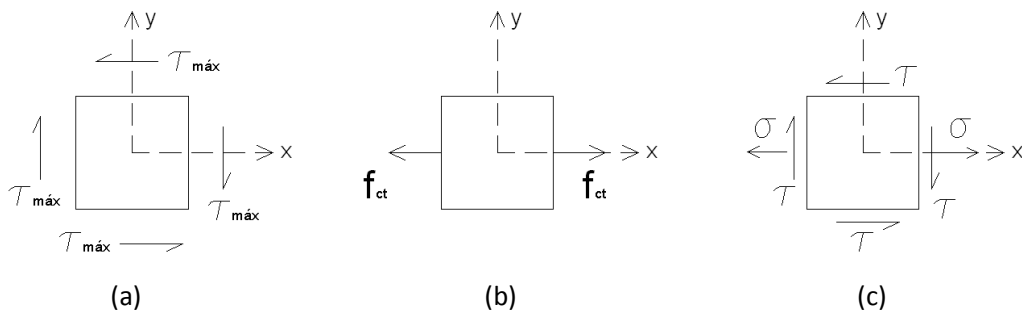


Figura 8: Estado de tensiones en la sección crítica: (a) Fibra A, (b) Fibra B; (c) Fibra intermedia entre la A y la B.

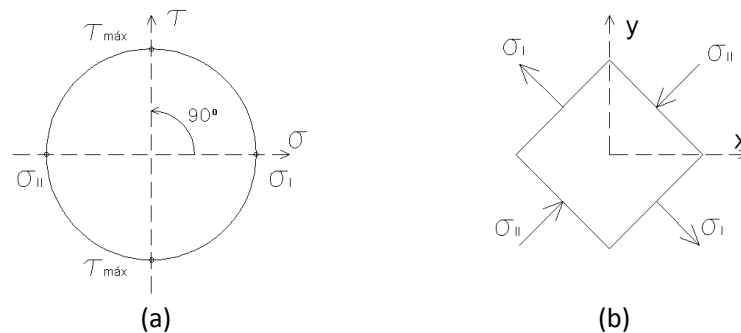


Figura 9: Estado de tensiones en la fibra neutra: (a) Círculo de Mohr; (b) Orientación de las tensiones principales.

Asumiendo que la distribución de tensiones tangenciales de la figura 7(c) puede aproximarse a una parábola de segundo grado, e integrando estas a lo largo de zona no fisurada, se obtiene el valor del esfuerzo cortante según la expresión (9) donde  $b$  representa el ancho de la sección y  $c_1$  la profundidad de la fibra asociada al punto B (figura 7(a)).

$$V = \frac{2}{3} \tau_{máx} b c_1 \quad (9)$$

El valor de la máxima tensión tangencial ( $\tau_{máx}$ ) está relacionado con la tensión principal de tracción ( $\sigma_I$ ) según indica la expresión (10), obtenida directamente a partir de la figura 9(a).

$$\sigma_I = \tau_{máx} \quad (10)$$

La expresión (11) permite estimar la profundidad de la fibra donde se encuentra la punta de la fisura. Esta expresión depende de la máxima tensión de compresión ( $\sigma_c$ ) en la sección crítica de acuerdo a la distribución indicada en la figura 7(b), de la resistencia a tracción del hormigón ( $f_{ct} = 0.3 f_c^{2/3}$ ) y de la profundidad de la fibra neutra ( $c$ ).

$$c_1 = c \left( 1 + \frac{f_{ct}}{\sigma_c} \right) \quad (11)$$

Mediante la expresión (12) es posible determinar la profundidad de la fibra neutra. En dicha expresión,  $n$  representa el cociente entre los módulos de elasticidad del acero y del hormigón,  $d$  es el canto útil de la sección y  $\rho$  es la cuantía de armadura longitudinal en tracción.

$$c = n\rho d \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\rho}} \right) \quad (12)$$

Combinando las expresiones (9) y (10), se llega a la expresión (13), en la que el valor de la tensión principal de tracción ( $\sigma_i$ ) es función del esfuerzo cortante aplicado.

$$\sigma_i = \frac{3}{2} \frac{V}{bc_1} \quad (13)$$

En la figura 10 se muestra una nueva representación de los ensayos de Chang y Kesler. Se representa en abscisas (en escala logarítmica) el número de ciclos que transcurren hasta que se forma la fisura diagonal y en ordenadas la tensión principal de tracción en la punta de la fisura (adimensionalizada frente a la resistencia a tracción en flexión del hormigón, obtenida mediante la expresión (14)). Los puntos representados están asociados a tres familias diferentes en función de su cuantía de armadura longitudinal.

$$f_{ct, fl} = f_{ct} \left( 1.6 - \frac{h[mm]}{1000} \right) \quad (14)$$

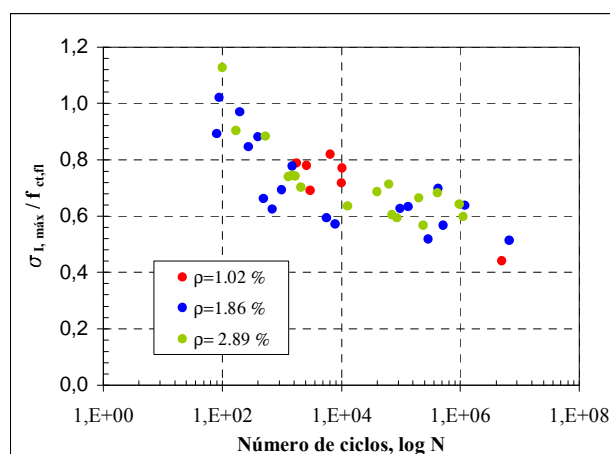


Figura 10: Ensayos de Chang y Kesler. Análisis basado en el estado tensional en la punta de la fisura crítica según el modelo mecánico racional propuesto.

