

Universidad de Granada



TESIS DOCTORAL

La ecuación de Codazzi en superficies.

José M. Espinar

LA ECUACIÓN DE CODAZZI EN SUPERFICIES

Memoria presentada por el licenciado José María Espinar García, y realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de José Antonio Gálvez López, Profesor Titular de dicho Departamento, y Juan Ángel Aledo Sánchez, Profesor Titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Castilla La Mancha, con objeto de aspirar al grado de Doctor en Matemáticas.

Granada, de de 2007.

José Antonio Gálvez López
Director de la Memoria

Juan Ángel Aledo Sánchez
Director de la Memoria

José María Espinar García
Aspirante al grado de Doctor

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Antes de empezar esta tesis ya estaba seguro de que ésta iba a ser la parte más difícil de escribir. El porqué es muy sencillo, no hay suficientes palabras para describir tanto apoyo, tantos buenos y malos momentos, necesarios para crecer, tantas personas que se han cruzado a lo largo de este proyecto, tantas anécdotas, recuerdos, decepciones, alegrías o fracasos, y por encima de todo, tanta gratitud a las personas que han hecho este sueño posible.

En primer lugar, a mis directores, tutores o amigos, como queráis llamarlos, aunque para mi siempre serán mis *titos*. Los oficiales: Jose Antonio Gálvez y Juan Ángel Aledo, y los oficiosos: Pablo Mira y Harold Rosenberg. Sé que nunca podré devolveros ni una pequeña parte de lo que me habéis dado a lo largo de estos años, ni seré capaz de expresaros mi gratitud, ni llegaré nunca a estar cerca de explicaros lo feliz que me habéis hecho. Un simple gracias con vosotros no es suficiente, mil gracias no es suficiente, un millon de gracias no son suficientes. Os lo merecéis todo, mi gratitud, mi respeto, mi amistad. Gracias de nuevo, una y otra vez, hasta que me canse, hasta que pueda decirlo. GRACIAS! Me habéis enseñado matemáticas, pero lo mas importante es que me habéis enseñado una forma de hacer de esto un juego, como un equipo, como amigos, como colegas, sin complejos. Espero no haberos decepcionado, mientras este en mi mano no lo haré, esta es la primera promesa que os hago para

poder devolveros algo. Confiasteis en mí como matemático, sin objeciones. Intentaré transmitir todo lo que me habéis enseñado a otros estudiantes, esta es mi segunda promesa.

Lo anterior es para todos, pero no sería justo conmigo mismo si no hiciera una mención especial a Jose Antonio y Harold, los dos mejores matemáticos que conozco, y mucho más importante que eso, dos de las mejores personas que conoceré.

A mi familia, el alma de esta tesis. Mis padres: Paco y María. Mis hermanos: Susana, Javier y Jesús. Ellos fueron los primeros y serán los últimos que estén a mi lado, a cada paso que dé, dándome todo lo necesario para continuar. Siempre me decís que soy un poco *descastao* y tenéis razón, pero sois lo mas importante, aunque no os lo diga muy a menudo. Por eso, delante de todos quiero deciros: OS quiero con locura! Estoy orgulloso de ser vuestro hijo y vuestro hermano, de pertenecer a esta magnifica familia que ha tenido, tiene y tendrá sus buenos y malos momentos, pero ahí reside la grandeza de haberos y haberme hecho de esta forma.

Al resto de mi familia por supuesto, mis tíos y tías, mis abuelos, a la que está y a los que no están, mi madrina y padrino, también sois parte de estas líneas. Hemos pasado grandes momentos juntos, pero lo mejor es que aún nos quedan muchos más por disfrutar. Os quiero!

El apartado de la familia se queda corto porque durante estos años, de hecho, la familia ha ido creciendo. El primer ejemplo lo hemos visto en los *titos*, nueva parte de la familia. Pero es que también están el *papi*, Juan Anaya, la *mami*, Pili, el *primo*, Miguel el Gitano y la *tita* Maria. Podéis hacer vuestras las frases anteriores, sois de la familia, mi familia en Granada. Me habéis cuidado como un hijo, un primo o un sobrino, como corresponda a cada caso, cuando estaba lejos de mi casa.

A mis amigos, qué decirles a ellos. Si me han aguantado todos estos años eso ya es un mérito! Soy un poco de todos vosotros y cada uno tiene una parte que a mí me falta. Damián *el enano*, Pablo Pascasio, Miguel *el labio*, Fernando *el gordo*, Jose Manuel *el niño balsero*, Pepito *el morsa*, David *el currito*, Carlitos Vera, Juanen *el inglés*, Dani *el kakita nº1*, Nacho *el kakita nº2*, Fati, Encarni, Sandra y Carmen, mis niñas, mis soles, mis amores. Son innumerables los instantes compartidos, las confianzas, las *tajás* por supuesto, los cigarritos, las cenas, hay tanto y tan bueno, que os necesitaré siempre cerca para que en que cualquier instante podamos, simplemente, estar juntos. Con vosotros no hacen falta palabras que no digan nada, que rellenen el vacío. Me queda tanto por deciros, me tenéis que contar tantas cosas! Que triste hubiese sido todo sin vosotros. Si un amigo es un tesoro, me habéis hecho el hombre más rico del planeta. Habéis marcado mi camino para siempre, y pase lo que pase, estaréis conmigo dondequiera que esté o estéis y, cuando volvamos a vernos, todo será como cualquier otro día, como si la única marca visible del tiempo estuviera en nuestros carnés y no en nosotros. Debería deciros un Gracias y un Os quiero, pero eso ya lo sabéis, así que sólo os diré que nunca cambiéis, seguid soñando.

Y muchos otros, Juande, Juan de Dios, Kero, Sergio, Jose Luis, Raúl, Rubén, Javi, Eliseo, Juanfran, Jorge, Alejandro, Guille, Alvarito, Chanchi, Pepillo, Jesús, Nazaret, Amaia, Sandra, Alegría, Erika, Maca, Pilar, Virginia, Lidia, Celina, Luna, Rocío, Keka, Kymia (I'll see you soon in LA),... La lista es amplia y diversa. Aunque el tiempo haya hecho su mella con algunos, siempre nos quedaran grandes recuerdos para volver a disfrutarlos con una copita en la mano, y crear en ese instante nuevos recuerdos. Gracias, porque habéis dado a mi vida otro sentido.

Por supuesto, a los integrantes del *Proyecto Les Cuatre Vents*, mis alter ego en París! Nuño, Davity y Edo. En tres meses os hicisteis indispensables, como si os conociera de toda la vida. Nuestros caminos tienen direcciones completamente opuestas, pero nos dirigimos al mismo punto. *Fait la fête mes amies!* Nos veremos pronto en cualquier lugar del mundo, ya sea Granada, Stanford, Melbourne, París, Roma o Casablanca. Hicisteis que mi estancia en París fuese tan corta que se ha convertido en el mejor sueño que jamás he tenido.

A Isa y Antonio, que no me olvido! Qué diferente es un congreso sin vosotros! Quiero teneros en todos y cada uno a los que nos inviten, sin vosotros el *fuerte barrigismo ilustrado* pierde su sentido y se pasa a un tipo de *perganhetismo* no aconsejable, ya que en cualquier momento te la pueden meter en un *slab*. Sé que entenderéis este mensaje. Otra cosa, cuando nosotros seamos mayores, LA ISLA! No os digo más! A Magda, Magdalenita, C, Alma y Asun. Por vosotros tengo un resorte que me hace levantar la mano y pedir 10 más! No es mi cumpla, creo.

A todas las personas que me he cruzado durante mis viajes. En Brasil: Marcos Dajczer, Manfredo do Carmo, Pedro Roitman, Ricardo Sa Earp, Marcos Petrucio, Fernando Coda, Maria Fernanda Helbert, Jorge Lira, Rosa Chaves, Guillermo Lobos, Ruy Tojeiro. En Paris: Eric Toubiana, Laurent Hauswirth, Rabah Souam. Barbara Nelli en Roma. Ivailo Mladenov en Varna. Gracias, ha sido un placer compartir una charla con vosotros, ya sea de matemáticas o no. Nos volveremos a ver pronto. Y a los no matemáticos: Carmen, Diego y Vincent en Rio de Janeiro, hemos pasado grandes momentos. Quien sabe, a lo mejor tenemos la oportunidad de volver a pasarlos.

Al Departamento de Geometría y Topología de La Universidad de Granada. En especial a Joaquín Pérez, de corazón gaditano, quien me mostró la puerta hacia el camino que está terminando en esta tesis, y porque en estos últimos tiempos está siendo un gran apoyo.

A Inmaculada Torres, porque si Joaquín abrió la puerta hacia la investigación, Inma fue la primera que vio en mí a un matemático. No porque esté al final de este agradecimiento es menos importante. Como suele decirse, lo mejor viene al final. Gracias Inma por creer en mí desde el principio. Supongo que aproveché tus magnificas clases.

A todos, de nuevo y siempre, **GRACIAS!**



A mis padres,
Paco y María.
A mis hermanos,
Susana, Javier y Jesús.
A mi familia.
A ell@s.

We must know, we shall know.
David Hilbert

Dream, Believe, Dare and Do.
Walt Disney

Índice general

Introducción	xv
1. La Ecuación de Codazzi	1
1.1. Preliminares	1
1.2. El Tensor de Codazzi	9
1.3. Parametrizaciones especiales	13
1.3.1. Parámetros isotermos	13
1.3.2. Parámetros doblemente ortogonales	18
1.3.3. Parámetros asintóticos	20
1.4. La Función de Codazzi	23
1.5. Pares de Codazzi	32
1.6. Cambios en la métrica	40
1.7. Pares Especiales	47
1.7.1. Pares Especiales de Tipo Elíptico	51
1.8. Algunas aplicaciones	53
2. Espacios Modelo	57
2.1. Generalidades	57
2.1.1. El espacio euclídeo	57
2.1.2. La esfera euclídea	58
2.1.3. El espacio hiperbólico	58
2.1.4. Superficies en espacios modelo	61
2.2. El Principio de Máximo y el Método de Alexandrov	62
2.3. Estimaciones de altura	71
2.4. Anillos propiamente embebidos	74
2.5. Superficies de Weingarten	82
2.5.1. Superficies especiales de tipo elíptico	85

3. Espacios Producto	91
3.1. Generalidades	91
3.2. Ecuaciones necesarias	95
3.2.1. Superficies en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$	104
3.2.2. Superficies de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	108
3.2.3. Superficies de Revolución en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	109
3.3. Superficies con curvatura media constante	111
3.3.1. Esferas topológicas de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	112
3.3.2. Esferas topológicas de revolución en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	112
3.3.3. Teorema tipo Hopf	113
3.3.4. Estimaciones verticales en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$	118
3.3.5. Estimaciones horizontales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	122
3.3.6. Superficies propiamente embebidas con CMC	125
3.4. Superficies con curvatura de Gauss constante en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$	131
3.4.1. Superficie de revolución con CGC en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	131
3.4.2. Superficies de revolución con CGC en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	138
3.4.3. Definiendo el par de Codazzi	141
3.4.4. Teorema tipo Liebman	150
3.4.5. Teorema tipo Hilbert	154
3.4.6. Estimaciones de altura	156
3.4.7. Representación de CGC y Curvatura extrínseca positiva	159
3.4.8. Representación de CGC y Curvatura extrínseca negativa	163
3.5. Superficies con curvatura extrínseca positiva	166
3.5.1. Teorema tipo Hadamard-Stoker	167
3.5.2. Ejemplos de superficies con un final simple	173
3.6. Superficies de curvatura extrínseca constante positiva	176
3.6.1. Superficies de revolución completas con CEC positiva en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$	176
3.6.2. Definiendo el par asociado a superficies con CEC	180
3.6.3. Estimaciones verticales en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$	185
3.6.4. Estimaciones horizontales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	188
3.6.5. Clasificación de superficies de CEC positiva	191
 Resumen y Conclusiones	 I
Abstract and Conclusions	XIX
Notación	XXXVII

Introducción

El tema del *Gran Premio de la Academia de Ciencias de París* en 1859 era:

Encontrar todas las superficies con un elemento de área prefijado.

Dicho año tuvo tres grandes aportaciones: la de los franceses Edmond Bour y Pierre Ossian Bonnet, y la del italiano Delfino Codazzi. Todos estos trabajos fueron importantes contribuciones a la Geometría Diferencial pero, mientras que los trabajos de Bour y Bonnet fueron publicados en *Comptes-Rendus des séances de l'Académie des sciences* relativamente pronto después de la concesión del premio, el trabajo de Codazzi no fue publicado hasta 1883, 10 años después de su muerte.

Delfino Codazzi, nacido en Lodi, al norte de Italia, en 1824, dio en el mencionado trabajo condiciones necesarias y suficientes para que una superficie pueda ser llevada en otra, así como sus famosas fórmulas que se han demostrado de capital importancia en la Teoría de Superficies. Hoy día, dichas fórmulas son conocidas como las **Ecuaciones de Mainardi-Codazzi**, y explicaremos el porqué de la aparición de Mainardi. Las ecuaciones de Mainardi-Codazzi son dos relaciones entre la Primera y Segunda Forma Fundamental de una superficie que junto con la **Ecuación de Gauss**, dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una superficie, con esa Primera y Segunda Forma Fundamental, en \mathbb{R}^3 . Fue Bonnet quién, usando las fórmulas de Codazzi, demostró el Teorema Fundamental de la Teoría de Superficies, concretamente la parte de la existencia.

De hecho, y haciendo justicia a la historia, Codazzi no fue el primero en obtener dichas ecuaciones, sino Gaspere Mainardi quién, mientras enseñaba en la Universidad de Pavia (Italia), publicó estas ecuaciones en un artículo en 1856. No obstante, ambas aportaciones se hicieron de manera independiente.

Aunque dichas contribuciones eran equivalentes, la formulación usada por Codazzi era más simple y amplia que la de Mainardi. Además, en 1853, Karl M. Peterson, por aquel entonces estudiante de E. F. A. Minding en la Universidad de Dorpat, desarrolló una disertación conteniendo la derivación de dos ecuaciones equivalentes a

las de Mainardi-Codazzi y esbozó una demostración del Teorema Fundamental de la Teoría de Superficies.

Desde luego Codazzi recibió un gran reconocimiento tras su aportación a la Geometría Diferencial, lo que le permitió conseguir una plaza en Álgebra y Geometría Analítica en la Universidad de Pavia en 1865. Hasta ese momento Codazzi se encontraba dando clases en un Instituto de Secundaria, por lo que su investigación experimentó una mejoría debido a que había abandonado la presión que le ejercía su anterior puesto y la seguridad que le aportaba la plaza en la universidad.

A partir de este momento, su investigación se centró en coordenadas curvilíneas y publicó los resultados que obtuvo en una serie de cinco artículos bajo el título *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio*, el primero de los cuales apareció en 1867 y el último en 1871. Aunque la publicación del anteriormente mencionado Premio de la Academia de Ciencias de París no ocurrió hasta 1883, Codazzi plasmó sus fórmulas en todos los trabajos de la serie.

Desgraciadamente, dicha posición privilegiada en la Universidad de Pavia llegó un poco tarde para Codazzi, ya que ocho años después de su obtención, el 21 de Julio de 1873, Delfino Codazzi falleció en Pavia (ver [13] y [88] para más detalles al respecto).

En lo que a la Geometría Diferencial se refiere, los derroteros que tenía por esos años la investigación en este campo eran más en la línea iniciada por K. F. Gauss en su trabajo *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas* (ver [32]). Ilustres nombres de este tiempo, algunos ya mencionados, fueron por ejemplo Bonnet [14], Jacobi, Minding o Beltrami, dedicados en su mayor parte al estudio de geodésicas, la curvatura de Gauss o las curvaturas principales.

Durante la segunda mitad del siglo XIX, el estudio de superficies en el espacio euclídeo tridimensional y el estudio de la geometría intrínseca de una variedad, partiendo de la generalización, por parte de Riemann, de la teoría de superficies a variedades riemannianas, centraron la atención de la mayoría de los matemáticos dedicados a la Geometría Diferencial.

En dicha mitad de siglo se consideraba la curvatura de Gauss como el invariante geométrico más importante, de ahí que algunos brillantes matemáticos de aquella época pusieran sus esfuerzos en el estudio de superficies con curvatura de Gauss constante en \mathbb{R}^3 .

A este respecto, a finales del Siglo XIX y principios del XX, se llegó a la clasificación de las superficies de curvatura de Gauss constante (CGC) no nula en \mathbb{R}^3 . H. Liebmann [69] en 1899 caracterizó a las esferas como las únicas superficies completas con CGC positiva. El caso de CGC negativa fue resuelto por D. Hilbert [55] en 1901, asegurando la no existencia de una superficie completa en \mathbb{R}^3 con curvatura de Gauss constante negativa. Más tarde, P. Hartmann y L. Nirenberg [51] en 1959, J.J. Stoker [103] en 1961 y W. S. Massey [72] en 1962, demostraron de forma independiente que toda superficie completa con CGC nula en el espacio euclídeo tridimensional debe

ser un cilindro recto sobre una curva plana, simple y definida para todo valor de su parámetro arco

Otro invariante geométrico de gran importancia es la curvatura media. En esta línea, las superficies de curvatura media constante distinta de cero (CMC) y las superficies minimales, es decir aquellas con curvatura media cero, constituían campos de floreciente investigación. De hecho se considera a la segunda mitad del siglo XIX como la primera época dorada de las superficies minimales (véase Euler [40], Delaunay [28], Lagrange [67], Legendre [68], Scherk [99], Riemann [90], Bernstein, Weierstrass [107]...).

No obstante, el estudio global de estas superficies se antojó mucho más complicado que el de las superficies de curvatura de Gauss constante. Para el caso de superficies minimales, dicho estudio llega hasta nuestros días (para un desarrollo amplio de la teoría, véase [74]).

Para el caso de las superficies de CMC, los primeros resultados dirigidos a su estudio global son los teoremas de Alexandrov [2] y de Hopf [58], hacia la mitad del siglo XX.

El Teorema de Alexandrov revela que toda superficie compacta, embebida y con CMC en \mathbb{R}^3 es una esfera. El método ideado por Alexandrov, en nuestro tiempo conocido como Método de Alexandrov, estaba basado en un resultado de Hopf para ecuaciones en derivadas parciales y consiste en comparar la superficie con su reflejada por una familia uniparamétrica de planos. Dicho resultado ha sido generalizado a otro tipo de superficies, llegando a convertirse en un método puramente analítico.

El Teorema de Hopf prueba que toda esfera topológica con CMC inmersa en \mathbb{R}^3 es una esfera métrica. Hopf dio dos demostraciones de este hecho, aunque ambas dependían de que sobre una superficie siempre podemos tener una parametrización por parámetros isotermos y por tanto podemos ver la superficie como una superficie de Riemann. Es decir, Hopf consideró la superficie como una superficie de Riemann con la estructura conforme dada por su Primera Forma Fundamental. En la primera demostración, Hopf consideró una diferencial cuadrática en términos de la Segunda Forma Fundamental de la superficie globalmente definida y cuyos ceros coinciden con los puntos umbilicales de la superficie. Entonces observó que dicha diferencial era holomorfa para la estructura de superficie de Riemann dada por la Primera Forma Fundamental si, y sólo si, la curvatura media de la superficie es constante. Ahora, sin más que usar un hecho bien conocido en la teoría de Superficies de Riemann que nos dice que si el genero de una superficie de Riemann es cero entonces cualquier diferencial cuadrática holomorfa se anula idénticamente, llegamos a que todos los puntos de la superficie son umbilicales, y por tanto la superficie debe ser totalmente umbilical. La segunda demostración se basa en la relación, que dio el propio Hopf, sobre el índice de los ceros de un campo de vectores definido en una superficie y el genero de dicha superficie.

Esta segunda demostración llevó a Hopf a plantearse generalizar dicho resultado a otras superficies más generales que las de CMC. Obtuvo resultados para las conocidas superficies de Weingarten, aquellas en la que su curvatura media H y curvatura extrínseca K verifican una ecuación del tipo $W(H, K) = 0$. Otros autores como Hartmann y Winter [52] o Chern [21] siguieron también esta línea estudiando superficies de Weingarten. Conviene observar que esta segunda demostración se muestra eficiente para el caso en que nuestra superficie tiene género cero, pero sólo en este caso.

La primera demostración tiene la ventaja de que conocemos la existencia de una diferencial cuadrática holomorfa sobre la superficie, conocida como la diferencial de Hopf, lo cuál nos aporta información de la superficie. Por ejemplo, la existencia de dicha diferencial nos ayuda a la obtención de una representación de la superficie en términos de datos meromorfos (véase [107] y [34] para el caso minimal y [62] para CMC), lo cuál es una herramienta muy potente para el conocimiento global de la superficie debido a los fuertes resultados conocidos en Análisis complejo.

Uno de los hechos más destacables de la demostración de que la diferencial de Hopf es holomorfa es que sólo depende de las ecuaciones de Codazzi y, como es bien conocido, las ecuaciones de Codazzi son las mismas en todos los espacios modelo (\mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 y \mathbb{S}^3). Por tanto, la misma demostración sigue siendo válida para esferas topológicas con CMC inmersas en cualquier espacio modelo, clasificándolas como esferas totalmente umbilicales.

Años más tarde, este hecho llevó a algunos matemáticos a plantearse qué resultados conocidos en la Teoría de superficies se verifican sin necesidad de la ecuación de Gauss. Es decir, si tomamos una superficie abstracta y sobre ella consideramos dos formas cuadráticas (I, II) , donde I es una métrica riemanniana, y suponemos que los coeficientes de I y II verifican las ecuaciones de Codazzi, ¿qué podemos conocer del par (I, II) ? Así es como nació la Teoría de Pares de Codazzi.

La teoría de pares de Codazzi fue un tema relevante de estudio durante las décadas de los sesenta y setenta. Y decimos que fue porque, aunque se sigue estudiando esta teoría en la actualidad (ver [25] o [70]), durante este periodo autores como T.K Milnor [75]-[81], U. Simon [100] u Olikar [85] desarrollaron ampliamente dicha teoría, viendo desde un marco abstracto teoremas clásicos de la Geometría Diferencial (una buena referencia es [71]). Así, resultados como los Teorema de Hopf, Liebman o Hilbert pueden deducirse de esta teoría con el valor añadido de que en dichas demostraciones el espacio modelo donde están inmersas dichas superficies poco importa.

Antes dijimos que Hopf estudió superficies de Weingarten que son esferas topológicas desde el marco de su segunda demostración. Pues bien, en la década de los noventa, R. Bryant [18] probó que, para cierto tipo de superficies de Weingarten, podemos obtener el mismo resultado pero con el espíritu de la primera prueba. Para ello, consideró sobre la superficie una nueva estructura conforme y, para dicha

estructura conforme, definió una diferencial cuadrática globalmente definida cuyos ceros coinciden con los puntos umbilicales de la superficie. Entonces demostró que dicha diferencial es holomorfa para esta nueva estructura conforme. Así, lo novedoso de este resultado radica en los métodos utilizados para su demostración. Hasta ese momento, la estructura conforme por excelencia considerada en una superficie era la dada por la Primera Forma Fundamental. Aunque bien es cierto que Bianchi utilizó la estructura inducida por la Segunda Forma Fundamental para estudiar superficies llanas en \mathbb{S}^3 o \mathbb{H}^3 y T. K. Milnor ya consideraba estructuras exóticas sobre superficies (ver también [45], [46], [10], [8], [9], donde se usan estructuras conformes diferentes a la inducida por la Primera Forma Fundamental).

El trabajo de Bryant motivó otros debidos a Brito, Rosenberg, Sa Earp, Toubiana (ver [94]-[98], [15], [93] y referencias en ellos), para el caso en que dicha relación de Weingarten fuese de tipo elíptico, es decir, que la superficie verificase el Principio de Máximo Interior y Frontera de Hopf. Esto también fue hecho en parte por Hopf, pero sólo para dar una extensión del Teorema de Alexandrov a estas superficies. En estos trabajos los autores generalizaron la rica teoría de superficies con CMC emergente en la década de los ochenta, donde matemáticos como Meeks, Korevaar, Kusner, Solomon, Rosenberg, ... ([66], [65], [92], [17] y ver referencias en ellos), dedicaron muchos esfuerzos a comprender el comportamiento de los finales de las superficies propiamente embebidas con curvatura media constante. Las superficies de Weingarten que verifican el Principio del Máximo, o especiales de tipo elíptico, tienen un comportamiento singular como ya percibieran los autores antes mencionados, ya que se comportan de forma similar a una superficie minimal o una de CMC, dependiendo de lo que ocurra en sus puntos umbilicales.

La sola existencia de una diferencial cuadrática holomorfa para un tipo de superficies genera un interés en el estudio de éstas. Recientemente, Abresch y Rosenberg [1] han demostrado la existencia de una diferencial cuadrática holomorfa para superficies inmersas con curvatura media constante en un espacio producto homogéneo, es decir, en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Esto ha motivado en estos últimos años un ferviente auge en el estudio de este tipo de superficies por parte de matemáticos como W. Meeks, H. Rosenberg, P. Collin, M. Dajczer, M. do Carmo, B. Nelli, L. Hauswirth, B. Daniel, I. Fernández, P. Mira, ... (ver [42], [43], [82]-[84], [20], [3]-[5], [37], [39], [11] y referencias en ellos), encontrando similitudes y diferencias con la teoría de superficies de CMC, CGC o curvatura extrínseca constante (CEC) en los espacios modelo. Hay que observar que la curvatura de Gauss $K(I)$ y la curvatura extrínseca K sólo difieren en una constante en un espacio modelo, pero esto ya no ocurre en un espacio producto.

A continuación pasamos a describir la estructura de la presente memoria.

Comenzaremos el Capítulo 1 estableciendo la notación y elementos necesarios que usaremos a lo largo de nuestro trabajo. Así, introduciremos el importante concepto de **Par Fundamental**, esto es, dada una superficie abstracta será un par (I, II) de for-

mas cuadráticas definidas sobre la superficie tal que I es una métrica riemanniana. A continuación revisaremos algunos conceptos de la Geometría riemanniana para así poder llegar al primer objeto de estudio, el **Tensor de Codazzi** asociado a todo par fundamental sobre una superficie, dando su definición y propiedades inmediatas de ésta. Luego, nos dedicaremos a establecer las ecuaciones necesarias para parametrizaciones especiales sobre la superficie que verifica todo par fundamental, dando definiciones abstractas de objetos geométricos ampliamente conocidos como son la curvatura media o la curvatura extrínseca asociadas al par fundamental.

Pasaremos después a la definición del siguiente objeto de estudio, la **Función de Codazzi**, obteniendo los primeros resultados destacables. Más concretamente, relacionaremos la función de Codazzi de un par fundamental (I, II) con la diferencial cuadrática que viene dada por la parte $(2,0)$ de II cuando consideramos la estructura conforme que induce sobre la superficie la métrica riemanniana I . Así, seremos capaces de controlar los ceros de dicha diferencial mediante esta función, lo que nos permitirá, dando condiciones sobre la función de Codazzi, obtener información de la superficie usando un reciente resultado de Alencar-do Carmo-Tribuzy de análisis complejo y el clásico Teorema del Índice de Poincaré. Veremos que los ceros de dicha diferencial cuadrática coinciden con los puntos umbilicales del par fundamental, es decir, los puntos donde II es proporcional a I .

A partir de ese momento, nos restringiremos al estudio de **Pares de Codazzi**, esto es, pares fundamentales tales que verifican que su tensor de Codazzi se anula idénticamente. Como explicaremos, que el tensor de Codazzi se anule idénticamente equivale a que el par fundamental (I, II) verifique las clásicas ecuaciones de Codazzi. Recordaremos en esta parte resultados ya conocidos de esta teoría, pero que usaremos en algún momento de esta memoria, siendo los más destacables las versiones abstractas de los Teoremas de Hopf y Liebman para esferas topológicas con CMC y CEC positiva respectivamente, y el Teorema de Hilbert para superficies completas con CEC negativa. Además, veremos que en el caso de que el par fundamental sea de Codazzi, la función de Codazzi toma una expresión bastante sencilla. Por otro lado, modificaremos la estructura conforme inducida en la superficie por I , esto es, tomaremos unas ciertas funciones $h, g \in C^\infty(\Sigma)$ y consideraremos la forma cuadrática $hI + gII$. A partir de esta estructura conforme estudiaremos la función de Codazzi del par $(hI + gII, \tilde{h}I + \tilde{g}II)$, donde las funciones \tilde{h} y \tilde{g} las elegiremos de una forma adecuada para que los puntos umbilicales de este nuevo par (que veremos que es fundamental bajo ciertas condiciones sobre h y g) coincidan con los puntos umbilicales del par de partida. Mediante este cambio de par podremos obtener una estructura conforme (la dada por $hI + gII$) sobre la superficie para la cuál la parte $(2,0)$ de $\tilde{h}I + \tilde{g}II$ es holomorfa. Esta construcción la podremos llevar a cabo para una amplia clase de superficies. Dicho de otra forma, podremos controlar el tensor de Codazzi del par de partida a partir del segundo par, sin alterar las propiedades fundamentales en

las que estamos interesados.

El siguiente punto a tratar será restringir los resultados obtenidos hasta el momento para un tipo de pares, los **pares especiales de Weingarten**, que son aquéllos en los que su curvatura media H y curvatura asimétrica $q = H^2 - K$ están relacionadas por una función $H = f(q)$. Veremos cómo los resultados abstractos conseguidos hasta el momento se tornan en potentes resultados para estos pares. Seremos capaces, por ejemplo, de clasificar todos los pares de Codazzi abstractos que sean especiales de Weingarten, así como obtener una generalización del Teorema de Hopf abstracto para estas superficies. Dentro de estos pares especiales de Weingarten, nos centraremos en aquéllos que son de tipo elíptico, ya que para este tipo de pares podremos controlar la completitud de la métrica riemanniana del segundo par a partir de la completitud de la métrica original. Por último, usaremos las herramientas estudiadas hasta el momento para obtener algunas otras consecuencias sobre pares de Codazzi, como una generalización del Teorema de Bonnet.

En el Capítulo 2 comenzaremos revisando las representaciones usuales de los espacios modelo \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 y \mathbb{S}^3 , además de establecer la notación necesaria concerniente a superficies inmersas en estos espacios modelo.

Continuaremos recordando el **Principio del Máximo** de Hopf en su versión más conocida, esto es, para ecuaciones diferenciales elípticas de segundo orden. Veremos cómo se aplica este resultado a superficies en \mathbb{R}^3 , aunque también a otros espacios modelo es aplicable. Localmente consideraremos la superficie definida como un grafo para una función u sobre un dominio de su plano tangente tal que verifica una cierta ecuación diferencial, que denotamos por $Lu = 0$. Entonces, diremos que la clase de superficies dada por la ecuación diferencial $Lu = 0$ cumple el Principio del Máximo si para cualesquiera dos soluciones u_1 y u_2 de $Lu = 0$, la diferencia $w = u_1 - u_2$ verifica una ecuación diferencial $\tilde{L}w = 0$ que cumple la tesis del Principio del Máximo.

Una vez fijados los preliminares analíticos, examinaremos el **Método de Alexandrov** para superficies que verifican el Principio del Máximo. A. D. Alexandrov demostró en 1956 que toda superficie de CMC, compacta y embebida debe ser una esfera. Para ello lo que hizo fue comparar la superficie con su reflejada respecto de una familia uniparamétrica de planos paralelos y, usando el Principio del Máximo de H. Hopf, concluir que dentro de esta familia de planos hay un plano de reflexión.

A partir de aquí, nos centraremos en clases de superficies que verifican el Principio del Máximo y tales que existe una esfera embebida dentro de dicha clase. Para este tipo de superficies obtendremos **estimaciones de la altura** máxima que puede alcanzar un grafo definido sobre un plano, para obtener, usando el Método de Alexandrov, estimaciones sobre la distancia máxima que puede alcanzar una superficie compacta y embebida con borde en un plano.

Así pues tenemos dos ingredientes fundamentales, el Método de Alexandrov y estimaciones de altura, para toda clase de superficies que verifican el Principio del

Máximo y tal que existe una superficie compacta embebida dentro de la clase. Dichos ingredientes son las herramientas necesarias que utilizaron Korevaar-Kusner-Meeks-Solomon para demostrar la **acotación cilíndrica** de los finales anulares de una superficie embebida con curvatura media constante. Por tanto, podremos derivar, para la clase de superficies con la que estamos tratando, los resultados que se obtuvieron para CMC. Con el resultado de la acotación cilíndrica en la mano y el Método de Alexandrov, los autores mencionados estudiaron superficies de curvatura media constante **propriadamente embebidas** y de topología finita, concluyendo que la superficie debe tener más de un final, que si tiene 2 ha de ser de rotación y si tiene 3 debe estar contenida en una banda determinada por dos planos paralelos. Generalizaremos este resultado para nuestra clase de superficies.

Proseguiremos el Capítulo 2 estudiando **superficies especiales de Weingarten** en \mathbb{R}^3 , esto es, aquellas cuya curvatura media H y curvatura asimétrica $q = H^2 - K$ se relacionan por $H = f(q)$, donde f es una función diferenciable definida en $[0, +\infty)$.

Aplicaremos los resultados abstractos obtenidos en el Capítulo 1 a las superficies especiales de Weingarten y obtendremos un **Teorema tipo Hopf** y un **Teorema tipo Bonnet** para estas superficies. Expliquemos esto un poco más. Como sabemos, la Primera y Segunda Forma Fundamental de una superficie en un espacio modelo es un par de Codazzi y además estamos pidiendo que las curvaturas media y asimétrica se relacionen mediante una función diferenciable. En otras palabras, el par formado por la Primera y Segunda Forma Fundamental de una superficie especial de Weingarten es un par especial de Weingarten, en el sentido del Capítulo 1. Entonces, consideraremos un segundo par fundamental para conseguir una estructura conforme sobre la superficie y una diferencial cuadrática sobre ella que es holomorfa para dicha estructura conforme si, y sólo si, la superficie es especial de Weingarten (Teorema tipo Hopf). Usando este nuevo par asociado a la Primera y Segunda Forma Fundamental veremos que si dos esferas topológicas tienen la misma nueva estructura conforme y verifican que $H_1 - f(q_1) = H_2 - f(q_2)$, entonces difieren en una congruencia de \mathbb{R}^3 (Teorema tipo Bonnet).

Nos adentraremos después en un tipo concreto de superficies especiales, las de **tipo elíptico**. Este tipo de superficies tienen un comportamiento singular dependiendo de lo que ocurra en los puntos umbilicales; es decir, como $H = f(q)$ y los puntos umbilicales son aquellos en los que $q = 0$, el comportamiento depende del valor $f(0)$. Si $f(0) = 0$ se comporta como una superficie minimal y si $f(0) \neq 0$ como una superficie de CMC. Revisaremos algunos de los resultados conocidos para este tipo de superficies como, por ejemplo, que verifican el Principio del Máximo.

Si $f(0) \neq 0$, dentro de la clase de superficies existe una esfera de radio $1/|f(0)|$, y por tanto una superficie de tipo elíptico con $f(0) \neq 0$ cumple todos los requisitos necesarios para aplicar los resultados obtenidos para superficies propriadamente embebidas de topología finita. Apoyándonos en un resultado de Sa Earp y Toubiana conseguiremos

caracterizar las superficies especiales de tipo elíptico, con dos finales y de topología finita como una de revolución. Por último, daremos algunos resultados de clasificación para las superficies especiales de tipo elíptico imponiéndole alguna condición extra sobre la curvatura de Gauss. Concretamente veremos que si la curvatura de Gauss no cambia de signo entonces la superficie debe ser un plano, un cilindro recto o una esfera.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de superficies inmersas en un espacio producto tridimensional que son el producto cartesiano de una superficie riemanniana sin borde \mathbb{M}^2 , que llamamos base, y la recta real, la fibra, con la métrica producto, prestando especial atención a los casos en que \mathbb{M}^2 es una de las superficies simplemente conexas con curvatura constante. Para empezar revisaremos cómo los **elementos geométricos** (como la conexión de Levi-Civita y el tensor de curvatura) del espacio producto se relacionan con los elementos geométricos de la base.

A continuación, fijaremos **ecuaciones necesarias** que debe cumplir una superficie inmersa en un espacio producto, entre ellas las ecuaciones de Gauss y Codazzi. Después particularizaremos estas ecuaciones para parametrizaciones específicas sobre la superficie, ecuaciones que usaremos muy a menudo a lo largo de este Capítulo. Como primera aplicación, estudiaremos las **superficies totalmente geodésicas** en estos espacios productos, obteniendo que son los planos horizontales, $\mathbb{M}^2 \times \{t_0\}$, planos verticales, $\gamma \times \mathbb{R}$ donde γ es una geodésica en \mathbb{M}^2 , o un plano en \mathbb{R}^3 tras pasar, si fuese necesario, a su recubridor universal. Además, introduciremos la **función altura** asociada a una superficie, es decir, la proyección de la superficie sobre la fibra y la **función ángulo**, que no es más que el producto escalar del normal de la superficie con la dirección vertical. Proseguiremos estudiando las superficies de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, dando las curvaturas principales en términos de su curva generatriz.

El siguiente punto a tratar serán las **superficies con curvatura media constante** en estos espacios. Como hemos comentado en esta introducción, dichas superficies han experimentado un sorprendente desarrollo en los últimos años, por lo que comenzaremos recordando algunos de los resultados más notables obtenidos al respecto. Entre ellos, recordaremos cómo son las **esferas rotacionalmente simétricas** con CMC en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, para después clasificarlas como las únicas esferas topológicas inmersas con CMC, lo que sería un **Teorema tipo Hopf** en estos espacios. Dicho resultado ha sido demostrado por Abresch y Rosenberg y es uno de los responsables del apogeo en el estudio de estas superficies. Para probar este resultado, los autores definieron una diferencial cuadrática, en términos de la diferencial de Hopf usual y la diferencial de la función altura, que resulta ser holomorfa cuando la curvatura media de la superficie es constante. Por tanto, sobre una esfera topológica esta diferencial, conocida como **diferencial de Abresch-Rosenberg**, se anula, lo cual caracteriza a las esferas de revolución.

Pasaremos a obtener **estimaciones de la distancia** máxima que puede alcanzar un grafo compacto de CMC $H > 1/2$ con respecto al plano vertical u horizontal sobre el que se apoya su borde, para obtener, usando el Método de Alexandrov, estimaciones de la distancia máxima que alcanza una superficie compacta y embebida con borde en un plano vertical u horizontal. Cabe destacar que las **estimaciones verticales son óptimas** en el sentido de que caracterizan a los ejemplos completos de revolución cuando se alcanza dicha altura máxima.

Aunque las estimaciones horizontales no serán óptimas, sí serán suficientes para estudiar superficies propiamente embebidas con curvatura media constante, de topología finita y un solo final, obteniendo que estas superficies no pueden existir.

Lo siguiente será estudiar superficies con curvatura de Gauss constante en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Comenzaremos como en el caso anterior estudiando aquellas que son de revolución. Una vez obtenidas, definiremos sobre la superficie un nuevo **par fundamental** en términos de la Primera y Segunda Forma Fundamental y la diferencial de la función altura. Lo que haremos será demostrar que este nuevo par es de **Codazzi** cuando la curvatura de Gauss es constante.

Este hecho nos permitirá obtener, usando resultados conocidos de la teoría de Pares de Codazzi, un **Teorema tipo Liebmann** para las superficies completas con curvatura de Gauss constante $K(I) > 0$ si estamos en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ o $K(I) > 1$ si estamos en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, caracterizándolas como los ejemplos completos de revolución mencionados anteriormente. Además, mostraremos que no existen superficies completas con curvatura de Gauss constante $K(I) \in (0, 1)$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Relacionaremos la curvatura de Gauss de la inmersión con la curvatura de Gauss de la nueva métrica que hemos definido sobre la superficie, para así, usando el Teorema de Hilbert abstracto del Capítulo 1, poder obtener un **Teorema tipo Hilbert**. Concretamente veremos que en este caso no existen superficies completas con curvatura de Gauss constante $K(I) < -1$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Continuaremos dando **estimaciones** para la altura máxima que puede alcanzar un grafo de curvatura de Gauss constante positiva $K(I) > 0$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (o $K(I) > 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$) sobre un plano horizontal, caracterizando, de hecho, las superficies de revolución como aquellas en las que se alcanza la máxima distancia. Obtendremos estas estimaciones con un método analítico análogo al que hiciéramos para curvatura media constante. Lo que haremos será calcular el laplaciano de la función altura y la función ángulo con respecto a la Segunda Forma Fundamental para, tomando una cierta función adecuada sobre la superficie que depende de la función altura y ángulo, usar el Principio del Máximo. Estos cálculos nos permitirán, además, obtener algunas consecuencias para superficies llanas en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ o con $K(I) = 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Terminaremos el estudio de estas superficies dando una **representación** de las mismas en términos de la función altura, la función ángulo, la curvatura de Gauss y la estructura conforme inducida por la Segunda Forma Fundamental de la superficie.

Esta representación se tornará más sencilla en ciertos casos particulares, como son las superficies con $K(I) = -1$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ o $K(I) = 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

La última parte de esta memoria está dedicada al estudio de superficies con curvatura extrínseca constante en un espacio producto. Notemos que, puesto que estamos en un espacio producto, la curvatura de Gauss y la curvatura extrínseca ya no se relacionan por una constante, por lo que su estudio difiere al caso en que el espacio ambiente es un espacio modelo.

Nuestro primer resultado destacable en este sentido es obtener un **Teorema tipo Hadamard-Stoker** en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Este teorema en \mathbb{R}^3 dice que toda superficie completa con curvatura extrínseca positiva en todo punto debe ser embebida y homeomorfa a una esfera o a un plano, en cuyo caso es un grafo sobre algún plano tangente. En nuestro caso es más complicado. El método de la demostración se basa en observar cómo se comporta la superficie cuando se interseca con foliaciones de superficies totalmente geodésicas. En \mathbb{R}^3 estas foliaciones son por medio de planos, por tanto isométricas a \mathbb{R}^2 , pero en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tenemos dos tipos de foliaciones por superficies totalmente geodésicas: una por planos verticales, isométricos a \mathbb{R}^2 , y la otra por planos horizontales, isométricos a \mathbb{H}^2 . Demostraremos que si nuestra superficie es completa y tiene curvatura extrínseca positiva entonces debe ser embebida y homeomorfa a una esfera si es cerrada o a un plano si es abierta, en cuyo caso es un grafo sobre un plano horizontal o tiene un final de un tipo especial, que llamaremos simple. Además, veremos cómo podemos construir de forma sencilla superficies con curvatura extrínseca positiva completas y con un final simple.

Centraremos después nuestra atención en superficies con curvatura extrínseca constante positiva en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, estudiando primero los ejemplos completos de revolución. Definiremos una **diferencial cuadrática asociada** a estas superficies, tanto en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, en términos de la Primera Forma Fundamental, la función ángulo, la curvatura extrínseca y la diferencial de la función altura. El primer resultado que obtendremos será que, cuando consideramos la estructura conforme inducida por la Segunda Forma Fundamental, el módulo de la derivada logarítmica de dicha diferencial está acotado por una función continua sobre la superficie. Un resultado de Alencar-do Carmo-Tribuzy nos permite asegurar que entonces los ceros de esta diferencial, si no es idénticamente nula, son aislados y de índice negativo.

Seguiremos obteniendo **estimaciones**, tanto verticales como horizontales para estas superficies, probando la no existencia de superficies completas, no compactas con curvatura extrínseca positiva en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Para terminar, **clasificaremos** las superficies completas con curvatura extrínseca constante positiva en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ como los ejemplos completos de revolución. Para ello, utilizando que la diferencial cuadrática tiene sólo ceros aislados y de índice negativo concluiremos, usando el Teorema del Índice de Poincaré, que dicha diferencial debe anularse idénticamente sobre la superficie. Para finalizar, caracterizaremos los

ejemplos de revolución como aquéllos cuya diferencial se anula.

Capítulo 1

La Ecuación de Codazzi

1.1. Preliminares

A lo largo de este Capítulo supondremos que la diferenciabilidad a la que nos referimos es siempre C^∞ , pero, sin embargo, es importante notar que la diferenciabilidad necesitada es mucho menor.

Denotaremos por Σ a una superficie orientada; de otra forma, trabajaríamos en su recubridor de dos hojas orientable.

Comenzaremos con una batería de conceptos básicos concernientes a variedades diferenciables (para detalles ver [29]). Sea $T_p\Sigma$ el espacio tangente en $p \in \Sigma$ y $T\Sigma$ el fibrado tangente. Además, $\mathfrak{X}(\Sigma)$ denotará el conjunto de campos de vectores diferenciables, esto es, el conjunto de aplicaciones diferenciables $X : \Sigma \rightarrow T\Sigma$ con $X(p) \in T_p\Sigma$ y $C^\infty(\Sigma)$ el conjunto de funciones diferenciables definidas sobre Σ y con imagen en \mathbb{R} . Denotaremos por $[\cdot, \cdot]$ el corchete de Lie de campos y por $\mathfrak{X}(\Sigma)^*$ el conjunto de uno formas diferenciables sobre Σ .

Denotaremos por $\Lambda^r(\Sigma)$ el conjunto de aplicaciones diferenciables del producto cartesiano de $\mathfrak{X}(\Sigma)$ r veces en $\mathfrak{X}(\Sigma)$, esto es

$$T : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \dots \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$$

y análogamente, por $\Lambda_s(\Sigma)$ el conjunto de aplicaciones diferenciables del producto cartesiano de $\mathfrak{X}(\Sigma)^*$ s veces en $\mathfrak{X}(\Sigma)^*$. Denotaremos además por $\tau^r(\Sigma)$ el subconjunto de aplicaciones de $\Lambda^r(\Sigma)$ que son $C^\infty(\Sigma)$ -multilineales. De forma análoga definiremos $\tau_s(\Sigma)$.

Denotaremos por $\mathcal{Q}(\Sigma)$ el conjunto de formas bilineales simétricas sobre Σ , que identificaremos con su **formas cuadráticas** asociada. $\mathcal{M}(\Sigma) \subset \mathcal{Q}(\Sigma)$ al subconjunto formado por aquellas que definen una métrica riemanniana $\mathcal{R}(\Sigma)$ o lorentziana $\mathcal{L}(\Sigma)$ sobre Σ , esto es, $\mathcal{M}(\Sigma) \equiv \mathcal{R}(\Sigma) \cup \mathcal{L}(\Sigma)$.

Definición 1.1:

A un par

$$(I, II) \in \mathcal{R}(\Sigma) \times \mathcal{Q}(\Sigma) \equiv \mathcal{P}(\Sigma)$$

lo llamaremos **par fundamental** sobre Σ . Al conjunto $\mathcal{P}(\Sigma)$ lo llamaremos **conjunto de pares fundamentales**.

Es conveniente hacer notar que podemos ver un par fundamental de la siguiente forma alternativa (véase [75]). Una vez fijada $I \equiv \langle, \rangle \in \mathcal{R}(\Sigma)$, podemos identificar $\mathcal{Q}(\Sigma)$ con el conjunto $\mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$ de endomorfismos del espacio de campos diferenciables autoadjuntos respecto de \langle, \rangle , es decir

$$\mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle) = \{S \in \Lambda^1(\Sigma) : \langle SX, Y \rangle = \langle X, SY \rangle, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)\}.$$

Así, asociada a $S \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$ podemos definir una forma cuadrática, II_S , que viene dada por

$$II_S(X, Y) = \langle SX, Y \rangle, X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma). \quad (1.1)$$

Recíprocamente, dada una forma cuadrática II sobre la superficie riemanniana $(\Sigma, \langle, \rangle)$, podemos definir $S^{II} \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$ asociada a II como el único endomorfismo S_{II} verificando

$$II(X, Y) = \langle S^{II}X, Y \rangle, X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma). \quad (1.2)$$

Así, de (1.1) y (1.2), tenemos una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$ y el conjunto de formas bilineales simétricas $\mathcal{Q}(\Sigma)$ sobre nuestra superficie.

Dicha identificación nos permitirá considerar endomorfismos autoadjuntos o formas cuadráticas sobre la superficie indistintamente. La notación que emplearemos será diferente en cada contexto. Mientras que cuando hablamos de formas cuadráticas usamos (I, II) , usaremos (\langle, \rangle, S) cuando consideremos endomorfismos autoadjuntos.

Asociada a una métrica riemanniana $I \equiv \langle, \rangle$ sobre nuestra superficie, existe una única conexión afín, $\nabla \in \Lambda^2(\Sigma)$, que es libre de torsión y compatible con I , a saber, la conexión de Levi-Civita asociada a I .

Por otra parte, una vez tenemos una métrica sobre nuestra superficie $(\Sigma, \langle, \rangle)$ es innecesario distinguir entre $\Lambda^r(\Sigma)$ y $\Lambda_r(\Sigma)$, pues podemos identificar cada elemento $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ del conjunto de campos diferenciables con un único elemento $\omega \in \mathfrak{X}(\Sigma)^*$ en el conjunto de 1-formas diferenciables mediante la igualdad

$$\omega(Y) = \langle X, Y \rangle, \forall Y \in \mathfrak{X}(\Sigma). \quad (1.3)$$

Por tanto, cada elemento de $\Lambda^r(\Sigma)$ (resp. $\Lambda_s(\Sigma)$) puede verse en $\mathfrak{X}(\Sigma)$ (resp. $\mathfrak{X}(\Sigma)^*$), o en $C^\infty(\Sigma)$ según nos convenga usando la identificación (1.3).

Motivación 1.1:

Esta notación está motivada por la teoría de superficies inmersas en espacios modelo tridimensionales \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 y \mathbb{H}^3 . Veamos esto para el caso particular de \mathbb{R}^3 . Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, \mathbb{R}^3 con la métrica euclídea estándar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, y consideremos sobre Σ la restricción de dicha métrica, esto es, $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\Sigma}$ (por comodidad seguiremos denotando a $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{\Sigma}$ sólo como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o I , siempre que no haya confusión), llamada Primera Forma Fundamental de la superficie. Como estamos considerando la superficie orientable, existe $N \in \mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ un campo de vectores normal y unitario a lo largo de la superficie. Entonces, N define un endomorfismo autoadjunto sobre Σ con la métrica inducida, conocido como el endomorfismo de Weingarten, dado por

$$SX = -\nabla_X N, \quad X \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

y la forma cuadrática asociada al endomorfismo de Weingarten S

$$II_S(X, Y) = \langle -\nabla_X N, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

es la conocida como Segunda Forma Fundamental de la superficie.

Es conveniente continuar escribiendo parte de lo que hemos visto en un sistema de coordenadas local. Sean (x, y) unos parámetros locales en un entorno U de Σ , $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ y escribamos

$$I = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 \tag{1.4}$$

$$II = e dx^2 + 2f dx dy + g dy^2. \tag{1.5}$$

Entonces

$$H = H(I, II) = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)} \tag{1.6}$$

$$K = K(I, II) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{1.7}$$

son definiciones independientes de las coordenadas elegidas y se llaman, respectivamente, la **curvatura media** y **curvatura extrínseca** del par (I, II) .

A partir de la definición anterior, definimos las **curvaturas principales** del par como las dadas por las cantidades

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \tag{1.8}$$

$$k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \tag{1.9}$$

donde tenemos que observar que las hemos denotado de forma que k_1 sea la curvatura principal más grande. Además, denotaremos por q a la **curvatura asimétrica**, esto es,

$$q = q(I, II) = H^2 - K = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4}. \tag{1.10}$$

Diremos que el par (I, II) es **umbilical** en $p \in \Sigma$ si II es proporcional a I , esto es $II(p) = \lambda(p)I(p)$, o equivalentemente, las curvaturas principales en ese punto coinciden, es decir, $q = 0$. En lo que sigue, denotaremos por $\mathcal{U}_{(I,II)}$ al conjunto de puntos umbilicales de Σ asociados a (I, II) y si no hubiera confusión sólo lo denotaríamos por \mathcal{U} . Claramente dicho conjunto es un cerrado de la superficie y además $\Sigma' = (\Sigma \setminus \mathcal{U}_{(I,II)}) \cup \text{int}(\mathcal{U}_{(I,II)})$ es un conjunto denso en Σ .

Es bien conocido que todo endomorfismo autoadjunto S es diagonalizable cuando I es riemanniana, es decir, dado un punto $p \in \Sigma$, existe una base ortonormal del espacio tangente $\{e_1, e_2\} \in T_p\Sigma$ tal que

$$S(e_i) = k_i(p)e_i, \quad i = 1, 2$$

esto es, los valores propios, k_i , de S son las curvaturas principales del par. Luego, la curvatura media (resp. curvatura extrínseca) del par es $1/2$ de la **traza** (resp. **determinante**) **del endomorfismo** S , que seguiremos denotando por H (resp. K). Hablaremos de curvatura media (resp. curvatura extrínseca) cuando estemos tratando con formas cuadráticas y traza (resp. determinante) cuando tratemos con endomorfismos.

Denotemos por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ a los campos básicos asociados a la parametrización y por ∇ a la conexión de Levi-Civita de I . Entonces las funciones Γ_{ij}^k definidas en U por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

son los coeficientes de la conexión ∇ en U asociados a los parámetros (x, y) , o los **símbolos de Christoffel** asociados a la métrica I , y vienen dados por

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(G E_x - 2F F_x + F E_y) \quad (1.11)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2(EG - F^2)}(E E_y - 2E F_x + F E_x) \quad (1.12)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(G E_y - F G_x) \quad (1.13)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(E G_x - F E_y) \quad (1.14)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2(EG - F^2)}(G G_x - 2G F_y + F G_y) \quad (1.15)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2(EG - F^2)}(E G_y - 2F F_y + F G_x) \quad (1.16)$$

pudiéndose calcular fácilmente a partir de (1.4).

Una herramienta que usaremos con gran frecuencia es el análisis complejo. Dicho esto, recordamos cómo introducir la variable compleja en una superficie. Llamaremos fibrado tangente complexificado de $T\Sigma$ al fibrado

$$T^{\mathbb{C}}\Sigma = \{X + iY : X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)\}.$$

Se demuestra fácilmente que si $\{X, Y\}$ es una base de $T\Sigma$, entonces $\{X, iX, Y, iY\}$ es base de $T^{\mathbb{C}}\Sigma$ como fibrado real, y $\{X + iY, X - iY\}$ es base como fibrado complejo. En particular, dada una parametrización (x, y) en un entorno U de Σ , si consideramos el parámetro complejo $z = x + iy$, podemos definir los campos locales

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

de modo que $\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$ es una base local de $T^{\mathbb{C}}\Sigma$.

Además, podemos definir las 1-formas complejas locales

$$\begin{aligned}dz &= dx + idy \\ d\bar{z} &= dx - idy,\end{aligned}$$

que es la base dual de $\left\{ \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\}$. Así, trabajaremos indistintamente con una parametrización (x, y) o un parámetro complejo $z = x + iy$. Por lo tanto, podemos reescribir

$$I = p dz^2 + 2\lambda |dz|^2 + \bar{p} d\bar{z}^2 \quad (1.17)$$

$$II = Q dz^2 + 2\rho |dz|^2 + \bar{Q} d\bar{z}^2 \quad (1.18)$$

siendo, de (1.4) y (1.5),

$$p = \frac{1}{4}(E - G + 2iF) \quad (1.19)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(E + G) \quad (1.20)$$

$$Q = \frac{1}{4}(e - g - 2if) \quad (1.21)$$

$$\rho = \frac{1}{2}(e + g). \quad (1.22)$$

Podemos así comprobar con un cálculo directo de (1.6) y (1.7) que

$$H = H(I, II) = \frac{p\bar{Q} - 2\lambda\rho + \bar{p}Q}{2(|p|^2 - \lambda^2)} \quad (1.23)$$

$$K = K(I, II) = \frac{|Q|^2 - \rho^2}{|p|^2 - \lambda^2}. \quad (1.24)$$

Además, podemos expresar los coeficientes de la conexión ∇ asociados a z y \bar{z} como

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} &= \mathbb{C}\Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial z} + \mathbb{C}\Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \mathbb{C}\Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial z} + \mathbb{C}\Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial z} &= \mathbb{C}\Gamma_{22}^1 \frac{\partial}{\partial z} + \mathbb{C}\Gamma_{22}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\end{aligned}$$

siendo $\mathbb{C}\Gamma_{ij}^k$ los símbolos de Christoffel de la conexión asociados a la parametrización (z, \bar{z}) .

Veamos cómo se relacionan los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k asociados a la parametrización (x, y) y los símbolos $\mathbb{C}\Gamma_{ij}^k$ asociados a la parametrización (z, \bar{z}) , donde $z = x + iy$:

$$\begin{aligned}\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{4} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} - 2i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left((\Gamma_{11}^1 - 2i\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^1) \frac{\partial}{\partial x} + (\Gamma_{11}^2 - 2i\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^2) \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{4} (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2 + i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)) \frac{\partial}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{4} (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2 - i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)) \frac{\partial}{\partial \bar{z}},\end{aligned}$$

y de forma análoga podemos relacionar los otros, obteniendo

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{4} (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{12}^2 + i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1)) \quad (1.25)$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{4} (\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2 - i(\Gamma_{11}^2 - \Gamma_{22}^2 + 2\Gamma_{12}^1)) \quad (1.26)$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{4} (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 + i(\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2)) \quad (1.27)$$

donde tenemos que notar que los demás coeficientes se obtienen de forma análoga, siendo

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 = \overline{\mathbb{C}\Gamma_{22}^2} \quad (1.28)$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^2 = \overline{\mathbb{C}\Gamma_{22}^1} \quad (1.29)$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{12}^1 = \overline{\mathbb{C}\Gamma_{12}^2} \quad (1.30)$$

Además, un cálculo directo, sustituyendo en las ecuaciones (1.11)-(1.16) las expresiones (1.19)-(1.22), también nos muestra que

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(\bar{p}p_z - 2\lambda\lambda_z + \lambda p_{\bar{z}}) \quad (1.31)$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(p p_{\bar{z}} - 2p\lambda_z + \lambda p_z) \quad (1.32)$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(\bar{p}p_{\bar{z}} - \lambda\bar{p}_z) \quad (1.33)$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(p\bar{p}_z - \lambda p_{\bar{z}}) \quad (1.34)$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(\bar{p}\bar{p}_z - 2\bar{p}\lambda_{\bar{z}} + \lambda\bar{p}_{\bar{z}}) \quad (1.35)$$

$$\mathbb{C}\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2(|p|^2 - \lambda^2)}(p\bar{p}_{\bar{z}} - 2\lambda\lambda_{\bar{z}} + \lambda\bar{p}_z). \quad (1.36)$$

El superíndice \mathbb{C} nos refiere claramente a la parametrización (z, \bar{z}) , del cuál prescindiremos siempre y cuando no haya confusión, es decir, cuando consideremos directamente la parametrización (z, \bar{z}) .

Por otra parte, un elemento de capital importancia asociado a la conexión ∇ es el **Tensor de Curvatura** $R \in \tau^3(\Sigma)$ dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]}Z, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma) \quad (1.37)$$

que mide cuánto se aleja la métrica de ser llana. Es un cálculo directo demostrar que R es $C^\infty(\Sigma)$ -lineal en todas sus variables y antisimétrica en sus dos primeras.

Asociado al tensor de curvatura (1.37), está la **Curvatura de Gauss de I** , que viene dada por

$$K(I)(p) = \frac{\langle R(X_p, Y_p)X_p, Y_p \rangle}{\|X_p \wedge Y_p\|^2}, \quad p \in \Sigma, \quad (1.38)$$

donde $X_p, Y_p \in T_p\Sigma$ son linealmente independientes y

$$\|X_p \wedge Y_p\| = \sqrt{\|X_p\|^2 \|Y_p\|^2 - \langle X_p, Y_p \rangle^2}.$$

Notemos además que la definición de $K(I)$ no depende de los vectores elegidos, sino exclusivamente del punto donde estemos trabajando. Además, un hecho bien conocido es que $K(I)$ determina completamente a R cuando estamos en superficies mediante la identidad

$$R(X, Y)Z = K(I) (\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X). \quad (1.39)$$

Nos referiremos a $K(I)$ como la **curvatura intrínseca** o **curvatura de Gauss** indistintamente.

Como hemos hecho antes, describamos el tensor de curvatura y la curvatura intrínseca en un sistema de coordenadas. Así, dada una parametrización (x, y) tenemos que

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial x} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} \\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \\
&= \left((\Gamma_{11}^1)_y - (\Gamma_{12}^1)_x \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left((\Gamma_{11}^2)_y - (\Gamma_{12}^2)_x \right) \frac{\partial}{\partial y} \\
&\quad + \Gamma_{11}^1 \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} + \Gamma_{11}^2 \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial y} - \Gamma_{12}^1 \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} - \Gamma_{12}^2 \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial y} \\
&= \left((\Gamma_{11}^1)_y - (\Gamma_{12}^1)_x + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 \right) \frac{\partial}{\partial x} \\
&\quad + \left((\Gamma_{11}^2)_y - (\Gamma_{12}^2)_x + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right) \frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
K(I) &= \frac{F}{EG - F^2} \left((\Gamma_{11}^1)_y - (\Gamma_{12}^1)_x + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 \right) \\
&\quad + \frac{G}{EG - F^2} \left((\Gamma_{11}^2)_y - (\Gamma_{12}^2)_x + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right).
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Además, usando (1.19)-(1.22) y (1.25)-(1.30), de forma análoga podemos observar que en la parametrización (z, \bar{z}) tenemos

$$\begin{aligned}
K(I) &= \frac{\lambda}{|p|^2 - \lambda^2} \left(\left(\mathbb{C} \Gamma_{11}^1 \right)_{\bar{z}} - \left(\mathbb{C} \Gamma_{12}^1 \right)_z + \mathbb{C} \Gamma_{11}^2 \mathbb{C} \Gamma_{22}^1 - \mathbb{C} \Gamma_{12}^2 \mathbb{C} \Gamma_{12}^1 \right) \\
&\quad + \frac{\bar{p}}{|p|^2 - \lambda^2} \left(\left(\mathbb{C} \Gamma_{11}^2 \right)_{\bar{z}} - \left(\mathbb{C} \Gamma_{12}^2 \right)_z + \mathbb{C} \Gamma_{11}^1 \mathbb{C} \Gamma_{12}^2 + \mathbb{C} \Gamma_{11}^2 \mathbb{C} \Gamma_{22}^2 - \mathbb{C} \Gamma_{12}^1 \mathbb{C} \Gamma_{11}^2 - \mathbb{C} \Gamma_{12}^2 \mathbb{C} \Gamma_{12}^2 \right).
\end{aligned} \tag{1.41}$$

1.2. El Tensor de Codazzi

De manera intuitiva podemos decir que, dada una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, la geometría intrínseca es la que depende de la métrica y la extrínseca del endomorfismo de Weingarten S . Así como el tensor curvatura R mide cuánto se aleja la métrica de ser llana, veremos cómo le podemos asociar un tensor al operador S de forma natural que nos ayude a controlarlo.

Definición 1.2:

Sea $(\langle, \rangle, S) \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Definimos el **Tensor de Codazzi asociado a S** como la aplicación $T_S \in \Lambda^2(\Sigma)$ dada por

$$T_S(X, Y) = \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma). \quad (1.42)$$

Veamos algunas propiedades del Tensor de Codazzi que se desprenden directamente de la definición.

Proposición 1.1:

Sea $\langle, \rangle \in \mathcal{R}(\Sigma)$. Entonces

1. T_S es antisimétrico para cualquier $S \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$.
2. $T_S \in \tau^2(\Sigma)$. Además la aplicación

$$\begin{array}{ccc} T & : & \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle) \longrightarrow \tau^2(\Sigma) \\ & & S \longmapsto T_S \end{array}$$

es una aplicación \mathbb{R} -lineal. De hecho, verifica

$$T_{fS}(X, Y) = fT_S(X, Y) + X(f)SY - Y(f)SX, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma), \quad f \in C^\infty(\Sigma). \quad (1.43)$$

Demostración. La antisimetría es inmediata debido a la antisimetría del corchete de Lie. Y la linealidad respecto a campos también es inmediata de la linealidad de S y el corchete de Lie. Veamos cómo se comporta respecto a funciones $f \in C^\infty(\Sigma)$

$$\begin{aligned} T_S(fX, Y) &= \nabla_{fX} SY - \nabla_Y S(fX) - S[fX, Y] \\ &= f\nabla_X SY - Y(f)SX - f\nabla_Y SX - S(f[X, Y] - Y(f)X) \\ &= f(\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y]) = fT_S(X, Y) \end{aligned}$$

luego, $T_S \in \tau^2(\Sigma)$.

Además, observamos que

$$\begin{aligned} T_{fS}(X, Y) &= \nabla_X fSY - \nabla_Y fSX - fS[X, Y] \\ &= fT_S(X, Y) + X(f)SY - Y(f)SX. \end{aligned}$$

□

Notemos que (1.43) nos da pie a extender el Tensor de Codazzi a funciones del siguiente modo: tomemos $f \in C^\infty(\Sigma)$ y consideremos $S = f\text{Id} \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$. Entonces, al ser $T_{\text{Id}} = 0$ por ser ∇ libre de torsión, tenemos que

$$T_f(X, Y) = X(f)Y - Y(f)X. \quad (1.44)$$

Motivación 1.2:

La motivación de la definición de este tensor surge de la teoría de superficies en espacios modelo. En este caso, si tenemos una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, es bien conocido que el operador de Weingarten de dicha superficie verifica la ecuación de Codazzi, esto es

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$$

o equivalentemente, por la definición anterior,

$$T_S(X, Y) = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Luego, de manera natural definimos, siguiendo la notación empleada

Definición 1.3:

Sea $(\langle, \rangle, S) \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Entonces diremos que S es **Codazzi** respecto de \langle, \rangle (o (\langle, \rangle, S) es de Codazzi) si

$$T_S(X, Y) = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Además denotaremos por $\mathcal{C}(\Sigma) \subset \mathcal{P}(\Sigma)$, llamado conjunto de **Pares de Codazzi**, al subconjunto de pares fundamentales cuyo endomorfismo autoadjunto es Codazzi.

Este conjunto que acabamos de ver será de gran importancia y lo estudiaremos con más detenimiento más adelante. Una forma intuitiva de acercarse a este Tensor de Codazzi es pensar que mide cuánto se aleja un par fundamental de ser de Codazzi.

Un subconjunto de especial interés de $\mathcal{P}(\Sigma)$ es el formado por los pares fundamentales con curvatura media cero, es decir

$$\mathcal{P}^0(\Sigma) = \{(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma); H(I, II) = 0\}, \quad (1.45)$$

al que llamaremos conjunto de **Pares Fundamentales sin Traza**, ya que simplifican algunos pasos de las demostraciones.

Es claro que dado un par en $\mathcal{P}(\Sigma)$ siempre podemos asociarle uno en $\mathcal{P}^0(\Sigma)$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Sigma) &\longrightarrow \mathcal{P}^0(\Sigma) \\ (I, II) &\longmapsto (I, II_H) \quad II_H = II - HI \\ (\langle \cdot, \cdot \rangle, S) &\longmapsto (\langle \cdot, \cdot \rangle, S_H) \quad S_H = S - H \text{Id}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Y de especial interés dentro de $\mathcal{C}(\Sigma)$ es el subconjunto formado por los pares con curvatura media cero, esto es

$$\mathcal{C}^0(\Sigma) = \{(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma) : H(I, II) = 0\},$$

llamado conjunto de **Pares de Codazzi sin traza**, ya que, como veremos un poco más adelante, está íntimamente relacionado con el conjunto de diferenciales cuadráticas holomorfas sobre la superficie de Riemann asociada a I .

Veamos cómo quedan las ecuaciones anteriores cuando trabajamos en un entorno coordenado. Dados (x, y) parámetros locales sobre $U \subset \Sigma$ y usando las propiedades estudiadas del Tensor de Codazzi, es suficiente conocer cómo actúa T_S sobre los campos básicos $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$. Así, dado $(\langle \cdot, \cdot \rangle, S) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ tenemos

$$T_S \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$$

para ciertas $a, b \in C^\infty(U)$, luego de (1.4) y (1.5)

$$\begin{aligned} \left\langle T_S \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} S \frac{\partial}{\partial y} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} S \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\langle S \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle - \left\langle S \frac{\partial}{\partial y}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle - \frac{\partial}{\partial y} \left\langle S \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \left\langle S \frac{\partial}{\partial x}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial y}} \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \\ &= f_x - \left\langle S \frac{\partial}{\partial y}, \Gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle - e_x + \left\langle S \frac{\partial}{\partial x}, \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \\ &= f_x - e_y + e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \end{aligned}$$

y de forma análoga

$$\left\langle T_S \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = g_x - f_y + e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2.$$

Es decir, para parámetros locales cualesquiera (x, y) en los que el par fundamental (I, II) viene dado por (1.4) y (1.5) se verifica

$$\left\langle T_S \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = g_x - f_y + e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 \quad (1.47)$$

$$\left\langle T_S \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = f_x - e_y + e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2. \quad (1.48)$$

En consecuencia, $S \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$ es Codazzi si, y sólo si, las ecuaciones (1.47) y (1.48) se anulan idénticamente. Dichas ecuaciones son reconocibles como las ecuaciones de Codazzi.

De forma similar podemos reescribir las ecuaciones anteriores en el parámetro local complejo $z = x + iy$ en los que el par fundamental (I, II) viene dado por (1.17) y (1.18), obteniendo de esta forma

$$\langle T_S \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle = \bar{Q}_z - \rho_{\bar{z}} + Q^{\mathbb{C}} \Gamma_{22}^1 + \rho \left({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{22}^2 - {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^1 \right) - \bar{Q}^{\mathbb{C}} \Gamma_{12}^2 \quad (1.49)$$

$$\langle T_S \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \frac{\partial}{\partial z} \rangle = -Q_{\bar{z}} + \rho_z + Q^{\mathbb{C}} \Gamma_{12}^1 + \rho \left({}^{\mathbb{C}}\Gamma_{12}^2 - {}^{\mathbb{C}}\Gamma_{11}^1 \right) - \bar{Q}^{\mathbb{C}} \Gamma_{11}^2. \quad (1.50)$$

1.3. Parametrizaciones especiales

Hasta ahora hemos trabajado en un entorno coordenado cualquiera, pero sobre una superficie podemos obtener una serie de parametrizaciones especiales donde es más sencillo trabajar. Entre ellas están las parametrizaciones por parámetros isotermos, doblemente ortogonales o las redes de Tchebychev. Así, lo que haremos en esta parte será particularizar las ecuaciones anteriores para un par fundamental $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ a estos tipos de parametrizaciones.

1.3.1. Parámetros isotermos

Una parametrización (s, t) con la orientación inducida de la superficie en un entorno $U \subset \Sigma$ se dice **isoterma** si para una métrica riemanniana I dada por (1.4) se verifica

$$E = G > 0 \text{ y } F = 0,$$

o visto en el parámetro complejo $z = s + it$, llamado parámetro **conforme**, si para una métrica riemanniana I dada por (1.17) se verifica

$$p = 0.$$

Es bien conocido que dichos parámetros siempre existen localmente para cualquier métrica riemanniana y que podemos recubrir la variedad por este tipo de entornos coordenados. Además, el cambio de carta entre entornos isotermos positivamente orientados es holomorfo y por lo tanto podemos ver Σ como una superficie de Riemann.

Cuando trabajemos con parámetros isotermos siempre lo haremos desde el punto de vista del parámetro complejo asociado z , por lo que veremos todas las ecuaciones para dicha parametrización. Por cuestiones de orden, agruparemos todas las ecuaciones que necesitaremos en la siguiente Proposición,

Proposición 1.2:

Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ y z un parámetro conforme para I . Entonces

$$I = 2\lambda |dz|^2 \tag{1.51}$$

$$II = Q dz^2 + 2H\lambda |dz|^2 + \bar{Q} d\bar{z}^2 \tag{1.52}$$

y se verifican las siguientes ecuaciones

$$K = H^2 - \frac{|Q|^2}{\lambda^2} \quad (1.53)$$

$$S \frac{\partial}{\partial z} = H \frac{\partial}{\partial z} + \frac{Q}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (1.54)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_z}{\lambda} \quad (1.55)$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0 \quad (1.56)$$

$$\Gamma_{12}^1 = 0 \quad (1.57)$$

$$T_S \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = T_H \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{1}{\lambda} (\bar{Q}_z \frac{\partial}{\partial z} + Q_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \quad (1.58)$$

$$\langle T_S \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \frac{\partial}{\partial z} \rangle = \lambda H_z - Q_{\bar{z}} \quad (1.59)$$

$$K(I) = -\frac{1}{\lambda} (\ln \lambda)_{z\bar{z}} \quad (1.60)$$

Demostración. Al ser z un parámetro conforme para I tenemos que $p = 0$ y por lo tanto, de (1.23), la curvatura media del par (I, II) viene dada por $H = \rho/\lambda$. Así, $\rho = H\lambda$, de donde obtenemos (1.52) y (1.53) inmediatamente.

Sea S el operador asociado a II . Veamos cómo actúa S sobre campos; en particular, sólo necesitamos conocer como actúa sobre el campo $\frac{\partial}{\partial z}$. Si ponemos

$$S \frac{\partial}{\partial z} = a \frac{\partial}{\partial z} + b \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

entonces al ser

$$Q = \langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle = b\lambda$$

$$\lambda H = \langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle = a\lambda$$

obtenemos (1.54).

De (1.31)-(1.33), sin más que imponer que $p = 0$, obtenemos (1.55)-(1.57).

Una vez que tenemos los símbolos de Christoffel, es fácil ver que

$$\begin{aligned}
 T_S \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) &= \frac{1}{\lambda} \left((H\lambda)_z - Q_{\bar{z}} - H\lambda\Gamma_{11}^1 \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\
 &\quad - \frac{1}{\lambda} \left((H\lambda)_{\bar{z}} - \bar{Q}_z - H\lambda\Gamma_{22}^2 \right) \frac{\partial}{\partial z} \\
 &= H_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - H_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{\lambda} \left(\bar{Q}_z \frac{\partial}{\partial z} - Q_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\
 &= T_H \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{1}{\lambda} \left(\bar{Q}_z \frac{\partial}{\partial z} - Q_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right),
 \end{aligned}$$

es decir, (1.58) se verifica. Es inmediato verificar (1.59) tomando el producto escalar de $\frac{\partial}{\partial z}$ con (1.58).

Por último, la ecuación de la curvatura de Gauss es inmediata de (1.41) a partir de los símbolos de Christoffel y $p = 0$. \square

Como hemos comentado al principio, dicho parámetro conforme siempre es posible conseguirlo cuando tenemos una métrica riemanniana sobre una superficie. Así, si $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ donde II es una métrica riemanniana, también podemos considerar un parámetro conforme z para II . En este caso lo que tendríamos es $Q = 0$ en (1.18). Notar además que al ser II riemanniana tenemos $K(I, II) > 0$. Para este parámetro tenemos:

Proposición 1.3:

Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ donde II es riemanniana. Sea $S^I \in \mathcal{S}(\Sigma, II)$ el endomorfismo autoadjunto asociado a I respecto de II y $S^{II} \in \mathcal{S}(\Sigma, I)$ el endomorfismo autoadjunto asociado a II respecto de I (ver fórmula (1.2)).

