

MEMORIA DE DOCTORADO

PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS EN SUPERFICIES

Antonio Jesús Cañete Martín
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada



PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS EN SUPERFICIES

Memoria presentada por Antonio Jesús Cañete Martín, y realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de Manuel María Ritoré Cortés, miembro de dicho Departamento, con objeto de aspirar al grado de Doctor en Matemáticas.

Granada, Julio de 2007.

Prof. Manuel María Ritoré Cortés
Director de la Memoria

Antonio Jesús Cañete Martín
Aspirante al grado de Doctor

Dedicado a mis padres,
a mi hermano y a Susana

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría darle las gracias a Manuel por su ayuda y apoyo continuos a lo largo de la realización de esta memoria. Si volviera a iniciar unos estudios de doctorado, es seguro que le pediría consejo de nuevo.

También le agradezco a mi amigo César nuestras discusiones matemáticas, y nuestras risillas no matemáticas. Y a Matías, Javi y Diego, que me animaron mucho durante la realización de este trabajo. Le doy las gracias a Desirée y a María por su ayuda, y también, claro, a Susana, por estar a mi lado en todo momento.

Agradecer a Vicente Miquel su ayuda durante mi estancia en Valencia, y a mis amigas Ana y Teresa; y a Salvador Segura y Cinzia Miori, por los días que pasé en Alicante. De ningún modo puedo olvidarme de Vincent Bayle, que hizo más agradable el tiempo que estuve en Grenoble.

También quiero darle las gracias a mis compañeros del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, y del Departamento de Matemáticas de la Universidad de León, por su acogida, los buenos ratos vividos y su ayuda constante.

Finalmente, mil gracias a mis padres y a mi hermano, por su cariño y apoyo.

Índice general

Introducción General	v
Parte I. Problema isoperimétrico en superficies de revolución	1
Capítulo 1. Introducción Parte I	3
Capítulo 2. Resultados generales en superficies	7
2.1. El problema isoperimétrico en superficies	7
2.2. Generalidades sobre superficies $S^1 \times I$	8
2.3. Curvas con curvatura geodésica constante en $S^1 \times I$	10
2.4. Curvas estables en $S^1 \times I$. Operador de Jacobi y valores propios asociados	19
2.5. Existencia de onduloideos cerrados, embebidos y estables	26
2.6. Regiones estables	39
2.7. Generalidades sobre superficies de revolución	46
Capítulo 3. El problema isoperimétrico en toros rotacionalmente simétricos	47
3.1. Descripción de nuestras superficies	48
3.2. Curvas con curvatura geodésica constante	52
3.3. Regiones estables	57
3.4. Regiones isoperimétricas	64
Capítulo 4. El problema isoperimétrico en anillos de revolución completos	81
4.1. Descripción de nuestras superficies	82
4.2. Curvas con curvatura geodésica constante	83
4.3. Regiones estables	85
4.4. Regiones isoperimétricas	89
4.5. Cuádricas de revolución	107
Parte II. Problemas isoperimétricos planos múltiples	113
Capítulo 5. Introducción Parte II	115
Capítulo 6. Preliminares	119
6.1. Existencia de configuraciones minimizantes. Condiciones de regularidad	119
6.2. Fórmulas de variación. Configuraciones estacionarias	121
6.3. Configuraciones estables	135
Capítulo 7. Particiones Isoperimétricas de un disco plano	137
7.1. Partición isoperimétrica para dos regiones	138
7.2. Algunos resultados sobre particiones isoperimétricas	139
7.3. Cota para el número de componentes de la región de mayor presión	140
7.4. Configuraciones inestables y no-minimizantes	145
7.5. Partición isoperimétrica para tres regiones	156
7.6. Consideraciones finales	158
Capítulo 8. El Problema de la Pompa Plana Múltiple	161

8.1. Algunos resultados sobre pompas planas minimizantes	162
8.2. Resultados principales	163
8.3. Objetivos de este enfoque	179
Parte III. Apéndice	185
Capítulo 9. El problema isoperimétrico en espacios euclídeos con densidad	187
9.1. Introducción	187
9.2. Preliminares	188
9.3. Existencia y Regularidad	189
9.4. Fórmulas de Variación	192
9.5. La recta real con densidad	198
9.6. La densidad $\exp(x ^2)$	207
Bibliografía	211

Introducción General

Podemos pensar que el estudio de los *problemas isoperimétricos en superficies* tiene su origen en una propiedad geométrica bien conocida que poseen las circunferencias:

entre todas las curvas cerradas del plano que encierran una cantidad prefijada de área, la correspondiente circunferencia es la que tiene menos longitud.

Esta propiedad ya era conocida por los matemáticos de la Antigua Grecia. En el libro *Mathematical Collection* de Pappus de Alejandría [61] ya aparecía una demostración, debida a Zenodoro, que prueba que el círculo tiene menos perímetro que cualquier polígono de igual área, lo que nos conduce a la anterior propiedad mediante un argumento de aproximación.

Es natural plantear esta cuestión en una superficie general, surgiendo así el problema isoperimétrico en su versión más habitual:

Dada una superficie riemanniana M , buscamos el conjunto contenido en M que encierra una cantidad de área prefijada usando el menor perímetro posible.

Por supuesto, la existencia de un tal conjunto no está asegurada, en un principio. En caso de existir, se le denomina *región isoperimétrica*.

El conocimiento de estas regiones proporcionará *desigualdades isoperimétricas* en las superficies, muy útiles en la resolución de diversos problemas [7], [47]. Incluso si nos centramos en el caso plano, las desigualdades que se obtengan, combinadas con otras técnicas (por ejemplo, argumentos de simetrización), pueden aplicarse en problemas planteados en dimensiones superiores.

El estudio de las regiones isoperimétricas en superficies es una cuestión interesante, que ha sido resuelta completamente sólo en algunas superficies concretas, debido a las dificultades que surgen al tratar este tipo de problemas.

En primer lugar, tal y como hemos comentado antes, la existencia de soluciones isoperimétricas no está garantizada en cualquier superficie. Por ejemplo, en las *catenoides minimales* no hay regiones isoperimétricas para ningún valor del área que se considere (analizaremos tales superficies a lo largo de nuestro trabajo). Por otro lado, puede también ocurrir que, en una superficie concreta, existan soluciones isoperimétricas para ciertos valores del área, pero no para otros (es lo que ocurre, por ejemplo, en los *hiperboloides de una hoja*, como se verá con posterioridad).

No hay muchos resultados generales que traten la existencia de regiones isoperimétricas en una superficie. Razonamientos propios de la Teoría Geométrica de la Medida [72] permiten probar que cuando nuestra superficie es compacta, existen regiones isoperimétricas para todo valor del área. En superficies no compactas, las técnicas habituales consisten en estudiar la convergencia de sucesiones minimizantes y la eventual pérdida de área en infinito (se pueden consultar aplicaciones de dichas técnicas, por ejemplo, en los trabajos de F. Morgan [70], o de M. Ritoré [82], [83]). Nosotros profundizaremos en estos métodos más adelante, ya que serán utilizados en el Capítulo 4 de esta Memoria.

Otro resultado referente a la existencia, que se puede consultar en el libro de Morgan [72], es el siguiente: dada una superficie M , si el cociente M/G es compacto, donde G es el grupo de isometrías asociado a M , entonces también podemos afirmar que hay regiones isoperimétricas para cualquier valor del área. Dicho resultado es aplicable, por ejemplo, en el caso de un *cilindro circular completo*.

Por otra parte, en cuanto a las propiedades que satisfacen las regiones isoperimétricas, se tiene en primer lugar que estarán bordeadas por curvas cerradas, embebidas y diferenciables [72]. A partir de ahí, las fórmulas clásicas de variación del área y del perímetro implican que dichas curvas tendrán curvatura geodésica constante (con respecto al vector normal que apunta hacia el interior) [89], [7], [72]. Estas condiciones permiten hacerse una idea de cuales pueden ser las regiones isoperimétricas en una superficie, conociendo las curvas con curvatura constante. En algunos casos, determinarán casi completamente dichas regiones.

Todas estas cuestiones han resultado muy interesantes en los últimos años, siendo estudiadas en diversos trabajos de la literatura. Sin embargo, la *clasificación completa* de las regiones isoperimétricas sólo ha sido obtenida en algunas superficies concretas.

En las superficies simplemente conexas con curvatura de Gauss constante (*plano, esfera y plano hiperbólico*), las regiones isoperimétricas existen y son discos geodésicos (véase el trabajo de E. Schmidt [88]). Para el plano y del plano hiperbólico, este hecho es consecuencia de las desigualdades isoperimétricas clásicas (recogidas por R. Osserman [78, p. 1207], o en la obra de Y. Burago y V. Zalgaller [22]), si bien existen muchas demostraciones en el caso del plano, utilizando diversas técnicas (tales como argumentos de simetrización o comparación directa de perímetros, véase la recopilación de H. Howards y otros [56]). En el caso de la esfera, las soluciones (que existirán por compacidad) han de ser discos geodésicos en virtud de las condiciones de regularidad.

Otras superficies para las que se conocen las soluciones isoperimétricas son los *cilindros circulares*, y los *toros, botellas de Klein y cintas de Moebius llanas* [56, § 6 y 7]. Dichas soluciones consisten en discos, y en bandas bordeadas por geodésicas de longitud mínima (además de los complementarios de estos conjuntos en el caso de área total finita), y se obtienen casi inmediatamente a partir de las condiciones de regularidad.

Recientemente, se han producido avances en el estudio de este problema en superficies de revolución con alguna hipótesis de monotonía sobre la curvatura de Gauss. Por ejemplo, se sabe que en planos de revolución con curvatura decreciente desde un polo, las regiones isoperimétricas son discos geodésicos centrados en el polo (obtenido parcialmente por I. Benjamini y J. Cao en [9], y de forma general por Morgan y otros [75] y por Ritoré [82]). Un ejemplo de estas superficies es el *paraboloide* de revolución [9, Th. 5 y 8].

En [82] también se consideran otras superficies de revolución con curvatura de Gauss creciente o decreciente, planteando su estudio a partir de la clasificación de las regiones estables. En planos con curvatura creciente desde un polo, las regiones isoperimétricas sólo pueden ser discos contenidos en zonas donde la curvatura de Gauss sea constante, de forma que si hay crecimiento estricto, no existirá ninguna solución isoperimétrica. En anillos con curvatura decreciente desde un final de área finita, las soluciones siempre existen, y estarán bordeadas por un paralelo. En el caso de las esferas de revolución simétricas, si la curvatura es decreciente desde el ecuador, las soluciones consistirán en una familia de discos que constituyen una foliación, mientras que si la curvatura es creciente, las soluciones estarán bordeadas por uno o dos paralelos (obteniéndose discos centrados en los polos, o anillos simétricos o no simétricos). Finalmente, las regiones isoperimétricas en planos proyectivos con curvatura creciente o decreciente son discos, para cualquier valor del área (algunos de estos resultados también se recogen en [75]).

Siguiendo otras técnicas, Ritoré ha demostrado que las regiones isoperimétricas en planos completos con curvatura de Gauss no negativa existen y son discos [83]; por otro lado, en *superficies hiperbólicas* dichas regiones también han sido clasificadas por C. Adams y Morgan [1], obteniéndose cuatro posibles tipos distintos de soluciones isoperimétricas.

Actualmente, la noción de *problema isoperimétrico* no sólo se refiere a las cuestiones descritas hasta ahora (hallar el conjunto de menos perímetro en una superficie, entre todos los que encierran una cantidad de área prefijada), sino que engloba también problemas de otra índole, siempre con la idea de

minimizar el funcional perímetro bajo ciertas restricciones sobre el área.

De esta forma, se pueden plantear los *problemas isoperimétricos múltiples*, en los que se consideran varios valores para el área, y se busca la configuración de curvas con la menor longitud posible, que delimita regiones encerrando dichas cantidades de área. Entre los problemas más interesantes de este tipo se encuentra el de la *pompa plana múltiple*, que se enuncia y desarrolla en el plano euclídeo, y que será tratado en el Capítulo 8. Remitimos al lector a la Introducción de la Parte II (Capítulo 5), en la que se exponen cuestiones generales sobre este problema, y los resultados que se han obtenido hasta ahora en este contexto.

Otro problema isoperimétrico, relacionado con el anterior, podríamos denominarlo como el problema de las *particiones isoperimétricas*. En este caso, lo que se pretende es dividir o descomponer nuestra superficie en regiones de área prefijada, utilizando la menor longitud total posible. Un ejemplo corresponde a la partición isoperimétrica de una esfera bidimensional, sobre la que se pueden consultar bastantes artículos interesantes, debidos a J. Hass y Morgan [51], J. Masters [65], o A. Heppes [54], [53], [52]. Nosotros examinaremos una de estas cuestiones en el Capítulo 7, dedicado a la partición isoperimétrica de un disco plano.

Las particiones (o divisiones) isoperimétricas también pueden plantearse en ambientes no acotados, como es el caso de la división del plano euclídeo en regiones de igual área. La *conjetura del panal de abejas* establece que la mejor división posible se logra a partir de hexágonos regulares, y ha sido recientemente probada por T. Hales [49]. Este problema requiere realizar ciertas consideraciones particulares, ya que la longitud total de cualquier división del plano no será finita. Nosotros no profundizaremos en esta dirección, si bien indicaremos que es necesario recurrir a las nociones de perímetro y área truncados (restringiendo la división a discos centrados en el origen de radio creciente, para que el perímetro sea finito), y que se pretende minimizar el límite superior de los cocientes de esas dos magnitudes. Un tratamiento riguroso de este problema puede encontrarse en [72, § 15].

Otra posibilidad que puede considerarse dentro de los problemas isoperimétricos es trabajar con funcionales de área y perímetro *ponderados* por una función positiva, llamada *densidad*. El estudio de superficies y variedades dotadas de una densidad está despertando cierto interés en los últimos años, lo que hace que también se esté analizando el problema isoperimétrico en este contexto. Nosotros trataremos algunas cuestiones relacionadas en el Capítulo 9, no sólo centrándonos en superficies, sino en el espacio euclídeo general.