La representación de los ensayos estudiados que se muestra en la figura 10 presenta una evidente tendencia no lineal, al contrario de lo establecido en las dos últimas versiones del Código Modelo y en el Eurocódigo-2, donde estos ensayos siguen una relación lineal (figura 4(a), figura 4(b), figura 5(a) y figura 5(b)). A partir de la representación de los ensayos de Chang y Kesler de la figura 10, y a través de un ajuste por mínimos cuadrados, se ha determinado la expresión (15) mediante la cual es posible determinar el número de ciclos que la pieza resiste hasta el instante en el que se forma la fisura diagonal ( $N_{diag}$ ). En esta expresión,  $R$  es igual al cociente entre las tensiones principales de tracción para carga mínima y máxima.

$$\log N_{diag} = 2.055(1 + R) \left( \frac{\sigma_{i, máx}}{f_{ct, fl}} \right)^{-1.3677} \quad (15)$$

## 5. Conclusiones

Gran parte de las estructuras existentes hoy en día fueron diseñadas años atrás sin tener en cuenta la importancia que realmente tienen las acciones de tipo cíclico sobre las estructuras de hormigón

armado. El continuo deterioro de las propiedades mecánicas que sufren estas estructuras como consecuencia de la aplicación de cargas repetidas, unido al incremento de las solicitaciones actuantes sobre dichas estructuras, hace que los coeficientes de seguridad de éstas vayan decreciendo con el paso del tiempo pudiendo llegar a ocasionar daños irreversibles a largo plazo.

Los diferentes códigos existentes, no suelen hacer referencia a la resistencia de elementos de hormigón armado sin armadura transversal sometidos acciones de tipo cíclico, y en caso de hacerlo se basan en curvas S-N o en diagramas de Goodman que no están asociados a modelos mecánicos. Debido a las incoherencias obtenidas en algunos de estos códigos, se propone un modelo mecánico racional mediante el cual es posible cuantificar el número de ciclos que este tipo de elementos pueden resistir hasta el instante en el que se forma la fisura diagonal. Este modelo tiene su origen en un planteamiento de tipo mecánico en el que se considera el estado tensional en la punta de la fisura crítica donde se forma la fisura diagonal.

Actualmente, se está llevando cabo un estudio pormenorizado de todos aquellos parámetros (esbeltez de cortante, abertura de fisura diagonal, diámetro y cuantía de armadura longitudinal, tipo y tamaño máximo de árido,...) que pueden influir en la vida adicional a fatiga de este tipo de elementos, en el caso de que tengan una vida residual después de la formación de la fisura diagonal. Este estudio puede ser de gran utilidad, ya que de esta forma se podría llegar a valorar el nivel de seguridad de estructuras existentes que presentan patologías como las indicadas en este artículo.

## Referencias

- [1] ZANUY C., "*Análisis seccional de elementos de hormigón armado sometidos a fatiga, incluyendo secciones entre fisuras*". Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, Madrid (España), 2008.
- [2] RILEM Committee 36-RDL, "*Long term random dynamic loading of concrete structures*", RILEM, Paris, 1984.
- [3] ZANUY C., DE LA FUENTE P., ALBAJAR L., TORRICO J., "*Mecanismo de rotura por fatiga de vigas de hormigón armado*", IV Congreso de la asociación española del hormigón estructural, ACHE, Valencia, España, 2008.
- [4] CHANG T.S., KESLER C.E., "*Fatigue behaviour of reinforced concrete beams*", ACI Journal, 30 (2), 1958, pp. 245-54.
- [5] CHANG T.S., KESLER C.E., "*Static and fatigue strength in shear of beams with tensile reinforcement*", ACI Journal, 29 (12), 1958, pp. 1033-57.
- [6] Ministerio de Fomento, "*Instrucción española de hormigón estructural EHE-08*", Madrid, España, 2008.
- [7] CEB - FIP, "*Model Code (1990)*", Lausanne (Switzerland), 1991.
- [8] FIB., Bulletin d'information No.56 and 57. Model Code 2010. First complete draft, Lausanne, Switzerland, 2010.
- [9] BENTZ E.C., VECCHIO F.J., COLLINS M.P., "*Simplified modified compression field theory for calculating shear strength of reinforced concrete elements*", ACI Structural Journal, Vol. 103, No. 4, 2006, pp. 614-624.
- [10] CEN, "*Eurocode EC-2*", prEN 1992-1-1:2004, 2004.