Sea z un parámetro conforme para II , es decir,

$$I = p dz^2 + 2\lambda |dz|^2 + \bar{p} d\bar{z}^2 \quad (1.61)$$

$$II = 2\rho |dz|^2 \quad (1.62)$$

y denotemos por

$$D = |p|^2 - \lambda^2.$$

Entonces se verifican las siguientes ecuaciones

$$\lambda K = \rho H \quad (1.63)$$

$$S^I \frac{\partial}{\partial z} = \frac{H}{K} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (1.64)$$

$$S^{II} \frac{\partial}{\partial z} = K \left(\frac{H}{K} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (1.65)$$

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{D_z}{2D} \quad (1.66)$$

$$T_{S^{II}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{K_z}{2} S^I \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{K_{\bar{z}}}{2} S^I \frac{\partial}{\partial z} - \frac{(K\bar{p})_z}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{(Kp)_{\bar{z}}}{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (1.67)$$

$$\langle T_{S^{II}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \frac{\partial}{\partial z} \rangle = 2\rho \left(\frac{K_z}{4K} + \Gamma_{12}^2 \right) \quad (1.68)$$

Demostración. La primera ecuación (1.63) se obtiene directamente de las definiciones de H y K , (1.23) y (1.24) respectivamente, haciendo $Q = 0$. Ahora, para obtener (1.64), si escribimos $S^I \frac{\partial}{\partial z} = a \frac{\partial}{\partial z} + b \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ para ciertas funciones locales a, b , tenemos de (1.61) y (1.62) que

$$p = II \left(S^I \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = b\rho$$

$$\lambda = II \left(S^I \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = a\rho$$

y, sin más que usar (1.63), resulta la expresión buscada. Análogamente, si $S^{II} \frac{\partial}{\partial z} = a \frac{\partial}{\partial z} + b \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

$$0 = I \left(S^{II} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = ap + b\lambda$$

$$\rho = I \left(S^{II} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = a\lambda + b\bar{p}$$

de donde obtenemos, despejando a y b , (1.65).

La ecuación que envuelve a los símbolos de Christoffel es general, es decir, no depende de que el parámetro z sea conforme para II , como puede verse de manera directa sin más que sumar ambos símbolos de las ecuaciones (1.31) y (1.34).

A partir de $D = |p|^2 - \lambda^2$, podemos reescribir la curvatura extrínseca como

$$K = -\frac{\rho^2}{D},$$

de donde es un cálculo directo obtener

$$\rho \frac{K_z}{2K} = \rho_z + \rho \frac{D_z}{2D}.$$

(1.68) se sigue de (1.49) usando esta última ecuación y (1.66) haciendo

$$\begin{aligned} \langle T_{SII} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \frac{\partial}{\partial z} \rangle &= \rho_z + \rho (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) = \rho_z - \rho \frac{D_z}{2D} + 2\rho \Gamma_{12}^2 \\ &= \rho \frac{K_z}{2K} + 2\rho \Gamma_{12}^2 = 2\rho \left(\frac{K_z}{4K} + \Gamma_{12}^2 \right). \end{aligned}$$

Denotemos por $\alpha = \langle T_{SII} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \frac{\partial}{\partial z} \rangle$, o equivalentemente $\langle T_{SII} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle = -\bar{\alpha}$. Por último, para ver (1.67), como $T_{SII} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = a \frac{\partial}{\partial z} + b \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, tenemos que

$$\begin{aligned} a &= \frac{\bar{p}\alpha + \lambda\bar{\alpha}}{D} = \frac{2\rho}{D} \left(\bar{p} \frac{K_z}{4K} + \lambda \frac{K_{\bar{z}}}{4K} + \bar{p}\Gamma_{12}^2 + \lambda\Gamma_{12}^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2\rho} (\bar{p}K_z + \lambda K_{\bar{z}} + 2K\bar{p}_z) = -\frac{1}{\rho} (K\bar{p})_z - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\rho} K_{\bar{z}} - \frac{\bar{p}}{\rho} K_z \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} (K\bar{p})_z - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{K} K_{\bar{z}} - \frac{\bar{p}}{\rho} K_z \right) \end{aligned}$$

y

$$b = -\frac{p\bar{\alpha} + \lambda\alpha}{D} = -\bar{a} = \frac{1}{\rho} (Kp)_{\bar{z}} + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{K} K_z - \frac{p}{\rho} K_{\bar{z}} \right)$$

de donde obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} T_{SII} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) &= -\frac{1}{\rho} \left((K\bar{p})_z \frac{\partial}{\partial z} - (Kp)_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \\ &\quad - \frac{K_{\bar{z}}}{2} \left(\frac{H}{K} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{K_z}{2} \left(\frac{H}{K} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{p}}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \left((K\bar{p})_z \frac{\partial}{\partial z} - (Kp)_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{1}{2} \left(K_z S^I \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - K_{\bar{z}} S^I \frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

□

1.3.2. Parámetros doblemente ortogonales

Sea (I, II) un par fundamental sobre una superficie Σ y $p \in \Sigma'$, siendo Σ' el conjunto formado por el interior del conjunto de puntos umbilicales y el conjunto de puntos no umbilicales. Entonces, existen parámetros locales que serán de gran utilidad: los conocidos como **doblemente ortogonales**, es decir, parámetros en los que $F = 0 = f$,

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + Gdv^2 \\ II &= edu^2 + gdv^2. \end{aligned}$$

Como Σ' es un conjunto denso en toda la superficie, usaremos que ciertas propiedades se dan para parámetros doblemente ortogonales y deduciremos que esas propiedades se cumplen en toda la superficie por continuidad.

Es importante no olvidar que los parámetros anteriores (u, v) dan parametrizaciones por líneas de curvatura, es decir, $e = k_1E$ y $g = k_2G$, donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales del par (I, II) . Esto es, si S es el endomorfismo autoadjunto asociado a II y $\left\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\}$ son los campos básicos asociados a la parametrización (u, v) , entonces

$$S\frac{\partial}{\partial u} = k_1\frac{\partial}{\partial u}, \quad S\frac{\partial}{\partial v} = k_2\frac{\partial}{\partial v}.$$

Por lo tanto, como hicimos en la Subsección anterior, veremos como quedan las ecuaciones en esta parametrización.

Proposición 1.4:

Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$, $p \in \Sigma'$ y (u, v) parámetros locales doblemente ortogonales,

$$I = Edu^2 + Gdv^2 \tag{1.69}$$

$$II = k_1Edu^2 + k_2Gdv^2. \tag{1.70}$$

Entonces se verifican las siguientes ecuaciones

$$q = \left(\frac{k_1 - k_2}{2} \right)^2 \quad (1.71)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{E_u}{2E} \quad (1.72)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{E_v}{2G} \quad (1.73)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{E_v}{2E} \quad (1.74)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{G_u}{2G} \quad (1.75)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{G_u}{2E} \quad (1.76)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{G_v}{2G} \quad (1.77)$$

$$T_S \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = T_H \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) - \sqrt{q} \left((\ln(\sqrt{q}E))_u \frac{\partial}{\partial v} + (\ln(\sqrt{q}G))_v \frac{\partial}{\partial u} \right) \quad (1.78)$$

$$\langle T_S \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial u} \rangle = (k_1)_v + \sqrt{q} \frac{E_v}{E} \quad (1.79)$$

$$\langle T_S \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial v} \rangle = -(k_2)_u + \sqrt{q} \frac{G_u}{G} \quad (1.80)$$

$$K(I) = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{E_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right) \quad (1.81)$$

Demostración. De la expresión del par en coordenadas doblemente ortogonales, (1.69) y (1.70), obtenemos directamente (1.71). Además, los símbolos de Christoffel son fácilmente calculables de (1.11)-(1.16) usando (1.69).

Por otra parte,

$$\begin{aligned} T_S \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} S \frac{\partial}{\partial v} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} S \frac{\partial}{\partial u} \\ &= (k_2)_u \frac{\partial}{\partial v} - (k_1)_v \frac{\partial}{\partial u} - (k_1 - k_2) \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} \\ &= H_u \frac{\partial}{\partial v} - H_v \frac{\partial}{\partial u} - (\sqrt{q})_u \frac{\partial}{\partial v} - (\sqrt{q})_v \frac{\partial}{\partial u} - 2\sqrt{q} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} \\ &= T_H \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) - \sqrt{q} \left((\ln(\sqrt{q}E))_u \frac{\partial}{\partial v} + (\ln(\sqrt{q}G))_v \frac{\partial}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. (1.79) y (1.80) se obtienen fácilmente de ésta última. Finalmente, (1.81) es un cálculo directo. \square

1.3.3. Parámetros asintóticos

Como vimos en la Subsección 1.3.1, cuando $II \in \mathcal{R}(\Sigma)$ podíamos considerar un parámetro conforme para esta métrica riemanniana. Asimismo, cuando $II \in \mathcal{L}(\Sigma)$ y por lo tanto $K < 0$, podemos obtener unos parámetros locales reales (x, y) para los cuáles $e = 0 = g$, es decir

$$\begin{aligned} I &= E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 \\ II &= 2f dx dy, \end{aligned}$$

que son conocidos como **parámetros asintóticos**. De manera intuitiva, podemos pensar en dicha parametrización como lo hacemos en parámetros conformes (z, \bar{z}) para una métrica riemanniana. Es decir, *en cuanto a cálculos se refiere*, el parámetro x hace el papel de z y el parámetro y el papel de \bar{z} .

Nota 1.1:

En la Proposición siguiente consideraremos operadores autoadjuntos asociados a II , que será una métrica lorentziana. Esto no supone ningún problema aunque todo lo que hemos comentado anteriormente es para operadores asociados a métricas riemannianas, ya que lo que realmente necesitamos es que la métrica no degenera, sin importar el índice de la misma.

Proposición 1.5:

Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ donde II es lorentziana. Supongamos que existe $S^I \in \mathcal{S}(\Sigma, II)$ el endomorfismo autoadjunto asociado a I respecto de II , esto es,

$$I(X, Y) = II(S^I X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

y $S^{II} \in \mathcal{S}(\Sigma, I)$ el endomorfismo autoadjunto asociado a II respecto de I , esto es,

$$II(X, Y) = I(S^{II} X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Sean (x, y) parámetros asintóticos para (I, II) , es decir,

$$I = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 \tag{1.82}$$

$$II = 2f dx dy \tag{1.83}$$

y denotemos por

$$D = EG - F^2.$$

Entonces se verifican las siguientes ecuaciones

$$FK = fH \quad (1.84)$$

$$S^I \frac{\partial}{\partial x} = \frac{H}{K} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{E}{f} \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.85)$$

$$S^I \frac{\partial}{\partial y} = \frac{G}{f} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{H}{K} \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.86)$$

$$S^{II} \frac{\partial}{\partial x} = K \left(\frac{H}{K} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{E}{f} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.87)$$

$$S^{II} \frac{\partial}{\partial y} = K \left(-\frac{G}{f} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{H}{K} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1.88)$$

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{D_x}{2D} \quad (1.89)$$

$$\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 = \frac{D_y}{2D} \quad (1.90)$$

$$T_{S^{II}} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{K_x}{2} S^I \frac{\partial}{\partial y} - \frac{K_y}{2} S^I \frac{\partial}{\partial x} - \frac{(KG)_x}{f} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{(KE)_y}{f} \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.91)$$

$$\langle T_{S^{II}} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial x} \rangle = 2f \left(\frac{K_x}{4K} + \Gamma_{12}^2 \right) \quad (1.92)$$

$$\langle T_{S^{II}} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial y} \rangle = -2f \left(\frac{K_y}{4K} + \Gamma_{12}^1 \right) \quad (1.93)$$

Demostración. La demostración es análoga a la de la Proposición 1.4. \square

Una vez que tenemos unos parámetros asintóticos para el par (I, II) , decimos que son una **red local de Tchebychev** si $|E| = |G| = 1$. Así, podemos concretar la Proposición anterior para dicha parametrización y obtener

Proposición 1.6:

Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ donde II es lorentziana y (x, y) una red local de Tchebychev para (I, II) en un entorno $U \subset \Sigma$. Entonces existe una función diferenciable $\omega : U \rightarrow (0, \pi)$ tal que

$$I = dx^2 + 2 \cos \omega \, dx dy + dy^2 \quad (1.94)$$

$$II = 2\sqrt{|K|} \sin \omega \, dx dy \quad (1.95)$$

y se verifican las siguientes ecuaciones

$$\langle T_{S^{II}} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial x} \rangle = -\frac{K_x}{2\sqrt{|K|}} \operatorname{sen} \omega \quad (1.96)$$

$$\langle T_{S^{II}} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial y} \rangle = \frac{K_y}{2\sqrt{|K|}} \operatorname{sen} \omega \quad (1.97)$$

$$\omega_{xy} = -K(I) \operatorname{sen} \omega \quad (1.98)$$

Demostración. Como $|E| = |G| = 1$, podemos suponer que tanto E como G son ambas positivas, esto es $E = 1 = G$. Luego, como

$$0 < \det(I) = 1 - F^2 \leq 1,$$

entonces existe $\omega : U \rightarrow (0, \pi)$ tal que $\cos \omega = F \geq 0$. Ahora, de la expresión de la curvatura extrínseca tenemos

$$-f^2 = K \operatorname{sen}^2 \omega,$$

de donde obtenemos $f = \sqrt{|K|} \operatorname{sen} \omega > 0$, como queríamos demostrar.

Las ecuaciones (1.96) y (1.97) se obtienen directamente de la expresión de los símbolos de Christoffel sin más que observar que tanto E como G son constantes.

La última ecuación se obtiene de (1.40) teniendo en cuenta (1.94). \square

1.4. La Función de Codazzi

Cuando tratábamos con el Tensor Curvatura le asociamos una función que mide cuánto la métrica se aleja de ser llana. Por lo tanto, parece natural, como en el caso del Tensor Curvatura, asociar al Tensor de Codazzi una función que nos mida dicha desviación, es decir, el análogo de la Curvatura de Gauss.

Definición 1.4:

Sea $(\langle, \rangle, S) \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Definimos la **Función de Codazzi asociada a S** como

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_S &: \Sigma \longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \frac{\|T_S(X_p, Y_p)\|^2}{\|X_p \wedge Y_p\|^2} \end{aligned} \quad (1.99)$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ son campos linealmente independientes en un entorno U de p y

$$\|X \wedge Y\|^2 := \|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2.$$

La definición anterior no depende de la base elegida, es decir, está bien definida. En efecto, si $\{Z, W\} \in \mathfrak{X}(U)$ son linealmente independientes, entonces existen $a_i, b_i \in C^\infty(U)$, $i = 1, 2$, tales que

$$\begin{aligned} Z &= a_1 X + a_2 Y \\ W &= b_1 X + b_2 Y. \end{aligned}$$

Entonces, usando que $T_S \in \tau^2(\Sigma)$ y es antisimétrica

$$\begin{aligned} T_S(Z, W) &= T_S(a_1 X + a_2 Y, b_1 X + b_2 Y) = a_1 b_2 T_S(X, Y) + a_2 b_1 T_S(Y, X) \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) T_S(X, Y) \end{aligned}$$

y

$$\|Z \wedge W\|^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \|X \wedge Y\|^2,$$

de donde

$$\frac{\|T_S(X, Y)\|^2}{\|X \wedge Y\|^2} = \frac{\|T_S(Z, W)\|^2}{\|Z \wedge W\|^2} \text{ en } U.$$

Además, estas ecuaciones que acabamos de ver nos ayudarán a comprender mejor qué es el Tensor de Codazzi sobre funciones. Para ello necesitamos recordar algún concepto. Sea $U \subset \Sigma$ un entorno abierto de la superficie, denotemos por $\{e_1, e_2\} \in \mathfrak{X}(U)$ a una base local ortonormal de campos y por $\{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathfrak{X}(U)^*$ a su base dual. Dada una 1-forma $\omega \in \mathfrak{X}(U)^*$ podemos escribir

$$\omega = a\alpha_1 + b\alpha_2$$

para ciertas funciones diferenciables $a, b \in C^\infty(U)$. El operador **estrella de Hodge** se define como

$$*\omega = -b\alpha_1 + a\alpha_2.$$

Como sabemos, toda 1-forma tiene asociado un único campo Z (ver (1.3)). Entonces denotaremos por $*Z$ el campo asociado a $*\omega$. Es claro de (1.44) que dada una base $\{e_1, e_2\}$ ortonormal de $\mathfrak{X}(U)$

$$T_f(e_1, e_2) = *\nabla f.$$

Luego, si $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ son campos linealmente independientes con la misma orientación que $\{e_1, e_2\}$ y ponemos X e Y como combinación de e_1 y e_2 , entonces el determinante de la matriz de coeficientes es positivo y tenemos que

$$T_f(X, Y) = \|X \wedge Y\| *\nabla f.$$

Como hicimos con el Tensor de Codazzi, podemos ver la Función de Codazzi como una aplicación del conjunto de Pares Fundamentales en el espacio de las aplicaciones diferenciables (ver Proposición 1.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{P}(\Sigma) &\longrightarrow C^\infty(\Sigma) \\ (\langle, \rangle, S) &\longmapsto \mathcal{T}_S. \end{aligned} \tag{1.100}$$

Además, es inmediato observar que (\langle, \rangle, S) es Codazzi si, y sólo si, $\mathcal{T}_S = 0$.

Ahora veamos algunas propiedades de la Función de Codazzi, vista como aplicación de $\mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$ en $C^\infty(\Sigma)$, esto es, fijada una métrica sobre la superficie Σ .

Proposición 1.7:

Sea $(\Sigma, \langle, \rangle)$ una superficie riemanniana. Entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle) &\longrightarrow C^\infty(\Sigma) \\ S &\longmapsto \mathcal{T}_S \end{aligned} \tag{1.101}$$

verifica

1. $\mathcal{T}_{S_1+S_2}^{1/2} \leq \mathcal{T}_{S_1}^{1/2} + \mathcal{T}_{S_2}^{1/2}$, $S_1, S_2 \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$.
2. $\mathcal{T}_f = \|\nabla f\|^2$, $f \in C^\infty(\Sigma)$.

Demostración. La primera propiedad es clara de la desigualdad triangular. La segunda la obtenemos de (1.44), siendo \mathcal{T}_f la extensión natural de \mathcal{T} a funciones. \square

El siguiente resultado, debido a H. Alencar, M. do Carmo y R. Tribuzy (ver [11, Main Lemma]), permite controlar cómo son los ceros de una función compleja bajo condiciones muy débiles.

Lema 1.1:

Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida en un abierto U del plano complejo. Supongamos que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \leq h(z) |f(z)|, \quad (1.102)$$

donde h es una función real continua y no negativa. Supongamos además que $z_0 \in U$ es un cero de f .

Entonces, existe un entorno abierto $V \subset U$ de z_0 donde o bien $f \equiv 0$, o bien

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z), \quad z \in V,$$

para un cierto $k \geq 1$ y $f_k(z)$ una función continua con $f_k(z_0) \neq 0$.

Demostración. Podemos asumir que el cero de f es el origen 0 y U es un disco D de radio R y centro 0. Primero veamos que el Lema es cierto si asumimos las dos siguientes afirmaciones:

Afirmación 1: Bajo las hipótesis del Lema 1.1 y dado $k \geq 1$ si

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z^{k-1} = 0,$$

entonces, existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z^k.$$

Afirmación 2: Bajo las hipótesis del Lema 1.1, si

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z^{k-1} = 0$$

para todo $k \geq 1$, entonces $f \equiv 0$ en algún entorno de 0.

Por la Afirmación 2 obtenemos que si f no se anula idénticamente en un entorno de 0, existe un k tal que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z^{k-1} = 0$, pero $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z^k$ podría no existir.

Por la Afirmación 1, sabemos que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z^k$ existe, por lo tanto es no cero, digamos $c \neq 0$. Luego, podemos escribir

$$f(z) = cz^k + l(z), \quad \lim_{z \rightarrow 0} l(z)/z^k = 0,$$

o

$$f(z) = z^k f_k(z), \quad f_k(z) = c + l(z)/z^k,$$

tal que $f_k(0) = c \neq 0$, lo que prueba nuestro Lema.

Así pues, resta probar las dos afirmaciones.

Demostración Afirmación 1: De ahora en adelante, denotemos por $D_c(\zeta)$ un disco en el plano complejo \mathbb{C} con centro ζ y radio c . Sea $w \in D_R(0)$, $w \neq 0$, y en $W = D_R(0) \setminus \{D_a(0) \cup D_a(w)\}$, para cierto $a > 0$, definimos la 1-forma diferenciable

$$\phi = \frac{f(z)}{z^r(z-w)} dz.$$

Como $\frac{1}{z^r(z-w)}$ es holomorfa en W , obtenemos

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = -\frac{1}{z^r(z-w)} \frac{\partial f}{\partial\bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

Ahora, tomemos discos $D_a(0)$ y $D_a(w)$ en $D_R(0)$ y apliquemos el Teorema de Stokes,

$$\iint_W d\phi + \int_{\partial D_R(0)} \phi - \int_{\partial D_a(0)} \phi - \int_{\partial D_a(w)} \phi = 0. \quad (A)$$

Calculemos explícitamente las integrales que aparecen en (A). Sea $g(z) = f(z)/z^r$ y $z = w + ae^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Entonces

$$\int_{\partial D_a(w)} \phi = \int_{\partial D_a(w)} \frac{g(z)}{z-w} dz = \int_0^{2\pi} \frac{g(w + ae^{i\theta})}{ae^{i\theta}} iae^{i\theta} d\theta$$

y

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\partial D_a(w)} \phi = ig(w) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi if(w)w^{-r}.$$

Ahora, sea $z = ae^{i\theta}$ y, como por hipótesis, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)/z^{r-1} = 0$, obtenemos

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{\partial D_a(0)} \phi = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(ae^{i\theta})id\theta}{a^{r-1}e^{i(r-1)\theta}(ae^{i\theta} - w)} = 0.$$

Se sigue, tomando límite en (A) cuando a tiende a cero, que

$$-2\pi if(w)w^{-r} + \int_{\partial D_R(0)} \frac{f(z)dz}{z^r(z-w)} = \iint_{D_R(0)} \frac{1}{z^r(z-w)} \frac{\partial f}{\partial\bar{z}} dz \wedge d\bar{z}, \quad (B)$$

donde el límite doble existe, ya que el lado izquierdo está bien definido.

Como la función h en las hipótesis del Lema es continua, existe $A > 0$ tal que

$$\max \{h(z) : z \in D_R(0)\} \leq A.$$

Entonces se sigue de (B) que

$$2\pi|f(w)w^{-r}| \leq \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z-w|} + \iint_{D_R(0)} \frac{2A|f(z)|}{|z|^r|z-w|} du \wedge dv, \quad (C)$$

ya que $dz \wedge d\bar{z} = -2idu \wedge dv$, $z = u + iv$.

Tomemos ahora $z_0 \in D$, con $z_0 \neq 0$. Multiplicando la anterior desigualdad por $1/|w - z_0|$, $w = x + iy$, integrémosla relativa a $dx \wedge dy$. Entonces, denotando $D_\varepsilon = D_R(0) - D_\varepsilon(z_0)$, para $\varepsilon > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \iint_{D_\varepsilon} \frac{2\pi|f(w)w^{-r}|}{|w - z_0|} dx \wedge dy &\leq \iint_{D_\varepsilon} \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z-w||w-z_0|} dx \wedge dy \\ &+ \iint_{D_\varepsilon} \iint_{D_R(0)} \frac{2C|f(z)|du \wedge dv}{|z|^r|z-w||w-z_0|} dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (D)$$

Queremos estimar las integrales que aparecen en (D). Para esto, primero observemos que

$$\frac{1}{|z-w||w-z_0|} = \frac{1}{|z-z_0|} \left| \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w-z_0} \right|$$

y que

$$\iint_{D_R(0)} \frac{dx \wedge dy}{|z-w|} \leq \iint_{D_{2R}(z)} \frac{dx \wedge dy}{|z-w|} = \int_0^{2R} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\theta d\rho}{\rho} = 4\pi R,$$

donde (ρ, θ) son coordenadas polares en $D_{2R}(z)$.

Usando estas dos últimas ecuaciones en (D), obtenemos

$$2A \iint_{D_\varepsilon} \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r} \frac{du \wedge dv}{|z-w||w-z_0|} dx \wedge dy \leq 16A\pi R \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r|z-z_0|} du \wedge dv.$$

Luego, de (D), tenemos

$$(1 - 8AR) \iint_{D_R(0)} \frac{|f(z)|}{|z|^r|z-z_0|} du \wedge dv \leq 4R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r|z-z_0|}. \quad (E)$$

Como A no cambia de signo cuando R decrece, podemos elegir R suficientemente pequeño tal que $1 - 8AR > 0$.

Ahora, la integral en el lado derecho de (E) está acotada cuando $z_0 \rightarrow 0$; por lo tanto, lo mismo le ocurre al lado izquierdo. Como su integrando crece monótonamente cuando $z_0 \rightarrow 0$, tenemos que

$$\lim_{z_0 \rightarrow 0} \iint_{D_R(0)} \frac{f(z)}{|z|^r|z-z_0|} du \wedge dv$$

existe.

De (C) y esta última observación, se sigue que $f(w)w^{-r}$ está acotado cuando $w \rightarrow 0$. Luego, de (B) concluimos que el límite de la función $f(w)w^{-r}$ existe, como queríamos demostrar.

Demostración Afirmación 2: Supongamos que f no es idénticamente cero en un entorno de 0 y sea z_0 tal que $f(z_0) \neq 0$, $|z_0| < R$.

Multiplicando la desigualdad (C) por $dx \wedge dy$ e integrando, obtenemos

$$2\pi(1 - 8AR) \iint_{D_R(0)} |f(w)||w|^{-r} dx \wedge dy \leq 8\pi R \int_{\partial D_R(0)} \frac{|f(z)||dz|}{|z|^r} \quad (F)$$

para todo $r \geq 1$. Notemos que, haciendo

$$D^* = \{z \in D_R(0) : |z| \leq |z_0|, 2|f(z)| \geq |f(z_0)|\}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} (1 - 8AR) \iint_{D_R(0)} |f(z)||z|^{-r} du \wedge dv &\geq (1 - 8AR) \iint_{D^*} |f(z)||z|^{-r} du \wedge dv \\ &\geq \frac{1 - 8AR}{2} |f(z_0)||z_0|^{-r} \text{vol}(D^*) = a|z_0|^{-r} \end{aligned}$$

donde $a = \frac{1-8AR}{2}|f(z_0)|\text{vol}(D^*)$.

Por otra parte,

$$4R \int_{\partial D_R(0)} |f(z)||z|^{-r} |dz| \leq bR^{-r}$$

donde

$$b = 4R \max_{\partial D_R(0)} |f(z)| \int_{\partial D_R(0)} |dz|.$$

Se sigue de estas estimaciones y (F), que $a|z_0|^{-r} \leq bR^{-r}$ para todo r , donde a y b no dependen de r . Luego, como $|z_0| < R$,

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} a/b \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} (|z_0|/R)^r = 0.$$

Ya que $a = \frac{1-8AR}{2}|f(z_0)|\text{vol}(D^*)$, se sigue que $|f(z_0)| = 0$, lo que supone una contradicción con la definición de z_0 . Esto completa la demostración de la Afirmación 2.

Y por lo tanto, completamos la demostración del Lema 1.1. \square

Notemos que la condición sobre la derivada con respecto a \bar{z} de f es una condición más débil que holomorfía. Para las funciones holomorfas es bien conocido que sus ceros son aislados y de índice negativo o es idénticamente nula. Esto es básicamente lo que nos dice el Lema anterior.

Pero, ¿qué nos dice este resultado en nuestro contexto de pares fundamentales? Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$, pensemos que se trata de la Primera y Segunda Forma Fundamental de una superficie en \mathbb{R}^3 , y consideremos (x, y) una parametrización cualquiera y la forma cuadrática **líneas de curvatura**, $W(I, II) \equiv W$, dada por

$$W = \frac{Ef - Fe}{\sqrt{EG - F^2}} dx^2 + \frac{Eg - Ge}{\sqrt{EG - F^2}} dx dy + \frac{Fg - Gf}{\sqrt{EG - F^2}} dy^2. \quad (1.103)$$

Es casi inmediato observar que las curvas integrales de la ecuación $W = 0$ son las líneas de nivel para las coordenadas doblemente ortogonales. Además, los puntos umbilicales del par (I, II) son aquellos en los que $W \equiv 0$, esto es, las singularidades del campo de direcciones dado por $W \equiv 0$ son los puntos umbilicales.

Además, es fácil comprobar que

$$2 \operatorname{Im}(Q dz^2) = W$$

donde z es un parámetro conforme para I y Q es la parte $(2, 0)$ de II para la estructura conforme dada por I . Por lo tanto, controlar los ceros del campo de direcciones dado por $W \equiv 0$ se traduce en controlar los ceros de la función compleja Q .

Así, el primer resultado que veremos es cómo se relaciona la derivada de Q con respecto a la Función de Codazzi,

Lema 1.2:

Sea (I, II) un par fundamental sobre Σ con endomorfismo asociado S . Denotemos por $\tilde{S} = S - H \operatorname{Id}$, donde H es la curvatura media del par (I, II) . Entonces

$$T_{\tilde{S}} = 2 \frac{|Q_{\bar{z}}|^2}{\lambda^3} \quad (1.104)$$

o equivalentemente

$$|Q_{\bar{z}}|^2 = \frac{\lambda T_{\tilde{S}}}{2q} |Q|^2 \quad (1.105)$$

donde z es un parámetro conforme para I , esto es, $I = 2\lambda |dz|^2$.

Demostración. Sea z un parámetro conforme para I . Entonces de (1.58) tenemos que

$$T_{\tilde{S}} \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{\lambda} \left(\bar{Q}_z \frac{\partial}{\partial z} - Q_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right),$$

luego

$$\mathcal{T}_{\tilde{S}} = 2 \frac{|Q_{\bar{z}}|^2}{\lambda^3}$$

y, usando $|Q|^2 = \lambda^2 q$, nos queda

$$|Q_{\bar{z}}|^2 = \frac{\lambda}{2} \frac{\mathcal{T}_{\tilde{S}}}{q} |Q|^2.$$

□

Nota 1.2:

La diferenciabilidad requerida sobre la superficie para que tanto $\mathcal{T}_{\tilde{S}}$ como q sean continuas es muy poca. Pero como hemos comentado en el comienzo, supondremos que estamos pidiendo una diferenciabilidad C^∞ .

Por lo tanto, lo que nos están diciendo los Lemas 1.1 y 1.2 es que para controlar los ceros del campo de direcciones dado por $W(I, II)$ de un par fundamental es suficiente con controlar cómo se comporta la Función de Codazzi cerca de los puntos umbilicales.

Por otro lado, es conocido que las singularidades de un campo de direcciones se relaciona con la topología de la superficie mediante el Teorema de Euler-Poincaré. Éste nos dice que la suma de los índices de los ceros de cualquier campo de direcciones coincide con la característica de Euler de la superficie. Así, juntando la información que tenemos, podemos enunciar el siguiente

Teorema 1.1:

Sea (I, II) un par fundamental sobre Σ con curvatura media H y operador asociado S . Si para todo $p_0 \in \partial\mathcal{U}_{(I,II)}$, siendo $\mathcal{U}_{(I,II)}$ el conjunto de puntos umbilicales (ver página 5), se verifica

$$\limsup_{p \rightarrow p_0} \frac{\mathcal{T}_{\tilde{S}}}{q} < +\infty \quad (1.106)$$

donde el límite lo estamos tomando sobre puntos que se acercan a p_0 por el conjunto $\Sigma \setminus \mathcal{U}_{(I,II)}$, entonces se da una de las dos siguientes posibilidades:

- *existe un entorno $p_0 \in U \subset \Sigma$ donde $Q dz^2 \equiv 0$ en U , en cuyo caso $Q dz^2 \equiv 0$ en Σ .*
- *p_0 es un cero de $Q dz^2 = \langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle dz^2$ aislado y de índice negativo.*

En particular,

1. *si Σ es una esfera topológica el par (I, II) es totalmente umbilical,*

2. si Σ es un toro el par (I, II) es totalmente umbilical o libre de puntos umbilicales.

Demostración. La condición (1.106) aplicada al Lema 1.2 se traduce en que existe una función continua y no negativa $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|Q_z|^2 \leq h|Q|^2.$$

Por lo tanto, del Lema 1.1 se sigue la primera parte del resultado.

Observemos que si existe un entorno U donde $Q dz^2$ se anula idénticamente entonces tiene que hacerlo sobre toda la superficie, ya que de otra forma los puntos del borde de U contradirían el resultado anteriormente comentado de Alencar-do Carmo-Tribuzy [11, Main Lemma].

Por otra parte, si $Q dz^2$ no se anula en ningún entorno y $p_0 \in \Sigma$ es un punto umbilical, éste es aislado y de índice negativo, esto es, el campo de direcciones $\text{Im}(Q dz^2)$ sólo tiene ceros aislados y de índice negativo.

Ahora, el Teorema de Euler-Poincaré nos dice que la suma de los índices de los ceros de cualquier campo de direcciones coincide con la característica de Euler de la superficie, esto es

$$\sum i(p_0) = \chi(\Sigma)$$

donde $i(p_0)$ es el índice del cero del campo y la suma esta tomada sobre todos los ceros.

Con esta observación ya es fácil obtener las últimas afirmaciones. Si Σ es una esfera topológica, entonces $\chi(\Sigma) = 2$ y de la ecuación anterior tendríamos que $\text{Im}(Q dz^2)$ debería tener al menos un cero de índice positivo, lo cual es una contradicción. Si Σ es un toro, $\chi(\Sigma) = 0$, o bien se anula idénticamente sobre la superficie, o bien es libre de puntos umbilicales. En efecto, si $\text{Im}(Q dz^2)$ tuviera un cero, éste sería de índice negativo, contradiciendo la fórmula de Euler-Poincaré. Por lo tanto $\text{Im}(Q dz^2)$ no tiene ceros, esto es, el par (I, II) es libre de puntos umbilicales. \square

Cabría notar en este punto que aún no hemos impuesto ninguna condición al par fundamental con el que estamos trabajando. A primera vista parece que controlar la función de Codazzi no es tarea fácil, pero si trabajásemos con un par (I, II) que viene de una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, la Función de Codazzi tomaría la sencilla forma

$$T_{\mathcal{S}} = \|\nabla H\|^2,$$

ya que (I, II) es Codazzi, esto es $T_{\mathcal{S}} \equiv 0$.

Y éste será el objetivo de las próximas Secciones: imponer condiciones sobre el par fundamental para obtener información sobre la Función de Codazzi.

1.5. Pares de Codazzi

Como hemos visto al final de la Sección anterior, que el par (I, II) sea Codazzi hace que la Función de Codazzi se torne algo más sencilla de manejar. Por lo tanto, lo que haremos ahora será recordar algunos resultados concernientes a la Teoría de Pares de Codazzi, esto es, nos restringiremos al subconjunto $\mathcal{C}(\Sigma) \subset \mathcal{P}(\Sigma)$. Dicha teoría tuvo su apogeo en las décadas de los sesenta y los setenta, donde autores como T.K. Milnor (ver [75], [76], [77], [78], [79], [80], [81]), U. Simon (ver [100]), B. Wegner (ver [106]) o C. Wissler (ver [109]) entre otros (ver referencias en los artículos que hemos comentado), consiguieron demostrar una serie de resultados concernientes a la Teoría de Superficies desde el marco abstracto de los pares de Codazzi. Esto se debió a que advirtieron que dichos resultados sólo dependían de la Ecuación de Codazzi, que debe verificar toda superficie inmersa en un espacio modelo y no de la Ecuación de Gauss.

Pero primero, recordemos algunas cosas de pares fundamentales en general ([75] es una buena referencia para lo que vamos a recordar). Dado $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$, a dicho par fundamental le podemos asociar una doble sucesión infinita, X_n y X'_n , de formas fundamentales y formas fundamentales asimétricas respectivamente como sigue. Denotemos por $X_1 = I$ y $X_2 = II$, y sea

$$X_n = 2HX_{n-1} - KX_{n-2} \quad (1.107)$$

para todo $n \geq 3$. Siempre que $K \neq 0$, podemos usar la fórmula anterior para definir X_n para $n \leq 0$ también. Además, siempre que $q \neq 0$ (ver fórmula (1.10)), la ecuación

$$qX'_n = X_{n+1} - HX_n \quad (1.108)$$

define X'_n para $n \geq 1$ y para $n \leq 0$ siempre que $qK \neq 0$.

En los resultados donde aparezcan las nuevas formas que acabamos de definir, X_n y X'_n , cualquier condición necesaria para su definición estará implícitamente asumida. Además, el superíndice (\cdot) se usará siempre que podamos considerar tanto X_n como X'_n en los resultados que veremos a continuación.

Así, donde $X_j^{(\cdot)}$ sea definida, tenemos

$$H(X_j^{(\cdot)}, X_{j+1}^{(\cdot)}) = H \quad (1.109)$$

$$K(X_j^{(\cdot)}, X_{j+k}^{(\cdot)}) = K \quad (1.110)$$

$$H(X_j^{(\cdot)}, X_{j-1}^{(\cdot)}) = H/K \quad (1.111)$$

$$K(X_j^{(\cdot)}, X_{j-1}^{(\cdot)}) = 1/K. \quad (1.112)$$

Si denotamos por $I' = X'_1$ y $II' = X'_2$, obtenemos el par fundamental (I', II') que tiene la misma curvatura media y extrínseca que nuestro par original (I, II) . Luego,

$$X'_n = 2HX'_{n-1} - KX'_{n-2} \quad (1.113)$$

y

$$X'_n(I, II) = X_n(I', II'), \quad X'_n(I', II') = X_n(I, II). \quad (1.114)$$

Veamos qué ocurre con estas definiciones en un sistema de coordenadas doblemente ortogonal (ver (1.69) y (1.70)) para el par $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Se tiene que

$$X_n = k_1^{n-1}E du^2 + k_2^{n-1}G dv^2 \quad (1.115)$$

$$X'_n = k_1^{n-1}E du^2 - k_2^{n-1}G dv^2, \quad (1.116)$$

donde k_i^{n-1} es la $n-1$ potencia de k_i , $i = 1, 2$.

Por lo tanto, $X_n^{(\prime)}$ es definida o riemanniana (resp. indefinida o lorentziana) para todo n impar si $I^{(\prime)}$ es definida (resp. o indefinida). Además, si X_n es definida entonces X'_n es indefinida.

Podemos observar sin mucha dificultad que si tenemos un par (I, II) y consideramos el nuevo par (X_j, X_{j+1}) , lo que hace $X_n^{(\prime)}$ es moverse $j-1$ lugares, esto es,

$$X_n^{(\prime)}(X_j, X_{j+1}) = X_{n+1-j}^{(\prime)}$$

y de forma análoga

$$X_n^{(\prime)}(X_j, X_{j-1}) = X_{j+1-n}^{(\prime)}.$$

Motivación 1.3:

Veamos ahora una interpretación práctica de estas definiciones. Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ la Primera y Segunda Forma Fundamental de una superficie inmersa $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Entonces, la Tercera Forma Fundamental aparece como

$$III = X_3(I, II).$$

Además, podemos observar que $I = X_3(III, II)$. Podrían entenderse, pues, las definiciones anteriores como la generalización abstracta de la Tercera Forma Fundamental de una superficie.

Por otro lado, como hemos comentado, un par fundamental $(I, II) \equiv (\langle, \rangle, S) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ se dice Codazzi si

$$T_S \equiv 0$$

o equivalentemente, de (1.47) y (1.48), si en un entorno coordinado cualquiera (x, y) se verifican las dos siguientes ecuaciones

$$e_y - f_x = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 \quad (1.117)$$

$$f_y - g_x = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \quad (1.118)$$

Pero estas dos ecuaciones toman una forma más sencilla, como pudimos observar en la Proposición 1.4, cuando consideramos coordenadas doblemente ortogonales para el par (I, II) ,

$$(k_1)_v E = -\sqrt{q}E \quad (1.119)$$

$$(k_2)_u G = \sqrt{q}G. \quad (1.120)$$

Es claro, de (1.115) y (1.116), que si (u, v) son coordenadas doblemente ortogonales para el par (I, II) , lo serán para todo par fundamental (X_i, X_j) , de donde es sencillo comprobar las siguientes afirmaciones

Proposición 1.8:

Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ y supongamos que $K \neq 0$. Entonces

1. (X_i, X_j) es Codazzi si, y sólo si, (X'_i, X'_j) es Codazzi.
2. (X_i, X'_j) es Codazzi si, y sólo si, (X'_i, X_j) es Codazzi.
3. $(X_i^{(\prime)}, X_{i+j}^{(\prime)})$ es Codazzi si, y sólo si, $(X_{i+2j}^{(\prime)}, X_{i+j}^{(\prime)})$ es Codazzi.

Como hemos venido comentando a lo largo de estas páginas, Pares de Codazzi y diferenciales cuadráticas holomorfas sobre una superficie tienen una estrecha relación. La existencia de una diferencial cuadrática holomorfa sobre una superficie tiene una gran influencia sobre la superficie a nivel global, debido a la potencia de resultados del Análisis Complejo. El siguiente resultado, debido a T.K. Milnor [75, Main Lemma], pone de manifiesto dicha influencia

Lema 1.3:

Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Sea $z = s + it$ un parámetro conforme para I . Supongamos que $Q dz^2 \neq 0$ es holomorfa. Entonces, excepto en los puntos aislados donde $q = 0$, las siguientes afirmaciones se verifican

- qI, qI' y W son métricas llanas.
- Existen coordenadas (s, t) tales que

$$\begin{aligned} qI &= ds^2 + dt^2 \\ qII &= (H + q)ds^2 + (H - q)dt^2 \end{aligned}$$

- La función $\ln q$ es subarmónica si $K(I) \geq 0$ y superarmónica si $K(I) \leq 0$.

Demostración. Como hemos visto, los ceros de la diferencial cuadrática $Q dz^2$ son los puntos donde $q = 0$. Siempre que $q \neq 0$, podemos tomar un parámetro conforme z para I tal que $cQ dz^2 = dz^2$ para cualquier constante $c \neq 0$ fijada.

Luego, las métricas

- $|Q dz^2| = qI$
- $\operatorname{Re}(Q dz^2) = qI'$
- $\operatorname{Im}(Q dz^2) = W$

son llanas siempre que $q \neq 0$ y tenemos la primera afirmación.

Si tomamos $c = 2$, entonces podemos escribir (I, II) para el parámetro conforme $z = s + it$ como

$$\begin{aligned} I &= E(ds^2 + dt^2) \\ II &= e ds^2 + (e - 2) dt^2 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} EH &= e - 1 \\ E^2K &= e(e - 2), \end{aligned}$$

de donde obtenemos $qe = H + q$, $q(e - 2) = H - q$ y $Eq = 1$. Por lo tanto la segunda afirmación se verifica.

Ahora, de $Eq = 1$ y la ecuación de la curvatura de Gauss en parámetros isotermos, tenemos que

$$2K(I) = q\Delta \ln q,$$

que confirma la última afirmación. □

Así, ya estamos en condiciones de obtener algunos importantes resultados de la teoría de superficies desde este punto de vista abstracto, como por ejemplo el Teorema de Hopf [58],

Lema 1.4 (Versión abstracta del Teorema de Hopf):

Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Entonces cualesquiera dos de las siguientes condiciones implican la tercera:

- (I, II) es de Codazzi.
- H es constante.

- La parte $(2, 0)$ de II es holomorfa para la estructura conforme dada por I .

En particular, si se verifican cualesquiera dos de las condiciones anteriores y Σ es una esfera topológica, el par tiene que ser totalmente umbilical.

Demostración. Se obtiene directamente de la fórmula (1.57) y de las equivalencias

- (I, II) Codazzi si, y sólo si $T_S \equiv 0$.
- H constante si, y sólo si, $T_H \equiv 0$.
- Q holomorfa si, y sólo si, $Q_{\bar{z}} = 0$.

□

También tenemos la siguiente versión abstracta del Teorema de Liebmann,

Lema 1.5 (Versión abstracta del Teorema de Liebmann):

Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$, $II \in \mathcal{R}(\Sigma)$ y z un parámetro conforme para II . Entonces cualesquiera dos de las siguientes condiciones implican la tercera:

- (I, II) es de Codazzi.
- $K > 0$ es constante.
- La parte $(2, 0)$ de I es holomorfa para la estructura conforme dada por II .

En particular, si se verifican cualesquiera dos de las condiciones anteriores y Σ es una esfera topológica, el par tiene que ser totalmente umbilical.

Demostración. Se obtiene directamente de la fórmula (1.67) y las equivalencias

- (I, II) Codazzi si, y sólo si, $T_S \equiv 0$.
- K constante si, y sólo si, $K_z = 0 = K_{\bar{z}}$.
- p holomorfa si, y sólo si, $p_{\bar{z}} = 0$.

□

Por último, podemos probar la siguiente versión abstracta del Teorema de Hilbert, o más generalmente el Teorema de Wissler (ver [109] para una generalización de dicho resultado desde nuestro marco abstracto).

Lema 1.6 (Versión abstracta del Teorema de Hilbert):

Sea $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ y $II \in \mathcal{L}(\Sigma)$. Entonces cualesquiera dos de las siguientes condiciones implican la tercera:

- (I, II) es de Codazzi.
- $K < 0$ es constante.
- Existe una Red local de Tchebychev en cada punto.

Además, si se verifican cualesquiera dos de las condiciones anteriores y I es completa, entonces $\inf|K(I)| = 0$.

Demostración. Si existe la Red de Tchebychev, el resultado se obtiene directamente de las fórmulas (1.96) y (1.97). Si se verifican las dos primeras, de (1.91) tenemos que $E_y = 0 = G_x$. Entonces podemos hacer el cambio de parámetro $dx' = \sqrt{E(x)}dx$ y $dy' = \sqrt{G(y)}dy$ y obtener así la Red local de Tchebychev (x', y') .

Veamos la segunda parte. Si se verifican dos de las condiciones anteriores, entonces tenemos asegurada la existencia de un Red local de Tchebychev. Ahora, al ser I completa, dicha Red es global. Esto es, existe una inmersión sobreyectiva $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ desde el plano en nuestra superficie Σ tal que

$$\begin{aligned} I &= dx^2 + 2 \cos \omega \, dx \, dy + dy^2 \\ II &= 2\sqrt{|K|} \sin \omega \, dx \, dy, \end{aligned}$$

donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Supongamos que $\inf|K(I)| \neq 0$. Entonces si existe $a > 0$ tal que $K(I) \geq a > 0$, por el Teorema de Gauss-Bonnet y el Teorema de Bonnet, Σ sería una esfera topológica. Pero II es una métrica lorentziana, y es un hecho bien conocido que no existen métricas lorentzianas sobre una esfera topológica. Por tanto, podemos suponer que existe una constante $c < 0$ tal que $K(I) \leq c < 0$. Luego, de (1.98), tenemos que

$$\omega_{xy} = -K(I) \sin \omega \geq c \sin \omega > 0.$$

Como $\omega_{xy} > 0$, entonces ω_x es estrictamente creciente como función de y , por lo tanto

$$\omega_x(x, y) > \omega_x(x, 0), \text{ para } y > 0.$$

Como consecuencia, para $t > 0$ tenemos

$$\int_a^b \omega_x(x, y) \, dx > \int_a^b \omega_x(x, 0) \, dx,$$

de donde

$$\omega(b, y) - \omega(a, y) > \omega(b, 0) - \omega(a, 0), \text{ para } y > 0 \text{ y } a < b.$$

Como ω_x no puede ser idénticamente cero, podemos suponer que $\omega_x(0, 0) \neq 0$. Además, como la función $(x, y) \mapsto \omega(-x, -y)$ también verifica (1.98), podemos suponer que $\omega_x(0, 0) > 0$.

Ahora, fijemos tres números reales $0 < x_1 < x_2 < x_3$ tales que

$$\omega_x(x, 0) > 0, \text{ para } 0 \leq x \leq x_3.$$

Sea

$$\epsilon = \min \{ \omega(x_3, 0) - \omega(x_2, 0), \omega(x_1, 0) - \omega(0, 0) \}.$$

Luego, para todo $y > 0$ y para todo $x \in [0, x_3]$, tenemos

1. $\omega(x, y)$ es creciente en y .
2. $\omega(x_1, y) - \omega(0, y) > \epsilon$.
3. $\omega(x_3, y) - \omega(x_2, y) > \epsilon$.
4. $0 < \omega(x, y) < \pi$.

Así, poniendo toda esta información junta, llegamos a

$$\epsilon \leq \omega(x, y) \leq \pi - \epsilon, \text{ para } x \in [x_1, x_2] \text{ e } y \geq 0,$$

o equivalentemente

$$\text{sen} \omega(x, y) \geq \text{sen} \epsilon, \text{ para } x \in [x_1, x_2] \text{ e } y \geq 0.$$

Ahora, integrando (1.98) sobre el rectángulo $[x_1, x_2] \times [0, T]$ para $T > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} c \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \text{sen} \omega \, dx dy &\leq \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \omega_{xy} \, dx dy = \\ &= \omega(x_2, T) - \omega(x_1, T) - \omega(x_2, 0) + \omega(x_1, 0), \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \pi > \omega(x_2, T) - \omega(x_1, T) &= \omega(x_2, 0) - \omega(x_1, 0) + c \int_0^T \int_{x_1}^{x_2} \text{sen} \omega \, dx dy \\ &\geq \omega(x_2, 0) - \omega(x_1, 0) + cT(x_2 - x_1) \text{sen} \epsilon. \end{aligned}$$

Pero, para T suficientemente grande, $\omega(x_2, 0) - \omega(x_1, 0) + cT(x_2 - x_1) \text{sen} \epsilon > \pi$, lo que supone una contradicción. \square

Como ya hemos comentado, la Primera y Segunda Forma Fundamental de toda superficie inmersa en un espacio modelo son un par de Codazzi. Así, estos resultados generalizan los clásicos teoremas anteriormente mencionados. Estos ejemplos fueron la motivación de muchos autores para comenzar el estudio de los temas objeto de nuestro trabajo.

Otro hecho destacable de esta teoría es su relación con las aplicaciones armónicas (ver [22], [33], [80]). Veamos esto último. Dada (Σ, I) una superficie riemanniana y $\phi : (\Sigma, I) \rightarrow M^n$ una inmersión en una variedad riemanniana M^n , se define la **energía de ϕ** como

$$\mathcal{E}(\phi) = H(I, II),$$

donde II es la métrica inducida sobre Σ por ϕ .

Además, si $\phi : (\Sigma, I) \rightarrow M^n$ es una inmersión armónica en una variedad riemanniana M^n , entonces la parte $(2, 0)$ de II es holomorfa para la estructura dada por I , donde II , como antes, es la métrica inducida sobre Σ por ϕ . De hecho, si $n = 2$, ϕ es **armónica** si, y sólo si, dicha parte $(2, 0)$ es holomorfa.

Estas consideraciones y los Lemas 1.3 y 1.4 nos aseguran la relación entre ambas Teorías.

Por otra parte, hasta ahora cuando hemos visto propiedades tanto del Tensor de Codazzi como de la Función de Codazzi, han sido con respecto a su segunda variable cuando las considerábamos definidas sobre el espacio $\mathcal{P}(\Sigma)$ con imagen en $\tau^2(\Sigma)$ y $C^\infty(\Sigma)$ respectivamente (véanse las Proposiciones 1.1 y 1.7). Lo que haremos a continuación será controlar el tensor de Codazzi cuando modificamos la primera variable.

1.6. Cambios en la métrica

Al final de la Sección 4 vimos que si un par fundamental es de Codazzi, su Función de Codazzi se reduce al módulo del gradiente de la curvatura media del par. Luego, por el Teorema 1.1, podremos saber cómo son los ceros de Q siempre y cuando controlemos los ceros de $\|\nabla H\|^2$ en términos de los de q .

Lo que haremos ahora será, dado un par fundamental inicial, ver cómo podemos modificar la estructura, es decir, la métrica riemanniana con la que estamos trabajando, de una manera adecuada para poder seguir estudiando propiedades de nuestro par inicial.

Dadas $\varphi^1, \varphi^2 \in C^\infty(\Sigma)$, denotaremos por

$$\begin{aligned} \text{ch}(\varphi^1, \varphi^2) &= \frac{e^{\varphi^1} + e^{\varphi^2}}{2} \\ \text{sh}(\varphi^1, \varphi^2) &= \frac{e^{\varphi^1} - e^{\varphi^2}}{2} \end{aligned}$$

y en el caso que $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv \varphi$, simplemente denotaremos los usuales $\cosh(\varphi)$ y $\sinh(\varphi)$.

Dado $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$, notemos que por (1.108) podemos recuperar II a partir de I y I' , siempre que esta última esté definida. Así, dado un par fundamental definimos el **giro de (I, II) respecto de (φ^1, φ^2)** , y lo denotaremos por $(I(\varphi^1, \varphi^2), II(\varphi^1, \varphi^2))$, como el nuevo par fundamental dado por

$$\begin{aligned} I(\varphi^1, \varphi^2) &= \text{ch}(\varphi^1, \varphi^2)I + \text{sh}(\varphi^1, \varphi^2)I' \\ II(\varphi^1, \varphi^2) &= \sqrt{q}(\text{sh}(\varphi^1, \varphi^2)I + \text{ch}(\varphi^1, \varphi^2)I'). \end{aligned}$$

Veamos cómo se comportan los elementos geométricos del nuevo par con respecto al inicial. Cuando nos refiramos a los elementos geométricos del nuevo par, como puede ser la curvatura media H , los denotaremos haciendo referencia a dicho elemento y a las funciones con respecto a la que hacemos el giro, esto es, $H(\varphi^1, \varphi^2)$.

En la Subsección 1.5 vimos que I' estaba bien definida en $\Sigma' \subset \Sigma$, mientras que en el interior de los puntos umbilicales la tomamos como la forma cuadrática idénticamente cero. Pero cuando nos acercamos al borde de Σ' por el conjunto de puntos no umbilicales, $I' = \frac{1}{\sqrt{q}}(II - HI)$ crece mucho. Así, para que $\text{sh}(\varphi^1, \varphi^2)I'$ esté bien definida, $\text{sh}(\varphi^1, \varphi^2)$ tiene que dominar a los ceros de \sqrt{q} , condición que deberemos tener muy en cuenta.

Antes de pasar al resultado necesitamos introducir algo de notación. Para funciones $f \in C^\infty(\Sigma)$, definíamos el Tensor de Codazzi asociado a f como

$$T_f(X, Y) = X(f)Y - Y(f)X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Ahora, dadas $f^1, f^2 \in C^\infty(\Sigma)$, definimos el Tensor de Codazzi asociado al par (f^1, f^2) como

$$T_{(f^1, f^2)}(X, Y) = X(f^1)Y - Y(f^2)X, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma). \quad (1.121)$$

Desgraciadamente dicho tensor no es antisimétrico, o dicho de otra forma, depende fuertemente del orden de los campos X e Y . Además, es inmediato observar que $T_{(f^1, f^2)}$ es antisimétrico si, y sólo si, $f^1 = f^2$.

Ahora estamos en condiciones de establecer el siguiente resultado.

Teorema 1.2:

Sean $\varphi^1, \varphi^2 \in C^\infty(\Sigma)$ y $(I, II) \in \mathcal{P}^0(\Sigma)$, es decir, un par fundamental sin traza. Entonces el nuevo par fundamental dado por el giro de (I, II) respecto de (φ^1, φ^2) definido en Σ' como

$$I(\varphi^1, \varphi^2) = \text{ch}(\varphi^1, \varphi^2)I + \text{sh}(\varphi^1, \varphi^2)I' \quad (1.122)$$

$$II(\varphi^1, \varphi^2) = \sqrt{q}(\text{sh}(\varphi^1, \varphi^2)I + \text{ch}(\varphi^1, \varphi^2)I'), \quad (1.123)$$

verifica:

$$H(\varphi^1, \varphi^2) = 0 \quad (1.124)$$

$$K(\varphi^1, \varphi^2) = -q \quad (1.125)$$

$$q(\varphi^1, \varphi^2) = q. \quad (1.126)$$

Además, podemos relacionar el Tensor de Codazzi $T_{S(\varphi^1, \varphi^2)}$ del par $(I(\varphi^1, \varphi^2), II(\varphi^1, \varphi^2))$ con el Tensor de Codazzi T_S del par (I, II) como

$$T_{S(\varphi^1, \varphi^2)}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = -(T_S + \sqrt{q}T_{(\varphi^1, -\varphi^2)})\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}\right), \quad (1.127)$$

siendo $\left\{\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right\}$ los campos básicos asociados a parámetros doblemente ortogonales en un entorno de cualquier punto de Σ' .

En particular, si $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma)$, entonces

$$T_{S(\varphi^1, \varphi^2)}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = (T_H - \sqrt{q}T_{(\varphi^1, -\varphi^2)})\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}\right). \quad (1.128)$$

Demostración. Trabajaremos en un entorno U de puntos no umbilicales del par (I, II) y en dicho entorno consideraremos coordenadas doblemente ortogonales (u, v) . Entonces

$$\begin{aligned} I(\varphi^1, \varphi^2) &= \exp(\varphi^1)E du^2 + \exp(\varphi^2)G dv^2 \\ II(\varphi^1, \varphi^2) &= \sqrt{q} \exp(\varphi^1)E du^2 - \sqrt{q} \exp(\varphi^2)G dv^2, \end{aligned}$$

de donde obtenemos fácilmente (1.124)- (1.126).

Ahora, si denotamos por Γ_{ij}^k a los símbolos de Christoffel de I en la parametrización (u, v) y por $\Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{ij}^k$ a los de $I(\varphi^1, \varphi^2)$ en la misma parametrización, tenemos de (1.72)-(1.77) que

$$\Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{11}^1 = \Gamma_{11}^1 + \frac{\varphi_u^1}{2} \quad (1.129)$$

$$\Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{11}^2 = \exp(\varphi^1 - \varphi^2) \left(\Gamma_{11}^2 - \frac{E \varphi_v^1}{G} \right) \quad (1.130)$$

$$\Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{12}^1 = \Gamma_{12}^1 + \frac{\varphi_v^1}{2} \quad (1.131)$$

$$\Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{12}^2 = \Gamma_{12}^2 + \frac{\varphi_u^2}{2} \quad (1.132)$$

$$\Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{22}^1 = \exp(\varphi^2 - \varphi^1) \left(\Gamma_{22}^1 - \frac{G \varphi_u^2}{E} \right) \quad (1.133)$$

$$\Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{22}^2 = \Gamma_{22}^2 + \frac{\varphi_v^2}{2} \quad (1.134)$$

de donde,

$$\sqrt{q} \exp(\varphi^1) E \Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{12}^1 + \sqrt{q} \exp(\varphi^2) G \Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{11}^2 = \exp(\varphi^1) (\sqrt{q} E \Gamma_{12}^1 + \sqrt{q} G \Gamma_{11}^2) \quad (1.135)$$

$$\sqrt{q} \exp(\varphi^1) E \Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{22}^1 + \sqrt{q} \exp(\varphi^2) G \Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{12}^2 = \exp(\varphi^2) (\sqrt{q} E \Gamma_{22}^1 + \sqrt{q} G \Gamma_{12}^2) \quad (1.136)$$

Luego, de (1.79) aplicada al par $(I(\varphi^1, \varphi^2), II(\varphi^1, \varphi^2))$, tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= I(\varphi^1, \varphi^2) \left(T_{S(\varphi^1, \varphi^2)} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ &= -(\sqrt{q} \exp(\varphi^1) E)_v + \sqrt{q} \exp(\varphi^1) E \Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{12}^1 + \sqrt{q} \exp(\varphi^2) G \Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{11}^2 \\ &= -\sqrt{q} \varphi_v^1 \exp(\varphi^1) E + \exp(\varphi^1) (-\sqrt{q} E)_v + \sqrt{q} E \Gamma_{12}^1 + \sqrt{q} G \Gamma_{11}^2 \\ &= -\sqrt{q} \varphi_v^1 \exp(\varphi^1) E + \exp(\varphi^1) I \left(T_s \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

donde se han usado (1.79) aplicada al par (I, II) y (1.135). Análogamente de (1.80) aplicada al par $(I(\varphi^1, \varphi^2), II(\varphi^1, \varphi^2))$, tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= I(\varphi^1, \varphi^2) \left(T_{S(\varphi^1, \varphi^2)} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= (-\sqrt{q} \exp(\varphi^2) G)_u + \sqrt{q} \exp(\varphi^1) E \Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{22}^1 + \sqrt{q} \exp(\varphi^2) G \Gamma(\varphi^1, \varphi^2)_{12}^2 \\ &= -\sqrt{q} \varphi_u^2 \exp(\varphi^2) G + \exp(\varphi^2) I \left(T_s \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right), \frac{\partial}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

donde se han usado (1.80) aplicada al par (I, II) y (1.136). Así, el Tensor de Codazzi viene dado por

$$\begin{aligned} T_{S(\varphi^1, \varphi^2)} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) &= \frac{\alpha_1}{I(\varphi^1, \varphi^2)} \frac{\partial}{\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right)} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\alpha_2}{I(\varphi^1, \varphi^2)} \frac{\partial}{\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right)} \frac{\partial}{\partial v} \\ &= -\sqrt{q} \left(\varphi_v^1 \frac{\partial}{\partial u} + \varphi_u^2 \frac{\partial}{\partial v} \right) + T_S \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ &= - \left(T_S \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right) + \sqrt{q} T_{(\varphi^1, -\varphi^2)} \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right) \right) \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

La última afirmación es inmediata sin más que recordar la observación que hemos hecho al final de la Subsección 1.4, es decir, que si el par (I, II) es de Codazzi, pasamos a su par sin traza (recordemos (1.46)) $(I, II_H) \equiv (\langle, \rangle, S_H)$, siendo $S_H = S - H \text{Id}$. Entonces aplicando el resultado a (\langle, \rangle, S_H) y teniendo en cuenta que $T_{S_H} = T_S - T_H = -T_H$, obtenemos lo afirmado. \square

En resumen, este resultado nos dice que podemos controlar el Tensor de Codazzi del nuevo par a partir del Tensor de Codazzi del par inicial. Sin embargo, seguimos teniendo dos problemas: la extensión al borde del conjunto de puntos umbilicales y la fuerte dependencia de la parametrización. Aunque bien es cierto que todavía tenemos gran libertad de elección.

Así, el primer problema lo podemos resolver imponiendo que $\text{sh}(\varphi^1, \varphi^2)/\sqrt{q}$ esté bien definida sobre la superficie. El segundo lo podemos resolver tomando $\varphi^1 = -\varphi^2$, es decir, haciendo el giro respecto del par $(\varphi, -\varphi)$ con $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ el problema de la parametrización desaparece.

Estas dos hipótesis son las que vamos a imponer en el siguiente resultado, esto es, tomaremos $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ tal que $\text{senh } \varphi/\sqrt{q}$ esté bien definida sobre Σ y haremos el giro del par (I, II) con respecto a $(\varphi, -\varphi)$. En este caso, denotaremos todos los objetos geométricos que involucren al par girado sólo con la función φ , por ejemplo, $I(\varphi, -\varphi) = I(\varphi)$.

Corolario 1.1:

Sean $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ y $(I, II) \in \mathcal{P}^0(\Sigma)$ tales que la función $\text{senh } \varphi/\sqrt{q}$ está bien definida sobre Σ . Entonces el nuevo par fundamental dado por el giro de (I, II) respecto de $(\varphi, -\varphi)$ definido en Σ por

$$I(\varphi) = \cosh(\varphi)I + \text{senh}(\varphi)I' \tag{1.137}$$

$$II(\varphi) = \sqrt{q} (\text{senh}(\varphi)I + \cosh(\varphi)I'), \tag{1.138}$$

verifica:

$$H(\varphi) = 0 \quad (1.139)$$

$$K(\varphi) = -q \quad (1.140)$$

$$q(\varphi) = q, \quad (1.141)$$

y el Tensor de Codazzi $T_{S(\varphi)}$ del par $(I(\varphi), II(\varphi))$ lo podemos relacionar con el Tensor de Codazzi T_S del par (I, II) como

$$T_{S(\varphi)} = T_S + \sqrt{q} T_\varphi. \quad (1.142)$$

En particular, si $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma)$, entonces

$$T_{S(\varphi)} = -T_H + \sqrt{q} T_\varphi. \quad (1.143)$$

Demostración. Obsérvese que la condición $\sinh \varphi / \sqrt{q}$ nos permite extender la estructura dada por $I(\varphi)$ a toda la superficie Σ .

El resto se sigue del Teorema 1.2 sin más que notar que

$$T_{(\varphi, -(-\varphi))} = T_\varphi.$$

□

Este resultado nos dice que podemos calcular el Tensor de Codazzi del par girado a partir del par inicial. Además, todavía tenemos gran libertad de elección para la función $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$. Así, como una de las hipótesis que necesitamos es que los ceros de $\sinh \varphi$ dominen a los ceros de \sqrt{q} , parece lógico tomar φ dependiendo de \sqrt{q} , es decir, tomar $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ con $\varphi(0) = 0$ y hacer $\varphi(\sqrt{q}) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. De esta forma la condición sobre los ceros se transforma en que $\sinh \varphi(t)/t$ esté bien definida cuando $t^+ \rightarrow 0$. Como

$$\exists \lim_{t^+ \rightarrow 0} \frac{\sinh \varphi(t)}{t} < +\infty \iff \exists \lim_{t^+ \rightarrow 0} \varphi'(t) < +\infty,$$

tenemos que $\sinh \varphi(t)/t$ está bien definida cuando $t^+ \rightarrow 0$ si, y sólo si, $\varphi(t)/t$ está bien definida cuando $t^+ \rightarrow 0$. Luego, tomando $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con $\varphi(0) = 0$ salvamos este problema.

Por otro lado, considerando φ como función de \sqrt{q} y recordando qué significa el Tensor de Codazzi para funciones, tenemos que

$$\begin{aligned} \sqrt{q} T_{\varphi(\sqrt{q})}(X, Y) &= \sqrt{q} \|X \wedge Y\| * \nabla \varphi(\sqrt{q}) \\ &= \frac{\varphi'(\sqrt{q})}{2} \|X \wedge Y\| * \nabla q \end{aligned}$$

de donde, si definimos $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(t) = \int_0^t \frac{\varphi'(\sqrt{s})}{2} ds + cte$$

podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\sqrt{q} T_{\varphi(\sqrt{q})}(X, Y) = \|X \wedge Y\| * \nabla f(q) = T_{f(q)}(X, Y).$$

Por lo tanto, juntando esta información podemos reescribir la ecuación (1.142) como

$$T_{S(\varphi(\sqrt{q}))} = T_{S+f(q)} \text{Id}, \quad (1.144)$$

es decir

Corolario 1.2:

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma)$, $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con $\varphi(0) = 0$ y definamos $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$2f'(t) = \varphi'(\sqrt{t}). \quad (1.145)$$

Consideremos el par fundamental $(I(\varphi), II(\varphi))$ dado por el giro de (I, II) respecto de $(\varphi(\sqrt{q}), -\varphi(\sqrt{q}))$ definido en Σ como

$$I(\varphi) = \cosh(\varphi)I + \sinh(\varphi)I' \quad (1.146)$$

$$II(\varphi) = \sqrt{q} (\sinh(\varphi)I + \cosh(\varphi)I'), \quad (1.147)$$

siendo $q = H^2 - K$ del par (I, II) .

Sea z un parámetro conforme para $I(\varphi)$, $I(\varphi) = 2\lambda|dz|^2$, y denotemos por $Q(\varphi) = II(\varphi)(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Entonces se verifica la siguiente ecuación

$$Q(\varphi)_{\bar{z}} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \lambda \quad (1.148)$$

donde ω es la 1-forma definida por

$$\omega = d(H - f(q)). \quad (1.149)$$

Demostración. Primero, por las condiciones impuestas a φ tenemos que $I(\varphi)$ está bien definida sobre Σ (ver los comentarios de las líneas precedentes).

Ahora, al ser (I, II) un par de Codazzi, de (1.144) y (1.145) se sigue que

$$T_{S(\varphi(\sqrt{q}))} = -T_{H-f(q)} \text{Id}.$$

Por lo tanto, aplicando (1.59) al par $(I(\varphi), II(\varphi))$ para un parámetro conforme para $I(\varphi)$ y recordando que $H(\varphi) = 0$, obtenemos

$$-Q(\varphi)_{\bar{z}} = -\lambda(H_z - f(q)_z).$$

Por último, definiendo ω por (1.149), obtenemos (1.148). \square

Como consecuencia inmediata tenemos

Corolario 1.3:

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma)$, $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con $\varphi(0) = 0$ tal que

$$dH - \sqrt{q}d\varphi(\sqrt{q}) = 0. \quad (1.150)$$

Consideremos el par fundamental $(I(\varphi), II(\varphi))$ dado por el giro de (I, II) respecto de $(\varphi(\sqrt{q}), -\varphi(\sqrt{q}))$ definido en Σ como

$$I(\varphi) = \cosh(\varphi(\sqrt{q}))I + \sinh(\varphi(\sqrt{q}))I' \quad (1.151)$$

$$II(\varphi) = \sqrt{q}(\sinh(\varphi(\sqrt{q}))I + \cosh(\varphi(\sqrt{q}))I'), \quad (1.152)$$

siendo $q = H^2 - K$ del par (I, II) .

Entonces, para cualquier función positiva μ , el nuevo par $(\mu I(\varphi), II(\varphi)) \in \mathcal{C}(\Sigma)$.

Además, $H(\mu I(\varphi), II(\varphi)) = 0$ y $K(\mu I(\varphi), II(\varphi)) = -q/\mu^2$.

Demostración. Sólo hace falta comentar la introducción de la función positiva μ . Del Corolario 1.2 tenemos que $(I(\varphi), II(\varphi)) \in \mathcal{C}(\Sigma)$ con $H(\varphi) = 0$. Por lo tanto, el Lema 1.4 nos dice que ambas condiciones son equivalentes a que $Q(\varphi)$ sea holomorfa para la estructura dada por $I(\varphi)$.

Ahora, si hacemos un cambio conforme en la estructura, esto es $\mu I(\varphi)$, y consideremos el nuevo par $(\mu I(\varphi), II(\varphi))$, la parte $(2, 0)$ de $II(\varphi)$ no cambia y además es holomorfa para $\mu I(\varphi)$ ya que dicha propiedad no se altera por cambios conformes. Además, la curvatura media del nuevo par sigue siendo constantemente cero. Así, de nuevo por el Lema 1.4, $(\mu I(\varphi), II(\varphi)) \in \mathcal{C}(\Sigma)$. \square

Nótese que este resultado nos da la existencia de una diferencial cuadrática holomorfa sobre la superficie Σ .

1.7. Pares Especiales

Supongamos ahora que el par de Codazzi (I, II) cumple una relación de Weingarten entre su curvatura media y curvatura de Gauss. Parametrizamos $H = H(t)$, $K = K(t)$, para t variando en un cierto intervalo. Entonces, si buscamos una solución del tipo $\varphi = \varphi(t)$ para la ecuación (1.150), ésta queda

$$\sqrt{H(t)^2 - K(t)} \varphi'(t) = H'(t).$$

Por tanto, si existe una primitiva $\varphi(t)$ de la función

$$\frac{H'(t)}{\sqrt{H(t)^2 - K(t)}}$$

con $\sinh \varphi(t) / \sqrt{H(t)^2 - K(t)}$ bien definida incluso en los puntos umbilicales, entonces existirá el par de Codazzi $(I(\varphi), II(\varphi))$ dado por el Corolario 1.3.

La métrica $I(\varphi)$, cuando tomamos $t = \sqrt{q}$, para superficies especiales de Weingarten en \mathbb{R}^3 y \mathbb{H}^3 con puntos umbilicales fue definida por R.L. Bryant para el valor de $\mu = 1$ en el Corolario 1.3. Además, él encontró una 2-forma holomorfa para $I(\varphi)$ que corresponde a la parte $(2, 0)$ de $II(\varphi)$.

De esta manera, R.L. Bryant (ver [18]) dio una demostración sencilla de que una esfera topológica en \mathbb{R}^3 y \mathbb{H}^3 cumpliendo una relación especial de Weingarten debía ser una esfera totalmente umbilical. En particular, este resultado incluía el teorema de Liebmann para curvatura de Gauss positiva constante y el teorema de Hopf para curvatura media constante.

La formulación abstracta aquí dada indica que este resultado es cierto para superficies especiales de Weingarten muy generales. Por ejemplo, las superficies con curvatura de Gauss constante -1 en \mathbb{R}^3 caen dentro de esta formulación, y no dentro de la de R. Bryant. Veamos esto. Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ con $K(I) = -1$, y parametricemos

$$\begin{aligned} H(t) &= t \\ K(I) &= -1. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que resolver la ecuación

$$\sqrt{t^2 + 1} \varphi'(t) = 1,$$

cuya solución es

$$\varphi(t) = \operatorname{arcsenh}(t).$$

Por tanto

$$\varphi(H) = \operatorname{arcsenh}(H),$$

pudiendo aplicar ahora el Corolario 1.3.

No obstante, nos restringiremos aquí al estudio de superficies especiales de Weingarten, las cuáles pasamos a definir.

Definición 1.5:

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma)$. Decimos que el par es **Especial de Weingarten** si

$$H = f(q)$$

siendo $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

Además, asociada a f definimos $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds. \quad (1.153)$$

Denotaremos a dicho par por $(I, II, f) \in \mathcal{C}(\Sigma)$ o $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$, para hacer referencia a la función respecto a la cuál verifica la relación de Weingarten, es decir, $\mathcal{C}(\Sigma, f)$ denota el conjunto de pares de Codazzi sobre Σ que verifica la relación de Weingarten $H = f(q)$.

Nota 1.3:

Cuando estemos hablando de pares especiales de Weingarten, usaremos f o φ indistintamente. Por ejemplo, si $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma)$, el Corolario 1.3 asocia un nuevo par a la función

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds,$$

(notemos que la condición sobre f dada en la Definición 1.5 nos asegura que φ verifica la condición del Corolario 1.3), pero seguiremos denotando a este nuevo par por $(I(\varphi), II(\varphi))$, en vez de denotarlo haciendo referencia a la función f .

Luego, el Corolario 1.3 lo podemos particularizar a

Lema 1.7:

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$ no totalmente umbilical. Sea $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (1.153). Entonces el par dado por (1.151) y (1.152) verifica $(I(\varphi), II(\varphi)) \in \mathcal{C}^0(\Sigma)$ con $q(\varphi) = q$.

Además, en Σ' existe un parámetro conforme local $z = s + it$ tal que

$$q I(\varphi) = |dz|^2 \quad (1.154)$$

$$II(\varphi) = dz^2 + d\bar{z}^2 \quad (1.155)$$

y la curvatura de Gauss de I se puede expresar como

$$K(I) = L_f(\ln(q)) \quad (1.156)$$

siendo L_f el operador lineal de segundo orden dado por

$$L_f(\chi) = \text{Tr}(\mathcal{M}\nabla_0^2\chi) - ds^2(T, \nabla_0\chi) \quad (1.157)$$

donde ∇_0^2 y ∇_0 son el hessiano y el gradiente respecto de la métrica $ds^2 = qI(\varphi) = ds^2 + dt^2$, y \mathcal{M} y T están definidos por

$$\mathcal{M} = \frac{\sqrt{q}}{4} \begin{pmatrix} (1 - \sqrt{q}\varphi'(\sqrt{q}))e^{\varphi(\sqrt{q})} & 0 \\ 0 & (1 + \sqrt{q}\varphi'(\sqrt{q}))e^{-\varphi(\sqrt{q})} \end{pmatrix} \quad (1.158)$$

$$T = \frac{\sqrt{q}}{4}(\varphi'(\sqrt{q})^2 + \varphi''(\sqrt{q}))e^{\varphi(\sqrt{q})}q_s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\sqrt{q}}{4}(\varphi'(\sqrt{q})^2 - \varphi''(\sqrt{q}))e^{-\varphi(\sqrt{q})}q_t \frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.159)$$

Demostración. La primera parte se sigue inmediatamente del Corolario 1.3 y la Definición 1.5.

A partir de ahora trabajaremos en Σ' , es decir, el conjunto de puntos no umbilicales. Cabe recordar que la parte $(2, 0)$ de $II(\varphi)$ es holomorfa para $I(\varphi)$, por lo que sus ceros son aislados y coinciden con los ceros de q , los puntos umbilicales de la superficie. De otro modo, la parte $(2, 0)$ de $II(\varphi)$ se anula idénticamente sobre la superficie y el par (I, II) sería totalmente umbilical.