Otra variante de los problemas isoperimétricos se conoce como el problema de *frontera libre*, en el que la frontera de la superficie, en caso de que exista, no contribuye al perímetro total de los conjuntos, de forma que tenemos libertad de apoyarnos en la parte de la frontera que resulte más eficiente.

En definitiva, las cuestiones isoperimétricas pueden presentar diversos planteamientos, que implicarán distintas técnicas y argumentos para obtener la correspondiente solución.

Esta Memoria, estructurada en tres partes, trata algunos de los problemas anteriormente expuestos. En la introducción a cada una de las partes se encontrarán destacados los principales resultados que hemos obtenido.

La primera parte se dedica al estudio del problema isoperimétrico clásico, concretamente en superficies de revolución. El Capítulo 3 se ocupa del problema isoperimétrico en toros de revolución simétricos y con curvatura de Gauss decreciente desde el paralelo de mayor longitud. Logramos clasificar completamente las regiones estables, además de discutir cuales de estas regiones pueden ser isoperimétricas. Por otra parte, en el Capítulo 4 nos centramos en anillos de revolución simétricos y con curvatura de Gauss creciente desde el paralelo de menor longitud, clasificando completamente las regiones isoperimétricas de dichas superficies.

En la segunda parte de esta Memoria consideramos los problemas isoperimétricos múltiples, indicando las principales propiedades de existencia y regularidad en el Capítulo 6. En el Capítulo 7 resolvemos el problema de la partición isoperimétrica de un disco plano en dos y tres regiones, mientras que en el Capítulo 8 enfocamos el problema de la pompa plana múltiple desde un nuevo punto de vista, gracias a la caracterización de las configuraciones estacionarias en función de figuras recíprocas.

Finalmente, el Apéndice de la tercera parte de la Memoria recoge algunos resultados interesantes referentes al problema isoperimétrico en el espacio euclídeo con una densidad. Esta Parte III de la Memoria se aleja un poco de la temática tratada a lo largo del trabajo, y por ello hemos decidido añadirla de forma complementaria.

Parte I

Problema isoperimétrico en superficies de revolución

CAPÍTULO 1

Introducción Parte I

En esta primera parte de la Memoria centraremos nuestra atención en el estudio del problema isoperimétrico en *superficies de revolución*. Describiremos un método que permite abordar esta cuestión, además de aplicarlo a dos familias particulares de superficies: *toros de revolución* simétricos con curvatura de Gauss decreciente desde el paralelo de mayor longitud, y *anillos de revolución* completos, simétricos y con curvatura de Gauss creciente desde el paralelo de menor longitud.

Nuestro estudio viene motivado por varios trabajos que han tratado el problema isoperimétrico en superficies de revolución con alguna hipótesis sobre la monotonía de la curvatura de Gauss en los últimos años. En 1996, I. Benjamini y J. Cao [9] probaron que en planos con curvatura total positiva menor o igual que 2π , y con curvatura de Gauss decreciente desde un polo, las regiones isoperimétricas son discos geodésicos centrados justamente en el polo. En dicho trabajo, deducen una desigualdad isoperimétrica (a partir del flujo por curvatura geodésica) que proporciona igualdad para tales discos.

Posteriormente, F. Morgan, M. Hutchings y H. Howards [75] resolvieron este problema en 1999 en el caso general de curvatura de Gauss decreciente (sin hipótesis sobre la curvatura total), y también para planos proyectivos reales, anillos con un final de área finita, y determinadas esferas (con métricas rotacionalmente simétricas), obteniendo que las soluciones son discos geodésicos o anillos bordeados por paralelos.

Estos dos resultados, y alguno más (como los de P. Pansu [80] o P. Topping [93]), se han obtenido mediante el uso de ciertas desigualdades isoperimétricas, que establecen relaciones entre el perímetro y el área encerrada por un conjunto ([78], [22]).

Nosotros proponemos un enfoque distinto, similar al que utiliza M. Ritoré [82], basado en un trabajo de E. Schmidt [88]. Nuestro punto de partida se centra en el estudio de las curvas cerradas y embebidas con *curvatura geodésica constante*. Como el borde de cualquier región isoperimétrica está formado por curvas de este tipo (todas con la *misma* curvatura), la clasificación de dichas curvas en nuestras superficies nos proporcionará una primera lista de candidatos.

En este punto, conviene recordar un concepto importante, relacionado con estas cuestiones: la *estabilidad*. Las regiones isoperimétricas pueden entenderse como mínimos globales del funcional perímetro, bajo una restricción sobre el área encerrada. En particular, serán mínimos locales de dicho funcional, cuando consideremos deformaciones infinitesimales que preserven el área encerrada, y estarán bordeadas por curvas con curvatura geodésica constante, con respecto al normal que apunta hacia el interior. Precisamente, los conjuntos o regiones *estables* son estos mínimos locales (de segundo orden), por lo que se tiene que toda región isoperimétrica es una región estable. Este concepto de estabilidad también se aplica a las curvas, de forma que toda región estable se encontrará bordeada por curvas estables.

El hecho de considerar la estabilidad permite que se usen todas las herramientas propias del Cálculo de Variaciones, con el objetivo de obtener propiedades, de tipo geométrico y topológico, características de las regiones estables, y en consecuencia, de las

soluciones isoperimétricas. De esta forma, la idea que seguiremos consistirá en clasificar previamente las regiones estables de nuestras superficies (mínimos locales), para luego discutir cuales de ellas son realmente regiones isoperimétricas (mínimos globales).

Este esquema ya posibilitó a Ritoré [82] resolver estas cuestiones en planos de revolución, en esferas que presentan una simetría con respecto al ecuador, y en planos proyectivos, con curvatura de Gauss decreciente, y también creciente, y en anillos con curvatura decreciente desde un final de área finita. Las soluciones en estos casos son discos delimitados por curvas con curvatura geodésica constante, o anillos bordeados por paralelos de la superficie, si bien en algunas situaciones no hay existencia de regiones isoperimétricas (planos con curvatura estrictamente creciente desde un polo). Un resumen de los resultados obtenidos en [82], y también en [9], [75], puede consultarse en [25].

Por otro lado, dada una superficie, la clasificación de las regiones estables es una cuestión interesante por sí misma, y no sólo por su conexión con el problema isoperimétrico, ya que desde un punto de vista físico y en términos de energía, tales regiones representan modelos que describen satisfactoriamente el comportamiento observable empíricamente.

En esta Parte I de la Memoria aplicamos estas ideas para estudiar el problema isoperimétrico en dos tipos distintos de superficies de revolución, con ciertas propiedades comunes: superficies rotacionalmente simétricas, que presentan una simetría horizontal con respecto a un paralelo concreto, y con curvatura de Gauss monótona desde dicho paralelo. Más concretamente, lograremos describir las regiones estables e isoperimétricas en toros de revolución simétricos y con curvatura decreciente desde el paralelo de mayor longitud [23], y en anillos de revolución completos, simétricos y con curvatura creciente desde el paralelo de menor longitud [27].

La aplicación de nuestro enfoque se basa en la consideración de superficies tipo cilindro $S^1 \times I$, donde $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es la circunferencia unidad e I es un intervalo real, dotadas de métricas *warped*. Trabajar con este modelo va a permitir clasificar completamente las curvas con curvatura geodésica constante. Obsérvese que, identificando adecuadamente los bordes de dicho cilindro, se obtienen, por ejemplo, superficies difeomorfas a anillos, esferas, planos y toros de revolución, y que el tipo de métrica que consideremos determinará las propiedades de simetría de la superficie, además de la curvatura de Gauss.

Una observación que es necesario destacar es que admitiremos que la curvatura de Gauss de nuestras superficies sea una función con una cantidad finita de discontinuidades de salto, lo que hace que nuestro estudio sea más amplio. Esto se debe, esencialmente, a que los resultados básicos para obtener la clasificación de las curvas con curvatura geodésica constante son también ciertos cuando se tienen estas discontinuidades. Un ejemplo interesante en esta situación, y que estudiaremos más adelante, viene dado por la superficie que se obtiene a partir de una esfera, a la cual se le quitan dos discos abiertos idénticos centrados en los polos, y se le añaden apropiados anillos hiperbólicos acotados.

En el Capítulo 2 presentamos una serie de resultados generales en superficies de revolución del tipo $S^1 \times I$ con métricas *warped*. En particular, describiremos el sistema de ecuaciones diferenciales y la primera integral asociada, que permiten clasificar las curvas con curvatura geodésica constante, además de mostrar las primeras propiedades de estas curvas. También se tratará la estabilidad, a partir del análisis de las fórmulas de variación del área y del perímetro, proporcionando criterios que impondrán ciertas restricciones sobre las curvas y regiones estables contenidas en $S^1 \times I$.

Una parte importante de este Capítulo se dedica al estudio en profundidad de ciertas curvas con curvatura geodésica constante que van a aparecer en nuestras superficies: los *onduloides* (Sección 2.5). Estas curvas no son cerradas y embebidas en general, y hasta ahora, no habían formado parte del borde de ninguna región isoperimétrica en ninguna

superficie, al menos bajo nuestro conocimiento. De hecho, en las superficies de revolución tratadas en los trabajos anteriormente citados, tales curvas resultan ser inestables o no llegan a ser embebidas, por las características intrínsecas de tales superficies.

Nosotros mostraremos que, si la superficie satisface determinadas hipótesis (no excesivamente exigentes), hay existencia de onduloide cerrado y embebido (Lema 2.5.4). Y en tal caso, daremos un criterio para discutir su estabilidad (Lema 2.5.8). Esto nos conducirá a una de las consecuencias más interesantes que se derivan de nuestro trabajo: una curva de tipo onduloide puede formar parte del borde de una región isoperimétrica. Este fenómeno se da tanto en los toros de revolución como en los anillos de revolución completos que consideraremos, y puede resultar sorprendente e inesperado en un principio; sin embargo, estas curvas ya habían aparecido como generadoras de hipersuperficies bordeando algunos dominios isoperimétricos en $S^1 \times Q_n^c$ (para $n \geq 9$), en un trabajo de Pedrosa y Ritoré [81, Prop. 3.4], donde Q_n^c es el espacio modelo n -dimensional simplemente conexo (con c igual a $-1, 0$, ó 1).

En el Capítulo 3 tratamos en profundidad el problema isoperimétrico en toros de revolución simétricos y con curvatura de Gauss decreciente desde el paralelo de mayor longitud. Siguiendo el enfoque anteriormente descrito, clasificaremos las regiones estables que pueden aparecer en el Teorema 3.3.6, obteniendo que:

en un toro de revolución simétrico y con curvatura de Gauss decreciente desde el paralelo de mayor longitud, las regiones estables son discos, anillos simétricos o asimétricos (bordeados por dos paralelos), uniones de anillos verticales, uniones de anillos bordeados por hélices, anillos bordeados por un onduloide y un paralelo, o uniones de un disco y un anillo simétrico.

Además, discutiremos cuales de ellas se presentan como regiones isoperimétricas, que gracias a la compacidad de estas superficies, existirán para cualquier valor del área que consideremos. Los resultados de este Capítulo aparecen en [23].

Finalmente, el Capítulo 4 está dedicado a los anillos de revolución completos, simétricos y con curvatura de Gauss creciente desde el paralelo de menor longitud. En este caso, la existencia de regiones isoperimétricas no va a estar garantizada en general, y de hecho, daremos ejemplos (*catenoides minimales*, estudiadas en el Ejemplo 4.1) donde tales regiones no existen (la idea es considerar discos geodésicos que van tendiendo hacia un final del anillo, con lo que su perímetro irá decreciendo por el crecimiento de la curvatura de Gauss). Sin embargo, a partir de la caracterización de las regiones estables y de ciertos argumentos sencillos, podremos determinar también las regiones isoperimétricas en este tipo de superficies, en caso de que existan. Así, el Teorema 4.4.22 muestra que

las regiones isoperimétricas en un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura de Gauss creciente desde el paralelo de menor longitud, en caso de existir, son discos con curvatura de Gauss constante, anillos simétricos o asimétricos, o anillos bordeados por un onduloide y un paralelo.

Como caso particular, analizaremos el comportamiento de los *hiperboloide de una hoja*, obteniendo en el Corolario 4.5.3 que

las regiones isoperimétricas en un hiperboloide de una hoja, en caso de existir, son anillos horizontales simétricos o asimétricos.

Dicho resultado completa el estudio del problema isoperimétrico en la familia de *cuádricas de revolución* no degeneradas de \mathbb{R}^3 (Corolario 4.5.6):

las regiones isoperimétricas de una cuádrica de revolución no degenerada de \mathbb{R}^3 , en caso de existir, consisten en discos o anillos horizontales.

Todos estos resultados también se encuentran en [27].

Queremos destacar también que, a partir del Lema 3.4.15, referente a los toros de revolución anteriormente descritos, y del Lema 4.4.21, en los anillos de revolución de nuestro estudio, se tiene la siguiente consecuencia interesante:

un anillo bordeado por un onduloide y un paralelo puede aparecer como región isoperimétrica de una superficie.

Es de esperar que los métodos aquí descritos puedan aplicarse con éxito para otras superficies de revolución, con alguna hipótesis de monotonía sobre la curvatura de Gauss, e incluso en otras situaciones. Aun así, y en términos generales, la descripción de las regiones isoperimétricas en superficies no deja de ser un problema de cierta complejidad.

CAPÍTULO 2

Resultados generales en superficies

En este capítulo vamos a introducir la notación que se utilizará en esta parte de la Memoria, dedicada al estudio del problema isoperimétrico en el contexto de superficies de revolución. Se establecerán una serie de resultados generales, principalmente referidos a superficies de tipo $S^1 \times I$, que serán aplicados en los posteriores capítulos; algunos de ellos se referirán a superficies que presentan algún tipo de simetría o de hipótesis sobre la curvatura de Gauss.

2.1. El problema isoperimétrico en superficies

En esta primera parte de la memoria nos vamos a centrar en el estudio del *problema isoperimétrico* en superficies del espacio euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 . Así, dada una superficie arbitraria $M \subset \mathbb{R}^3$, y fijado un valor positivo $a > 0$ (menor o igual que el área total de la superficie M), nuestro objetivo es encontrar los conjuntos contenidos en M que encierran área a usando el menor perímetro posible. Tales conjuntos, en caso de existir, se denominarán *regiones isoperimétricas*.