Así, en Σ' la parte $(2, 0)$ de $II(\varphi)$ es holomorfa para $I(\varphi)$. Por lo tanto el Lema 1.3 nos asegura la existencia de un parámetro local $z = s + it$ para el cuál podemos escribir $(I(\varphi), II(\varphi))$ como (1.154) y (1.155).

Por otra parte, de (1.150) y (1.151), podemos calcular I como

$$I = \cosh \varphi(\sqrt{q}) I(\varphi) - \frac{\sinh \varphi(\sqrt{q})}{\sqrt{q}} II(\varphi),$$

de donde, usando (1.154) y (1.155), obtenemos que

$$I = \frac{1}{\sqrt{q}} \left(e^{-\varphi(\sqrt{q})} ds^2 + e^{\varphi(\sqrt{q})} dt^2 \right) = E ds^2 + G dt^2,$$

es decir, la parametrización isoterma dada por el Lema 1.3 pasa a una parametrización doblemente ortogonal del par (I, II) .

Luego, la curvatura de Gauss de I viene dada por

$$\begin{aligned} 4(EG)^2 K(I) &= G_s(EG)_s + E_t(EG)_t - 2EG(G_{ss} + E_{tt}) \\ &= -((EG)G_{ss} - G_s(EG)_s) - ((EG)E_{tt} - (EG)_t E_t) - EG(G_{ss} + E_{tt}) \\ &= -(EG)^2 \left(\frac{G_s}{EG} \right)_s - (EG)^2 \left(\frac{E_t}{EG} \right)_t - EG(G_{ss} + E_{ss}) \end{aligned}$$

esto es,

$$K(I) = \alpha e^{\varphi(\sqrt{q})} + \beta e^{-\varphi(\sqrt{q})},$$

donde

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{q}} - \varphi'(\sqrt{q}) \right) q_{ss} - \frac{1}{8q^{3/2}} \left(2 - 2\sqrt{q}\varphi'(\sqrt{q}) + q\varphi'(\sqrt{q})^2 + q\varphi''(\sqrt{q}) \right) q_s^2 \\ &= \frac{\sqrt{q}}{4} \left((1 - \sqrt{q}\varphi'(\sqrt{q}))(\ln q)_{ss} - (\varphi'(\sqrt{q})^2 + \varphi''(\sqrt{q}))q_s(\ln q)_s \right) \\ \beta &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{q}} + \varphi'(\sqrt{q}) \right) q_{tt} - \frac{1}{8q^{3/2}} \left(2 + 2\sqrt{q}\varphi'(\sqrt{q}) + q\varphi'(\sqrt{q})^2 - q\varphi''(\sqrt{q}) \right) q_t^2 \\ &= \frac{\sqrt{q}}{4} \left((1 + \sqrt{q}\varphi'(\sqrt{q}))(\ln q)_{tt} - (\varphi'(\sqrt{q})^2 - \varphi''(\sqrt{q}))q_t(\ln q)_t \right).\end{aligned}$$

Por último, usando las definiciones (1.158) y (1.159), es fácil comprobar que (1.156) se verifica. \square

Así, para pares especiales de Weingarten, $I(\varphi)$ siempre está bien definida ya que lo está la función $\sinh \varphi(t)/t$.

Un hecho notable de la formulación anterior es que se puede recuperar todo par especial de Weingarten.

Lema 1.8:

Sea Σ una superficie y f una función diferenciable definida sobre un intervalo $\mathcal{L} \subset [0, \infty)$. Tomemos una primitiva $\varphi(t)$ de $2f'(t^2)$ sobre dicho intervalo tal que $\varphi(t)/t$ esté bien definida.

Entonces todo par de Codazzi especial de Weingarten (I, II) sobre Σ cumpliendo $H = f(H^2 - K)$ viene dado por

$$\begin{aligned}I &= \cosh \varphi(t) I(\varphi) - \frac{\sinh \varphi(t)}{t} II(\varphi) \\ II - f(t^2) I &= -t \sinh \varphi(t) I(\varphi) + \cosh \varphi(t) II(\varphi),\end{aligned}\tag{1.160}$$

donde $I(\varphi)$ es una métrica Riemanniana sobre Σ y $II(\varphi) = Q dz^2 + \bar{Q} d\bar{z}^2$, siendo $Q dz^2$ una 2-forma holomorfa para $I(\varphi) = 2\lambda|dz|^2$ cumpliendo que la función $t : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ definida como $t = \sqrt{q(I(\varphi), II(\varphi))}$ tiene imagen en \mathcal{L} .

En particular obtendremos que $t^2 = H^2 - K$.

Demostración. Sólo hay que observar que dado un par de Codazzi especial de Weingarten (I, II) , si tomamos $H^2 - K = t^2$ y, por tanto, $H = f(t^2)$, hemos demostrado anteriormente que existe $\varphi = \varphi(t)$ en las condiciones del Corolario 1.3. Así, existe una métrica $I(\varphi)$ y una forma cuadrática $II(\varphi)$ que puede escribirse como $II(\varphi) = Q(\varphi) dz^2 + \bar{Q}(\varphi) d\bar{z}^2$, donde $Q(\varphi) dz^2$ es una 2-forma holomorfa para $I(\varphi)$.

Además, de (1.150) y (1.151) se puede calcular (I, II) a partir de $I(\varphi)$ y $II(\varphi)$ como (1.160).

Finalmente, es un cálculo directo demostrar que cualquier par $(I(\varphi), II(\varphi))$ de la forma anterior da un par de Codazzi especial de Weingarten usando (1.160). \square

Nota 1.4:

Este último Lema nos dice cómo construir los pares de Codazzi especiales usando pares de Codazzi sin traza.

1.7.1. Pares Especiales de Tipo Elíptico

Como hemos visto en el Lema 1.7, un par especial de Weingarten $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$ tiene asociado un operador lineal de segundo orden L_f (ver (1.157)). Por lo tanto distinguiremos un tipo concreto de pares especiales dependiendo del carácter de su operador lineal asociado, esto es

Definición 1.6:

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$. Diremos que el par es de **Tipo Elíptico** si L_f es un operador elíptico, o equivalentemente, si

$$1 - 4tf'(t)^2 > 0. \tag{1.161}$$

Habría que ver que la equivalencia que hemos afirmado en la Definición 1.6 de hecho se verifica. L_f es un operador elíptico si la matriz de coeficientes que acompaña a los términos de segundo orden es definida positiva, esto es, si \mathcal{M} dada por (1.158) es una matriz definida positiva. Con esta nota, ya es inmediato observar que la equivalencia es cierta.

Una de las propiedades globales más importantes de una superficie es la completitud. Por ejemplo, el famoso resultado de Hopf-Rinow nos ofrece una buena perspectiva de ello. Veremos, en el siguiente resultado, cómo *conservar* la completitud de la métrica para un par especial de tipo elíptico.

Lema 1.9:

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$ de tipo elíptico con I completa. Si $q \geq c_0^2 > 0$ para una cierta constante, la métrica llana $ds^2 = \sqrt{q}I(\varphi)$ es completa sobre Σ .

Demostración. Dado z un parámetro conforme para $I(\varphi)$ en Σ , entonces de (1.160) se tiene que

$$\frac{1}{2}I \leq \cosh \varphi(t)I(\varphi),$$

donde $t = \sqrt{q}$.

Al ser el par de tipo elíptico tenemos que

$$1 - q\varphi'(\sqrt{q})^2 > 0,$$

esto es

$$\varphi'(t)^2 < \frac{1}{t^2}.$$

Así, integrando la ecuación anterior (notemos que la integración mantiene las desigualdades), llegamos a

$$|\varphi(t)| < |\ln(t)|,$$

de donde

$$\cosh(\varphi(t)) \leq \cosh(\ln(t)) = \frac{1+t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{2t^2}t.$$

Luego, como $t = \sqrt{q} \geq c_0 > 0$, tenemos que

$$\frac{1}{2\delta_0}I \leq \sqrt{q}I(\varphi) = ds^2$$

para

$$\delta_0 = \frac{1+c_0^2}{2c_0^2} > 0.$$

Finalmente, al ser I completa, ds^2 es completa en Σ . □

1.8. Algunas aplicaciones

En esta Sección veremos algunas aplicaciones de los resultados anteriores, como por ejemplo el siguiente resultado que nos ayudará a obtener una generalización del Teorema de Bonnet,

Lema 1.10:

Sean $(I_1, II_1), (I_2, II_2) \in \mathcal{C}(\Sigma)$. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

1. Para todo punto $p_0 \in \Sigma$ donde $|\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}|(p_0) = 0$, se verifica

$$\limsup_{p \rightarrow p_0} \left| \frac{d(H_1 - H_2 - (f(q_1) - f(q_2)))}{|\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}|} \right| < +\infty$$

donde $q_i = H_i^2 - K_i$ para $i = 1, 2$, y $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

- 2.

$$I_1(\varphi) = I_2(\varphi) \equiv I(\varphi)$$

donde $(I_1(\varphi), II_1(\varphi))$ y $(I_2(\varphi), II_2(\varphi))$ son los pares asociados a (I_1, II_1) y (I_2, II_2) , respectivamente, dados por (1.146) y (1.147) para la función

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds.$$

Si definimos

$$\tilde{I}(\varphi) = I(\varphi) \tag{1.162}$$

$$\tilde{II}(\varphi) = II_1(\varphi) - II_2(\varphi), \tag{1.163}$$

entonces el par $(\tilde{I}(\varphi), \tilde{II}(\varphi)) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ verifica

$$\limsup_{\tilde{q}(\varphi) \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}_{\tilde{S}(\varphi)}}{\tilde{q}(\varphi)} < +\infty, \tag{1.164}$$

siendo $\tilde{q}(\varphi)$ la curvatura asimétrica del par $(\tilde{I}(\varphi), \tilde{II}(\varphi))$ y $\tilde{S}(\varphi)$ el endomorfismo autoadjunto asociado a $\tilde{II}(\varphi)$.

Demostración. La condición sobre f nos dice que

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds$$

es diferenciable en $[0, +\infty)$ y $\varphi(0) = 0$.

Entonces, usando el Corolario 1.2, construimos los nuevos pares fundamentales $(I_1(\varphi), II_1(\varphi))$ y $(I_2(\varphi), II_2(\varphi))$ asociados a (I_1, II_1) y (I_2, II_2) respectivamente.

De la segunda condición, $I_1(\varphi) = I_2(\varphi) = \tilde{I}(\varphi)$ sobre Σ , por lo que, en particular, inducen la misma estructura conforme. Así, denotaremos por z a un parámetro conforme para $\tilde{I}(\varphi)$, esto es, $\tilde{I}(\varphi) = 2\lambda|dz|^2$ y

$$Q_i(\varphi) dz^2 = \tilde{I}(\varphi) \left(S_i(\varphi) \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right) dz^2$$

donde $S_i(\varphi)$ es el endomorfismo autoadjunto asociado a $II_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, siendo además,

$$\frac{|Q_i(\varphi)|^2}{\lambda^2} = q_i(\varphi).$$

Luego, de (1.148)

$$\begin{aligned} Q_1(\varphi)_{\bar{z}} &= \lambda \omega_1 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ Q_2(\varphi)_{\bar{z}} &= \lambda \omega_2 \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_1 &= d(H_1 - f(q_1)) \\ \omega_2 &= d(H_2 - f(q_2)) \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$(Q_1(\varphi) - Q_2(\varphi))_{\bar{z}} = \lambda d(H_1 - H_2 - (f(q_1) - f(q_2))) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Ahora, usando que

$$||Q_1(\varphi)| - |Q_2(\varphi)|| \leq |Q_1(\varphi) - Q_2(\varphi)|$$

tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{\tilde{q}(\varphi)}} \leq \frac{1}{|\sqrt{q_1(\varphi)} - \sqrt{q_2(\varphi)}|}.$$

Luego, del Lema 1.2,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\tilde{S}(\varphi)} &= \frac{2}{\lambda^3} |(Q_1(\varphi) - Q_2(\varphi))_{\bar{z}}|^2 \\ &= \frac{2}{\lambda} |d(H_1 - H_2 - (f(q_1) - f(q_2))) \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)|^2, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{\mathcal{T}_{\tilde{S}(\varphi)}^{\tilde{q}(\varphi)}}{\tilde{q}(\varphi)} \leq \frac{2}{\lambda} \left| \frac{d(H_1 - H_2 - (f(q_1) - f(q_2))) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)}{\sqrt{q_1(\varphi)} - \sqrt{q_2(\varphi)}} \right|^2,$$

esto es, (1.164) se verifica. \square

Si suponemos que Σ es una esfera topológica, el Teorema 1.1 y el Lema 1.10 nos dicen que la parte $(2, 0)$ de $\tilde{II}(\varphi)$ se anula idénticamente sobre Σ , o lo que es lo mismo, las partes $(2, 0)$ de $II_1(\varphi)$ y $II_2(\varphi)$ coinciden sobre nuestra superficie. Luego

Corolario 1.4 (Teorema Tipo Bonnet):

Sea Σ una esfera topológica y $(I_1, II_1), (I_2, II_2) \in \mathcal{C}(\Sigma)$. Cualesquiera de las siguientes condiciones implica que $(I_1, II_1) \equiv (I_2, II_2)$ en Σ :

1. $I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$ y $H_1 - f(q_1) = H_2 - f(q_2)$.
2. $II_1 = II_2$ y $K_1 = K_2 > 0$.
3. $III_1 = III_2$ y $H_1/K_1 = H_2/K_2$ con $K_1, K_2 \neq 0$.

Demostración.

1. Como hemos comentado justo antes del Corolario, al ser Σ una esfera topológica tenemos que $\tilde{II}(\varphi) = 0$ (ver Lema 1.10), lo que implica que

$$q_1(\varphi) = q_2(\varphi)$$

o equivalentemente,

$$q_1 = q_2$$

y por lo tanto $H_1 = H_2$. Así, el Lema 1.8 nos da el resultado.

2. Consideremos los pares (II, I_i) , $i = 1, 2$, donde $II = II_i$, $i = 1, 2$, con curvatura media $H(II_i, I_i) = H_i/K_i = H_i/K$ de (1.111) y $K_i = K$, $i = 1, 2$.

Sea z un parámetro conforme para $II = 2\rho|dz|^2$ y denotemos por S_i a los endomorfismos autoadjuntos asociados a I_i (ver (1.64)). Si definimos $I = I_1 - I_2$, entonces

$$S \frac{\partial}{\partial z} = (S_1 - S_2) \frac{\partial}{\partial z} = \frac{H_1 - H_2}{K} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{p_1 - p_2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

donde estamos siguiendo la notación de la Proposición 1.3.

Por un lado, al ser (I_i, II) , $i = 1, 2$, pares de Codazzi, de (1.67), es fácil verificar

$$K(p_i)_{\bar{z}} = -\frac{K_{\bar{z}}}{2}p_i - \rho\frac{K_z}{2K}H_i$$

y por tanto

$$K(p_1 - p_2)_{\bar{z}} = -\frac{K_{\bar{z}}}{2}(p_1 - p_2) - \rho\frac{K_z}{2}\frac{H_1 - H_2}{K},$$

de donde

$$K^2 |(p_1 - p_2)_{\bar{z}}|^2 \leq \frac{\rho^2 |K_z|^2}{4} \left(\left| \frac{p_1 - p_2}{\rho} \right|^2 + \left(\frac{H_1 - H_2}{K} \right)^2 \right).$$

Por otro lado, usando (1.111) y (1.112)

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_1 - p_2}{\rho} \right| &\geq \left| \left| \frac{p_1}{\rho} \right| - \left| \frac{p_2}{\rho} \right| \right| = \left| \sqrt{\frac{q_1}{K^2}} - \sqrt{\frac{q_2}{K^2}} \right| \\ &\geq \sqrt{\frac{H_1^2 - 2H_1H_2 + H_2^2}{K^2}} = \left| \frac{H_1 - H_2}{K} \right|. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$K^2 |(p_1 - p_2)_{\bar{z}}|^2 \leq \frac{|K_z|^2}{2} |p_1 - p_2|^2.$$

Ahora, los Lemas 1.2 y 1.3 nos dicen que $p_1 = p_2$ en Σ por ser ésta una esfera topológica. Entonces, al ser para $i = 1, 2$

$$K = -\frac{\rho^2}{|p|^2 - \lambda_i^2}$$

se deduce que $\lambda_1 = \lambda_2$, esto es $I_1 = I_2$ en Σ .

3. Como (I_i, II_i) , $i = 1, 2$, son de Codazzi, de la Proposición 1.8, (III_i, II_i) es de Codazzi y $H(III_i, II_i) = H_i/K_i$ de (1.111). Así, por hipótesis, tendríamos dos pares (III_i, II_i) , $i = 1, 2$, que tienen la misma curvatura media $H/K = H_i/K_i$, $i = 1, 2$. Por lo tanto, el primer apartado nos da el resultado.

□

Capítulo 2

Espacios modelo

2.1. Generalidades

Comenzaremos introduciendo las representaciones usuales de los espacios modelo, que usaremos a lo largo de este Capítulo. Se intentará establecer una notación lo más unificada posible en aras de la simplicidad. Para un análisis más detallado de los conceptos que vamos a introducir en esta primera parte del Capítulo véase [101].

Sea $\mathbb{M}^{n+1}(c)$ una variedad riemanniana de dimensión $n+1$, $n \geq 1$, completa, simplemente conexa y con curvatura seccional constante c . Entonces, el Teorema de Cartan [19] nos dice que, salvo isometrías, $\mathbb{M}^{n+1}(c)$ es una de las siguientes variedades:

2.1.1. El espacio euclídeo

Si $c = 0$, $\mathbb{M}^{n+1}(0)$ es el espacio euclídeo $(n+1)$ -dimensional usual \mathbb{R}^{n+1} , con la métrica

$$\langle, \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2.$$

El grupo de isometrías de \mathbb{R}^{n+1} viene dado por el producto semidirecto del grupo ortogonal $\mathcal{O}(n+1)$, dado por todas las aplicaciones lineales de \mathbb{R}^{n+1} que conservan el producto escalar, con el grupo de traslaciones afines de \mathbb{R}^{n+1} .

Así, las subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{R}^{n+1} son los subespacios afines. En particular, la geodésica en \mathbb{R}^{n+1} que en el instante $t = 0$ pasa por $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ a velocidad $v \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ está dada por

$$\gamma_{(p,v)}(t) = p + tv,$$

donde t es, en consecuencia, el parámetro arco a lo largo de γ .

2.1.2. La esfera euclídea

Si $c > 0$, $\mathbb{M}^{n+1}(c)$ es la esfera $(n+1)$ -dimensional usual de radio $1/\sqrt{c}$, es decir, es el conjunto de \mathbb{R}^{n+2} dado por

$$\mathbb{S}^{n+1}(c) = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} : \sum_{i=0}^{n+1} x_i^2 = 1/c \right\}$$

con la métrica inducida $\langle, \rangle = \sum_{i=0}^{n+1} dx_i^2$ de \mathbb{R}^{n+2} .

El grupo de isometrías de \mathbb{S}^{n+1} está formado por la restricción a \mathbb{S}^{n+1} de toda aplicación del grupo ortogonal $\mathcal{O}(n+2)$.

Las subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{S}^{n+1} son las intersecciones de subespacios afines de \mathbb{R}^{n+2} con \mathbb{S}^{n+1} . En particular, la geodésica en \mathbb{S}^{n+1} que en el instante $t = 0$ pasa por $p \in \mathbb{S}^{n+1}$ a velocidad $v \in \mathbb{S}^n$ está dada por

$$\gamma_{(p,v)}(t) = \cos(\sqrt{c}|v|t) p + \frac{\text{sen}(\sqrt{c}|v|t)}{\sqrt{c}|v|} v,$$

donde t es, en consecuencia, el parámetro arco a lo largo de γ .

2.1.3. El espacio hiperbólico

Este es el caso en que $c < 0$. Para este espacio veremos tres modelos diferentes, los cuales se usarán a lo largo de esta memoria.

El hiperboloide de una hoja

Si $c < 0$, $\mathbb{M}^{n+1}(c)$ es el espacio hiperbólico $(n+1)$ -dimensional usual, es decir, el conjunto de \mathbb{L}^{n+2} dado por

$$\mathbb{H}^{n+1}(c) = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+2} : -x_0^2 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1/c, x_0 > 0 \right\}$$

con la métrica inducida $\langle, \rangle = -dx_0^2 + \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2$ de \mathbb{L}^{n+2} .

El grupo de isometrías de \mathbb{H}^{n+1} está formado por la restricción a \mathbb{H}^{n+1} de toda aplicación del grupo ortocrono $\mathcal{O}^\uparrow(1, n+2)$, donde $\mathcal{O}^\uparrow(1, n+2)$ es el conjunto de todas las transformaciones vectoriales de \mathbb{L}^{n+2} que conservan la métrica y tales que llevan el cono de luz

$$\mathbb{N}_+^{n+1} = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{L}^{n+2} : -x_0^2 + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 0, x_0 > 0 \right\}$$

en sí mismo.

Las subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{H}^{n+1} son las intersecciones de subespacios afines de \mathbb{L}^{n+2} con \mathbb{H}^{n+1} . En particular, la geodésica en \mathbb{H}^{n+1} que en el instante $t = 0$ pasa por $p \in \mathbb{H}^{n+1}$ a velocidad $v \in \mathbb{S}^n$ está dada por

$$\gamma_{(p,v)}(t) = \cosh(\sqrt{-c}|v|t)p + \frac{\sinh(\sqrt{-c}|v|t)}{\sqrt{-c}|v|}v,$$

donde t es el parámetro arco a lo largo de γ .

Modelo del semiespacio superior

Consideremos el subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} dado por

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} > 0 \right\}$$

provisto con la métrica

$$ds^2 = \frac{1}{-cx_{n+1}^2} (dx_1^2 + \dots + dx_{n+1}^2).$$

Es un cálculo directo comprobar que $(\mathbb{R}_+^{n+1}, ds^2)$ tiene curvatura seccional constante c . Además, es inmediato comprobar que la aplicación de $\mathbb{H}^{n+1}(c)$ en \mathbb{R}_+^{n+1}

$$(x_0, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{x_0 + x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n, \frac{1}{\sqrt{-c}}),$$

es una isometría entre estos dos espacios.

De la expresión de la métrica podemos ver que las rotaciones y las traslaciones horizontales euclídeas son isometrías de \mathbb{R}_+^{n+1} . Otras isometrías asociadas a cada punto $(y, 0)$, $y \in \mathbb{R}^n$, del hiperplano $\{x_{n+1} = 0\}$ son:

- *Traslaciones hiperbólicas verticales:*

$$(x, x_{n+1}) \mapsto (e^t(x - y), e^t x_{n+1}),$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $x_{n+1} > 0$, $t \in \mathbb{R}$. Esto es, homotecias euclídeas de centro $(y, 0)$ y razón e^t .

- *Reflexiones o isometrías hiperbólicas:*

$$(x, x_{n+1}) \mapsto (y, 0) + \frac{t^2}{|x - y|^2 + x_{n+1}^2} (x - y, x_{n+1}),$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $x_{n+1} > 0$, $t > 0$ y $|\cdot|$ denota la norma euclídea en \mathbb{R}^n . Es decir, son inversiones euclídeas (en el semiplano superior) de una esfera de radio t y centro $(y, 0)$. Además, las simetrías euclídeas respecto de planos verticales también se consideran reflexiones hiperbólicas de centro infinito.

Es fácil comprobar que el grupo de isometrías del modelo del semiespacio superior se corresponde con el grupo de transformaciones conformes de \mathbb{R}_+^{n+1} como subconjunto del espacio euclídeo.

Además, es claro que los puntos fijos de dichas isometrías son los subespacios afines verticales y las semiesferas de cualquier radio y dimensión $k \leq n$, que cortan ortogonalmente al hiperplano $\{x_{n+1} = 0\}$. Éstas son, por tanto, las subvariedades totalmente geodésicas de \mathbb{R}_+^{n+1} . En particular, los semicírculos cortando al hiperplano $\{x_{n+1} = 0\}$ de forma ortogonal y las rectas verticales, son las geodésicas en este modelo.

Cuando tratábamos las traslaciones hiperbólicas, a cada geodésica vertical le hemos asociado un grupo uniparamétrico de isometrías obtenidas por traslación a lo largo de dicha geodésica normalizada. Como, mediante una reflexión hiperbólica, podemos llevar cualquier geodésica en una vertical, tenemos que toda geodésica γ con velocidad constante determina de forma única un grupo uniparamétrico de traslaciones hiperbólicas cuyo campo de Killing extiende el campo tangente a γ .

Modelo conforme de la bola o Modelo de Poincaré

Consideremos sobre la bola abierta centrada en el origen de \mathbb{R}^{n+1} y radio $1/\sqrt{-c}$, $\mathbb{B}(1/\sqrt{-c})$, la métrica de curvatura seccional constante c dada por

$$ds^2 = \frac{4}{(1 + c|x|^2)^2} (dx_1^2 + \cdots + dx_{n+1}^2),$$

donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $|\cdot|$ es la norma euclídea en \mathbb{R}^n .

Podemos comprobar que la aplicación de \mathbb{R}_+^{n+1} en $\mathbb{B}(1/\sqrt{-c})$ dada por

$$(y, y_{n+1}) \mapsto \frac{1}{\sqrt{-c}(|y|^2 + (y_{n+1} + 1)^2)} (2y, |y|^2 + y_{n+1}^2 - 1),$$

donde $y \in \mathbb{R}^n$, $y_{n+1} > 0$, es una isometría entre ambos espacios. Es fácil comprobar que el grupo de isometrías del modelo conforme de la bola se corresponde con el grupo de transformaciones conformes de $\mathbb{B}(1/\sqrt{-c})$ como subconjunto del espacio euclídeo.

Como consecuencia de la expresión de la métrica en este modelo, la restricción a $\mathbb{B}(1/\sqrt{-c})$ de todo elemento de $\mathcal{O}(n+1)$ es una isometría de este espacio. En particular, las rotaciones respecto de una recta vectorial y las simetrías euclídeas respecto

de hiperplanos pasando por el origen son isometrías. Además, las simetrías hiperbólicas en este modelo vienen dadas por las reflexiones en hiperplanos e inversiones en esferas que cortan ortogonalmente a la esfera de infinito $\mathbb{S}_\infty^n = \partial\mathbb{B}(1/\sqrt{-c})$.

Nótese que todo punto exterior a la bola $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathbb{B}(1/\sqrt{-c})}$, es centro de una única esfera que corta ortogonalmente a \mathbb{S}_∞^n , cuyo radio, r , viene dado por $r = \sqrt{1/c + |p|^2}$. Luego, cada rayo radial partiendo de la bola determina una familia uniparamétrica de tales reflexiones.

Las subvariedades totalmente geodésicas en este modelo son los casquetes esféricos de dimensión $k \leq n$, y los discos que cortan ortogonalmente a \mathbb{S}_∞^n . En particular, las geodésicas son trozos de círculos que cortan ortogonalmente al borde en infinito y trozos de recta que pasan por el origen.

2.1.4. Superficies en espacios modelo

En esta última parte de la Sección, estableceremos la notación y propiedades básicas de superficies inmersas en un espacio modelo. Como podremos observar, la mayoría de la notación que encontraremos aquí ha estado implícitamente definida en el Capítulo 1.

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^3(c)$ una superficie inmersa orientable. Llamaremos al normal unitario N a lo largo de la inmersión como **aplicación de Gauss**. Se define la Segunda Forma Fundamental de la inmersión asociada a N en un punto $p \in \Sigma$ como

$$II(u, v) = I(-\nabla_u N, v)$$

donde $u, v \in T_p\Sigma$ son vectores tangentes a Σ en p , $I(\cdot, \cdot)$ es la Primera Forma Fundamental de Σ y ∇ la conexión de Levi-Civita asociada.

El **endomorfismo de Weingarten** de la superficie viene dado por

$$S(v) = -\nabla_v N, \quad v \in T_p\Sigma.$$

Sean k_1 y k_2 la curvaturas principales de la superficie en un punto p asociadas a N , esto es, los autovalores del endomorfismo de Weingarten. Se definen la **curvatura media** y la **curvatura extrínseca** como $2H = k_1 + k_2$ y $K = k_1 k_2$ respectivamente.

Denotemos por $K(I)$ a la curvatura de Gauss (o intrínseca) de la Primera Forma Fundamental de la superficie Σ . La Ecuación de Gauss nos dice cómo se relacionan la curvatura extrínseca y la curvatura intrínseca, esto es,

$$K(I) = K + c.$$

Por otra parte, es bien conocido que los coeficientes de la Primera y Segunda Forma Fundamental de la superficie verifican las Ecuaciones de Mainardi-Codazzi. O dicho de otra forma, $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma)$.

2.2. El Principio de Máximo y el Método de Alexandrov

En esta Sección recordaremos el clásico Principio del Máximo (PM) de H. Hopf [58] para ecuaciones elípticas de segundo orden. Para un desarrollo extenso de este tema puede verse [48] y [41]. No estamos interesados aquí en EDPs, propiamente dichas, sino en su aplicación a superficies.

Así, empezaremos con una serie de definiciones y fijaremos la notación que usaremos a lo largo de esta Sección.

Estamos interesados en ecuaciones en derivadas parciales de la forma

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = d, \quad (2.1)$$

donde a_{ij} , b_j , c y d son funciones reales de clase C^∞ que dependen solamente de $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, siendo Ω un dominio de \mathbb{R}^n . Además la matriz formada por los a_{ij} , esto es $A = (a_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$, es una matriz simétrica y u una función diferenciable en Ω .

Podemos representar la ecuación (2.1) por

$$Lu = d,$$

donde L es el operador definido por

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c. \quad (2.2)$$

Al operador L le asociamos la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la matriz A , es decir,

$$Q(x) = Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

El siguiente paso es clasificar los tipos de operadores L , dados por (2.2), dependiendo de la forma cuadrática asociada

Definición 2.1:

Diremos que un operador L del tipo dado en (2.2) es

- **Elíptico** si los autovalores de la matriz A son todos positivos.
- **Uniformemente elíptico** si los autovalores de la matriz A están acotados inferiormente por una constante positiva.
- **Hiperbólico** si los autovalores de la matriz A son todos no nulos, pero existen autovalores de signos opuestos.

- **Parabólico** si algún autovalor se anula.

Los métodos del principio del máximo están basados en la siguiente observación: Dada una función $u \in C^2(\Omega)$ tal que alcanza un máximo en un punto $x_0 \in \Omega$, entonces $\text{grad}_0 u(x_0) = 0$ y $\text{Hess}_0 u(x_0) \leq 0$, donde grad_0 y Hess_0 denotan el gradiente y el Hessiano de u en el punto x_0 .

El PM Débil nos dice que, si Lu tiene signo, entonces el máximo o el mínimo (dependiendo del signo de Lu) de u en el cierre de Ω se alcanza en algún punto de la frontera de Ω , aunque también podría alcanzarse en algún otro punto del interior.

Por su parte, el PM Fuerte nos dice que, bajo ciertas condiciones en el operador L , si Lu tiene signo y el máximo o el mínimo (dependiendo del signo de Lu) se alcanza en un punto interior, entonces u debe ser constante. Esta última versión es la que nos interesa.

Pasemos ahora a recordar los resultados clásicos que hemos anunciado

Teorema 2.1 (Principio del Máximo Interior de Hopf):

Sea L un operador uniformemente elíptico en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos $Lu \geq 0$ para una función $u \in C^2(\Omega)$. Entonces,

- si $c \equiv 0$ y u alcanza su máximo en Ω , u es constante.
- si $c \leq 0$, u alcanza su máximo en Ω y ese máximo es no negativo, u es constante.

Teorema 2.2 (Principio del Máximo en la Frontera de Hopf):

Sea L un operador uniformemente elíptico en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con frontera $\partial\Omega$ dos veces diferenciable. Sea $x_0 \in \partial\Omega$ tal que

1. u es de clase C^1 en x_0 .
2. $u(x_0) \geq u(x)$, $\forall x \in \Omega$.
3. $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x_0) = 0$, donde η es el normal interior de $\partial\Omega$.

Entonces,

- si $c \equiv 0$, u es constante.
- si $c \leq 0$ y $u(x_0) \geq 0$, u es constante.

De hecho, no es necesario restringirse a ecuaciones de segundo orden. En efecto, es un hecho bien conocido que hay ecuaciones de orden superior a dos que verifican el PM. Así, a partir de ahora escribiremos $Lu = 0$ para expresar que u verifica una cierta ecuación diferencial, de cualquier orden, mientras que otra cosa no sea especificada.

Vamos a establecer ahora la forma en que aplicaremos los resultados anteriores. En esencia, lo que haremos será *comparar* superficies conexas que cumplen la tesis del *Principio del Máximo*.

Esto último quiere decir lo siguiente:

Definición 2.2:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie vista como un grafo sobre su plano tangente (localmente), esto es, $\Sigma = \text{Gr}(u)$ donde $u \in C^2(\Omega)$ y Ω es un dominio del plano tangente. Diremos que $\Sigma \in S(L)$ si u verifica la ecuación $Lu = 0$, donde L es un cierto operador diferencial. Además, supondremos que L es invariante frente a isometrías del espacio ambiente.

Definición 2.3:

Diremos que el conjunto de superficies $S(L)$ cumple el **Principio del Máximo** si dadas $\Sigma_i = \text{Gr}(u_i)$, $i = 1, 2$, dos superficies definidas como grafos de $u_i \in C^2(\Omega)$, $i = 1, 2$ soluciones de la ecuación $Lu = 0$, la diferencia de dichas soluciones $w = u_1 - u_2$ verifica una ecuación diferencial $\tilde{L}w = 0$ tal que cumple las conclusiones del Principio del Máximo (Interior y Frontera) de Hopf.

Lo primero que tenemos que observar en la Definición anterior es que el operador \tilde{L} no tiene porqué coincidir con L . Un ejemplo ilustrativo de lo que estamos contando en estas líneas son las superficies con curvatura media constante en \mathbb{R}^3 . Es un hecho bien conocido que dichas superficies, vistas como grafos locales sobre su plano tangente, verifican una ecuación uniformemente elíptica de segundo orden, y por lo tanto, el PM.

Definición 2.4:

Denotemos por $S_{PM}(L)$ al conjunto de superficies en \mathbb{R}^3 que, vistas como grafos locales sobre su plano tangente, verifican $Lu = 0$ y cumplen el Principio del Máximo en el sentido de la Definición 2.3. Si además existe $\Sigma_0 \in S_{PM}(L)$ compacta y embebida, entonces denotaremos al conjunto por $S_{PM}^c(L)$. Dichas superficies las suponemos analíticas si fuese necesario.

Como lo que estamos buscando es comparar superficies en un entorno de éstas, para asegurar que coinciden en dicho entorno, supondremos que las superficies son analíticas para poder trasladar propiedades a toda la superficie. Tengamos en cuenta que si L es un operador uniformemente elíptico de segundo orden con coeficientes analíticos y u es de clase C^2 , la condición de ser analítica se verifica directamente.

Sean $\Sigma_i = \text{Gr}(u_i)$, $i = 1, 2$, dos superficies definidas como grafos de $u_i \in C^2(\Omega)$, $i = 1, 2$. Supongamos que ambas superficies verifican el Principio del Máximo respecto

al mismo operador L , es decir, $\Sigma_i \in S_{PM}(L)$. Entonces $u = u_1 - u_2$ cumple $Lu = 0$, y usaremos la tesis del PM para, bajo las condiciones adecuadas, asegurar que u es constante.

Vamos a hacer todo esto más explícito. Para ello, necesitamos algunos conceptos previos.

Sean $\Sigma_i = \text{Gr}(u_i) \subset \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$, dos superficies definidas como grafos de $u_i \in C^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, que son tangentes en un punto $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ y tiene el mismo vector unitario normal en el punto p . En estas condiciones, diremos que p es un **punto de tangencia interior** de Σ_i , $i = 1, 2$.

También consideraremos el caso de superficies con borde, para lo que necesitamos definir un punto de tangencia en la frontera. Sean $\Sigma_i = \text{Gr}(u_i) \subset \mathbb{R}^3$ con borde $\partial\Sigma_i$, $i = 1, 2$, diferenciable. Sea $p \in \partial\Sigma_1 \cap \partial\Sigma_2$ un punto de tangencia común con el mismo normal unitario en p . Además, supongamos que los conormales interiores η_i de $\partial\Sigma_i$, para $i = 1, 2$, coinciden en p . En estas condiciones, decimos que p es un **punto de tangencia en la frontera**. Por lo tanto, en un entorno de p , Σ_i son grafos sobre el mismo plano tangente para funciones reales u_i . Así, diremos que Σ_1 está **por encima** de Σ_2 si $u_1 \geq u_2$, y lo denotaremos por $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$.

Observación 2.1:

El Principio del Máximo no sólo se puede aplicar a superficies que cumplen la misma ecuación diferencial. Por ejemplo, para el caso de superficies en un espacio modelo es conocido que si Σ_i , $i = 1, 2$, son superficies conexas y sin borde en \mathbb{R}^3 con curvaturas medias H_i , $i = 1, 2$, y $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ es un punto de tangencia interior, entonces si $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$ y $H_1 \leq H_2$ se tiene que $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

A continuación, resumimos las ideas que hemos estado desarrollando en el siguiente resultado.

Corolario 2.1 (Principio de Comparación):

Sean $\Sigma_i = \text{Gr}(u_i) \in S_{PM}(L)$, $i = 1, 2$, dos superficies en \mathbb{R}^3 . Supongamos que p es un punto de tangencia interior o en la frontera, y en un entorno de p se verifica que $\Sigma_1 \geq \Sigma_2$. Entonces $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

El Corolario 2.1 debe entenderse como un Principio de Comparación entre superficies. Lo que normalmente haremos será *comparar* superficies con otras conocidas dentro de la misma familia (de revolución, umbilicales o reflexiones de una misma superficie).

Una de las principales aplicaciones de dicho Principio de Comparación es el Método de Alexandrov. En 1956, Alexandrov [2] demostró que toda superficie compacta, embebida y con curvatura media constante en \mathbb{R}^3 debe ser una esfera. La demostra-

ción consiste en tomar familias uniparamétricas de superficies totalmente geodésicas (planos en el caso de \mathbb{R}^3) que intersecan a la superficie, reflejar la parte de superficie que queda a un lado de la superficie totalmente geodésica, y compararla con la parte de superficie que queda al otro lado.

Dicho Método de Alexandrov, aunque originariamente surgido en \mathbb{R}^3 , se puede extender a los demás espacios modelo (de hecho, es aplicable en otros espacios homogéneos como veremos en el siguiente Capítulo). Y, aunque pueda parecer una técnica puramente geométrica, ha sido trasladada a un ámbito puramente analítico.

Lo que veremos aquí será la extensión del Método de Alexandrov a superficies no compactas desarrollado en [66].

Cuando la superficie Σ es compacta y tomamos una familia uniparamétrica de superficies totalmente umbilicales $P(t)$ que sea una foliación del espacio ambiente generando una isometría de éste cuando consideramos la reflexión respecto de cada superficie de la familia, entonces por compacidad de Σ , concluimos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que Σ y su reflejada respecto $P(t_0)$, que denotamos por $\Sigma^+(t_0)$, verifican una de las dos siguientes opciones

- son tangentes en un punto interior.
- son tangentes en el borde contenido en $P(t_0)$.

Luego, si nuestra superficie verifica el Principio del Máximo (interior y frontera), entonces cualquiera de las dos condiciones anteriores nos diría que $P(t_0)$ es un plano de simetría de Σ .

Observar que si Σ es no compacta, no podemos asegurar que se den esas dos condiciones, ya que el *primer punto de contacto de la superficie con su reflejada podría estar en infinito*.

Desarrollaremos el Método de Alexandrov en \mathbb{R}^3 , aunque es fácil convencerse de que funciona en \mathbb{H}^3 bajo pequeñas modificaciones. No obstante, usaremos una notación lo más unificada posible para que esta última afirmación quede lo suficientemente clara.

A continuación introduciremos la notación y conceptos necesarios para esta Sección.

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie conexa y propiamente embebida. Entonces Σ es orientable y divide a \mathbb{R}^3 en dos componentes conexas. Supongamos Σ orientada, y denotemos por N al normal unitario globalmente definido sobre Σ . Sea $\Omega(N)$ la componente de $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ hacia la que apunta N , siendo $\Sigma = \partial\Omega(N)$.

Definición 2.5:

Dado un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ con normal unitario v , denotaremos por $P(t)$ a **la foliación por planos paralelos** a P a distancia t , esto es, si $p \in P$ y $\gamma_{(p,v)}$ es la geodésica en \mathbb{R}^3 con

condiciones iniciales $\gamma_{(p,v)}(0) = p$ y $\gamma'_{(p,v)}(0) = v$, donde t es el parámetro arco a lo largo de γ , entonces $P_\gamma(t)$ es el conjunto

$$P_\gamma(t) = \{\gamma_{(p,v)}(t) : p \in P\}.$$

Asimismo, denotaremos $P^-(t)$ y $P^+(t)$ los semiespacios determinados por $P(t)$. Concretamente

$$P^-(t) = \bigcup_{s \leq t} P(s) \quad (2.3)$$

$$P^+(t) = \bigcup_{s \geq t} P(s). \quad (2.4)$$

Dado un conjunto $G \subset \mathbb{R}^3$, denotaremos

$$G^+(t) = G \cap P^+(t), \quad G^-(t) = G \cap P^-(t).$$

Además representaremos por $\tilde{G}^+(t)$ la reflexión de $G^+(t)$ respecto de $P_\gamma(t)$. Análogamente, $\tilde{G}^-(t)$ será la reflexión de $G^-(t)$ respecto de $P_\gamma(t)$.

Volvamos a nuestra superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ conexa y propiamente embebida. Buscamos aplicar, para un entorno abierto $W \subset \Omega(N)$, el Método de Reflexión de Alexandrov a la superficie $S = \Sigma \cap \partial W$.

Como S es un subconjunto de Σ , que en principio puede no ser conexo o acotado, necesitamos, antes de nada, precisar el concepto de primer punto de contacto (local).

Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un plano con normal unitario v , y $p \in P$. Consideremos la geodésica $\gamma_{(p,v)}(t)$. Si $\gamma_{(p,v)}(t)$ es disjunta de \overline{W} para todo t suficientemente grande, entonces denotamos por

$$\mathbf{p}_1(p) = \gamma_{(p,v)}(t_1) \quad (2.5)$$

al **primer punto de contacto** de $\gamma_{(p,v)} \cap \overline{W}$ cuando t decrece desde ∞ , $\gamma_{(p,v)}$ como conjunto en \mathbb{R}^3 , si dicho punto existe. Cuando hablamos de *primer punto* en argumentos de reflexión pensamos en t decreciente, es decir, los planos de reflexión vienen acercándose por *detrás* de la superficie.

Supongamos que para un cierto $p \in P$, $\mathbf{p}_1(p)$ dado por (2.5) existe. Ahora, si $\mathbf{p}_1(p) \in S$, entonces la intersección de $\gamma_{(p,v)}$ con S en $\mathbf{p}_1(p)$ puede ser transversal o tangencial. Si es transversal y $\gamma_{(p,v)}$ primero abandona W a través de S , denotaremos el punto por donde deja W como

$$\mathbf{p}_2(p) = \gamma_{(p,v)}(t_2). \quad (2.6)$$

Si la intersección es tangencial, definimos $\mathbf{p}_2(p) = \mathbf{p}_1(p)$.

Ahora, si $p \in P$ es tal que existen $\mathbf{p}_1(p)$ y $\mathbf{p}_2(p)$, es decir, $\gamma_{(p,v)}$ entra y deja \overline{W} por S en el sentido anterior, entonces decimos que $p \in P$ pertenece al **dominio de la**

función de Alexandrov, $\Lambda \subset P$, donde la **función de Alexandrov asociada a P** viene dada por

$$\alpha_1(p) = \frac{t_1 + t_2}{2}. \quad (2.7)$$

Geoméricamente, $t = (t_1 + t_2)/2$ no es más que el valor para el cuál la reflexión de $p_1(p)$ respecto del plano $P(t)$ primero *toca a S* .

Pero debemos interpretar de una manera adecuada estos *primeros puntos de contacto* para intersecciones no transversas. Para ello daremos las siguientes definiciones.

Definición 2.6:

Un **primer punto de reflexión local** de S con respecto al plano P con normal v , se define como un punto $p_2(p)$ para el cuál $p \in \Lambda \subset P$ es un **máximo local de α_1** , esto es, existe un entorno $U_p \subset \Lambda$ tal que $\alpha_1(q) \leq \alpha_1(p)$, $\forall q \in U_p$.

Definición 2.7:

Decimos que α_1 tiene un **máximo local interior** en $p \in \Lambda$, si existe un entorno $U_p \subset \Lambda$ tal que todo punto de U_p verifica una de las dos siguientes condiciones:

- $q \in \Lambda$ y $\alpha_1(q) \leq \alpha_1(p)$.
- $\gamma_{(q,v)} \cap \overline{W} = \emptyset$.

Cualquier otro tipo de máximo local de α_1 , lo llamaremos **máximo en la frontera** (como podría ocurrir si $\gamma_{(p,v)}$ interseca ∂S).

Ahora veremos cómo se justifican las definiciones anteriores. Para ello, tenemos el siguiente

Lema 2.1:

Sea $\Sigma \subset S_{PM}(L)$ conexa y propiamente embebida (en el sentido de la Definición 2.2). Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un plano con normal v . Si, relativo a los subconjuntos $S \subset \Sigma$ y $W \subset \Omega(N)$, α_1 tiene un máximo local interior en $p \in P$, con valor $\alpha_1(p) = \bar{t}$, entonces el plano $P_{\gamma}(\bar{t})$ es un plano de simetría para Σ .

Demostración. Lo que haremos será comparar S con la reflexión, $\tilde{S}^+(\bar{t})$, de S respecto de $P_{\gamma}(\bar{t})$. Por construcción, $p_1(p)$ se refleja en $p_2(p)$.

Dado $q \in \Lambda$ un punto suficientemente cercano a p , entonces al ser p un máximo local tenemos que

$$2\bar{t} - t_1(q) \geq t_2(q),$$

es decir, la reflexión de $\mathbf{p}_1(q)$ respecto de $P_\gamma(\bar{t})$, que denotamos por $\tilde{\mathbf{p}}_1(q)$, está por encima de $\mathbf{p}_2(q)$, y como q está en el dominio de α_1 , entonces $\tilde{\mathbf{p}}_1(q) \in \overline{W}$. Luego, hemos visto que existe un entorno de $\mathbf{p}_2(p)$ en $\tilde{S}^+(\bar{t})$ que está contenido en \overline{W} .

En particular, si $\mathbf{p}_1(p) \neq \mathbf{p}_2(p)$, S y $\tilde{S}^+(\bar{t})$ deben tener a $\mathbf{p}_2(p)$ como punto de tangencia interior. Si $\mathbf{p}_1(p) = \mathbf{p}_2(p)$, S y $\tilde{S}^+(\bar{t})$ deben tener a $\mathbf{p}_1(p) = \mathbf{p}_2(p)$ como punto de tangencia en la frontera.

Por último, como hemos supuesto que Σ está en las condiciones de la Definición 2.2, el Corolario 2.1 nos da el resultado. \square

Este resultado nos es útil siempre y cuando podamos encontrar un máximo local para la función de Alexandrov α_1 . Debemos observar que α_1 no es en general continua, aunque veremos que, al menos, es semicontinua superiormente y por tanto alcanzará su supremo en cualquier dominio compacto. Con esta observación en mente, es sencillo obtener el clásico Teorema de Alexandrov.

Corolario 2.2 (Teorema de Alexandrov):

Sea $\Sigma \subset S_{PM}(L)$ una superficie conexa, compacta, embebida (ver Definición 2.2). Entonces Σ es una esfera totalmente umbilical, la cuál es única.

Demostración. Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es compacta, embebida y cumple el Principio del Máximo, entonces dado un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ con normal v , el dominio de definición de la función de Alexandrov es compacto, y por lo tanto α_1 alcanzará su máximo en un cierto \bar{t} . Entonces el Lema 2.1 nos dice que $P(\bar{t})$ es un plano de reflexión para Σ , y esto para cualquier plano $P \subset \mathbb{R}^3$. En consecuencia, Σ es una esfera totalmente umbilical. \square

Veamos ahora que α_1 es semicontinua superiormente tanto respecto de planos como respecto de puntos, como queda de manifiesto en el siguiente resultado.

Lema 2.2:

Tomemos un parámetro $\varepsilon \rightarrow 0$ y S cerrada. Supongamos que tenemos una sucesión de puntos $p_\varepsilon \rightarrow p$ contenidos cada uno de ellos en planos $P_\varepsilon \rightarrow P$. Denotemos por α_1^ε a las correspondientes funciones de Alexandrov. Bajo estas condiciones, si $\alpha_1^\varepsilon(p_\varepsilon)$ y $\alpha_1(p)$ existen, entonces

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_1^\varepsilon(p_\varepsilon) \leq \alpha_1(p). \tag{2.8}$$

Demostración. Sea $(\mathbf{p}_1(p_\varepsilon), \mathbf{p}_2(p_\varepsilon))$ la sucesión de pares de puntos en S asociada a p_ε dados por (2.5) y (2.6) respectivamente. Como S es cerrada, existirá una subsucesión que converge a un par de puntos en S (posiblemente idénticos) (Q_1, Q_2) , y las alturas $(t_1^\varepsilon, t_2^\varepsilon)$ de los puntos de la subsucesión respecto de los planos P_ε convergen a las alturas (\bar{t}_1, \bar{t}_2) del par (Q_1, Q_2) respecto de P . Luego, por la definición de $\mathbf{p}_1(p)$ (primer

punto el que toca a S) y $p_2(p)$ (primer punto por donde deja S), las alturas a las que se encuentran dichos puntos (t_1, t_2) tienen que ser mayores que (\bar{t}_1, \bar{t}_2) , es decir, $t_i \geq \bar{t}_i$ para $i = 1, 2$. En consecuencia (2.8) se verifica. \square

Observación 2.2:

Los métodos que hemos desarrollado en esta Sección son, de hecho, generalizables a dimensión superior, es decir, a hipersuperficies en \mathbb{R}^n . Y también, como es fácil conven-erse, a \mathbb{H}^{n+1} .

2.3. Estimaciones de altura

Aquí veremos un método geométrico por el cuál obtener una cota superior para la altura máxima que puede alcanzar una superficie compacta (con o sin borde) embebida en \mathbb{R}^3 .

En este tema, el primer resultado conocido es la estimación de grafos con curvatura media constante en \mathbb{R}^3 debida a E. Heinz [54]. Más tarde, Korevaar-Kusner-Meeks-Solomon [65], generalizaron dicha estimación para grafos con curvatura media constante en \mathbb{H}^3 . Las estimaciones dadas en estos trabajos son óptimas, es decir, la altura máxima se alcanza si, y sólo si, el grafo es un hemisferio de la esfera de revolución con esa misma curvatura media.

Sólo un año después, H. Rosenberg [92], demostró la existencia de estimaciones óptimas para hipersuperficies con alguna de sus curvaturas de orden superior una constante positiva, tanto en el espacio euclídeo como en el espacio hiperbólico (ver también [44] y [45] para algunos caso particulares). Estas estimaciones en \mathbb{R}^3 y \mathbb{H}^3 fueron generalizadas para una gran familia de superficies de Weingarten por H. Rosenberg y R. Sa Earp [93].

Aunque aquí no presentaremos estimaciones óptimas, la sola existencia de estimaciones para grafos nos permitirá obtener interesantes consecuencias para el estudio de superficies embebidas (ver [73], [66], [65] o [93]).

Como hicimos en la Sección anterior, desarrollaremos el caso de \mathbb{R}^3 ; para \mathbb{H}^3 es totalmente análogo.

Vamos a estudiar grafos $\Sigma \in S_{PM}^c(L)$ con borde en un plano $P \subset \mathbb{R}^3$. Salvo una isometría de \mathbb{R}^3 podemos suponer que P es el xy -plano, que

$$\Sigma = \text{Gr}(u) = \left\{ (x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega \subset P, u(x, y) \geq 0 \right\}, \quad (2.9)$$

y que el normal N sobre Σ apunta hacia abajo, es decir $\langle N, e_3 \rangle \leq 0$, donde $e_3 = (0, 0, 1)$.

Por el Teorema de Alexandrov (Corolario 2.2), si $\Sigma_0 \in S_{PM}^c(L)$ es compacta y embebida, entonces Σ_0 es una esfera totalmente umbilical. Denotaremos por $\text{diam}_{PM}^c(L)$ al diámetro de dicha esfera, la cuál es única.

Teorema 2.3:

Sea $\Sigma \in S_{PM}^c(L)$ un grafo sobre un dominio Ω del xy -plano P en \mathbb{R}^3 . Entonces la distancia en \mathbb{R}^3 de Σ a P está acotada, esto es, existe una constante $h_{PM}^c(L)$ (independiente de Σ), tal que

$$\text{dist}(q, P) \leq h_{PM}^c(L), \quad \forall q \in \Sigma.$$

Demostración. Sea Σ un grafo sobre un dominio $\Omega \subset P$ y tomemos con vector normal e_3 . Sea $P(t)$ la foliación por planos horizontales paralelos a P , a distancia t de P (ver

Definición 2.5). Como $\Sigma \in S_{PM}^c(L)$, sea Σ_0 la esfera de rotación que pertenece a la familia, con diámetro $\text{diam}_{PM}^c(L)$.

Veamos que para cada $t > \text{diam}_{PM}^c(L)$, el diámetro de cada componente conexa de $\Sigma(t) = P_\gamma(t) \cap \Sigma$ es a lo sumo $\text{diam}_{PM}^c(L)$, donde γ es la geodésica con condiciones iniciales $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ y $\gamma'(0) = e_3$.

En efecto, supongamos que esta afirmación no es cierta. Entonces, para alguna componente conexa $C(t)$ de $\Sigma(t) = P(t) \cap \Sigma$, hay puntos x, y en el interior del dominio $\Omega(t)$ de $P_\gamma(t)$ acotado por $C(t)$ con $\text{dist}(x, y) > \text{diam}_{PM}^c(L)$. Sea Q el dominio de \mathbb{R}^3 acotado por $\Sigma \cup \Omega$. Sea β una curva en $\Omega(t)$ uniendo x e y , β disjunta a $C(t)$. Sea R el “rectángulo” dado por

$$R = \{\alpha_s(r) : s \in \mathcal{I}, r \in [0, t]\}$$

donde \mathcal{I} es el intervalo de definición de β , y α_s es la geodésica con condiciones iniciales $\alpha_s(0) = \beta(s)$ y $\alpha'_s(0) = -e_3$, siendo r el parámetro arco a lo largo de $\alpha_{(\beta(s), -e_3)}$.

Como Σ es grafo y β está en el dominio interior de $C(t)$, $R \subset Q$. Sea p un punto de R cuya distancia a ∂R es mayor que $\text{diam}_{PM}^c(L)/2$; p existe por construcción de R .

Sea η la geodésica pasando por p tal que cada uno de sus puntos está a una distancia mayor que $\text{diam}_{PM}^c(L)/2$ de ∂R ; es fácil ver que dicha η está en el plano $P(t)$ conteniendo a p . η entra en Q en un primer punto q_0 y deja Q en un último punto q_1 .

Ahora consideremos la familia de esferas centradas en cada punto de η , cada esfera está obtenida de la esfera rotacional Σ_0 por una translación de \mathbb{R}^3 . Consideremos cómo la familia de esferas entra en Q por q_0 .

Entonces, existe una primera esfera en la familia (viniendo de q_0) que toca R por primera vez en un punto interior de R . Esta esfera pasa por R , sin tocar a ∂Q inicialmente, y pasa a través de R sin tocar ∂R . Como las esferas dejan Q en q_1 , hay alguna esfera de nuestra familia que toca a $\partial Q \cap \Sigma$ en un primer punto de contacto, que atraviesa R , con Σ . Luego, en este primer punto de contacto y como Σ verifica las conclusiones del Principio del Máximo, obtendríamos que Σ es igual a esta esfera, lo cuál es una contradicción.

Ahora, si el Teorema es falso, existe una sucesión de grafos Σ_n sobre dominios $\Omega_n \subset P$ con $\text{diam}(\Omega_n) < \text{diam}_{PM}^c(L)$ y $\text{dist}(\Sigma_n, P)$ no acotada.

Salvo isometrías, podemos suponer que los dominios Ω_n están contenidos en un disco fijo Ω y los grafos Σ_n están contenidos en el cilindro vertical \mathcal{C} sobre Ω .

Usaremos planos inclinados para demostrar que esto es imposible.

Sea d el diámetro del disco Ω (observemos que podemos tomarlo independiente de Σ). Supongamos que algún Σ_n alcanza una altura mayor (estricta) que $2d$. Sea $p \in \partial\Omega$, y l la geodésica contenida en P que pasa por p y es tangente en dicho punto a $\partial\Omega$ (P es totalmente geodésico). Llamemos $l(d)$ a la geodésica trasladada de l a altura d . Consideremos el plano inclinado P' tal que $l(d) \subset P'$, P' hace un ángulo de 45 grados con $P(d)$ y $\Omega \subset (P')^-$, esto es, está contenido en el semiespacio que queda por debajo

de P' .

Luego, si hacemos la reflexión de la parte de Σ_n que queda por encima de P' , habrá puntos que caigan fuera del cilindro \mathcal{C} . En particular, no va a tocar al borde de Σ_n en el plano P . Ahora, por continuidad, si trasladamos hacia arriba el plano P' , es decir, $P'(s) = P' + se_3$, llegaremos a que existe un s_0 tal que la reflexión de la parte de Σ_n que queda por encima de $P'(s_0)$ respecto de $P'(s_0)$, tiene un primer punto de contacto. Por lo tanto $P'(s_0)$ sería un plano de simetría, lo cuál es absurdo.

Esto completa la prueba. \square

Como consecuencia inmediata del Método de Alexandrov, podemos acotar la distancia máxima que alcanza una superficie compacta y embebida cuyo borde esté contenido en un plano (que supondremos que es el xy -plano).

Corolario 2.3:

Sea $\Sigma \in S_{PM}^c(L)$ una superficie embebida y compacta, con borde $\partial\Sigma$ contenido en el xy -plano P . Entonces

$$\text{dist}(q, P) \leq 2h_{PM}^c(L), \quad \forall q \in \Sigma,$$

donde $h_{PM}^c(L)$ es la constante dada en el Teorema 2.3.

Demostración. Sea $q \in \Sigma$ uno de los puntos donde se alcanza la distancia máxima a P . Dicho punto claramente existe por ser Σ compacta. Sea $P(t)$ la foliación de planos horizontales paralelos a P a distancia t (ver Definición 2.5), con $P(0) = P$ y $q \in P(h)$.

Hagamos reflexión de Alexandrov respecto de los planos $P(t)$, comenzando en $t = h$, y disminuyendo t . Para $h/2 < t \leq h$, la simetría de la parte de Σ en $P^+(t)$ no toca a $\partial\Sigma$, ya que $\partial\Sigma \subset P$. Así, la técnica de reflexión de Alexandrov nos dice que la simetría de $\Sigma^+(t) = \Sigma \cap P^+(t)$ respecto de $P(t)$, interseca Σ sólo en $\Sigma \cap P(t)$ y Σ nunca es ortogonal a $P(s)$ para $t \leq s \leq h$.

Luego $\Sigma^+(h/2)$ es un grafo sobre un dominio de $P(h/2)$, y el resultado está probado. \square

Observación 2.3:

Los métodos que hemos desarrollado en esta Sección son, de hecho, generalizables a dimensión superior, es decir, a hipersuperficies en \mathbb{R}^n . Y también, como es fácil conven- cerse, a \mathbb{H}^{n+1} .

2.4. Anillos propiamente embebidos

En esta parte extenderemos la teoría de Korevaar-Kusner-Meeks-Solomon ([73] y [66] en \mathbb{R}^3 y [65] en \mathbb{H}^3) para finales de una superficie con curvatura media constante en espacios modelo.

Las herramientas fundamentales usadas en dichos trabajos son

- Estimaciones de altura.
- Lema de Separación.

Para el caso de superficies de curvatura media constante, las estimaciones de altura pueden obtenerse de forma directa por métodos analíticos (ver [54], [73], [65] o [92]). Pero el Lema de Separación (como veremos a continuación) precisa de la existencia de una superficie compacta y embebida dentro de la familia y el Principio del Máximo, elementos fundamentales en las estimaciones de altura que hemos establecido en la Sección anterior.

En consecuencia, veremos que podemos extender el Lema de Separación bajo las mismas hipótesis requeridas en las estimaciones de altura.

Comenzaremos con unos preliminares topológicos que necesitaremos en la demostración del Lema de Separación (véase [91]). Dados dos lazos embebidos γ y δ en \mathbb{R}^3 con $\gamma \cap \delta = \emptyset$, sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada, embebida y transversa a γ con $\partial S = \delta$. El **número de ligadura**, $\text{link}(\gamma, \delta)$, se define como el número de puntos en $\gamma \cap S$, contados con signo dependiendo de la orientación relativa de cada punto de intersección. Debemos observar que la definición no depende de S . Observemos que el número de ligadura es simétrico, es decir,

$$\text{link}(\gamma, \delta) = \text{link}(\delta, \gamma).$$

Además, decimos que γ y δ **no ligan** si existe S en las condiciones de la definición tal que

$$\gamma \cap S = \emptyset.$$

Una consecuencia de la definición es que si γ y $\tilde{\gamma}$ son homólogos (esto es, si existe una deformación homotópica que lleva γ en $\tilde{\gamma}$) en $\mathbb{R}^3 \setminus \delta$, entonces

$$\text{link}(\gamma, \delta) = \text{link}(\tilde{\gamma}, \delta).$$

Una vez recordados los preliminares topológicos, vamos a pasar a establecer la notación necesaria para la demostración del Lema.

En lo que queda de Sección, consideramos \mathcal{A} un anillo topológico y $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Sigma = \psi(\mathcal{A}) \in S_{PM}^c(L)$ es una superficie propiamente embebida, parametrizada como $\mathbb{S}^1 \times [0, +\infty)$.

Definición 2.8:

Un vector unitario normal $v \in \mathbb{S}^2$ es un **vector axial** para $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ si existe una sucesión $\{p_n\}$ de puntos de Σ con $|p_n| \rightarrow +\infty$ tales que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n/|p_n| = v$.

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el resultado.

Lema 2.3 (Lema de Separación):

Sea $\Sigma \in \mathcal{S}_{PM}^c(L)$ un anillo propiamente embebido en \mathbb{R}^3 . Sean P_1 y P_2 dos planos paralelos a distancia estrictamente mayor que $\text{diam}_{PM}^c(L)$. Denotemos por P_1^+ y P_2^+ a los semiespacios disjuntos determinados por estos planos. Entonces todas las componentes conexas de $\Sigma \cap P_1^+$ o $\Sigma \cap P_2^+$ son compactas.

Demostración. Supongamos que tanto $\Sigma \cap P_1^+$ como $\Sigma \cap P_2^+$ tienen componentes no compactas. Entonces podemos encontrar arcos propios $\alpha_i : [0, +\infty) \rightarrow \Sigma \cap P_i^+$ para $i = 1, 2$. Denotemos por $p_i = \alpha_i(0) \notin \partial\Sigma$, para $i = 1, 2$.

Ahora, no es difícil ver que podemos elegir un arco embebido β uniendo p_1 con p_2 tal que el arco $\delta = \alpha_1 \cup \beta \cup \alpha_2$ acote un dominio simplemente conexo.

Denotemos por P al plano vertical que se encuentra a la misma distancia de P_1 y P_2 . Sea B una bola geodésica en \mathbb{R}^3 conteniendo a β y C un círculo en P verificando las siguientes condiciones

- $C \cap B = \emptyset$ y B tiene intersección no vacía con el disco en P acotado por C .
- El entorno tubular T de C de radio $r > \text{diam}_{PM}^c(L)/2$ es embebido y $T \cap B = \emptyset$.
- Tomamos r tal que T está contenido en la banda determinada por los planos P_1 y P_2 .

Sea B_1 una bola geodésica en \mathbb{R}^3 conteniendo a $B \cup T$. Por ser Σ propia, existen puntos $x_i \in \alpha_i \setminus B_1$, para $i = 1, 2$, y un arco γ uniendo x_1 y x_2 , embebido en Σ , verificando las siguientes condiciones

- $\gamma \cap B_1 = \emptyset$.
- Si denotamos por ρ el subarco de δ uniendo x_1 y x_2 , entonces el lazo $\sigma = \rho \cup \gamma$ verifica $\text{link}(\sigma, C) = \pm 1$, es decir, podemos encontrar una deformación homotópica del lazo Σ en Σ que corte al interior del disco acotado por C una sola vez.
- σ acota un disco compacto D en Σ .

Luego $T \cap D$ contiene un disco D_1 tal que $\partial D_1 \subset \partial T$ y tal que $\text{link}(\partial D_1, C) = \pm 1$.

Consideremos el recubridor universal de T , $\Pi : \tilde{T} \rightarrow T$ y levantemos el disco D_1 a un disco compacto $\tilde{D}_1 \subset \tilde{T}$. Topológicamente T es $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ y D_1 es isotópico a algún

$\mathbb{D} \times \{\text{punto}\}$. Por tanto, \tilde{T} es topológicamente $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ y \tilde{D}_1 es isotópico a algún $\mathbb{D} \times \{\text{punto}\}$. En particular, \tilde{D}_1 separa \tilde{T} en dos componentes conexas. Denotemos por W a la componente hacia la que apunta el vector curvatura media.

Sea \tilde{C} la curva en \tilde{T} que se proyecta en C mediante Π . Para cada punto $p \in C$, denotemos por $\Sigma_0(p)$ a la superficie rotacionalmente simétrica centrada en p dada por el Teorema de Alexandrov (Corolario 2.2). Es claro que, si el radio de C es suficientemente grande, $\Sigma_0(p)$ está contenida en T para todo $p \in C$. Para cualquier $\tilde{p} \in \tilde{C}$, denotemos por $\tilde{\Sigma}_0(\tilde{p})$ a la superficie compacta que se proyecta en $\Sigma_0(p)$ por Π , donde $\Pi(\tilde{p}) = p$.

Ahora, es claro que podemos encontrar un punto $\tilde{q} \in \tilde{C}$ tal que $\tilde{\Sigma}_0(\tilde{q})$ esté contenida en W y sea disjunta de \tilde{D}_1 . Movamos \tilde{q} a lo largo de \tilde{C} hacia \tilde{D}_1 , hasta un primer punto de contacto \tilde{q}_1 en el cual $\tilde{\Sigma}_0(\tilde{q}_1)$ y \tilde{D}_1 son tangentes. Entonces $\tilde{\Sigma}_0(\tilde{q}_1)$ está contenido en W y, en el punto de tangencia, $\tilde{\Sigma}_0(\tilde{q}_1)$ y \tilde{D}_1 tienen el mismo vector normal. Por lo tanto, como verifican el Principio del Máximo, ambas deberían coincidir. Pero esto supone una contradicción, con lo cuál estaría probado el Lema. \square

En lo que sigue, usaremos los resultados que hemos obtenido para conseguir la acotación cilíndrica de los anillos propiamente embebidos, aunque debemos especificar qué entendemos por acotación cilíndrica.

Dado un punto $p \in \mathbb{R}^3$ y $R > 0$, denotamos por $\mathcal{D}(p, R)$ al disco centrado en p de radio R . Además, dada una dirección $v \in \mathbb{S}^2$, denotaremos por $\mathcal{C}(p, v, R)$ al cilindro de radio R , centro p en la dirección de v , como el conjunto

$$\mathcal{C}(p, v, R) = \left\{ y + sv \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}, y \in \mathcal{D}(p, R) \right\}.$$

Llamaremos a $\mathcal{C}^+(p, v, R)$ al semicilindro centrado en p , de radio R en la dirección de v , y esta dado como el conjunto

$$\mathcal{C}^+(p, v, R) = \left\{ y + sv \in \mathbb{R}^3 : s > 0, y \in \mathcal{D}(p, R) \right\}.$$

Estamos en condiciones de demostrar:

Teorema 2.4 (Acotación cilíndrica):

Sea $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un anillo propiamente embebido tal que $\Sigma = \psi(\mathcal{A}) \in \mathcal{S}_{p_M}^c(L)$. Entonces existe un vector axial v y un radio $R < \infty$ tal que $\Sigma \subset \mathcal{C}(O, v, R)$, siendo O el origen de \mathbb{R}^3 .

Demostración. Sean $p_n \in \Sigma$ una sucesión de puntos en la superficie tal que $|p_n| \rightarrow +\infty$ y $p_n/|p_n| \rightarrow v$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Es decir, v es un vector axial. Es clara la existencia de dicho vector ya que $p_n/|p_n| \in \mathbb{S}^2$, que es compacta, y por tanto al menos una

subsucesión de $p_n/|p_n|$ debe converger. Además, cuando terminemos de demostrar que la superficie es cilíndricamente acotada, será claro que dicho vector axial es único.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que un vector axial de Σ es e_3 . Sea B una bola geodésica de radio $r > 2h_{PM}^c(L)$ que contiene al borde del anillo, $\partial\Sigma \subset B$.

Tomemos P un plano paralelo al eje axial y disjunto de B . Sea P_ε un plano inclinado respecto de P que forma un ángulo ε con respecto a éste y tal que $B \cap P_\varepsilon = \emptyset$.

Como la sucesión p_n verifica que $\text{dist}(p_n, P_\varepsilon) \rightarrow +\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$, el Lema de Separación y las Estimaciones de Altura implican que todas las componentes conexas de Σ que están en el semiespacio que determina P_ε que no contiene a B son compactas. De nuevo, usando las Estimaciones de Altura, estas componentes compactas están a una distancia acotada de P_ε .

Haciendo tender $\varepsilon \rightarrow 0$, concluimos que las componentes de Σ que están en el semiespacio determinado por P que no contiene a B están a una distancia uniformemente acotada de éste. Por tanto, moviendo P a esta distancia C fija, obtenemos que Σ está completamente contenida en el semiespacio determinado por P que contiene a B .

Pero esto lo podemos hacer para cualquier plano paralelo al eje axial, y la distancia C es la misma para todos, lo cuál implica que Σ está cilíndricamente acotada. \square

Anteriormente justificamos cómo podemos extender el Método de Alexandrov a dominios no compactos de una superficie. Lo que veremos a continuación es cómo aplicarlo a finales tipo anillo de una superficie propiamente embebida.

En este punto ya conocemos que todo final tipo anillo está contenido en un semi-cilindro centrado en un vector axial. Salvo una isometría, podemos suponer que dicho semi-cilindro es $\mathcal{C}^+(R) = \mathcal{C}^+(0, e_3, R)$. Denotemos por $E \subset \Sigma$ al final tipo anillo. Además, supondremos que el borde de E está contenido en el xy -plano. Sea $\Omega(N)$ la componente de E contenida en $\mathcal{C}(R)$. Lo que demostraremos a continuación es que el primer punto de reflexión ocurre en el borde de E . Esta afirmación parece sorprendente por ser E no acotado, y su primer punto de contacto podría estar en *infinito*. Para demostrarlo usaremos planos inclinados respecto del vector axial, para los cuales el resultado parece más natural debido a la acotación cilíndrica del final. Así, decreciendo la inclinación hasta nuestro plano original, obtenemos el resultado.

Sea P un plano paralelo al vector axial e_3 , y consideremos $h(p) = \langle p, e_3 \rangle$ la **función altura** respecto del xy -plano. Definimos la **función de Alexandrov asociada al final** E como

$$\alpha(x) = \max \{ \alpha_1(p) : p \in P, h(p) = x \}, \quad (2.10)$$

donde α_1 es la función de Alexandrov asociada a P y está dada por (2.7).

Ahora, estamos en condiciones de probar lo que hemos anunciado.

Lema 2.4:

Sea $E \subset \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ un final tipo anillo de una superficie propiamente embebida con $\Sigma \in S_{PM}^c(L)$ tal que $E \subset \mathcal{C}(R)$. Sea P un plano paralelo al vector axial e_3 . Entonces, se da una de las dos siguiente posibilidades:

- $\alpha(x)$ es estrictamente decreciente.
- Σ tiene un plano de simetría paralelo a P .

Demostración. Para probar el Lema es suficiente demostrar que α es no creciente, ya que, en este caso, es o bien estrictamente decreciente o constante en algún intervalo. En el segundo caso, por el Lema 2.1, obtenemos la existencia de un plano de simetría paralelo a P .

Para demostrar que α es no creciente, es suficiente demostrar que $\alpha(x) \leq \alpha(0)$ para todo $x > 0$, ya que por una traslación y redefiniendo el final, la sección $\{x = 0\}$ la podemos elegir arbitrariamente.

Afirmación 1: $\alpha(x) \leq \alpha(0)$ para todo $x > 0$ es equivalente a

$$\left(\tilde{E}(t) \cap \{x > 0\}\right) \subset \overline{W}, \quad (2.11)$$

para todo $t > \alpha(0)$.

Demostración Afirmación 1: Si $\alpha(x) \leq \alpha(0)$ para todo $x > 0$, de la definición de función de Alexandrov, es claro que

$$\left(\tilde{E}(t) \cap \{x > 0\}\right) \subset \overline{W},$$

para todo $t > \alpha(0)$.

Si

$$\left(\tilde{E}(t) \cap \{x > 0\}\right) \subset \overline{W}$$

para todo $t > \alpha(0)$, veremos que $\alpha(x) \leq \alpha(0)$ para todo $x > 0$ por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x_0 > 0$ y $p \in P$, con $h(p) = x_0$, tal que $\alpha_1(p) = \alpha(x) = t_0 > \alpha(0)$. Si algún entorno de $\tilde{E}(t_0)$ conteniendo a $\tilde{p}_1(p)$ estuviese contenido en \overline{W} , el Principio del Máximo nos diría que $P(t_0)$ es un plano de simetría de E , pero esto es imposible ya que $t > \alpha(0)$.

En consecuencia, por la Afirmación 1, es suficiente demostrar (2.11). Para demostrar (2.11) introduciremos planos inclinados. Sea v el vector normal a P , y denotemos $v_\varepsilon = v - \varepsilon e_3$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Sea P_ε el plano (inclinado respecto de P) cuyo vector normal es v_ε . Claramente, $P_\varepsilon \rightarrow P$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Si reflejamos $E \cap P_\varepsilon^+(t)$ respecto de los planos $P_\varepsilon(t)$, la correspondiente función de Alexandrov α_1^ε debe alcanzar su máximo en el borde, ya que ningún plano paralelo a

P_ε puede ser un plano de simetría de E , α_1^ε no tiene máximos interiores, y $\alpha^\varepsilon(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ debido a la inclinación.

Sea z_ε el valor del máximo en el borde de α_1^ε . Entonces hemos obtenido que

$$\left(\tilde{E}_\varepsilon(t) \cap \{x \geq 2R\varepsilon\}\right) \subset \overline{W} \quad (2.12)$$

para todo $t \geq z_\varepsilon$. La condición técnica $x \geq 2R\varepsilon$ implica que la proyección de puntos de $\tilde{E}_\varepsilon(t)$ en P_ε está en el dominio de definición de α_1^ε .

Así, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$, de (2.12) tenemos que

$$\left(\tilde{E}(t) \cap \{x > 0\}\right) \subset \overline{W} \quad (2.13)$$

para todo $t \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} z_\varepsilon$. Pero α_1 es semicontinua superiormente, y por tanto

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} z_\varepsilon \leq \alpha(0)$$

con lo cuál queda demostrado el resultado. \square

Con estos resultados en la mano, estamos en condiciones de establecer el Teorema más importante de esta Sección. En dicho resultado seremos capaces de controlar la forma de la superficie en términos de sus finales. Explícitamente,

Teorema 2.5:

Sea $\Sigma \in \mathcal{S}_{PM}^c(L)$ una superficie propiamente embebida de topología finita en \mathbb{R}^3 . Entonces, cada final E_1, \dots, E_k está cilíndricamente acotado. Además, si a_1, \dots, a_k son los vectores axiales correspondientes a cada final, no pueden estar contenidos en un hemisferio abierto de \mathbb{S}^2 . En particular,

- $k = 1$ es imposible.
- Si $k = 2$, entonces Σ está contenida en un cilindro y Σ es rotacionalmente simétrica respecto de una recta paralela al eje del cilindro.
- Si $k = 3$, entonces Σ está contenida en una banda determinada por dos planos paralelos.

Demostración. Si Σ es una superficie propiamente embebida de topología finita, entonces todos los finales son de tipo anillo. Luego, el Teorema de Acotación cilíndrica nos da la primera afirmación.

Sean $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{S}^2$ los vectores axiales de cada uno de los finales. Supongamos que todos están contenidos en un hemisferio abierto que, salvo una isometría, podemos suponer que es $\mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\}$. Sea P el xy -plano con vector normal $e_3 = (0, 0, 1)$.

Consideremos $P(t)$ la foliación asociada a P (ver Definición 2.5). Al estar todos los vectores axiales apuntando *hacia arriba*, podemos tomar $\bar{t} < 0$ suficientemente grande tal que $P(\bar{t}) \cap \Sigma = \emptyset$. Ahora, hacemos crecer $t > \bar{t}$ hasta un primer punto de contacto con la superficie. Observemos que dicho primer punto no puede ser en *infinito* ya que los vectores axiales apuntan hacia arriba.

Entonces, comenzamos a hacer reflexión con los planos $P(t)$. Sea $t_1 > \bar{t}$ el valor de t donde tiene el primer punto de contacto, entonces para $t > t_1$, con t suficientemente próximo a t_1 , la reflexión de la parte de Σ que queda por debajo de $P(t)$ es un grafo sobre $P(t)$. Si hacemos crecer t , la parte de Σ que queda por debajo de $P(t)$ sigue siendo grafo, ya que de otra forma o bien encontramos un primer punto de contacto de la superficie con su reflejada, o bien la parte reflejada dejaría de ser grafo y entonces la superficie y su reflejada tendrían un punto de tangencia en el borde, luego el Principio del Máximo nos diría que la superficie tiene que ser compacta, lo cual es absurdo. Por tanto, cuando hacemos tender $t \rightarrow +\infty$ no podemos encontrar ningún problema, y la parte reflejada de Σ respecto del plano $P(t)$ es un grafo sobre un dominio de $P(t)$. Pero así, llegaríamos a una contradicción con las Estimaciones de Altura.

Por consiguiente, la segunda afirmación estaría probada.

Veamos la parte relativa al número de finales.

■ $k = 1$:

Es claro de la segunda afirmación, ya que si sólo tiene un final, siempre va a estar contenido en un cierto hemisferio abierto.

■ $k = 2$:

Como a_1 y a_2 no pueden estar contenidos en un hemisferio abierto, entonces $a_1 = -a_2$, y por lo tanto Σ está contenida en un cilindro centrado en un cierto punto, de un cierto radio y eje a_1 . Salvo una isometría podemos suponer que $a_1 = e_3$, y Σ está contenido en $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, R, e_3)$ donde O es el origen en \mathbb{R}^3 . Sea P el xy -plano. Denotemos por $E_1 = \Sigma \cap P^+$ y $E_2 = \Sigma \cap P^-$ a los finales anulares de la superficie.

Denotemos por Q a un plano paralelo al eje de \mathcal{C} , y sea α^i , $i = 1, 2$, la función de Alexandrov asociada a cada final E_i , $i = 1, 2$ (ver (2.9)). Por el Lema 2.4 aplicado a cada final, o Q tiene un plano paralelo de simetría de Σ , o α_1 alcanza un máximo local en un punto p de $\Sigma \cap \{z = 0\}$. En este último caso, el Lema 2.1 también nos dice que Q tiene un plano paralelo de simetría de Σ .

Pero este razonamiento lo podemos hacer para cualquier plano paralelo respecto del eje de \mathcal{C} . Por tanto, todos los planos de simetría deben intersectarse en una recta paralela al eje, y Σ es rotacionalmente simétrica respecto a esta recta.

■ $k = 3$:

En este caso, los tres vectores axiales correspondientes a los finales tienen que estar contenidos en el mismo círculo máximo de la esfera. De otra forma podríamos encontrar un hemisferio abierto en el que están contenidos, lo que supondría una contradicción.

Luego, de este hecho es claro que la superficie está contenida en una banda determinada por dos planos paralelos.

□

2.5. Superficies de Weingarten

En esta Sección abordaremos el estudio de superficies especiales de Weingarten en los espacios modelo. Antes de nada aclararemos cuáles son estas superficies.

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie del espacio euclídeo (como viene siendo habitual sólo desarrollaremos los conceptos en \mathbb{R}^3 , dejando la extensión a los demás espacios modelo). Entonces, en cada punto $p \in \Sigma$, las curvaturas principales de definen de forma única bajo la condición

$$k_1(p) \geq k_2(p).$$

Luego, las funciones k_i , $i = 1, 2$, llevan Σ en el semiespacio cerrado de \mathbb{R}^2 que queda por debajo de la diagonal $x = y$. Es decir, si denotamos por

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y \right\},$$

entonces la aplicación

$$\begin{aligned} W : S &\longrightarrow \mathcal{D} \\ p &\longmapsto (k_1(p), k_2(p)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

lleva Σ en una región del (k_1, k_2) -plano que queda por debajo de la diagonal $k_1 = k_2$. Así, llamaremos a la imagen de S por W como el **diagrama de curvatura de Σ** .

Es casi inmediato observar que, como k_i , $i = 1, 2$, son funciones de H y K , $W(k_1, k_2) = 0$ implica que existe una relación del tipo $B(H, K) = 0$. No obstante, como la diferenciabilidad de W con respecto a k_i , $i = 1, 2$, no implica necesariamente la diferenciabilidad de U en los puntos de la diagonal $k_1 = k_2$ (es decir, en los puntos donde $q = H^2 - K = 0$) pediremos la hipótesis adicional de que B es también diferenciable en dichos puntos.

Definición 2.9:

Una **superficie de Weingarten** (o W -superficie) en \mathbb{R}^3 es una superficie Σ cuyo diagrama de curvatura es una curva en \mathcal{D} dada por la ecuación

$$W(k_1, k_2) = 0.$$

Como un ejemplo sencillo de lo que estamos diciendo, podemos observar que toda superficie de revolución es una superficie de Weingarten, ya que la imagen de un meridiano de la superficie cubre todo el diagrama de curvatura de la superficie, la cual es por tanto una curva.

Autores como S.S. Chern [21], Hartman y Winter [52] o Hopf [58] estudiaron este tipo de superficies cuando éstas tienen género cero, es decir, cuando son esferas topológicas, obteniendo que, bajo ciertas condiciones en el operador W , dicha superficie es totalmente umbilical.

Observemos además que las líneas $k_1 + k_2 = cte$ y $k_1 - k_2 = cte$ definen un nuevo sistema de coordenadas en \mathcal{D} . Por tanto, es claro que en este sistema de coordenadas, la curva puede escribirse, bajo ciertas hipótesis en el operador W en los puntos $k_1 = k_2$, como

$$k_1 + k_2 = f(k_1 - k_2),$$

pero lo escribiremos de la forma más natural

$$H = f(q),$$

donde la función f está definida en $[0, +\infty)$.

A partir de este momento, centramos nuestra atención en las superficies de Weingarten que verifican la relación $H = f(q)$, donde H es la curvatura media de la superficie y $q = H^2 - K$ la curvatura asimétrica. Además, pediremos alguna condición sobre f . Hagamos esto preciso.

Definición 2.10:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, diremos que Σ es una superficie **especial de Weingarten** respecto de f , si su curvatura media y curvatura asimétrica se relacionan por

$$H = f(q).$$

Además, asociada a f definimos $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds.$$

Al conjunto de superficies que verifican dicha relación de Weingarten para la misma f lo denotamos por $\mathcal{C}(\Sigma, f)$.

Si recordamos la Definición 1.5 del Capítulo 1 y el hecho de que la Primera y Segunda Forma Fundamental (I, II) de toda superficie inmersa en un espacio modelo es un par de Codazzi, podemos reinterpretar esta definición como $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$. Además, dada $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie especial de Weingarten respecto de f , consideremos el par fundamental, que denotaremos por $(I(\varphi), II(\varphi))$, dado por el giro de (I, II) respecto de $(\varphi(\sqrt{q}), -\varphi(\sqrt{q}))$ (véase Sección 1.6).

Llegados a este punto podemos decir que, bajo condiciones bastante débiles, estas superficies cumplen un Teorema tipo Hopf. En efecto, si recordamos el Corolario 1.2 del Capítulo 1, tenemos que

Teorema 2.6 (Teorema Tipo Hopf):

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\varphi(0) = 0$. Consideremos el par fundamental $(I(\varphi), II(\varphi))$ dado por el giro de (I, II) respecto de $(\varphi(\sqrt{q}), -\varphi(\sqrt{q}))$.

Entonces, Σ verifica la relación de Weingarten $H = f(q)$, donde $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable dada por

$$2f'(t) = \varphi'(\sqrt{t}),$$

si, y sólo si, $Q(\varphi)$ es holomorfa respecto de la estructura dada por $I(\varphi)$.

En particular, si Σ es una esfera topológica entonces es totalmente umbilical. Y si Σ es un toro entonces es libre de puntos umbilicales.

Demostración. Se sigue inmediatamente del Corolario 1.2 del capítulo 1. □

Este hecho ya fue notado por H. Hopf [58] o R. Bryant [18]. Es decir, R. Bryant dio una de las implicaciones del Teorema anterior, es decir, demostró que $Q(\varphi)$ es holomorfa para la estructura conforme inducida por $I(\varphi)$, pero no el recíproco.

Además, del Corolario 1.4 del Capítulo 1 también podemos decir que éstas superficies verifican un Teorema tipo Bonnet. Bonnet demostró que dadas dos esferas topológicas con la misma Primera Forma Fundamental y la misma curvatura media, entonces las superficies difieren en una congruencia. En nuestro contexto tenemos

Teorema 2.7 (Teorema Tipo Bonnet):

Sean $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies de género cero y $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

Supongamos que

- $H_1 - H_2 = f(q_1) - f(q_2)$,
- $I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$,

donde $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ esta dada por

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds,$$

y $I_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, es la métrica dada por la fórmula (1.146) del Capítulo 1.

Entonces, bajo estas condiciones existe una congruencia $\chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Sigma_1 = \chi(\Sigma_2)$

En particular, el Teorema de Bonnet lo tenemos cuando $f \equiv 0$.

Ciertos casos particulares de este resultado pueden verse en [105]. Además, del mismo Corolario 1.4 del Capítulo 1, obtenemos de manera sencilla el Teorema de Rigidez de Ovaloides, es decir, dadas dos superficies en \mathbb{R}^3 con la misma Segunda Forma Fundamental y curvatura extrínseca positiva, entonces difieren en un movimiento rígido (ver [49]).

El papel del valor de f en cero juega un papel importante. Si $f(0) \neq 0$ veremos que la superficie se comporta como una superficie con curvatura media constante no nula. En cambio, si $f(0) = 0$ la superficie se comporta como una minimal. Observemos que si $f(0) \neq 0$ entonces hay una esfera de radio $1/|f(0)|$ dentro de la familia. Por otra parte, si $f(0) = 0$ entonces hay un plano en dicha clase.

2.5.1. Superficies especiales de tipo elíptico

Ahora, veremos qué tipo de ecuación diferencial verifica una superficie especial de Weingarten, es decir, veremos qué condiciones le tenemos que imponer a f para que las superficies dentro de esta clase verifiquen el Principio del Máximo, y así poder aplicar los resultados de la Sección 2.4.

Para ello seguiremos el desarrollo que hicieron H. Rosenberg y R. Sa Earp en [93]. En dicho artículo, los autores trabajan en cualquier espacio modelo, y como podemos ver en él, el espíritu es el mismo en cada uno de los espacios, lo que hace que nos inclinemos por desarrollarlo sólo en \mathbb{R}^3 por claridad.

No nos detendremos en los detalles de esta parte: para una mejor aproximación nos referimos a los trabajos [89] y [92]. De hecho, con el mismo esfuerzo haremos el siguiente razonamiento para hipersuperficies.

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ una hipersuperficie especial de Weingarten respecto a f con campo normal unitario N . Sea $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ y $\Sigma(t)$ una variación de Σ , con $\Sigma(0) = \Sigma$, resultante del campo normal ϕN . Para cada $1 \leq r \leq n$, sea S_r la r -ésima función simétrica de Σ , es decir, la r -ésima función simétrica de sus curvaturas principales. Denotemos por T_r al r -ésimo tensor de Newton de Σ , es decir,

$$\begin{aligned} T_0 &= I \\ T_r &= S_r I - A T_{r-1}, \end{aligned}$$

donde A es el endomorfismo de Weingarten de Σ . Además, la curvatura r -ésima viene dada por

$$\binom{n}{r} H_r = S_r.$$

Supongamos que Σ verifica una ecuación del tipo

$$H_1 = f(H_1^2 - H_2).$$

Notemos que para el caso de una superficie, dicha ecuación se traduce en $H = f(q)$.

Derivando esta ecuación con respecto a variaciones normales de la superficie, que denotaremos por $\dot{\cdot}$, llegamos a que estamos tratando con el operador

$$(1 - 2ff')\dot{H}_1 + f'\dot{H}_2.$$

Para poder saber qué tipo de propiedades tiene este operador, tenemos que ver cómo se comportan los términos de segundo orden, o dicho de otro modo, ver qué carácter tiene la parte principal de este operador. La parte principal de \dot{H}_1 es el operador Laplaciano salvo una constante, es decir, es $(1/n)\Delta$, y la parte principal de \dot{H}_2 es $2/(n(n-1))\text{div}(T_1\nabla)$, donde ∇ es el operador gradiente y div el operador divergencia. Por tanto, para el caso $n = 2$, dicha parte principal viene dada entonces por

$$L_f = \left(\frac{1 - 2ff'}{2} \right) \Delta + f' \text{div}(T_1\nabla).$$

Luego, para ver qué tipo de operador, debemos calcular los valores propios. Vamos a restringirnos al caso de una superficie en \mathbb{R}^3 . Para ello, sea $p \in \Sigma$ y tomemos $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal que diagonalice a la Segunda Forma Fundamental, esto es, $\nabla_{e_i}N = -k_i e_i$ para $i = 1, 2$, y tal que $\nabla_{e_i}e_j = 0$ en p . Ahora, si tomamos $\phi \in C^\infty(\Sigma)$, tenemos que

$$\text{div}(T_1\nabla\phi) = k_2e_1(e_1(\phi)) + k_1e_2(e_2(\phi)),$$

de donde obtenemos que los valores propios λ_i , $i = 1, 2$, del operador L_f vienen dados por

$$\lambda_i = \frac{1 - 2ff'}{2} + k_i f', \quad i = 1, 2.$$

En consecuencia, es inmediato obtener que la traza de L_f es 1 y su determinante es $1/4 - tf'(t)^2$, de modo que los valores propios λ_i son ambos positivos cuando $1 > 4tf'(t)^2$.

Definición 2.11:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie especial de Weingarten respecto de f . Decimos que es de tipo **elíptico o elíptica** si

$$1 > 4tf'(t)^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Ahora, la condición para que el operador L_f sea elíptico es equivalente a que la ecuación $H_1 = f(H_1^2 - H_2)$ sea elíptica (ver [58]), y por tanto las soluciones de dicha ecuación verifican el Principio de Máximo Interior y Frontera. Para más detalles a este respecto véase [15], donde los autores prueban que se verifica el Principio del Máximo Interior y Frontera. Aquí recordaremos dichos resultados por completitud.

Teorema 2.8 (Principio del Máximo Interior y Frontera):

Sean $\Sigma_i \subset \mathbb{R}^3$ superficies que tienen un punto de tangencia interior o frontera común $p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Supongamos que Σ_1 está por encima de Σ_2 y ambas verifican que son especiales de Weingarten de tipo elíptico para la misma función f y para la misma orientación del vector normal. Entonces $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$.

Esto nos permite enunciar un Teorema Tipo Alexandrov. Este hecho fue primero observado por Hopf [58], y más tarde por Meeks (ver comentario en [96, pág. 672]) en toda su generalidad.

Teorema 2.9 (Teorema Tipo Alexandrov):

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie especial de Weingarten elíptica, compacta, embebida y sin borde. Entonces Σ es necesariamente una esfera de radio $1/|f(0)|$.

Este tipo de superficies de Weingarten son las que más aportaciones han tenido. Por ejemplo, en [15] se estudian superficies especiales de Weingarten elípticas del tipo topológico de un disco y cuyo borde es una circunferencia, generalizando resultados en [16] y [17] para superficies con curvatura media constante de tipo disco y borde una circunferencia. Concretamente, se demuestra que si $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie especial de Weingarten de tipo elíptico que es un disco topológico cuyo borde $\partial\Sigma$ es un círculo de radio 1, entonces $f(0) \leq 1$, y si $f(0) = 1$ Σ es una semiesfera.

Esto es debido precisamente a que verifican el Principio del Máximo, y por lo tanto podemos extender muchos de los resultados conocidos para curvatura media constante ya que podemos aplicar el Método de Alexandrov (ver Sección 2.2). Como vimos en la Sección 2.3, conociendo que una clase de superficies verifica el PM y que existe una esfera embebida en la familia podemos extender los resultados de Korevaar-Kusner-Meeks-Solomon para superficies con curvatura media constante ([66], [73], [65]) a superficies especiales de Weingarten. Esto lo hicieron Roseberg y Sa Earp [93], aunque no en toda la generalidad que veremos en el siguiente resultado. La razón es que una de las herramientas fundamentales para extender estos resultados es las estimaciones de altura, y en el citado artículo los autores utilizaron un método analítico para obtenerlas, teniendo que imponer más condiciones a la función f con respecto a la cuál la superficie es especial de Weingarten.

Teorema 2.10 (Acotación cilíndrica):

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie especial de Weingarten de tipo elíptico con $f(0) > 0$, propiamente embebida y de topología finita. Entonces, cada final E_1, \dots, E_k está cilíndricamente acotado. Además, si a_1, \dots, a_k son los vectores axiales correspondientes a cada final, no pueden estar contenidos en un hemisferio abierto de \mathbb{S}^2 . En particular,

- $k = 1$ es imposible.
- Si $k = 2$, entonces Σ está contenida en un cilindro y Σ es rotacionalmente simétrica respecto de una recta paralela al eje del cilindro.
- Si $k = 3$, entonces Σ está contenida en una banda determinada por dos planos paralelos.

Demostración. La demostración se sigue del hecho de que estas superficies verifican el Principio del Máximo y que existe una esfera embebida dentro de la familia. \square

En particular, las superficies de revolución han sido ampliamente estudiadas por R. Sa Earp y E. Toubiana en [96]. Vamos a recordar brevemente los resultados obtenidos en [96] y cómo usarlos combinados con el Teorema 2.10.

El primero de ellos es el siguiente, del cuál haremos uso

Teorema 2.11:

Si $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie especial de Weingarten elíptica respecto a f , completa y cuya curvatura de Gauss se anula sobre la superficie, entonces Σ es un plano si $f(0) = 0$ o un cilindro recto si $f(0) \neq 0$.

Demostración. Como $K(I) = 0$, se tiene que sobre la superficie se verifica $H - f(H^2) = 0$. Ahora, como la superficie es de tipo elíptico, la función $h(t) = t - f(t^2)$ es estrictamente creciente y por tanto tiene un único cero. Luego H tiene que ser constante y Σ es un plano si $f(0) = 0$ o un cilindro si $f(0) \neq 0$. \square

En [28], C. Delaunay clasificó las superficies de revolución con curvatura media constante. Aparte de esferas y cilindros rectos, descubrió una familia 1-paramétrica de superficies embebidas que son topológicamente un cilindro, hoy en día conocidas como superficies de Delaunay. En [96], los autores estudian superficies especiales de Weingarten elípticas con $f(0) > 0$ de revolución, dando condiciones necesarias y suficientes para la existencia de dichas superficies. Las que son de tipo minimal fueron tratadas en [95] y [98].

El resultado que necesitamos recordar de dicho trabajo concerniente a las superficies de revolución es el siguiente

Teorema 2.12:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie especial de Weingarten elíptica con $f(0) > 0$, completa, embebida y de revolución. Entonces Σ es necesariamente uno de los ondonoides especiales dados en [96, Théorème 1].

Ahora estamos en condiciones de aplicar este resultado junto con el Teorema 2.10 para obtener una generalización del [96, Corollaire 2].

Teorema 2.13:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie especial de Weingarten de tipo elíptico con $f(0) > 0$, propiamente embebida, de topología finita y con dos finales. Entonces Σ es necesariamente uno de los ondonoides especiales dados en [96, Théorème 1].

En dicho trabajo se plantearon algunas cuestiones para superficies especiales de Weingarten de tipo elíptico que se comportan como una superficie de curvatura media constante. Debido a su aparente analogía con las superficies de curvatura media constante, las preguntas planteadas se refieren a si resultados conocidos para curvatura media constante son generalizables a éstas. Aquí resolveremos alguno de ellos.

Teorema 2.14:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa, especial de Weingarten de tipo elíptico. Si $K(I) \leq 0$, entonces Σ es de tipo minimal, esto es $f(0) = 0$, o un cilindro recto.

Demostración. Si $f(0) = 0$, es de tipo minimal. Supongamos $f(0) = c_0 \neq 0$, entonces existen $\delta_0, \varepsilon_0 > 0$ tales que $f([0, \delta_0]) \subset [c_0 - \varepsilon_0, c_0 + \varepsilon_0]$ (por continuidad de f) donde $[c_0 - \varepsilon_0, c_0 + \varepsilon_0]$ es un intervalo que no contiene al cero. Denotemos por $\bar{\Omega} = \{p \in \Sigma; q(p) \in [0, \delta_0]\}$. Si tomamos

$$\alpha_0 = \min \{ \delta_0, \min_{\bar{\Omega}} f(q)^2 \} > 0$$

entonces

$$q \geq \alpha_0 > 0$$

sin más que tener en cuenta que $q \geq f(q)^2$ debido a que $K(I) \leq 0$.

Ahora, usando los Lemas 1.7 y 1.9 del Capítulo 1, tenemos que $\lambda = \ln(q)$ es una sub-solución del operador elíptico L_f acotada inferiormente por una constante positiva en una superficie parabólica, y por lo tanto tiene que ser constante. Luego, usando de nuevo el Lema 1.7, $K(I) \equiv 0$, en consecuencia la superficie tiene que ser un cilindro recto por el Teorema 2.11. □

Este resultado puede verse como una generalización de [64, Proposition 1]. Y también,

Teorema 2.15:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa especial de Weingarten con $H = f(q)$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} < 1.$$

Si $K \geq 0$, entonces Σ es una esfera, un plano o un cilindro recto. En particular, el resultado es cierto para toda superficie especial de Weingarten de tipo elíptico.

Demostración. Sólo es necesario ver que q está acotada superiormente; el resto se sigue de [64, Proposition 2].

Lo primero que debemos notar es que $0 \leq K = f(t)^2 - t$, donde $t = q$, y por tanto para t distinto de cero tenemos que

$$f(t)^2/t \geq 1.$$

Supongamos que $t \rightarrow +\infty$. Entonces por la hipótesis sobre el límite de f , llegaría un momento donde $f(t)^2 < t$, lo cuál es absurdo. Así, q está acotada superiormente.

Por último, si Σ es de tipo elíptico, entonces f tiene una asíntota horizontal, y por tanto cumple las condiciones del Teorema. \square

Ambos resultados dan respuesta a la primera cuestión planteada por Sa Earp y Toubiana en [96, pág. 699]:

?Una superficie especial de Weingarten elíptica Σ cuya curvatura no cambie de signo debe ser la esfera (si $K > 0$) o una superficie de tipo minimal (si $K \leq 0$)?

Capítulo 3

Espacios Producto

3.1. Generalidades

A lo largo de este Capítulo trataremos con una variedad 3–dimensional $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ dada por el producto de una superficie riemanniana sin borde \mathbb{M}^2 , a la que llamaremos *base*, y la recta real \mathbb{R} , llamada *fibra*. Lo primero que haremos aquí será repasar algunas de las propiedades básicas de un espacio producto, como son sus geodésicas, tensor de curvatura, etc. [86, Chapter 3, pag. 89].

Un caso especial de este tipo de variedades es cuando consideramos que su base sea una superficie simplemente conexa con curvatura constante, esto es, uno de los espacios modelo bidimensionales. Cuando la curvatura de la base es constantemente cero, el espacio producto que obtenemos es el espacio euclídeo tridimensional; por lo tanto, omitiremos dicho caso. Cuando digamos que la curvatura de la base es constante, se entenderá que dicha constante es distinta de cero. Además, podemos suponer que la curvatura es ± 1 . En efecto, si denotamos por g_c a la métrica de curvatura constante c , entonces la métrica $|c|g_c$ tiene curvatura $c/|c|$. Así, tendremos que cuando la curvatura de la base es 1, nuestra base es \mathbb{S}^2 , y cuando es -1 la base es \mathbb{H}^2 . Para agrupar, escribiremos $\mathbb{M}^2(\varepsilon)$, $\varepsilon = 1, -1$, siendo, $\mathbb{M}^2(1) = \mathbb{S}^2$ y $\mathbb{M}^2(-1) = \mathbb{H}^2$.

Sea \mathbb{M}^2 una superficie riemanniana sin borde, cuya métrica denotaremos por g_κ , donde κ es la curvatura de Gauss de g_κ , y consideremos la variedad producto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Sean π y σ las proyecciones sobre la base, \mathbb{M}^2 , y la fibra, \mathbb{R} , respectivamente. Entonces la métrica en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ [86, Lemma 5, pag. 57] viene dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \pi^*(g_\kappa) + \sigma^*(dt^2),$$

donde dt^2 denota la métrica estándar en \mathbb{R} .

Llamaremos **sección horizontal**, $\mathbb{M}^2 \times \{t\} = \sigma^{-1}(t)$, a la preimagen por σ de un punto t de la fibra, y **sección vertical**, $\{p\} \times \mathbb{R} = \pi^{-1}(p)$, a la preimagen por π de un punto p de la base.

Además, es claro que la métrica producto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ verifica

- Para cada $t \in \mathbb{R}$, la aplicación $\pi|_{\mathbb{M}^2 \times \{t\}}$ es una isometría.
- Para cada $p \in \mathbb{M}^2$, la aplicación $\sigma|_{\{p\} \times \mathbb{R}}$ es una isometría.
- Para cada $(p, t) \in \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, la sección horizontal, $\mathbb{M}^2 \times \{t\}$, y la vertical, $\{p\} \times \mathbb{R}$, son ortogonales en (p, t) .

Por comodidad omitiremos las proyecciones, siempre y cuando no haya confusión utilizando dicha notación. Por ejemplo, en adelante escribiremos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = g_\kappa + dt^2.$$

Es claro que la geometría del espacio producto depende fuertemente de la geometría tanto de su base como de su fibra. Para el caso en que la fibra es la recta real, nuestro caso, dicha dependencia es mayor de la geometría de la base que de la fibra. Para ver como dependen una de la otra, una herramienta básica es la noción de *campos horizontales y verticales*, esto es, la proyección en la base y en la fibra, respectivamente, de un campo en la variedad.

Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$ un campo de vectores, tenemos que

$$X(p, t) = (X^h(p), X^v(t)) \in T_{(p,t)}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}) \cong T_p\mathbb{M}^2 \times T_t\mathbb{R}$$

donde $X^h = d\pi(X) \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2)$ y $X^v = d\sigma(X) \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Entonces, decimos que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$ es un **campo horizontal** (resp. **campo vertical**) si $X^v \equiv 0$ (resp. $X^h \equiv 0$).

Si X es un campo horizontal, entonces $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2) \subset \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$, y lo seguiremos denotando por X visto como campo en \mathbb{M}^2 , siempre y cuando no haya confusión con la notación empleada. Análogamente, si Y es un campo vertical, $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$, y lo seguiremos denotando por Y visto como campo en \mathbb{R} .

Denotaremos por $\bar{\nabla}$, $\nabla^{\mathbb{M}^2}$ y $\nabla^{\mathbb{R}}$, las conexiones de Levi-Civita asociadas a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, g_κ y dt^2 respectivamente.

Para estudiar cómo actúa la conexión del ambiente sólo es necesario saber como actúa sobre campos horizontales y verticales. Esto es lo que nos dice el siguiente resultado (ver [86, Proposition 56, pag. 89])

Proposición 3.1:

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2)$ y $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$, entonces

- 1) $\bar{\nabla}_X Y$ es un campo horizontal y $(\bar{\nabla}_X Y)^h = \nabla_X^{\mathbb{M}^2} Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2)$.
- 2) $\bar{\nabla}_V W$ es un campo vertical y $(\bar{\nabla}_V W)^v = \nabla_V^{\mathbb{R}} W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$.

$$3) \bar{\nabla}_V X = 0 = \bar{\nabla}_X V.$$

A partir de este primer resultado, que se obtiene de una manera directa usando las fórmulas de Koszul, podremos estudiar tanto las geodésicas, como la completitud del espacio producto (ver [86, Corollary 57, pag. 89])

Corolario 3.1: 1) Una curva $\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s)) \in \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ es una geodésica si, y sólo si, sus proyecciones $\alpha \in \mathbb{M}^2$ y $\beta \in \mathbb{R}$ son ambas geodésicas.

2) $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ es completa si, y sólo si, \mathbb{M}^2 es completa (notemos que nuestra fibra es la recta real con la métrica usual, que es completa).

Dado un campo horizontal $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2)$, tenemos

$$\langle \bar{\nabla} \sigma, X \rangle = d\sigma(X) = 0$$

donde $\bar{\nabla} \sigma$ denota el gradiente de σ respecto de \langle, \rangle . Por lo tanto $\bar{\nabla} \sigma \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$, que denotaremos en lo que sigue por $\frac{\partial}{\partial t}$, es una base de $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Además, $\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = 1$.

Luego, dado un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$, tenemos

$$X^h = X - \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \frac{\partial}{\partial t}, \quad X^v = \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \frac{\partial}{\partial t}.$$

Obsérvese que $\frac{\partial}{\partial t}$ es un campo paralelo, lo que se sigue de la Proposición 3.1 y de que

$$\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = 0.$$

En efecto, si $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$, tenemos

$$\bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial t} = \bar{\nabla}_{X^h} \frac{\partial}{\partial t} + \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} = 0,$$

luego $\frac{\partial}{\partial t}$ es un campo paralelo.

Ahora veremos cómo se relacionan los tensores de curvatura \bar{R} , $\mathbb{M}^2 R$ y $\mathbb{R} R$ de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, \mathbb{M}^2 y \mathbb{R} respectivamente (ver [86, Corollary 58, pag. 89])

Corolario 3.2:

Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2)$ y $U, V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$. Entonces

1) $\bar{R}_{XY}Z$ es un campo horizontal y $(\bar{R}_{XY}Z)^h = \mathbb{M}^2 R_{XY}Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2)$.

2) $\bar{R}_{UV}W$ es un campo vertical y $(\bar{R}_{UV}W)^v = \mathbb{R} R_{UV}W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$.

3) \bar{R} es cero para cualquier otra elección de X, \dots, W .

De este último Corolario, y sin más que tener en cuenta que ${}^{\mathbb{R}}R \equiv 0$, tenemos

Corolario 3.3:

Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$ y denotemos por $X^h, Y^h, Z^h \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2)$ a sus proyecciones horizontales. Entonces

$$\bar{R}_{XYZ} = {}^{\mathbb{M}^2}R_{X^h Y^h Z^h}$$

3.2. Ecuaciones necesarias

En contra de lo que ocurre en los espacios modelo, las ecuaciones de Gauss y Codazzi no describen completamente el comportamiento de la superficie. Así, lo que haremos en esta Sección será obtener una serie de ecuaciones necesarias, entre ellas las de Gauss y Codazzi, que tiene que cumplir una superficie inmersa en el espacio producto.

Para los casos particulares en que la base es \mathbb{H}^2 o \mathbb{S}^2 (ver [26]), dichas ecuaciones son de hecho las ecuaciones de integrabilidad de la superficie.

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie conexa. Entonces, consideramos sobre Σ la métrica inducida (*Primera Forma Fundamental*), $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$, de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, la cuál denotaremos por I . Sean ∇ y R la conexión y el tensor de curvatura de la superficie respectivamente, y S el endomorfismo de Weingarten de Σ asociado al normal unitario N de la superficie, esto es, $SX = -\nabla_X N$, $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Entonces $II(X, Y) = \langle SX, Y \rangle$ es la *Segunda Forma Fundamental* de la superficie. Además, denotemos por

- 1) $h = \sigma|_\Sigma : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$, la restricción de la proyección sobre la fibra de la superficie. A h la llamaremos **función altura** de la superficie.
- 2) $\nu = \langle N, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$, la componente normal de $\frac{\partial}{\partial t}$. A ν la llamaremos **función ángulo** de la superficie.

Con esta notación tenemos

Lema 3.1:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie conexa, con normal unitario N y endomorfismo de Weingarten asociado S . Sean h y ν la función altura y ángulo, respectivamente, de la superficie, y $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Entonces se verifican las siguientes ecuaciones

$$\text{Gauss} \quad K(I) = K + \kappa \nu^2 \quad (3.1)$$

$$\text{Codazzi} \quad T_S(X, Y) = \kappa \nu (\langle Y, \nabla h \rangle X - \langle X, \nabla h \rangle Y) \quad (3.2)$$

$$\nabla_X \nabla h = \nu SX \quad (3.3)$$

$$d\nu(X) = -\langle SX, \nabla h \rangle \quad (3.4)$$

$$\|\nabla h\|^2 + \nu^2 = 1. \quad (3.5)$$

donde $K(I)$ denota la curvatura de Gauss de I , K la curvatura extrínseca, κ la curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2 en el punto $\pi(p)$, $p \in \Sigma$, y T_S el Tensor de Codazzi asociado a S (ver Definición 1.2).

Demostración. Lo primero que haremos será escribir el campo $\frac{\partial}{\partial t}$ en su parte tangente y normal, esto es

$$\frac{\partial}{\partial t} = T + \nu N$$

donde $T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Ahora, como $\frac{\partial}{\partial t}$ no es más que el gradiente de la proyección sobre la fibra (para la métrica del ambiente), se sigue que T es el gradiente de la proyección restringida a la superficie (con la métrica inducida), es decir, $T = \nabla h$.

Luego, tenemos de forma inmediata que (3.5) se verifica

$$1 = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = \langle \nabla h, \nabla h \rangle + \nu^2 = \|\nabla h\|^2 + \nu^2.$$

Por otra parte, usando que $\frac{\partial}{\partial t}$ es un campo paralelo y que

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \langle SX, Y \rangle N, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\nabla}_X \frac{\partial}{\partial t} = \bar{\nabla}_X (\nabla h + \nu N) = \bar{\nabla}_X \nabla h + d\nu(X) N + \nu \bar{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X \nabla h + \langle SX, \nabla h \rangle N + d\nu(X) N + \nu \bar{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X \nabla h + \langle SX, \nabla h \rangle N + d\nu(X) N - \nu SX \\ &= (\nabla_X \nabla h - \nu SX) + (\langle SX, \nabla h \rangle + d\nu(X)) N. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la parte tangente y normal son ambas cero, de donde obtenemos (3.3) y (3.4) respectivamente.

Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, las ecuaciones de Gauss y Codazzi de una superficie en un espacio tridimensional vienen dadas respectivamente por

$$R_{XYZ} - \bar{R}_{XYZ} = \langle SX, Z \rangle SY - \langle SY, Z \rangle SX \quad (3.6)$$

$$\bar{R}_{XY} N = T_S(X, Y). \quad (3.7)$$

Luego, del Corolario 3.3, y usando que el tensor de curvatura de una superficie siempre se puede expresar como

$$\mathbb{M}^2 R_{X^h Y^h Z^h} = \kappa \left(\langle X^h, Z^h \rangle Y^h - \langle Y^h, Z^h \rangle X^h \right),$$

donde κ es la curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2 en el punto donde estemos trabajando,

tenemos para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{XY}Z &= \mathbb{M}^2 R_{X^h Y^h} Z^h = \kappa \left(\langle X^h, Z^h \rangle Y^h - \langle Y^h, Z^h \rangle X^h \right) \\
 &= \kappa \left((\langle X, Z \rangle - \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle Z, \frac{\partial}{\partial t} \rangle) (Y - \langle Y, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \frac{\partial}{\partial t}) - \right. \\
 &\quad \left. (\langle Y, Z \rangle - \langle Y, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle Z, \frac{\partial}{\partial t} \rangle) (X - \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \frac{\partial}{\partial t}) \right) \\
 &= \kappa \left(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X - \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle Z, \frac{\partial}{\partial t} \rangle Y + \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle Z, \frac{\partial}{\partial t} \rangle Y \right. \\
 &\quad \left. + (\langle Y, Z \rangle \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, \frac{\partial}{\partial t} \rangle) \frac{\partial}{\partial t} \right),
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{XY}Z &= \kappa \left(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X - \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle Z, \frac{\partial}{\partial t} \rangle Y + \langle Y, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle Z, \frac{\partial}{\partial t} \rangle X \right. \\
 &\quad \left. + (\langle Y, Z \rangle \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, \frac{\partial}{\partial t} \rangle) \frac{\partial}{\partial t} \right). \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Así, tomando $Z = N$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ en (3.8)

$$\bar{R}_{XY}N = \kappa \nu (\langle Y, \nabla h \rangle X - \langle X, \nabla h \rangle Y)$$

tenemos, por (3.7), que la ecuación de Codazzi (3.2) se verifica.

Para obtener la ecuación de Gauss lo que hacemos es multiplicar escalarmente por un campo tangente W la ecuación (3.6). Así, de (3.8)

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}_{XY}Z, W \rangle &= \kappa \left(\langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle Z, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle Y, W \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \langle Y, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle Z, \frac{\partial}{\partial t} \rangle \langle X, W \rangle + (\langle Y, Z \rangle \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, \frac{\partial}{\partial t} \rangle) \langle \frac{\partial}{\partial t}, W \rangle \right), \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

y tomando $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ una base ortonormal y haciendo $Z = X$, $W = Y$, (3.9) queda como

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{R}_{XY}X, Y \rangle &= \kappa \left(1 - \langle X, \frac{\partial}{\partial t} \rangle^2 - \langle Y, \frac{\partial}{\partial t} \rangle^2 \right) \\
 &= \kappa (1 - \langle X, \nabla h \rangle^2 - \langle Y, \nabla h \rangle^2) \\
 &= \kappa (1 - \|\nabla h\|^2) = \kappa \nu^2,
 \end{aligned}$$

es decir

$$\langle \bar{R}_{XY}X, Y \rangle = \kappa \nu^2. \tag{3.10}$$

Sólo nos resta notar que, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ linealmente independientes, tenemos

$$\langle R_{XY}X, Y \rangle = K(I)$$

y

$$K = \det S = \langle SX, X \rangle \langle SY, Y \rangle - \langle SY, X \rangle \langle SX, Y \rangle. \quad (3.11)$$

En consecuencia, sustituyendo (3.10) y (3.11) en (3.6), obtenemos (3.1). \square

A lo largo de las Secciones posteriores volveremos en reiteradas ocasiones al Lema 3.1. Así, es conveniente repetir que en el caso en que \mathbb{M}^2 sea uno de los espacios bidimensionales simplemente conexos de curvatura constante, es decir, \mathbb{S}^2 o \mathbb{H}^2 , las ecuaciones del Lema 3.1 son, de hecho, las **ecuaciones de integrabilidad de la superficie**.

A continuación reescribiremos las ecuaciones anteriores para el caso en que tenemos un parámetro conforme para la Primera Forma Fundamental.

Corolario 3.4:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie conexa. Sea z un parámetro conforme para la métrica inducida, esto es

$$\begin{aligned} I &= \lambda |dz|^2 \\ II &= p dz^2 + \lambda H |dz|^2 + \bar{p} d\bar{z}^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde $p dz^2 = \langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$ es la diferencial de Hopf de la superficie. Entonces se verifican las siguientes ecuaciones

$$K(I) = K + \kappa \nu^2 \quad (3.13)$$

$$p_{\bar{z}} = \frac{\lambda}{2} (H_z + k \nu h_z) \quad (3.14)$$

$$|h_z|^2 = \frac{1}{4} \lambda (1 - \nu^2) \quad (3.15)$$

$$\nu_z = -H h_z - \frac{2}{\lambda} p h_{\bar{z}} \quad (3.16)$$

$$h_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \lambda H \nu \quad (3.17)$$

$$\nu_{z\bar{z}} = -\frac{\lambda \nu}{4} \left(2 \langle \nabla h, \nabla H \rangle + \kappa (1 - \nu^2) + \frac{8|p|^2}{\lambda^2} + 2H^2 \right) \quad (3.18)$$

donde $\kappa(p)$, $p \in \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, es la curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2 en el punto $\pi(p)$.

Demostración. Primero notemos que la ecuación de Gauss (3.13) no la hemos cambiado, pues es conveniente mantenerla así para nuestros intereses.

De un cálculo directo, usando (3.12), tenemos que

$$\nabla h = \frac{2}{\lambda} \left(h_{\bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} + h_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right),$$

de donde

$$\|\nabla h\|^2 = \frac{4|h_z|^2}{\lambda}.$$

Así, (3.15) se obtiene sin más que sustituir el valor de $\|\nabla h\|^2$ en (3.5).

Tomando $X = \frac{\partial}{\partial z}$ en (3.4), tenemos

$$\begin{aligned} \nu_z &= d\nu\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = -\left\langle S \frac{\partial}{\partial z}, \nabla h \right\rangle = -\frac{2}{\lambda} \left(h_{\bar{z}} \left\langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle + h_z \left\langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\rangle \right) \\ &= -\frac{2}{\lambda} \left(p h_{\bar{z}} + \frac{\lambda H}{2} h_z \right) = -H h_z - \frac{2p}{\lambda} h_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

esto es, (3.16) se verifica.

Tomando $X = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ en (3.3) y haciendo el producto escalar con $\frac{\partial}{\partial z}$, tenemos

$$\begin{aligned} h_{z\bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\langle \nabla h, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \nabla h, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle + \left\langle \nabla h, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \nabla h, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = -\nu \left\langle S \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = -\frac{\lambda}{2} \nu H, \end{aligned}$$

luego, teniendo en cuenta (3.12) para calcular $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial z}$, (3.17) se verifica.

De (3.2), tomando $X = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $Y = \frac{\partial}{\partial z}$ y haciendo el producto escalar con $\frac{\partial}{\partial z}$, nos queda

$$\left\langle TS\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = \frac{1}{2} \lambda \kappa \nu h_z,$$

luego, usando que $\left\langle TS\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = p_{\bar{z}} - \frac{\lambda}{2} H_z$ (ver Proposición 1.2 del Capítulo 1), obtenemos (3.14).

Para obtener (3.18), derivemos (3.16) con respecto a \bar{z} ,

$$\begin{aligned} \nu_{z\bar{z}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(H h_z + \frac{2p}{\lambda} h_{\bar{z}} \right) = \\ &= -H_{\bar{z}} h_z - H h_{z\bar{z}} - \frac{2p_{\bar{z}}}{\lambda} h_{\bar{z}} + \frac{2p\lambda_{\bar{z}}}{\lambda^2} h_{\bar{z}} - \frac{2p}{\lambda} h_{z\bar{z}} \end{aligned}$$

de donde, usando (3.14) y (3.17) respectivamente, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{2p_{\bar{z}}}{\lambda} h_{\bar{z}} &= \kappa \nu |h_z|^2 + H_z h_{\bar{z}} \\ H h_{z\bar{z}} &= \frac{\lambda}{2} \nu H^2. \end{aligned}$$

Así,

$$\nu_{z\bar{z}} = -(H_z h_{\bar{z}} + H_{\bar{z}} h_z) - \kappa \nu |h_z|^2 - \frac{\lambda}{2} \nu H^2 + \frac{2p}{\lambda} \left(\frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} h_{\bar{z}} - h_{\bar{z}\bar{z}} \right). \quad (3.19)$$

Ahora, de (3.3) y (3.12) tenemos

$$\begin{aligned} h_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \langle \nabla h, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \nabla h, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle + \langle \nabla h, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle \\ &= -\nu \langle S \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle + \frac{2}{\lambda} \left(h_{\bar{z}} \langle \frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle + h_z \langle \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle \right) \\ &= -\bar{p}\nu + \frac{2h_{\bar{z}}}{\lambda} \langle \frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle \\ &= -\bar{p}\nu + \frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} h_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

que sustituida en (3.19) queda como

$$\begin{aligned} \nu_{z\bar{z}} &= -(H_z h_{\bar{z}} + H_{\bar{z}} h_z) - \kappa \nu |h_z|^2 - \frac{\lambda}{2} \nu H^2 + \frac{2p}{\lambda} (\bar{p}\nu) \\ &= -\frac{\lambda \nu}{4} \left(2 \langle \nabla h, \nabla H \rangle + \kappa (1 - \nu^2) + \frac{8|p|^2}{\lambda^2} + 2H^2 \right), \end{aligned}$$

esto es, (3.18) se verifica. □

En esta formulación de las ecuaciones, es conveniente remitirse al trabajo de Fernández-Mira (véase [42]).

También nos serán útiles las ecuaciones necesarias, obtenidas en el Lema 3.1, en otras parametrizaciones sobre la superficie. Entre dichas parametrizaciones, una de especial relevancia será aquella que nos proporcione un parámetro conforme para la Segunda Forma Fundamental, cuando ésta sea una métrica riemanniana (ver [4]).

Corolario 3.5:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie conexa. Supongamos que la Segunda Forma Fundamental, II , de la superficie es una métrica definida positiva. Sea z un parámetro conforme para II ,

$$\begin{aligned} I &= E dz^2 + 2F |dz|^2 + \bar{E} d\bar{z}^2, \\ II &= 2\rho |dz|^2, \end{aligned} \quad (3.20)$$

y denotemos $\alpha = \bar{E} h_z - F h_{\bar{z}}$ y $D = |E|^2 - F^2$.

Entonces se verifican las siguientes ecuaciones

$$K(I) = K + \kappa \nu^2 \quad (3.21)$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{K_{\bar{z}}}{4K} + \kappa \alpha \frac{\nu}{2\rho} \quad (3.22)$$

$$h_{z\bar{z}} = \rho \nu \left(1 - \frac{\kappa}{2K}(1 - \nu^2)\right) - \frac{1}{4K}(K_{\bar{z}}h_z + K_z h_{\bar{z}}) \quad (3.23)$$

$$\nu_z = \frac{K\bar{\alpha}}{\rho} \quad (3.24)$$

$$\alpha h_z + \bar{\alpha} h_{\bar{z}} = D(1 - \nu^2) \quad (3.25)$$

$$\nu_{z\bar{z}} = \frac{1}{4\rho}(\bar{\alpha}K_{\bar{z}} + \alpha K_z) - KF\nu \quad (3.26)$$

donde Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ son los símbolos de Christoffel asociados a z , y $\kappa(p)$, $p \in \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, es la curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2 en el punto $\pi(p)$.

Demostración. De nuevo, notemos que la ecuación de Gauss (3.21) no la hemos cambiado.

De un cálculo directo, usando (3.20), tenemos que

$$\nabla h = \frac{1}{D}(\alpha \frac{\partial}{\partial z} + \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}),$$

de donde

$$\|\nabla h\|^2 = \frac{\alpha h_z + \bar{\alpha} h_{\bar{z}}}{D}.$$

Así, (3.25) se obtiene sin más que sustituir esta expresión en (3.5).

De (3.20) se sigue

$$K = -\frac{\rho^2}{D}. \quad (3.27)$$

Además, tomando $X = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ en (3.4), tenemos

$$\begin{aligned} \nu_z &= d\nu\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = -\left\langle S \frac{\partial}{\partial z}, \nabla h \right\rangle = -\frac{1}{D} \left(\alpha \left\langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle + \bar{\alpha} \left\langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\rangle \right) \\ &= -\frac{\rho}{D} \bar{\alpha} = \frac{\bar{\alpha} K}{\rho}, \end{aligned}$$

esto es, (3.24) se verifica.

Por una parte, de (3.2), tomando $X = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, $Y = \frac{\partial}{\partial z}$ y haciendo el producto escalar con $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, tenemos

$$\left\langle T_S\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right\rangle = \kappa \nu \alpha$$

luego, usando que $\langle T_S(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z}), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle = \frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} + (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)$ (ver Proposición 1.3 Capítulo 1), obtenemos

$$\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} + (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) = \kappa \nu \alpha.$$

Por otro lado, un cálculo directo nos muestra

$$\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 = \frac{D_{\bar{z}}}{2D}, \quad (3.28)$$

y por lo tanto, la ecuación anterior nos queda como

$$\frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} - \frac{D_{\bar{z}}}{2D} + 2\Gamma_{12}^1 = \kappa \nu \alpha.$$

Ahora, sin más que derivar (3.27) con respecto a \bar{z} ,

$$\frac{K_{\bar{z}}}{2K} = \frac{\rho_{\bar{z}}}{\rho} - \frac{D_{\bar{z}}}{2D},$$

y sustituyendo en la ecuación anterior, nos queda

$$\frac{K_{\bar{z}}}{2K} + 2\Gamma_{12}^1 = \kappa \nu \alpha.$$

De esta última igualdad obtenemos (3.22) sin más que despejar.

Tomando $X = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ en (3.3) y haciendo el producto escalar con $\frac{\partial}{\partial z}$, tenemos

$$\begin{aligned} h_{z\bar{z}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \langle \nabla h, \frac{\partial}{\partial z} \rangle = \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \nabla h, \frac{\partial}{\partial z} \rangle + \langle \nabla h, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial z} \rangle \\ &= -\nu \langle S \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle + \langle \nabla h, \Gamma_{12}^1 \frac{\partial}{\partial z} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle \\ &= \rho \nu + \Gamma_{12}^1 \langle \nabla h, \frac{\partial}{\partial z} \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle \nabla h, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle \\ &= \rho \nu + \Gamma_{12}^1 h_z + \Gamma_{12}^2 h_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

de donde, usando (3.22) y $\overline{\Gamma_{12}^1} = \Gamma_{12}^2$, nos queda

$$\begin{aligned} h_{z\bar{z}} &= \rho \nu - \frac{1}{4K} (K_{\bar{z}} h_z + K_z h_{\bar{z}}) + \kappa (\alpha h_z + \bar{\alpha} h_{\bar{z}}) \frac{\nu}{2\rho} \\ &= \rho \nu - \rho \frac{\kappa}{2} (1 - \nu^2) \nu - \frac{1}{4K} (K_{\bar{z}} h_z + K_z h_{\bar{z}}) \\ &= \rho \nu \left(1 - \frac{\kappa}{2K} (1 - \nu^2) \right) - \frac{1}{4K} (K_{\bar{z}} h_z + K_z h_{\bar{z}}), \end{aligned}$$

esto es, (3.23) se verifica.

Por último, para obtener (3.26) derivamos con respecto a z la conjugada de (3.24)

$$\nu_{z\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} \nu_{\bar{z}} = \frac{K}{\rho} \alpha_z + K_z \frac{\alpha}{\rho} - K \alpha \frac{\rho_z}{\rho^2}$$

siendo

$$\begin{aligned} \alpha_z &= 2 \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle h_z + \bar{E} h_{zz} - \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle h_{\bar{z}} - \langle \frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle h_{\bar{z}} - F h_{z\bar{z}} = \\ &= 2(\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 \bar{E}) h_z + \bar{E}(\Gamma_{11}^1 h_z + \Gamma_{11}^2 h_{\bar{z}}) - (\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 \bar{E}) h_{\bar{z}} - (\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F) h_{\bar{z}} + \\ &- F(\Gamma_{12}^1 h_z + \Gamma_{12}^2 h_{\bar{z}} + \rho \nu) = \alpha(\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1) + \alpha \Gamma_{12}^2 - \bar{\alpha} \Gamma_{12}^1 - \nu \rho F. \end{aligned}$$

Nótese que a partir de (3.22) tenemos que $\alpha \Gamma_{12}^2 - \bar{\alpha} \Gamma_{12}^1 = (\bar{\alpha} K_{\bar{z}} - \alpha K_z) / 4K$, que junto a (3.28), nos permite escribir la ecuación anterior como

$$\alpha_z = \frac{D_z}{2D} \alpha + \frac{1}{4K} (\bar{\alpha} K_{\bar{z}} - \alpha K_z) - \rho F \nu.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nu_{z\bar{z}} &= \frac{D_z}{2D} \frac{\alpha K}{\rho} + \frac{1}{4\rho} (\bar{\alpha} K_{\bar{z}} - \alpha K_z) - K F \nu - K \alpha \frac{\rho_z}{\rho^2} + K_z \frac{\alpha}{\rho} \\ &= \frac{\alpha K}{\rho} \left(\frac{D_z}{2D} - \frac{\rho_z}{\rho} \right) + K_z \frac{\alpha}{\rho} + \frac{1}{4\rho} (\bar{\alpha} K_{\bar{z}} - \alpha K_z) - K F \nu \\ &= -K_z \frac{\alpha}{2\rho} + K_z \frac{\alpha}{\rho} + \frac{1}{4\rho} (\bar{\alpha} K_{\bar{z}} - \alpha K_z) - K F \nu \\ &= \frac{1}{4\rho} (\bar{\alpha} K_{\bar{z}} + \alpha K_z) - K F \nu, \end{aligned}$$

esto es, hemos obtenido (3.26). □

Como comentamos en la Sección 1.3.3, que la Segunda Forma Fundamental induzca una métrica lorentziana nos permite elegir unos parámetros asintóticos sobre la superficie. El siguiente Corolario, en la línea de los anteriores, establecerá las ecuaciones que necesitaremos con respecto a dichos parámetros (ver [4]).

Corolario 3.6:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie conexa. Supongamos que la Segunda Forma Fundamental, II , de la superficie es una métrica lorentziana. Sean (u, v) parámetros asintóticos para II ,

$$\begin{aligned} I &= E du^2 + 2F dudv + G dv^2, \\ II &= 2f dudv \end{aligned} \tag{3.29}$$

y denotemos $D = EG - F^2$, $\alpha = Gh_u - Fh_v$ y $\beta = Eh_v - Fh_u$.

Entonces se verifican las siguientes ecuaciones

$$K(I) = K + \kappa \nu^2 \quad (3.30)$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{K_v}{4K} + \varepsilon \alpha \frac{\nu}{2f} \quad (3.31)$$

$$\Gamma_{12}^2 = -\frac{K_u}{4K} + \varepsilon \beta \frac{\nu}{2f} \quad (3.32)$$

$$h_{uv} = \left(1 - \frac{\kappa}{2K}(1 - \nu^2)\right) \nu f - \frac{1}{4K}(K_v h_u + K_u h_v) \quad (3.33)$$

$$\nu_u = \frac{\beta}{f} K \quad (3.34)$$

$$\nu_v = \frac{\alpha}{f} K \quad (3.35)$$

$$\alpha h_u + \beta h_v = D(1 - \nu^2) \quad (3.36)$$

$$\nu_{uv} = \frac{1}{4f}(\alpha K_u + \beta K_v) - KF\nu \quad (3.37)$$

donde Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ son los símbolos de Christoffel asociados a (u, v) , y $\kappa(p)$, $p \in \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, es la curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2 en el punto $\pi(p)$.

Demostración. La prueba es totalmente análoga a la del Corolario 3.5. Para observar esto, basta recordar la analogía que hicimos en la Sección 1.3.3, entre un parámetro conforme z y su conjugado \bar{z} (para II riemanniana), y parámetros asintóticos (u, v) (para II lorentziana). \square

3.2.1. Superficies en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

En esta parte vamos a ahondar un poco más en las geodésicas y cierto tipo de superficies del espacio producto. En particular, abordaremos la clasificación de las superficies completas y totalmente geodésicas en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.

Dada una geodésica completa orientada γ en \mathbb{M}^2 , llamaremos **plano vertical** al conjunto $P = \gamma \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. En lo que sigue, denotaremos por J al operador rotación en sentido anti-horario estándar. Lo primero que podemos observar es:

Proposición 3.2:

Sea $P = \gamma \times \mathbb{R} \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ un plano vertical. Entonces P es una superficie totalmente geodésica e isométrica a \mathbb{R}^2 .

Demostración. Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2$ la geodésica completa que define a P . Consideremos

$X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$X(s, t) = (\gamma(s), t)$$

donde s es el parámetro arco a lo largo de γ . Entonces es claro que $P = X(\mathbb{R}^2)$ y la métrica inducida sobre P es

$$I = ds^2 + dt^2,$$

de donde obtenemos que la superficie es isométrica a \mathbb{R}^2 .

Notemos además que el campo horizontal $\gamma' \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}^2)$, y el campo vertical $\frac{\partial}{\partial t}$, forman una base de $\mathfrak{X}(P)$, y

$$N(s, t) = (J\gamma'(s), 0),$$

es el normal unitario de P .

Entonces $\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} N = 0$, por ser N un campo horizontal (Proposición 3.1), y $\bar{\nabla}_{\gamma'} N = J\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ por ser γ geodésica. Luego P es totalmente geodésica. \square

Por comodidad, llamaremos **planos horizontales** a las secciones horizontales, las cuáles, evidentemente, son isométricas a \mathbb{M}^2 y totalmente geodésicas.

A continuación, caracterizaremos dichos *planos* como las únicas superficies completas y totalmente geodésicas en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Proposición 3.3:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ completa y totalmente geodésica. Entonces se verifica una de las siguientes:

- Σ es un plano vertical.
- Σ es un plano horizontal, y por lo tanto, \mathbb{M}^2 es necesariamente completa.
- $\mathbb{M}^2 \equiv \mathbb{R}^2$ (pasando a su recubridor universal si fuese necesario), y Σ es un plano inclinado.

Demostración. Nos ayudaremos del Corolario 3.4. Sea z un parámetro conforme para I . Entonces, al ser Σ totalmente geodésica tenemos que $p = 0 = H$, y por lo tanto $K = 0$.

En consecuencia, de (3.16) tenemos que $\nu_z = 0$, esto es, ν es constante en Σ .
Luego,

- Si $\nu^2 = 1$, entonces Σ es un plano horizontal.
- Si $\nu = 0$, entonces Σ es un plano vertical.

- Si $0 < \nu^2 < 1$, de (3.15) tenemos

$$\lambda = \frac{4|h_z|^2}{1 - \nu^2}.$$

Pero (3.17) nos dice que h es armónica sobre Σ , y por lo tanto I es llana, es decir, $K(I) = 0$. Luego de (3.13) tenemos que $\kappa \circ \pi \equiv 0$ sobre Σ . Ahora veremos que $\pi(\Sigma) = \mathbb{M}^2$, y por lo tanto \mathbb{M}^2 es una superficie completa y llana, esto es, es isométricamente \mathbb{R}^2 , y podemos ver a Σ como un *plano inclinado con respecto al eje* $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$.

Afirmación: $\pi(\Sigma) = \mathbb{M}^2$.

Para ello es suficiente probar que $\pi(\Sigma)$ no tiene borde en \mathbb{M}^2 . Supongamos que existe un punto $q \in \partial\pi(\Sigma) \subset \mathbb{M}^2$. Sea $\{p_n\} \subset \Sigma$ una sucesión tal que $\{\pi(p_n)\} \rightarrow q$. Fijemos $p_0 \in \Sigma$ y denotemos por γ_n la geodésica completa uniendo p_0 con p_n en Σ .

Como q está en el borde, γ_n debe ser cada vez más vertical en p_n para n cada vez más grandes, ya que de otra forma, por ser Σ completa, existiría un punto $\bar{p} \in \Sigma$, que es el límite de $\{p_n\}$ (pasando a una parcial si fuese necesario), tal que $\pi(\bar{p}) = q$. Ahora, $\nu(\bar{p})^2 > 0$, luego podemos conseguir un entorno $\bar{p} \in U \subset \Sigma$, tal que $q \in \text{int}(\pi(U))$, contradiciendo que q sea un punto en la frontera.

Esto nos dice que el normal en ese punto $N(p_n)$ debe ser cada vez más horizontal, y por lo tanto $\nu(p_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Pero ν es un constante, lo cual es una contradicción y la afirmación estaría probada.

□

Un caso particular, pero de especial interés, es aquél en que la base es una *superficie de Hadamard*, esto es, cuando \mathbb{M}^2 es completa y su curvatura de Gauss es no positiva. Es claro por los Corolarios 3.1 y 3.3, que $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ es Hadamard si, y sólo si, \mathbb{M}^2 es una variedad Hadamard. Un hecho bien conocido de dichas superficies es que se pueden identificar con un abierto denso del disco, y su borde en infinito se puede identificar con el círculo unidad.

Para la notación que vamos a establecer a continuación podríamos considerar que nuestra base es una superficie Hadamard, pero sólo la vamos a utilizar en el caso que la base sea \mathbb{H}^2 , por lo que nos restringiremos a este caso.

Denotemos por

$$S^1_\infty = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\},$$

al borde asintótico de \mathbb{M}^2 , vista \mathbb{M}^2 como subconjunto denso en el disco unidad.

El borde asintótico de un conjunto $\Omega \subset \mathbb{H}^2$ viene dado por

$$\partial_\infty \Omega = \text{cl}(\Omega) \cap \mathbb{S}_\infty^1,$$

donde $\text{cl}(\Omega)$ es la clausura de Ω en $\{z \in \mathbb{R}^2 : |z| \leq 1\}$.

Orientemos \mathbb{M}^2 tal que su borde asintótico esté orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Dada una geodésica γ completa orientada en \mathbb{M}^2 , entonces

$$\partial_\infty \gamma = \{\gamma^-, \gamma^+\}$$

donde $\gamma^- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t)$ y $\gamma^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t)$. Aquí t representa el parámetro arco a lo largo de γ . En adelante, siempre que sea necesario y no de lugar a confusión, identificaremos una geodésica completa γ con su borde asintótico, denotando

$$\gamma = \{\gamma^-, \gamma^+\} \tag{3.38}$$

Definición 3.1:

Dados $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}_\infty^1$, definimos la **geodésica orientada uniendo θ_1 y θ_2** , $\gamma(\theta_1, \theta_2)$, como la geodésica completa orientada de θ_1 a θ_2 . Aquí representamos los puntos en el círculo como números reales (ángulos) por sus imágenes por la aplicación exponencial.

Observemos que dada una geodésica orientada $\gamma = \{\gamma^-, \gamma^+\}$ en \mathbb{M}^2 , entonces $\mathbb{M}^2 \setminus \gamma$ tiene dos componentes conexas. Las distinguiremos usando la siguiente notación:

Definición 3.2:

Sea γ un geodésica completa orientada en \mathbb{M}^2 . Llamaremos **dominio exterior** de γ en \mathbb{M}^2 , $\text{ext}_{\mathbb{M}^2}(\gamma)$, a la componente conexa de $\mathbb{M}^2 \setminus \gamma$ hacia la que apunta $J\gamma'$. Y **dominio interior** de γ en \mathbb{M}^2 , $\text{int}_{\mathbb{M}^2}(\gamma)$, a la otra componente conexa de $\mathbb{M}^2 \setminus \gamma$.

Las nociones de dominio interior y exterior de una geodésica horizontal completa se extienden de manera natural a planos verticales

Definición 3.3:

Para una geodésica horizontal completa γ en \mathbb{M}^2 llamaremos, respectivamente, **dominio interior y exterior del plano vertical** $P = \gamma \times \mathbb{R}$ a los conjuntos

$$\text{int}_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}}(P) = \text{int}_{\mathbb{M}^2}(\gamma) \times \mathbb{R}, \quad \text{ext}_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}}(P) = \text{ext}_{\mathbb{M}^2}(\gamma) \times \mathbb{R}.$$

A lo largo de este Capítulo usaremos **foliaciones por planos verticales**, esto es,

Definición 3.4:

Sea P un plano vertical en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ y sea $\gamma(t)$ una geodésica horizontal completa en \mathbb{M}^2 , siendo t el parámetro arco a lo largo de γ , con $\gamma(0) = p_0 \in P$, $\gamma'(0)$ ortogonal a P en p_0 y $\gamma(t) \in \text{ext}_{\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}}(P)$ para $t > 0$. Definimos la **foliación orientada de planos verticales a lo largo de γ** , denotada por $P_\gamma(t)$, como la familia de planos verticales ortogonales a $\gamma(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, con $P = P_\gamma(0)$.

3.2.2. Superficies de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Aquí abordaremos el estudio de superficies de rotación en el espacio $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Lo que haremos será calcular la Primera Forma Fundamental de estas superficies y sus curvaturas principales, con objeto de tener un punto de referencia para cuando parametricemos las superficies de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura media, intrínseca o extrínseca, constante.

Es bien conocido que el grupo especial ortogonal $\mathbb{SO}(2)$ se identifica con el subgrupo de isometrías de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ que preservan la orientación y fijan todos los puntos de un eje $\{p\} \times \mathbb{R}$, con $p \in \mathbb{H}^2$, esto es, el subgrupo de las rotaciones.

Para trabajar con este tipo de superficie usaremos el modelo de hiperboloide de una hoja de $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{L}^3$. Por lo tanto, vemos $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como la subvariedad de \mathbb{L}^4 dada por

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{L}^4 : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_1 > 0 \right\}.$$

Así, salvo una isometría, podemos suponer que el eje está dado por $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$. Además, el conjunto

$$\mathcal{P} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} : x_2 \geq 0, x_3 = 0 \right\}$$

interseca toda órbita por la acción una sola vez.

En los resultados referentes a superficies de rotación, denotaremos a sus curvaturas principales como λ_1 y λ_2 . Aunque en los Capítulos anteriores las hemos denotado como k_i , $i = 1, 2$, ahora adoptamos esta nueva notación porque vamos a usar k como parte de la curva generatriz, y así, no dar lugar a confusión.

Proposición 3.4:

Sea $\alpha : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}$ la curva dada por

$$\alpha(u) = (\cosh k(u), \sinh k(u), 0, h(u)),$$

siendo u el parámetro arco a lo largo de α , es decir,

$$k'(u)^2 + h'(u)^2 = 1,$$

donde ' denota la derivada con respecto a u .

Sea $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ la superficie de revolución alrededor del eje $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ asociada a α , esto es, la superficie parametrizada por

$$\psi(u, v) = (\cosh k(u), \sinh k(u) \cos v, \sinh k(u) \sin v, h(u)), (u, v) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}/2\pi. \quad (3.39)$$

Entonces, la Primera Forma Fundamental de la superficie y sus curvaturas principales vienen dadas por

$$I = du^2 + \sinh^2 k(u) dv^2 \quad (3.40)$$

$$\lambda_1 = k'h'' - h'k'' \quad (3.41)$$

$$\lambda_2 = h' \coth k. \quad (3.42)$$

Demostración. Como la superficie de revolución asociada a α viene dada por (3.39), un cálculo directo muestra que

$$I = du^2 + \sinh^2 k(u) dv^2,$$

esto es, (3.40) se verifica.

Además, es fácil ver, usando (3.39) que el normal unitario de la superficie viene dado por

$$N(u, v) = -(h'(u) \sinh k(u), h'(u) \cosh k(u) \cos v, h'(u) \cosh k(u) \sin v, -k'(u)),$$

de donde

$$II = (k'(u)h''(u) - h'(u)k''(u))du^2 + h'(u) \sinh k(u) \cosh k(u) dv^2. \quad (3.43)$$

Luego, de (3.40) y (3.43), tenemos que las curvaturas principales de Σ vienen dadas por (3.41) y (3.42) como queríamos demostrar. \square

3.2.3. Superficies de Revolución en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

El ánimo de esta Sección es el mismo que el de la anterior.

Como antes, el grupo especial ortogonal $\mathbb{SO}(2)$ se identifica con el subgrupo de isometrías de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ que preservan la orientación y fijan todos los puntos de un eje $\{p\} \times \mathbb{R}$ y su eje antípoda $\{-p\} \times \mathbb{R}$, con $p \in \mathbb{S}^2$, esto es, el subgrupo de las rotaciones.

Para trabajar con este tipo de superficies usaremos el modelo de la esfera redonda de $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, vemos $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ como la subvariedad de \mathbb{R}^4 dada por

$$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

Así, salvo una isometría, podemos suponer que el eje está dado por $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$. Además, el conjunto

$$\mathcal{P} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} : x_2 \geq 0, x_3 = 0 \right\}$$

interseca toda órbita por la acción una sola vez.

Se tiene el siguiente resultado análogo al anterior en este espacio ambiente,

Proposición 3.5:

Sea $\alpha : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}$ la curva dada por

$$\alpha(u) = (\sin k(u), \cos k(u), 0, h(u)),$$

siendo u el parámetro arco a lo largo de α , es decir,

$$k'(u)^2 + h'(u)^2 = 1,$$

donde $'$ denota la derivada con respecto a u .

Sea $\Sigma \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, la superficie de revolución alrededor del eje $\{(1, 0, 0)\} \times \mathbb{R}$ asociada a α , esto es, la superficie parametrizada por

$$\psi(u, v) = (\sin k(u), \cos k(u) \cos v, \cos k(u) \sin v, h(u)), \quad (u, v) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}/2\pi. \quad (3.44)$$

Entonces, la Primera Forma Fundamental de la superficie y sus curvaturas principales vienen dadas por

$$I = du^2 + \cos^2 k(u) dv^2 \quad (3.45)$$

$$\lambda_1 = k'h'' - h'k'' \quad (3.46)$$

$$\lambda_2 = h' \cot k \quad (3.47)$$

Demostración. Es análoga a la demostración de la Proposición 3.4. □

3.3. Superficies con curvatura media constante

En esta Sección revisaremos algunos de los resultados concernientes a ese tipo de superficies. Entre ellos, prestaremos especial atención a la extensión del Teorema de Hopf debida a Abresch-Rosenberg [1], y cuyo resultado sirvió como punto de partida a la reciente gran aportación que ha sufrido el campo de las superficies en los espacios producto (ver [42], [43], [82], [83], [27] y referencias en ellos).

A lo largo de esta Sección trabajaremos con una superficie $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ inmersa con curvatura media constante. Como viene siendo habitual, denotaremos por I y II a la primera y Segunda Forma Fundamental de la superficie. Además, h y ν denotarán a la función altura y ángulo de la superficie respectivamente.

En el trabajo anteriormente mencionado de Abresch y Rosenberg, los autores definieron una diferencial cuadrática en términos de la diferencial de Hopf usual de la superficie más un cierto factor, que podríamos pensar, a posteriori, como un factor corrector, en términos de la diferencial de la función altura de la superficie, que resulta ser holomorfa cuando la superficie tiene curvatura media constante (CMC), y que permitió clasificar las esferas embebidas rotacionalmente simétricas como las únicas esferas topológicas con CMC en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Una vez recordada dicha caracterización, vamos a pasar a obtener cotas superiores para la altura de grafos, tanto verticales como horizontales. Esto es, vamos a estimar la distancia máxima que puede alcanzar un grafo respecto de un plano vertical u horizontal. En esta línea, las primeras aportaciones, para estimaciones de grafos verticales con borde en un plano horizontal, aparecen en los trabajos de Hoffman-Lira-Rosenberg [57] y Cheng-Rosenberg [20], y más generalmente, estimando la distancia en la superficie de cualquiera de sus puntos al borde, en el trabajo de Nelli-Rosenberg [84].

Nosotros dividiremos dichas estimaciones en dos partes:

- Estimaciones verticales para grafos con borde en un plano horizontal, las cuáles serán óptimas, en el sentido de que caracterizarán a los ejemplos completos de revolución cuando se alcance la altura máxima. No sólo haremos las estimaciones verticales cuando la base sea de curvatura constante, sino que veremos que son válidas para cualquier superficie que tomemos como base, dependiendo, solamente, del ínfimo de la curvatura de Gauss de la proyección en la base.
- Las estimaciones horizontales no serán óptimas ni se podrán aplicar a casos de base tan generales como las anteriores. El método geométrico para obtenerlas es de un interés independiente (basado en las estimaciones que vimos en el Capítulo 2).

Una vez que tengamos dichas estimaciones, y como ya dijimos en el Capítulo 2,

aplicaremos estos resultados al estudio de superficies propiamente embebidas con curvatura media constante, en el sentido de [66] y [65].

Lo primero que haremos será recordar cuáles son las esferas topológicas rotacionalmente simétricas con CMC en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

3.3.1. Esferas topológicas de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

La obtención de este tipo de superficie se debe a Hsiang-Hsiang [59] y Pedrosa-Ritoré [87]. En estos trabajos, los autores estudiaron dichos ejemplos para resolver el problema isoperimétrico en este espacio. De hecho, en [59], se conjeturó que estas superficies de revolución deberían ser las únicas esferas topológicas con CMC.

Proposición 3.6:

Sea Σ una esfera inmersa de revolución (alrededor del eje vertical $\{1, 0, 0\} \times \mathbb{R}$) en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con CMC $H > 1/2$, dada por

$$\psi_H(u, v) = (\cosh k(u), \sinh k(u) \cos v, \sinh k(u) \sin v, h(u))$$

donde $\alpha(u) = (\cosh k(u), \sinh k(u), 0, h(u)) \subset \mathcal{P}$ es la curva generatriz de Σ .

Entonces, Σ está embebida y la curva generatriz viene dada por

$$k(u) = 2 \operatorname{arcsenh} \left(\frac{\sqrt{1-u^2}}{4H^2-1} \right) \quad (3.48)$$

$$h(u) = \frac{4H}{\sqrt{4H^2-1}} \operatorname{arc sen} \left(\frac{u}{2H} \right) \quad (3.49)$$

donde $-1 \leq u \leq 1$.

Además, $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ es un plano horizontal de simetría de Σ .

La demostración de este resultado la podemos encontrar en [1]. No la reproduciremos aquí debido a que a lo largo de este Capítulo nos encargaremos de las superficies de revolución con curvatura de Gauss constante y de curvatura extrínseca constante, y dichos resultados son en espíritu como éste.

3.3.2. Esferas topológicas de revolución en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Aquí haremos lo mismo que en el apartado anterior, pero para superficies en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Proposición 3.7:

Sea Σ una esfera inmersa de revolución (alrededor del eje vertical $\{1, 0, 0\} \times \mathbb{R}$) en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \subset$

\mathbb{R}^4 con CMC $H > 0$, dada por

$$\psi_H(u, v) = (\cos k(u), \sin k(u) \cos v, \sin k(u) \sin v, h(u))$$

donde $\alpha(u) = (\cos k(u), \sin k(u), 0, h(u))$ es la curva generatriz de Σ .

Entonces,

i) Σ está embebida.

ii) Σ está contenida en $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$, donde \mathbb{D} denota el hemisferio abierto de \mathbb{S}^2 de centro $(1, 0, 0)$.

iii) la curva generatriz viene dada por

$$k(u) = \arcsen\left(\frac{4H^2 - 1 + 2u^2}{4H^2 + 1}\right) \quad (3.50)$$

$$h(u) = \frac{4H}{\sqrt{4H^2 + 1}} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{u}{2H}\right) \quad (3.51)$$

donde $-1 \leq u \leq 1$.

Además, $\mathbb{D} \times \{0\}$ divide a la superficie Σ en dos partes simétricas.

3.3.3. Teorema tipo Hopf

Un hecho bien conocido para superficies de CMC en un espacio modelo tridimensional, es la caracterización de las esferas topológicas inmersas debida a H. Hopf [54]. Dicha caracterización se basa en la existencia de una diferencial cuadrática holomorfa sobre la superficie, la cuál, al ser ésta una esfera topológica, debe anularse idénticamente.