Empecemos recordando las nociones habituales de área y perímetro de un conjunto [45], [89]. La noción de área vendrá dada de la forma usual, a partir de la medida asociada a la métrica euclídea restringida a la superficie. De esta forma, dado un subconjunto Ω de una superficie M , el área encerrada por Ω será

$$A(\Omega) = \mathcal{H}^2(\Omega),$$

donde \mathcal{H}^k representa la medida de Hausdorff k -dimensional de M .

En cuanto al perímetro de Ω , no es conveniente definirlo directamente a partir de la medida de Hausdorff unidimensional, sino que es más apropiado hacerlo de la siguiente manera (así evitaremos que el perímetro se vea afectado por conjuntos de área nula):

$$P(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} \operatorname{div} X \, d\mathcal{H}^2 : X \in \mathbb{X}_0(M), |X| \leq 1 \right\},$$

donde $\mathbb{X}_0(M)$ representa el conjunto de campos diferenciables definidos en M y de soporte compacto, y $\operatorname{div} X$ es la divergencia de un campo $X \in \mathbb{X}_0(M)$. Destacamos que para conjuntos diferenciables $\Omega \subset M$, se tiene que $P(\Omega) = \mathcal{H}^1(\partial\Omega)$.

A partir de estos conceptos, podemos realizar la siguiente definición rigurosa de región isoperimétrica:

Definición 1. Dada una superficie M , diremos que $\Omega \subset M$ es una *región isoperimétrica* para área $a \in [0, A(M)]$ si $A(\Omega) = a$, y

$$P(\Omega) \leq P(\Omega'),$$

para cualquier subconjunto $\Omega' \subset M$ con $A(\Omega') = a$.

En este contexto, es habitual considerar la siguiente función relacionada con el problema isoperimétrico.

Definición 2. Dada una superficie M , el *perfil isoperimétrico* asociado a M es la función $I : [0, A(M)] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$I(a) = \inf\{P(B) : B \subset M, A(B) = a\}.$$

Es claro entonces que una región isoperimétrica $\Omega \subset M$ para área a satisface que

$$A(\Omega) = a, \quad P(\Omega) = I(a).$$

En ocasiones, nos referiremos a tales regiones como *soluciones isoperimétricas*.

La existencia de regiones isoperimétricas no está garantizada en una superficie general. En el contexto de las superficies compactas, gracias a argumentos derivados de la Teoría Geométrica de la Medida [72], sí se puede asegurar que existen regiones isoperimétricas para cualquier valor del área que consideremos. Sin embargo, en ambientes no compactos esta es una cuestión compleja para la que no se disponen de demasiadas herramientas. De hecho, en [82] se muestran ejemplos de superficies donde no hay regiones isoperimétricas para ningún valor del área; nosotros también daremos algunos ejemplos en el Capítulo 4.

La forma habitual de tratar la existencia de regiones isoperimétricas es considerar, para cada valor $a \in (0, A(M))$, una sucesión de conjuntos cuyos perímetros se aproximen al perfil isoperimétrico $I(a)$.

Definición 3. Una *sucesión minimizante* para área $a > 0$ es una sucesión de conjuntos $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $A(\Omega_n) = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Omega_n) = I(a).$$

Veremos más adelante cómo el estudio de la convergencia de sucesiones minimizantes nos permitirá discutir la existencia de regiones isoperimétricas. Para acabar esta Sección, mostramos el siguiente resultado general, que indica que las sucesiones minimizantes se pueden descomponer de una forma particular.

Lema 2.1.1. ([82, Lemma 1.8]) *Sea M una superficie riemanniana, $a > 0$, y sea $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión minimizante para área a . Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, Ω_n puede descomponerse como una unión $\Omega_n = \Omega_n^c \cup \Omega_n^d$, donde*

- i) $\{\Omega_n^c\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a un conjunto $\Omega \subset M$, con $A(\Omega) \in [0, A]$,
- ii) $\{\Omega_n^d\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión divergente,
- iii) si notamos $L_c = \lim P(\Omega_n^c)$ y $L_d = \lim P(\Omega_n^d)$, entonces $L_c + L_d = I(a)$, y
- iv) Ω es una región isoperimétrica para área $A(\Omega)$.

Nótese que, a partir de este Teorema, se tiene como consecuencia que si el área en infinito

$$A_d = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{área}(\Omega_n^d)$$

es nula, entonces $A(\Omega) = A$, de donde se concluye que Ω es una región isoperimétrica para área A .

2.2. Generalidades sobre superficies $S^1 \times I$

A lo largo de esta parte de la memoria, denotaremos por M a la superficie $S^1 \times I$, donde $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es la circunferencia unidad e $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo conexo y simétrico respecto al origen (no necesariamente acotado), con la métrica *warped*

$$(2.1) \quad ds^2 = f(t)^2 d\theta^2 + dt^2,$$

para $\theta \in S^1$, $t \in I$ y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva diferenciable.

Nota 2.2.1. En principio, teniendo en cuenta las características diferenciables de las superficies que vamos a tratar más adelante, basta exigir que f sea de clase C^1 y C^2 a trozos (esto es, f'' existe y es continua en I , salvo quizás en un número finito de puntos).

Resaltamos que las superficies $S^1 \times I$ que estamos considerando son rotacionalmente simétricas, es decir, son invariantes bajo el grupo uniparamétrico de rotaciones de \mathbb{R}^3 de eje vertical, en virtud de la métrica (2.1). Además, asumiremos que tales superficies poseen una *simetría horizontal* adicional, entendida de la siguiente manera:

A partir de este instante, nos referiremos al paralelo $S^1 \times \{0\}$ como *ecuador* de M . Nuestro estudio se centrará en superficies que sean simétricas con respecto a dicho ecuador. Esta imposición obliga a la función f a ser simétrica, es decir,

$$f(t) = f(-t), \quad t \in I.$$

Como primera consecuencia, se tiene que $f'(0) = 0$.

Tal y como se ha comentado en la Introducción, otra de las características de las superficies que vamos a tratar es que la curvatura de Gauss presentará alguna hipótesis de monotonía. Teniendo en cuenta la métrica (2.1), es rutinario comprobar que la curvatura de Gauss K de $S^1 \times I$ con una métrica (2.1) sólo depende de la coordenada t , y viene dada por

$$(2.2) \quad K(t) = -\frac{f''(t)}{f(t)}.$$

Obsérvese que, debido a las condiciones de diferenciabilidad de la función f , la curvatura de Gauss K resulta, en general, continua a trozos.

Llamaremos paralelos o *círculos de revolución* a las curvas horizontales $S^1 \times \{t\}$. Claramente, estas curvas pueden ser parametrizadas de la forma

$$(\theta(s), t(s)) = (s, t), \quad \text{con } s \in [0, 2\pi],$$

con lo que la longitud de $S^1 \times \{t\}$, vista como grafo horizontal, será igual a

$$(2.3) \quad L(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{f^2(t) + t'(s)^2} ds = \int_0^{2\pi} f(t) = 2\pi f(t).$$

La curvatura geodésica de los círculos de revolución también se puede expresar de forma sencilla, en términos de la función f . Así, calculada respecto del vector normal $-\partial_t$, la curvatura geodésica $h(t)$ de un paralelo $S^1 \times \{t\}$ es igual a

$$(2.4) \quad h(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

En efecto: como el vector tangente unitario a $S^1 \times \{t\}$ coincide justamente con ∂_θ , la curvatura geodésica vendrá dada por

$$(2.5) \quad h(t) = \langle D_{\partial_\theta} \partial_\theta, -\partial_t \rangle = \langle D_{\partial_\theta} \partial_t, \partial_\theta \rangle,$$

donde D representa la conexión de Levi-Civita de M . A partir de (2.1), se tiene que $D_{\partial_\theta}(f(t)\partial_t) = f'(t)\partial_\theta$, de donde

$$D_{\partial_\theta} \partial_t = \frac{f'(t)}{f(t)} \partial_\theta.$$

Sustituyendo en (2.5), se obtiene inmediatamente (2.4).

Por otro lado, las curvas verticales $\{\theta\} \times I$, para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, son geodésicas para la métrica (2.1), y las llamaremos *geodésicas verticales*. De hecho, estas curvas son las curvas generadoras de $S^1 \times I$, vistas como superficies de revolución.

Nota 2.2.2. A partir de (2.2) y (2.4), es trivial comprobar la siguiente igualdad:

$$(f')^2 - ff'' = (2\pi)^{-2} L^2(K + h^2).$$

Si hallamos la derivada de esa función, se tiene que

$$[(f')^2 - ff'']'(t) = [f'f'' - ff'''](t),$$

que coincide con la derivada de la curvatura de Gauss K , salvo un factor positivo:

$$K'(t) = \frac{[f'f'' - ff'''](t)}{f(t)^2}.$$

En consecuencia, las funciones $(f')^2 - ff''$ y K tienen el mismo carácter monótono. Este hecho se usará repetidamente a lo largo del trabajo.

2.3. Curvas con curvatura geodésica constante en $\mathbb{S}^1 \times I$

Las curvas con curvatura geodésica constante de nuestras superficies van a jugar un papel importante en esta parte de la Memoria. No hay que olvidar que las regiones isoperimétricas estarán bordeadas por este tipo de curvas.

Siguiendo el esquema que aparece en [82, Section 1], es posible determinar el sistema de ecuaciones diferenciales que satisfacen las curvas con curvatura geodésica constante contenidas en una superficie $\mathbb{S}^1 \times I$ con métrica (2.1). Dicho sistema nos permitirá obtener la clasificación completa de este tipo de curvas en las familias de superficies tratadas en los Capítulos 3 y 4.

Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo real, y consideremos una curva γ contenida en $\mathbb{S}^1 \times I$, parametrizada por el arco:

$$\gamma : J \rightarrow \mathbb{S}^1 \times I, \quad \gamma(s) = (\theta(s), t(s)), \quad s \in J.$$

Supongamos que la superficie está orientada según $dt \wedge d\theta$. Denotemos por $d\gamma/ds$ al vector tangente unitario a γ , y por σ al ángulo orientado $\angle(\partial_t, d\gamma/ds)$. A partir de dicho ángulo σ , la dirección del vector $d\gamma/ds$ vendrá dada por

$$\sin \sigma \partial_\theta + \cos \sigma \partial_t.$$

Así, teniendo en cuenta la métrica (2.1) para normalizar, se tiene que

$$\frac{d\gamma}{ds} = \left(\frac{d\theta}{ds}, \frac{dt}{ds} \right) = \frac{\sin \sigma}{f(t)} \partial_\theta + \cos \sigma \partial_t = \left(\frac{\sin \sigma}{f(t)}, \cos \sigma \right).$$

En consecuencia, el vector normal unitario asociado N vendrá dado por

$$(2.6) \quad N = \frac{\cos \sigma}{f(t)} \partial_\theta - \sin \sigma \partial_t = \left(\frac{\cos \sigma}{f(t)}, -\sin \sigma \right).$$

Como

$$D_{\frac{d\gamma}{ds}} \frac{d\gamma}{ds} = \left(\frac{d\sigma}{ds} + \frac{f'(t)}{f(t)} \sin \sigma \right) N,$$

denotando por h la curvatura geodésica de γ con respecto al vector normal N , se tiene que

$$h = \left\langle D_{\frac{d\gamma}{ds}} \frac{d\gamma}{ds}, N \right\rangle = \frac{d\sigma}{ds} + \frac{f'(t)}{f(t)} \sin \sigma.$$

A partir de estos cálculos, se tiene demostrada la siguiente Proposición, que muestra el sistema de ecuaciones diferenciales que satisface una curva γ contenida en $\mathbb{S}^1 \times I$:

Proposición 2.3.1. ([82, Prop. 1.1]) Sea $\gamma(s) = (\theta(s), t(s))$ una curva contenida en $S^1 \times I$, parametrizada por el arco. Sea h la curvatura geodésica de γ , calculada con respecto al vector normal N definido por (2.6), y $\sigma(s)$ el ángulo orientado definido anteriormente. Entonces se verifica el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \cos \sigma, \\ \frac{d\theta}{ds} &= \frac{\sin \sigma}{f(t)}, \\ \frac{d\sigma}{ds} &= h - \frac{f'(t)}{f(t)} \sin \sigma. \end{aligned}$$

Además, si h es constante, entonces para cualquier $c \in I$, la función

$$(2.8) \quad f(t) \sin \sigma - h \int_c^t f(\xi) d\xi$$

es constante sobre cualquier solución del sistema (2.7).

Nota 2.3.2. La función (2.8) se suele llamar *primera integral* de (2.7). Su obtención se puede consultar en un trabajo de N. Korevaar y otros [63]. Para cada curva solución de (2.7) con curvatura geodésica constante, denotaremos normalmente por E al valor constante tomado por (2.8). Veremos que será de gran importancia a la hora de caracterizar las curvas con curvatura geodésica constante de nuestras superficies.

DEMOSTRACIÓN. Las ecuaciones del sistema (2.7) surgen de los razonamientos anteriores. En cuanto a que la primera integral (2.8) sea constante sobre curvas con curvatura geodésica constante, se obtiene de forma inmediata, comprobando que la derivada con respecto a s de tal expresión se anula (a partir de las ecuaciones del sistema (2.7)). \square

Nota 2.3.3. Unas primeras propiedades relativas a las curvas solución del sistema (2.7) con curvatura geodésica constante se pueden encontrar en [82, Prop 1.2]. Así, para una tal curva γ , se tiene que γ es una curva simétrica con respecto a cualquier punto crítico de $t|_\gamma$. Es decir, si $(dt/ds)(s_0) = 0$, entonces la curva γ es simétrica con respecto a la geodésica vertical $\{\theta(s_0)\} \times I$.

Además, cualquier traslación horizontal (según la dirección marcada por el eje θ) de γ resulta ser también una solución del sistema (2.7), con la misma curvatura geodésica constante.

Nos ocupamos ahora de algunas de las curvas con curvatura geodésica constante que surgen a partir del sistema (2.7). Ya se ha comentado que dos de estas curvas son los círculos de revolución y las geodésicas verticales. Las segundas tienen curvatura nula, al ser geodésicas; en cuanto a los círculos de revolución, el siguiente resultado describe las principales propiedades de la curvatura $h(t)$.