Una vez descritas cuáles son las esferas topológicas de revolución, vamos a pasar a recordar la clasificación de las esferas topológicas inmersas con curvatura media constante en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ debida a Abresch y Rosenberg [1].

Lo primero será revisar las ecuaciones necesarias obtenidas en el Corolario 3.4 y particularizarlas cuando la curvatura media de la superficie es constante (ver [42]). Por lo tanto, en lo que concierne a este apartado y mientras otra cosa no sea especificada, trabajaremos con un parámetro conforme z para la Primera Forma Fundamental. Entonces tenemos

Lema 3.2:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie conexa con CMC H . Sea z un parámetro conforme para la métrica inducida, esto es

$$\begin{aligned} I &= \lambda |dz|^2 \\ II &= p dz^2 + \lambda H |dz|^2 + \bar{p} d\bar{z}^2, \end{aligned}$$

donde $pdz^2 = \langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle$ es la diferencial de Hopf de la superficie. Entonces se verifican las siguientes ecuaciones

$$K(I) = K + \kappa \nu^2 \quad (3.52)$$

$$p_{\bar{z}} = \frac{\lambda}{2} k \nu h_z \quad (3.53)$$

$$|h_z|^2 = \frac{1}{4} \lambda (1 - \nu^2) \quad (3.54)$$

$$\nu_z = -H h_z - \frac{2}{\lambda} p h_{\bar{z}} \quad (3.55)$$

$$h_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \lambda H \nu \quad (3.56)$$

$$\nu_{z\bar{z}} = -\frac{\lambda \nu}{4} \left(\kappa (1 - \nu^2) + \frac{8|p|^2}{\lambda^2} + 2H^2 \right) \quad (3.57)$$

donde $\kappa(p)$, $p \in \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, es la curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2 en el punto $\pi(p)$.

El argumento anteriormente mencionado, y debido a H. Hopf, ha sido recientemente extendido a $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ por Abresch y Rosenberg [1], caracterizando así las esferas de revolución como las únicas esferas topológicas inmersas de CMC. Para ello, y siguiendo las ideas de Hopf [54], demostraron la existencia de una diferencial cuadrática holomorfa sobre toda superficie de CMC en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

A continuación recordamos la definición de dicha diferencial.

Definición 3.5:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie inmersa con CMC H . Se define la **diferencial de Abresch-Rosenberg** como

$$Q dz^2 = (2Hp - \varepsilon h_z^2) dz^2, \quad (3.58)$$

donde z es un parámetro conforme para I , p la diferencial de Hopf usual, y h la función altura.

Es claro que $Q dz^2$ es una diferencial cuadrática bien definida sobre la superficie Σ . A partir de las ecuaciones descritas en el Lema 3.2 tenemos

Teorema 3.1:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie inmersa con CMC H . Entonces, $Q dz^2$ es una diferencial cuadrática holomorfa sobre Σ .

En particular, si Σ es una esfera topológica, $Q dz^2$ se anula idénticamente sobre la superficie.

Demostración. Para ver que $Q dz^2$ es una diferencial cuadrática holomorfa sólo tenemos que comprobar que $Q_{\bar{z}} = 0$. Pero esto es inmediato de (3.53) y (3.56)

$$Q_{\bar{z}} = 2H p_{\bar{z}} - 2\varepsilon h_z h_{z\bar{z}} = 2H\left(\frac{\lambda}{2}\varepsilon\nu h_z\right) - 2\varepsilon\left(\frac{\lambda}{2}H\nu\right)h_z = 0.$$

Por lo tanto, si Σ es una esfera topológica, es un hecho bien conocido que $Q dz^2$ debe anularse idénticamente sobre Σ , al ser ésta un diferencial cuadrática holomorfa. \square

Notemos que $Q dz^2$ es la parte $(2, 0)$ de la forma cuadrática

$$B = 2HII - \varepsilon dh^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla h\|^2 I$$

para la estructura conforme dada por I . Además, es fácil comprobar que

$$H(I, A) = 2H^2$$

y por lo tanto, el anterior resultado es equivalente a

Teorema 3.2:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie inmersa con CMC H . Entonces (I, B) , donde B viene dada por

$$B = 2HII - \varepsilon dh^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla h\|^2 I \quad (3.59)$$

es un par de Codazzi con curvatura media constante $2H^2$.

Demostración. Simplemente basta recordar el Lema 4 del Capítulo 1. \square

Ahora, lo que haremos será caracterizar, de forma local, las superficies con CMC y diferencial de Abresch-Rosenberg nula. En el trabajo de Abresch y Rosenberg se clasifican dichos ejemplos como los únicos embebidos e invariantes por rotaciones. Además, si $4H^2 + \varepsilon > 0$, entonces dicha superficie debe ser una de las esferas rotacionalmente simétricas (ver Proposiciones 3.6 y 3.7 para la parametrización de estas superficies), mientras que si $4H^2 + \varepsilon \leq 0$ (lo cuál implica en particular que $\varepsilon < 0$ en el caso no minimal), tenemos las tres siguientes posibilidades:

- Un grafo convexo sobre un plano horizontal $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \{0\}$, con simetría rotacional de tipo elíptico.
- Una superficie de tipo catenoide, también invariante por rotaciones elípticas.

- La órbita bajo un grupo resoluble dos dimensional de isometrías de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. En este caso las rotaciones son parabólicas y las superficies convergen, cuando $4H^2 \nearrow -\varepsilon$, a cilindros verticales sobre horociclos de $\mathbb{M}^2(\varepsilon)$.

De hecho, dicha clasificación es local (ver do Carmo-Fernández [30]). Más generalmente, Sa Earp-Toubiana [94] estudiaron y clasificaron aquellas superficies que tienen diferencial de Abresch-Rosenberg idénticamente nula.

Para nuestros intereses no necesitamos tanta generalidad. Es decir, nos restringiremos a $H > 1/2$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $H > 0$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. El motivo no es otro que una superficie en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$) con CMC, sólo puede ser compacta si $H > 1/2$ (resp. $H > 0$). Para el caso general dirigimos al lector al trabajo anteriormente mencionado de Abresh-Rosenberg en el caso completo o al trabajo de do Carmo-Fernández para el caso local. De hecho, la demostración que veremos a continuación es la restricción a nuestra situación de la dada en [30].

Teorema 3.3:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie inmersa con CMC $H > 0$ si $\varepsilon = 1$ o $H > 1/2$ si $\varepsilon = -1$. Supongamos que $Q dz^2$ es idénticamente cero en Σ . Entonces Σ es un trozo de la superficie de revolución dada en la Proposición 3.6 si $\varepsilon = -1$ o Proposición 3.7 si $\varepsilon = 1$.

Demostración. Comencemos viendo que todos los datos fundamentales de la inmersión dependen de un único parámetro real.

Como hemos supuesto que $Q dz^2$ se anula idénticamente sobre Σ , de (3.58) tenemos que

$$2Hp = \varepsilon h_z^2. \tag{3.60}$$

Ahora, como estamos suponiendo que $H > 0$ si $\varepsilon = 1$ o $H > 1/2$ si $\varepsilon = -1$, sustituyendo (3.60) en (3.55), y teniendo en cuenta (3.54), nos queda

$$\nu_z = -Hh_z \left(1 + \frac{\varepsilon}{4H^2}(1 - \nu^2) \right). \tag{3.61}$$

Notemos que, debido a las hipótesis sobre la curvatura media

$$g(\nu)^{-1} = -\left(1 - \frac{\varepsilon}{4H^2}(1 - \nu^2)\right)$$

no se anula sobre Σ .

Supongamos que ν es no constante, y consideremos un entorno abierto de la superficie donde $\nu_z \neq 0$. Entonces, de (3.61) tenemos

$$Hh_z = \nu_z g(\nu) \text{ en } \Sigma', \tag{3.62}$$

de donde, tomando el módulo y sustituyendo en (3.54), nos queda

$$\lambda = \frac{4|\nu_z|^2 g(\nu)}{H^2(1 - \nu^2)}. \quad (3.63)$$

Sustituyendo ahora (3.60) y (3.63) en (3.57), obtenemos

$$\nu_{z\bar{z}} = F(\nu)|\nu_z|^2, \quad (3.64)$$

donde

$$F(\nu) = \frac{(1 - \nu^2)g'(\nu) - 2\nu g(\nu)}{(1 - \nu^2)g(\nu)}.$$

Sea L la función definida por

$$L'(x) = \text{Exp} \left(- \int^x F(r) dr \right)$$

y consideremos la función real $s := L(\nu)$ en Σ' . Entonces es un cálculo directo de (3.64) verificar que la función real s es armónica para la estructura inducida por la Primera Forma Fundamental. Así, podemos elegir un nuevo parámetro conforme para I , que denotaremos por w , tal que $s = \text{Re}(w)$.

Como $\nu = L^{-1}(s)$, donde tenemos que notar que por la definición $L'(\nu) \neq 0$, entonces $\nu \equiv \nu(s)$. Por lo tanto, de (3.63) tenemos que $\lambda \equiv \lambda(s)$, de (3.61) $h \equiv h(s)$, y de (3.60) $p \equiv p(s)$. Esto es, todos los datos fundamentales de Σ' sólo dependen de la variable s .

A continuación, veremos que la superficie es rotacional.

Una vez que tenemos que todos los datos fundamentales, en principio dependientes de dos variables reales (s, t) , dependen de un único parámetro real, digamos s , para t_0 suficientemente pequeño la aplicación

$$(s, t) \longrightarrow (s, t + t_0)$$

conserva todos los datos fundamentales. Por lo tanto Σ' tiene un grupo uniparamétrico de auto-congruencias, es decir, para todo t_0 suficientemente pequeño, existe un movimiento rígido Φ_{t_0} de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ tal que $\psi(s, t + t_0) = \Phi_{t_0}(\psi(s, t))$, donde ψ representa la parametrización local de Σ' . En consecuencia, $\{\Phi_{t_0}\}$ es un grupo uniparamétrico de isometrías de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, esto es, de movimientos helicoidales.

Por último, como h_w , $w = s + it$, depende sólo de s , lo mismo ocurre para h , y por lo tanto $h(s, t + t_0) = h(s, t)$. Como h es la última coordenada de la superficie Σ' , concluimos que todos los movimientos $\{\Phi_{t_0}\}$ son rotaciones, y por lo tanto Σ' está contenida en uno de los ejemplos dados en las Proposiciones 3.6 o 3.7 si $\varepsilon = -1$ o $\varepsilon = 1$ respectivamente.

Por último, por conexión, esto se debe verificar para toda la superficie Σ , con lo que terminamos. \square

3.3.4. Estimaciones verticales en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Como ya hemos dicho al principio, los primeros trabajos donde podemos encontrar algún resultado en este sentido son [57] y [20], aunque, como ya apuntamos, dichos resultado no son óptimos.

En esta sección nos dedicaremos a obtener cotas superiores de la función altura para grafos compactos con CMC y borde en un plano horizontal. Aquí trabajaremos con una superficie sin borde \mathbb{M}^2 .

Dada una superficie $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, definimos $c(\Sigma)$ como

$$c(\Sigma) = \inf \{ \kappa(\pi(p)) : p \in \Sigma \}, \quad (3.65)$$

donde κ es la curvatura de la base \mathbb{M}^2 . En el caso particular que $\pi(\Sigma) = \mathbb{M}^2$, es claro que

$$c(\Sigma) = c(\mathbb{M}^2) = \inf \{ \kappa(p) : p \in \mathbb{M}^2 \}.$$

Además, y para simplificar los cálculos, supondremos que $c(\Sigma)$ es $-1, 0$ o 1 . Para hacer esto, es suficiente considerar, si $c(\Sigma) \neq 0$, la nueva métrica en \mathbb{M}^2 dada por la forma cuadrática $|c(\Sigma)|g_\kappa + dt^2$ y la superficie

$$\Sigma' = \{(x, \sqrt{|c(\Sigma)|}t) \in \mathbb{M}^2 : (x, t) \in \Sigma\},$$

la cuál tiene curvatura media $H/\sqrt{|c(\Sigma)|}$. Esta normalización la haremos siempre que estemos tratando con resultados que envuelvan al ínfimo de la curvatura de Gauss de la base.

Por otra parte, consideraremos la siguiente extensión de la diferencial de Abresch-Rosenberg (ver Definición 3.5). Dada una superficie $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, definimos la **extensión de la diferencial de Abresch-Rosenberg** como

$$Q = (2Hp - c(\Sigma)h_z^2) dz^2, \quad (3.66)$$

donde estamos usando la notación del Lema 3.2.

Tras estas consideraciones previas, demostraremos el siguiente

Teorema 3.4:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ un grafo compacto sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{M}^2$, con curvatura media constante $H > 0$ y cuyo borde esté contenido en el plano horizontal $\mathbb{M}^2 \times \{0\}$. Sea $c(\Sigma)$ el mínimo de la curvatura de Gauss en $\Omega \subset \mathbb{M}^2$. Entonces la altura máxima que Σ puede

alcanzar respecto $\mathbb{M}^2 \times \{0\}$ es

$$\begin{aligned} & \frac{4H}{\sqrt{-4c(\Sigma)H^2 - c(\Sigma)^2}} \arcsen\left(\frac{\sqrt{-c}}{2H}\right) \quad \text{si } c(\Sigma) < 0 \quad \text{y} \quad H > \frac{\sqrt{-c(\Sigma)}}{2}, \\ & \frac{1}{H} \quad \text{si } c(\Sigma) = 0, \\ & \frac{4H}{\sqrt{4c(\Sigma)H^2 + c(\Sigma)^2}} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{\sqrt{c(\Sigma)}}{2H}\right) \quad \text{si } c(\Sigma) > 0. \end{aligned}$$

Además, si la igualdad se verifica, entonces Ω tiene curvatura de Gauss constante $c(\Sigma)$ y la diferencial de Abresch-Rosenberg se anula idénticamente en Σ . En particular, Σ debe ser un hemisferio de uno de los ejemplos completos descritos en la Proposición 3.6 o 3.7 si $\Sigma = \mathbb{H}^2$ o $\Sigma = \mathbb{S}^2$ respectivamente.

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\nu \leq 0$ sobre la superficie.

Sea z un parámetro conforme para la Primera Forma Fundamental de la superficie (ver Lema 3.2). De (3.55)

$$|\nu_z|^2 = \frac{4|p|^2|h_z|^2}{\lambda^2} + H^2|h_z|^2 + \frac{2H}{\lambda}(ph_{\bar{z}}^2 + \bar{p}h_z^2),$$

y, a partir de (3.66), teniendo en cuenta que

$$|Q|^2 = 4H^2|p|^2 + |h_z|^4 - 2c(\Sigma)H(ph_{\bar{z}}^2 + \bar{p}h_z^2),$$

obtenemos, usando también (3.54), que

$$|\nu_z|^2 = \left(\frac{|p|^2}{\lambda} + \frac{H^2\lambda}{4}\right)(1 - \nu^2) + \frac{c(\Sigma)}{\lambda} \left(4H^2|p|^2 + \frac{\lambda^2}{16}(1 - \nu^2)^2 - |Q|^2\right). \quad (3.67)$$

Ahora, definamos ϕ como la aplicación en Σ dada por

$$\phi = h + g(\nu),$$

donde la función g será elegida más adelante. Entonces tenemos

$$\phi_{z\bar{z}} = h_{z\bar{z}} + g'(\nu)\nu_{z\bar{z}} + g''(\nu)|\nu_z|^2. \quad (3.68)$$

Distinguiremos los casos $c(\Sigma) = 0$ y $c(\Sigma) \neq 0$ separadamente.

Primero, si $c(\Sigma) = 0$, tomamos $g(s) = s/H$. Luego, de (3.57), (3.67), (3.68) y $\kappa \geq 0$ obtenemos

$$\phi_{z\bar{z}} = -\frac{\nu}{H} \left(\frac{2|p|^2}{\lambda} + \kappa|h_z|^2\right) \geq 0. \quad (3.69)$$

Por otro lado, si $c(\Sigma) \neq 0$, de (3.57), (3.67) y (3.68)

$$\begin{aligned} \phi_{z\bar{z}} &= -\frac{c(\Sigma)}{\lambda}|Q|^2 g''(\nu) + \frac{|p|^2}{\lambda} ((1-\nu^2 + 4c(\Sigma)H^2)g''(\nu) - 2\nu g'(\nu)) \\ &\quad + \frac{\lambda}{16} (8H\nu - (2H^2 + \kappa(1-\nu^2))4\nu g'(\nu) + (4H^2(1-\nu^2) + c(\Sigma)(1-\nu^2)^2)g''(\nu)). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Elegimos g para que el coeficiente que acompaña a $|p|^2$ en (3.70) se anule y $g' > 0$. Así, la derivada de g queda totalmente determinada salvo una constante positiva m_0

$$g'(\nu) = \frac{m_0}{4H^2 + c(\Sigma)(1-\nu^2)}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \frac{m_0}{\sqrt{4H^2 - 1}} \arcsin\left(\frac{\nu}{\sqrt{4H^2 - 1 + \nu^2}}\right) \quad \text{si } c(\Sigma) = -1, \\ g(\nu) &= \frac{m_0}{\sqrt{4H^2 + 1}} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{\nu}{\sqrt{4H^2 + 1 - \nu^2}}\right) \quad \text{si } c(\Sigma) = 1. \end{aligned}$$

Usando $\kappa \geq c(\Sigma)$, tenemos de (3.70)

$$\phi_{z\bar{z}} \geq -\frac{8H\nu|Q|^2}{\lambda(4H^2 + c(\Sigma)(1-\nu^2))^2} + \frac{\lambda\nu}{8}(4H - m_0). \quad (3.71)$$

Luego, tomando $m_0 = 4H$ deducimos que $\phi_{z\bar{z}} \geq 0$ en (3.71).

En consecuencia, para todo valor de $c(\Sigma)$ tenemos que $\phi \leq 0$ en el borde de nuestra superficie $\partial\Sigma$ y, como $\phi_{z\bar{z}} \geq 0$, de (3.69) y (3.71) se sigue que el Laplaciano de ϕ verifica que $\Delta\phi \geq 0$ en Σ . Por consiguiente, $\phi \leq 0$ en Σ . Luego, usando que g es estrictamente creciente, tenemos que

$$h \leq -g(\nu) \leq -g(-1),$$

como queríamos probar.

Finalmente, observemos que si la altura máxima se alcanza en algún punto entonces ϕ se anula idénticamente en Σ . Pero $|h_z|$ no se puede anular en un entorno abierto de Σ , o equivalentemente $\nu \neq 1$ en un abierto, porque $H > 0$. En consecuencia, se sigue de (3.69) y (3.71) que $\kappa \equiv c(\Sigma)$ y $Q \equiv 0$. \square

Como una consecuencia inmediata del Método de Reflexión de Alexandrov, obtenemos los siguientes resultados

Corolario 3.7:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie embebida y compacta con CMC $H > 0$ ($H > \sqrt{-c(\Sigma)}/2$) si

$c(\Sigma) < 0$ y borde contenido en un plano horizontal $\mathbb{M}^2 \times \{t_0\}$. Entonces, la altura máxima que Σ puede alcanzar con respecto a $\mathbb{M}^2 \times \{t_0\}$ es

$$\begin{aligned} & \frac{8H}{\sqrt{-4c(\Sigma)H^2 - c(\Sigma)^2}} \arcsen\left(\frac{\sqrt{-c(\Sigma)}}{2H}\right) \quad \text{si } c(\Sigma) < 0, \\ & \frac{2}{H} \quad \text{si } c(\Sigma) = 0, \\ & \frac{8H}{\sqrt{4c(\Sigma)H^2 + c(\Sigma)^2}} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{\sqrt{c(\Sigma)}}{2H}\right) \quad \text{si } c(\Sigma) > 0. \end{aligned}$$

Demostración. Primero, como los planos horizontales son totalmente geodésicos y las reflexiones respecto a dichos planos son isometrías del espacio ambiente, estamos en condiciones de aplicar el Método de Reflexión de Alexandrov.

Ahora, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el borde está contenido en $\mathbb{M}^2 \times \{0\}$. Sea $q \in \Sigma$ el punto más alejado de borde, a altura, digamos, $h > 0$. Consideremos la foliación por planos horizontales $P(t) = \mathbb{M}^2 \times \{t\}$, para $0 \leq t \leq h$, viniendo desde altura h , y descendiendo hasta altura 0. Denotemos por $\Sigma^+(t)$, $t \geq h/2$, a la simetría respecto de $P(t)$ de la parte de Σ que está por encima del plano horizontal $P(t)$.

Es claro que $\Sigma^+(t)$, para $h/2 < t \leq h$, no toca a $\partial\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \{0\}$. Así, la técnica de Reflexión de Alexandrov nos dice que $\Sigma^+(t)$ sólo toca a Σ en $\Sigma \cap P(t)$, y Σ nunca es ortogonal a $P(t)$. Ya que, de otra forma, si la reflexión toca a la superficie en un punto interior o Σ es ortogonal para algún t , dicho $P(t)$ sería un plano de simetría, lo cuál es absurdo.

Luego, concluimos que $\Sigma^+(h/2)$ es un grafo vertical sobre $P(h/2)$, y obtenemos nuestro Corolario sin más que aplicar el Teorema 3.4. \square

Corolario 3.8:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie propiamente embebida sin borde y CMC $H > 0$ ($H > \sqrt{-c(\Sigma)}/2$ si $c(\Sigma) < 0$). Entonces si Σ es compacta, la diferencia de altura entre su punto más alto y su punto más bajo debe ser menor o igual que la dada en el Corolario 3.7.

Demostración. La afirmación se deduce de la misma forma que el Corolario anterior, sin más que tener en cuenta que el punto más bajo de la superficie lo podemos tomar apoyado sobre el plano horizontal a altura cero. \square

3.3.5. Estimaciones horizontales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Aquí daremos estimaciones sobre la distancia que puede alcanzar un grafo compacto horizontal a un plano vertical que contenga a su borde. Dicha estimación no es óptima, en el sentido del resultado anterior. Además, este resultado no tiene la generalidad del anterior, donde la base podía tener curvatura variable.

No obstante, con la sola existencia de dicha cota, podremos obtener interesantes consecuencias para superficies propiamente embebidas con CMC en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Resultados parciales en esta dirección fueron obtenidos por Nelli-Rosenberg [84], pero en dicho trabajo, sólo pudieron obtener una estimación para superficies con CMC $H > 1/\sqrt{3}$.

Dicha cota para la curvatura media, si nos paramos a revisar la demostración, es debida a razones técnicas, hecho que los mismos autores resaltaron en el mencionado trabajo. Ahora, estableceremos dicha cota para $H > 1/2$, que tampoco es óptima, pero útil para nuestros futuros propósitos.

Teorema 3.5:

Sea Σ una superficie compacta y embebida en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con CMC $H > 1/2$. Sea P un plano vertical en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y supongamos que $\partial\Sigma \subset P$. Entonces la distancia en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de Σ a P está acotada; esto es, existe una constante d_H , independiente de Σ , tal que

$$\text{dist}(q, P) \leq d_H, \quad \forall q \in \Sigma.$$

Demostración. Antes de comenzar la demostración, diremos que la notación y muchos de los conceptos que van a aparecer en ella, son los que vimos en la Subsección 3.2.1.

Sea $q \in \Sigma$ uno de los puntos donde se alcanza la distancia máxima a P . Dicho punto claramente existe por ser Σ compacta. Salvo una isometría, podemos suponer que $q \in \mathbb{H}^2 \times \{0\}$ y $q \in \text{ext}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(P)$. Sea $P_\gamma(t)$ la foliación de planos verticales (ver Definición 3.4) a lo largo de γ con $P_\gamma(0) = P$ y $q \in P_\gamma(h)$. Denotemos por X el campo de Killing horizontal de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ generado por traslaciones a lo largo de γ (X es tangente a cada $\mathbb{H}^2 \times \{\tau\}$ y es traslación a lo largo de $\gamma \times \{\tau\}$); X es ortogonal a la foliación $P_\gamma(t)$.

Ahora, hagamos reflexión de Alexandrov respecto de los planos $P_\gamma(t)$, comenzando en $t = h$, y disminuyendo t . Para $h/2 < t \leq h$, la simetría de la parte de Σ en $\text{ext}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(P_\gamma(t))$ no toca a $\partial\Sigma$, ya que $\partial\Sigma \subset P$. Así, la técnica de reflexión de Alexandrov nos dice que la simetría de $\Sigma^+(t) = \Sigma \cap \text{ext}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(P_\gamma(t))$ respecto de $P_\gamma(t)$, interseca Σ sólo en $\Sigma \cap P_\gamma(t)$ y Σ nunca es ortogonal a $P_\gamma(s)$ para $t \leq s \leq h$. Ya que X es ortogonal a cada $P_\gamma(t)$, concluimos que X es transverso a $\Sigma^+(h/2)$, y $\Sigma^+(h/2)$ es un grafo sobre un dominio de $P_\gamma(h/2)$ con respecto a las órbitas de X .

Luego, para probar el Teorema, es suficiente demostrar que X -grafos están a una distancia acotada a P , suponiendo que el borde del grafo está en P .

Ahora, supongamos que Σ es un X -grafo sobre un dominio $D \subset P$ y elijamos $P_\gamma(t)$ como antes. Sea Σ_R la esfera rotacionalmente simétrica (ver Proposición 3.6) cuya curvatura media H es la misma que la de Σ , denotemos por $c = c(H)$ el diámetro de Σ_R .

Probaremos que para cada $t > c$, el diámetro de cada componente conexa de $\Sigma(t) = P(t) \cap \Sigma$ es a lo sumo c . Si no fuese así, entonces para alguna componente conexa $C(t)$ de $\Sigma(t)$ hay puntos x, y en el interior del dominio $D(t)$ de $P(t)$ acotado por $C(t)$ con $\text{dist}(x, y) > c$. Sea Q el dominio de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ acotado por $\Sigma \cup D$. Sea β una curva en $D(t)$ uniendo x e y , β disjunta a $C(t)$. Sea Ω el “rectángulo” formado por las órbitas de X uniendo β a P ; $\Omega \subset Q$. Sea p un punto de Ω cuya distancia a $\partial\Omega$ es mayor que $c/2$; p existe por construcción de Ω .

Sea η la geodésica pasando por p tal que cada uno de sus puntos está a una distancia mayor que $c/2$ de $\partial\Omega$; es fácil ver que dicha η está en el plano $P(t)$ conteniendo a p . η entra en Q en un primer punto q_0 y deja Q en un último punto q_1 .

Consideremos la familia de esferas centradas en cada punto de η . Observar que cada esfera está obtenida de la esfera rotacional Σ_R (de curvatura media H) por una translación de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Consideremos cómo la familia de esferas entra en Q por q_0 .

Entonces, existe una primera esfera en la familia (viniendo de q_0) que toca Ω por primera vez en un punto interior de Ω . Dicha esfera pasa por Ω , sin tocar a ∂Q inicialmente, y pasa a través de Ω sin tocar $\partial\Omega$. Como las esferas dejan Q en q_1 , hay alguna esfera de nuestra familia que toca a $\partial Q \cap \Sigma$ en un primer punto de contacto, que atraviesa Ω , con Σ . En este primer punto de contacto, los vectores curvatura media de Σ y la esfera rotacionalmente simétrica son iguales. Luego, el Principio del Máximo nos diría que Σ es igual a esta esfera, lo cuál es una contradicción.

Ahora, si el Teorema es falso, existe una sucesión de grafos Σ_n sobre dominios $D_n \subset P$ con $\text{diam}(D_n) < c$ y $\text{dist}(\Sigma_n, P)$ no acotada (véase Figura 1).

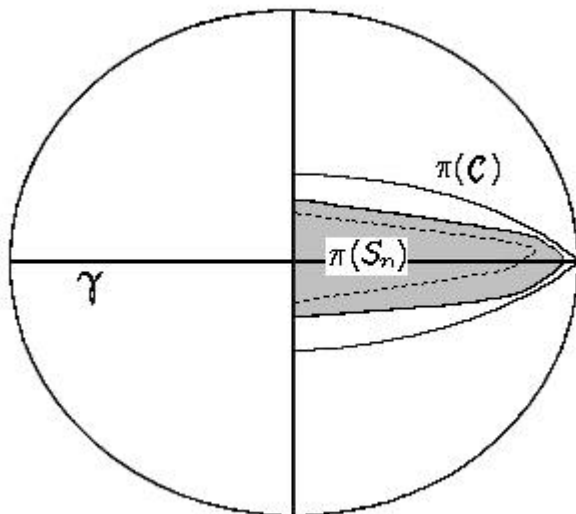


Figura 1.

Salvo isometrías, podemos suponer que los dominios D_n están contenidos en un disco fijo D y los grafos Σ_n están contenidos en el cilindro de Killing horizontal \mathcal{C} sobre D , un entorno tubular de una geodésica horizontal γ . Usaremos planos verticales “inclinados” para demostrar que esto es imposible.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\gamma = \{0, \pi\}$, P es el plano vertical sobre la geodésica $\{\pi/2, 3\pi/2\}$, y los grafos Σ_n verifican que $\pi(\Sigma_n)$ son asintóticos a 0. Consideremos el plano vertical $Q(s_1, s_2) = \{s_1, s_2\} \times \mathbb{R}$. Un simple cálculo muestra que para $s_1 = 0$ y s_2 positivo y suficientemente cercano a 0, la simetría por $Q(0, s_2)$ de $\mathcal{C} \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(0, s_2))$ no interseca a P . En particular, la simetría de ningún $\Sigma_n \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(0, s_2))$ interseca a $\partial\Sigma_n \subset D$. Por continuidad, para s_1 negativo y suficientemente cercano a 0, es claro que las dos anteriores afirmaciones siguen siendo válidas, esto es, la simetría respecto de $Q(s_1, s_2)$ de $\mathcal{C} \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ no corta a P y la simetría de $\Sigma_n \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ tampoco corta a $\partial\Sigma_n \subset D$.

Ahora observemos que la simetría de $\mathcal{C} \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ sale fuera de \mathcal{C} . Por lo tanto la simetría de $\Sigma_n \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ también sale fuera de \mathcal{C} , para n suficientemente grande.

Elijamos a y b entre s_1 y s_2 tales que $Q(a, b)$ sea disjunto de \mathcal{C} . Sea $R(t)$ la foliación por planos verticales de la región de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ entre $Q(a, b)$ y $Q(s_1, s_2)$ con $R(0) = Q(a, b)$ y $R(1) = Q(s_1, s_2)$, $0 \leq t \leq 1$.

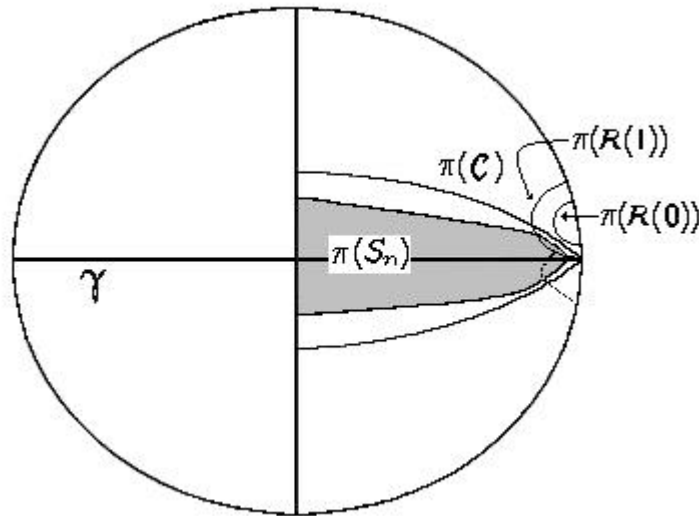


Figura 2.

Hagamos Reflexión de Alexandrov con respecto a los planos $R(t)$. Elijamos n suficientemente grande tal que la simetría de $\Sigma(n) = \Sigma_n \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ tenga puntos fuera de \mathcal{C} . La simetría de $\Sigma(n)$ respecto cada $R(t)$ es disjunta de P , y por lo tanto disjunta de $\partial\Sigma_n$. Además la simetría de $S(n)$ respecto $R(1)$ sale fuera de \mathcal{C} , y respecto de $R(0)$ es disjunta de \mathcal{C} . Luego, obtenemos la existencia de un cierto t , suficientemente pequeño, tal que la simetría de $\Sigma(n)$ respecto de $R(t)$ toca a Σ_n en algún punto. En consecuencia $R(t)$ debería ser un plano de simetría de Σ_n , lo cuál es una contradicción (véase Figura 2). Esto completa la prueba. \square

3.3.6. Superficies propiamente embebidas con CMC

En esta parte lo que haremos será extender un resultado de W. Meeks para superficies con CMC en \mathbb{R}^3 . W. Meeks [73] demostró que no existen superficies con CMC $H \neq 0$ en \mathbb{R}^3 propiamente embebidas, con topología finita y un final. Un año más tarde, y por métodos diferentes, Korevaar-Kusner-Solomon [66] dieron otra demostración del citado Teorema. Y Korevaar-Kusner-Meeks-Solomon [65] un tiempo después, lo extendieron al espacio hiperbólico.

Los principales ingredientes de la demostración son

- El Lema de Separación.
- Estimaciones de altura.

Sea Σ una superficie con CMC $H \neq 0$, propiamente embebida, con topología finita y un final. El Lema de Separación, como vimos en el Capítulo 2, nos dice que si tenemos dos planos paralelos, P_1 y P_2 , a una distancia mayor que el radio de la esfera de revolución de la misma curvatura media que nuestra superficie Σ , y denotamos por P_1^+ y P_2^+ a los semiespacios determinados por P_1 y P_2 que son disjuntos entre sí, entonces todas las componentes conexas de $\Sigma \cap P_1^+$ o de $\Sigma \cap P_2^+$ son compactas.

Dicho resultado ha sido recientemente generalizado a $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ por Nelli-Rosenberg [84]. Primero, apuntemos un par de detalles:

- Cuando en \mathbb{R}^3 (o \mathbb{H}^3), tomamos dos planos paralelos, no necesitamos especificar nada más. Ahora, en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tendremos que distinguir planos verticales y horizontales.
- En \mathbb{R}^3 tomamos como distancia entre planos el diámetro de la esfera de revolución. En \mathbb{R}^3 dicho diámetro es el mismo en todas las direcciones. Esto no ocurre con las esferas de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Tendremos que distinguir entre diámetro horizontal y diámetro vertical.

Parece que habría que hacer dos resultados, uno para planos verticales y otro para planos horizontales. Sin embargo, no es difícil convencerse que haciéndolo para planos verticales, y tomando como distancia entre planos el diámetro horizontal, la demostración para el caso de planos horizontales y diámetro vertical es la misma.

De la Proposición 3.7, es fácil ver que el diámetro vertical y el diámetro horizontal de una esfera de revolución con CMC $H \neq 0$, vienen dados por

$$\begin{aligned} \text{ver}(H) &= \frac{4H}{\sqrt{4H^2 - 1}} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{4H^2 - 1}}\right) \\ \text{hor}(H) &= 2\text{senh}^{-1}\left(\frac{4H}{4H^2 - 1}\right). \end{aligned}$$

Antes de adentrarnos en el Lema de Separación, veremos cómo el Método de Reflexión de Alexandrov y las estimaciones verticales obtenidas en la Sección anterior, nos permitirán obtener consecuencias sobre los finales de una superficie propiamente embebida. Además podemos situarnos en un espacio ambiente más general, un espacio producto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, donde \mathbb{M}^2 es una superficie cualquiera. Esto es porque sólo usaremos estimaciones verticales.

Corolario 3.9:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie propiamente embebida sin borde y CMC $H > 0$ ($H > \sqrt{-c(\Sigma)}/2$ si $c(\Sigma) < 0$). Entonces si Σ es no compacta y \mathbb{M}^2 es compacta, Σ debe tener al menos un final hacia arriba y otro hacia abajo.

Demostración. Supongamos que todos los finales van en una única dirección, digamos hacia arriba (notemos que \mathbb{M}^2 es compacta, y por tanto los finales sólo pueden ser hacia arriba o hacia abajo). Entonces, al ser Σ propia, debe tener un punto más bajo, digamos $p_0 \in \Sigma$, que lo podemos suponer en el plano horizontal a altura cero.

Consideremos la foliación por planos horizontales $P(t) = \mathbb{M}^2 \times \{t\}$, para $t \geq 0$. Aplicando la misma técnica que en el Corolario 3.7, tenemos dos posibilidades:

- $\Sigma^-(t)$, que ahora representa la reflexión respecto de $P(t)$ de la parte de Σ que queda por debajo de $P(t)$, es grafo vertical para todo $t > 0$, y llegaríamos a una contradicción con las estimaciones obtenidas en el Teorema 3.4.
- $\Sigma^-(t)$ toca en algún momento a Σ en un punto interior, o se hace ortogonal al plano horizontal de reflexión $P(t)$. En cualquier caso, el Principio del Máximo nos diría que Σ es compacta.

Es decir, en cualquiera de los dos casos anteriores llegamos a una contradicción, y por lo tanto tenemos demostrado el Corolario. \square

Ahora, estableceremos el Lema de Separación en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ debido a Nelli-Rosenberg [84],

Lema 3.3:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie con CMC $H > 1/2$ propiamente embebida, con topología finita y un final. Sean P_1 y P_2 dos planos verticales a distancia mayor que $\text{hor}(H)$. Denotemos por P_1^+ y P_2^+ a los semiespacios disjuntos determinados por estos planos. Entonces, todas las componentes conexas de $\Sigma \cap P_1^+$ o $\Sigma \cap P_2^+$ son compactas.

Demostración. Supongamos que tanto $\Sigma \cap P_1^+$ como $\Sigma \cap P_2^+$ tienen componentes no compactas. Entonces, podemos encontrar arcos propios $\alpha_i : [0, +\infty) \rightarrow \Sigma \cap P_i^+$ para $i = 1, 2$.

Como Σ tiene topología finita se sigue que el final debe ser topológicamente un anillo, y por lo tanto podemos suponer que tanto $\alpha_1(t)$ como $\alpha_2(t)$ están contenidas en el final anular de Σ para t suficientemente grande. Denotemos por $p_i = \alpha_i(0)$, para $i = 1, 2$.

Entonces, no es difícil ver que podemos elegir un arco embebido β uniendo p_1 con p_2 tal que el arco $\delta = \alpha_1 \cup \beta \cup \alpha_2$ acote un dominio simplemente conexo.

Denotemos por P al plano vertical que se encuentra a la misma distancia de P_1 y P_2 . Sea B una bola geodésica en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ conteniendo a β , y C un círculo en P verificando las dos siguientes condiciones:

- $C \cap B = \emptyset$, y B tiene intersección no vacía con el disco en P acotado por C .

- El entorno tubular T de C de radio $r = \text{hor}(H)$ es embebido, y $T \cap B = \emptyset$.

Debemos resaltar, antes de continuar, que T está contenido en la banda determinada por los planos P_1 y P_2 .

Sea B_1 la bola geodésica en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ conteniendo a $B \cup T$. Por ser Σ propia, existen puntos $x_i \in \alpha_i \setminus B_1$, para $i = 1, 2$, y un arco γ uniendo x_1 y x_2 , embebido en Σ , verificando las siguientes condiciones:

- $\gamma \cap B_1 = \emptyset$.
- Si denotamos por ρ el subarco de δ uniendo x_1 y x_2 , entonces el lazo $\sigma = \rho \cup \gamma$ verifica que podemos encontrar una deformación homotópica del lazo σ en Σ que corte al interior disco acotado por C una sola vez.
- σ acota un disco compacto D en Σ .

Luego $T \cap D$ contiene un disco D_1 tal que $\partial D_1 \subset \partial T$ y tal que $\text{link}(\partial D_1, C) = \pm 1$.

Consideremos el recubridor universal de T , esto es $\Pi : \tilde{T} \rightarrow T$. Levantemos el disco D_1 a un disco compacto $\tilde{D}_1 \subset \tilde{T}$. Topológicamente, T es $\mathbb{D} \times \mathbb{S}^1$ y D_1 es isotópico a algún $\mathbb{D} \times \{\text{punto}\}$. Entonces, \tilde{T} es topológicamente $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$ y \tilde{D}_1 es isotópico a algún $\mathbb{D} \times \{\text{punto}\}$. En particular, \tilde{D}_1 separa \tilde{T} en dos componentes conexas. Denotemos por W a la componente hacia la que apunta el vector curvatura media.

Sea \tilde{C} la curva en \tilde{T} que se proyecta en C mediante Π . Para cada punto $p \in C$, denotemos por $\Sigma_H(p)$ a la superficie rotacionalmente simétrica respecto de la geodésica vertical que pasa por p con CMC H . Es claro que si el radio de C es suficientemente grande, $\Sigma_H(p)$ está contenida en T para todo $p \in C$. Para cualquier $\tilde{p} \in \tilde{C}$, denotemos por $\tilde{\Sigma}_H(\tilde{p})$ a la superficie compacta que se proyecta en $\Sigma_H(p)$ por Π , donde $\Pi(\tilde{p}) = p$.

Ahora, es claro que podemos encontrar un punto $\tilde{q} \in \tilde{C}$ tal que $\tilde{\Sigma}_H(\tilde{q})$ esté contenida en W y sea disjunta de \tilde{D}_1 . Movemos \tilde{q} a lo largo de \tilde{C} hacia \tilde{D}_1 , hasta un primer punto de contacto \tilde{q}_1 en el cual $\tilde{\Sigma}_H(\tilde{q}_1)$ y \tilde{D}_1 son tangentes. Entonces $\tilde{\Sigma}_H(\tilde{q}_1)$ está contenido en W y, en el punto de tangencia, $\tilde{\Sigma}_H(\tilde{q}_1)$ y \tilde{D}_1 tienen la misma curvatura media H . Por lo tanto, por el Principio del Máximo, ambas deberían coincidir, una contradicción, con lo cuál estaría probado el Lema. □

Nota 3.1:

Como hemos comentado anteriormente, el Lema de Separación se verifica, y la demostración es la misma, para planos horizontales a distancia mayor que $\text{ver}(H)$.

En este punto, estableceremos el Teorema que nos permitirá obtener el resultado principal de esta Sección, la acotación cilíndrica de los finales anulares de una superficie de CMC $H > 1/2$ propiamente embebida. La demostración la haremos para

superficies con CMC $H > 1/2$, propiamente embebidas, topología finita y un final, pero de hecho, la misma demostración es válida para un anillo propiamente embebido. La demostración que presentaremos aquí es la misma que dieron Nelli-Rosenberg [84] para el caso $H > 1/\sqrt{3}$. El punto que no consiguieron obtener en dicho artículo fue la estimación horizontal para $H > 1/2$; la obtuvieron para $H > 1/\sqrt{3}$.

Teorema 3.6:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie con CMC $H > 1/2$, propiamente embebida, topología finita y un final. Entonces Σ está contenida en un cilindro vertical.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $O = (0, 0) \in \Sigma$, siendo $0 \in \mathbb{H}^2$ el origen en el modelo de Poincaré. Sea $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ cualquier rayo geodésico horizontal empezando en O y parametrizado por la longitud de arco, t . Denotemos por $P_\gamma(t)$ a la foliación de planos verticales pasando por $\gamma(t)$, $t \geq 0$, y ortogonales a γ .

Demostraremos ahora que existe una constante C , independiente de γ , tal que Σ es disjunta del semiespacio determinado por $P_\gamma(C)$ que no contiene a $O \in \Sigma$. La afirmación anterior claramente implica que Σ está contenida en el cilindro vertical de radio C y eje $\{O\} \times \mathbb{R}$.

Probemos entonces la afirmación. Sea $R > \max\{d_H, \text{hor}(H)\}$, donde d_H es la constante dada en el Teorema 3.5 y $\text{hor}(H)$ la constante dada en el Lema 3.3. Denotemos por $P_\gamma^+(R)$ al semiespacio determinado por $P_\gamma(R)$ que contiene a O , y $P_\gamma^+(2R)$ al semiespacio determinado por $P_\gamma(2R)$ que **no** contiene a O .

Por el Lema de Separación, una de las dos siguiente posibilidades se tiene que verificar

- $\Sigma \cap P_\gamma^+(R)$ tiene sólo componentes compactas.
- $\Sigma \cap P_\gamma^+(2R)$ tiene sólo componentes compactas.

Del Teorema 3.5, es claro que la primera posibilidad no se puede dar. Si así fuese, entonces alguna componente de $\Sigma \cap P_\gamma^+(R)$ tiene que contener a O , digamos $O \in \Omega \subset \Sigma \cap P_\gamma^+(R)$, pero al ser $R > d_H$, llegaríamos a una contradicción con el Teorema 3.5.

Luego, todas las componentes de $\Sigma \cap P_\gamma^+(2R)$ son compactas. Por lo tanto, de nuevo por el Teorema 3.5, la máxima distancia que pueden alcanzar cada componente respecto del plano $P_\gamma(2R)$ es d_H . En consecuencia, tomando $C = 2R + d_H$, independiente de γ , es claro que nuestra afirmación se verifica, y con ella el Teorema. \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar el Teorema principal de esta Sección

Teorema 3.7:

No hay superficies con CMC $H > 1/2$, propiamente embebidas, con topología finita y un final en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que existe una tal superficie Σ . Sea $P(t) = \mathbb{H}^2 \times \{t\}$ la foliación por planos horizontales a altura t . Por el Teorema 3.7, Σ está contenida en un cilindro vertical y, como Σ tiene un único final propio, éste debe estar acotado superior o inferiormente. Digamos que está acotada inferiormente y que dicha cota está a altura cero.

Ahora, aplicaremos el método de Alexandrov con los planos $P(t)$ para $t \geq 0$. Como Σ está contenida en un cilindro, se sigue que no puede ocurrir ningún accidente en la reflexión cuando movemos $P(t)$ hacia arriba, es decir que la reflexión toque a algún punto interior de Σ , o que la reflexión corte ortogonalmente en algún punto de su borde a su plano de reflexión, ya que el Principio del Máximo nos diría que Σ es compacta, una contradicción.

Por lo tanto, para cualquier $t > 0$, la reflexión de la parte de Σ que queda por debajo de $P(t)$ es un grafo vertical (sobre $P(t)$), y no hay puntos de Σ por debajo de $P(t)$ donde Σ sea ortogonal a alguno de los planos $P(s)$, $0 < s \leq t$. Luego, podemos elegir t suficientemente grande para contradecir el Teorema 3.4. Así el resultado estará probado. \square

3.4. Superficies con curvatura de Gauss constante en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

Continuando con el estudio de superficies en un espacio producto, seguiremos con aquéllas en la que su curvatura de Gauss es constante. A tenor del resultado anterior de Abresch y Rosenberg para curvatura media constante, Alencar, do Carmo y Tribuzy [11] expusieron la cuestión de si podría conseguirse una clasificación para las superficies con curvatura de Gauss constante (CGC). Si tenemos en cuenta los antecedentes en los espacios modelo para las superficies de CGC y lo que ocurre para las superficies de CMC en los espacios producto, lo más natural parece definir una diferencial cuadrática que dependa de la Primera Forma Fundamental de la superficie y la diferencial de la función altura, y tomar como estructura la dada por la Segunda Forma Fundamental.

Una vez obtenida la caracterización de las superficies con CGC, pasaremos, como ya hiciéramos en la parte de CMC, a dar estimaciones para grafos verticales con CGC positiva. Debemos apuntar en este punto que, debido a que la superficie tiene CGC positiva, el Teorema de Bonnet-Myers acota la longitud de la geodésica minimizante uniendo cualesquiera dos puntos y por lo tanto, acota el diámetro intrínseco de la superficies. Así, podemos acotar la altura máxima que alcanza un grafo, aunque dicha estimación no es óptima. En cambio, la que nosotros veremos aquí sí lo es, y caracterizaremos los ejemplos completos de revolución cuando se alcance dicha cota.

Por último, veremos una representación de las superficies con CGC en términos de su función altura, función ángulo y su curvatura de Gauss. Esta representación cobrará mayor interés en los casos particulares $K(I) = 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y $K(I) = -1$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, ya que las ecuaciones de compatibilidad tomarán una forma sencilla.

Como hicimos en la Sección anterior, lo primero será estudiar las superficies de revolución con CGC.

3.4.1. Superficie de revolución con CGC en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Proposición 3.8:

Sea Σ una superficie de revolución (alrededor del eje vertical $\{1, 0, 0\} \times \mathbb{R}$) en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con CGC $K(I)$, dada por

$$\psi_{K(I)}(u, v) = (\cosh k(u), \sinh k(u) \cos v, \sinh k(u) \sin v, h(u))$$

donde $\alpha(u) = (\cosh k(u), \sinh k(u), 0, h(u))$ es la curva generatriz de Σ .

Entonces, Σ debe ser embebida y la curva generatriz viene dada por

1. Si $K(I) > 0$:

$$k(u) = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}} \operatorname{sen} \left(\sqrt{K(I)} u \right) \right) \quad (3.72)$$

$$h(u) = -\sqrt{\frac{1+K(I)}{K(I)}} \operatorname{arctan} \left(\frac{\cos \left(\sqrt{K(I)} u \right)}{\sqrt{K(I) + \operatorname{sen} \left(\sqrt{K(I)} u \right)}} \right) \quad (3.73)$$

donde $0 \leq u \leq \pi/K(I)$. En particular, Σ debe ser compacta (véase Figura 3).

2. Si $K(I) = 0$ y α no corta al eje, entonces Σ es un cilindro alrededor del eje.
3. Si $K(I) = 0$ y α corta al eje, entonces

$$k(u) = \operatorname{arcsenh}(u) \quad (3.74)$$

$$h(u) = -1 + \sqrt{1+u^2} \quad (3.75)$$

donde $u \geq 0$.

4. Si $-1 \leq K(I) < 0$ y α corta al eje, entonces

$$k(u) = \operatorname{arcsenh} \left(\operatorname{Exp} \left(\sqrt{-K(I)} u \right) \right) \quad (3.76)$$

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{-K(I)}} \left(\sqrt{-K(I)} \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{2+K(I)+K(I) \operatorname{tanh}(\sqrt{-K(I)} u)}{2(1+K(I))}} \right) - \operatorname{arctanh} \left(\sqrt{\frac{2+K(I)+K(I) \operatorname{tanh}(\sqrt{-K(I)} u)}{2}} \right) \right) \quad (3.77)$$

donde $u \in \mathbb{R}$ (véase Figura 4).

5. Si $-1 \leq K(I) < 0$ y α no corta al eje, entonces

$$k(u) = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{1}{\sqrt{-K(I)}} \operatorname{senh} \left(\sqrt{-K(I)} u \right) \right) \quad (3.78)$$

$$h(u) = \sqrt{\frac{1+K(I)}{K(I)}} \ln \left(\frac{\cosh(\sqrt{-K(I)} u) + \sqrt{-K(I) + \operatorname{senh}^2(\sqrt{-K(I)} u)}}{1 + \sqrt{-K(I)}} \right) \quad (3.79)$$

donde $u \geq 0$ (véase Figura 5).

O bien

$$k(u) = \operatorname{arcsenh} \left(\frac{1}{\sqrt{-K(I)}} \cosh \left(\sqrt{-K(I)} u \right) \right) \quad (3.80)$$

$$h(u) = \int_0^u 1 + \frac{K(I) \operatorname{senh} \left(\sqrt{-K(I)} s \right)}{\cosh^2 \left(\sqrt{-K(I)} s \right) - K(I)} ds \quad (3.81)$$

donde $u \in \mathbb{R}$ (véase Figura 6).

6. No existen superficies de revolución completas con $K(I) < -1$.

Demostración. De la Proposición 3.4 tenemos que la Primera Forma Fundamental viene dada por

$$I = du^2 + \operatorname{senh}^2 k(u) dv^2.$$

En general, la curvatura de Gauss de una métrica $I = du^2 + f(u)^2 dv^2$ es $K(I) = -f''(u)/f(u)$. Luego, cuando $K(I)$ es constante, tenemos

$$\begin{aligned} f(u) &= A \cos(\sqrt{K(I)} u) + B \operatorname{sen}(\sqrt{K(I)} u) && \text{si } K(I) > 0, \\ f(u) &= A u + B && \text{si } K(I) = 0, \\ f(u) &= A \cosh(\sqrt{-K(I)} u) + B \operatorname{senh}(\sqrt{-K(I)} u) && \text{si } K(I) < 0, \end{aligned} \quad (3.82)$$

para ciertas constantes reales A, B que no se anulan a la vez.

Distinguiremos los casos apuntados en el enunciado, que dependen del signo de la constante $K(I)$.

1. $K(I) > 0$:

En este caso tenemos $\operatorname{senh} k(u) = A \cos(\sqrt{K(I)} u) + B \operatorname{sen}(\sqrt{K(I)} u)$, de (3.40) y (3.82).

Por otra parte, si la superficie de revolución es completa entonces ψ debe ser, por el Teorema de Gauss-Bonnet, la parametrización de una esfera topológica, esto es, α es una curva que interseca al eje en sus puntos inicial y final.

Sea u_0 el punto inicial. Entonces, reparametrizando u por $u - u_0$ tenemos $\operatorname{senh} k(u) = C \operatorname{sen}(\sqrt{K(I)} u)$, para cierta constante real C .

En consecuencia, obtenemos

$$k(u) = \operatorname{arcsinh} \left(C \operatorname{sen}(\sqrt{K(I)} u) \right)$$

y, de $(h')^2 + (k')^2 = 1$,

$$h'(u)^2 = 1 - \frac{C^2 K(I) \cos^2(\sqrt{K(I)} u)}{1 + C^2 \sin^2(\sqrt{K(I)} u)}.$$

Pero α debe intersecar ortogonalmente al eje en su punto inicial, ya que de otra forma la superficie tendría un pico, esto es, $h'(0) = 0$. Por lo tanto, $C^2 K(I) = 1$ y

$$h(u) = -\sqrt{\frac{1 + K(I)}{K(I)}} \arctan \left(\frac{\cos(\sqrt{K(I)} u)}{\sqrt{K(I) + \sin^2(\sqrt{K(I)} u)}} \right).$$

La completitud de la inmersión se obtiene fácilmente. En particular, hemos probado la existencia de una única superficie completa de revolución para cualquier curvatura de Gauss constante y positiva $K(I)$, salvo isometrías (véase Figura 3).

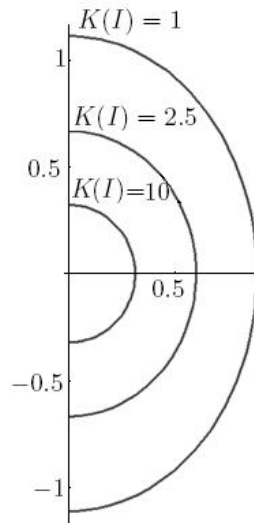


Figura 3: $K(I) > 0$

2. $K(I) = 0$ y α no corta al eje:

De (3.40) y (3.82) tenemos que $\sinh k(u) = Au + B$. Si α no corta al eje de revolución entonces la métrica inducida sobre la superficie de revolución $I = du^2 + (Au + B)^2 dv^2$ sólo sería completa si α está definida para todo $u \in \mathbb{R}$. Por consiguiente $A = 0$, ya que α no toca al eje, y ψ es un cilindro alrededor del eje.

3. $K(I) = 0$ y α corta al eje:

De (3.40) y (3.82) tenemos que $\sinh k(u) = Au + B$. Si α corta al eje, como hicimos anteriormente, podemos suponer que lo hace en $u = 0$ y $\sinh k(u) = Au$. Ahora, usando que la intersección es ortogonal en $u = 0$, deducimos que $h'(0) = 0$, y además

$$k(u) = \operatorname{arcsinh} u, \quad h(u) = -1 + \sqrt{1 + u^2},$$

como queríamos probar. Finalmente, es fácil demostrar que dicha superficie es completa (véase Figura 4).

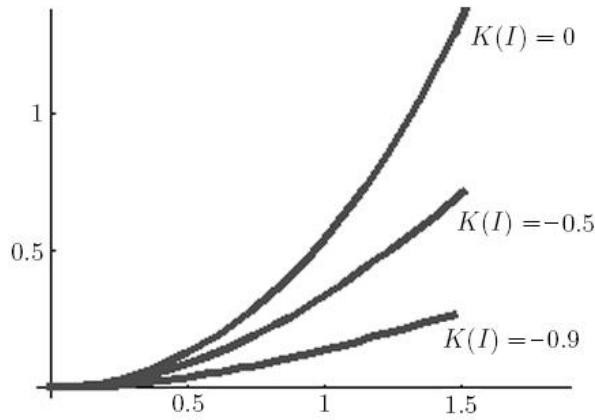


Figura 4: $K(I) \leq 0$

4. $-1 \leq K(I) < 0$ y α corta al eje:

De (3.40) y (3.82) tenemos $\sinh k(u) = A \cosh(\sqrt{-K(I)} u) + B \sinh(\sqrt{-K(I)} u)$.

Como antes, podemos suponer que la intersección ocurre en $u = 0$. Entonces, $\sinh k(u) = C \sinh(\sqrt{-K(I)} u)$ para cierto número real C . De nuevo $h'(0)$ debe anularse, y $C^2 K(I) = -1$, pues $(h')^2 + (k')^2 = 1$.

Observemos que

$$k(u) = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{1}{\sqrt{-K(I)}} \sinh(\sqrt{-K(I)} u) \right)$$

es no negativo cuando $u \geq 0$, y

$$k'(u) = \frac{\sqrt{-K(I)} \cosh(\sqrt{-K(I)} u)}{\sqrt{-K(I)} + \sinh^2(\sqrt{-K(I)} u)}. \quad (3.83)$$

Como la superficie de revolución debe ser completa, la función $k(u)$ está bien definida para $u \geq 0$. Además, $k'(u)^2 \leq 1$, y por lo tanto se sigue que $-K(I) \leq 1$ de (3.83). Así, $h(u)$ viene dada por

$$h(u) = \sqrt{-\frac{1+K(I)}{K(I)}} \log \left(\frac{\cosh(\sqrt{-K(I)} u) + \sqrt{-K(I) + \sinh^2(\sqrt{-K(I)} u)}}{1 + \sqrt{-K(I)}} \right).$$

La completitud de éstas superficies es directa. Por tanto, hemos probado la existencia, para toda constante negativa $K(I) \geq -1$, de una única superficie de revolución con CGC $K(I)$, salvo isometrías, que corta al eje de revolución (véase Figura 4).

5. $-1 \leq K(I) < 0$ y α no corta al eje:

Por último, consideramos el caso en que la curva α no toca al eje de rotación. Ahora, la métrica inducida viene dada por

$$I = du^2 + \left(A \cosh(\sqrt{-K(I)} u) + B \sinh(\sqrt{-K(I)} u) \right)^2 dv^2$$

y debe estar definida para todo $u \in \mathbb{R}$ para ser completa.

Si $A^2 < B^2$ entonces el límite de $\sinh k(u) = A \cosh(\sqrt{-K(I)} u) + B \sinh(\sqrt{-K(I)} u)$ es $-\infty$ cuando u tiende a $-\infty$ o $+\infty$, lo que contradice a $k(u) \geq 0$. Por tanto, A^2 debe ser mayor o igual que B^2 .

Si $A^2 = B^2$ entonces, cambiando u por $-u$ si fuese necesario, podemos asumir que $A = B$. Luego, $\sinh k(u) = A e^{\sqrt{-K(I)} u}$ y escribiendo u en vez de $u - u_0$ para un $u_0 \in \mathbb{R}$ adecuado, tenemos que

$$\sinh k(u) = e^{\sqrt{-K(I)} u}.$$

Además,

$$k'(u) = \frac{\sqrt{-K(I)} e^{\sqrt{-K(I)} u}}{\sqrt{1 + e^{2\sqrt{-K(I)} u}}}$$

y $k'(u)^2 \leq 1$ de $(h')^2 + (k')^2 = 1$. Así, $K(I) \geq -1$ y la métrica inducida de nuestra superficie, $I = du^2 + e^{2\sqrt{-K(I)} u} dv^2$, es claramente completa (véase Figura 5).

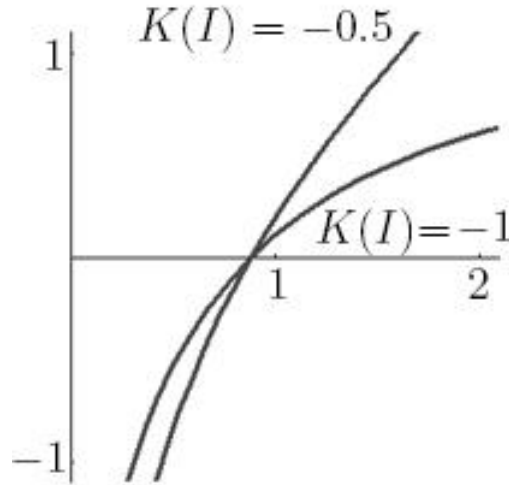


Figura 5: $K(I) < 0$ y $A^2 = B^2$.

Si $A^2 > B^2$ entonces $-1 < B/A < 1$. En consecuencia, existen número reales θ y $C > 0$ tales que $A = C \sinh \theta$, $B = C \cosh \theta$, y por lo tanto $\sinh k(u) = C \cosh(\sqrt{-K(I)} u + \theta)$. Cambiando u por $u + \theta/\sqrt{-K(I)}$ tenemos

$$\sinh k(u) = C \cosh(\sqrt{-K(I)} u)$$

y

$$k'(u) = \frac{C \sqrt{-K(I)} \sinh(\sqrt{-K(I)} u)}{\sqrt{1 + C^2 \cosh^2(\sqrt{-K(I)} u)}}.$$

De nuevo, la condición $k'(u)^2 \leq 1$ es equivalente a $K(I) \geq -1$. Luego, como en el caso anterior, la métrica inducida es completa.

Por lo tanto, hemos obtenido la existencia de superficies completas de revolución con CGC negativa $K(I) \geq -1$ que no cortan al eje de revolución (véase Figura 6); de hecho, una familia uniparamétrica para cada valor de $K(I)$.

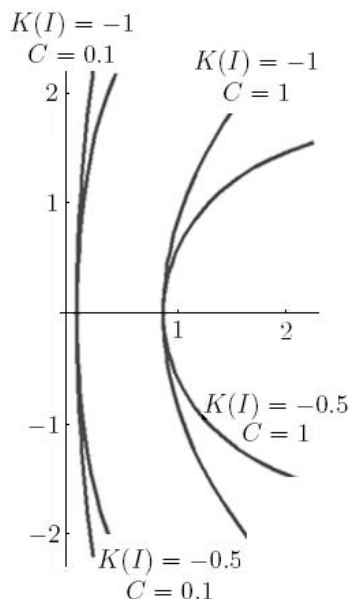


Figura 6: $K(I) < 0$ y $A^2 > B^2$.

6. A lo largo de la demostración ha quedado claro que no existen superficies completas con CGC $K(I) < -1$.

□

3.4.2. Superficies de revolución con CGC en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

Proposición 3.9:

Sea Σ una superficie de revolución (alrededor del eje vertical $\{1, 0, 0\} \times \mathbb{R}$) en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ con CGC $K(I)$, dada por

$$\psi_{K(I)}(u, v) = (\cos k(u), \text{sen } k(u) \cos v, \text{sen } k(u) \text{sen } v, h(u)),$$

donde $\alpha(u) = (\cos k(u), \text{sen } k(u), 0, h(u))$ es la curva generatriz de Σ .

Entonces, Σ debe ser embebida y la curva generatriz viene dada por

1. Si $K(I) \geq 1$, entonces

$$k(u) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}} \operatorname{sen}(\sqrt{K(I)} u)\right) \quad (3.84)$$

$$h(u) = -\sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \log\left(\frac{\cos(\sqrt{K(I)} u) + \sqrt{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)} u)}}{1 + \sqrt{K(I)}}\right) \quad (3.85)$$

donde $0 \leq u \leq \pi/K(I)$. En particular, Σ debe ser compacta (ver Figura 7).

2. Si $K(I) = 0$, entonces Σ es un cilindro alrededor del eje.
3. No existen superficies completas de revolución con CGC $K(I) < 0$ o $K(I) \in (0, 1)$.

Demostración. Como hicimos antes, nos apoyaremos ahora en la Proposición 3.5. Así, la Primera Forma Fundamental viene dada por

$$I = du^2 + \cos^2 k(u) dv^2.$$

Como hemos señalado en el enunciado, distinguiremos tres casos dependiendo del signo de la curvatura $K(I)$.

1. $K(I) > 0$:

Nuestra superficie de revolución debe verificar

$$\cos k(u) = A \cos(\sqrt{K(I)} u) + B \operatorname{sen}(\sqrt{K(I)} u)$$

de (3.45) y (3.82). Razonando como en el caso de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ podemos suponer que α corta al eje de revolución en su punto inicial, digamos $u = 0$. Luego,

$$\cos k(u) = C \operatorname{sen}(\sqrt{K(I)} u) \quad (3.86)$$

para cierta constante real positiva C .

Además, como

$$k'(u) = -\frac{C \sqrt{K(I)} \cos(\sqrt{K(I)} u)}{\sqrt{1 - C^2 \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)} u)}}$$

y $h'(0) = 0$, entonces $C^2 K(I) = 1$.

Por otra parte, sabemos que α corta al eje (o su eje antípoda) dos veces cuando $K(I) > 0$, esto es, $\cos k(u) = 0$ en el punto inicial y final de α . Entonces, de

(3.86), $u \in [0, \pi/\sqrt{K(I)}]$. En particular, como $\cos k(u)$ es menor o igual a 1 en este intervalo, tenemos que $K(I) \geq 1$.

Por consiguiente, la inmersión se puede calcular como

$$k(u) = \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}} \operatorname{sen}(\sqrt{K(I)} u) \right)$$

$$h(u) = -\sqrt{\frac{K(I) - 1}{K(I)}} \log \left(\frac{\cos(\sqrt{K(I)} u) + \sqrt{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)} u)}}{1 + \sqrt{K(I)}} \right)$$

para $u \in [0, \pi/\sqrt{K(I)}]$.

La completitud de la inmersión se obtiene fácilmente. Así, hemos probado la existencia de una única superficie de revolución para cualquier curvatura de Gauss constante positiva $K(I) \geq 1$, salvo isometrías.

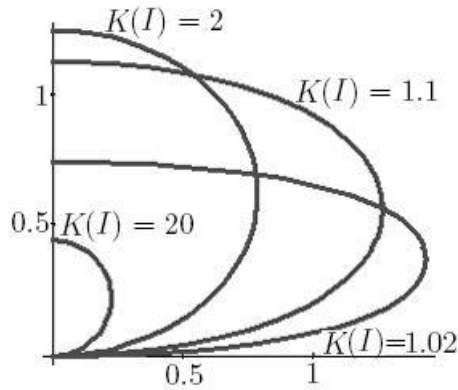


Figura 7: $K(I) \geq 1$.

2. $K(I) = 0$:

Ahora $\cos k(u) = Au + B$ de (3.45) y (3.82). Si α no corta el eje entonces la métrica de la superficie de revolución $I = du^2 + (Au + B)^2 dv^2$ sólo sería completa si α está definida para todo $u \in \mathbb{R}$, pero esto es imposible si $A \neq 0$ ya que $\cos k(u) = Au + B \in [-1, 1]$. Por tanto, $A = 0$ y ψ es un cilindro alrededor del eje.

Si α corta al eje entonces podemos suponer que lo hace en su punto inicial, digamos $u = 0$. Entonces, $\cos k(u) = Au$ y $k(u)$ no está bien definida para todo $u \geq 0$, esto es, la métrica inducida no sería completa.

3. $K(I) < 0$:

En este caso $\cos k(u) = A \cosh(\sqrt{-K(I)} u) + B \sinh(\sqrt{-K(I)} u)$. Por lo tanto, si α no toca al eje y es completa, entonces u debe tomar valores en todo \mathbb{R} . Pero esto no es posible ya que $\cos k(u) = A \cosh(\sqrt{-K(I)} u) + B \sinh(\sqrt{-K(I)} u) \notin [-1, 1]$ para todo $u \in \mathbb{R}$.

Si α corta al eje de revolución en su punto inicial $u = 0$ entonces

$$\cos k(u) = C \sinh(\sqrt{-K(I)} u),$$

para cierta constante $C \in \mathbb{R}$. Pero $C \sinh(\sqrt{-K(I)} u) \notin [-1, 1]$ para todo $u \geq 0$ y el mismo razonamiento que hicimos para el caso anterior nos muestra que la superficie no puede ser completa.

Por lo tanto, no existen superficies completas de revolución con curvatura de Gauss constante negativa.

□

3.4.3. Definiendo el par de Codazzi

Como hemos apuntado al comienzo de esta Sección, siguiendo las ideas que usamos en el estudio de las superficies con CMC vamos a definir una diferencial cuadrática que será holomorfa en el caso de que la curvatura de Gauss de la superficie sea constante. Equivalentemente, este hecho nos dice que tiene que existir un Par de Codazzi sobre la superficie. Así, obtendremos la existencia de un Par de Codazzi sobre la superficie cuando su curvatura de Gauss sea constante. La razón de hacerlo de esta manera es porque, como ocurre en el caso de las superficies de CGC en los espacios modelo, la estructura que consideramos sobre la superficie es la inducida por la Segunda Forma Fundamental. Así, si la Segunda Forma Fundamental es definida positiva (resp. definida negativa) la estructura que induce es de superficie de Riemann (resp. superficie de Lorentz). Por lo tanto, tendríamos que distinguir cuándo la Segunda Forma Fundamental es definida positiva o negativa, mientras que desde el punto de vista de Pares de Codazzi, lo podemos hacer unificadamente.

Continuaremos usando la notación que introdujimos anteriormente. Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie conexa tal que $K(I) \neq \varepsilon$ en todo punto de Σ . Consideremos la nueva forma cuadrática

$$A = (K(I) - \varepsilon)I + dh^2,$$

y el par (A, II) sobre Σ . Lo primero que haremos será ver cuándo A realmente define una métrica definida sobre la superficie y, bajo las condiciones de que el par sea fundamental, verifica que dicho par es de Codazzi.

Para no preocuparnos si II es definida positiva o negativa, trabajemos con parámetros isotermos (u, v) (o el parámetro conforme $z = u + iv$) para I .

Así, nuestro primer resultado nos dirá cuando A **no** define una métrica riemanniana sobre la superficie

Lema 3.4:

Sea Σ una superficie orientable con curvatura de Gauss $K(I)$. Entonces la forma cuadrática A dada por

$$A = (K(I) - \varepsilon) I + dh^2,$$

no es una métrica riemanniana sobre Σ si, y sólo si,

(a) existe un punto en Σ verificando $0 \leq K(I) \leq 1$ y $\|\nabla h\|^2 \geq 1 - K(I)$, cuando $\varepsilon = 1$,

(b) existe un punto en Σ verificando $-1 \leq K(I) \leq 0$ y $\|\nabla h\|^2 \geq 1 + K(I)$, cuando $\varepsilon = -1$,

donde h es la función altura de la superficie Σ .

Demostración. Sean (u, v) parámetros isotermos sobre Σ para I , esto es

$$I = E(du^2 + dv^2).$$

En esta parametrización la forma cuadrática A viene dada por

$$A = ((K(I) - \varepsilon) E + \varepsilon h_u^2) du^2 + 2\varepsilon h_u h_v dudv + ((K(I) - \varepsilon) E + \varepsilon h_v^2) dv^2.$$

Luego, A es una métrica riemanniana sobre Σ si, y sólo si

$$\begin{aligned} 0 &< ((K(I) - \varepsilon) E + \varepsilon h_u^2)((K(I) - \varepsilon) E + \varepsilon h_v^2) - (\varepsilon h_u h_v)^2 \\ &= (K(I) - \varepsilon)^2 E^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{K(I) - \varepsilon} \|\nabla h\|^2\right), \end{aligned}$$

o equivalentemente, $1 + c \|\nabla h\|^2 > 0$, donde $c = \varepsilon / (K(I) - \varepsilon)$.

De (3.6), $\|\nabla h\| \leq 1$. Por lo tanto $1 + c \|\nabla h\|^2 > 0$ **no** se cumple si, y sólo si, $c \leq -1$ y $\|\nabla h\|^2 \geq -1/c$, o equivalentemente, (a) o (b) se verifican. □

Esto nos da pie a definir

Definición 3.6:

Dada $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, si

$$A = (K(I) - \varepsilon) I + dh^2, \tag{3.87}$$

es una métrica definida sobre Σ , entonces llamaremos **par asociado a** $K(I)$ al par fundamental (A, II) .

Ahora que hemos visto cuándo A es una métrica definida, veamos que la curvatura extrínseca del par (A, II) está íntimamente relacionada con la curvatura de Gauss de la superficie, y de ahí el nombre que le hemos dado al par. Notemos que ocurría lo mismo con el par (I, B) que definimos en la Sección anterior, pero con la curvatura media del par y la curvatura media de la superficie.

Lema 3.5:

Si A es una métrica riemanniana sobre Σ , entonces la curvatura extrínseca del par (A, II) es

$$K(A, II) = \frac{1}{K(I) - \varepsilon}. \quad (3.88)$$

Demostración. Como antes, sean (u, v) parámetros isotermos sobre Σ . Así

$$\begin{aligned} A &= ((K(I) - \varepsilon)E + \varepsilon h_u^2) du^2 + 2\varepsilon h_u h_v dudv + ((K(I) - \varepsilon)E + \varepsilon h_v^2) dv^2 \\ II &= e du^2 + 2f dudv + g dv^2, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} K(A, II) &= \frac{eg - f^2}{((K(I) - \varepsilon)E + \varepsilon h_u^2)((K(I) - \varepsilon)E + \varepsilon h_v^2) - (\varepsilon h_u h_v)^2} \\ &= \frac{eg - f^2}{E^2(K(I) - \varepsilon)^2(1 + c \|\nabla h\|^2)} = \frac{K}{(K(I) - \varepsilon)^2(1 + c \|\nabla h\|^2)} \end{aligned}$$

donde $c = \varepsilon/(K(I) - \varepsilon)$. Ahora, de la ecuación de Gauss (3.1), (3.88) y el valor de c , tenemos

$$1 + c \|\nabla h\|^2 = \frac{K(I) - \varepsilon + \varepsilon \|\nabla h\|^2}{K(I) - \varepsilon} = \frac{K}{K(I) - \varepsilon}$$

de donde

$$K(A, II) = \frac{1}{K(I) - \varepsilon}$$

como queríamos demostrar. \square

Notemos que aún no hemos comentado nada acerca del carácter de A ; es decir, sabemos que es una métrica definida, pero no si es definida positiva o definida negativa. Pero si A es definida negativa, bastará tomar $-A$ para que sea definida positiva. Así, denotaremos por $\text{sg}(A) = \pm 1$ al signo necesario para que A sea definida positiva, y consideraremos $\text{sg}(A)A$.

A partir de ahora nos centraremos en el caso en que nuestra superficie tenga CGC, y demostraremos bajo esta hipótesis que el par (A, II) es de Codazzi, siempre y cuando A sea una métrica riemanniana.

Teorema 3.8:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie con CGC. Si el par (A, II) es fundamental, entonces (A, II) es un par de Codazzi con curvatura extrínseca constante.

Además, la curvatura de Gauss de A viene dada por

$$K(A) = \text{sg}(A) \frac{K(I) + \varepsilon \nu^2}{K(I) - \varepsilon \nu^2} \quad (3.89)$$

donde $\text{sg}(A)$ es el signo necesario para hacer que A sea definida positiva.

Demostración. La segunda afirmación es obvia por el hecho de tener CGC y el Lema 3.5.

Para ver que el par es de Codazzi, calcularemos los símbolos de Christoffel de A asociados a un parámetro conforme de I . Sea z un parámetro conforme para la Primera Forma Fundamental, esto es

$$\begin{aligned} I &= \lambda |dz|^2 \\ II &= p dz^2 + H\lambda |dz|^2 + \bar{p} d\bar{z}^2. \end{aligned}$$

Para calcular los símbolos de Christoffel asociados a A necesitamos conocer las derivadas de segundo orden de h respecto al parámetro z . Así, recordaremos aquí las ecuaciones necesarias para un parámetro conforme para I dadas en el Corolario 3.4 que vamos a necesitar:

$$\begin{aligned} K(I) &= K + \varepsilon \nu^2 \\ p_{\bar{z}} &= \frac{\lambda}{2} (H_z + \varepsilon \nu h_z) \\ |h_z|^2 &= \frac{1}{4} \lambda (1 - \nu^2) \\ \nu_z &= -H h_z - \frac{2}{\lambda} p h_{\bar{z}} \\ h_{z\bar{z}} &= \frac{1}{2} \lambda H \nu \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$A = E dz^2 + 2F |dz|^2 + \bar{E} d\bar{z}^2,$$

donde

$$\begin{aligned} E &= \text{sg}(A) \varepsilon h_z^2 \\ F &= \text{sg}(A) \left((K(I) - \varepsilon) \frac{\lambda}{2} + \varepsilon |h_z|^2 \right) = \text{sg}(A) \frac{\lambda}{2} \left(K(I) - \varepsilon + \varepsilon \frac{\|\nabla h\|^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} D &= |E|^2 - F^2 = -(K(I) - \varepsilon)^2 \frac{\lambda^2}{4} - \lambda \varepsilon (K(I) - \varepsilon) |h_z|^2 \\ &= -\frac{\lambda^2}{4} (K(I) - \varepsilon) (K(I) - \varepsilon + \varepsilon \|\nabla h\|^2) = -\frac{\lambda^2}{4} (K(I) - \varepsilon) K. \end{aligned}$$

Por tanto, los símbolos de Christoffel asociados a A vienen dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2D} (\bar{E} E_z - 2F F_z + F E_{\bar{z}}) \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2D} (E E_{\bar{z}} - 2E F_z + F E_z) \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2D} (\bar{E} E_{\bar{z}} - F \bar{E}_z) \end{aligned}$$

donde hay que notar que los símbolos Γ_{12}^2 , Γ_{22}^1 y Γ_{22}^2 son los conjugados de Γ_{12}^1 , Γ_{11}^2 y Γ_{11}^1 respectivamente. Así, primero calcularemos las derivadas de E y F con respecto a z y \bar{z} ,

$$\begin{aligned} \text{sg}(A) E_z &= 2\varepsilon h_z h_{zz} = 2\varepsilon \frac{\lambda_z}{\lambda} h_z^2 + 2\varepsilon \nu p h_z = 2 \left(\frac{\lambda_z}{\lambda} E + \varepsilon \nu p h_z \right) \\ \text{sg}(A) E_{\bar{z}} &= 2\varepsilon h_z h_{z\bar{z}} = \varepsilon \lambda H \nu h_z \\ \text{sg}(A) \left(F_z - \frac{1}{2} E_{\bar{z}} \right) &= (K(I) - \varepsilon) \frac{\lambda_z}{2} + \varepsilon (h_z h_{z\bar{z}} + h_{\bar{z}} h_{zz}) - \frac{1}{2} E_{\bar{z}} \\ &= (K(I) - \varepsilon) \frac{\lambda_z}{2} + \frac{1}{2} E_{\bar{z}} + \varepsilon h_{\bar{z}} \left(\frac{\lambda_z}{\lambda} h_z + p \nu \right) - \frac{1}{2} E_{\bar{z}} \\ &= (K(I) - \varepsilon) \frac{\lambda_z}{2} + \varepsilon \lambda_z \frac{|h_z|^2}{\lambda} + \varepsilon \nu p h_{\bar{z}} \\ &= \left(K(I) - \varepsilon + \varepsilon \frac{\|\nabla h\|^2}{2} \right) \frac{\lambda_z}{2} + \varepsilon \nu p h_{\bar{z}} \\ &= F \frac{\lambda_z}{\lambda} + \varepsilon \nu p h_{\bar{z}} \end{aligned}$$

A continuación, pasamos a calcular los símbolos de Christoffel,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2D}(\bar{E} E_z - 2F F_z + F E_{\bar{z}}) = \frac{1}{2D}(\bar{E} E_z - F(2F_z - E_{\bar{z}})) \\
&= \frac{1}{2D} \left(2\bar{E} \left(\frac{\lambda_z}{\lambda} E + \varepsilon \nu p h_z \right) - 2F \left(F \frac{\lambda_z}{\lambda} + \varepsilon \nu p h_{\bar{z}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2D} \left(2|E|^2 \frac{\lambda_z}{\lambda} + 2|h_z|^2 \nu p h_{\bar{z}} - 2F \left(F \frac{\lambda_z}{\lambda} + \varepsilon \nu p h_{\bar{z}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2D} \left(2(|E|^2 - F^2) \frac{\lambda_z}{\lambda} + 2(|h_z|^2 - \varepsilon F) \nu p h_{\bar{z}} \right) \\
&= \frac{\lambda_z}{\lambda} - \frac{\varepsilon(K(I) - \varepsilon)\lambda}{2D} \nu p h_{\bar{z}} = \frac{\lambda_z}{\lambda} + \frac{2\varepsilon}{\lambda K} \nu p h_{\bar{z}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2D}(E E_{\bar{z}} - 2E F_z + F E_z) = -\frac{1}{2D}(E(E_{\bar{z}} - 2F_z) + F E_z) \\
&= -\frac{1}{2D} \left(-2E \left(F \frac{\lambda_z}{\lambda} + \varepsilon \nu p h_{\bar{z}} \right) + 2F \left(\frac{\lambda_z}{\lambda} E + \varepsilon \nu p h_z \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2D} (2(\varepsilon F - |h_z|^2) \nu p h_z) = -\frac{\varepsilon(K(I) - \varepsilon)\lambda}{2D} \nu p h_z \\
&= \frac{2\varepsilon}{\lambda K} \nu p h_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2D}(\bar{E} E_{\bar{z}} - F \bar{E}_z) = \frac{1}{2D}(\bar{E} E_{\bar{z}} - F \bar{E}_z) = \frac{\varepsilon \lambda H \nu}{2D}(\bar{E} h_z - F h_{\bar{z}}) \\
&= -\frac{\varepsilon(K(I) - \varepsilon)\lambda^2 H \nu}{4D} h_{\bar{z}} = \frac{\varepsilon H \nu}{K} h_{\bar{z}}.
\end{aligned}$$

En resumen, tenemos que para un parámetro conforme z de I , los símbolos de Christoffel asociados a A vienen dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda_z}{\lambda} + \frac{2\varepsilon}{\lambda K} \nu p h_{\bar{z}} \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2\varepsilon}{\lambda K} \nu p h_z \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{\varepsilon H \nu}{K} h_{\bar{z}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (A, II) es un par de Codazzi si, y sólo si, (ver Lema 4 del Capítulo 1)

$$p_{\bar{z}} - \left(\frac{H\lambda}{2} \right)_z = p \Gamma_{12}^1 + \frac{H\lambda}{2} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - \bar{p} \Gamma_{11}^2. \quad (3.90)$$

Usando ahora que

$$\begin{aligned} p\Gamma_{12}^1 &= \frac{\varepsilon H\nu}{K} ph_{\bar{z}} \\ \frac{H\lambda}{2} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) &= -\frac{H\lambda_z}{2} - \frac{\varepsilon H\nu}{K} ph_{\bar{z}} + \frac{\varepsilon H^2\nu\lambda}{2K} h_z \\ \bar{p}\Gamma_{11}^2 &= \frac{\varepsilon(H^2 - K)\nu}{2K} h_z \end{aligned}$$

tenemos que (3.90) se verifica si, y sólo si,

$$p_{\bar{z}} - \frac{\lambda H_z}{2} - \frac{H\lambda_z}{2} = -\frac{H\lambda_z}{2} + \frac{\varepsilon\nu}{2} h_z$$

o equivalentemente, si, y sólo si,

$$p_{\bar{z}} = \frac{\lambda}{2}(H_z + \varepsilon\nu h_z).$$

Pero esta última ecuación es la ecuación de Codazzi de nuestra superficie (3.14), y en consecuencia (A, II) es un par de Codazzi sobre Σ

Por último, vamos a calcular la curvatura de Gauss de la métrica A , que viene dada por

$$\begin{aligned} DK(A) &= E((\Gamma_{22}^1)_z - (\Gamma_{12}^1)_{\bar{z}} + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1) \\ &\quad + F((\Gamma_{22}^2)_z - (\Gamma_{12}^2)_{\bar{z}} + |\Gamma_{11}^2|^2 - |\Gamma_{12}^1|^2), \end{aligned}$$

donde

$$D = |E|^2 - F^2 = -\frac{\lambda^2}{4}(K(I) - \varepsilon)K.$$

Si definimos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 \\ \alpha_2 &= |\Gamma_{11}^2|^2 - |\Gamma_{12}^1|^2, \end{aligned}$$

entonces, como

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 &= \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \frac{\lambda_z}{\lambda} \bar{p} h_{\bar{z}} + \frac{H^2 - K}{K^2} \nu^2 h_{\bar{z}}^2 \\
 \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 &= \frac{\varepsilon H \nu}{K} \frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} h_{\bar{z}} + \frac{H \nu^2 \|\nabla h\|^2}{2K} \bar{p} \\
 \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 &= \frac{H^2 \nu^2}{K^2} h_{\bar{z}}^2 \\
 \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 &= \frac{H \nu^2 \|\nabla h\|^2}{2K} \bar{p} \\
 |\Gamma_{11}^2|^2 &= \frac{H^2 - K}{K^2} \nu^2 |h_z|^2 \\
 |\Gamma_{12}^1|^2 &= \frac{H^2}{K^2} \nu^2 |h_z|^2
 \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{\varepsilon H \nu}{K} \frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} h_{\bar{z}} + \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \frac{\lambda_z}{\lambda} \bar{p} h_{\bar{z}} - \frac{\nu^2}{K} h_{\bar{z}}^2 \\
 \alpha_2 &= -\frac{\nu^2 |h_z|^2}{K}.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, calculemos las derivadas de los símbolos de Christoffel que nos aparecen en la expresión de $K(A)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{22}^1)_z &= \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \bar{p}_z h_{\bar{z}} + \frac{2\varepsilon}{\lambda K} \bar{p} \nu_z h_{\bar{z}} + \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \bar{p} h_{z\bar{z}} - \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K^2} \bar{p} K_z h_{\bar{z}} - \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \frac{\lambda_z}{\lambda} \bar{p} h_{\bar{z}} \\
 &= \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \bar{p}_z h_{\bar{z}} + \frac{2\varepsilon}{\lambda K} \bar{p} \nu_z h_{\bar{z}} + \frac{\varepsilon H \nu^2}{K} \bar{p} - \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K^2} \bar{p} K_z h_{\bar{z}} - \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \frac{\lambda_z}{\lambda} \bar{p} h_{\bar{z}} \\
 (\Gamma_{12}^1)_{\bar{z}} &= \frac{\varepsilon\nu}{K} H_{\bar{z}} h_{\bar{z}} + \frac{\varepsilon H}{K} \nu_{\bar{z}} h_{\bar{z}} + \frac{\varepsilon H \nu}{K} h_{\bar{z}\bar{z}} - \frac{\varepsilon H \nu}{K^2} K_{\bar{z}} h_{\bar{z}}
 \end{aligned}$$

y usando (3.16), se sigue que

$$\frac{2}{\lambda} \bar{p} \nu_z - H \nu_z = K h_{\bar{z}}.$$

Ahora, puesto que la curvatura de Gauss es constante y usando también la ecuación de Gauss, tenemos

$$K_z = -2\varepsilon\nu\nu_z.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{22}^1)_z - (\Gamma_{12}^1)_{\bar{z}} &= \frac{\varepsilon\nu}{K} \left(\frac{2}{\lambda} \bar{p}_z - H_{\bar{z}} \right) h_{\bar{z}} + \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{2}{\lambda} \bar{p}\nu_z - H\nu_{\bar{z}} \right) h_{\bar{z}} - \frac{\varepsilon\nu}{K^2} \left(\frac{2}{\lambda} \bar{p}K_z - HK_{\bar{z}} \right) h_{\bar{z}} \\
 &\quad - \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \frac{\lambda_z}{\lambda} \bar{p}h_{\bar{z}} - \frac{\varepsilon H\nu}{K} (h_{z\bar{z}} - \nu\bar{p}) \\
 &= \varepsilon h_{\bar{z}}^2 + 2 \frac{\nu^2}{K} h_{\bar{z}}^2 + \frac{\nu^2}{K} h_{\bar{z}}^2 - \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \frac{\lambda_z}{\lambda} \bar{p}h_{\bar{z}} - \frac{\varepsilon H\nu}{K} \frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} h_{\bar{z}} \\
 &= \left(1 + 2 \frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right) \varepsilon h_{\bar{z}}^2 - \alpha_1 = \text{sg}(A) \left(1 + 2 \frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right) \bar{E} - \alpha_1,
 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$(\Gamma_{22}^1)_z - (\Gamma_{12}^1)_{\bar{z}} + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 = \text{sg}(A) \left(1 + 2 \frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right) \bar{E}.$$

De forma análoga, tenemos

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{22}^2)_z &= (\ln \lambda)_{z\bar{z}} + \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \bar{p}_z h_z + \frac{2\varepsilon}{\lambda K} \bar{p}\nu_z h_z + \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \bar{p}h_{zz} - \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K^2} \bar{p}K_z h_z - \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \frac{\lambda_z}{\lambda} \bar{p}h_z \\
 &= (\ln \lambda)_{z\bar{z}} + \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \bar{p}_z h_z + \frac{2\varepsilon}{\lambda K} \bar{p}\nu_z h_z + \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \bar{p} \left(h_{zz} - \frac{\lambda_z}{\lambda} h_z \right) - \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K^2} \bar{p}K_z h_z \\
 &= (\ln \lambda)_{z\bar{z}} + \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K} \bar{p}_z h_z + \frac{2\varepsilon}{\lambda K} \bar{p}\nu_z h_z + \frac{\varepsilon(H^2 - K)\nu^2}{2K} \lambda - \frac{2\varepsilon\nu}{\lambda K^2} \bar{p}K_z h_z \\
 (\Gamma_{12}^2)_{\bar{z}} &= \frac{\varepsilon\nu}{K} H_{\bar{z}} h_z + \frac{\varepsilon H}{K} \nu_{\bar{z}} h_z + \frac{\varepsilon H^2 \nu^2}{2K} \lambda - \frac{\varepsilon H\nu}{K^2} K_{\bar{z}} h_z,
 \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
 (\Gamma_{22}^2)_z - (\Gamma_{12}^2)_{\bar{z}} &= (\ln \lambda)_{z\bar{z}} + \frac{\varepsilon\nu}{K} \left(\frac{2}{\lambda} \bar{p}_z - H_{\bar{z}} \right) h_z \\
 &\quad + \frac{\varepsilon}{K} \left(\frac{2}{\lambda} \bar{p}\nu_z - H\nu_{\bar{z}} \right) h_z - \frac{\varepsilon\nu}{K^2} \left(\frac{2}{\lambda} \bar{p}K_z - HK_{\bar{z}} \right) h_z - \frac{\varepsilon\nu^2}{2} \lambda \\
 &= (\ln \lambda)_{z\bar{z}} + \frac{\nu^2}{K} |h_z|^2 + \varepsilon |h_z|^2 + 2 \frac{\nu^2}{K} |h_z|^2 - \frac{\varepsilon\nu^2}{2} \lambda \\
 &= -K(I) \frac{\lambda}{2} + \varepsilon |h_z|^2 + 2 \frac{\nu^2}{K} |h_z|^2 - \frac{\varepsilon\nu^2}{2} \lambda - \alpha_2 \\
 &= -(K(I) + \varepsilon\nu^2) \frac{\lambda}{2} + \varepsilon |h_z|^2 \left(1 + 2 \frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right) - \alpha_2 \\
 &= -K \left(1 + 2 \frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right) \frac{\lambda}{2} + \frac{\varepsilon \|\nabla h\|^2}{2} \left(1 + 2 \frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right) \frac{\lambda}{2} - \alpha_2 \\
 &= \left(1 + 2 \frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right) \left(\frac{\varepsilon \|\nabla h\|^2}{2} - K \right) \frac{\lambda}{2} - \alpha_2 = -F \left(1 + 2 \frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right) - \alpha_2,
 \end{aligned}$$

esto es,

$$(\Gamma_{22}^2)_z - (\Gamma_{12}^2)_{\bar{z}} + |\Gamma_{11}^2|^2 - |\Gamma_{12}^1|^2 = -\text{sg}(A)F \left(1 + 2\frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right).$$

Por lo tanto, la curvatura de Gauss viene dada por

$$K(A) = \frac{1}{D} \left(\text{sg}(A) \left(1 + 2\frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right) |E|^2 - \text{sg}(A) \left(1 + 2\frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right) F^2 \right) = \text{sg}(A) \left(1 + 2\frac{\varepsilon\nu^2}{K} \right),$$

es decir,

$$K(A) = \text{sg}(A) \frac{K(I) + \varepsilon\nu^2}{K(I) - \varepsilon\nu^2}.$$

□

3.4.4. Teorema tipo Liebman

Una vez obtenida la existencia de un par de Codazzi sobre nuestra superficie con CGC, vamos a clasificar dichas superficies. Como hemos venido comentando en la Secciones previas, las herramientas a utilizar en la clasificación serán los Teoremas de Milnor (para el caso en que la curvatura extrínseca del par sea positiva) y Wissler (curvatura extrínseca negativa).

Lo primero que veremos es la caracterización de las superficies cuyo par (A, II) sea totalmente umbilical, esto es, cuando exista una función $\varrho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $II = \varrho A$.

Teorema 3.9:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie con CGC $K(I) > 0$ si $\varepsilon = -1$ (resp. $K(I) > 1$ si $\varepsilon = 1$). Supongamos que el par (A, II) es totalmente umbilical. Entonces Σ es un trozo de una de las superficies completas de revolución con CGC $K(I)$.

Demostración. Haremos esta demostración en dos partes en aras de la claridad. Primero, demostraremos que la inmersión debe ser helicoidal, esto es, invariante bajo un grupo uniparamétrico de isometrías del espacio ambiente. Segundo, mostraremos que las órbitas de este movimiento helicoidal son círculos en un plano horizontal $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \{h_0\}$. Luego, concluiremos de estas dos afirmaciones que la superficie es de revolución.

Como el par (A, II) es totalmente umbilical tenemos que $\det(II) = \varrho^2 \det(A)$, y por lo tanto del Lema 3.5, tenemos que

$$\varrho^2 = \frac{\det(II)}{\det(A)} = K(A, II) = \frac{1}{K(I) - \varepsilon},$$

esto es, $II = \frac{1}{\sqrt{K(I)-\varepsilon}}A$.

Ahora, consideremos (u, v) parámetros doblemente ortogonales para la primera y Segunda Forma Fundamental de la superficie, esto es,

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + Gdv^2 \\ II &= k_1Edu^2 + k_2Gdv^2 \end{aligned}$$

donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales de la superficie. Recordemos que este tipo de parametrización es posible en un entorno de todo punto no umbilical, así como en el interior del conjunto de puntos umbilicales de la superficie. Así, consideraremos este tipo de puntos y utilizando el hecho de que dicho conjunto es denso en la superficie, deduciremos que las propiedades obtenidas se pueden extender a toda la superficie por continuidad.

Como

$$A = ((K(I) - \varepsilon)E + \varepsilon h_u^2) du^2 + 2\varepsilon h_u h_v du dv + ((K(I) - \varepsilon)G + \varepsilon h_v^2) dv^2$$

y $II = \frac{1}{\sqrt{K(I)-\varepsilon}}A$, tenemos

$$k_1 E = \sqrt{K(I) - \varepsilon} \left(E + \frac{\varepsilon}{K(I) - \varepsilon} h_u^2 \right) \quad (3.91)$$

$$0 = h_u h_v \quad (3.92)$$

$$k_2 G = \sqrt{K(I) - \varepsilon} \left(G + \frac{\varepsilon}{K(I) - \varepsilon} h_v^2 \right). \quad (3.93)$$

De (3.92) es fácil ver que el conjunto dado por la unión del interior del conjunto donde $h_u = 0$ y el interior del conjunto donde $h_v = 0$ es denso. Así, podemos suponer que $h_u \equiv 0$ en un entorno donde las coordenadas (u, v) estén permitidas.

Entonces, de (3.91), la curvatura principal $k_1 = \sqrt{K(I) - \varepsilon}$ es una constante positiva. Además, de (3.4)

$$\nu_u = d\nu(\partial_u) = -\langle k_1 \partial_u, T \rangle = -k_1 h_u = 0.$$

Luego, de la ecuación de Gauss 3.1, $(k_2)_u = 0$.

Ahora, (3.93) la podemos reescribir como

$$k_1(k_2 - k_1)G = \varepsilon h_v^2. \quad (3.94)$$

Puesto que estamos considerando un entorno de puntos no umbilicales o un entorno totalmente umbilical, observamos que si $k_1 \equiv k_2$ entonces h_v también se anularía

idénticamente en el entorno totalmente umbilical. Por consiguiente, h debe ser constante, esto es, la superficie debería estar contenida en un plano horizontal y por lo tanto $K(I) = \varepsilon$, lo cuál es una contradicción.

Así, $k_1 \neq k_2$ en nuestro entorno y $G_u = 0$ de (3.94).

Si consideramos la Ecuación de Codazzi (3.2) para $X = \partial_u$ e $Y = \partial_v$, tenemos

$$(k_2 - k_1)\nabla_{\partial_u}\partial_v = \nabla_{\partial_u}k_2\partial_v - \nabla_{\partial_v}k_1\partial_u = \varepsilon\nu(\langle\partial_v, T\rangle\partial_u - \langle\partial_u, T\rangle\partial_v) = \varepsilon\nu h_v\partial_u.$$

Además, $\nabla_{\partial_u}\partial_v = \frac{E_v}{2E}\partial_u$ y por lo tanto $(\log E)_{uv} = (E_v/E)_u = 0$. Esto es, la función $E(u, v)$ se puede escribir como $E(u, v) = E_1(u)E_2(v)$ para ciertas funciones positivas E_1 y E_2 .

Finalmente, tomemos los nuevos parámetros (x, y) tales que

$$dx = \sqrt{E_1(u)} du, \quad y = v.$$

Entonces, la Primera Forma Fundamental, la Segunda Forma Fundamental, h y ν sólo dependen de y , esto es, las funciones E, G, k_1, k_2, h y ν no dependen de (x, y) sino sólo de y .

Así, las inmersiones $\psi(x, y)$ y $\varphi(x, y) = \psi(x + x_0, y)$, para cierto x_0 , tienen las mismas funciones E, G, k_1, k_2, h y ν . Por lo tanto, $\psi(x, y)$ y $\psi(x + x_0, y)$ sólo difieren en una isometría del espacio ambiente para cada x_0 (ver [26]), esto es, ψ es helicoidal y las órbitas están dadas por $\beta(t) = \psi(x + t, y)$.

En la segunda parte de la demostración veremos que la superficie es de rotación. Primero, observemos que $\beta(t)$ está contenida en un plano horizontal debido a que la función altura sólo depende de y .

En particular, $\beta(t) \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \{y\} \cong \mathbb{M}^2(\varepsilon)$ es invariante bajo un grupo continuo de isometrías de $\mathbb{M}^2(\varepsilon)$. Entonces, la curvatura de β en $\mathbb{M}^2(\varepsilon)$ es constante.

Luego, si $\varepsilon = 1$ entonces β está contenida en un círculo de \mathbb{S}^2 . De otro lado, si $\varepsilon = -1$, β está contenida en un círculo de \mathbb{H}^2 si, y sólo si, su curvatura es mayor que uno.

Para este último caso, un cálculo sencillo nos dice

$$\nabla_{\partial_x}\partial_x = -\frac{1}{2}\frac{E_y}{G}\partial_y + k_1EN,$$

donde $\bar{\nabla}$ denota la conexión de Levi-Civita en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Además, β se puede parametrizar por el arco como $\beta(s) = \psi(x + s/\sqrt{E(y)}, y)$. Entonces, el cuadrado de su curvatura está dado por

$$\langle\nabla_{\beta'(s)}\beta'(s), \nabla_{\beta'(s)}\beta'(s)\rangle = \frac{1}{E(y)^2}\left(\frac{E_y(y)^2}{G(y)} + k_1^2E(y)^2\right) \geq k_1^2 = K(I) + 1 > 1.$$

Por consiguiente, β está contenida en un círculo en cualquier caso, y la superficie debe ser de rotación. Finalmente, la demostración termina con el siguiente Lema. \square

Lema 3.6:

Sea $\psi : S \rightarrow \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie de revolución tal que las curvaturas principales k_1 asociadas con sus paralelos coinciden. Si $k_1 > 1$ para $\varepsilon = -1$ o $k_1 > 0$ para $\varepsilon = 1$ entonces, salvo isometrías, $\psi(S)$ es un trozo de una superficie completa de revolución con CGC descrita en la Sección anterior.

Demostración. Parametricemos nuestra superficie como

$$\begin{aligned} \psi(u, v) &= (\cosh k(v), \sinh k(v) \cos u, \sinh k(v) \sin u, h(v)) && \text{si } \varepsilon = -1, \\ \psi(u, v) &= (\sin k(v), \cos k(v) \cos u, \cos k(v) \sin u, h(v)) && \text{si } \varepsilon = 1, \end{aligned}$$

con $k'(v)^2 + h'(v)^2 = 1$.

Entonces, las curvaturas principales asociadas a los paralelos vienen dadas por

$$k_1 = h'(v) \coth(k(v)) \quad \text{si } \varepsilon = -1, \quad k_1 = h'(v) \tan(k(v)) \quad \text{si } \varepsilon = 1.$$

Las soluciones a estas ecuaciones están dadas por

$$k(v) = k_0(\pm(v + c_0)), \quad h(v) = \pm h_0(\pm(v + c_0)) + c_1,$$

donde c_0, c_1 son dos constante reales y $k_0(v), h_0(v)$ son las funciones dadas por (3.72) y (3.73) si $\varepsilon = -1$, o (3.84) y (3.85) si $\varepsilon = 1$.

Por lo tanto, la superficie es, salvo reparametrizaciones y traslaciones verticales, un trozo de uno de los ejemplos completos con CGC. \square

Ya con estos resultados, la clasificación de las superficies con CGC es casi inmediata

Teorema 3.10:

Dada una constante real $K(I)$, existe, salvo isometrías, una única superficie completa de CGC $K(I) > 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y una única superficie completa de CGC $K(I) > 0$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Además, estas superficies son rotacionalmente simétricas.

Demostración. Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie completa con CGC $K(I) > 1$ si $\varepsilon = 1$ o $K(I) > 0$ si $\varepsilon = -1$. Entonces, por los Teoremas de Bonnet y Gauss-Bonnet, Σ debe ser una esfera topológica.

Además, por el Teorema 3.8, (A, II) es un par de Codazzi con curvatura extrínseca constante y positiva, de donde obtenemos que la parte $(2, 0)$ de A es holomorfa para la estructura inducida por II . Esto es, si z es un parámetro conforme para II (notemos que II es un métrica riemanniana debido a que la curvatura extrínseca de (A, II) es positiva), entonces

$$Q dz^2 = A \left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) dz^2$$

es una diferencial cuadrática holomorfa sobre Σ .

Por lo tanto, al ser Σ una esfera topológica, $Q dz^2$ debe ser idénticamente cero sobre Σ , de donde obtenemos que (A, II) es un par totalmente umbilical. Luego, sin más que utilizar ahora el Teorema 3.9 obtenemos nuestro resultado. \square

Este resultado clasifica todas las superficies inmersas completas con CGC positiva en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, y con CGC mayor que 1 en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Notemos que la condición sobre la curvatura de Gauss de la superficie coincide con la que se impone en los espacios modelo \mathbb{H}^3 y \mathbb{S}^3 , respectivamente, para clasificar las superficies de CGC positiva como esferas de revolución.

Aún nos quedan por estudiar los casos en que $K(I) \in (0, 1]$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. En este sentido veremos a continuación que no existen superficies completas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ con CGC $K(I) \in (0, 1)$, en analogía de lo que ocurre en \mathbb{S}^3 .

Teorema 3.11:

No existen superficies completas con CGC $K(I) \in (0, 1)$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos que una tal superficie Σ existe. Entonces, de nuevo por los Teoremas de Bonnet y Gauss-Bonnet, la superficie debería ser una esfera topológica. Por lo tanto, debería existir un punto $p_0 \in \Sigma$ donde la función altura de la superficie alcance su máximo absoluto y en particular $\nu(p_0) = \pm 1$. Pero la ecuación de Gauss de la superficie nos dice que

$$K(I) = K + 1, \text{ en } p_0,$$

esto es, $K(p_0) = k_1(p_0)k_2(p_0) < 0$ y por lo tanto en todo entorno de p_0 debería haber puntos a altura mayor y menor que $h(p_0)$ debido a que las curvaturas principales en p_0 tienen signo opuesto. Pero esto es una contradicción con el hecho de que p_0 sea un máximo absoluto. \square

Por último, cabe destacar que aún no se ha conseguido una clasificación de las superficies completas con CGC $K(I) = 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, y poco se ha estudiado en este tema. Parece natural pensar que las únicas superficies completas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ con CGC $K(I) = 1$ sean los planos horizontales, esto es, $\mathbb{S}^2 \times \{t_0\}$ $t_0 \in \mathbb{R}$, en analogía con este tipo de superficies en \mathbb{S}^3 . No obstante, veremos un poco más adelante una representación para superficies con CGC $K(I) = 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ cuyo normal nunca sea vertical.

3.4.5. Teorema tipo Hilbert

En esta Subsección veremos que no existen superficies completas con CGC $K(I) < -1$ en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Para ello será esencial la existencia del par de Codazzi dado en

la Definición 3.6, ya que nos asegura la existencia global, cuando la superficie es completa, de una Red de Tchebychev.

Teorema 3.12:

No existen superficies completas con CGC $K(I) < -1$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ o $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Demostración. La demostración se divide en dos pasos. Primero veremos que A es una métrica completa cuando I es completa, y después, usando esta afirmación y la relación que existe entre la curvatura de Gauss de A y de I , llegaremos a una contradicción usando el Teorema de Wissler (Lema 6 del Capítulo 1).

Por reducción al absurdo, supongamos que existe una tal superficie $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Entonces, lo primero que tenemos que notar es que $K(I) - \varepsilon < 0$ cuando $K(I) < -1$, y por lo tanto $\text{sg}(A) = -1$, esto es

$$A = -(K(I) - \varepsilon)I - \varepsilon dh^2.$$

Veamos que A será completa siempre que I lo sea. Para ello consideremos $v \in T\Sigma$ y tengamos en cuenta que

$$\langle \nabla h, v \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle$$

ya que $\|\nabla h\| \leq 1$. Luego,

- si $\varepsilon = 1$, tenemos que

$$A(v, v) = -(K(I) - 1)I(v, v) - \langle \nabla h, v \rangle^2 \geq -K(I)I(v, v)$$

- si $\varepsilon = -1$, tenemos que

$$A(v, v) = -(K(I) + 1)I(v, v) + \langle \nabla h, v \rangle^2 \geq -(K(I) + 1)I(v, v).$$

Es decir, en cualquier caso $A \geq c_0 I$ donde c_0 es una constante positiva, y por lo tanto A es una métrica completa sobre Σ .

Además, de (3.89) tenemos que $K(A)$ es una función monótona vista como función de ν^2 . Como $0 \leq \nu^2 \leq 1$, nos es suficiente evaluar en 0 y 1 para ver donde varía $K(A)$, esto es

- $K(A) \leq -\frac{K(I)+1}{K(I)-1} < 0$ si $\varepsilon = 1$.
- $K(A) \leq -1$ si $\varepsilon = -1$.

En resumen, (A, II) es un par de Codazzi con curvatura extrínseca constante negativa $K(A, II) = K(I) - \varepsilon < 0$ y A es completa. El Teorema de Wissler afirma que bajo estas condiciones el ínfimo de $|K(A)|$ en Σ debe ser cero, pero como hemos visto, $K(A)$ está acotada superiormente por una constante negativa en Σ , de donde obtenemos nuestra contradicción. \square

3.4.6. Estimaciones de altura

En esta Sección estableceremos acotaciones óptimas para grafos verticales en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ con CGC $K(I) > 0$ si $\varepsilon = -1$ o $K(I) > 1$ si $\varepsilon = 1$.

Primero, y como hicimos para el caso de superficies de CMC, estableceremos las ecuaciones necesarias que vamos a utilizar:

Lema 3.7:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie conexa. Supongamos que la Segunda Forma Fundamental, II , de la superficie es una métrica definida positiva. Sea z un parámetro conforme para II , esto es

$$\begin{aligned} I &= Edz^2 + 2F|dz|^2 + \bar{E}d\bar{z}^2, \\ II &= 2\rho|dz|^2 \end{aligned} \quad (3.95)$$

y denotemos $\alpha = \bar{E}h_z - Fh_{\bar{z}}$ y $D = |E|^2 - F^2$.

Entonces, si la curvatura de Gauss $K(I)$ es constante, se verifican las siguientes ecuaciones

$$K(I) = K + \varepsilon\nu^2 \quad (3.96)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \varepsilon\alpha\frac{\nu}{\rho} \quad (3.97)$$

$$h_{z\bar{z}} = \frac{\rho\nu}{K}(K - \varepsilon(1 - \nu^2)) \quad (3.98)$$

$$\nu_z = \frac{K\bar{\alpha}}{\rho} \quad (3.99)$$

$$\alpha h_z + \bar{\alpha} h_{\bar{z}} = D(1 - \nu^2) \quad (3.100)$$

$$\nu_{z\bar{z}} = \varepsilon\nu\frac{|\alpha|^2}{D} - KF\nu \quad (3.101)$$

donde Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ son los símbolos de Christoffel asociados a z .

Demostración. Como podemos ver, la mayoría de las ecuaciones permanecen como en el Corolario 3.5.

Las ecuaciones que sí cambian, se obtienen fácilmente sin más que tener en cuenta el siguiente hecho: como la curvatura de Gauss $K(I)$ es constante, de (3.96) y (3.98) tenemos

$$K_z = -2\varepsilon\nu\frac{\alpha K}{\rho},$$

que sustituida en las mencionadas ecuaciones, nos dan el resultado. \square

Antes de continuar con las estimaciones, notemos que el Lema 3.7, tiene dos interesantes consecuencias

Corolario 3.10:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie conexa.

1. Si Σ es una superficie llana en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, que es localmente un grafo sobre \mathbb{H}^2 , entonces la proyección $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^2$ es una aplicación armónica para la estructura inducida por la Segunda Forma Fundamental.
2. Si Σ es una superficie con CGC $K(I) = 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ con $\nu^2 < 1$ sobre Σ , entonces la función altura, h , es armónica para la estructura inducida por la Segunda Forma Fundamental.

Este resultado debe entenderse como un análogo al hecho de que tanto la proyección como la función altura de una superficie minimal en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ son aplicaciones armónicas para la estructura inducida por la Primera Forma Fundamental.

Ahora, y siguiendo el espíritu de las estimaciones verticales para superficies con CMC, tenemos

Teorema 3.13:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ un grafo compacto sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon)$, con CGC positiva $K(I) > 0$ si $\varepsilon = -1$ o $K(I) > 1$ si $\varepsilon = 1$, y cuyo borde está contenido en el plano horizontal $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \{0\}$. Entonces la altura máxima que Σ puede alcanzar con respecto a $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \{0\}$ es

$$\sqrt{\frac{K(I)+1}{K(I)}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}}\right) \quad \text{si } \varepsilon = -1, \tag{3.102}$$

$$\sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \ln\left(\frac{\sqrt{K(I)+1}}{\sqrt{K(I)-1}}\right) \quad \text{si } \varepsilon = 1. \tag{3.103}$$

Además, la igualdad se da si, y sólo si, Σ es el hemisferio de una superficie completa con CGC $K(I)$.

Demostración. Observemos que, como $K(I)$ es positiva y mayor que ε , la curvatura extrínseca K es también positiva, de (3.96) y $\nu^2 \leq 1$. Además podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\nu \leq 0$ sobre la superficie tomando la orientación interior de la superficie.

Consideremos las funciones

$$f(\nu) = \sqrt{\frac{K(I)+1}{K(I)}} \arctan\left(\frac{\nu}{\sqrt{K(I)}}\right) \quad \text{si } \varepsilon = -1$$

$$f(\nu) = -\sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \ln\left(\frac{\sqrt{K(I)-\nu}}{\sqrt{K(I)-\nu^2}}\right) \quad \text{si } \varepsilon = 1$$

y $\phi = h + f$ en S . Notemos que $\phi = f \leq 0$ en ∂S . Nuestro propósito es demostrar que $\phi_{z\bar{z}} \geq 0$ en S , ya que bajo estas condiciones el Principio del Máximo afirma que $\phi \leq 0$ en S . De esta última afirmación la estimación se obtiene de forma sencilla, ya que si $\phi \leq 0$, entonces (3.102) y (3.103) se verifican. Notemos además que dichas estimaciones son óptimas, debido a que se alcanzan para los hemisferios de las superficies completas con CGC positiva $K(I) > \varepsilon$.

Pasemos a ver que $\phi_{z\bar{z}} \geq 0$. De (3.99) y (3.101) tenemos

$$f_{z\bar{z}} = \frac{\sqrt{K(I) - \varepsilon}}{K^2} (K\nu_{z\bar{z}} + 2\varepsilon\nu|\nu_z|^2) = \frac{-\sqrt{K(I) - \varepsilon}\nu}{K} \left(\frac{\varepsilon|\alpha|^2}{D} + KF \right).$$

Usando la definición de α y (3.96), obtenemos

$$KF + \frac{\varepsilon|\alpha|^2}{D} = KF + \varepsilon(|h_z|^2 - F\|T\|^2) = F(K(I) - \varepsilon) + \varepsilon|h_z|^2.$$

Luego, de (3.98) se sigue que

$$\phi_{z\bar{z}} = \frac{(K(I) - \varepsilon)\nu}{K} \left(\rho - \sqrt{K(I) - \varepsilon} \left(F + \frac{\varepsilon|h_z|^2}{K(I) - \varepsilon} \right) \right). \quad (3.104)$$

Como $K(A, II) = K(I) - \varepsilon$, entonces

$$K(I) - \varepsilon = \frac{\rho^2}{\left(F + \frac{\varepsilon|h_z|^2}{K(I) - \varepsilon} \right)^2 - \frac{|Q|^2}{(K(I) - \varepsilon)^2}}$$

o equivalentemente

$$\rho^2 - (K(I) - \varepsilon) \left(F + \frac{\varepsilon|h_z|^2}{K(I) - \varepsilon} \right)^2 = -\frac{|Q|^2}{K(I) - \varepsilon}. \quad (3.105)$$

Puesto que $F + \frac{\varepsilon|h_z|^2}{K(I) - \varepsilon}$ es la parte $(1, 1)$ de la métrica A con respecto a II , entonces debe ser positiva. Luego, de (3.104) y (3.105), $\phi_{z\bar{z}}$ es mayor o igual a cero.

Finalmente, notemos que si se alcanza la altura máxima, entonces $\phi_{z\bar{z}} \equiv 0$. Esto es, Q o ν es idénticamente nula sobre Σ . Pero Σ no puede estar contenida en un cilindro ya que $K(I) \neq 0$, y por lo tanto $\nu \neq 0$. Luego, $Q \equiv 0$ y la caracterización la obtenemos sin más que usar el Teorema 3.9. \square

Como una consecuencia del Principio de Reflexión de Alexandrov con respecto a planos horizontales en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, tenemos el siguiente

Corolario 3.11:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie compacta y embebida con CGC positiva $K(I) > 0$ si $\varepsilon = -1$ o $K(I) > 1$ si $\varepsilon = 1$, tal que su borde $\partial\Sigma$ (posiblemente vacío) está contenido en un plano horizontal $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \{t_0\}$. Entonces la diferencia de altura entre su punto más alto y su punto más bajo es menor o igual a

$$2\sqrt{\frac{K(I)+1}{K(I)}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}}\right) \quad \text{si } \varepsilon = -1$$

$$2\sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \ln\left(\frac{\sqrt{K(I)+1}}{\sqrt{K(I)-1}}\right) \quad \text{si } \varepsilon = 1.$$

Además, si dicha diferencia se alcanza, Σ es, salvo isometrías, la superficie completa con CGC $K(I)$.

3.4.7. Representación de CGC y Curvatura extrínseca positiva

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie con CGC y curvatura extrínseca positiva, y consideremos la orientación que hace a II una métrica definida positiva sobre nuestra superficie. Supongamos además que Σ es transversa a cada plano horizontal, en otras palabras, que $\nu^2 < 1$ sobre Σ .

Nos referiremos a estas superficies como $K(I)$ -**superficies transversas**.

Teorema 3.14:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una $K(I)$ -superficie transversa. Entonces, dado un parámetro local z conforme para II , la Primera y Segunda Forma Fundamental de Σ se pueden recuperar en términos de su función altura h , función ángulo ν y la constante $K(I)$ como

$$E = \frac{h_z^2}{1-\nu^2} - \frac{\nu_z^2}{(1-\nu^2)(K(I)-\varepsilon\nu^2)} \quad (3.106)$$

$$F = \frac{|h_z|^2}{1-\nu^2} + \frac{|\nu_z|^2}{(1-\nu^2)(K(I)-\varepsilon\nu^2)} \quad (3.107)$$

$$\rho = -\frac{\nu_z h_{\bar{z}} + \nu_{\bar{z}} h_z}{1-\nu^2} > 0. \quad (3.108)$$

Además, h y ν verifican

$$h_{z\bar{z}} = -\frac{(K(I)-\varepsilon)\nu}{(1-\nu^2)(K(I)-\varepsilon\nu^2)}(\nu_z h_{\bar{z}} + \nu_{\bar{z}} h_z) \quad (3.109)$$

$$\nu_{z\bar{z}} = -\frac{\nu}{(1-\nu^2)(K(I)-\varepsilon\nu^2)}((K(I)-2\varepsilon\nu^2+\varepsilon)|\nu_z|^2 + (K(I)-\varepsilon\nu^2)^2|h_z|^2). \quad (3.110)$$

Recíprocamente, sean $K(I) \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ constantes, $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ y $\nu : S \rightarrow (-1, 1)$ funciones en una superficie de Riemann simplemente conexa S verificando (3.109), (3.110), $K(I) - \varepsilon\nu^2 > 0$ y $\nu_z h_{\bar{z}} + \nu_{\bar{z}} h_z < 0$. Entonces, existe una inmersión $\psi : S \rightarrow \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ tal que $\psi(S) = \Sigma$ es una $K(I)$ -superficie transversa cuya Primera y Segunda Forma Fundamental están dadas por

$$I = Edz^2 + 2F|dz|^2 + \bar{E}d\bar{z}^2, \quad II = 2\rho|dz|^2,$$

donde E , F y ρ están definidos por (3.106), (3.107) y (3.108) respectivamente, cuya función altura y función ángulo están dadas por $h \circ \psi^{-1}$ y $\nu \circ \psi^{-1}$ (que seguiremos denotando simplemente por h y ν respectivamente) y la estructura inducida por su Segunda Forma Fundamental es la estructura de S . Además, dicha inmersión es única salvo isometrías de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

Demostración. Veamos primero cómo podemos recuperar la inmersión en términos de los datos h , ν y $K(I)$. Para ello usaremos el Lema 3.7, donde se obtuvieron las ecuaciones de estructura de una superficie con curvatura de Gauss constante y curvatura extrínseca positiva. Recordemos que, dado z un parámetro conforme para II , podemos escribir

$$\begin{aligned} I &= Edz^2 + 2F|dz|^2 + \bar{E}d\bar{z}^2, \\ II &= 2\rho|dz|^2 \end{aligned}$$

y denotemos $\alpha = \bar{E}h_z - Fh_{\bar{z}}$ y $D = |E|^2 - F^2$.

Entonces obteníamos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} K(I) &= K + \varepsilon\nu^2 \\ \Gamma_{12}^1 &= \varepsilon\alpha\frac{\nu}{\rho} \\ h_{z\bar{z}} &= \frac{\rho\nu}{K}(K - \varepsilon(1 - \nu^2)) \\ \nu_z &= \frac{K\bar{\alpha}}{\rho} \\ \alpha h_z + \bar{\alpha}h_{\bar{z}} &= D(1 - \nu^2) \\ \nu_{z\bar{z}} &= \varepsilon\nu\frac{|\alpha|^2}{D} - KF\nu \end{aligned}$$

donde Γ_{ij}^k , $i, j, k = 1, 2$ son los símbolos de Christoffel asociados a z .

De la definición de α y (3.100) tenemos

$$\frac{\alpha h_z + \bar{\alpha} h_{\bar{z}}}{1 - \nu^2} = D = |E|^2 - F^2 = \left| \frac{\alpha + F h_{\bar{z}}}{h_z} \right|^2 - F^2,$$

esto es,

$$F = -\frac{|\alpha|^2}{\alpha h_z + \bar{\alpha} h_{\bar{z}}} + \frac{|h_z|^2}{1 - \nu^2}.$$

Por lo tanto, usando la definición de α de nuevo y sustituyendo en ella la expresión que acabamos de obtener para F ,

$$E = \frac{\bar{\alpha}^2}{\alpha h_z + \bar{\alpha} h_{\bar{z}}} + \frac{h_z^2}{1 - \nu^2}.$$

Por otra parte, de (3.96) y (3.99)

$$\alpha = \frac{\rho \nu_{\bar{z}}}{K(I) - \varepsilon \nu^2}. \quad (3.111)$$

Además, de la expresión de la curvatura extrínseca, $K = -\rho^2/D$, y de (3.100) obtenemos

$$\rho^2 = -D K = -\frac{K(I) - \varepsilon \nu^2}{1 - \nu^2} (\alpha h_z + \bar{\alpha} h_{\bar{z}}).$$

Luego, hemos obtenido hasta ahora que E y F se pueden escribir en términos de h_z , ν , ν_z y $K(I)$ como

$$E = \frac{h_z^2}{1 - \nu^2} - \frac{\nu_z^2}{(1 - \nu^2)(K(I) - \varepsilon \nu^2)},$$

$$F = \frac{|h_z|^2}{1 - \nu^2} + \frac{|\nu_z|^2}{(1 - \nu^2)(K(I) - \varepsilon \nu^2)}.$$

Ahora, de la definición de α , (3.99) y (3.111)

$$\alpha = -\frac{\nu_z h_{\bar{z}} + \nu_{\bar{z}} h_z}{(1 - \nu^2)(K(I) - \varepsilon \nu^2)} \nu_{\bar{z}}$$

$$\rho = -\frac{\nu_z h_{\bar{z}} + \nu_{\bar{z}} h_z}{1 - \nu^2} > 0.$$

En este punto, hemos obtenido la métrica inducida, o Primera Forma Fundamental, y la Segunda Forma Fundamental de cualquier superficie transversa con curvatura extrínseca positiva en términos de h , ν , $K(I)$ y la estructura conforme dada por II . Obsérvese que no hemos hecho uso en ningún momento de que la curvatura de Gauss de la superficie sea constante.

Hasta el momento, hemos visto que (3.106), (3.107) y (3.108) se verifican. Ahora, para comprobar (3.109) y (3.110), basta observar que dichas ecuaciones son equivalentes a (3.98) y (3.101) cuando usamos las expresiones de E , F y ρ que hemos calculado antes.

El recíproco es una comprobación de las ecuaciones de estructura dadas en el Lema 3.7. □

Este resultado es de especial interés cuando trabajamos con superficies transversas en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ con CGC $K(I) = 1$. Como ya se ha comentado en algún momento de este Capítulo, la clasificación de dichas superficies (suponiendo que son completas) aún no es conocida. En este caso, las ecuaciones de estructura tomarán una forma sencilla, reduciéndose a la ecuación elíptica del *sinh-Gordon*.

Corolario 3.12:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie transversa con CGC $K(I) = 1$. Entonces, dado un parámetro local z conforme para II , la Primera y Segunda Forma Fundamental de Σ se pueden recuperar en términos de su función altura h y $\omega = \operatorname{arctanh}(\nu)$ como

$$E = \cosh^2(\omega)h_z^2 - \omega_z^2 \tag{3.112}$$

$$F = \cosh^2(\omega)|h_z|^2 + |\omega_z|^2 \tag{3.113}$$

$$\rho = \omega_z h_{\bar{z}} + \omega_{\bar{z}} h_z > 0 \tag{3.114}$$

donde ω verifica

$$\omega_{z\bar{z}} + |h_z|^2 \sinh(\omega) \cosh(\omega) = 0. \tag{3.115}$$

Recíprocamente, sea $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica sobre una superficie de Riemann simplemente conexa S y $\omega : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función verificando $\omega_z h_{\bar{z}} + \omega_{\bar{z}} h_z > 0$ y (3.115). Entonces, existe una inmersión $\psi : S \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ tal que $\psi(S) = \Sigma$ es transversa con CGC $K(I) = 1$ cuya Primera y Segunda Forma Fundamental están dadas por

$$I = Edz^2 + 2F|dz|^2 + \bar{E}d\bar{z}^2, \quad II = 2\rho|dz|^2,$$

donde E , F y ρ están definidos por (3.112), (3.113) y (3.114) respectivamente, cuya función altura y función ángulo están dadas por $h \circ \psi^{-1}$ y $\nu \circ \psi^{-1} = \tanh(\omega)$ (que seguiremos denotando simplemente por h y ν respectivamente) y la estructura inducida por su Segunda Forma Fundamental es la estructura de S . Además, dicha inmersión es única salvo isometrías de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Demostración. Es una simple reformulación del Teorema 3.14 para este caso particular. Lo único que tenemos que observar es lo siguiente: si $\Sigma \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ es una superficie transversa, esto es $\nu^2 < 1$, con $K(I) = 1$, se sigue de la ecuación de Gauss que $K > 0$ y, por lo tanto, podemos suponer que II es una métrica riemanniana sobre Σ .

Ahora, al ser $K(I) = 1$, de (3.98) se sigue que h es armónica para la estructura dada por la Segunda Forma Fundamental, y podemos reescribir (3.114) como

$$\nu_{z\bar{z}} = -\nu \left(|h_z|^2 + 2 \frac{|\nu_z|^2}{1 - \nu^2} \right).$$

Luego, si definimos $\omega = \operatorname{arctanh}(\nu)$, esta última ecuación pasa a

$$\omega_{z\bar{z}} + |h_z|^2 \operatorname{senh}(\omega) \operatorname{cosh}(\omega) = 0,$$

como queríamos demostrar. □

De hecho, como $h_z \neq 0$ en una superficie transversa, y h_z es holomorfa (h es armónica) cuando $K(I) = 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, podemos tomar un nuevo parámetro conforme ζ para II tal que $d\zeta = h_z dz$. De este modo (3.115) se transforma en la clásica ecuación elíptica del senh -Gordon

$$\omega_{\zeta\bar{\zeta}} + \operatorname{senh}(\omega) \operatorname{cosh}(\omega) = 0.$$

3.4.8. Representación de CGC y Curvatura extrínseca negativa

Como era de esperar, resultados análogos a los anteriores se pueden obtener para superficies transversas con CGC y curvatura extrínseca negativa. En este caso II es una métrica lorentziana, y podemos ver Σ como una superficie de Lorentz con la estructura inducida (véase [108]).

Como hemos apuntado en la Subsección 1.3.3, cuando la Segunda Forma Fundamental es una métrica lorentziana podemos considerar parámetros asintóticos (u, v) sobre Σ , esto es

$$\begin{aligned} I &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ II &= 2fdudv. \end{aligned}$$

En esencia, el desarrollo es exactamente el mismo que el anterior, considerando ahora las ecuaciones de estructura dadas por el Corolario 3.6

Teorema 3.15:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una $K(I)$ -superficie transversa con $K < 0$. Entonces, dados unos parámetros locales asintóticos (u, v) para II , la Primera y Segunda Forma Fundamental de Σ se pueden recuperar en términos de su función altura h , función ángulo ν y la

constante $K(I)$ como

$$E = \frac{h_u^2}{1 - \nu^2} - \frac{\nu_u^2}{(1 - \nu^2)(K_I - \varepsilon\nu^2)} \quad (3.116)$$

$$F = \frac{h_u h_v}{1 - \nu^2} + \frac{\nu_u \nu_v}{(1 - \nu^2)(K_I - \varepsilon\nu^2)} \quad (3.117)$$

$$G = \frac{h_v^2}{1 - \nu^2} - \frac{\nu_v^2}{(1 - \nu^2)(K_I - \varepsilon\nu^2)} \quad (3.118)$$

$$f = -\frac{\nu_u h_v + \nu_v h_u}{1 - \nu^2} > 0. \quad (3.119)$$

Además, h y ν verifican

$$h_{uv} = -\frac{(K_I - \varepsilon)\nu}{(1 - \nu^2)(K_I - \varepsilon\nu^2)}(\nu_u h_v + \nu_v h_u) \quad (3.120)$$

$$\nu_{uv} = -\frac{\nu}{(1 - \nu^2)(K_I - \varepsilon\nu^2)}((K_I - 2\varepsilon\nu^2 + \varepsilon)\nu_u \nu_v + (K_I - \varepsilon\nu^2)^2 h_u h_v). \quad (3.121)$$

Recíprocamente, sean $K(I) \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ constantes, $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ y $\nu : S \rightarrow (-1, 1)$ funciones en una superficie de Lorentz simplemente conexa S verificando (3.120), (3.121), $K(I) - \varepsilon\nu^2 < 0$ y $\nu_u h_v + \nu_v h_u < 0$. Entonces, existe una inmersión $\psi : S \rightarrow \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ tal que $\psi(S) = \Sigma$ es una $K(I)$ -superficie transversa cuya Primera y Segunda Forma Fundamental están dadas por

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad II = 2fdudv,$$

donde E, F, G y f están definidos por (3.116), (3.117), (3.118) y (3.119) respectivamente, cuya función altura y función ángulo están dadas por $h \circ \psi^{-1}$ y $\nu \circ \psi^{-1}$ (que seguiremos denotando simplemente por h y ν respectivamente) y la estructura inducida por su Segunda Forma Fundamental es la estructura de S . Además, dicha inmersión es única salvo isometrías de $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

Como en el caso anterior, si $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es una superficie transversa con $K(I) = -1$, se sigue de la ecuación de Gauss que $K < 0$ en todo punto. Además, del Teorema 3.15, h es armónica para II y ν verifica

$$\nu_{uv} = \nu \left(h_u h_v - 2 \frac{\nu_u \nu_v}{1 - \nu^2} \right).$$

Luego, tomando $\omega = \operatorname{arctanh}(\nu)$, esta última ecuación se reduce a

$$\omega_{uv} - h_u h_v \operatorname{senh}(\omega) \operatorname{cosh}(\omega) = 0.$$

Corolario 3.13:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie transversa con CGC $K(I) = -1$. Entonces, dados unos parámetros locales asintóticos (u, v) para II , la Primera y Segunda Forma Fundamental de Σ se pueden recuperar en términos de su función altura h y $\omega = \operatorname{arctanh}(\nu)$ como

$$E = \cosh^2(\omega)h_u^2 + \omega_u^2 \tag{3.122}$$

$$F = \cosh^2(\omega)h_u h_v - \omega_u \omega_v \tag{3.123}$$

$$G = \cosh^2(\omega)h_v^2 + \omega_v^2 \tag{3.124}$$

$$f = \omega_u h_v + \omega_v h_u > 0 \tag{3.125}$$

donde ω verifica

$$\omega_{uv} - h_u h_v \operatorname{senh}(\omega) \cosh(\omega) = 0. \tag{3.126}$$

Recíprocamente, sea $h : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica sobre una superficie de Lorentz simplemente conexa S y $\omega : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función verificando $\omega_u h_v + \omega_v h_u > 0$ y (3.126). Entonces, existe una inmersión $\psi : S \rightarrow \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tal que $\psi(S) = \Sigma$ es transversa con CGC $K(I) = -1$ cuya Primera y Segunda Forma Fundamental están dadas por

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad II = 2fdudv,$$

donde E, F, G y ρ están definidos por (3.122), (3.123), (3.124) y (3.125) respectivamente, cuya función altura y función ángulo están dadas por $h \circ \psi^{-1}$ y $\nu \circ \psi^{-1} = \tanh(\omega)$ (que seguiremos denotando simplemente por h y ν respectivamente) y la estructura inducida por su Segunda Forma Fundamental es la estructura de S . Además, dicha inmersión es única salvo isometrías de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

De hecho, de este último resultado es relativamente sencillo obtener superficies completas con $K(I) = -1$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Basta tomar una función $h_u \equiv 0$ y una adecuada $\omega(u, v) = \omega_1(u) + \omega_2(v)$ que verifique (3.126).

Además, como $h_{uv} = 0$, si h_u y h_v no se anulan, tomando los nuevos parámetros asintóticos (\tilde{u}, \tilde{v}) tales que $d\tilde{u} = h_u du$, $d\tilde{v} = h_v dv$, podemos reconocer la ecuación (3.126) como la clásica ecuación hiperbólica del Sinh-Gordon

$$\omega_{\tilde{u}\tilde{v}} - \operatorname{senh} \omega \cosh \omega = 0.$$

3.5. Superficies con curvatura extrínseca positiva

Dedicaremos esta Sección al estudio de superficies con curvatura extrínseca positiva en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Así, comenzaremos estableciendo un Teorema tipo Hadamard-Stoker en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Como es bien conocido, en 1936 J. Stoker demostró [102] que toda superficie completa en \mathbb{R}^3 estrictamente convexa debe ser embebida y homeomorfa a un plano si es abierta o a una esfera si es cerrada, generalizando así un resultado de J. Hadamard [50] en el cuál sólo trataba el caso cerrado.

Hagamos algunas aclaraciones sobre enunciado anterior: la condición de convexidad estricta de la superficie es equivalente a que la curvatura de Gauss de la superficie sea positiva en todo punto o, de la ecuación de Gauss, que la curvatura extrínseca sea positiva en todo punto. Desde esta última formulación equivalente es como mejor entender el resultado. Si la curvatura extrínseca es positiva en un punto, entonces las curvaturas principales en ese punto son ambas, salvo orientación, positivas, y por lo tanto la superficie está a un lado de su plano tangente, esto es, localmente es un grafo sobre dicho plano y queda a un lado de éste.

Años más tarde, M. do Carmo y Warner [31] extendieron el Teorema de Hadamard, esto es, el caso cerrado, para superficies en el espacio hiperbólico tres dimensional. El caso completo en \mathbb{H}^3 fue resuelto por R. J. Currier [24], y es interesante remarcar la diferencia con el caso euclídeo, ya que nos da una primera aproximación de cuál debería ser nuestro acercamiento a dicho problema en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

El Teorema de Currier establece que una superficie inmersa en \mathbb{H}^3 cuyas curvaturas principales sean mayores o iguales a 1 en todo punto, debe ser embebida y homeomorfa a un plano si es abierta o a una esfera si es cerrada. Por una parte, la condición sobre las curvaturas principales nos dice que, localmente, la superficie está a un lado de la horosfera tangente en dicho punto (nótese que las horosferas hacen el papel en \mathbb{H}^3 equivalente de planos en \mathbb{R}^3). Por otra parte, el resultado es óptimo, es decir, es bien conocido la existencia de ejemplos completos con curvatura extrínseca 1 que son homeomorfos a un cilindro.

Si miramos detenidamente las demostraciones de Stoker y Currier, es fácil percibir que para la demostración son de capital importancia la existencia de foliaciones del espacio por superficies totalmente geodésicas, los planos en \mathbb{R}^3 y las horosferas en \mathbb{H}^3 . Como vimos al principio de este Capítulo, en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ tenemos foliaciones totalmente geodésicas por planos vertical u horizontales, las cuáles harán el papel de los planos y nos permitirán establecer un Teorema tipo Hadamard-Stoker en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Se podría pensar que la situación que acontecerá estará más próxima al caso de \mathbb{H}^3 que al caso de \mathbb{R}^3 , es decir, que tendremos que imponer alguna hipótesis sobre las curvaturas principales como en el Teorema de Currier. Sin embargo, la situación para superficies con curvatura extrínseca positiva en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ es mucho más cercana

a la de \mathbb{R}^3 , y esto es porque hay muchas más foliaciones por planos verticales que horizontales, y dichos planos verticales son isométricos a \mathbb{R}^2 (ver Proposición 3.2).

3.5.1. Teorema tipo Hadamard-Stoker

Esta Sección la dedicaremos a la demostración de un Teorema tipo Hadamard-Stoker en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Consideremos $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie con curvatura extrínseca positiva en todo punto, $K > 0$. Denotemos por N al normal unitario de Σ , y por I y II a la Primera y Segunda Forma Fundamental de Σ respectivamente.

Notemos que N puede ser elegido globalmente debido a que $K > 0$, esto es, II es definida.

Comenzaremos con un resultado elemental, aunque de gran utilidad

Proposición 3.10:

Sea Σ una superficie inmersa con curvatura extrínseca positiva en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Sea P un plano horizontal o vertical en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Si Σ y P se intersecan transversalmente, entonces cada componente conexa C de $\Sigma \cap P$ es una curva localmente estrictamente convexa en P .

Demostración. Parametricemos C como $\alpha(t)$ donde t es el parámetro arco. Entonces como P es un plano totalmente geodésico, tenemos

$$\nabla_{\alpha'}^P \alpha' = \bar{\nabla}_{\alpha'} \alpha' = \nabla_{\alpha'} \alpha' + II(\alpha', \alpha')N$$

donde ∇^P , $\bar{\nabla}$ y ∇ son la conexiones de Levi-Civita en P , $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y Σ respectivamente. Como la curvatura extrínseca es positiva tenemos que $II(\alpha', \alpha') \neq 0$. Luego $\nabla_{\alpha'}^P \alpha' \neq 0$, esto es, la curvatura geodésica de C no se anula en P , o equivalentemente, C es una curva localmente estrictamente convexa. \square

Como hemos comentado en la introducción de esta Sección, los planos verticales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ son isométricos a \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, este resultado nos dice que la intersección de la superficie con un plano vertical, cuando ésta sea transversal, va a dar lugar a curvas estrictamente convexas en \mathbb{R}^2 .

Algo que no hemos comentado aún sobre el Teorema de Hadamard-Stoker en \mathbb{R}^3 es que, cuando la superficie es homeomorfa a \mathbb{R}^2 , dicha superficie es un grafo sobre un dominio plano. Más concretamente, existe un plano tangente a la superficie sobre el cuál es grafo. Esto no va a ocurrir en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Demostraremos que la superficie será embebida y homeomorfa a una esfera si es cerrada o a un plano si es abierta. Pero, cuando la superficie sea homeomorfa a un plano, veremos que puede tener dos tipos de finales: puede ser un grafo vertical sobre $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$, o bien tener un tipo de final especial que pasamos a definir

Definición 3.7:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie. Decimos que Σ tiene un **final simple** si el borde en infinito de $\pi(\Sigma) \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\} \cong \mathbb{H}^2$ es un único punto $\theta_0 \in \mathbb{S}_\infty^1$ y, además, para todo $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}_\infty^1 \setminus \{\theta_0\}$ la intersección del plano vertical $\gamma(\theta_1, \theta_2) \times \mathbb{R}$ y S es vacía o un conjunto compacto, donde $\gamma(\theta_1, \theta_2)$ es la geodésica completa horizontal uniendo θ_1 y θ_2 (ver Definición 3.1).

Puede parecer una definición poco intuitiva, pero en el transcurso de la demostración quedará clara. Además, la próxima Sección de este Capítulo estará dedicada a la construcción de superficies completas con curvatura extrínseca positiva con este tipo de final.

A continuación, daremos una definición para un tipo especial de curva dentro de un plano vertical

Definición 3.8:

Sea P un plano vertical y α una curva convexa embebida en P . Diremos que α es **vertical** (en P) si existe un punto $p \in \alpha$, llamado **punto vertical**, y una dirección vertical $v = \pm \frac{\partial}{\partial t}$, tal que la semirrecta $p + sv$, $s > 0$, está contenida en el dominio convexo acotado por α en P .

Ahora estamos en disposición de demostrar el Teorema principal de esta Sección.

Teorema 3.16:

Sea Σ una superficie inmersa, conexa y completa en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con $K > 0$. Entonces Σ es propiamente embebida. Además, Σ es homeomorfa a \mathbb{S}^2 o \mathbb{R}^2 . En este último caso, Σ es un grafo sobre un dominio convexo de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ o Σ tiene un final simple.

Demostración. Primero distinguiremos dos casos, dependiendo de la existencia o no de un punto en Σ con normal unitario horizontal, o equivalentemente, con plano vertical tangente.

Supongamos que **no** existe ningún punto $p \in \Sigma$ con plano vertical tangente en p . Demostraremos en este caso que Σ es un grafo y homeomorfa a \mathbb{R}^2 .

Sea P un plano vertical el cuál corta transversalmente a Σ . Sea γ una geodésica horizontal orientada ortogonal a P y consideremos la foliación $P_\gamma(t)$ de planos verticales a lo largo de γ (ver Definición 3.4). Ahora, si $P_\gamma(t) \cap \Sigma \neq \emptyset$, usando que no existe ningún punto $p \in \Sigma$ con plano vertical tangente en p y la Proposición 3.9, cada componente conexa de $P_\gamma(t) \cap \Sigma$ es una curva estrictamente convexa, no compacta, completa y embebida. De otra manera, si una componente conexa tiene una auto-intersección o si es compacta, entonces tendría un punto con recta tangente vertical,

lo cual significaría que Σ tiene un plano vertical tangente en dicho punto.

Sea $C(0)$ una componente embebida de $P \cap \Sigma = P_\gamma(0) \cap \Sigma$. Veamos como $C(0)$ varía cuando t crece hacia $+\infty$. Notemos que dos puntos de $P_\gamma(t_0) \cap \Sigma$ no se pueden unir para algún $t_0 > 0$, ya que esto produciría un plano vertical tangente en algún punto de la superficie. Por lo tanto la componente $C(0)$ de $P_\gamma(0)$ varía de forma continua a una curva embebida $C(t)$ de $P_\gamma(t) \cap \Sigma$ cuando t crece. El único cambio posible es que $C(t)$ se vaya a infinito cuando t converge a algún t_1 y desaparezca en $P_\gamma(t_1)$.

Análogamente $C(0)$ varía de forma continua a una curva embebida de $P_\gamma(t) \cap \Sigma$ cuando $t \rightarrow -\infty$. En consecuencia, al ser Σ conexa obtenemos que $P_\gamma(t) \cap \Sigma$ es a lo sumo una componente para todo t . Por lo tanto, concluimos que Σ es un grafo vertical. Además, es fácil convencerse de que el dominio sobre el cuál Σ es grafo es convexo, ya que de otra forma podríamos encontrar un punto en Σ con plano vertical tangente. Para terminar, observemos que $P_\gamma(t) \cap S$ es vacío o homeomorfo a \mathbb{R} para cada t , y por consiguiente Σ es topológicamente \mathbb{R}^2 .

Ahora y para el resto de la demostración, supondremos que existe un punto $p_0 \in S$ con plano vertical P tangente en p_0 . Demostraremos en este caso que Σ es homeomorfa a \mathbb{S}^2 o a \mathbb{R}^2 y tiene un final simple.

Por hipótesis, es fácil ver que existen entornos $p_0 \in U \subset \Sigma$ y $V \subset P$ tales que U es grafo horizontal sobre V . Además, debido a que $K(p_0) > 0$, Σ es estrictamente localmente convexa en p_0 , de modo que podemos asumir que $U \subset \Sigma$ está a un lado de P . Sea $P_\gamma(t)$ la foliación de planos verticales a lo largo de γ , siendo γ la geodésica horizontal con $\gamma(0) = p_0$ y $\gamma'(0)$ ortogonal a P . Notemos que, salvo una isometría, podemos suponer que $U \setminus \{p_0\} \subset \text{ext}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(P)$, $p_0 \in \mathbb{H}^2 \times \{0\}$ y $\gamma = \{\pi/2, 3\pi/2\}$ (ver Definiciones 3.2 y 3.3).

De la Proposición 3.9 y el hecho de que Σ es localmente un grafo, obtenemos la existencia de un $\varepsilon > 0$ tal que $P_\gamma(t) \cap U$ es una curva compacta, embebida y estrictamente convexa para cada $0 < t < \varepsilon$. Para $0 < t < \varepsilon$, denotemos por $C(t)$ a la componente conexa de $P_\gamma(t) \cap \Sigma$ que coincide con $P_\gamma(t) \cap U$. Quizás $P_\gamma(t) \cap \Sigma$ tenga otras componentes distintas de $C(t)$ para cada $0 < t < \varepsilon$, pero sólo nos preocuparemos de como $C(t)$ varía cuando t crece. También denotaremos por $C(t)$ a la variación continua de la curvas $P_\gamma(t) \cap \Sigma$, cuando $t > \varepsilon$.

Distinguimos dos casos:

A) $C(t)$ permanece compacta cuando t crece:

Por argumentos topológicos es fácil demostrar que si $C(t)$ permanece compacta y no vacía cuando t crece, entonces $C(t)$ es una curva embebida, compacta y estrictamente convexa o un punto.

A.1) Si $C(t)$ permanece compacta y no vacía cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces como S es

conexa, Σ debe ser embebida (de hecho, es propiamente embebida). Además, debido a que $C(0)$ es un punto y $C(t)$ es homeomorfa a un círculo para todo positivo t , Σ es homeomorfa a \mathbb{R}^2 .

Ahora, como $C(t)$ permanece compacta, entonces

$$\partial_\infty \pi(\Sigma) = \{3\pi/2\} \subset \mathbb{S}_\infty^1$$

y S tiene un final simple.

- A.2) Si existe $\bar{t} > 0$ tal que $C(t)$ es compacta para todo $0 < t < \bar{t}$ y la componente $C(t)$ desaparece para $t > \bar{t}$, entonces, usando que Σ es conexa, Σ es o compacta, embebida y topológicamente \mathbb{S}^2 , o no compacta, propiamente embebida y topológicamente \mathbb{R}^2 . Esto es, si $C(t)$ converge a un conjunto compacto cuando t converge a \bar{t} entonces $C(\bar{t})$ debe ser un punto (ya que nuestra superficie no tiene borde) y Σ es una esfera (ver Figura 8). De otra forma, $C(t)$ se pierde en infinito cuando t converge a \bar{t} y S es topológicamente un plano.

Mostraremos ahora que en este último caso, la proyección vertical π de Σ tiene como borde asintótico uno de los dos puntos en infinito de $\pi(P_\gamma(\bar{t}))$.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $P_\gamma(\bar{t}) = \beta \times \mathbb{R}$ donde $\beta = \{\beta^-, \beta^+\}$. Consideremos el plano vertical $Q = \gamma \times \mathbb{R}$. Sea \tilde{C} la componente de $Q \cap \Sigma$ conteniendo a p_0 . Primero observemos que \tilde{C} es compacta, pues de otra forma debería intersectar a la línea $Q \cap P_\gamma(\bar{t})$ en dos puntos, y este no es el caso. Luego, podemos considerar el disco \tilde{D} acotado por \tilde{C} en Σ .

Denotemos por $Q_\beta(t)$ a la foliación por planos verticales a lo largo de β , $Q_\beta(0) = Q$. Obsérvese que existe t_0 (podemos suponer $t_0 < 0$) verificando que $Q_\beta(t_0)$ toca a \tilde{D} y deja a un lado a \tilde{D} por compacidad. Sea $q_0 \in \tilde{D} \cap Q_\beta(t_0)$ el punto donde se tocan y consideremos la variación $\tilde{C}(t)$ de q_0 en $\Sigma \cap Q_\beta(t)$ de $t = t_0$ a infinito. Entonces, $\tilde{C}(t)$ es una curva embebida y convexa para todo t en un intervalo maximal (t_0, \bar{t}_0) con $0 < \bar{t}_0 \leq \infty$. Así, S está foliada por las curvas $\tilde{C}(t)$, $\tilde{C} = \tilde{C}(0) = Q \cap \Sigma$ y $\beta^- \notin \partial_\infty \pi(S)$ porque Σ está a un lado de $Q_\beta(t_0)$.

Ahora, demostraremos que $\partial_\infty \pi(\Sigma) = \{\beta^+\}$. Denotemos por $\gamma(\theta)$ a la geodésica horizontal completa comenzando en p_0 y formando un ángulo θ con γ en p_0 . Asumamos que $\gamma(\theta)$ entra en el lado de Q conteniendo a β^+ , para $0 < \theta < \pi/2$. Sea $\bar{\theta}$ el valor de θ tal que $\gamma(\bar{\theta})$ es asintótica a β^+ y sea $Q(\theta) = \gamma(\theta) \times \mathbb{R}$. Para cada θ , $0 \leq \theta < \bar{\theta}$, tenemos que $S \cap Q(\theta)$ es una curva conexa embebida y compacta $C'(\theta)$. La demostración de esta última afirmación es igual a la demostración anterior para \tilde{C} . Notemos que cada $C'(\theta)$ es no vacía debido a que $p_0 \in C'(\theta)$.

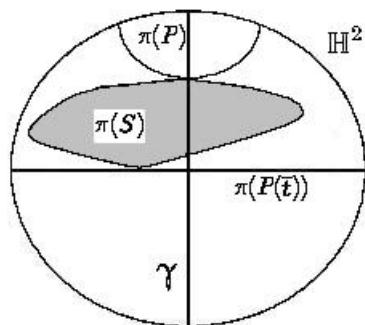


Figura 8.

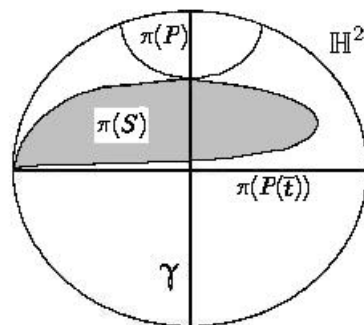


Figura 9.

Ahora, $C'(\bar{\theta})$ no puede ser compacta, ya que si lo fuera Σ no podría ser asintótica al plano $P_\gamma(\bar{t})$, lo que supondría una contradicción.

Para completar la demostración del Caso A.2 nos falta demostrar que Σ tiene un final simple. Observemos que $C'(\theta)$ es compacta, $\bar{\theta} < \theta < \pi/2$, porque $\Sigma = \cup_{0 \leq t < \bar{t}} C(t)$. Además, $C'(\theta) \subset \tilde{D}$, $-\pi/2 < \theta < 0$, y \tilde{D} es compacto. Luego, es fácil concluir que Σ tiene un final simple.

Por tanto hemos probado que en el Caso A.2, Σ es o bien una esfera propiamente embebida o Σ es un plano propiamente embebido con un final simple en β^+ (ver Figura 9).

B) $C(t)$ pasa a ser no compacta:

Sea $\bar{t} > 0$ el menor t con $C(\bar{t})$ no compacta. Así, $C(\bar{t})$ es el límite de las $C(t)$ cuando $t \rightarrow \bar{t}$, y es una curva embebida y estrictamente convexa en $P_\gamma(\bar{t})$.

Afirmación 1: Demostraremos que $C(\bar{t})$ no es vertical (ver Definición 3.8).

Supongamos que $C(\bar{t})$ es vertical, y sea $q \in C(\bar{t})$ un punto vertical. Primero, notemos que $\tilde{\Sigma} = \cup_{0 \leq t < \bar{t}} C(t) \subset \Sigma$ es embebida. Sea $q' = \pi(q) \in \mathbb{H}^2 \times \{0\}$ y consideremos $\Gamma_{p_0 q'}$ la geodésica horizontal completa uniendo p_0 y q' . Sea $Q = \Gamma_{p_0 q'} \times \mathbb{R}$, y consideremos $r_0 = Q \cap P_\gamma(0)$ y $r_{\bar{t}} = Q \cap P_\gamma(\bar{t})$. Notemos que r_0 y $r_{\bar{t}}$ son rectas paralelas en Q . Además, $\alpha_Q = Q \cap \tilde{\Sigma}$ es una curva embebida, estrictamente convexa y no compacta en Q tal que r_0 es tangente a α_Q en $p_0 \in \alpha_Q$ y $\alpha_Q \cap r_{\bar{t}}$ es exactamente un punto, ya que $C(\bar{t})$ es vertical. Pero esto es una contradicción debido a que α_Q es una curva estrictamente convexa en Q , que es isométrico a \mathbb{R}^2 , y debe intersectar a $r_{\bar{t}}$ dos veces.