Lema 2.3.4. La curvatura geodésica $h(t)$ de los círculos de revolución $S^1 \times \{t\}$, calculada respecto del vector normal $-\partial_t$, satisface las siguientes propiedades:

- i) $h(t)$ es una función antisimétrica en $[-t_0, t_0]$.
- ii) $h(t)$ es creciente en el intervalo donde $(f')^2 - ff'' \leq 0$, y decreciente donde $(f')^2 - ff'' \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Recuérdesse que $h(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$, y que $f(t) = f(-t)$, para $t \geq 0$.

i) Por la simetría de la función f , es claro que $h(-t) = -f'(t)/f(t) = -h(t)$, para todo $t \geq 0$, lo que nos da el carácter antisimétrico de $h(t)$.

ii) Es consecuencia de que la derivada de $h(t)$ sea igual a

$$h'(t) = -\frac{[(f')^2 - ff'']}{f(t)^2} = -(K + h^2)(t).$$

□

El siguiente resultado va a caracterizar las curvas con curvatura geodésica constante que presentan puntos críticos para la coordenada t . Nótese que esta propiedad no la poseen ni los círculos de revolución ni las geodésicas verticales.

Proposición 2.3.5. ([82, Prop. 1.3]) *Sea $\gamma = (\theta, t)$ una solución de (2.7) con curvatura geodésica constante, tal que $t(s_0)$ es un máximo estricto para $t|_\gamma$, y $\sin \sigma(s_0) = 1$. Supongamos además que $s_1 > s_0$ es otro punto crítico para $t|_\gamma$, y que no hay más puntos críticos en el intervalo (s_0, s_1) . Entonces*

- i) *Si $\sin \sigma(s_1) = 1$, entonces la curva γ es un grafo sobre el eje θ , periódico en θ . En tal caso, γ es cerrada y embebida si y sólo si la θ -distancia entre dos máximos (o mínimos) consecutivos de $t|_\gamma$ es igual a $2\pi/k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.*
- ii) *Si $\sin \sigma(s_1) = -1$, entonces hay puntos de la curva γ con vector tangente vertical (por lo que γ no será un grafo horizontal). En tal caso, γ es cerrada y embebida si y sólo si $\theta(s_0) = \theta(s_1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Previamente notemos que para un punto crítico s' de $t|_\gamma$, se tiene que

$$(dt/ds)(s') = \cos \sigma(s') = 0,$$

a partir de las ecuaciones del sistema (2.7), y entonces $\sin \sigma(s') = \pm 1$, y necesariamente

$$\sigma(s') \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Nosotros supondremos que s_0 es un máximo estricto de $t|_\gamma$, con $\sin \sigma(s_0) = 1$. Es decir, $\sigma(s_0) = \pi/2$. Para el siguiente punto crítico s_1 , los dos casos del enunciado de la Proposición representan las dos posibilidades para $\sin \sigma(s_1)$.

De las hipótesis deducimos que la función t es decreciente en (s_0, s_1) (t presenta un máximo estricto en $s = s_0$, por lo que será estrictamente decreciente para $s > s_0$ próximos; como no hay más puntos críticos en (s_0, s_1) , se concluye que t es estrictamente decreciente en dicho intervalo).

Sea ahora $c < t(s_1)$. Entonces, a partir de (2.8), es fácil ver que $f(t(s)) \sin \sigma(s)$ es una función estrictamente monótona o constante, para $s \in (s_0, s_1)$. En efecto, como

$$f(t(s)) \sin \sigma(s) = E + h \int_c^{t(s)} f(\xi) d\xi,$$

con $E \in \mathbb{R}$ constante, se sigue que si $h = 0$, $f(t(s)) \sin \sigma(s) = E$ constante. Y si $h \neq 0$, la función

$$s \longmapsto \int_c^{t(s)} f(\xi) d\xi$$

es estrictamente decreciente en s (al ser t estrictamente decreciente en s); En tal caso, $f(t(s)) \sin \sigma(s)$ será estrictamente monótona (decreciente si $h > 0$, creciente si $h < 0$) como función de s .

Supongamos ahora que $\sin \sigma(s_1) = 1$, con lo que $\sigma(s_1) = \pi/2$. Al ser $f(t(s)) \sin \sigma(s)$ estrictamente monótona o constante en (s_0, s_1) , y tomar valores positivos para $s = s_0$ y

$s = s_1$, se tiene que $f(t(s)) \sin \sigma(s) > 0$ para todo $s \in (s_0, s_1)$. Entonces, claramente

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin \sigma}{f(t)} > 0,$$

para $s \in (s_0, s_1)$. Esto ya implica que la curva γ es un grafo sobre el eje θ en dicho intervalo, ya que

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{dt/ds}{d\theta/ds}$$

existe para cualquier $s \in (s_0, s_1)$, con lo que t resulta ser grafo sobre θ . Por la Nota 2.3.3, este comportamiento se repetirá periódicamente a lo largo del eje θ , con lo que efectivamente, γ es un grafo *periódico* en θ .

Finalmente, como $\theta \in S^1$, podemos considerar que θ toma valores en el intervalo $[0, 2\pi]$ (o en algún "múltiplo" de este intervalo). Entonces, si γ es una curva cerrada y embebida, su θ -periodo será un divisor de la amplitud de dicho intervalo, o equivalentemente, coincidirá con $2\pi/k$, para $k \in \mathbb{N}$. El recíproco de esta afirmación también es inmediato.

Supongamos ahora que $\sin \sigma(s_1) = -1$, por lo que $\sigma(s_1) = 3\pi/2$. Entonces, como

$$\begin{aligned} f(t(s_0)) \sin \sigma(s_0) &> 0, \\ f(t(s_1)) \sin \sigma(s_1) &< 0, \end{aligned}$$

y tal función es estrictamente monótona en (s_0, s_1) (obsérvese que será decreciente, y en consecuencia, necesariamente $h > 0$ por lo comentado antes), existirá un único instante s' en dicho intervalo donde la función se anule. Equivalentemente, $\sin \sigma(s') = 0$. Eso implica que $(d\theta/ds)(s') = 0$ y $\cos \sigma(s') = \pm 1$, por lo que $\sigma(s') \in \{0, \pi\}$. Así, el vector tangente a la curva en $(\theta(s'), t(s'))$ será vertical:

$$\frac{d\gamma}{ds}(s') = \pm(0, 1) = \pm\partial_t.$$

Por tanto, la curva no puede ser escrita como grafo sobre θ . Mas concretamente, el hecho de que $\sigma(s_0) = \pi/2$, $\sigma(s_1) = 3\pi/2$ y $s_0 < s_1$, fuerza a que los valores tomados por $\sigma(s)$ en (s_0, s_1) tengan valores negativos para el coseno, por lo que $\sigma(s') = \pi$, y entonces

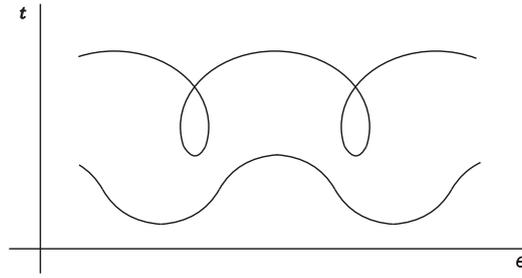
$$\frac{d\gamma}{ds}(s') = -\partial_t.$$

Finalmente, por la Nota 2.3.3, la curva γ será simétrica respecto a las geodésicas verticales $\{\theta(s_0)\} \times I$ y $\{\theta(s_1)\} \times I$ (ya que $s = s_0$ y $s = s_1$ son puntos críticos para t). Si $\theta(s_0) = \theta(s_1)$, dicha simetría implica que γ es curva cerrada y embebida. Si $\theta(s_0) \neq \theta(s_1)$, las simetrías correspondientes nos dan autointersecciones en γ , que entonces no será embebida. \square

La principal consecuencia de la Proposición 2.3.5 anterior es que caracteriza las curvas de curvatura geodésica constante que presentan algún máximo estricto para la coordenada t . Este hecho nos permite distinguir las dos posibilidades que se pueden presentar. Así, llamaremos *onduloides* a las curvas descritas en la Proposición 2.3.5 que son grafos sobre el eje θ , y *nodoides* a las que presentan puntos con vector tangente vertical. Nótese que estas curvas no son cerradas y embebidas en general, y que en cada caso, la Proposición anterior nos proporciona un criterio para discutir tal característica.

Cualquier onduloide γ es siempre un grafo periódico sobre θ ; de hecho, en la demostración de la Proposición 2.3.5 se ha visto que $\sin \sigma > 0$ en todo instante. Así, cuando γ sea cerrado y embebido, podremos expresarlo como

$$\gamma(\theta) = (\theta, t(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

FIGURA 2.1. Nodoide y onduloide en $\mathbb{S}^1 \times I$

Esto permite calcular su longitud de la manera habitual para un grafo, obteniendo que

$$(2.9) \quad L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{f(t(\theta))^2 + (dt/d\theta)^2} d\theta.$$

Por otro lado, en lo que sigue, llamaremos *periodo* de un onduloide γ a la θ -distancia entre dos máximos (o mínimos) consecutivos para la coordenada $t|_\gamma$.

Nota 2.3.6. La expresión (2.9) es cierta en general, para cualquier curva de la superficie que sea un grafo sobre θ .

A partir de la primera integral (2.8), es posible encontrar una expresión para la curvatura geodésica de los onduloides.

Lema 2.3.7. Sea γ un onduloide contenido en $\mathbb{S}^1 \times I$, y sea h su curvatura geodésica respecto del vector normal definido en (2.6). Entonces,

$$(2.10) \quad h = \frac{f(t(s_2)) - f(t(s_1))}{\int_{t(s_1)}^{t(s_2)} f(\xi) d\xi},$$

donde s_1, s_2 son dos instantes en los que γ alcanza sus puntos mínimo y máximo, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Sea $E(s)$ la primera integral (2.8) asociada a γ , para $c = t(s_1)$. Sabemos que $E(s)$ es constante, para todo s . Por consiguiente, $E(s_1) = E(s_2)$. Como

$$E(s_1) = f(t(s_1)), \quad E(s_2) = f(t(s_2)) - h \int_{t(s_1)}^{t(s_2)} f(\xi) d\xi,$$

se obtiene (2.10) de forma inmediata. \square

Nota 2.3.8. Veremos que las condiciones de monotonía que imponamos sobre la curvatura de Gauss K , determinarán el comportamiento monótono de f . Teniendo en cuenta este hecho, a partir de la expresión (2.10), podremos determinar el signo de la curvatura geodésica de los onduloides en ciertas situaciones.

En cuanto a un nodoide, en la demostración de la Proposición 2.3.5 se ha visto que su curvatura geodésica es positiva. Además, es claro que, en caso de que sea cerrado y embebido, bordeará un disco en nuestra superficie.

Los siguientes resultados referentes a nodoides cerrados y embebidos, aparecen en [82] en el contexto de superficies $\mathbb{S}^1 \times I$ con métrica (2.1) determinada por funciones de clase C^2 . Sin embargo, son ciertos también para funciones de clase C^1 , y C^2 a trozos, como vamos a comprobar. La razón es que el resultado analítico en el que se basan, debido a Osserman [79, Lemma 7], se verifica bajo esas hipótesis más débiles. Por ello, a la vista de

(2.2), nuestro estudio va a incluir a superficies con curvatura de Gauss continua a trozos, y algunos resultados de [82] se van a poder extender en tal situación.

Lema 2.3.9. ([82, Lemma 2.3]) *Sea C un nodoide cerrado y embebido de $S^1 \times I$. Entonces, C no puede estar contenido en una región donde la curvatura de Gauss sea monótona no constante.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.3.5, C presentará puntos con tangente vertical, donde el ángulo σ es igual a 0, y por tanto $\cos \sigma$ es igual a 1. Con una adecuada rotación, podemos suponer que uno de esos puntos se halla sobre $\theta = 0$, y que la curva está contenida en $\{\theta \geq 0\}$. Además, parametrizaremos C para que $\sin \sigma$ tome el valor 1 en los puntos donde $t|_C$ alcanza su máximo.

Sean ahora $\theta_0, \theta_1 > 0$ las proyecciones sobre el eje θ de los puntos de C con ángulo $\sigma = -\pi/2$ y $\sigma = \pi/2$, respectivamente. Dichos puntos corresponden con los valores mínimo y máximo de $t|_C$. Por la Proposición 2.3.5 sabemos que $\theta_0 = \theta_1$, al ser C un nodoide cerrado y embebido.

Nos centramos ahora en dos trozos del nodoide que son grafos sobre θ . Los puntos de C que tienen ángulo σ en el intervalo $[-\pi/2, 0)$, se corresponden con la parte C_0 de la curva C que va desde el mínimo $t(\theta_0)$ hasta el punto con tangente vertical para $\theta = 0$. Es claro que C_0 es un grafo sobre $[0, \theta_0]$. Análogamente, los puntos de C con ángulo σ en $(0, \pi/2]$ se corresponden con la parte $C_1 \subset C$ que va desde el punto con tangente vertical en $\theta = 0$ hasta el máximo $t(\theta_1)$. Como antes, C_1 resulta ser un grafo sobre $[0, \theta_1]$. Restringamos la función $\cos \sigma$ a cada grafo C_1 y C_2 , donde se puede ver como función de θ . Obsérvese además que para $\theta = 0$,

$$\cos \sigma(0) = 1, \quad \frac{d \cos \sigma}{d\theta}(0) = -hf,$$

a partir del sistema (2.7).

No es difícil comprobar [82, Lemma 1.4] que $u_0(\theta) = \cos \sigma(\theta)$ es solución de

$$(2.11) \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + [(f')^2 - ff''] u = 0,$$

en el intervalo $[0, \theta_0]$. Además u_0 es positiva en $[0, \theta_0)$, ya que $\sigma(\theta) \in (-\pi/2, 0]$, y se anula por primera vez para $\theta = \theta_0$.

Igualmente, $u_1(\theta) = \cos \sigma(\theta)$ es solución de (2.11) en el intervalo $[0, \theta_1]$, y también es positiva en $[0, \theta_1)$, anulándose únicamente en $\theta = \theta_1$.