Luego, $C(\bar{t})$ no es vertical, y afirmamos que

Afirmación 2: $\partial_\infty \pi(C(\bar{t}))$ es un punto.

Denotemos por $D(t)$ al cuerpo convexo acotado por $C(t)$ en $P_\gamma(t)$ para cada $0 < t < \bar{t}$. Entonces, el límite $D(\bar{t})$ de $D(t)$ cuando t crece hacia \bar{t} es un cuerpo convexo

abierto acotado por $C(\bar{t})$ en $P_\gamma(\bar{t})$ que es isométricamente \mathbb{R}^2 . Si $\partial_\infty \pi(C(\bar{t}))$ tiene dos puntos, la única posibilidad es que $C(\bar{t})$ sea vertical, lo cual es imposible por la Afirmación 1 (ver Figura 10).

Sean $\delta_0 > 0$ y $t_{\delta_0} < \bar{t}$ tales que $P(t_{\delta_0}) = \Gamma(\delta_0) \times \mathbb{R}$ donde $\Gamma(\delta_0) = \{\delta_0, \pi - \delta_0\}$. Denotemos por $\tilde{\Sigma}_1 = \bigcup_{0 \leq t \leq t_{\delta_0}} C(t) \subset S$ y notemos que $\tilde{\Sigma}_1$ es conexa y embebida.

Consideremos la geodésica horizontal completa dada por $\Gamma(\delta_0, s) = \{\delta_0, \pi - \delta_0 + s\}$ y el plano vertical $Q(s) = \Gamma(\delta_0, s) \times \mathbb{R}$ para cada $s \geq 0$. Por tanto, $Q(0) = P_\gamma(t_{\delta_0})$ y $Q(0) \cap \tilde{\Sigma}_1 = C(t_{\delta_0})$ es un curva embebida, estrictamente convexa y compacta. Consideremos como $\alpha(s) = Q(s) \cap \Sigma$ varía cuando s crece hacia $\pi + \delta_0$. Además, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $P_\gamma(\bar{t}) = \Gamma(\bar{t}) \times \mathbb{R}$ donde $\Gamma(\bar{t}) = \{0, \pi\}$ y

$$\partial_\infty \pi(C(\bar{t})) = \{0\}. \tag{3.127}$$

En este punto, tenemos dos casos:

B.1) $\alpha(s)$ permanece compacta para todo $0 \leq s < \pi + \delta_0$:

Primero, notemos que $\alpha(s)$ es no vacía, y por lo tanto, haciendo $\delta_0 \rightarrow 0$, estamos en el Caso A.1 (ver Figura 11).

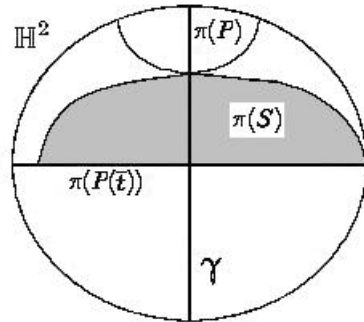


Figura 10.

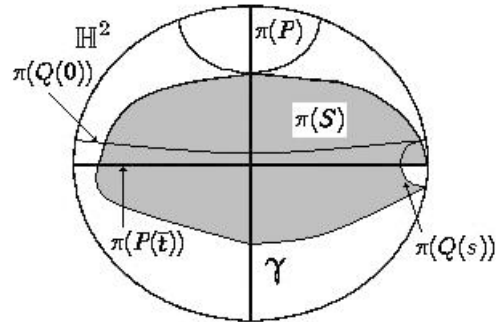


Figura 11.

B.2) $\alpha(s)$ pasa a ser no compacta:

Sea $0 < \bar{s} < \pi + \delta_0$ el menor s con $\alpha(\bar{s})$ no compacta, donde $\alpha(\bar{s})$ es el límite de $\alpha(s)$ cuando $s \rightarrow \bar{s}$. Además,

$$\partial_\infty \pi(\alpha(\bar{s})) = \{\pi - \delta_0 + \bar{s}\},$$

ya que de otra forma debería ser $\{\delta_0\}$ lo cuál contradice (3.127) (ver Figura 12).

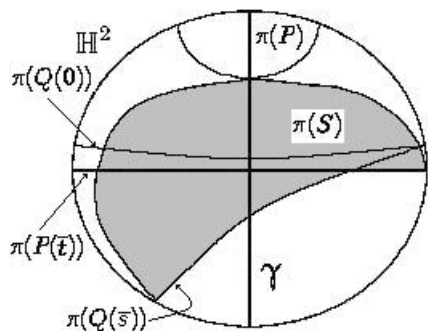


Figura 12.

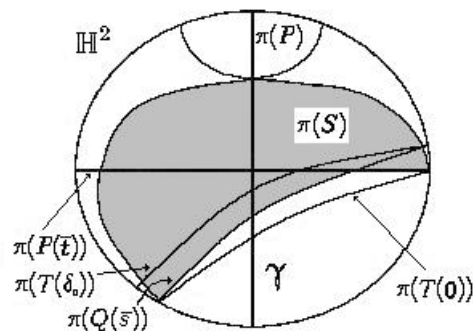


Figura 13.

Obsérvese que $\delta_0 < \bar{s}$. Para cada $\delta \leq \delta_0$ consideremos la geodésica horizontal completa dada por $\sigma(\delta) = \{\delta, \pi + \bar{s} - \delta_0 - \delta\}$ y el plano vertical $T(\delta) = \sigma(\delta) \times \mathbb{R}$. Denotemos por $\tilde{\Sigma}_2 = \bigcup_{0 \leq s \leq \bar{s} - 2\delta_0} \alpha(s) \subset S$ y notemos que $\tilde{\Sigma}_2$ es conexa y embebida y por lo tanto $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}_1 \cup \tilde{\Sigma}_2 \subset \Sigma$ es conexa y embebida. Para cada δ , $0 < \delta \leq \delta_0$, $E(\delta) = T(\delta) \cap \tilde{\Sigma}$ es una curva embebida, estrictamente convexa y compacta en $T(\delta)$. Cuando $\delta \rightarrow 0$, estas curvas convergen a una curva convexa en $T(0)$ con $\partial_\infty \pi(E(0))$ los dos puntos $\{0, \pi - \delta_0 + \bar{s}\}$. Esto contradice la Afirmación 2. Así, $\alpha(s)$ no puede pasar a ser no compacta y por lo tanto estamos en el Caso B.1 (ver Figura 13).

Esto completa la demostración del Teorema 3.16. □

3.5.2. Ejemplos de superficies con un final simple

Como hemos comentado, en esta parte veremos cómo construir ejemplos sencillos de superficies propiamente embebidas con curvatura extrínseca positiva y un final simple.

Para ello, consideraremos las superficies que son invariantes por el grupo de isometrías parabólicas, es decir, aquellas que dejan invariantes una familia de horociclos, con el mismo punto en su borde asintótico, en cada fibra. Para ello trabajaremos con el modelo del disco de Poincaré de \mathbb{H}^2 , esto es, consideramos \mathbb{H}^2 como el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},$$

con la métrica $g_{-1} = \frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}(dx^2 + dy^2)$. Así, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ viene dado por

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} \equiv \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\},$$

con la métrica $\langle, \rangle = g_{-1} + dt^2$.

Fijemos $\bar{\theta} \in \mathbb{S}_\infty^1$, digamos por ejemplo $\bar{\theta} = 0 \equiv (1, 0)$, y consideremos el grupo 1-paramétrico de isometrías dado por

$$F_t(x, y, z) = \left(1 + \frac{4(x-1)}{4 + 4ty + t^2((x-1)^2 + y^2)}, \frac{4y + 2t((x-1)^2 + y^2)}{4 + 4ty + t^2((x-1)^2 + y^2)}, z \right). \quad (3.128)$$

Bajo este grupo, la órbita de cualquier punto $p \in \mathbb{H}^2$ es un horociclo H_p contenido en un plano horizontal tal que $\partial_\infty \pi(H_p) = \{\bar{\theta}\}$.

Sea \mathcal{P} el plano ortogonal a cada órbita, esto es $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} : y = 0\}$. Parametricemos \mathcal{P} como

$$\psi(x, y) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}, 0, y \right)$$

de tal manera que la métrica inducida es $dx^2 + dy^2$.

Así, comenzaremos con una curva

$$\alpha(s) = \psi(\rho(s), s) = \left(\frac{e^{\rho(s)} - 1}{e^{\rho(s)} + 1}, 0, s \right)$$

en el plano vertical \mathcal{P} para una cierta función $\rho : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$.

Sea $\Sigma_\rho \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ la superficie invariante por el grupo de isometrías parabólicas $\Sigma_\rho = F_t(\alpha(s))$, esto es, la superficie parametrizada por

$$\psi(s, t) = \left(1 - \frac{2(e^{\rho(s)} + 1)}{t^2 + (e^{\rho(s)} + 1)^2}, \frac{2t}{t^2 + (e^{\rho(s)} + 1)^2}, s \right), (s, t) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}. \quad (3.129)$$

Entonces tenemos lo siguiente

Proposición 3.11:

Sea $\mathcal{I} = (s_1, s_2)$ un intervalo abierto donde $-\infty \leq s_1 < s_2 \leq +\infty$, y $\rho : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que:

- $\rho''(s) > 0$ para todo $s \in \mathcal{I}$,
- $\lim_{s \rightarrow s_1} \rho(s) = \lim_{s \rightarrow s_2} \rho(s) = +\infty$.

Entonces la superficie Σ_ρ parametrizada por (3.128) es propiamente embebida con curvatura extrínseca positiva y un final simple (véase Figura 14).

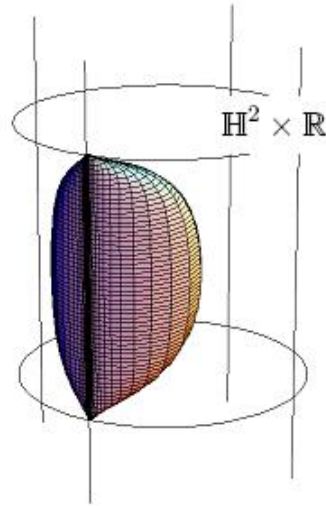


Figura 14.

Demostración. De (3.129), la Primera Forma Fundamental de la superficie y su curvatura extrínseca vienen dadas por las ecuaciones

$$I = ds^2 + \sinh^2 k(s) dt^2 \quad (3.130)$$

$$K = \frac{\rho''(s)}{(1 + \rho'(s))^2} \quad (3.131)$$

$$(3.132)$$

donde ' denota la derivada con respecto a s .

Notemos que por las hipótesis impuestas a la función ρ , la curva

$$\alpha(s) = \left(\frac{e^{\rho(s)} - 1}{e^{\rho(s)} + 1}, 0, s \right)$$

es una curva propiamente embebida en

$$\mathcal{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} : y = 0 \right\}.$$

Por lo tanto, aplicando el grupo uniparamétrico de isometrías F_t (3.128), la superficie dada por (3.129) es propiamente embebida. \square

3.6. Superficies de curvatura extrínseca constante positiva

Ahora nos centraremos en el caso en que la curvatura extrínseca sea una constante positiva en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Así, tras clasificar las superficies completas de revolución con curvatura extrínseca positiva en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, estableceremos estimaciones óptimas de altura para grafos verticales en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ (ver [20]), entendidas como en el caso de CMC, y estimaciones de distancia horizontales para superficies con CEC positiva en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. De hecho, la demostración de estas estimaciones horizontales es la misma que para las superficies de CMC. Además, aplicaremos dichas estimaciones para obtener un resultado análogo al Teorema 3.7.

Por último, pero no menos importante, clasificaremos las superficies completas con CEC positiva en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ como los ejemplos de revolución completos. Dicho resultado lo estableceremos siguiendo las ideas del Capítulo 1. En el contexto de las superficies con CEC positiva, no obtenemos la holomorfía de una diferencial cuadrática como en otros resultados de clasificación estudiados, sino que los ceros son aislados y de índice negativo, apoyándonos en el resultado de Alencar-Do Carmo-Tribuzy [11]. Por lo tanto, dicha diferencial debe anularse sobre una esfera topológica, por el Teorema del índice de Poincaré, lo que nos permitirá clasificarlas. Veremos también que dicha clasificación para superficies con CEC positiva en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ la podemos hacer sin necesidad de esta diferencial cuadrática, sino con el Teorema de Hadamard-Stoker en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, las estimaciones verticales y horizontales y el Principio del Máximo.

3.6.1. Superficies de revolución completas con CEC positiva en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$

En esta Sección centramos nuestra atención en el estudio de superficies completas de revolución con CEC positiva en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$. Primero nos centraremos en el caso de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, esto es,

Proposición 3.12:

Sea Σ una esfera de revolución (alrededor del eje vertical $\{1, 0, 0\} \times \mathbb{R}$) inmersa en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con CEC $K > 0$, dada por

$$\psi_K(u, v) = (\cosh k(u), \sinh k(u) \cos v, \sinh k(u) \sin v, h(u))$$

donde $\alpha(u) = (\cosh k(u), \sinh k(u), 0, h(u))$ es la curva generatriz de Σ .

Entonces, Σ debe ser embebida y la curva generatriz viene dada por

$$k(u) = \cosh^{-1} \exp\left(\frac{1-u^2}{2K}\right) \tag{3.133}$$

$$h(u) = -\frac{1}{K} \int_1^u \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1 - \exp\left(-\frac{1-u^2}{K}\right)}} du + C \tag{3.134}$$

donde $-1 \leq u \leq 1$ y C es una constante real (véase Figura 14).
Además, $\mathbb{H}^2 \times \{h_0\}$ para

$$h_0 = \frac{1}{K} \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1 - \exp\left(-\frac{1-u^2}{K}\right)}} du + C,$$

es un plano horizontal de simetría de Σ .

Demostración. De la Proposición 3.4, tenemos que las curvaturas principales de la superficie vienen dadas por

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= k'h'' - k''h' \\ \lambda_2 &= h' \coth k\end{aligned}$$

y su curvatura extrínseca por

$$K = h' \coth k(k'h'' - k''h')$$

donde $'$ denota la derivada respecto de u . Como $k'^2 + h'^2 = 1$, tenemos $k'k'' + h'h'' = 0$ y por lo tanto

$$K = -k'' \coth k. \tag{3.135}$$

Supongamos que K es una constante positiva. Entonces

$$(k')^2 = C_1 - 2K \ln \cosh k$$

donde C_1 es una constante a ser determinada por las condiciones en el borde.

Como α debe cortar al eje de forma ortogonal, podemos asumir que el punto más bajo es $t = 0$. Entonces $k(0) = 0$ y $k'(0) = 1$, luego $C_1 = 1$, esto es

$$(k')^2 = 1 - 2K \ln \cosh k. \tag{3.136}$$

Como el punto más bajo es $t = 0$, entonces $h'(t) > 0$ y así, por (3.42), $\lambda_2(t) > 0$ para t suficientemente pequeño. Pero λ_2 debe tener el mismo signo, y por lo tanto $h'(t) > 0$ para todo t . Por tanto, h crece cuando t crece (y Σ debe ser embebida).

Supongamos que z es el punto más alto de S . Entonces $k(t_z) = 0$ para algún $t_z > 0$. Así, el dominio de t es $[0, t_z]$ y

$$k(0) = k(t_z) = 0, \quad h'(0) = h'(t_z) = 0, \quad k'(0) = 1, \quad k'(t_z) = -1.$$

Por otra parte, de (3.135), $k'' < 0$ lo cuál implica que k' decrece de $k'(0) = 1$ a $k'(t_z) = -1$. Por lo tanto, como t crece de 0 a t_z , k primero crece de 0 a $k_{max} = k(t_{max})$, para algún $t_{max} \in [0, t_z]$, y en consecuencia decrece de k_{max} a 0.

Luego, k debe crecer de 0 a t_{max} y $k'(t_{max}) = 0$. Por lo tanto, de (3.136), obtenemos que $k(t_{max}) = \cosh^{-1} \exp(1/2K)$.

Ahora tomemos $u = k'$, donde $-1 \leq u \leq 1$. Entonces de la ecuación (3.136) tenemos

$$k = \cosh^{-1} \exp\left(\frac{1-u^2}{2K}\right), \quad -1 \leq u \leq 1. \quad (3.137)$$

Como $u = k'$, $\frac{du}{dt} = k'' = -K \tanh k$, tenemos por (3.137)

$$\frac{dh}{du} = -\frac{1}{K} \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1 - \exp\left(-\frac{1-u^2}{K}\right)}}.$$

Entonces

$$h = -\frac{1}{K} \int_1^u \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1 - \exp\left(-\frac{1-u^2}{K}\right)}} du + C, \quad -1 \leq u \leq 1$$

donde C es una constante real.

Además, tenemos

$$\begin{aligned} h_{min} &= C \\ h_{max} &= \frac{1}{K} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1 - \exp\left(-\frac{1-u^2}{K}\right)}} du + C \end{aligned}$$

y

$$h_0 = \frac{1}{K} \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1 - \exp\left(-\frac{1-u^2}{K}\right)}} du + C.$$

Se sigue de (3.137), la expresión de h y cómo u decrece de 1 a -1 , que h crece de h_{min} a h_{max} , y k primero crece de 0 a k_{max} para después decrecer de k_{max} a 0. Además, Σ debe ser simétrica respecto $\mathbb{H}^2 \times \{h_0\}$.

Así, el resultado quedaría probado.

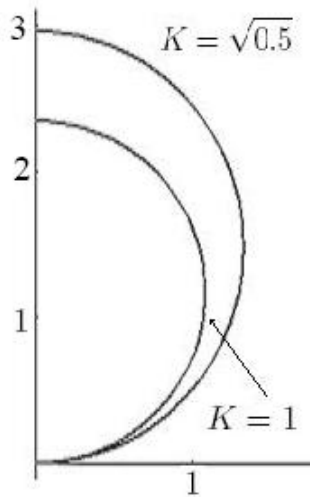


Figura 15.

□

Observemos que el análisis que hemos hecho está basado, en espíritu, en el que realizaron Cheng-Rosenberg [20], para el caso de superficies de revolución con CEC positiva en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. De hecho, necesitaremos aquel resultado, y por lo tanto lo estableceremos aquí, pero omitiremos la demostración.

Proposición 3.13:

Sea Σ una esfera de revolución (alrededor del eje vertical $\{1, 0, 0\} \times \mathbb{R}$) inmersa en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^4$ con CEC $K > 0$, dada por

$$\psi_K(u, v) = (\cos k(u), \sin k(u) \cos v, \sin k(u) \sin v, h(u))$$

donde $\alpha(u) = (\cos k(u), \sin k(u), 0, h(u))$ es la curva generatriz de Σ .

Entonces,

i) S debe ser una esfera topológica y embebida.

ii) S está contenida en $\mathbb{D} \times \mathbb{R}$, donde \mathbb{D} denota el hemisferio abierto de \mathbb{S}^2 de centro $(1, 0, 0)$.

iii) la curva generatriz viene dada por

$$k(u) = \cos^{-1} \exp\left(-\frac{1-u^2}{2K}\right) \quad (3.138)$$

$$h(u) = -\frac{1}{K} \int_1^u \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{\exp\left(\frac{1-u^2}{K}\right) - 1}} du + C \quad (3.139)$$

donde $-1 \leq u \leq 1$ y C es una constante real.

Además, $\mathbb{D} \times \{h_0\}$ para

$$h_0 = \frac{1}{K} \int_{-1}^0 \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{\exp\left(\frac{1-u^2}{K}\right) - 1}} du + C,$$

divide a la superficie Σ en dos partes simétricas.

3.6.2. Definiendo el par asociado a superficies con CEC

En esta parte definiremos la diferencial cuadrática que nos permitirá clasificar las superficies de CEC positiva como los ejemplos completos de revolución. Una vez visto el desarrollo de todas las Secciones anteriores, lo más natural parece que:

- Tomemos como estructura la dada por la Segunda Forma Fundamental, ya que es definida positiva, y en analogía con las superficies de CEC en un espacio forma.
- La diferencial cuadrática en este caso tendrá que ser una combinación de la parte $(2, 0)$ de la Primera Forma Fundamental y dh^2 .

Lo primero que se nos ocurre es una combinación lineal de dichos elementos para la estructura dada por la Segunda Forma Fundamental para caracterizar estas superficies como los ejemplos de revolución. Sin embargo, al calcular dichos elementos en los ejemplos completos de revolución, se comprueba que no hay ninguna constante que haga una combinación de I y dh^2 (las partes $(2, 0)$, se entiende) idénticamente cero.

De hecho, lo que se obtiene es una función que depende del parámetro de la curva generatriz. Pero también la función ángulo de los ejemplos de revolución depende solamente de dicho parámetro. Lo que haremos pues es pasar de una función que depende del parámetro de la curva generatriz a una función que depende de la función ángulo.

Así, llegamos a una combinación de I y dh^2 por una función que depende de ν , que se anula sobre los ejemplos completos de revolución. Llegados a este punto, es natural preguntarse si esta diferencial es holomorfa. La respuesta es no, pero, como comentamos al principio, veremos que los ceros de dicha diferencial son aislados y de índice negativo. Y esta propiedad nos será suficiente para la clasificación.

Primero, veremos qué ecuaciones debe cumplir una superficie con CEC positiva en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, es decir, especialicemos el Corolario 3.5 a nuestros actuales intereses.

Lema 3.8:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie con CEC positiva K . Sea z un parámetro conforme para II , esto es,

$$\begin{aligned} I &= E dz^2 + 2F |dz|^2 + \bar{E} d\bar{z}^2 \\ II &= 2\rho |dz|^2, \end{aligned}$$

y denotemos por $\alpha = \bar{E}h_z - Fh_{\bar{z}}$ y $D = |E|^2 - F^2$.

Entonces se verifican las siguientes ecuaciones

$$h_{z\bar{z}} = \rho(2K - \kappa(1 - \nu^2))\frac{\nu}{2K} \quad (3.140)$$

$$\nu_{z\bar{z}} = -\rho KF\nu \quad (3.141)$$

$$E_{\bar{z}} = -\kappa\frac{\nu\rho}{K}h_z. \quad (3.142)$$

Demostración. Como hemos comentado, las dos primeras ecuaciones se siguen sin más que tomar K constante en el Corolario 3.5.

Para obtener la tercera ecuación, del Corolario 3.5 se sigue que

$$\Gamma_{12}^1 = \kappa\alpha\frac{\nu}{2\rho}.$$

Ahora, de la definición de α

$$\begin{aligned} E_{\bar{z}} &= 2\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}} \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle = 2(E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2) \\ &= \kappa\frac{\nu}{\rho}(E\alpha + F\bar{\alpha}) = \kappa\frac{\nu D}{\rho}h_z = -\kappa\frac{\nu\rho}{K}h_z \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Ahora pasaremos a definir la diferencial cuadrática, que jugará un papel fundamental en lo que sigue. En lo que queda de Sección, nos restringiremos a $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, es decir, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ si $\varepsilon = -1$ o $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ si $\varepsilon = 1$.

Definición 3.9:

Dada una superficie $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ con CEC positiva K , consideramos la forma cuadrática

$$A = I + g(\nu) dh^2 \quad (3.143)$$

donde $g(\nu)$ es la función analítica real dada por

$$g(\nu) = \frac{\nu^2 - 1 + \varepsilon K(e^{\frac{\varepsilon(1-\nu^2)}{K}} - 1)}{(1 - \nu^2)^2}. \quad (3.144)$$

Al par fundamental (II, A) lo llamaremos **par asociado a K** .

Antes de nada, observemos que g es una función bien definida. Para ello, notemos que la función $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{g}(t) = \frac{t^2 - 1 + \varepsilon K(e^{\frac{\varepsilon(1-t^2)}{K}} - 1)}{(1 - t^2)^2}$$

está bien definida para todo $t \in \mathbb{R}$ (en particular, si $t = \pm 1$) y es una función analítica. Esta última afirmación es fácil de ver si tenemos en cuenta que

$$e^t = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Además,

$$\frac{\varepsilon}{2K} = g(\pm 1) \leq g(\nu) \leq g(0) = -1 + \varepsilon K(e^{\frac{\varepsilon}{K}} - 1).$$

Observemos también que

$$\chi(\nu) = 1 + g(\nu)\|T\|^2 = \frac{\varepsilon K(e^{\frac{\varepsilon(1-\nu^2)}{K}} - 1)}{1 - \nu^2} \quad (3.145)$$

verifica

$$\begin{aligned} 1 = \chi(\pm 1) &\leq \chi(\nu) & \text{si } \varepsilon = 1 \\ 0 < K(1 - e^{\frac{-1}{K}}) = \chi(0) &\leq \chi(\nu) & \text{si } \varepsilon = -1 \end{aligned} \quad (3.146)$$

para todo $-1 \leq \nu \leq 1$.

En realidad estamos interesados en la parte $(2, 0)$ de A respecto a la estructura dada por II . Por lo tanto, denotaremos por

$$Q = E + g(\nu)h_z^2 \quad (3.147)$$

a dicha parte $(2, 0)$ de A para la estructura dada por II .

Lema 3.9:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie de CEC positiva K . Entonces el par asociado a K , (II, A) , verifica

$$K(II, A) = \frac{1}{K}(1 + (1 - \nu^2)g(\nu)). \quad (3.148)$$

Demostración. Un cálculo directo nos muestra que

$$\begin{aligned} K(II, A) &= \frac{(F + g(\nu)|h_z|^2)^2 - |Q|^2}{\rho^2} \\ &= \frac{(F^2 - |E|^2) + g(\nu)(2F|h_z|^2 - Eh_{\bar{z}}^2 - \bar{E}h_z^2)}{\rho^2} \\ &= \frac{1}{K} + \frac{g(\nu)}{K} \|\nabla h\|^2 = \frac{1}{K}(1 + g(\nu)\|\nabla h\|^2). \end{aligned}$$

En particular, el cálculo anterior nos dice

$$|Q|^2 = (F + g(\nu)|h_z|^2)^2 + D(1 + (1 - \nu^2)g(\nu)), \quad (3.149)$$

fórmula que nos será de ayuda más adelante □

Ahora, veremos el resultado acerca de los ceros de $Q dz^2$

Lema 3.10:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie de CEC positiva. Si consideramos Σ como superficie de Riemann con la estructura conforme inducida por su Segunda Forma Fundamental, entonces la forma cuadrática $Q dz^2$ dada por (3.147) es, o bien idénticamente nula, o bien sólo tiene ceros aislados y de índice negativo.

Demostración. Primero, calcularemos la derivada de Q , la cuál está dada por

$$Q_{\bar{z}} = E_{\bar{z}} + g' \nu_{\bar{z}} h_z^2 + 2gh_z h_{z\bar{z}}.$$

Por otra parte, de (3.140) y (3.142), tenemos

$$E_{\bar{z}} + 2gh_z h_{z\bar{z}} = \frac{\nu}{K} ((2K + \varepsilon(\nu^2 - 1))g - \varepsilon) \rho h_z,$$

y de (3.141), (3.24) y (3.25) se sigue

$$\begin{aligned} \nu_{\bar{z}} E &= -\rho \frac{E\alpha}{D} = \rho \frac{\bar{\alpha}}{D} F - \rho h_z, \\ \nu_{\bar{z}} h_z^2 &= -\rho h_z \frac{\alpha h_z}{D} = \rho \frac{\bar{\alpha}}{D} |h_z|^2 - \|T\|^2 \rho h_z, \end{aligned}$$

$$g' \nu_{\bar{z}} h_z^2 = g' |h_z|^2 \rho \frac{\bar{\alpha}}{D} - g' \|T\|^2 \rho h_z.$$

Esto es, la derivada de Q queda como

$$Q_{\bar{z}} = \rho g'(\nu) \left(\frac{\nu^2 - 1}{2} h_z + |h_z|^2 \frac{\bar{\alpha}}{D} \right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |Q_{\bar{z}}|^2 &= \rho^2 g'(\nu)^2 \left((1 - \nu^2)^2 \frac{|h_z|^2}{4} - (1 - \nu^2) \frac{|h_z|^2}{2} \left(\frac{\alpha h_z + \bar{\alpha} h_{\bar{z}}}{D} \right) + |h_z|^4 \frac{|\alpha|^2}{D^2} \right) \\ &= \rho^2 g'(\nu)^2 |h_z|^2 \left(-\frac{(1 - \nu^2)^2}{4} + |h_z|^2 \frac{|\alpha|^2}{D^2} \right) \\ &= \frac{\rho^2 g'(\nu)^2 |h_z|^2}{-D} \left(D \frac{(1 - \nu^2)^2}{4} + |h_z|^2 \frac{|\alpha|^2}{-D} \right) \\ &= K g'(\nu)^2 |h_z|^2 \left(D \frac{(1 - \nu^2)^2}{4} + |h_z|^2 ((1 - \nu^2)F - |h_z|^2) \right), \end{aligned}$$

donde hemos usado (3.25) y la definición de α .

Luego, de (3.149)

$$D = \frac{|Q|^2 - (F + g(\nu) |h_z|^2)^2}{\chi(\nu)}.$$

Así, de la ecuación anterior donde se calculaba $|Q_{\bar{z}}|^2$

$$\begin{aligned} |Q_{\bar{z}}|^2 &= K g'(\nu)^2 |h_z|^2 \left(\frac{|Q|^2 - (F + g(\nu) |h_z|^2)^2}{\chi(\nu)} \frac{(1 - \nu^2)^2}{4} + |h_z|^2 ((1 - \nu^2)F - |h_z|^2) \right) \\ &= \frac{K g'(\nu)^2 (1 - \nu^2)^2 |h_z|^2}{4\chi(\nu)} |Q|^2 + \\ &\quad - \frac{K g'(\nu)^2 |h_z|^2}{4\chi(\nu)} \left((1 - \nu^2)^2 (F + g(\nu) |h_z|^2)^2 - 4\chi(\nu) |h_z|^2 ((1 - \nu^2)F - |h_z|^2) \right) \end{aligned}$$

Ahora veremos que el término entre paréntesis es no negativo. En efecto,

$$\begin{aligned}
 ((1 - \nu^2)F - &= (2 + g(\nu)(1 - \nu^2))|h_z|^2(1 - \nu^2)^2 F^2 \\
 &- 2F|h_z|^2(2(1 - \nu^2) + g(\nu)(1 - \nu^2)^2) + (4 + 4g(\nu)(1 - \nu^2) + g(\nu)^2(1 - \nu^2)^2)|h_z|^4 \\
 &= (1 - \nu^2)^2(F^2 - 2Fg(\nu)|h_z|^2 + g(\nu)^2|h_z|^4) \\
 &+ (1 - \nu^2)|h_z|^2(-4F + 4g(\nu)|h_z|^2) + 4|h_z|^4 \\
 &= 4|h_z|^2(-Fg(\nu)(1 - \nu^2)^2 - F(1 - \nu^2) + g(\nu)(1 - \nu^2)|h_z|^2 + |h_z|^2) \\
 &+ (1 - \nu^2)^2(F + g(\nu)|h_z|^2)^2 \\
 &= (1 - \nu^2)^2(F + g(\nu)|h_z|^2)^2 - 4\chi(\nu)|h_z|^2((1 - \nu^2)F - |h_z|^2)
 \end{aligned}$$

que es mayor o igual que cero.

Por tanto

$$|Q_{\bar{z}}|^2 \leq \frac{Kg'(\nu)^2(1 - \nu^2)^2|h_z|^2}{4\chi(\nu)}|Q|^2.$$

Por último, el Teorema 1.1 del Capítulo 1 nos da la tesis deseada. \square

3.6.3. Estimaciones verticales en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$

En esta Sección estableceremos cotas superiores para grafos con curvatura extrínseca constante positiva y borde en un plano horizontal de un espacio producto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$. Dichas estimaciones no serán óptimas, como en el caso de superficies con CMC, aunque, como se podrá comprobar, la técnicas son las mismas. Recordemos algunos conceptos que vimos para superficies de CMC.

Dada una superficie $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, definimos $c(\Sigma)$ como

$$c(\Sigma) = \inf \{ \kappa(\pi(p)) : p \in \Sigma \},$$

donde κ es la curvatura de Gauss de la base \mathbb{M}^2 .

Para simplificar los cálculos, supondremos que $c(\Sigma)$ es $-1, 0$ ó 1 . Para hacer esto es suficiente considerar, si $c(\Sigma) \neq 0$, la nueva métrica en \mathbb{M}^2 dada por la forma cuadrática $|c(\Sigma)|g_\kappa + dt^2$ y la superficie

$$\Sigma' = \{(x, \sqrt{|c(\Sigma)|}t) \in \mathbb{M}^2 : (x, t) \in \Sigma\}$$

la cuál tiene curvatura extrínseca constante $K/|c(\Sigma)|$. Esta normalización la haremos siempre que estemos tratando con resultados que envuelvan al ínfimo de la curvatura de Gauss de la base.

Teorema 3.17:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ un grafo compacto sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{M}^2$, con CEC positiva $K > 0$, y cuyo borde está contenido en un plano horizontal $\mathbb{M}^2 \times \{0\}$. Entonces existe una constante c_K (dependiendo sólo de K y $c(\Sigma)$) tal que $h(p) \leq c_K$ para todo $p \in \Sigma$.

Demostración. Lo que haremos será calcular el laplaciano de una cierta función $h + f(\nu)$ para una adecuada función f . Ya que conocemos el valor de $h_{z\bar{z}}$ por (3.140), centraremos nuestra atención en $f(\nu)_{z\bar{z}}$.

Usando (3.24) y (3.141)

$$\begin{aligned} f(\nu)_{z\bar{z}} &= f'(\nu)\nu_{z\bar{z}} + f''(\nu)|\nu_z|^2 = -f'(\nu)KF\nu + f''(\nu)\frac{|\alpha|^2 K^2}{\rho^2} \\ &= -f'(\nu)KF\nu - f''(\nu)K(|h_z|^2 - (1 - \nu^2)F) \\ &= -K(F\nu f'(\nu) - (1 - \nu^2)f''(\nu)) + |h_z|^2 f''(\nu). \end{aligned}$$

Primero, notemos que como II es definida positiva y Σ es un grafo, entonces $\nu \leq 0$. Segundo, distinguiremos dos casos, $c(\Sigma) = 0$ y $c(\Sigma) \neq 0$.

Cuando $k = 0$, consideramos

$$f(\nu) = \frac{\nu}{\sqrt{K}}.$$

Entonces

$$f(\nu)_{z\bar{z}} = -\sqrt{K}F\nu$$

y, usando $K = -\rho^2/D$,

$$\begin{aligned} (h + f(\nu))_{z\bar{z}} &= \frac{2K - \kappa(1 - \nu^2)}{2K}\nu\rho - \sqrt{K}F\nu \\ &= -\frac{\kappa}{2K}(1 - \nu^2)\nu\rho + (\sqrt{-D} - F)\nu\sqrt{K} \\ &\geq -\frac{\kappa}{2K}(1 - \nu^2)\nu\rho \geq 0. \end{aligned} \tag{3.150}$$

En consecuencia, tenemos que $\Delta^{II}(h + f(\nu)) \geq 0$ sobre nuestra superficie y $h + f(\nu) \leq 0$ sobre el borde, de donde $h \leq -\nu/\sqrt{K} \leq 1/\sqrt{K}$.

Cuando $c(\Sigma) \neq 0$, por las consideraciones previas tenemos que $c(\Sigma) = \varepsilon = \pm 1$.

Consideremos

$$f'(\nu) = \sqrt{\varepsilon \frac{1 - e^{-\varepsilon \frac{1 - \nu^2}{K}}}{1 - \nu^2}}.$$

Esta función es analítica y por lo tanto lo es toda primitiva suya $f(\nu)$.

Además

$$f''(\nu) = \frac{\nu e^{-\varepsilon \frac{1 - \nu^2}{K}}}{K} \frac{g(\nu)}{f'(\nu)}$$

donde $g(\nu)$ esta dada por (3.144).

Luego,

$$\nu f'(\nu) - (1 - \nu^2)f''(\nu) = \frac{\nu e^{-\varepsilon \frac{1-\nu^2}{K}}}{K f'(\nu)}$$

y

$$f(\nu)_{z\bar{z}} = - \frac{\nu e^{-\varepsilon \frac{1-\nu^2}{K}}}{f'(\nu)} (F + g(\nu)|h_z|^2).$$

Observemos que $(F + g(\nu)|h_z|^2)|dz|^2$ es la parte (1,1) de la forma cuadrática A , dada por (3.143) y que nuestra forma cuadrática Qdz^2 , dada por (3.147), es la parte (2,0) de A para II .

Así, de (3.140) y (3.148)

$$(h + f(\nu))_{z\bar{z}} = \frac{2K - \kappa(1 - \nu^2)}{2K} \nu \rho - \frac{\nu e^{-\varepsilon \frac{1-\nu^2}{K}}}{f'(\nu)} \sqrt{\frac{\rho^2(1 + g(\nu)(1 - \nu^2))}{K} + |Q|^2}.$$

Aquí hemos usado que $F + g(\nu)|h_z|^2 > 0$. Este hecho es claro debido a que $K(II, A)$ es positiva de (3.148), (3.145) y (3.146). Por lo tanto A es definida positiva o negativa y $F + g(\nu)|h_z|^2$ es positivo o negativo en todo punto. Pero debe ser positivo, pues así lo es en el punto más alto ($h_z = 0$ en dicho punto).

Así,

$$\begin{aligned} (h + f(\nu))_{z\bar{z}} &\geq \frac{2K - \kappa(1 - \nu^2)}{2K} \nu \rho - \frac{\nu e^{-\varepsilon \frac{1-\nu^2}{K}}}{f'(\nu)} \sqrt{\frac{\rho^2(1 + g(\nu)(1 - \nu^2))}{K}} \\ &= \left(\frac{2K - \kappa(1 - \nu^2)}{2K} - e^{-\varepsilon \frac{1-\nu^2}{2K}} \right) \nu \rho \\ &\geq - \left(e^{-\varepsilon \frac{1-\nu^2}{2K}} - 1 + \varepsilon \frac{1 - \nu^2}{2K} \right) \nu \rho \geq 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado que el término entre paréntesis es no negativo porque la función real $e^t - 1 - t$ es no negativa.

Tomando

$$f(\nu) = \int_0^\nu f'(t) dt$$

tenemos que $\Delta^{II}(h + f(\nu)) \geq 0$ sobre la superficie y $h + f(\nu) \leq 0$ sobre el borde (ya que $f'(\nu) \geq 0$ y $\nu \leq 0$).

Así, la máxima altura es menor o igual a

$$c_K := \int_{-1}^0 f'(t) dt.$$

□

Nota 3.2:

Es claro que la estimación de altura c_K que hemos obtenido cuando $c(\Sigma) \neq 0$, no se alcanza para ningún grafo con curvatura extrínseca constante positiva y borde en un plano horizontal debido a que

$$e^{-\varepsilon \frac{1-\nu^2}{2K}} - 1 + \varepsilon \frac{1-\nu^2}{2K}$$

es estrictamente positivo cuando $\nu \neq -1$, al igual que $\Delta^{II}(h + \phi(\nu))$. En efecto, si se alcanzara dicha estimación, el Principio del Máximo nos diría que $\Delta^{II}(h + \phi(\nu))$ se anula idénticamente sobre la superficie, lo que supone una contradicción.

Pero, cuando $c(\Sigma) = 0$, si la máxima altura se alcanza en un punto, entonces por (3.150) $h - \nu/\sqrt{K}$ se anula idénticamente sobre Σ . Luego, usando (3.150) de nuevo, κ y E se anulan idénticamente. Esto es, el dominio Ω es llano y Σ es totalmente umbilical.

Como una consecuencia inmediata del Principio de Reflexión de Alexandrov con respecto a los planos horizontales $\mathbb{M}^2 \times \{t_0\}$, tenemos el siguiente Corolario

Corolario 3.14:

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie compacta embebida con curvatura extrínseca constante positiva K y cuyo borde está contenido en un plano horizontal $\mathbb{M}^2 \times \{0\}$. Entonces, existe una constante c_K (dada por el Teorema 3.17, dependiendo sólo de K y $c(\Sigma)$) tal que $h(p) \leq 2c_K$ para todo $p \in \Sigma$.

Y, como para el caso de CMC,

Corolario 3.15:

Sea Σ una superficie de CEC positiva K propiamente embebida, no compacta y sin borde en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, con \mathbb{M}^2 compacta. Entonces Σ debe tener al menos un final hacia arriba y otro hacia abajo.

Demostración. Es análoga a la del Corolario 3.9. □

3.6.4. Estimaciones horizontales en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Ahora, consideremos una superficie de CEC positiva K , compacta, embebida en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y con borde en un plano vertical, y obtendremos estimaciones de distancia a este plano. Es decir, estableceremos el Teorema análogo al Teorema 3.5 pero para este tipo de superficies.

Si vemos detenidamente la demostración del Teorema 3.5, las claves son

- El Principio del Máximo.
- La existencia de un ejemplo embebido y compacto con CEC positiva K .

La demostración en nuestro caso es formalmente la misma, pero la estableceremos aquí por razones de completitud de la Sección.

Teorema 3.18:

Sea Σ una superficie compacta y embebida en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, con curvatura extrínseca constante $K > 0$. Sea P un plano vertical en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y supongamos que $\partial\Sigma \subset P$. Entonces, la distancia de Σ a P esta acotada; esto es, existe una constante d_K , independiente de Σ , tal que

$$\text{dist}(q, P) \leq d_K, \quad \forall q \in \Sigma.$$

Demostración. Como Σ es compacta, podemos elegir $q \in \Sigma$ donde la distancia a P sea máxima. Salvo una isometría, podemos suponer que $q \in \mathbb{H}^2 \times \{0\}$ y $q \in \text{ext}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(P)$. Sea $P_\gamma(t)$ la foliación de planos verticales a lo largo de γ con $P_\gamma(0) = P$ y $q \in P_\gamma(h)$. Denotemos por X el campo de Killing horizontal de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ generado por translaciones a lo largo de γ (X es tangente a cada $\mathbb{H}^2 \times \{\tau\}$ y es translación a lo largo de $\gamma \times \{\tau\}$) que es ortogonal a la foliación $P_\gamma(t)$.

Ahora, hagamos reflexión de Alexandrov con los planos $P_\gamma(t)$, comenzando en $t = h$, y disminuyendo t . Para $h/2 < t \leq h$, la simetría de la parte de Σ en $\text{ext}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(P_\gamma(t))$ no toca a $\partial\Sigma$, ya que $\partial\Sigma \subset P$. Así la técnica de reflexión de Alexandrov nos dice que la simetría de $\Sigma^+(t) = \Sigma \cap \text{ext}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(P_\gamma(t))$ por $P_\gamma(t)$, interseca Σ sólo en $\Sigma \cap P_\gamma(t)$ y S nunca es ortogonal a $P_\gamma(s)$ para $t \leq s \leq h$. Ya que X es ortogonal a cada $P_\gamma(t)$, concluimos que X es transverso a $\Sigma^+(h/2)$, y $\Sigma^+(h/2)$ es un grafo sobre un dominio de $P_\gamma(h/2)$ con respecto a las órbitas de X .

Luego, para probar el Teorema, es suficiente demostrar que X -grafos están a una distancia acotada a P , suponiendo que el borde del grafo está en P .

Ahora, supongamos que Σ es un X -grafo sobre un dominio $D \subset P$ y elijamos $P_\gamma(t)$ como antes. Sea Σ_R la esfera rotacionalmente invariante cuya curvatura extrínseca K es la misma que la de Σ . Denotemos por $\text{diam}(K)$, el diámetro de Σ_R .

Ahora probaremos que para cada $t > 2\text{diam}(K)$, el diámetro de cada componente conexa de $S(t) = P(t) \cap \Sigma$, es a lo sumo $2\text{diam}(K)$. Si no fuera así, para alguna componente conexa $C(t)$ de $\Sigma(t)$, habrían puntos x, y en el interior del dominio $D(t)$ de $P(t)$ acotado por $C(t)$ con $\text{dist}(x, y) > 2\text{diam}(K)$. Sea Q el dominio de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ acotado por $\Sigma \cup D$. Sea β una curva en $D(t)$ uniendo x e y , β disjunta a $C(t)$. Sea Ω el “rectángulo” formado por las órbitas de X uniendo β a P , $\Omega \subset Q$. Sea p un punto de Ω cuya distancia a $\partial\Omega$ es mayor que $\text{diam}(K)$, que existe por construcción de Ω .

Sea η la geodésica pasando por p tal que cada uno de sus puntos está a una distancia mayor que $\text{diam}(K)$ de $\partial\Omega$. Es fácil ver que η está en el plano $P(t)$ conteniendo

a p . η entra en Q en un primer punto q_0 y deja Q en un último punto q_1 .

Ahora consideremos la familia de esferas centradas en cada punto de η , cada una de ellas obtenida de la esfera rotacional Σ_R (de curvatura extrínseca K) por una translación de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Consideremos cómo la familia de esferas entra en Q por q_0 .

Entonces, existe una primera esfera en la familia (viniendo de q_0) que toca Ω por primera vez en un punto interior de Ω . Esta esfera pasa por Ω , sin tocar a ∂Q inicialmente, y pasa a través de Ω sin tocar $\partial\Omega$. Como las esferas dejan Q en q_1 , hay alguna esfera en nuestra familia que toca a $\partial Q \cap \Sigma$ en un primer punto de contacto, que pasa a través de Ω , con Σ . En este primer punto de contacto, los vectores curvatura media de Σ y la esfera rotacional coinciden. Por tanto Σ es igual a la esfera rotacional por el Principio del Máximo, lo que supone una contradicción.

Ahora, si el Teorema es falso, existe una sucesión de grafos Σ_n sobre dominios $D_n \subset P$, con $\text{diam}(D_n) < 2\text{diam}(K)$ y $\text{dist}(\Sigma_n, P)$ no acotada.

Salvo isometrías, podemos suponer que los dominios D_n están contenidos en un disco fijo D y los grafos Σ_n están contenidos en el cilindro de Killing horizontal \mathcal{C} sobre D , un entorno tubular de una geodésica horizontal γ . Usaremos planos verticales “inclinados” para demostrar que esto es imposible.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\gamma = \{0, \pi\}$, P es el plano vertical sobre la geodésica $\{\pi/2, 3\pi/2\}$, y los grafos Σ_n verifican que $\pi(\Sigma_n)$ son asintóticos a 0. Consideremos el plano vertical $Q(s_1, s_2) = \{s_1, s_2\} \times \mathbb{R}$. Un simple cálculo muestra que para $s_1 = 0$ y s_2 positivo y suficientemente cercano a 0, la simetría por $Q(0, s_2)$ de $\mathcal{C} \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(0, s_2))$ no interseca a P . En particular, la simetría de ningún $\Sigma_n \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(0, s_2))$ interseca a $\partial\Sigma_n \subset D$. Por continuidad, para s_1 negativo y suficientemente cercano a 0, es claro que las dos anteriores afirmaciones siguen siendo válidas, esto es, la simetría respecto de $Q(s_1, s_2)$ de $\mathcal{C} \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ no corta a P y la simetría de $\Sigma_n \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$, tampoco corta a $\partial\Sigma_n \subset D$.

Ahora observemos que la simetría de $\mathcal{C} \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ sale fuera de \mathcal{C} , por lo que la simetría de $\Sigma_n \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ también sale fuera de \mathcal{C} , para n suficientemente grande.

Elijamos a y b entre s_1 y s_2 tales que $Q(a, b)$ sea disjunto de \mathcal{C} . Sea $R(t)$ la foliación por planos verticales de la región de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ entre $Q(a, b)$ y $Q(s_1, s_2)$ con $R(0) = Q(a, b)$ y $R(1) = Q(s_1, s_2)$, $0 \leq t \leq 1$.

Hagamos Reflexión de Alexandrov con respecto a los planos $R(t)$. Elijamos n suficientemente grande tal que la simetría de $\Sigma_n \cap \text{int}_{\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}}(Q(s_1, s_2))$ tenga puntos fuera de \mathcal{C} . La simetría de esta parte de Σ_n respecto cada $R(t)$ es disjunta de P , y por lo tanto disjunta de $\partial\Sigma_n$. Además la simetría de esta parte de Σ_n respecto $R(1)$ sale fuera de \mathcal{C} , y $R(0)$ es disjunto de \mathcal{C} . Luego, obtenemos la existencia de un cierto t , suficientemente pequeño, tal que la simetría de Σ_n respecto de $R(t)$ toca a Σ_n en algún punto. Por tanto $R(t)$ debería ser un plano de simetría de Σ_n , lo cuál es una contradicción. Esto completa la prueba. □

3.6.5. Clasificación de superficies de CEC positiva

Como ya hemos anunciado, en esta Sección clasificaremos las superficies completas con CEC positiva en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ como los ejemplos completos de revolución dados en las Proposiciones 3.12 y 3.13.

Primero, establezcamos un resultado análogo al Teorema 3.7,

Teorema 3.19:

No hay superficies completas y no compactas con CEC positiva K en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

Demostración. Simplemente mencionaremos las líneas por las que se desarrolla la demostración, pues en esencia es la misma que el Teorema 3.7, ya que, por el Teorema 3.16, la superficie es propiamente embebida y topológicamente un plano.

Lo haremos por reducción al absurdo. Así, supongamos que una tal superficie Σ existe.

Primero, observemos que el Lema de Separación sigue siendo válido para superficies con CEC positiva. Recordemos que para dicho resultado necesitábamos

- El Principio del Máximo.
- La existencia de un ejemplo embebido y compacto con CEC positiva K .

Siguiendo las ideas del Teorema 3.6, obtenemos que Σ debe estar contenida en un cilindro vertical. Recordemos que los principales ingredientes del Teorema 3.6 son

- El Lema de Separación.
- Estimaciones horizontales.

Ahora, aplicamos el método de Alexandrov con los planos $P(t)$ para $t \geq 0$. Como Σ está contenida en un cilindro, se sigue que no puede ocurrir ningún accidente en la reflexión cuando movemos $P(t)$ hacia arriba, es decir, que la reflexión toque a algún punto interior de Σ o que la reflexión corte ortogonalmente en algún punto de su borde a su plano de reflexión, ya que el Principio del Máximo nos diría que Σ es compacta, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, para cualquier $t > 0$, la reflexión de la parte de Σ que queda por debajo de $P(t)$ es un grafo vertical (sobre $P(t)$) y no hay puntos de Σ por debajo de $P(t)$ donde Σ sea ortogonal a alguno de los planos $P(s)$, $0 < s \leq t$. Luego, podemos elegir t suficientemente grande para contradecir el Teorema 3.17. Así el resultado estará probado. \square

Con todo esto, ya estamos en condiciones de obtener el resultado más importante de esta Sección

Teorema 3.20:

Una superficie completa con CEC positiva K en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ es una esfera rotacionalmente simétrica (Véanse Proposiciones 3.12 y 3.13).

Demostración. De la ecuación de Gauss (3.1), tenemos que

$$K(I) = K + \varepsilon \nu^2.$$

Luego, si $\varepsilon = 1$, $K(I) \geq K > 0$ y, por lo tanto, toda superficie completa con CEC positiva K en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ debe ser una esfera topológica por los Teoremas de Bonnet y Gauss-Bonnet. Por otra parte, del Teorema 3.16 y el Teorema 3.19, podemos asegurar que toda superficie completa de CEC positiva K en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ debe ser una esfera topológica.

En consecuencia, por el Lema 3.10 y el Teorema del índice de Poincaré, la diferencial cuadrática Q dada por (3.147) se anula idénticamente sobre cualquier superficie completa de CEC K en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$.

Ahora, veremos que dicha superficie debe ser rotacional.

Tomemos coordenadas doblemente ortogonales (u, v) para (I, II) , esto es,

$$\begin{aligned} I &= E du^2 + G dv^2 \\ II &= k_1 E du^2 + k_2 G dv^2. \end{aligned}$$

Como $Q = 0$ se sigue que $A = \rho II$, y por lo tanto, de (3.143), $h_u h_v \equiv 0$.

Luego, podemos suponer que h_u se anula localmente. Ahora, usando las ecuaciones de estructura como lo hiciéramos en el Teorema 3.9, podemos ver que E, G, k_1, k_2, h, ν dependen sólo del segundo parámetro v , lo cuál nos dice que la superficie es invariante por un grupo 1-paramétrico de isometrías, esto es, la superficie debe ser helicoidal.

Para terminar, como la superficie es compacta, ésta debe ser invariante por el grupo de las rotaciones. Por lo tanto, las Proposiciones 3.12 y 3.13 nos dan el resultado. \square

Por último, observemos que los Teoremas 3.16 y 3.19, demuestran que una superficie Σ completa de CEC positiva K en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ debe ser embebida y topológicamente una esfera. Entonces, el Método de Alexandrov con respecto a planos verticales prueba que Σ es una esfera rotacionalmente simétrica. Esto da una demostración alternativa del Teorema 3.20 en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Resumen y Conclusiones

Aquí presentaremos los principales resultados que se han obtenido en esta memoria.

En el Capítulo 1 estableceremos la notación y elementos necesarios que usaremos a lo largo de nuestro trabajo. Así, introduciremos el importante concepto de **Par Fundamental**, esto es,

Definición 1.1

Sea Σ una superficie orientada. A un par

$$(I, II) \in \mathcal{R}(\Sigma) \times \mathcal{Q}(\Sigma) \equiv \mathcal{P}(\Sigma)$$

lo llamaremos **par fundamental** sobre Σ . Al conjunto $\mathcal{P}(\Sigma)$ lo llamaremos **conjunto de pares fundamentales**. Aquí $\mathcal{Q}(\Sigma)$ denota al conjunto de formas cuadráticas sobre Σ y

$$\mathcal{R}(\Sigma) = \{I \in \mathcal{Q}(\Sigma) : I \text{ métrica riemanniana}\}.$$

Es conveniente, en este momento, notar que un par fundamental lo podemos ver de la siguiente forma alternativa. Una vez fijada $I \equiv \langle, \rangle \in \mathcal{R}(\Sigma)$, podemos identificar todo elemento $II \in \mathcal{Q}(\Sigma)$ con un único elemento $S \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$ del conjunto de endomorfismo del espacio de campos diferenciables $\mathfrak{X}(\Sigma)$ autoadjuntos respecto de \langle, \rangle mediante

$$II(X, Y) = \langle SX, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

A S lo llamamos operador asociado a II .

A continuación revisaremos algunos conceptos de la Geometría riemanniana para así poder llegar al primer objeto de estudio, el **Tensor de Codazzi** asociado a todo par fundamental sobre una superficie,

Definición 1.2

Sea $(\langle, \rangle, S) \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Definimos el **Tensor de Codazzi asociado a S** , como la aplicación $T_S \in \Lambda^2(\Sigma)$, esto es

$$T_S : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma),$$

dada por

$$T_S(X, Y) = \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Y propiedades inmediatas de ésta,

Proposición 1.1

Sea $\langle, \rangle \in \mathcal{R}(\Sigma)$. Entonces

1. T_S es antisimétrico para cualquier $S \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$.
2. T_S es C^∞ -lineal en cada variable, esto es $T_S \in \tau^2(\Sigma)$. Además la aplicación

$$\begin{array}{ccc} T & : & \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle) \longrightarrow \tau^2(\Sigma) \\ & & S \longmapsto T_S \end{array}$$

es una aplicación \mathbb{R} -lineal. De hecho, verifica

$$T_{fS}(X, Y) = fT_S(X, Y) + X(f)SY - Y(f)SX, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma), \quad f \in C^\infty(\Sigma).$$

Luego nos dedicaremos a establecer las ecuaciones necesarias para parametrizaciones especiales sobre la superficie que verifica todo par fundamental, dando definiciones abstractas de objetos geométricos ampliamente conocidos como son la curvatura media o la curvatura extrínseca asociadas al par fundamental.

Pasaremos después a la definición del siguiente objeto de estudio, la **Función de Codazzi**

Definición 1.4

Sea $(\langle, \rangle, S) \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Definimos la **Función de Codazzi asociada a S** como

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_S & : & \Sigma \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & p \longmapsto \frac{\|T_S(X_p, Y_p)\|^2}{\|X_p \wedge Y_p\|^2} \end{array}$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ son campos linealmente independientes en un entorno U de p y

$$\|X \wedge Y\|^2 := \|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2.$$

Continuaremos obteniendo los primeros resultados destacables. Más concretamente, relacionaremos la función de Codazzi de un par fundamental (I, II) con la

diferencial cuadrática que viene dada por la parte $(2, 0)$ de II cuando consideramos la estructura conforme que induce sobre la superficie la métrica riemanniana I . Así, seremos capaces de controlar los ceros de dicha diferencial mediante esta función, lo que nos permitirá, dando condiciones sobre la función de Codazzi, obtener información de la superficie usando un reciente resultado de Alencar-do Carmo-Tribuzy de análisis complejo y el clásico Teorema del Índice de Poincaré. Veremos que los ceros de dicha diferencial cuadrática coinciden con los puntos umbilicales del par fundamental, es decir, los puntos donde II es proporcional a I .

Teorema 1.1

Sea (I, II) un par fundamental sobre Σ con curvatura media H y operador asociado S . Definamos $\tilde{S} = S - H \text{Id}$. Si para todo $p_0 \in \partial\mathcal{U}_{(I,II)}$, siendo $\mathcal{U}_{(I,II)}$ el conjunto de puntos umbilicales, se verifica

$$\limsup_{p \rightarrow p_0} \frac{\mathcal{T}_{\tilde{S}}}{q} < +\infty$$

donde el límite lo estamos tomando sobre puntos que se acercan a p_0 por el conjunto $\Sigma \setminus \mathcal{U}_{(I,II)}$, entonces se da una de las dos siguientes posibilidades:

- existe un entorno $p_0 \in U \subset \Sigma$ donde $Q dz^2 = \langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle dz^2 \equiv 0$ en U , siendo z un parámetro conforme local para I , en cuyo caso $Q dz^2 \equiv 0$ en Σ .
- p_0 es un cero de $Q dz^2 = \langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} \rangle dz^2$ aislado y de índice negativo.

En particular,

1. si Σ es una esfera topológica el par (I, II) es totalmente umbilical,
2. si Σ es un toro el par (I, II) es totalmente umbilical o libre de puntos umbilicales.

A partir de este momento, nos restringiremos al estudio de **Pares de Codazzi**, esto es, al subconjunto $\mathcal{C}(\Sigma)$ de pares fundamentales tales que verifican que su tensor de Codazzi se anula idénticamente. Que el tensor de Codazzi se anule idénticamente equivale a que el par fundamental (I, II) verifique las clásicas ecuaciones de Codazzi. Recordaremos en esta parte resultados ya conocidos de esta teoría, pero que usaremos en algún momento de esta memoria, siendo los más destacables las versiones abstractas de los Teoremas de Hopf y Liebman (Lemas 1.6 y 1.7) para esferas topológicas con curvatura media constante (CMC) y curvatura extrínseca constante (CEC) positiva respectivamente, y el Teorema de Hilbert (Lema 1.8) para superficies completas con CEC negativa. Además, veremos que en el caso que el par fundamental sea de Codazzi, la función de Codazzi toma una expresión bastante sencilla.

Comenzaremos la siguiente parte del Capítulo modificando la estructura conforme inducida en la superficie por I , esto es,

Teorema 1.2

Sean $\varphi^1, \varphi^2 \in C^\infty(\Sigma)$ y $(I, II) \in \mathcal{P}^0(\Sigma)$, es decir, un par fundamental tal que $H(I, II) = 0$. Consideremos el nuevo par fundamental dado por el giro de (I, II) respecto de (φ^1, φ^2) definido en $\Sigma' = \Sigma \setminus \mathcal{U}_{(I, II)}$ como

$$\begin{aligned} I(\varphi^1, \varphi^2) &= \operatorname{ch}(\varphi^1, \varphi^2)I + \operatorname{sh}(\varphi^1, \varphi^2)I' \\ II(\varphi^1, \varphi^2) &= \sqrt{q}(\operatorname{sh}(\varphi^1, \varphi^2)I + \operatorname{ch}(\varphi^1, \varphi^2)I'), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\varphi^1, \varphi^2) &= \frac{e^{\varphi^1} + e^{\varphi^2}}{2} \\ \operatorname{sh}(\varphi^1, \varphi^2) &= \frac{e^{\varphi^1} - e^{\varphi^2}}{2}. \end{aligned}$$

Entonces este nuevo par verifica:

$$\begin{aligned} H(\varphi^1, \varphi^2) &= 0 \\ K(\varphi^1, \varphi^2) &= -q \\ q(\varphi^1, \varphi^2) &= q, \end{aligned}$$

y podemos relacionar el Tensor de Codazzi $T_{S(\varphi^1, \varphi^2)}$ del par $(I(\varphi^1, \varphi^2), II(\varphi^1, \varphi^2))$ con el Tensor de Codazzi T_S del par (I, II) como

$$T_{S(\varphi^1, \varphi^2)} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = - (T_S + \sqrt{q} T_{(\varphi^1, -\varphi^2)}) \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right),$$

siendo $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$ los campos básicos asociados a parámetros doblemente ortogonales en un entorno de todo punto de Σ' .

En particular, si $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma)$, entonces

$$T_{S(\varphi^1, \varphi^2)} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = (T_H - \sqrt{q} T_{(\varphi^1, -\varphi^2)}) \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right).$$

Como podemos ver, el par lo hemos tomado de tal forma que los puntos umbilicales de este nuevo par coincidan con los puntos umbilicales del par de partida. Mediante este **giro** del par (I, II) obtenemos (ver Corolarios 1.1, 1.2 y 1.3) una estructura conforme sobre la superficie para la cuál la parte $(2, 0)$ de una forma cuadrática es holomorfa. Dicho de otra forma, podremos controlar el tensor de Codazzi del par de partida a partir del par girado, sin alterar las propiedades fundamentales en las que estamos interesados. Más concretamente

Corolario 1.2

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma)$, $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con $\varphi(0) = 0$ y definamos $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$2f'(t) = \varphi'(\sqrt{t}). \quad (1.145)$$

Consideremos el par fundamental $(I(\varphi), II(\varphi))$ dado por el giro de (I, II) respecto de $(\varphi(\sqrt{q}), -\varphi(\sqrt{q}))$ definido en Σ como

$$I(\varphi) = \cosh(\varphi)I + \sinh(\varphi)I' \quad (1.146)$$

$$II(\varphi) = \sqrt{q}(\sinh(\varphi)I + \cosh(\varphi)I'), \quad (1.147)$$

siendo $q = H^2 - K$ del par (I, II) .

Sea z un parámetro conforme para $I(\varphi)$, $I(\varphi) = 2\lambda|dz|^2$, y denotemos por $Q(\varphi) = II(\varphi)(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Entonces se verifica la siguiente ecuación

$$Q(\varphi)_{\bar{z}} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \lambda$$

donde ω es la 1-forma definida por

$$\omega = d(H - f(q)).$$

Corolario 1.3

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma)$, $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con $\varphi(0) = 0$ tal que

$$dH - \sqrt{q}d\varphi(\sqrt{q}) = 0.$$

Consideremos el par fundamental $(I(\varphi), II(\varphi))$ dado por el giro de (I, II) respecto de $(\varphi(\sqrt{q}), -\varphi(\sqrt{q}))$ definido en Σ como

$$I(\varphi) = \cosh(\varphi(\sqrt{q}))I + \sinh(\varphi(\sqrt{q}))I' \quad (1.151)$$

$$II(\varphi) = \sqrt{q}(\sinh(\varphi(\sqrt{q}))I + \cosh(\varphi(\sqrt{q}))I'), \quad (1.152)$$

siendo $q = H^2 - K$ del par (I, II) .

Entonces, para cualquier función positiva μ , el nuevo par $(\mu I(\varphi), II(\varphi)) \in \mathcal{C}(\Sigma)$.

Además, $H(\mu I(\varphi), II(\varphi)) = 0$ y $K(\mu I(\varphi), II(\varphi)) = -q/\mu^2$.

El siguiente punto a tratar será restringir los resultados obtenidos hasta el momento para un tipo de pares, los **pares especiales de Weingarten** respecto de f , que

denotamos por $\mathcal{C}(\Sigma, f)$, que son aquellos en los que su curvatura media H y curvatura asimétrica $q = H^2 - K$ están relacionadas por una función $H = f(q)$,

Definición 1.5

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma)$. Decimos que el par es **Especial de Weingarten** si

$$H = f(q)$$

siendo $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

Además, asociada a f definimos $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds. \quad (1.153)$$

Veremos cómo los resultados abstractos conseguidos hasta el momento se tornan en potentes resultados para estos pares. Seremos capaces, por ejemplo, de clasificar todos los pares de Codazzi abstractos que sean especiales de Weingarten,

Lema 1.8

Sea Σ una superficie y f una función diferenciable definida sobre un intervalo $\mathcal{L} \subset [0, \infty)$. Tomemos una primitiva $\varphi(t)$ de $2f'(t^2)$ sobre dicho intervalo tal que $\varphi(t)/t$ esté bien definida.

Entonces todo par de Codazzi, especial de Weingarten (I, II) sobre Σ cumpliendo $H = f(H^2 - K)$ viene dado por

$$I = \cosh \varphi(t) I(\varphi) - \frac{\sinh \varphi(t)}{t} II(\varphi)$$

$$II - f(t^2) I = -t \sinh \varphi(t) I(\varphi) + \cosh \varphi(t) II(\varphi),$$

donde $I(\varphi)$ es una métrica Riemanniana sobre Σ y $II(\varphi) = Q dz^2 + \bar{Q} d\bar{z}^2$, siendo $Q dz^2$ una 2-forma holomorfa para $I(\varphi) = 2\lambda|dz|^2$ cumpliendo que la función $t : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ definida como $t = \sqrt{q(I(\varphi), II(\varphi))}$ tiene imagen en \mathcal{L} .

En particular obtendremos que $t^2 = H^2 - K$.

Así como

Lema 1.7

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$ no totalmente umbilical. Sea $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (1.153). Entonces el par dado por (1.151) y (1.152) verifica $H(\varphi) = 0$ y $q(\varphi) = q$.

Además, en Σ' existe un parámetro conforme local $z = s + it$ tal que

$$\begin{aligned} qI(\varphi) &= |dz|^2 \\ II(\varphi) &= dz^2 + d\bar{z}^2 \end{aligned}$$

y la curvatura de Gauss de I se puede expresar como

$$K(I) = L_f(\ln(q))$$

siendo L_f el operador lineal de segundo orden dado por

$$L_f(\chi) = \text{Tr}(\mathcal{M}\nabla_0^2\chi) - ds^2(T, \nabla_0\chi)$$

donde ∇_0^2 y ∇_0 son el hessiano y el gradiente respecto de la métrica $ds^2 = qI(\varphi) = ds^2 + dt^2$, Tr es el operador Traza, y \mathcal{M} y T están definidos por

$$\mathcal{M} = \frac{\sqrt{q}}{4} \begin{pmatrix} (1 - \sqrt{q}\varphi'(\sqrt{q}))e^{\varphi(\sqrt{q})} & 0 \\ 0 & (1 + \sqrt{q}\varphi'(\sqrt{q}))e^{-\varphi(\sqrt{q})} \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{\sqrt{q}}{4}(\varphi'(\sqrt{q})^2 + \varphi''(\sqrt{q}))e^{\varphi(\sqrt{q})}q_s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\sqrt{q}}{4}(\varphi'(\sqrt{q})^2 - \varphi''(\sqrt{q}))e^{-\varphi(\sqrt{q})}q_t \frac{\partial}{\partial t}.$$

Dentro de estos pares especiales de Weingarten, nos centraremos en aquellos que son de tipo elíptico,

Definición 1.6

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$. Diremos que es de **Tipo Elíptico** si L_f es un operador elíptico, o equivalentemente, si

$$1 - 4tf'(t)^2 > 0.$$

La razón es que para este tipo de pares podremos controlar la completitud de la métrica girada a partir de la completitud de la métrica original,

Lema 1.9

Sea $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$ de tipo elíptico con I completa. Si $q \geq c_0^2 > 0$ para una cierta constante c_0 , la métrica llana $ds^2 = \sqrt{q}I(\varphi)$ es completa sobre Σ .

Por último, usaremos las herramientas estudiadas hasta el momento para obtener algunas otras consecuencias sobre pares de Codazzi como una generalización del Teorema de Bonnet

Lema 1.10

Sean $(I_1, II_1), (I_2, II_2) \in \mathcal{C}(\Sigma)$. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

1. Para todo punto $p_0 \in \Sigma$ donde $|\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}|(p_0) = 0$, se verifica

$$\limsup_{p \rightarrow p_0} \left| \frac{d(H_1 - H_2 - (f(q_1) - f(q_2)))}{|\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}|} \right| < +\infty$$

donde $q_i = H_i^2 - K_i$ para $i = 1, 2$, y $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

- 2.

$$I_1(\varphi) = I_2(\varphi) \equiv I(\varphi)$$

donde $(I_1(\varphi), II_1(\varphi))$ y $(I_2(\varphi), II_2(\varphi))$ son los pares asociados de (I_1, II_1) y (I_2, II_2) , respectivamente, dados por (1.146) y (1.147) para la función

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds.$$

Si definimos

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\varphi) &= I(\varphi) \\ \tilde{II}(\varphi) &= II_1(\varphi) - II_2(\varphi), \end{aligned}$$

entonces el par $(\tilde{I}(\varphi), \tilde{II}(\varphi)) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ verifica

$$\limsup_{\tilde{q}(\varphi) \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}_{\tilde{S}(\varphi)}}{\tilde{q}(\varphi)} < +\infty,$$

siendo $\tilde{q}(\varphi)$ la curvatura asimétrica del par $(\tilde{I}(\varphi), \tilde{II}(\varphi))$ y $\tilde{S}(\varphi)$ el endomorfismo autoadjunto asociado a $\tilde{II}(\varphi)$.

En el Capítulo 2 comenzaremos revisando las representaciones usuales de los espacios modelo \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 y \mathbb{S}^3 , además de establecer la notación necesaria concerniente a superficies inmersas en estos espacios.

Continuaremos recordando el **Principio del Máximo** de Hopf en su versión más conocida, esto es, para ecuaciones diferenciales elípticas de segundo orden. Veremos cómo se aplica este resultado a superficies en \mathbb{R}^3 , aunque también a otros espacios modelo es aplicable.

Definición 2.2

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie vista como un grafo sobre su plano tangente (localmente), esto es, $\Sigma = \text{Gr}(u)$ donde $u \in C^2(\Omega)$ y Ω un dominio del plano tangente. Diremos que $\Sigma \in S(L)$ si u verifica la ecuación $Lu = 0$, donde L es un cierto operador diferencial.

Definición 2.3

Diremos que el conjunto de superficies $S(L)$ cumple el **Principio del Máximo** si dadas $\Sigma_i = \text{Gr}(u_i)$, $i = 1, 2$, dos superficies definidas como grafos de $u_i \in C^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, soluciones de la ecuación $Lu = 0$, la diferencia de dichas soluciones $w = u_1 - u_2$ verifica una ecuación diferencial $\tilde{L}w = 0$ tal que cumple las conclusiones del Principio del Máximo (Interior y Frontera) de Hopf.

Una vez fijados los preliminares analíticos, examinaremos el **Método de Alexandrov** para superficies que verifican el Principio del Máximo. A. D. Alexandrov demostró en 1956 que toda superficie de CMC, compacta y embebida debe ser una esfera. Para ello lo que hizo fue comparar la superficie con su reflejada respecto de una familia uniparamétrica de planos paralelos y, usando el Principio del Máximo de H. Hopf, concluir que dentro de esta familia de planos hay un plano de reflexión. Lo que haremos será extender este método para toda clase de superficies que verifiquen el Principio del Máximo.

A partir de aquí, nos centraremos en clases de superficies que verifican el Principio del Máximo y tales que existe una esfera embebida dentro de dicha clase

Definición 2.4

Denotemos por $S_{PM}(L)$ al conjunto de superficies en \mathbb{R}^3 que, vistas como grafos locales sobre su plano tangente, verifican $Lu = 0$ y cumplen el Principio del Máximo en el sentido de la Definición 2.3. Si además existe $\Sigma_0 \in S_{PM}(L)$ compacta y embebida, entonces denotaremos al conjunto por $S_{PM}^c(L)$. Dichas superficies las supondremos analíticas si fuese necesario.

Para este tipo de superficies obtendremos **estimaciones de la altura** máxima que puede alcanzar un grafo definido sobre un dominio plano

Teorema 2.3

Sea $\Sigma \in S_{PM}^c(L)$ un grafo sobre un dominio Ω del xy -plano P en \mathbb{R}^3 . Entonces la distancia en \mathbb{R}^3 de Σ a P está acotada, esto es, existe una constante $h_{PM}^c(L)$ (independiente de Σ), tal que

$$\text{dist}(q, P) \leq h_{PM}^c(L), \quad \forall q \in \Sigma.$$

Usando el Método de Alexandrov obtendremos estimaciones sobre la distancia má-

xima que puede alcanzar una superficie compacta y embebida con borde en un plano.

En este punto tenemos dos ingredientes fundamentales, el Método de Alexandrov y estimaciones de altura, para toda clase de superficies que verifican el Principio del Máximo y tal que existe una superficie compacta embebida dentro de la clase. Dichos ingredientes son las herramientas necesarias que utilizaron Korevaar-Kusner-Meeks-Solomon para demostrar la **acotación cilíndrica** de los finales anulares de una superficie embebida con curvatura media constante. Por tanto, podremos derivar, para la clase de superficies con la que estamos tratando, los resultados que se obtuvieron para CMC. Específicamente

Teorema 2.4 (Acotación cilíndrica)

Sea $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un anillo propiamente embebido tal que $\Sigma = \psi(\mathcal{A}) \in S_{PM}^c(L)$. Entonces existe un vector v y un radio $R < \infty$ tal que $\Sigma \subset \mathcal{C}(O, v, R)$, siendo $\mathcal{C}(O, v, R)$ el cilindro de \mathbb{R}^3 con eje v centrado en el origen O y radio R .

Ahora, con el resultado de la acotación cilíndrica en la mano y el Método de Alexandrov, los autores mencionados estudiaron superficies de curvatura media constante **propiamente embebidas** y de topología finita, deduciendo que la superficie tiene que tener más de un final, si tiene 2 debe ser de rotación y si tiene 3 debe estar contenida en una banda determinada por dos planos paralelos. Generalizaremos este resultado para nuestra clase de superficies.

Teorema 2.5

Sea $\Sigma \in S_{PM}^c(L)$ una superficie propiamente embebida de topología finita en \mathbb{R}^3 . Entonces, cada final E_1, \dots, E_k está cilíndricamente acotado. Además, si a_1, \dots, a_k son los vectores axiales correspondientes a cada final, no pueden estar contenidos en un hemisferio abierto de S^2 . En particular,

- $k = 1$ es imposible.
- Si $k = 2$, entonces Σ está contenida en un cilindro y Σ es rotacionalmente simétrica respecto de una recta paralela al eje del cilindro.
- Si $k = 3$, entonces Σ está contenida en una banda determinada por dos planos paralelos.

Proseguiremos el Capítulo 2 estudiando **superficies especiales de Weingarten** en \mathbb{R}^3 , esto es, aquellas cuya curvatura media H y curvatura asimétrica $q = H^2 - K$ se relacionan por $H = f(q)$, donde f es una función diferenciable definida en $[0, +\infty)$.