Supongamos ahora que C está contenida en una región con curvatura de Gauss K creciente. Entonces $(f')^2 - ff''$ tendrá el mismo comportamiento monótono, según la Nota 2.2.2, por lo que será mayor sobre los puntos de C_1 que sobre los de C_0 (C_1 se encuentra por encima de C_0). Aplicando [82, Lemma 1.5], se concluye que $\theta_0 > \theta_1$. En el caso de que C esté contenida en una región con K decreciente, se llega de forma similar a que $\theta_0 < \theta_1$. Ambas situaciones contradicen el hecho de que C sea cerrado y embebido, lo que concluye la demostración. \square

Nota 2.3.10. A partir del Lema 2.3.9, se sigue que dado un nodoide cerrado y embebido, o bien está contenido en una región donde la curvatura de Gauss K es constante, o intersecará *simultáneamente* a una región de la superficie donde K es estrictamente creciente, y a otra donde K es estrictamente decreciente.

Lema 2.3.11. ([82, Lemma 3.4]) *Sea $M = S^1 \times I$ una superficie con métrica (2.1), simétrica y con curvatura de Gauss K monótona con respecto a la distancia al ecuador $S^1 \times \{0\}$. Sea $C \subset M$ un nodoide cerrado y embebido, no contenido en una región con curvatura de Gauss constante.*

Entonces, C corta a $S^1 \times \{0\}$ de forma simétrica y ortogonal.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $T, S \in I$ a los valores máximo y mínimo alcanzados por $t|_C$. Por el Lema 2.3.9, C ha de cortar al ecuador $S^1 \times \{0\}$, por lo que $S < 0 < T$. Parametricemos el nodoide C como una solución $(\theta(s), t(s))$ de (2.7) con condiciones iniciales $t(0) = T, \sigma(0) = \pi/2$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $h > 0$ (equivale a recorrer el nodoide con adecuada orientación, para que el normal apunte hacia el interior). Sea E el valor constante tomado por la primera integral (2.8) asociada a C , para $c \in I, c < \min\{S, -T\}$. Entonces, necesariamente que $E < 0$ (si $E \geq 0$, a partir de (2.8) se tendrá que

$$\sin \sigma(s) = \frac{E + h \int_c^{t(s)} f(\xi) d\xi}{f(t(s))} > 0,$$

en todo instante s , con lo que el nodoide resultaría ser un grafo sobre θ , lo que es contradictorio). Por otra parte,

$$E = E(0) = f(T) - h \int_c^T f(\xi) d\xi,$$

mientras que si evaluamos en el instante en el que $t|_C$ alcanza su mínimo, se tiene que

$$(2.12) \quad E = -f(S) - h \int_c^S f(\xi) d\xi.$$

Sea ahora s' tal que $t(s') = 0$ (existirá un tal instante porque C corta al ecuador). Entonces

$$E = E(s') = f(t(s')) \sin \sigma(s') - h \int_c^{t(s')} f(\xi) d\xi.$$

Si $E = -h \int_c^{t(s')} f(\xi) d\xi$, entonces $f(t(s')) \sin \sigma(s') = 0$, de donde $\sin \sigma(s') = 0$, y por tanto $\sigma(s') \in \{0, \pi\}$. Entonces, el corte con el ecuador sería ortogonal y además, C resultaría simétrico al ser cerrado y embebido, lo que concluiría la demostración. Supongamos entonces que $E \neq -h \int_c^{t(s')} f(\xi) d\xi$, y razonemos hasta llegar a contradicción.

Consideremos la reflexión \tilde{C} del nodoide C con respecto al ecuador, y parametricemos \tilde{C} como solución $(\tilde{\theta}, \tilde{t})$ del sistema (2.7), con condiciones iniciales $\tilde{t}(0) = -S, \tilde{\sigma}(0) = \pi/2$, y sea \tilde{E} el valor constante de la primera integral (2.8) asociada, que será igual a

$$\tilde{E} = f(-S) - h \int_c^{-S} f(\xi) d\xi.$$

Téngase en cuenta que $-c > 0$. Como

$$2h \int_c^0 f(\xi) d\xi = h \int_c^{-c} f(\xi) d\xi,$$

y

$$\int_c^S f(\xi) d\xi = \int_{-S}^{-c} f(\xi) d\xi,$$

por la simetría de f , es fácil comprobar que

$$(2.13) \quad E + h \int_c^0 f(\xi) d\xi + \tilde{E} + h \int_c^0 f(\xi) d\xi = 0.$$

Así, podemos suponer que

$$(2.14) \quad E + h \int_c^0 f(\xi) d\xi > 0$$

(en caso contrario, basta reemplazar C por su reflexión \tilde{C}). En consecuencia, para los puntos de C con $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} 0 < E + h \int_c^0 f(\xi) d\xi &= f(t(s)) \sin \sigma(s) - h \int_c^{t(s)} f(\xi) d\xi + h \int_c^0 f(\xi) d\xi \\ &= f(t(s)) \sin \sigma(s) - h \int_0^{t(s)} f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

por lo que $\sin \sigma(s) > 0$. De ahí deducimos que $C \cap \{t > 0\}$ es un grafo sobre θ .

Probemos ahora el siguiente resultado técnico: para cualquier $t' \in I$ tal que el valor $-t'$ es tomado por $t|_C$, se tiene que

$$-f(t') - h \int_c^{t'} f(\xi) d\xi < E.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} -f(t') - h \int_c^{t'} f(\xi) d\xi &= -f(t') - h \int_c^{t'} f(\xi) d\xi + \left(h \int_c^{-t'} f(\xi) d\xi - h \int_c^{-t'} f(\xi) d\xi \right) \\ &= -f(-t') + h \int_c^{-t'} f(\xi) d\xi - h \int_c^{-c} f(\xi) d\xi \\ &= -f(-t') + h \int_c^{-t'} f(\xi) d\xi - 2h \int_c^0 f(\xi) d\xi \\ &\leq -f(-t') \sin \sigma_0 + h \int_c^{-t'} f(\xi) d\xi - 2h \int_c^0 f(\xi) d\xi \\ &< -E + 2E = E, \end{aligned}$$

donde en la segunda y tercera igualdad hemos usado que

$$\int_c^{-t'} f(\xi) d\xi = \int_{t'}^{-c} f(\xi) d\xi, \quad \int_c^{-c} f(\xi) d\xi = 2 \int_c^0 f(\xi) d\xi,$$

por la simetría de f , en la cuarta línea σ_0 es el valor del ángulo σ correspondiente al punto de C a altura $-t'$, y en la última línea utilizamos el valor de E en función de $-t'$ y la desigualdad (2.14).

Nota . Nótese que las hipótesis sobre t' se hacen para poder calcular E correctamente; si $t|_C$ no tomase el valor $-t'$, entonces no tendría sentido $E(-t')$.

En el caso de que el valor $-S \in I$ fuera tomado por $t|_C$, entonces aplicando la anterior desigualdad a $t' = S$ se tiene que

$$-f(S) - h \int_c^S f(\xi) d\xi < E,$$

lo que contradice (2.12). Por tanto, $t|_C$ no tomará dicho valor, y en consecuencia, $S < -T$.

Veamos ahora que C queda por debajo de \tilde{C} , para $t > 0$. Cada vez que ambas curvas se cruzan, se tiene que $t = \tilde{t}$. Como

$$\begin{aligned} E &= f(t) \sin \sigma - h \int_c^t f(\xi) d\xi \\ \tilde{E} &= f(\tilde{t}) \sin \tilde{\sigma} - h \int_c^{\tilde{t}} f(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

concluimos que, en dichos puntos,

$$E - \tilde{E} = f(t) (\sin \sigma - \sin \tilde{\sigma}).$$

El signo de la constante $E - \tilde{E}$ se puede determinar a partir de la igualdad anterior, evaluando en $t = \tilde{t} = t(s')$ (a partir de la definición de s' , ambas curvas C y \tilde{C} se cruzarán en dicho instante).

Como $t(s') \geq 0$, por lo que se ha visto antes se tiene que $\sin \sigma(s') > 0$, con lo que $\sin \tilde{\sigma}(s') < 0$, al ser \tilde{C} la reflexión de C con respecto al ecuador. Consecuentemente, $E - \tilde{E} > 0$, y por tanto

$$\sin \sigma > \sin \tilde{\sigma},$$

cada vez que las curvas se crucen. Además, como $\sin \tilde{\sigma}(s') < 0 < \sin \sigma(s')$, se sigue que $\sigma(s') \in (0, \pi)$ y $\tilde{\sigma}(s') \in (\pi, 2\pi)$, y entonces $\tilde{t} > t$ al inicio, o equivalentemente, \tilde{C} está al principio por encima de C , en $t \geq 0$.

Supongamos que hay un primer instante θ_0 en el que las curvas se cruzan. En tal instante, la curva C , que se hallaba por debajo de \tilde{C} , tendrá más pendiente. Como ambas curvas serán grafos sobre θ en un intervalo centrado en θ_0 (C es grafo para $t > 0$, y por tanto, \tilde{C} no puede ser vertical en el punto de intersección, por ser nodoide cerrado y embebido), podemos comparar las pendientes:

$$\frac{dt}{d\theta}(\theta_0) \geq \frac{d\tilde{t}}{d\theta}(\theta_0),$$

lo que implica que $\cot \sigma(\theta_0) \geq \cot \tilde{\sigma}(\theta_0)$, a partir de (2.7).

Por otro lado, como $\sin \sigma(\theta_0) > \sin \tilde{\sigma}(\theta_0)$ (al ser θ_0 un instante de corte), y además $\sin \tilde{\sigma}(\theta_0) > 0$ (si fuera negativo, el nodoide cerrado y embebido \tilde{C} no podría ser la reflexión de C), se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \sigma(\theta_0)} &< \frac{1}{\sin \tilde{\sigma}(\theta_0)}, \\ \cos \sigma(\theta_0) &< \cos \tilde{\sigma}(\theta_0), \end{aligned}$$

lo que nos da que $\cot \sigma < \cot \tilde{\sigma}$, llegando a contradicción. Por tanto, las curvas no pueden cruzarse nunca, y así \tilde{C} quedará por encima de C en $t > 0$. Este hecho se usará ahora de forma indirecta.

Sean ahora $(\theta_0, t_1), (\theta_0, t_2)$ dos puntos de C , con $t_1, t_2 \in I, t_1 < t_2$. Supongamos que la curvatura de Gauss K es decreciente desde el ecuador (en caso de que sea creciente, se obtendrán las desigualdades contrarias y se llegará a la misma conclusión). Entonces, también lo será la función $(f')^2 - ff''$.

Si $t_2 < 0$, entonces $t_1 < t_2 < 0$, con lo que $[(f')^2 - ff''](t_1) \leq [(f')^2 - ff''](t_2)$.

Si $t_2 > 0$, podemos considerar \tilde{C} , que estará por encima de C , y entonces $-t_1 > t_2$, con lo que $t_1 < -t_2 < 0$, teniéndose finalmente que

$$[(f')^2 - ff''](t_1) \leq [(f')^2 - ff''](-t_2) = [(f')^2 - ff''](t_2),$$

por la simetría de f .

Por tanto, de una u otra forma, se puede afirmar que si $t_1 < t_2$, entonces

$$[(f')^2 - ff''](t_1) \leq [(f')^2 - ff''](t_2).$$

Además, existirá un par de puntos verificando tal desigualdad de forma estricta, ya que la curva C no está contenida en una región con K constante, y por tanto $(f')^2 - ff''$ tendrá el mismo crecimiento *estricto* que K .

En esta situación ya podemos aplicar el mismo argumento usado en la demostración del Lema 2.3.9, para concluir que el nodoide C no será cerrado, luego tampoco embebido,

lo que es contradictorio. Por tanto, necesariamente

$$E = -h \int_c^0 f(\xi) d\xi,$$

y entonces el corte con el ecuador es ortogonal y el nodoide resulta simétrico. \square

Nota 2.3.12. Es claro que si un nodoide C contenido en una superficie $S^1 \times I$ simétrica, interseca al ecuador ortogonalmente de forma simétrica, entonces C será necesariamente cerrado y embebido, debido a su forma general (véase la Figura 2.1). Por tanto, el recíproco del Lema 2.3.11 también se cumple.

2.4. Curvas estables en $S^1 \times I$. Operador de Jacobi y valores propios asociados

En esta Sección recordaremos el concepto de estabilidad de una curva, e introduciremos el operador de Jacobi. El estudio de dicho operador, y especialmente del problema de valores propios asociado, nos proporcionará criterios de estabilidad para las curvas con curvatura geodésica constante de nuestras superficies.

Sea $C \subset M$ una curva, no necesariamente conexa, encerrando un determinado valor del área. Consideremos una *variación* $\{\varphi_t\}_{|t|<\varepsilon}$ de C , esto es,

$$\varphi_t : C \rightarrow M, \quad \text{para todo } t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

difeomorfismo de C en $\varphi_t(C)$, con $\varphi_0(C) = C$. Llamemos $C_t = \varphi_t(C)$.

Denotemos por $A(t)$ al área encerrada por la curva C_t , y por $\mathcal{L}(t)$ al perímetro de C_t . Con esta notación, diremos que la variación preserva el área si $A(t) = A(0)$, para todo instante $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. En este contexto variacional, estamos en disposición de definir las nociones de curva estacionaria y curva estable.

Definición 4. Sea C una curva contenida en M , no necesariamente conexa, con perímetro finito, y encerrando un determinado valor del área.

Diremos que C es una curva *estacionaria* si $\mathcal{L}'(0) = 0$ para cualquier variación de C que preserve el área.

Diremos que C es una curva *estable* si es estacionaria y $\mathcal{L}''(0) \geq 0$, para cualquier variación de C que preserve el área.

Las curvas estables constituyen los puntos críticos del funcional perímetro, al considerar variaciones preservando el área, mientras que las curvas estables son los mínimos locales de dicho funcional [4]. Evidentemente, las regiones isoperimétricas estarán bordeadas por curvas estables.

Las expresiones de las derivadas de los funcionales área y perímetro asociados a una variación $\{\varphi_t\}_{|t|<\varepsilon}$ de una curva C , conocidas en la literatura como fórmulas de variación, pueden ser calculadas explícitamente [89]. Dichas fórmulas van a suponer una importante herramienta analítica para nuestros intereses. Denotemos por X al campo vectorial infinitesimal asociado a dicha variación (campo velocidad inicial), definido por

$$X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t,$$

que es diferenciable sobre la curva C . Consideraremos también la componente normal interior $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ de dicho campo, definida por $u = \langle X, N \rangle$, donde N es el vector normal a la curva C apuntando hacia el interior. Con esta notación se tiene el siguiente resultado,

Lema 2.4.1. ([89, § 9]) Sea C una curva contenida en M , y sea $\{\varphi_t\}_{|t|<\varepsilon}$ una variación de C . Entonces, las derivadas de los funcionales $A(t)$ y $\mathcal{L}(t)$ en $t = 0$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} A'(0) &= - \int_C u(s) ds, \\ \mathcal{L}'(0) &= - \int_C h(s) u(s) ds, \end{aligned}$$

donde h es la curvatura geodésica de C con respecto al normal que apunta hacia el interior.

Las primeras consecuencias que se extraen del Lema 2.4.1 son bien conocidas: las curvas estacionarias (y por tanto, también las estables) han de tener curvatura geodésica constante [7], y una variación de C preservará el área si y sólo si

$$\int_C u(s) ds = 0.$$

En cuanto a la segunda derivada del perímetro, para variaciones preservando el perímetro, se tiene lo siguiente:

Lema 2.4.2. Dada una curva estacionaria C contenida en M y una variación $\{\varphi_t\}_{|t|<\varepsilon}$ preservando el área hasta segundo orden, la segunda derivada del perímetro $\mathcal{L}(t)$ en $t = 0$ viene dada por

$$(2.15) \quad \mathcal{L}''(0) = - \int_C u \left\{ \frac{d^2 u}{ds^2} + (K + h^2) u \right\} ds,$$

Nota 2.4.3. Sea C una curva estacionaria y consideremos una función $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. A partir de [4, Lemma 2.4], es posible construir una variación de C , de forma que u sea la componente normal asociada a dicha variación. Además, si la función u tiene media nula, entonces la variación inducida preservará el área.

La Nota 2.4.3 anterior nos conduce a la siguiente interpretación analítica de la estabilidad. A partir de este instante, dada una curva $C \subset M$ y una función diferenciable $u : C \rightarrow \mathbb{R}$, denotaremos por $I(u)$ a la expresión de la segunda derivada del funcional perímetro asociado a la variación que induce u sobre la curva C . Entonces, a partir de (2.15) se tiene que

$$(2.16) \quad I(u) = - \int_C u \left\{ \frac{d^2 u}{ds^2} + (K + h^2) u \right\} ds.$$

Así, la estabilidad de una curva estacionaria C será equivalente a que

$$(2.17) \quad I(u) \geq 0, \text{ para cualquier función } u : C \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \int_C u ds = 0.$$

La expresión (2.16) define una forma bilineal cuadrática en el espacio de funciones diferenciables en C , que llamaremos *forma índice* asociada a C :

$$(2.18) \quad Q(u, v) = - \int_C u \left\{ \frac{d^2 v}{ds^2} + (K + h^2) v \right\} ds,$$

con $u, v : C \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables.

Además, el operador autoadjunto asociado

$$(2.19) \quad J(u) = \frac{d^2 u}{ds^2} + (K + h^2) u$$

será el *operador de Jacobi* asociado a C .

Fijada una curva $C \subset M$, una función $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga $J(u) = 0$ será denominada como *función de Jacobi* para C .

Por ejemplo, es fácil comprobar que la componente normal del campo vectorial de Killing ∂_θ (campo de rotaciones en nuestra superficie), respecto del vector normal definido por (2.6), vendrá dada por

$$u = \langle N, \partial_\theta \rangle = f(t) \cos \sigma,$$

teniendo en cuenta la métrica (2.1). Pues u es siempre una función de Jacobi para cualquier solución de (2.7). En efecto, es trivial ver que

$$\frac{du}{ds} = f'(t) - h f(t) \sin \sigma, \quad \frac{d^2u}{ds^2} = (f''(t) - h^2 f(t)) \cos \sigma,$$

a partir de (2.7), con lo que, usando (2.2), se llega a que

$$J(u) = (f''(t) - h^2 f(t)) \cos \sigma + (K + h^2) f(t) \cos \sigma = (f''(t) + K f(t)) \cos \sigma = 0.$$

Además, las variaciones de una curva que preserven la curvatura geodésica a lo largo de toda la deformación también proporcionarán funciones de Jacobi. En general, una variación deforma la curva en cada instante, por lo que también cambia la curvatura geodésica. La variación de la curvatura en el instante inicial viene dada por (véase [6, Th. 2.7])

$$(2.20) \quad \left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=0} = u'' + (K + h^2) u = J(u),$$

donde u es la componente normal de la variación. Así, si consideramos una variación que *mantenga* constante la curvatura de la curva en todo instante, tendremos que (2.20) se anula y, por tanto, u será una función de Jacobi.

Para estudiar la estabilidad, nos va a resultar de gran utilidad considerar el problema de valores propios del operador de Jacobi (2.19) asociado a una curva cerrada C :

$$(2.21) \quad J(u) + \lambda u = 0,$$

donde $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no nula de clase C^2 .

Llamaremos *valores propios* a los números reales λ para los que existen funciones verificando (2.21). Nos referiremos a dichas funciones como *funciones propias* asociadas a los valores propios. Algunas propiedades bien conocidas de este problema se resumen en el siguiente lema.

Lema 2.4.4. ([33, Chapter 8, Theorem 2.1],[30]) *Dada una curva cerrada $C \subset M$, los valores propios asociados al operador de Jacobi forman una sucesión creciente $\{\lambda_i\}_{i \geq 1}$. Además, el espacio vectorial V_{λ_i} de funciones propias asociadas a λ_i , para un problema de valores propios con condiciones en la frontera, es unidimensional, y cada $\phi_i \in V_{\lambda_i}$ tiene exactamente $i - 1$ ceros.*

Nota 2.4.5. Nótese que si u es una función de Jacobi definida en una curva C , entonces u es una función propia para el operador de Jacobi, con cero como valor propio asociado.

Los siguientes resultados nos van a proporcionar información sobre los primeros valores propios del operador de Jacobi (2.19) asociado a algunas curvas de curvatura geodésica constante de nuestra superficie: círculos de revolución, nodoides, onduloides y geodésicas verticales.

Lema 2.4.6. *Sea $S^1 \times \{t\}$ un círculo de revolución contenido en M . Entonces, el primer valor propio $\lambda_1(t)$ asociado al operador de Jacobi viene dado por*

$$\lambda_1(t) = -\frac{[(f')^2 - f f''](t)}{f(t)^2} = -(K + h^2)(t).$$

DEMOSTRACIÓN. Considérese cualquier función constante $v : \mathbb{S}^1 \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}$ no nula. Es claro entonces que

$$J(v) = (K + h^2)(t) v = \frac{[(f')^2 - ff''](t)}{f(t)^2} v,$$

de donde se tiene que

$$\lambda = -\frac{[(f')^2 - ff''](t)}{f(t)^2}$$

es valor propio asociado a (2.19), con función propia v . Como dicha función no se anula nunca, necesariamente será la *primera* función propia (véase el Lema 2.4.4), y por tanto,

$$\lambda = \lambda_1(t) = -\frac{[(f')^2 - ff''](t)}{f(t)^2},$$

como habíamos anunciado. \square

El siguiente lema muestra que el primer valor propio del operador de Jacobi asociado a cualquier geodésica es nulo.

Lema 2.4.7. *Sea C una geodésica contenida en M . Entonces, el primer valor propio del operador de Jacobi asociado a C es cero.*

DEMOSTRACIÓN. Como C es una geodésica, se tiene que su curvatura geodésica h es nula. Tomando $u = f|_C : C \rightarrow \mathbb{R}$, a partir de (2.2) se sigue que

$$J(u) = f'' + (K + h^2) f = f'' + K f = 0,$$

con lo que $u = f|_C$ resulta ser una función propia *positiva* con valor propio asociado cero. Como u no se anula, concluimos que ha de ser la *primera* función propia, y así, $\lambda_1(C) = 0$. \square

Antes de enunciar algunos resultados referentes a los valores propios de onduloideos y nodoides, realizamos previamente la siguiente definición. Dada una curva C y una función de Jacobi u para C , nos referiremos por *región nodal* de C (determinada por u) a cualquier componente conexa del complementario en C del conjunto $\{x \in C : u(x) = 0\}$. El Teorema del Dominio Nodal de Courant [30, Ch. I, p. 19] nos va a proporcionar una importante herramienta que relaciona los valores propios del operador de Jacobi asociado a una curva, con las regiones nodales de dicha curva.

Teorema 2.4.8. *(Teorema del Dominio Nodal de Courant) Sea C una curva contenida en M , y sea $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Jacobi que determina k regiones nodales. Entonces u es función propia del subespacio V_{λ_i} , con cero como valor propio asociado, satisfaciendo que $i \geq k$.*

Como consecuencias inmediatas de dicho teorema, se obtienen los siguientes resultados.

Lema 2.4.9. *Sea C un onduloide cerrado y embebido contenido en M . Entonces el primer valor propio del operador de Jacobi asociado a C es negativo, y el segundo valor propio es positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el campo de rotaciones asociado a M , y sea u la componente normal asociada. Entonces, $u|_C$ es una función de Jacobi para el onduloide C , y por tanto, una función propia asociada a (2.21), con valor propio cero.

Como C es cerrado y embebido, su periodo será igual a $2\pi/k$ ($k \in \mathbb{N}$), por la Proposición 2.3.5. Entonces C presentará k puntos donde se alcanza el máximo para $t|_C$, y otros k

puntos donde se alcanza el mínimo. Es claro que $u|_C$ se anula justamente en los extremos relativos de $t|_C$, y de esta forma, $u|_C$ determinará, al menos, dos regiones nodales en C .

Por el Teorema del Dominio Nodal de Courant concluimos que el segundo valor propio de C es menor o igual que cero, y en consecuencia, el primer valor propio será necesariamente negativo. \square

Corolario 2.4.10. *Sea C un onduloide cerrado, embebido y estable contenido en M . Entonces el primer valor propio del operador de Jacobi asociado a C es negativo, y el segundo valor propio es nulo.*

DEMOSTRACIÓN. Dada cualquier curva conexa estable, el segundo valor propio para el correspondiente operador de Jacobi es siempre mayor o igual que cero. Esto se debe a que, en caso contrario, a partir de dos funciones propias asociadas al primer y segundo valor propio, es posible obtener una función v de media nula tal que $I(v) < 0$ (los detalles se pueden consultar en la demostración del Lema 2.4.12 posterior), lo que contradiría la estabilidad de la curva (véase (2.17)). Así, a partir del Lema 2.4.9, se concluye que el segundo valor propio de C ha de ser igual a cero. \square

Nota 2.4.11. El enunciado del Lema 2.4.9 se da también para nodoides cerrados y embebidos, aplicando el mismo razonamiento. Por tanto, dichas curvas también presentan primer valor propio negativo.

Enunciamos ahora algunos resultados que usaremos a lo largo de este trabajo, relacionando la estabilidad de una curva con los conceptos de región nodal y valor propio anteriormente definidos.

Lema 2.4.12. *Sea C una curva conexa y estable, y sea $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Jacobi. Entonces u determina, a lo sumo, dos regiones nodales en C .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que u da lugar a tres o más regiones nodales en C . Como $J(u) = 0$, se sigue que u es una función propia para el operador de Jacobi, con cero como valor propio asociado. Entonces, denotando por $\{\lambda_i\}_i$ al conjunto de valores propios, y por λ_u al valor propio asociado a u , el Teorema del Dominio Nodal de Courant implica que

$$0 = \lambda_u \geq \lambda_3.$$

De ahí se deduce que $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Sean ϕ_1, ϕ_2 las correspondientes funciones propias definidas sobre C .

Consideremos $v : C \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $v = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$, con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Como

$$\int_C v = \alpha_1 \int_C \phi_1 + \alpha_2 \int_C \phi_2,$$

es posible hallar valores reales *no nulos* para α_1, α_2 , de forma que

$$\int_C v = 0.$$

Concretamente, basta tomar $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ no nulo y

$$\alpha_1 = -\frac{\int_C \phi_2}{\int_C \phi_1} \alpha_2,$$

recordando que el denominador no se anula al ser ϕ_1 una función propia de *signo constante*.

Así, la variación asociada a v preservará el área encerrada por C . Además,

$$\begin{aligned} I(v) &= - \int_C v J(v) = -\alpha_1^2 \int_C \phi_1 J(\phi_1) - \alpha_2^2 \int_C \phi_2 J(\phi_2) \\ &= \alpha_1^2 \lambda_1 \int_C \phi_1^2 + \alpha_2^2 \lambda_2 \int_C \phi_2^2 < 0, \end{aligned}$$

lo que contradice (2.17) y, por tanto, que C sea estable. Por tanto, se cumple lo enunciado. \square

Corolario 2.4.13. *Si una curva conexa posee una función de Jacobi con tres o más regiones nodales, entonces la curva no es estable.*

Lema 2.4.14. *Sean C_1, C_2 dos curvas cerradas, embebidas y conexas contenidas en M , con la misma curvatura geodésica constante (con respecto a los vectores normales interiores). Supongamos que $\lambda_1(C_1) \leq 0$ y $\lambda_1(C_2) < 0$. Entonces, $C_1 \cup C_2$ es inestable.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, tomemos $\phi_i : C_i \rightarrow \mathbb{R}$ una función propia asociada al primer valor propio $\lambda_1(C_i)$. Entonces $J(\phi_i) + \lambda_1(C_i) \phi_i = 0$. Además, como ϕ_i es función propia asociada al primer valor propio $\lambda_1(C_i)$, tendrá signo constante y por tanto

$$\int_{C_i} \phi_i \neq 0.$$

Es posible hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha \int_{C_1} \phi_1 + \int_{C_2} \phi_2 = 0.$$

En realidad, basta tomar

$$\alpha = \frac{- \int_{C_2} \phi_2}{\int_{C_1} \phi_1}.$$

Así, la función $u : C_1 \cup C_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u = \begin{cases} \alpha \phi_1, & \text{in } C_1, \\ \phi_2, & \text{in } C_2 \end{cases}$$

tiene trivialmente media nula. Por tanto, la variación de $C_1 \cup C_2$ asociada preservará el área encerrada. Como

$$\begin{aligned} I(u) &= - \int_{C_1} \alpha^2 \phi_1 J(\phi_1) - \int_{C_2} \phi_2 J(\phi_2) \\ &= \alpha^2 \lambda_1(C_1) \int_{C_1} \phi_1^2 + \lambda_1(C_2) \int_{C_2} \phi_2^2 < 0, \end{aligned}$$

se sigue que $C_1 \cup C_2$ es inestable, en virtud de (2.17). \square

Nota 2.4.15. Es fácil probar que el anterior Lema 2.4.14 es cierto no sólo en superficies tipo $S^1 \times I$, sino en cualquier superficie riemanniana.