Aplicaremos los resultados abstractos obtenidos en el Capítulo 1 a estas superficies y obtendremos un **Teorema tipo Hopf**

Teorema 2.6 (Teorema tipo Hopf)

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\varphi(0) = 0$. Consideremos el par fundamental $(I(\varphi), II(\varphi))$ dado por el giro de (I, II) respecto de $(\varphi(\sqrt{q}), -\varphi(\sqrt{q}))$.

Entonces, Σ verifica la relación de Weingarten $H = f(q)$, donde $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable dada por

$$2f'(t) = \varphi'(\sqrt{t}),$$

si, y sólo si, $Q(\varphi)$ es holomorfa respecto de la estructura dada por $I(\varphi)$.

En particular, si Σ es una esfera topológica entonces es totalmente umbilical. Y si Σ es un toro entonces es libre de puntos umbilicales.

También obtendremos un **Teorema tipo Bonnet** para estas superficies

Teorema 2.7 (Teorema tipo Bonnet)

Sean $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ dos superficies de género cero y $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

Supongamos que

- $H_1 - H_2 = f(q_1) - f(q_2)$,
- $I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$,

donde $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ esta dada por

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds,$$

y $I_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, es la métrica dada por la fórmula (1.146).

Entonces, bajo estas condiciones existe una congruencia $\chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\Sigma_1 = \chi(\Sigma_2)$.

En particular, el Teorema de Bonnet lo tenemos cuando $f \equiv 0$.

Nos adentraremos después en un tipo concreto de superficies especiales, las de **tipo elíptico**. Este tipo de superficies tienen un comportamiento singular dependiendo de lo que ocurra en los puntos umbilicales, es decir, como $H = f(q)$ y los puntos umbilicales son aquellos en los que $q = 0$, el comportamiento depende del valor $f(0)$. Si $f(0) = 0$ se comporta como una superficie minimal y si $f(0) \neq 0$ como una superficie de CMC. Revisaremos algunos de los resultados conocidos para este tipo de superficies, como por ejemplo que verifican el Principio del Máximo.

Si $f(0) \neq 0$, dentro de la clase de superficies existe una esfera de radio $1/|f(0)|$, y por tanto una superficie de tipo elíptico con $f(0) \neq 0$ cumple todos los requisitos necesarios para aplicar los resultados generales obtenidos para superficies propiamente embebidas de topología finita. Por ejemplo,

Teorema 2.13

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie especial de Weingarten de tipo elíptico con $f(0) > 0$, propiamente embebida, de topología finita y con dos finales. Entonces Σ es necesariamente uno de los ondonoides especiales dados en [96, Théorème 1].

Por último, daremos algunos resultados de clasificación para las superficies especiales de tipo elíptico imponiendo alguna condición extra sobre la curvatura de Gauss. Concretamente veremos

Teorema 2.14

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa especial de Weingarten de tipo elíptico. Si $K(I) \leq 0$, entonces Σ es de tipo minimal, esto es $f(0) = 0$, o es un cilindro recto.

Teorema 2.15

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie completa especial de Weingarten, $H = f(q)$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} < 1.$$

Si $K \geq 0$, entonces Σ es una esfera, un plano o un cilindro recto. En particular, el resultado es cierto para toda superficie especial de Weingarten de tipo elíptico.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de superficies inmersas en un espacio producto tridimensional que son el producto cartesiano de una superficie riemanniana sin borde \mathbb{M} , que llamamos base, y la recta real, la fibra, con la métrica producto, prestando especial atención cuando \mathbb{M} es una de las superficies simplemente conexas con curvatura constante. Para empezar revisaremos cómo los **elementos geométricos** (como la conexión de Levi-Civita y el tensor de curvatura) del espacio producto se relacionan con los elementos geométricos de la base. Además, introduciremos la **función altura** asociada a una superficie, es decir, la proyección de la superficie sobre la fibra, y la **función ángulo**, que no es más que el producto escalar del normal de la superficie con la dirección vertical.

A continuación, fijaremos **ecuaciones necesarias** que debe cumplir una superficie inmersa en un espacio producto. Entre ellas las ecuaciones de Gauss y Codazzi.

Lema 3.1

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie conexa, con normal unitario N y endomorfismo de Weingarten asociado S . Sean h y ν la función altura y ángulo, respectivamente, de la superficie, y $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Entonces se verifican las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}
 \text{Gauss} \quad & K(I) = K + \kappa \nu^2 \\
 \text{Codazzi} \quad & T_S(X, Y) = \kappa \nu (\langle Y, \nabla h \rangle X - \langle X, \nabla h \rangle Y) \\
 & \nabla_X \nabla h = \nu SX \\
 & d\nu(X) = -\langle SX, \nabla h \rangle \\
 & \|\nabla h\|^2 + \nu^2 = 1.
 \end{aligned}$$

donde $K(I)$ denota la curvatura de Gauss de I , K la curvatura extrínseca, κ la curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2 en el punto $\pi(p)$, $p \in \Sigma$, y T_S el Tensor de Codazzi asociado a S (ver Definición 1.2).

Después particularizaremos estas ecuaciones para parametrizaciones específicas (Corolarios 3.4, 3.5 y 3.6) sobre la superficie, ecuaciones que usaremos muy a menudo a lo largo de este Capítulo. Como primera aplicación, estudiaremos las **superficies totalmente geodésicas**

Proposición 3.3

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie completa y totalmente geodésica. Entonces se verifica una de las siguientes:

- Σ es un plano vertical, es decir, el producto de una geodésica completa de \mathbb{M}^2 con \mathbb{R} .
- Σ es un plano horizontal, es decir, de la forma $\mathbb{M}^2 \times \{t_0\}$, y por lo tanto \mathbb{M}^2 es necesariamente completa.
- $\mathbb{M}^2 \equiv \mathbb{R}^2$ (pasando a su recubridor universal si fuese necesario), y Σ es un plano inclinado.

Proseguiremos estudiando las superficies de revolución en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, dando las curvaturas principales en términos de su curva generatriz (Proposiciones 3.4 y 3.5).

El siguiente punto a tratar serán las **superficies con curvatura media constante** en estos espacios. Comenzaremos recordando algunos de los resultados más notables obtenidos al respecto. Entre ellos, recordaremos cómo son las **esferas rotacionalmente simétricas** (Proposiciones 3.6 y 3.7) con CMC en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, para después clasificarlas como las únicas esferas topológicas inmersas con CMC, lo que sería un **Teorema tipo Hopf** en estos espacios. Dicho resultado ha sido demostrado por Abresch y Rosenberg. Para probar este resultado, los autores definieron una

diferencial cuadrática en términos de la diferencial de Hopf usual y la diferencial de la función altura, que resulta ser holomorfa cuando la curvatura media de la superficie es constante. Por tanto, sobre una esfera topológica esta diferencial, conocida como **diferencial de Abresch-Rosenberg**, se anula, lo cuál caracteriza a las esferas de revolución.

Pasaremos a obtener **estimaciones de la distancia** máxima que puede alcanzar un grafo de CMC $H > 1/2$ con respecto al plano vertical u horizontal sobre el que está definido

Teorema 3.4

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ un grafo compacto sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{M}^2$, con curvatura media constante $H > 0$ y cuyo borde esté contenido en el plano horizontal $\mathbb{M}^2 \times \{0\}$. Sea $c(\Sigma)$ el mínimo de la curvatura de Gauss en $\Omega \subset \mathbb{M}^2$. Entonces la altura máxima que Σ puede alcanzar respecto $\mathbb{M}^2 \times \{0\}$ es

$$\begin{aligned} & \frac{4H}{\sqrt{-4c(\Sigma)H^2 - c(\Sigma)^2}} \arcsen\left(\frac{\sqrt{-c(\Sigma)}}{2H}\right) \quad \text{si } c(\Sigma) < 0 \quad \text{y} \quad H > \frac{\sqrt{-c(\Sigma)}}{2}, \\ & \frac{1}{H} \quad \text{si } c(\Sigma) = 0, \\ & \frac{4H}{\sqrt{4c(\Sigma)H^2 + c(\Sigma)^2}} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{\sqrt{c(\Sigma)}}{2H}\right) \quad \text{si } c(\Sigma) > 0. \end{aligned}$$

Además, si la igualdad se verifica, entonces Ω tiene curvatura de Gauss constante $c(\Sigma)$ y la diferencial de Abresch-Rosenberg se anula idénticamente en Σ . En particular, Σ debe ser un hemisferio de uno de los ejemplos completos descritos en la Proposición 3.6 o 3.7 si $\mathbb{M} = \mathbb{H}^2$ o $\mathbb{M} = \mathbb{S}^2$ respectivamente.

Teorema 3.5

Sea Σ una superficie compacta y embebida en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con CMC $H > 1/2$. Sea P un plano vertical en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y supongamos que $\partial\Sigma \subset P$. Entonces la distancia en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ de Σ a P esta acotada; esto es, existe una constante d_H , independiente de Σ , tal que

$$\operatorname{dist}(q, P) \leq d_H, \quad \forall q \in \Sigma.$$

Y con estos resultados, usando el Método de Alexandrov, obtendremos estimaciones de la distancia máxima que alcanza una superficie compacta y embebida con borde en un plano vertical u horizontal. Cabe destacar que las **estimaciones verticales son óptimas** en el sentido que caracterizan a los ejemplos completos de revolución cuando se alcanza dicha altura máxima.

Aunque las estimaciones horizontales no son óptimas, sí serán suficientes para estudiar superficies propiamente embebidas con curvatura media constante, de topología finita y un solo final, obteniendo

Teorema 3.7

No hay superficies con CMC $H > 1/2$, propiamente embebidas, con topología finita y un final en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Lo siguiente será estudiar superficies con curvatura de Gauss constante en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Comenzaremos como en el caso anterior estudiando aquéllas que son de revolución (Proposiciones 3.8 y 3.9). Una vez obtenidas, definiremos sobre la superficie un nuevo **par fundamental** en términos de la Primera y Segunda Forma Fundamental y la diferencial de la función altura,

Definición 3.6

Dada $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, si

$$A = (K(I) - \varepsilon)I + dh^2$$

es una métrica definida sobre Σ , entonces llamaremos **par asociado a $K(I)$** al par fundamental (A, II) .

Lo que haremos será demostrar que este nuevo par es de **Codazzi** cuando la curvatura de Gauss es constante

Teorema 3.8

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie con CGC. Si el par (A, II) es fundamental, entonces (A, II) es un par de Codazzi con curvatura extrínseca constante.

Además, la curvatura de Gauss de A viene dada por

$$K(A) = \text{sg}(A) \frac{K(I) + \varepsilon\nu^2}{K(I) - \varepsilon\nu^2}$$

donde $\text{sg}(A)$ es el signo necesario para hacer que A sea definida positiva.

Este hecho nos permitirá obtener, usando resultados conocidos de la teoría de Pares de Codazzi, un **Teorema tipo Liebmann**

Teorema 3.10 (Teorema tipo Liebmann)

Dada una constante real $K(I)$, existe, salvo isometrías, una única superficie completa de CGC $K(I) > 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ y una única superficie completa de CGC $K(I) > 0$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Además, estas superficies son rotacionalmente simétricas.

Además, mostraremos que no existen superficies completas con curvatura de Gauss constante $K(I) \in (0, 1)$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Usando el Teorema de Hilbert abstracto del Capítulo 1, obtendremos un **Teorema tipo Hilbert**

Teorema 3.12 (Teorema tipo Hilbert)

No existen superficies completas con CGC $K(I) < -1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Continuaremos dando **estimaciones** para la altura máxima que puede alcanzar un grafo de curvatura de Gauss constante positiva $K(I) > 0$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (o $K(I) > 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$) sobre un plano horizontal, caracterizando, de hecho, las superficies de revolución como aquéllas en que se alcanza la máxima distancia.

Teorema 3.13

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ un grafo compacto sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon)$, con CGC positiva $K(I) > 0$ si $\varepsilon = -1$ o $K(I) > 1$ si $\varepsilon = 1$, y cuyo borde está contenido en un plano horizontal $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \{0\}$. Entonces la altura máxima que Σ puede alcanzar con respecto a $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \{0\}$ es

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{K(I)+1}{K(I)}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}}\right) && \text{si } \varepsilon = -1, \\ & \sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \ln\left(\frac{\sqrt{K(I)+1}}{\sqrt{K(I)-1}}\right) && \text{si } \varepsilon = 1. \end{aligned}$$

Además, la igualdad se da si, y sólo si, Σ es el hemisferio de una superficie completa con CGC $K(I)$.

Terminaremos el estudio de estas superficies dando una **representación** de las mismas en términos de la función altura, la función ángulo, la curvatura de Gauss y la estructura conforme inducida por la Segunda Forma Fundamental de la superficie. Esta representación se tornará más sencilla en ciertos casos particulares, como son las superficies con $K(I) = -1$ en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ o $K(I) = 1$ en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

La última parte de esta memoria está dedicada al estudio de superficies con curvatura extrínseca positiva en un espacio producto. Notemos que, puesto que estamos en un espacio producto, la curvatura de Gauss y la curvatura extrínseca ya no se relacionan por una constante, por lo que su estudio difiere al caso en que el espacio ambiente es un espacio modelo.

Nuestro primer resultado destacable en este sentido es obtener un **Teorema tipo Hadamard-Stoker** en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Este teorema en \mathbb{R}^3 dice que toda superficie completa con curvatura extrínseca positiva en todo punto debe ser embebida y homeomorfa a una esfera si es cerrada o a un plano si es abierta, en cuyo caso es un grafo sobre algún plano tangente. En nuestro caso es más complicado.

Teorema 3.16 (Teorema tipo Hadamard-Stoker)

Sea Σ una superficie inmersa, conexa y completa en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ con $K > 0$. Entonces Σ es propiamente embebida. Además, Σ es homeomorfa a \mathbb{S}^2 o \mathbb{R}^2 . En este último caso, Σ es un grafo sobre un dominio convexo de $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ o Σ tiene un final simple.

Aquí, por un final simple nos referimos a

Definición 3.7

Sea $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ una superficie. Decimos que Σ tiene un **final simple** si el borde en infinito de $\pi(\Sigma) \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\} \cong \mathbb{H}^2$ es un único punto $\theta_0 \in \mathbb{S}_\infty^1$ y, además, para todo $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}_\infty^1 \setminus \{\theta_0\}$ la intersección del plano vertical $\gamma(\theta_1, \theta_2) \times \mathbb{R}$ y Σ es vacía o un conjunto compacto, donde $\gamma(\theta_1, \theta_2)$ es la geodésica completa horizontal uniendo θ_1 y θ_2 .

Además, veremos en la Subsección 3.5.2 cómo podemos construir de forma sencilla superficies con curvatura extrínseca positiva, completas y con un final simple.

Centraremos después nuestra atención en superficies con curvatura extrínseca constante positiva en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, estudiando primero los ejemplos completos de revolución. Definiremos una **diferencial cuadrática asociada** a estas superficies, tanto en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como en $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, en términos de la Primera Forma Fundamental, la función ángulo, la curvatura extrínseca y la diferencial de la función altura,

Definición 3.9

Dada una superficie $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ con CEC positiva K , consideramos la forma cuadrática

$$A = I + g(\nu) dh^2$$

donde $g(\nu)$ es la función analítica real dada por

$$g(\nu) = \frac{\nu^2 - 1 + \varepsilon K (e^{\frac{\varepsilon(1-\nu^2)}{K}} - 1)}{(1 - \nu^2)^2}.$$

Al par fundamental (II, A) lo llamaremos **par asociado a K** .

El primer resultado que obtendremos será que, cuando consideramos la estructura conforme inducida por la Segunda Forma Fundamental, el módulo de la derivada logarítmica de la diferencial cuadrática dada por la parte $(2, 0)$ de A está acotado por una función continua sobre la superficie. Un resultado de Alencar-do Carmo-Tribuzy nos permite asegurar que

Lema 3.10

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ una superficie de CEC positiva. Si consideramos Σ como una superficie de Riemann con la estructura conforme inducida por su Segunda Forma Fundamental, entonces la parte $(2, 0)$ de la forma cuadrática A dada por la Definición 3.9 es, o bien idénticamente nula, o bien sólo tiene ceros aislados y de índice negativo.

Seguiremos obteniendo **estimaciones** tanto verticales

Teorema 3.17

Sea $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ un grafo compacto sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{M}^2$, con CEC positiva $K > 0$, y cuyo borde está contenido en un plano horizontal $\mathbb{M}^2 \times \{0\}$. Entonces existe una constante c_K (dependiendo sólo de K y $c(\Sigma)$) tal que $h(p) \leq c_K$ para todo $p \in \Sigma$.

Como horizontales

Teorema 3.18

Sea Σ una superficie compacta y embebida en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, con curvatura extrínseca constante $K > 0$. Sea P un plano vertical en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y supongamos que $\partial\Sigma \subset P$. Entonces, la distancia de Σ a P esta acotada; esto es, existe una constante d_K , independiente de Σ , tal que

$$\text{dist}(q, P) \leq d_K, \quad \forall q \in \Sigma.$$

Usaremos estas estimaciones para probar que

Teorema 3.19

No hay superficies completas, no compactas y con CEC positiva K en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Para terminar, **clasificaremos** las superficies completas con curvatura extrínseca constante positiva en $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ como los ejemplos completos de revolución

Teorema 3.20

Una superficie completa con CEC positiva K en $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ es una esfera rotacionalmente simétrica (Véanse Proposiciones 3.12 y 3.13).

Para ello, utilizando que la diferencial cuadrática tiene sólo ceros aislados y de índice negativo concluiremos, usando el Teorema del Índice de Poincaré, que dicha diferencial debe anularse idénticamente sobre la superficie. Para finalizar, caracterizaremos los ejemplos de revolución como aquellos en que esta diferencial se anula.

Abstract and Conclusions

Here we shall present the main results obtained in this memoir.

In Chapter 1 we establish the definitions and notation that we will use throughout this work. Firstly, we introduce the important concept of **Fundamental Pair**, i.e.

Definition 1.1

Let Σ be an oriented surface. We will call

$$(I, II) \in \mathcal{R}(\Sigma) \times \mathcal{Q}(\Sigma) \equiv \mathcal{P}(\Sigma)$$

a **fundamental pair** on Σ . We will denote by $\mathcal{P}(\Sigma)$ the **set of fundamental pairs**. Here, $\mathcal{Q}(\Sigma)$ stands for the set of all quadratic forms on Σ and

$$\mathcal{R}(\Sigma) = \{I \in \mathcal{Q}(\Sigma) : I \text{ riemannian metric}\}.$$

We should point out that a fundamental pair (I, II) can be seen in the following alternative way: Once we fix $I \equiv \langle, \rangle \in \mathcal{R}(\Sigma)$, we can identify any element $II \in \mathcal{Q}(\Sigma)$ with a unique element $S \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$ in the set of self-adjoint endomorphisms of vector fields on Σ by

$$II(X, Y) = \langle SX, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

We will call S the shape operator associated to II .

Next, we review some concepts of Riemannian Geometry in order to introduce our first object of study, the **Codazzi Tensor** associated to a fundamental pair on a surface:

Definition 1.2

Given $(\langle, \rangle, S) \in \mathcal{P}(\Sigma)$, we define the **Codazzi Tensor associated to S** as the map

$$T_S : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma),$$

given by

$$T_S(X, Y) = \nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

We go on studying some immediate properties of the Codazzi Tensor,

Proposition 1.1

Given $\langle, \rangle \in \mathcal{R}(\Sigma)$, we have:

1. T_S is antisymmetric for any $S \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$.
2. T_S is C^∞ -multilinear, i.e., $T_S \in \tau^2(\Sigma)$. Moreover, the map

$$\begin{aligned} T &: \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle) &\longrightarrow & \tau^2(\Sigma) \\ S & &\longmapsto & T_S \end{aligned}$$

is \mathbb{R} -linear and satisfies

$$T_{fS}(X, Y) = fT_S(X, Y) + X(f)SY - Y(f)SX, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma), \quad f \in C^\infty(\Sigma).$$

To follow, we establish some equations on the surface associated to special parametrizations, which are verified by any fundamental pair. We also give several definitions of abstract geometric objects widely known, as the mean curvature or the extrinsic curvature associated to the fundamental pair.

Next, we introduce the important notion of the **Codazzi map**

Definition 1.4

Given $(\langle, \rangle, S) \in \mathcal{P}(\Sigma)$, we define the **Codazzi map associated to S** as

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_S &: \Sigma &\longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & &\longmapsto & \frac{\|T_S(X_p, Y_p)\|^2}{\|X_p \wedge Y_p\|^2} \end{aligned}$$

where $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ are linearly independent vector fields defined in a neighborhood U of p and

$$\|X \wedge Y\|^2 := \|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2.$$

After these definitions, we are ready to obtain our first results. To begin, we relate the role of the Codazzi map to the quadratic differential that arises from the $(2, 0)$ part of II when we consider the conformal structure induced on the surface by the Riemannian metric I . Thus, we are able to control the zeros of this differential through the Codazzi map, which allow us to get information about the surface from suitable conditions on the Codazzi map. At this point, there will be essential both a recent

result of Alencar-do Carmo-Tribuzy of Complex Analysis and the classical Poincaré index Theorem. We will see that the zeros of the quadratic differential match with the umbilical points of the fundamental pair, i.e., the points where II is proportional to I .

Theorem 1.1

Let (I, II) be a fundamental pair on Σ with mean curvature H and associate shape operator S . Let us denote by $\tilde{S} = S - H \text{Id}$ and by $\mathcal{U}_{(I,II)}$ the set of umbilical points of the pair. If

$$\limsup_{p \rightarrow p_0} \frac{T_{\tilde{S}}}{q} < +\infty$$

for every $p_0 \in \partial\mathcal{U}_{(I,II)}$, where the limit is taken through points that belong to the set $\Sigma \setminus \mathcal{U}_{(I,II)}$, then one of the following possibilities happens:

- there exists a neighborhood $p_0 \in U \subset \Sigma$ where $Q dz^2 = \langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle dz^2 \equiv 0$, z being a local conformal parameter for I . In this case, $Q dz^2 \equiv 0$ in Σ .
- p_0 is an isolated zero of negative index of $Q dz^2 = \langle S \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rangle dz^2$.

In particular,

1. If Σ is a topological sphere, the pair (I, II) is totally umbilical.
2. If Σ is a tori, the pair (I, II) is either totally umbilical or free of umbilical points.

From this point, we focus our attention on studying **Codazzi Pairs**. We will denote by $\mathcal{C}(\Sigma)$ the subset of fundamental pairs whose Codazzi Tensor vanishes identically. This means that the fundamental pair (I, II) verifies the classical Codazzi equations. We go on revising some well-known results from the theory of Codazzi pairs that we will use throughout our memory, among them the abstract versions of Hopf and Liebmann Theorems (Lemmas 1.6 and 1.7) for topological spheres with constant mean curvature (CMC) and positive constant extrinsic curvature (CEC) respectively, and the Hilbert Theorem (Lemma 1.8) for complete surfaces with negative CEC. Moreover, we see that when the fundamental pair is Codazzi, the Codazzi map takes a quite simple expression.

In order to get our aims, we modified the conformal structure induced on the surface by I in the following way

Theorem 1.2

Let $\varphi^1, \varphi^2 \in C^\infty(\Sigma)$ be functions and (I, II) a fundamental pair such that $H(I, II) = 0$. Let us consider the new fundamental pair given by the rotation of (I, II) respect to (φ^1, φ^2) defined in $\Sigma' = \Sigma \setminus \mathcal{U}_{(I, II)}$ as

$$\begin{aligned} I(\varphi^1, \varphi^2) &= \operatorname{ch}(\varphi^1, \varphi^2)I + \operatorname{sh}(\varphi^1, \varphi^2)I' \\ II(\varphi^1, \varphi^2) &= \sqrt{q}(\operatorname{sh}(\varphi^1, \varphi^2)I + \operatorname{ch}(\varphi^1, \varphi^2)I'), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\varphi^1, \varphi^2) &= \frac{e^{\varphi^1} + e^{\varphi^2}}{2} \\ \operatorname{sh}(\varphi^1, \varphi^2) &= \frac{e^{\varphi^1} - e^{\varphi^2}}{2}. \end{aligned}$$

Then, this new pair verifies:

$$\begin{aligned} H(\varphi^1, \varphi^2) &= 0 \\ K(\varphi^1, \varphi^2) &= -q \\ q(\varphi^1, \varphi^2) &= q. \end{aligned}$$

Moreover, the Codazzi Tensors $T_{S(\varphi^1, \varphi^2)}$ associated to $(I(\varphi^1, \varphi^2), II(\varphi^1, \varphi^2))$ and T_S associated to (I, II) are related by

$$T_{S(\varphi^1, \varphi^2)} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = - (T_S + \sqrt{q}T_{(\varphi^1, -\varphi^2)}) \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right),$$

$\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$ being the basis associated to the parametrization by doubly orthogonal parameters in a neighborhood of any point of Σ' .

In particular, if (I, II) is a Codazzi pair, then

$$T_{S(\varphi^1, \varphi^2)} \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) = (T_H - \sqrt{q}T_{(\varphi^1, -\varphi^2)}) \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right).$$

We should point out that we have taken the new pair so that its umbilical points match the umbilical points of the initial pair. Moreover, the new pair preserves some other fundamental properties of the initial pair. By this **rotation** of the fundamental pair (I, II) , we get (see Corollaries 1.1, 1.2 and 1.3) a conformal structure on the surface for which the $(2, 0)$ part of a quadratic form is holomorphic. Hence, we can control the Codazzi Tensor of the initial pair from the one of the rotated pair. More specifically

Corollary 1.2

Let (I, II) be a Codazzi Pair and $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a smooth function with $\varphi(0) = 0$. Let us define $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ as

$$2f'(t) = \varphi'(\sqrt{t}). \quad (1.145)$$

Let us consider the fundamental pair $(I(\varphi), II(\varphi))$ given by the rotation of (I, II) respect to $(\varphi(\sqrt{q}), -\varphi(\sqrt{q}))$ defined on Σ as

$$I(\varphi) = \cosh(\varphi)I + \sinh(\varphi)I' \quad (1.146)$$

$$II(\varphi) = \sqrt{q}(\sinh(\varphi)I + \cosh(\varphi)I'), \quad (1.147)$$

where $\cosh(\varphi) := \cosh(\varphi, \varphi)$, $\sinh(\varphi) := \sinh(\varphi, \varphi)$ and $q = H^2 - K$ is the skew curvature of (I, II) .

Let z be a local conformal parameter for $I(\varphi)$, $I(\varphi) = 2\lambda|dz|^2$, and let us denote $Q(\varphi) = II(\varphi)(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$.

Then the equation

$$Q(\varphi)_{\bar{z}} = \omega \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \lambda$$

holds, where ω is the 1-form defined by

$$\omega = d(H - f(q)).$$

Corollary 1.3

Let (I, II) be a Codazzi pair and $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a smooth function with $\varphi(0) = 0$ such that

$$dH - \sqrt{q}d\varphi(\sqrt{q}) = 0.$$

Let us consider the fundamental pair $(I(\varphi), II(\varphi))$ given by the rotation of (I, II) respect to $(\varphi(\sqrt{q}), -\varphi(\sqrt{q}))$, defined on Σ by

$$I(\varphi) = \cosh(\varphi(\sqrt{q}))I + \sinh(\varphi(\sqrt{q}))I' \quad (1.151)$$

$$II(\varphi) = \sqrt{q}(\sinh(\varphi(\sqrt{q}))I + \cosh(\varphi(\sqrt{q}))I'), \quad (1.152)$$

where $q = H^2 - K$ is the skew curvature of (I, II) .

Then, for any positive function μ , the new pair $(\mu I(\varphi), II(\varphi))$ is a Codazzi one.

Moreover, $H(\mu I(\varphi), II(\varphi)) = 0$ and $K(\mu I(\varphi), II(\varphi)) = -q/\mu^2$.

What we do next is to particularize the results obtained so far to **special Weingarten pairs**, that is,

Definition 1.5

We say that a pair (I, II) on Σ is a **special Weingarten pair** respect to a smooth function $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, if its mean curvature H and skew curvature $q = H^2 - K$ are related by

$$H = f(q).$$

We will denote by $\mathcal{C}(\Sigma, f)$ the set of special Weingarten pairs respect to f on Σ which are Codazzi pairs.

Moreover, associated to f we define the function $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ as

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds. \quad (1.153)$$

In fact, we show how the abstract results achieved so far turn into powerful results for these pairs. For example, we are able to classify all Codazzi pairs that are special Weingarten,

Lemma 1.8

Let Σ be a surface and f a smooth function defined on an interval $\mathcal{L} \subset [0, \infty)$. Let us consider a primitive $\varphi(t)$ of $2f'(t^2)$ on that interval such that $\varphi(t)/t$ is well defined.

Then, any special Weingarten Codazzi pair (I, II) on Σ verifying $H = f(H^2 - K)$ is given by

$$I = \cosh \varphi(t) I(\varphi) - \frac{\sinh \varphi(t)}{t} II(\varphi)$$

$$II - f(t^2) I = -t \sinh \varphi(t) I(\varphi) + \cosh \varphi(t) II(\varphi),$$

where $I(\varphi)$ is a riemannian metric on Σ and $II(\varphi) = Q dz^2 + \bar{Q} d\bar{z}^2$, $Q dz^2$ being a holomorphic 2-form for $I(\varphi) = 2\lambda |dz|^2$ satisfying that the function $t : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ defined by $t = \sqrt{q(I(\varphi), II(\varphi))}$ is such that $t(\Sigma) \subseteq \mathcal{L}$.

In particular, we obtain that $t^2 = H^2 - K$.

We also have

Lemma 1.7

If $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$ is non totally umbilical, then the pair given by (1.151) and (1.152) verifies that $(I(\varphi), II(\varphi)) \in \mathcal{C}^0(\Sigma)$ and $q(\varphi) = q$, where $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is the function given by (1.153).

In addition, on Σ' , there exists a local conformal parameter $z = s + it$ such that

$$q I(\varphi) = |dz|^2$$

$$II(\varphi) = dz^2 + d\bar{z}^2$$

and the Gaussian curvature of I can be expressed as

$$K(I) = L_f(\ln(q)).$$

Here L_f is the second order linear operator given by

$$L_f(\chi) = \text{Tr}(\mathcal{M}\nabla_0^2\chi) - ds^2(T, \nabla_0\chi)$$

where ∇_0^2 and ∇_0 are the hessian and the gradient respect to the metric $ds^2 = qI(\varphi) = ds^2 + dt^2$, and \mathcal{M} and T are defined by

$$\mathcal{M} = \frac{\sqrt{q}}{4} \begin{pmatrix} (1 - \sqrt{q}\varphi'(\sqrt{q}))e^{\varphi(\sqrt{q})} & 0 \\ 0 & (1 + \sqrt{q}\varphi'(\sqrt{q}))e^{-\varphi(\sqrt{q})} \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{\sqrt{q}}{4}(\varphi'(\sqrt{q})^2 + \varphi''(\sqrt{q}))e^{\varphi(\sqrt{q})}q_s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\sqrt{q}}{4}(\varphi'(\sqrt{q})^2 - \varphi''(\sqrt{q}))e^{-\varphi(\sqrt{q})}q_t \frac{\partial}{\partial t}.$$

Within the set of special Weingarten pairs, we focus on those which are of elliptical type,

Definition 1.6

We say that a pair $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$ is of **elliptic type** if L_f is an elliptic operator, i.e., if

$$1 - 4tf'(t)^2 > 0.$$

For this type of pairs, we can control the completeness of the **rotated metric** from the completeness of the initial one,

Lemma 1.9

Let $(I, II) \in \mathcal{C}(\Sigma, f)$ be a pair of elliptic type with I complete. If there exists a constant c_0 such that $q \geq c_0^2 > 0$, the flat metric $ds^2 = \sqrt{q}I(\varphi)$ is complete on Σ .

We finish this chapter deriving some more consequences on Codazzi pairs, as a generalization of Bonnet Theorem

Lemma 1.10

Let us take $(I_1, II_1), (I_2, II_2) \in \mathcal{C}(\Sigma)$ and assume that the following conditions are fulfilled:

1.

$$\limsup_{p \rightarrow p_0} \left| \frac{d(H_1 - H_2 - (f(q_1) - f(q_2)))}{|\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}|} \right| < +\infty$$

for every point $p_0 \in \Sigma$ such that $|\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}|(p_0) = 0$, where $q_i = H_i^2 - K_i$ for $i = 1, 2$, and $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is a smooth function.

2.

$$I_1(\varphi) = I_2(\varphi) \equiv I(\varphi)$$

where $(I_1(\varphi), II_1(\varphi))$ and $(I_2(\varphi), II_2(\varphi))$ are the pairs associated to (I_1, II_1) and (I_2, II_2) respectively, given by (1.146) and (1.147) for the function

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds.$$

If we define

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\varphi) &= I(\varphi) \\ \tilde{II}(\varphi) &= II_1(\varphi) - II_2(\varphi), \end{aligned}$$

then the pair $(\tilde{I}(\varphi), \tilde{II}(\varphi)) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ verifies

$$\limsup_{\tilde{q}(\varphi) \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}_{\tilde{S}(\varphi)}}{\tilde{q}(\varphi)} < +\infty,$$

$\tilde{q}(\varphi)$ being the skew curvature of $(\tilde{I}(\varphi), \tilde{II}(\varphi))$ and $\tilde{S}(\varphi)$ the shape operator associated to $\tilde{II}(\varphi)$.

In Chapter 2 we begin reviewing the usual representations for the space forms \mathbb{R}^3 , \mathbb{H}^3 and \mathbb{S}^3 , along with the necessary notation concerning to immersed surfaces in these space forms.

We continue reminding the Hopf **Maximum Principle** in the best known version, i.e., for elliptic partial differential equations of second order. We see how to apply this powerful result to surfaces in \mathbb{R}^3 , although it is also applicable to the other space forms.

Definición 2.2

Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a surface which is (locally) a graph over its tangent plane, i.e., $\Sigma = \text{Gr}(u)$ where $u \in C^2(\Omega)$ and Ω is a domain on the tangent plane. We will say that $\Sigma \in \mathcal{S}(L)$ if u verifies the equation $Lu = 0$, where L is a differential operator.

Definition 2.3

We will say that the class of surfaces $\mathcal{S}(L)$ verifies the **Maximum Principle** if given $\Sigma_i = \text{Gr}(u_i)$, $i = 1, 2$, defined as graphs over its respective tangent planes for functions $u_i \in C^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, which are solutions of $Lu = 0$, the difference of both solutions $w = u_1 - u_2$ verifies a differential equation $\tilde{L}w = 0$ such that it fulfills the conclusions of the Maximum Principle (Interior and Boundary).

Once the preliminaries are established, we examine the **Alexandrov Method** for surfaces verifying the Maximum Principle. A. D. Alexandrov proved in 1956 that every compact embedded CMC surface should be a sphere. To see that, he compared the surface with respect to its reflected image by an one parametric family of parallel planes, and using the Hopf Maximum Principle, he concluded that within this family of planes had a plane of reflection. We extend this approach to the class of surfaces which verify the Maximum Principle.

From this point, we focus on classes of surfaces that verify the Maximum Principle and such that there exists an embedded sphere within this class

Definition 2.4

Let us denote by $S_{PM}(L)$ the set of surfaces in \mathbb{R}^3 such that, when we consider them as local graphs over its tangent plane, verify $Lu = 0$ and Definition 2.3. If there exists $\Sigma_0 \in S_{PM}(L)$ compact and embedded, we will denote it by $S_{PM}^c(L)$. We will assume that all these surfaces are analytic.

For this kind of surfaces, we obtain **height estimates** of graphs defined in a planar domain

Theorem 2.3

Let $\Sigma \in S_{PM}^c(L)$ be a graph over a domain Ω of the xy -plane P in \mathbb{R}^3 . Then the distance from Σ to P is bounded, i.e., there exists a constant $h_{PM}^c(L)$ (independent of Σ), such that

$$\text{dist}(q, P) \leq h_{PM}^c(L), \quad \forall q \in \Sigma.$$

By using the Alexandrov method, we get height estimates for a compact embedded surface with boundary in a plane.

At this point we have two key ingredients, the Alexandrov method and height estimates, for a class of surfaces that verify the Maximum Principle and such that there is a compact embedded sphere within the class. These ingredients are the necessary tools used by Korevaar-Kusner-Meeks-Solomon to demonstrate the **cylindrical boundness** of an embedded annular end with constant mean curvature. Thus, we can extend, for this class of surfaces, the results that they obtained for CMC. Specifically

Theorem 2.4 (Cylindrical boundness)

Let $\psi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a properly embedded annulus such that $\Sigma = \psi(A) \in S_{PM}^c(L)$. Then there exists a vector v and a radius $R < \infty$ such that $\Sigma \subset \mathcal{C}(O, v, R)$, $\mathcal{C}(O, v, R)$ being the cylinder in \mathbb{R}^3 with axis v centering at the origin O and radius R .

Thanks to the cylindrical boundness and the Alexandrov Method, the authors mentioned above studied properly embedded CMC surfaces of finite type, obtaining

that such a surface has to have more than one end. Even more, they proved that if the surface has 2 ends, it must be rotational, and if it has 3 ends, it must be contained in a slab determined by two parallel planes. We generalize this outcome for our class of surfaces.

Theorem 2.5

Let $\Sigma \in S_{PM}^c(L)$ be a properly embedded surface of finite topology in \mathbb{R}^3 . Then, each end E_1, \dots, E_k is cylindrically bounded. In addition, if a_1, \dots, a_k are the axial vectors corresponding to each end, they cannot be contained in an open hemisphere of S^2 . In particular,

- $k = 1$ is impossible.
- If $k = 2$, then Σ is contained in a cylinder and Σ is rotationally symmetric respect to a line parallel to the axis of the cylinder.
- If $k = 3$, then Σ is contained in a slab.

We continue Chapter 2 studying **special Weingarten surfaces** in \mathbb{R}^3 . Thus, we apply the abstract results obtained in Chapter 1 to this kind of surfaces and get a **Hopf type Theorem**

Theorem 2.6 (Hopf type theorem)

Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a surface and $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a smooth map such that $\varphi(0) = 0$. Let us consider the fundamental pair $(I(\varphi), II(\varphi))$ given by the rotation of (I, II) respect of $(\varphi(\sqrt{q}), -\varphi(\sqrt{q}))$.

Then, Σ verifies $H = f(q)$, where $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is the smooth function given by

$$2f'(t) = \varphi'(\sqrt{t}),$$

if, and only if, $Q(\varphi)$ is holomorphic respect to the conformal structure induced by $I(\varphi)$.

In particular, if Σ is a topological sphere it must be totally umbilical, and if Σ is a tori it must be free of umbilical points.

We also obtain a **Bonnet type Theorem**

Theorem 2.7 (Bonnet type theorem)

Let $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ be topological spheres and $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a smooth function.

Let us assume that

- $H_1 - H_2 = f(q_1) - f(q_2)$,
- $I_1(\varphi) = I_2(\varphi)$,

where $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is given by

$$\varphi(t) = \int_0^t 2f'(s^2) ds,$$

and $I_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, are the metrics given by (1.146).

Then, there exists a congruence $\chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ such that $\Sigma_1 = \chi(\Sigma_2)$.

In particular, when $f \equiv 0$ we have the classical Bonnet theorem.

Next we focus on special Weingarten surfaces, satisfying $H = f(q)$, of **elliptic type**. Such surfaces have a singular behavior depending on what happens in the umbilical points, that is, those where $q = 0$. More specifically, its behavior depends on the value $f(0)$: if $f(0) = 0$ the surface behaves as a minimal surface, and if $f(0) \neq 0$ as a CMC surface. Thus, if $f(0) = 0$ we will say that the surface is of minimal type, and if $f(0) \neq 0$ we will say that it is of CMC type. We review some well-known results for such surfaces, with special attention to the one stating that they verify the Maximum Principle.

Within the class of special Weingarten surfaces of elliptic type such that $f(0) \neq 0$, there is a sphere of radius $1/|f(0)|$. Therefore this class of surfaces satisfies the necessary requirements to apply the general results obtained for properly embedded surfaces of finite type. For example,

Theorem 2.13

Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a properly embedded special Weingarten surface of elliptic type with $f(0) > 0$, finite topology and two ends. Then Σ is necessarily one of the special ondonoids given in [96, Théorème 1].

To finish this chapter, we give some classification results for special Weingarten surfaces of elliptic type imposing some extra condition on its Gaussian curvature. Specifically, we see

Theorem 2.14

Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a complete special Weingarten surface of elliptic type. If $K(I) \leq 0$, then Σ is either of minimal type, i.e. $f(0) = 0$, or is a flat cylinder.

Theorem 2.15

Let $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ be a complete special Weingarten surface, with $H = f(q)$, such that

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} < 1$$

and $K \geq 0$. Then Σ is either a sphere, a plane or a flat cylinder. In particular, the result holds if Σ is of elliptic type.

Chapter 3 is devoted to the study of surfaces immersed in a three-dimensional product space, the cartesian product of a riemannian surface without boundary \mathbb{M} , which is called basis, and the real line, the fiber, with the product metric. In particular, we pay special attention when \mathbb{M} is one of the simply connected surfaces with constant curvature. To begin, we review how the **geometric elements** (such as the Levi-Civita connection and the curvature tensor) of the product space are related to the geometrical elements of the basis. In addition, we introduce the **height function** associated to a surface, i.e., the projection of the surface on the fiber, and the **angle function**, which is the scalar product of the normal vector field of the surface and the vertical direction.

Next, we set some **equations** to be fulfilled for a surface immersed in a product space, among them the Gauss and Codazzi equations.

Lemma 3.1

Let $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ be a connected surface with normal vector field N and shape operator S . Let h and ν be the height function and the angle function respectively, and $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Then, the following equations must be fulfilled

$$\begin{aligned} \text{Gauss} \quad & K(I) = K + \kappa \nu^2 \\ \text{Codazzi} \quad & T_S(X, Y) = \kappa \nu (\langle Y, \nabla h \rangle X - \langle X, \nabla h \rangle Y) \\ & \nabla_X \nabla h = \nu SX \\ & d\nu(X) = -\langle SX, \nabla h \rangle \\ & \|\nabla h\|^2 + \nu^2 = 1. \end{aligned}$$

where $K(I)$ stands for the Gaussian curvature of I , K is the extrinsic curvature of Σ , κ the Gaussian curvature of \mathbb{M}^2 at $\pi(p)$, $p \in \Sigma$, and T_S the Codazzi Tensor associated to S (see Definition 1.2).

To follow, we particularize these equations for specific parametrizations (Corollaries 3.4 3.5 and 3.6) on the surface, which results very useful throughout this chapter. As a first application, we study the **totally geodesic surfaces**

Proposition 3.3

Let $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ be a complete totally geodesic surface. Then, one of the following possibilities happens:

- Σ is a vertical plane, i.e., $\Sigma = \gamma \times \mathbb{R}$ is the product of a complete geodesic γ on \mathbb{M} and \mathbb{R} .
- Σ is a horizontal plane, i.e., $\Sigma = \mathbb{M} \times \{t_0\}$, and in this case \mathbb{M}^2 is necessary complete.

- $\mathbb{M}^2 \equiv \mathbb{R}^2$ (after passing to its covering space if necessary), and Σ is a tilted plane.

We go on studying the revolution surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, giving the principal curvatures in terms of its generating curve (Propositions 3.4 and 3.5).

After that, we study **constant mean curvature surfaces** in these spaces. We begin revising some important results on the matter. Among them, we recall how **rotationally symmetric spheres** with CMC in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ are (Propositions 3.6 and 3.7), and then we classify them as the only topological spheres with CMC, which would be a **Hopf type theorem** in these spaces. This result has been recently proved by Abresch and Rosenberg, by defining a quadratic differential in terms of the Hopf differential and the differential of the height function, which turns holomorphic when the mean curvature of the surface is constant. Therefore, on a topological sphere this differential, known as the **Abresch-Rosenberg differential**, vanishes, which allows to characterize the rotationally symmetric spheres.

We continue getting **height estimates** for the maximum distance that a graph with CMC $H > 1/2$ can reach from a vertical or horizontal plane on which is defined.

Theorem 3.4

Let $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ be a compact graph on a set $\Omega \subset \mathbb{M}^2$, with constant mean curvature $H > 0$ and whose boundary is contained on the slice $\mathbb{M}^2 \times \{0\}$. Let $c(\Sigma)$ be the minimum of the Gaussian curvature on $\Omega \subset \mathbb{M}^2$. Then the maximum height that Σ can arise on $\mathbb{M}^2 \times \{0\}$ is

$$\begin{aligned} & \frac{4H}{\sqrt{-4c(\Sigma)H^2 - c(\Sigma)^2}} \operatorname{arc\,sen} \left(\frac{\sqrt{-c(\Sigma)}}{2H} \right) \quad \text{if } c(\Sigma) < 0 \quad \text{and} \quad H > \frac{\sqrt{-c(\Sigma)}}{2}, \\ & \frac{1}{H} \quad \text{if } c(\Sigma) = 0, \\ & \frac{4H}{\sqrt{4c(\Sigma)H^2 + c(\Sigma)^2}} \operatorname{arcsenh} \left(\frac{\sqrt{c(\Sigma)}}{2H} \right) \quad \text{if } c(\Sigma) > 0. \end{aligned}$$

Moreover, if the equality holds, then Ω has constant Gaussian curvature $c(\sigma)$ and the Abresch-Rosenberg differential vanishes identically on Σ . In particular, Σ must be a hemisphere of a complete example described in Proposition 3.6 or 3.7 if $\mathbb{M} = \mathbb{H}^2$ or $\mathbb{M} = \mathbb{S}^2$ respectively.

Theorem 3.5

Let Σ be an embedded compact surface in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with CMC $H > 1/2$. Let P be a vertical plane in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and let us assume that $\partial\Sigma \subset P$. Then the distance from Σ to P is bounded; i.e., there exists a constant d_H , independent of Σ , such that

$$\operatorname{dist}(q, P) \leq d_H, \quad \forall q \in \Sigma.$$

By using these results and the Alexandrov method, we get estimates of the maximum distance that an embedded compact surface with boundary on a vertical or horizontal plane achieves. Significantly, **vertical height estimates are optimal** in the sense that we are able to characterize the complete examples of revolution when the (optimal) bound is achieved.

Although horizontal estimates are not optimal, they are enough to study properly embedded surfaces with CMC, finite topology and one end,

Theorem 3.7 _____

There is no properly embedded surface with CMC $H > 1/2$, finite topology and one in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

We go on studying surfaces with constant Gaussian curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. We begin describing the revolution examples (Propositions 3.8 and 3.9). Once obtained, we define a new **fundamental pair** on the surface in terms of the First and Second Fundamental Forms and the differential of the height function.

Definition 3.6 _____

Given $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$, if

$$A = (K(I) - \varepsilon)I + dh^2$$

*is a riemannian metric on Σ , then we will call **pair associated to $K(I)$** to the fundamental pair (A, II) .*

We see that this new pair is **Codazzi** when the Gaussian curvature is constant

Theorem 3.8 _____

Let $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ be a surface with CGC. If (A, II) is fundamental, then (A, II) is a Codazzi pair with constant extrinsic curvature.

Moreover, the Gaussian curvature of A is given by

$$K(A) = \text{sg}(A) \frac{K(I) + \varepsilon\nu^2}{K(I) - \varepsilon\nu^2}$$

where $\text{sg}(A)$ stands for the suitable sign which makes A a positive definite metric.

This theorem, jointly with some known results from the theory of Codazzi pairs, allow us to obtain a **Liebmann type theorem**

Theorem 3.10 (Liebmann type theorem) _____

Given a real constant $K(I)$, there exists, up to isometries, a unique complete surface of constant Gaussian curvature $K(I) > 1$ in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and a unique complete surface

of constant Gaussian curvature $K(I) > 0$ in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. In addition, these surfaces are rotationally symmetric.

Moreover, we show that there are no complete surfaces with constant Gaussian curvature $K(I) \in (0,1)$ in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Using the abstract version of Hilbert theorem in Chapter 1, we get the following **Hilbert type theorem**

Theorem 3.11 (Hilbert type theorem)

There is no complete immersion of constant Gaussian curvature $K(I) < -1$ into $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ or $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

We continue giving **estimates** for the maximum height which can be achieved by a graph of constant Gaussian curvature $K(I) > 0$ in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (resp. $K(I) > 1$ in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$) with boundary on a horizontal plane, characterizing the revolution surfaces as those where the (optimal) bound is reached.

Theorem 3.13

Let $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ be a compact graph on a set $\Omega \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon)$, with positive CGC $K(I) > 0$ if $\varepsilon = -1$ or $K(I) > 1$ if $\varepsilon = 1$, and whose boundary is contained on the slice $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \{0\}$. Then the maximum height that Σ can attain on $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \{0\}$ is

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{K(I)+1}{K(I)}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}}\right) && \text{if } \varepsilon = -1, \\ & \sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \ln\left(\frac{\sqrt{K(I)+1}}{\sqrt{K(I)-1}}\right) && \text{if } \varepsilon = 1. \end{aligned}$$

Moreover, the equality holds if, and only if, Σ is the hemisphere of a complete surface with CGC $K(I)$.

We finish the study of these surfaces giving a **representation** of them in terms of the height and the angle functions, the Gaussian curvature and the conformal structure induced by the Second fundamental on the surface. This representation becomes easier for surfaces with $K(I) = -1$ in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ or $K(I) = 1$ in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

The last part of this memory is devoted to the study of surfaces with extrinsic positive curvature in a product space. Note that, since we are in a product space, the Gaussian curvature and the extrinsic curvature are no longer relate by a constant, and so their study differs.

We start obtaining a **Hadamard-Stoker type theorem** in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. This theorem in \mathbb{R}^3 says that a complete surface with positive extrinsic curvature must be embedded

and homeomorphic to a sphere if closed, or to a plane if open, being in this latter case a graph on a tangent plane. In our case is more complicated.

Theorem 3.16 (Hadamard-Stoker type theorem)

Let Σ be an immersed complete connected surface in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with $K > 0$. Then Σ is properly embedded and bounds a strictly convex domain in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Moreover, Σ is homeomorphic to \mathbb{S}^2 or \mathbb{R}^2 . In the latter case, Σ is a graph over a convex domain of $\mathbb{H}^2 \times \{0\}$ or Σ has a simple end.

Here, we understand by simple end the following

Definición 3.7

Let $\Sigma \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ be a surface. We say that Σ has a **simple end** if the boundary at infinity of $\pi(\Sigma) \subset \mathbb{H}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{H}^2$ is a single point $\theta_0 \in \mathbb{S}_\infty^1$ and, in addition, for all $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}_\infty^1 \setminus \{\theta_0\}$ the intersection of the vertical plane $\gamma(\theta_1, \theta_2) \times \mathbb{R}$ and Σ is empty or a compact set, where $\gamma(\theta_1, \theta_2)$ is the complete horizontal geodesic joining θ_1 and θ_2 .

In Subsection 3.5.2, we show an easy way to construct complete surfaces with positive extrinsic positive and a simple end.

After that, we focus our attention on surfaces with constant positive extrinsic curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, studying the complete examples of revolution firstly. We define a **quadratic differential associated** to these surfaces, both in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, in terms of the First Fundamental Form, the angle function, the extrinsic curvature and the differential of the height function.

Definition 3.9

Let $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ be a surface with positive CEC K , and consider the quadratic form

$$A = I + g(\nu) dh^2$$

where $g(\nu)$ is the analytic function given by

$$g(\nu) = \frac{\nu^2 - 1 + \varepsilon K (e^{\frac{\varepsilon(1-\nu^2)}{K}} - 1)}{(1 - \nu^2)^2}.$$

We will refer to (II, A) as the **pair associated to K** .

In a first result we prove that, when we consider the conformal structure induced by the Second Fundamental Form, the modulus of the logarithmic derivative of the quadratic differential associated to the $(2, 0)$ part of A is bounded by a continuous function on the surface. A result by Alencar-do Carmo-Tribuzy allows us to ensure that

Lemma 3.10

Let $\Sigma \subset \mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ be a surface with positive CEC and consider Σ as a Riemann surface with the conformal structure induced by its Second Fundamental Form. Then the $(2, 0)$ part of A either vanishes identically or has isolated zeros of negative index.

We continue getting **estimates**, both vertical and horizontal

Theorem 3.17

Let $\Sigma \subset \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ be a compact graph over a domain $\Omega \subset \mathbb{M}^2$ with positive CEC $K > 0$, and whose boundary is contained on a horizontal plane $\mathbb{M}^2 \times \{0\}$. Then there exists a constant c_K (depend only on K and $c(\Sigma)$) such that $h(p) \leq c_K$ for all $p \in \Sigma$.

Theorem 3.18

Let Σ be an embedded compact surface in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ with positive CEC $K > 0$. Let P be a vertical plane in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and assume that $\partial\Sigma \subset P$. Then, the distance from Σ to P is bounded; i.e., there exists a constant d_K , independent of Σ , such that

$$\text{dist}(q, P) \leq d_K, \quad \forall q \in \Sigma.$$

We use these estimates to prove that

Theorem 3.19

There is no complete, non compact surfaces with positive CEC K in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Finally, we **classify** the complete surfaces with positive CEC in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ as the complete revolution examples

Theorem 3.20

The complete immersions with positive constant extrinsic curvature K in $\mathbb{M}^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ are the rotational spheres (see Propositions 3.12 and 3.13).

To do so, we use that the quadratic differential has only isolated zeros with negative index to conclude, using the Poincaré index theorem, that the quadratic differential must vanish identically on the surface. To finish, we characterize the revolution examples as those whose quadratic differential vanishes.

Notación

\mathbb{R}	Números reales
\mathbb{C}	Números complejos
Σ	Superficie orientada
$\mathfrak{X}(\Sigma)$	Conjunto de campos de vectores diferenciables sobre Σ
$\mathfrak{X}(\Sigma)^*$	Conjunto de 1-formas diferenciables sobre Σ
$C^\infty(\Sigma)$	Conjunto de funciones diferenciables sobre Σ
$\Lambda^r(\Sigma)$	Conjunto de aplicaciones diferenciables del producto cartesiano de $\mathfrak{X}(\Sigma)$ r veces en $\mathfrak{X}(\Sigma)$
$\Lambda_r(\Sigma)$	Conjunto de aplicaciones diferenciables del producto cartesiano de $\mathfrak{X}(\Sigma)^*$ r veces en $\mathfrak{X}(\Sigma)^*$
$\tau^r(\Sigma)$	Conjunto de aplicaciones diferenciables del producto cartesiano de $\mathfrak{X}(\Sigma)$ r veces en $\mathfrak{X}(\Sigma)$ que son C^∞ -multilineales
$\tau_r(\Sigma)$	Conjunto de aplicaciones diferenciables del producto cartesiano de $\mathfrak{X}(\Sigma)^*$ r veces en $\mathfrak{X}(\Sigma)^*$ que son C^∞ -multilineales
$\mathcal{Q}(\Sigma)$	Conjunto de formas cuadráticas sobre Σ
$\mathcal{R}(\Sigma)$	Conjunto de formas cuadráticas sobre Σ que definen una métrica riemanniana
$\mathcal{L}(\Sigma)$	Conjunto de formas cuadráticas sobre Σ que definen una métrica lorentziana
$\mathcal{M}(\Sigma)$	Conjunto de formas cuadráticas sobre Σ que definen una métrica riemanniana o lorentziana
$\mathcal{P}(\Sigma)$	Conjunto de pares fundamentales
$\mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$	Conjunto de endomorfismos de campos diferenciables autoadjuntos respecto de la métrica riemanniana \langle, \rangle sobre Σ

$\mathcal{P}^0(\Sigma)$	Conjunto de pares fundamentales sin traza, esto es, tales que $H(I, II) = 0$
$\mathcal{C}(\Sigma)$	Conjunto de pares de Codazzi sobre Σ
$\mathcal{C}^0(\Sigma)$	Conjunto de pares de Codazzi sin traza, esto es, tales que $H(I, II) = 0$
$\mathcal{C}(\Sigma, f)$	Conjunto de pares de Codazzi especiales de Weingarten respecto de f , esto es, $H = f(q)$
T_S	Tensor de Codazzi asociado a $S \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$
\mathcal{T}_S	Función de Codazzi asociada a $S \in \mathcal{S}(\Sigma, \langle, \rangle)$
$H(I, II)$	Curvatura media del par $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$
$K(I, II)$	Curvatura extrínseca del par $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$
$K(I)$	Curvatura de Gauss de la métrica $I \in \mathcal{R}(\Sigma)$
$q(I, II)$	Curvatura asimétrica del par $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$
$k_i(I, II)$	Curvaturas principales del par $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$
$\mathcal{U}_{(I, II)}$	Conjunto de puntos umbilicales del par $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$
Σ'	Conjunto de puntos de la superficie Σ que no son umbilicales, esto es, $\Sigma' = \Sigma \setminus \mathcal{U}_{(I, II)}$
Γ_{ij}^k	Símbolos de Christoffel
∇	Operador gradiente
$*$	Operador estrella de Hodge
Δ	Operador laplaciano
Hess	Operador hessiano
\mathbb{R}^n	Espacio euclídeo n -dimensional
\mathbb{H}^n	Espacio hiperbólico n -dimensional
$\mathbb{S}_{\infty}^{n-1}$	Borde asintótico de \mathbb{H}^n
\mathbb{S}^n	Esfera n -dimensional
\mathbb{M}^2	Superficie riemanniana sin borde
\mathbb{D}	Disco en \mathbb{R}^2 de centro cero y radio 1
\mathbb{B}	Bola en \mathbb{R}^3 de centro cero y radio 1
Re	Parte real
Im	Parte imaginaria
$\chi(\Sigma)$	Característica de Euler de la superficie Σ
$\mathbf{i}(p_0)$	Índice del punto p_0
I'	Forma Fundamental asimétrica asociada a $I \in \mathcal{R}(\Sigma)$
$\text{ch}(\varphi^1, \varphi^2)$	Función coseno hiperbólico generalizada, esto es, $\text{ch}(\varphi^1, \varphi^2) = \frac{e^{\varphi^1} + e^{\varphi^2}}{2}$
$\text{sh}(\varphi^1, \varphi^2)$	Función seno hiperbólico generalizada, esto es, $\text{sh}(\varphi^1, \varphi^2) = \frac{e^{\varphi^1} - e^{\varphi^2}}{2}$

$\cosh(\varphi)$	Función coseno hiperbólico
$\sinh(\varphi)$	Función seno hiperbólico
$\cos(\varphi)$	Función coseno
$\sin(\varphi)$	Función seno
$(I(\varphi^1, \varphi^2), II(\varphi^1, \varphi^2))$	giro de $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ respecto de (φ^1, φ^2)
$(I(\varphi), II(\varphi))$	giro de $(I, II) \in \mathcal{P}(\Sigma)$ respecto de $(\varphi, -\varphi)$
L	Operador diferencial
$S(L)$	Conjunto de superficies que vistas (localmente) como un grafo sobre su plano tangente, esto es, $\Sigma = \text{Gr}(u)$ donde $u \in C^2(\Omega)$ y Ω es un dominio del plano tangente, verifica la ecuación $Lu = 0$
$S_{PM}(L)$	Conjunto de superficies que, vistas como grafos locales sobre su plano tangente, verifican $Lu = 0$ y cumplen el Principio del Máximo
$S_{PM}^c(L)$	Conjunto de superficies que, vistas como grafos locales sobre su plano tangente, verifican $Lu = 0$, cumplen el Principio del Máximo y existe una superficie compacta y embebida dentro de la familia
dist	Función distancia
link	Número de ligadura
α_1	Función de Alexandrov
T_r	r -ésimo tensor de Newton
h	Función altura de una superficie en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$
ν	Función ángulo de una superficie en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$
κ	Curvatura de Gauss de \mathbb{M}^2

Bibliografía

- [1] U. Abresch and H. Rosenberg, A Hopf Differential for Constant Mean Curvature Surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Acta Math.*, **193 n° 2** (2004), 141–174.
- [2] A.D. Alexandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large. I, *Vestnik Leningrad Univ. Math.*, **11** (1956), 5–17.
- [3] J. A. Aledo, J. M. Espinar, J. A. Gálvez, Complete surfaces of constant curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, *Calculus of Variations & PDE's*, **29** (2007), 347–363.
- [4] J. A. Aledo, J. M. Espinar, J. A. Gálvez, Surfaces with constant curvature in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Height estimates and representation, *Aparecerá en Bull. Soc. Math. Brasil*.
- [5] J. A. Aledo, J. M. Espinar, J. A. Gálvez, Height estimates for surfaces with positive constant mean curvature in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, *Aparecerá en Illinois Journal of Math*.
- [6] J. A. Aledo, J. M. Espinar, J. A. Gálvez, Timelike surfaces in the Lorentz-Minkowski space with prescribed Gaussian curvature and Gauss map, *J. Geom. Phys.*, **56** (2006), 1357–1369.
- [7] J. A. Aledo, J. M. Espinar, J. A. Gálvez, Codazzi Pairs on surfaces, *Preprint*.
- [8] J. A. Aledo, J. M. Espinar, A Conformal Representation for Linear Weingarten Surfaces in \mathbb{S}_1^3 , *J. Geom. Phys.*, **57** (2007), 1669–1677.
- [9] J. A. Aledo, J. M. Espinar, Hyperbolic Linear Weingarten Surfaces in \mathbb{R}^3 , *Bull. Soc. Math. Brasil.*, **38 n° 2** (2007), 291–300.
- [10] J. A. Aledo, J. A. Gálvez, A Weierstrass Representation for Linear Weingarten Spacelike Surfaces of Maximal Type in the Lorentz-Minkowski Space, *J. Math. Anal. Appl.*, **283** (2003), 25–45.
- [11] H. Alencar, M. do Carmo and R. Tribuzy, A theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality, *Comm. Anal. Geom.*, **15** (2007), 283–298.
- [12] L.V. Ahlfors, Sur le type d'une surface de Riemann, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **201** (1935), 30–32.

- [13] E. Beltrami, *Memorie per la storia dell'Università di Pavia*, **459** (1878).
- [14] O. Bonnet, *J. de l'Ecole Polytechnique*, **19** (1848).
- [15] F. Brito, R. Sa Earp, On the structure of certain Weingarten surfaces with boundary a circle, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, **6 n° 2** (1997), 243–255.
- [16] F. Brito, R. Sa Earp, Geometric configurations of constant mean curvature surfaces with planar boundary, *An. Acad. Bras. Ci.*, **63 n° 1** (1991), 5–19.
- [17] F. Brito, R. Sa Earp, W. Meeks, H. Rosenberg, Structure theorems for constant mean curvature surfaces bounded by a planar curve, *Indiana Univ. Math. J.*, **40 n° 1** (1991), 333–343.
- [18] R.L. Bryant, *Complex Analysis and Weingarten Surfaces*, (1984), *Nunca publicado*.
- [19] E. Cartan, Les surfaces qui admettent une seconde forme fondamentale donnée, *Bull. Sci. Math.*, **67 (2)** (1943), 9–32.
- [20] X. Cheng and H. Rosenberg, Embedded positive constant r -mean curvature hypersurfaces in $\mathbb{M}^m \times \mathbb{R}$, *An. Acad. Brasil. Cienc.*, **72** (2005), 183–199.
- [21] S. S. Chern, On special W -surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 783–786.
- [22] S.S. Chern, S. I. Goldberg, On the volume-decreasing properties of a class of real harmonic mappings, *Amer. J. Math.*, **97** (1975), 133–147.
- [23] J. Choe, Sufficient conditions for constant mean curvature surfaces to be round, *Math. Ann.*, **323** (2002), 143–156.
- [24] R.J. Currier, On Hypersurfaces of Hyperbolic Space Infinitesimally Supported by Horospheres, *Trans. Am. Math. Soc.*, **313** (1989), 419–431.
- [25] M. Dajczer, R. Tojeiro, Commuting Codazzi tensors and the Ribaucour transformation for submanifolds, *Result. Math.*, **44** (2003), 258–278.
- [26] B. Daniel, Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds, *Comment. Math. Helv.*, **82** (2007), 87–131.
- [27] B. Daniel, L. Hauswirth, Half-space theorem, embedded minimal annuli and minimal graphs in the Heisenberg group, *Preprint*.
- [28] C. Delaunay, Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante, *J. Math Pure Appl. (1)*, **6** (1841), 309–320.
- [29] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, *Birkhäuser Boston*, 1992.
- [30] M. do Carmo, I. Fernández, Disk-type surfaces in 3-dimensional homogeneous product spaces, *Preprint*.

- [31] M. P. do Carmo and F. W. Warner, Rigidity and convexity of hypersurfaces in spheres, *J. Diff. Geom.*, **4** (1970), 133–144.
- [32] P. Dombrowski, 150 Years after Gauss's *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*, *Asterisque*, **62** (1979), Soc. Mat. France, Paris.
- [33] J. Eells, L. Lemaire, A report on harmonic maps, *Bull. London Math. Soc.*, **10** (1978), 1–68.
- [34] A. Enneper, Analytisch-geometrische untersuchungen, *Z. Math. und Phys.*, **9** (1864), 96–125.
- [35] J. M. Espinar, A Plateau problem for complete surfaces in \mathbb{S}_1^3 , *Publ. de la RSME*, **8** (2004), 127–132.
- [36] J. M. Espinar, The Reflection Principle for flat surfaces in \mathbb{S}_1^3 , *Proceedings of the VIII International Conference on Geometry, Integrability and Quantization*, Sofia (2007), 156–168.
- [37] J. M. Espinar, J. A. Gálvez, H. Rosenberg, Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces, *Preprint*.
- [38] J. M. Espinar, J. A. Gálvez, P. Mira, Hypersurfaces in \mathbb{H}^{n+1} and conformally invariant equations: the generalized Christoffel and Nirenberg problems, *Preprint*.
- [39] J. M. Espinar, H. Rosenberg, Complete Constant Mean Curvature surfaces and Bernstein type Theorems in $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$, *Preprint*.
- [40] L. Euler, Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, *Harvard Univ. Press*, Cambridge, MA (1969).
- [41] L. C. Evans, Partial differential equations, *Graduate Studies in Mathematics*, 1998.
- [42] I. Fernández, P. Mira, Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Amer. Journal of Math.*, **129** (2007), 1145–1181.
- [43] I. Fernández, P. Mira, Holomorphic quadratic differentials and the Bernstein problem in Heisenberg space, *Aparecerá en Trans. Amer. Math. Soc.*
- [44] J.A. Gálvez and A. Martínez, Estimates in surfaces with positive constant Gauss Curvature, *P. Am. Math. Soc.*, **128** (2000), 3655–3660.
- [45] J.A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, Linear Weingarten surfaces in \mathbb{R}^3 , *Monatsh. Math.*, **138** (2003), 133–144.
- [46] J.A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, Complete Linear Weingarten Surfaces of Bryant Type. A Plateau Problem at Infinity, *Trans. Am. Math. Soc.*, **356** (2004), 3405–3428.

- [47] R.B. Gardner, Subscalar pairs of metrics with applications to rigidity and uniqueness of hypersurfaces with nondegenerate second Fundamental Form, *J. Diff. Geom.*, **6** (1972), 427–458.
- [48] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, *Springer*, 2001.
- [49] V. C. Grove, On closed convex surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1957), 777–786.
- [50] J. Hadamard, Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique, *J. Math. Pures Appl.*, **3** (1897), 331–387.
- [51] P. Hartman, L. Nirenberg, On spherical images whose jacobians do not change signs, *Amer. Math. J.*, **81** (1959), 901–920.
- [52] P. Hartman, W. Winter, Umbilical points and W -surfaces, *Amer. J. of Math.*, **76** (1954), 502–508.
- [53] L. Hauswirth, H. Rosenberg and J. Spruck, On complete mean curvature $1/2$ surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Preprint*.
- [54] E. Heinz, On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **35** (1969), 249–252.
- [55] D. Hilbert, Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung, *Trans. Am. Math. Soc.*, **2** (1901), 87–99.
- [56] D. Hoffman, Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature, *J. Diff. Geom.*, **8** (1977), 161–176.
- [57] D. Hoffman, J.H.S. de Lira and H. Rosenberg, Constant mean curvature surfaces in $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, *Trans. Am. Math. Soc.*, **358** (2006), 491–507.
- [58] H. Hopf, Differential Geometry in the large, *Springer Verlag*, Berlin, 1983.
- [59] W. Y. Hsiang, W. T. Hsiang, On the uniqueness of isoperimetric solutions and imbedded soap bubbles in noncompact symmetric spaces. I, *Invent. Math.*, **98** (1989), 39–58.
- [60] W. Y. Hsiang, W. C. Yu, A generalisation of a theorem of Delaunay, *J. Diff. Geom.*, **16** (1981), 161–177.
- [61] N. Kapouleas, Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three space, *Ann. of Math.*, **131** (1990), 329–330.
- [62] K. Kenmotsu, Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature, *Math. Ann.*, **245** (1979), 89–99.

- [63] T. Klotz, Some uses of the second conformal structure on strictly convex surfaces, *Proc. Am. Math. Soc.*, **14** (1963), 793–799.
- [64] T. Klotz, R. Osserman, Complete surfaces in \mathbb{R}^3 with constant mean curvature, *Comment. Math. Helv.*, **41** (1966-67), 313–318.
- [65] N. Korevaar, R. Kusner, W. Meeks, B. Solomon, Constant mean curvature surfaces in hyperbolic space, *Amer. J. Math.*, **114** (1992), 1–43.
- [66] N. Korevaar, R. Kusner, B. Solomon, The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature, *J. Differ. Geom.*, **30** (1989), 465–503.
- [67] J. L. Lagrange, Essai d'une nouvelle methode pour determiner les maxima et les minima des formules integrales indefinies, *Miscellanea Taurinensia*, **2 325 (1)** (1760), 173–199.
- [68] A. Legendre, Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles. *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris*, (1789), 309–351.
- [69] H. Liebmann, Ueber die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung, *Math. Ann.*, **53 n° 1-2** (1900), 81–112.
- [70] H.L. Liu, U. Simon, C.P. Wang, Codazzi tensors and the topology of surfaces, *Ann. Global Anal. and Geom.*, **16** (1998), 189–202.
- [71] Lecture Notes in Mathematics, Global Differential Geometry and Global Analysis, **838** (1979).
- [72] W. S. Massey, Surfaces of Gaussian curvature zero in Euclidean space, *Tohoku Math. J.*, **14** (1962), 73–79.
- [73] W. Meeks, The topology and geometry of of embedded surfaces of constant mean curvature, *J. Differ. Geom.*, **27** (1988), 539–552.
- [74] W. H. Meeks III, J. Pérez, The Classical Theory of minimal surfaces, <http://www.ugr.es/~jperez/papers/bams-july9-07.pdf>.
- [75] T.K. Milnor, Abstract Weingarten Surfaces, *J. Diff. Geom.*, **15** (1980), 365–380.
- [76] T.K. Milnor, Efimov's Theorem about complete immersed surfaces of negative curvature, *Advances in Math.*, **8** (1972), 474–543.
- [77] T.K. Milnor, Restrictions on the curvature of Φ -bounded surfaces, *J. Diff. Geom.*, **11** (1967), 31–46.
- [78] T.K. Milnor, the curvature of $\alpha I + \beta II + \gamma III$ on a surface in a 3-manifold of constant curvature, *Mich. Math. J.*, **22** (1975), 247–255.
- [79] T.K. Milnor, The curvature of some skew fundamental forms on an immersed surface, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **62** (1977), 323–329.

- [80] T.K. Milnor, Harmonically immersed surfaces, *J. Diff. Geom.*, **14** (1979), 205–214.
- [81] T.K. Milnor, Codazzi Pairs on surfaces, *Proc. Colloq. Global Anal. and Global Geom.*, Berlin (1979).
- [82] B. Nelli, H. Rosenberg, Global properties of Constant Mean Curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Pac. Jour. Math.*, **226 n°1** (2006), 137–152.
- [83] B. Nelli, H. Rosenberg, Minimal surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. *Bull. Braz. Math. Soc.*, **33 n°2** (2002), 263–292.
- [84] B. Nelli and H. Rosenberg, Simply connected constant mean curvature surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Michigan Math. J.*, **54** (2006), 537–543.
- [85] V. Oliker, U. Simon, Codazzi tensors and equations of Monge-Ampère type on compact manifolds of constant sectional curvature, *J. Reine Angew. Math.*, **342** (1983), 35–65.
- [86] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry, *Academic Press*, 1983.
- [87] R. Pedrosa, M. Ritoré, Isoperimetric domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary problems, *Indiana Univ. Math. J.*, **48** (1999), 1357–1394.
- [88] E. R. Phillips, K. M. Peterson, The earliest derivation of the Mainardi-Codazzi equations and the fundamental theorem of surface theory, *Historia Math. J.*, **6 (2)** (1979), 137–163.
- [89] R. C. Reilly, Variational properties of functions of mean curvatures for hypersurfaces in space forms, *J. Differ. Geom.*, **8** (1973), 465–477.
- [90] B. Riemann, Oeuvres Mathématiques de Riemann, *Gauthiers-Villars*, Paris (1898).
- [91] D. Rolfsen, Knots and links, *Publish or Perish*, 1976.
- [92] H. Rosenberg, Hypersurfaces of constant curvature in space forms, *Bull. Sc. Math.*, 2^o série, **117** (1993), 211–239.
- [93] H. Rosenberg and R. Sa Earp, The Geometry of properly embedded special surfaces in \mathbb{R}^3 ; e. g., surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a and b are positive, *Duke Math. J.*, **73** (1994), 291–306.
- [94] R. Sa Earp, E. Toubiana, Screw motion surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, *Illinois J. Math. J.*, **49** (2005), 1323–1362.
- [95] R. Sa Earp, E. Toubiana, Sur les surfaces de Weingarten spéciales de type minimal, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **26 n° 2** (1995), 129–148.

- [96] R. Sa Earp, E. Toubiana, Classification des surfaces de type Delaunay, *Amer. Journal of Math.*, **121** (1999), 671–700.
- [97] R. Sa Earp, E. Toubiana, Symmetry of properly embedded special Weingarten surfaces in \mathbb{H}^3 , *Trans. Am. Math. Soc.*, **351 n° 12** (1999), 4693–4711.
- [98] R. Sa Earp, E. Toubiana, A note on special surfaces in \mathbb{R}^3 , *Mat. Comtemp.*, **4** (1993), 108–118.
- [99] H. F. Scherk, De proprietatibus superficiei, quae hac continetur aequatione $(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$ disquisitiones analyticae, *Actis Soc. Jablon.*, **4** (1832), 204–280.
- [100] U. Simon, A further method in global differential geometry, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **44** (1975), 52–69.
- [101] M. Spivak, A comprehensive introduction to Differential Geometry, *Publish or Perish*, 1979.
- [102] J. Stoker, Über die Gestalt der positiv gekrümmten offenen Flächen im dreidimensionalen Raume, *Compositio Math.*, **3** (1936), 55–88.
- [103] J. Stoker, Developable surfaces in the large, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 627–635.
- [104] W. Vortisch, R. Walden, Ein Kongruenzsatz für Eiflächen, *Manuscripta Math.*, **3** (1970), 315–319.
- [105] R. Walden, Eindeutigkeitssätze für II-isometrische Eiflächen, *Math. Z.*, **120** (1971), 143–147.
- [106] B. Wegner, Codazzi-tensoren und Kennzeichnungen sphärischer Immersionen, *J. Diff. Geom.*, **9** (1974), 61–70.
- [107] K. Weierstrass, Fortsetzung der Untersuchung über die Minimalflächen, *Monatsbericht der Königl. Akad. Wiss.*, (1887), 511–518.
- [108] T. Weinstein, An introduction to Lorentz surfaces, *Walter de Gruyter*, Berlin, New York, 1996.
- [109] C. Wissler, Globale Tschebyscheff-Netze auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und Fortsetzung von Flächen konstanter negativer Krümmung, *Comm. Math. Helv.*, **47** (1972), 348–372.
- [110] J.A. Wolf, Exotic metrics on immersed surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 871–877.