Concluimos esta Sección mostrando algunos resultados que tratan la estabilidad de las distintas curvas de nuestra superficie con curvatura geodésica constante. Empezamos indicando la condición para que un círculo de revolución contenido en $S^1 \times I$ sea estable.

Lema 2.4.16. ([82, Lemma 1.6]) *Un círculo de revolución $S^1 \times \{t\}$ es estable si y sólo si*

$$(2.22) \quad (K + h^2)(t) \leq \frac{4\pi^2}{L^2(t)}, \quad \text{o equivalentemente} \quad [(f')^2 - ff''](t) \leq 1.$$

DEMOSTRACIÓN. A partir de (2.2) y (2.4), es trivial comprobar que, sobre el círculo $S^1 \times \{t\}$, la función $K + h^2$ es constante e igual a

$$\frac{[(f')^2 - ff''](t)}{f(t)^2}.$$

Eso hace que la estabilidad de tal curva sea equivalente a que el primer valor propio no nulo $\lambda^L(t)$ del laplaciano en $S^1 \times \{t\}$ sea mayor o igual que dicha constante [5, Prop. 2.13]. Nótese que $S^1 \times \{t\}$ es isométrico a un círculo de radio $f(t)$. Considerando la función $u(s) = \cos(\theta(s))$, es fácil ver, a partir de (2.7) y teniendo en cuenta que $\sigma(s) = \pi/2$, $t(s) = t$ en $S^1 \times \{t\}$, que

$$u'(s) = -\frac{\sin(\theta(s))}{f(t)}, \quad u''(s) = -\frac{\cos(\theta(s))}{f(t)^2}.$$

Entonces,

$$\lambda^L(t) = \frac{1}{f(t)^2},$$

por lo que la estabilidad equivaldrá a que

$$\frac{1}{f(t)^2} \geq \frac{(f')^2 - ff''}{f^2}(t),$$

con lo que se obtiene lo enunciado. \square

Nota 2.4.17. Sea $\tilde{t} \in I$ tal que $[(f')^2 - ff''](\tilde{t}) = 1$. En tal caso, el operador de Jacobi (2.19) en el círculo de revolución $S^1 \times \{\tilde{t}\}$ viene dado por

$$J(u) = u'' + \frac{1}{f(\tilde{t})^2} u.$$

Es fácil ver, de manera análoga a lo visto en la anterior demostración, que las funciones definidas por $\sin(\theta(s))$ y $\cos(\theta(s))$ son funciones de Jacobi en $S^1 \times \{\tilde{t}\}$.

El siguiente resultado nos da una propiedad que verifican los nodoides cerrados y embebidos que son estables, cuando nuestra superficie presenta ciertas características. Más concretamente, nos determina su posición en las superficies simétricas con curvatura de Gauss monótona.

Lema 2.4.18. ([82, Lemma 3.4]) *Sea $M = S^1 \times I$ una superficie dotada de una métrica (2.1), simétrica y con curvatura de Gauss K creciente con respecto a la distancia al ecuador $S^1 \times \{0\}$. Sea C un nodoide cerrado y embebido en M , no contenido en una región con curvatura de Gauss constante. Entonces, C es inestable.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, sabemos por el Lema 2.3.11 que C ha de intersecar ortogonal y simétricamente a $S^1 \times \{0\}$. Sea $c \in I$, $c < \min t|_C < 0$, y consideremos la función

$$u(s) = f'(t(s)) - h f(t(s)) \sin \sigma(s) = \frac{d^2}{ds^2} \int_c^{t(s)} f(\xi) d\xi,$$

que es de media nula sobre C (al ser una curva cerrada), y se anula en los instantes donde C interseca a $S^1 \times \{0\}$ (debido a la ortogonalidad con el ecuador y porque $f'(0) = 0$).

A partir de (2.7), es fácil ver que

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = -\sin \sigma \left(h - \frac{f'}{f} \sin \sigma \right),$$

por lo que en los puntos críticos de $t|_C$, como $(dt)/(ds) = \cos \sigma$, se tendrá $\sin \sigma = \pm 1$, y entonces

$$\left. \frac{d^2 t}{ds^2} \right|_s = \frac{u(s)}{f(t(s))}.$$

Así, u resulta positiva en los mínimos de $t|_{C \cap [c, 0]}$, y negativa en los máximos de $t|_{C \cap [0, -c]}$.

Por otra parte, es rutinario comprobar que $J(u) = -K'(t) f(t) \cos^2 \sigma$, y entonces $J(u) > 0$ donde K es decreciente, es decir, en $(c, 0)$, y $J(u) < 0$ en $(0, -c)$.

Centrémonos ahora en $\int_{C \cap [c, 0]} u J(u)$. Como estamos suponiendo que C corta al paralelo $S^1 \times \{0\}$, se sigue que el máximo local de $t|_C$ estará contenido en se encontrará en $S^1 \times [0, -c]$. Por tanto, u resulta negativa en $C \cap [0, -c]$. Entonces

$$-\int_{C \cap [0, -c]} u J(u) < 0.$$

Análogamente se tiene que

$$-\int_{C \cap [c, 0]} u J(u) < 0,$$

y en consecuencia,

$$I(u) = -\int_{C \cap [-t_0, 0]} u J(u) - \int_{C \cap [0, t_0]} u J(u) < 0,$$

lo que nos da la inestabilidad de C , como queríamos demostrar. \square

Nota 2.4.19. A partir de los Lemas 2.3.11 y 2.4.18 se sigue que si tenemos un nodoide C cerrado, embebido y estable en una superficie simétrica con curvatura de Gauss K monótona, entonces C intersectará al ecuador (si es ahí donde K alcanza su *máximo* valor), o estará contenido en una región con curvatura constante.

Nota 2.4.20. Concluimos esta Sección con un comentario referente a la estabilidad de las *geodésicas verticales*. Obsérvese que estas curvas no encierran un área por si solas. Aun así, es posible estudiar la estabilidad de una tal curva C , fijando otra curva C' que no interseque a C , y viendo si la curva $C \cup C'$ es estable (tal curva ya encerrará un área), para variaciones que sólo afecten a C , preservando el área de la región bordeada por dicha curva.

Por otro lado, la expresión analítica de la estabilidad (2.17) que hemos obtenido anteriormente, es aplicable en estos casos sin ningún problema, al involucrar únicamente funciones definidas sobre la curva en cuestión.

En el Lema 2.6.3 posterior se verá que cualquier curva obtenida a partir de una deformación infinitesimal de una geodésica vertical, tiene siempre más perímetro; por tanto, las geodésicas verticales son siempre curvas estables.

2.5. Existencia de onduloideos cerrados, embebidos y estables

El propósito de esta Sección es estudiar con detalle las propiedades de las curvas de tipo onduloide, que ya hemos que tienen curvatura geodésica constante. Más concretamente, estamos interesados en estudiar la existencia y la estabilidad de los onduloideos cerrados y embebidos. Tal y como se indicó en la Introducción, este tipo de curvas apenas ha aparecido en trabajos anteriores que versan sobre el problema isoperimétrico en superficies.

Para ello, primero estableceremos las condiciones que debe satisfacer una superficie $S^1 \times I$ con métrica (2.1) para que existan onduloideos cerrados y embebidos (recuérdese que estas curvas no son siempre cerradas), siguiendo ciertas ideas que aparecen en [81].

Tales condiciones no son muy restrictivas, lo que asegura la existencia de tales curvas en gran cantidad de las superficies que consideraremos más adelante.

En cuanto a los onduloides (cerrados y embebidos) *estables*, la primera condición que veremos es que se han de intersectar a un paralelo $S^1 \times \{\tilde{t}\}$ donde

$$[(f')^2 - ff''](\tilde{t}) = 1,$$

o, en caso de que no exista dicho paralelo, intersectarán al círculo de revolución donde $(f')^2 - ff''$ pase de ser menor que 1 a ser mayor que 1.

Dado un onduloide, la condición de estabilidad se obtendrá a partir de ciertos resultados que aparecen en [59] (también en [62]), involucrando las derivadas de la curvatura geodésica y del área encerrada, respecto variaciones del onduloide *por onduloides*, surgidos al modificar su punto máximo. Las hipótesis para poder aplicar dichos resultados requieren el estudio previo de los valores propios del operador de Jacobi en onduloides. Dichos valores propios serán analizados usando ideas que aparecen en [81], y que los relacionan con la derivada del periodo de un onduloide, cuando se consideran variaciones manteniendo fija la curvatura geodésica.

Lema 2.5.1. *Sea C un onduloide cerrado, embebido y estable en M , que no está contenido en la región $\{(f')^2 - ff'' = 1\}$. Entonces hay puntos de C satisfaciendo $(f')^2 - ff'' > 1$, y otros puntos satisfaciendo $(f')^2 - ff'' < 1$.*

En consecuencia, caso de que la anterior región se reduzca a un paralelo, los onduloides cerrados, embebidos y estables intersectarán a dicho paralelo.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que el carácter cerrado y embebido de C implica que no puede estar enteramente contenido en la región $\{(f')^2 - ff'' \leq 1\}$.

Recordemos que los onduloides son grafos periódicos sobre θ , y que $\sin \sigma > 0$ en todo instante. Veamos el onduloide C como una solución $(\theta, t(\theta))$ del sistema (2.7). Mediante adecuada rotación, podemos suponer que el mínimo valor de $t|_C$ se alcanza en $\theta = 0$, y que el primer instante en la región $\{\theta > 0\}$ donde se alcanza el máximo valor (siguiente punto crítico para $t|_C$) es en $\theta_0 > 0$. Claramente se tendrá $\sin \sigma(0) = \sin \sigma(\theta_0) = 1$, y $\cos \sigma(0) = \cos \sigma(\theta_0) = 0$.

Nótese que el periodo de C es justamente $2\theta_0$. Al ser el onduloide cerrado y embebido, se tiene $\theta_0 = \pi/k$, para algún $k \in \mathbb{N}$, por el Proposición 2.3.5.

Es un cálculo trivial (véase [82, Lemma 1.4]), comprobar que $u = \cos \sigma(\theta)$ es una solución de la ecuación diferencial

$$(2.23) \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + [(f')^2 - ff''] u = 0,$$

salvo en el eventual conjunto finito de puntos donde la función f no sea de clase C^2 , donde u'' tampoco estará definida. Además, $u(0) = 0$.

Comprobemos además que u es positiva en $(0, \theta_0)$. Como en $\theta = 0$ y $\theta = \theta_0$ se alcanzan un mínimo y un máximo (relativos) consecutivos para $t|_C$, entonces $dt/d\theta$ se anula en ambos instantes, y tendrá signo en el intervalo $(0, \theta_0)$. Más aún, al ser $t|_C$ creciente en tal intervalo, $dt/d\theta$ será estrictamente positiva en $(0, \theta_0)$. Pero a partir de (2.7),

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{\cos \sigma}{\sin \sigma} f(t),$$

por lo que $u = \cos \sigma > 0$ en $(0, \theta_0)$ (recuérdese que $f > 0$, y $\sin \sigma > 0$ en onduloides).

Supongamos ahora que C está contenida en la región $\{(f')^2 - ff'' \leq 1\}$. Entonces, a partir de (2.23), se tiene que

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \geq 0,$$

en el intervalo $(0, \theta_0)$, gracias a la positividad de u .

Consideremos ahora la función $v(\theta) = \sin(\theta)$, solución de la ecuación

$$v'' + v = 0,$$

y verificando $v(0) = 0, v'(0) = 1$.

Estamos en condiciones de aplicar [79, Lemma 7] (nótese que u es de clase C^1 , y que la segunda derivada está definida salvo en un conjunto finito de puntos), para concluir que

$$u(\theta) \geq u'(0)v(\theta),$$

para $\theta \in [0, r_1]$, donde $r_1 = \min\{\theta_0, \pi\} = \theta_0$ (ya que $\theta_0 = \pi/k$ ($k \in \mathbb{N}$)).

Evaluando en $\theta = \theta_0$, como $u(\theta_0) = v(\theta_0) = 0$, la anterior desigualdad es en realidad una igualdad. Entonces, un análisis del caso de igualdad en [79, Lemma 7] nos lleva a que $u'' + [(f')^2 - ff'']u = u'' + u$ en $[0, \theta_0]$, con lo que $(f')^2 - ff''$ es constantemente igual a 1, en todos los puntos del onduloide. Esto contradice nuestras hipótesis iniciales, de forma que, como habíamos anunciado, no pueden existir onduloides cerrados y embebidos contenidos en la región $\{(f')^2 - ff'' \leq 1\}$.

Veamos ahora que cualquiera de estos onduloides, si está contenido en una región donde $\{(f')^2 - ff'' \geq 1\}$ no idénticamente 1, es inestable. Es decir, la condición de estabilidad determina también la posición del onduloide. Nótese que, una vez visto esto, un onduloide que sea cerrado y embebido, y además estable, tendrá puntos con $(f')^2 - ff'' < 1$ y otros con $(f')^2 - ff'' > 1$, o estará totalmente contenido en una región donde $\{(f')^2 - ff'' = 1\}$.

Veamos pues que un onduloide cerrado y embebido contenido en $\{(f')^2 - ff'' \geq 1\}$ es inestable.

Procediendo como antes, y con la notación anterior, sea $u(\theta) = \cos \sigma(\theta)$ solución positiva de (2.23) en $(0, \theta_0)$, con $\theta_0 > 0$ el primer instante donde se alcanza el máximo de $t|_C$. Nótese que $u(0) = u(\theta_0) = 0$. Y sea también $v(\theta) = \sin(\theta)$, una solución de la ecuación

$$v'' + v = 0,$$

que es positiva en $(0, \pi)$, y se anula en los extremos.

Aplicando ahora [79, Lemma 8] de forma análoga, como en este caso $(f')^2 - ff'' \geq 1$, se llegará a que $\theta_0 < \pi$ (desigualdad estricta ya que $(f')^2 - ff''$ no es idénticamente 1).

Como el periodo del onduloide, por la construcción hecha, coincide con $2\theta_0$, tendremos entonces que dicho periodo es estrictamente menor que 2π . Así, para obtener un onduloide cerrado y embebido, se necesitarán, como mínimo, dos *trozos fundamentales* (trozo del onduloide comprendido entre dos máximos para la coordenada t). Eso dará, al menos, dos mínimos y dos máximos de $t|_C$ *distintos*. En tal caso, la componente normal del campo X de rotaciones

$$u(\theta) = \langle X, N \rangle = f(t) \cos \sigma(\theta)$$

se anulará, al menos, en cuatro puntos distintos, y en consecuencia, determinará cuatro regiones nodales como mínimo. Por el Corolario 2.4.13, se concluye que C es inestable. \square

Nota 2.5.2. Remarcamos que, en la demostración anterior, el hecho de que un onduloide C sea cerrado y embebido implica que C no puede estar contenido en la región donde $(f')^2 - ff'' \leq 1$, y que, si además C es estable, entonces no puede estar contenido en la región de donde $(f')^2 - ff'' \geq 1$. Como nosotros estamos interesados en los onduloides cerrados, embebidos y estables, hemos englobado ambos resultados en el anterior Lema 2.5.1.

Nota 2.5.3. Los argumentos usados en la demostración del Lema 2.5.1 pueden aplicarse sin problemas, incluso en el caso de que la función f sea de clase C^1 , y C^2 a trozos, y por tanto, $u = \cos \sigma(\theta)$ tenga las mismas propiedades de diferenciabilidad. Los resultados básicos que se utilizan vienen demostrados en [79], y son ciertos bajo tales condiciones. Además, añadimos que el Lemma 1.5 que aparece [82] puede probarse con estas hipótesis más débiles de diferenciabilidad, lo que permitiría usar el Lemma 2.3 y el Lemma 2.13 de [82] para llegar a las mismas conclusiones que en Lema anterior.

El siguiente lema nos indica las condiciones (intrínsecas a la superficie) que se han de verificar para garantizar la existencia de onduloides cerrados y embebidos.

Lema 2.5.4. *Supongamos que existe un paralelo $S^1 \times \{\tilde{t}\}$ contenido en M satisfaciendo $[(f')^2 - ff''](\tilde{t}) = 1$, y que además K es diferenciable y estrictamente monótona en un entorno de $S^1 \times \{\tilde{t}\}$.*

Entonces, existen onduloides cerrados y embebidos en M , próximos a $S^1 \times \{\tilde{t}\}$.

DEMOSTRACIÓN. Recuérdese que los onduloides se pueden expresar como grafos sobre θ . Así, escribiendo $t = t(\theta)$, $\sigma = \sigma(\theta)$, como

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{dt}{ds} \frac{1}{d\theta/ds} = \cos \sigma \frac{f(t)}{\sin \sigma},$$

y

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{d\sigma}{ds} \frac{1}{d\theta/ds} = \left(h - \frac{f'(t)}{f(t)} \sin \sigma \right) \frac{f(t)}{\sin \sigma},$$

se tiene que el sistema de ecuaciones diferenciales (2.7) que verifican tales curvas es

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \frac{dt}{d\theta} &= f(t) \cot \sigma, \\ \frac{d\sigma}{d\theta} &= h \frac{f(t)}{\sin \sigma} - f'(t). \end{aligned}$$

Denotemos por $\gamma(\theta, T, h) = (\theta, t(\theta, T, h), \sigma(\theta, T, h))$ a la solución de (2.24) con condiciones iniciales $t(0, T, h) = T$, $\sigma(0, T, h) = \pi/2$ y curvatura geodésica h . Para $T > \tilde{t}$, estas condiciones equivalen a que T sea el máximo valor tomado por $t(\theta, T, h)$. Llamaremos también $\tilde{h} = f'(\tilde{t})/f(\tilde{t})$.

Notemos que para condiciones iniciales $T = \tilde{t}$, $h = \tilde{h}$, la solución a (2.24) es justamente el círculo de revolución $S^1 \times \{\tilde{t}\}$. Lo que vamos a demostrar es que para valores de T próximos a \tilde{t} , existen soluciones al sistema (2.24) que son onduloides de periodo $2\pi/k$ (para cierto $k \in \mathbb{N}$), con lo que serán cerrados y embebidos por la Proposición 2.3.5.

En primer lugar, se tiene que las curvas $\gamma(\theta, T, h)$, para (T, h) próximos a (\tilde{t}, \tilde{h}) , serán círculos de revolución u onduloides, ya que $\sigma(0, T, h) = \pi/2$, y $\sin \sigma > 0$. Esto último es consecuencia de que, tomando $c = \tilde{t}$ en (2.8), es fácil ver que la primera integral E es positiva para $S^1 \times \{\tilde{t}\}$, y por tanto, también lo será para $\gamma(\theta, T, h)$. Así

$$\sin \sigma(\theta) = \frac{1}{f(t(\theta))} \left(E + h \int_{\tilde{t}}^{t(\theta)} f(\xi) d\xi \right) > 0,$$

eligiendo $\tilde{t} < 0$ (para que \tilde{h} sea positivo, y por tanto, h también lo sea).

Definamos la función auxiliar F dada por

$$(2.25) \quad F(T, h) = \sigma(\pi, T, h).$$

Obsérvese que si $F(T, h) = \pi/2$ y la curva $\gamma(\theta, T, h)$ es un onduloide, entonces su periodo es justamente $2\pi/k$, con $k \in \mathbb{N}$ (si la curva es un círculo de revolución, entonces $\sigma = \pi/2$ constantemente). Nuestro objetivo va a ser encontrar una función $h(T)$ tal que para T próximo a \tilde{t} , se tenga que $F(T, h(T)) = \pi/2$ (así, las curvas $\gamma(\theta, T, h(T))$ vendrán determinadas únicamente por el punto máximo T , y serán onduloides de periodo $2\pi/k$ o círculos de revolución).

Para ello, seguiremos las ideas que aparecen en [81, Prop 3.1]; lo primero que haremos será calcular las derivadas parciales de la función F en el punto (\tilde{t}, \tilde{h}) , que claramente coinciden con las derivadas parciales de σ en el punto $(\pi, \tilde{t}, \tilde{h})$.

Denotaremos por $t_T(\theta), t_h(\theta), \dots$ (resp. $\sigma_T(\theta), \sigma_h(\theta), \dots$), a las derivadas parciales de la función $t(T, \theta, h)$ (resp. $\sigma(\theta, T, h)$) en el punto $(\theta, \tilde{t}, \tilde{h})$. Entonces, a partir de los desarrollos de Taylor en $(\theta, \tilde{t}, \tilde{h})$ de las funciones $t(\theta, T, h)$ y $\sigma(\theta, T, h)$, y teniendo en cuenta que

$$t(\theta, \tilde{t}, \tilde{h}) = \tilde{t}, \quad \sigma(\theta, \tilde{t}, \tilde{h}) = \pi/2,$$

se obtiene

$$(2.26) \quad \begin{aligned} t(\theta, T, h) &= \tilde{t} + (T - \tilde{t}) t_T(\theta) + (h - \tilde{h}) t_h(\theta) + (T - \tilde{t})(h - \tilde{h}) t_{Th}(\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} (T - \tilde{t})^2 t_{TT}(\theta) + \frac{1}{2} (h - \tilde{h})^2 t_{hh}(\theta) + \frac{1}{6} (T - \tilde{t})^3 t_{TTT}(\theta) + \dots, \\ \sigma(\theta, T, h) &= \pi/2 + (T - \tilde{t}) \sigma_T(\theta) + (h - \tilde{h}) \sigma_h(\theta) + (T - \tilde{t})(h - \tilde{h}) \sigma_{Th}(\theta) \\ &\quad + \frac{1}{2} (T - \tilde{t})^2 \sigma_{TT}(\theta) + \frac{1}{2} (h - \tilde{h})^2 \sigma_{hh}(\theta) + \frac{1}{6} (T - \tilde{t})^3 \sigma_{TTT}(\theta) + \dots \end{aligned}$$

Además, evaluando tales expresiones en $\theta = 0$, se obtiene inmediatamente que

$$(2.27) \quad \begin{aligned} t_T(0) &= 1, \quad t_h(0) = t_{Th}(0) = t_{TT}(0) = t_{hh}(0) = t_{TTT}(0) = 0, \\ \sigma_T(0) &= \sigma_h(0) = \sigma_{Th}(0) = \sigma_{TT}(0) = \sigma_{hh}(0) = \sigma_{TTT}(0) = 0. \end{aligned}$$

Intentemos ahora obtener un sistema de ecuaciones diferenciales que involucre a las funciones t_T y σ_T , para poder hallar así sus expresiones explícitas. Para ello, partiremos de las ecuaciones del sistema (2.24), viendo la segunda ecuación como

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = (h - \tilde{h}) \frac{f(t)}{\sin \sigma} + \tilde{h} \frac{f(t)}{\sin \sigma} - f'(t)$$

(conviene escribirla así porque en la expresión de $\sigma(\theta, T, h)$ anteriormente obtenida, aparecen factores de tipo $(h - \tilde{h})$).

A partir de (2.24), escribiendo los términos a la izquierda de la igualdad a partir de los desarrollos (2.26), y los términos de la derecha a partir de los correspondientes desarrollos de Taylor (de $f(t)$, $f'(t)$, $\sin \sigma$, $\cot \sigma$) usando también (2.26), se obtiene, tras igualar los términos que acompañan al monomio $(T - \tilde{t})$, que

$$(2.28) \quad \begin{aligned} \frac{dt_T}{d\theta} &= -f(\tilde{t}) \sigma_T, \\ \frac{d\sigma_T}{d\theta} &= \frac{t_T}{f(\tilde{t})}, \end{aligned}$$

cuya solución, teniendo en cuenta las condiciones iniciales dadas en (2.27), es $t_T(\theta) = \cos(\theta)$, $\sigma_T(\theta) = \sin(\theta)/f(\tilde{t})$.

Análogamente, igualando ahora los términos que acompañan al monomio $(h - \tilde{h})$ se llega a

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \frac{dt_h}{d\theta} &= -f(\tilde{t}) \sigma_h, \\ \frac{d\sigma_h}{d\theta} &= f(\tilde{t}) + \frac{t_h}{f(\tilde{t})}, \end{aligned}$$

que tiene por solución $t_h(\theta) = f(\tilde{t})^2 (\cos(\theta) - 1)$, $\sigma_h(\theta) = f(\tilde{t}) \sin(\theta)$.

Así, el gradiente de F en el punto (\tilde{t}, \tilde{h}) es igual a

$$(2.30) \quad \nabla F(\tilde{t}, \tilde{h}) = (\sigma_T(\pi), \sigma_h(\pi)) = (0, 0).$$

Nótese que, en este caso, no podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita a F (si pudiéramos, ya obtendríamos las funciones $h(T)$ que buscamos). Usamos otro argumento, para el que necesitaremos hallar el hessiano de F en (\tilde{t}, \tilde{h}) ; calcularemos entonces las derivadas parciales de segundo orden de forma análoga.

Igualando ahora los términos que acompañan a $(t - \tilde{t})^2$, $(h - \tilde{h})^2$ y $(T - \tilde{t})(h - \tilde{h})$, se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$(2.31) \quad \begin{aligned} \frac{dt_{TT}}{d\theta} &= -f(\tilde{t}) \left(\sigma_{TT} - 2\tilde{h} t_T \sigma_T \right), \\ \frac{d\sigma_{TT}}{d\theta} &= f(\tilde{t}) \left(\frac{1}{f(\tilde{t})^2} t_{TT} + K'(\tilde{t}) t_T^2 + \tilde{h} \sigma_T^2 \right), \end{aligned}$$

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \frac{dt_{hh}}{d\theta} &= -f(\tilde{t}) \left(\sigma_{hh} + 2\tilde{h} t_h \sigma_h \right), \\ \frac{d\sigma_{hh}}{d\theta} &= f(\tilde{t}) \left(2\tilde{h} t_h + \frac{1}{f(\tilde{t})^2} t_{hh} + K'(\tilde{t}) t_h^2 + \tilde{h} \sigma_h^2 \right), \end{aligned}$$

$$(2.33) \quad \begin{aligned} \frac{dt_{Th}}{d\theta} &= -f(\tilde{t}) \left(\sigma_{Th} + \tilde{h} (t_T \sigma_h + t_h \sigma_T) \right), \\ \frac{d\sigma_{Th}}{d\theta} &= f(\tilde{t}) \left(\tilde{h} t_T + \frac{1}{f(\tilde{t})^2} t_{Th} + K'(\tilde{t}) t_h t_T + \tilde{h} \sigma_T \sigma_h \right). \end{aligned}$$

Estos sistemas se pueden resolver, proporcionándonos las expresiones de las derivadas parciales de segundo orden de $t(\theta, T, h)$ y $\sigma(\theta, T, h)$ en el punto $(\theta, \tilde{t}, \tilde{h})$; es decir, las funciones $t_{TT}(\theta)$, $\sigma_{TT}(\theta)$, $t_{hh}(\theta)$, $\sigma_{hh}(\theta)$, $t_{Th}(\theta)$ y $\sigma_{Th}(\theta)$. Como el hessiano de F en (\tilde{t}, \tilde{h}) viene dado por

$$\nabla^2 F(\tilde{t}, \tilde{h}) = \begin{pmatrix} \sigma_{TT}(\pi) & \sigma_{Th}(\pi) \\ \sigma_{Th}(\pi) & \sigma_{hh}(\pi) \end{pmatrix},$$

evaluando, se obtiene finalmente que

$$(2.34) \quad \nabla^2 F(\tilde{t}, \tilde{h}) = \begin{pmatrix} 0 & \rho/2 \\ \rho/2 & \rho f(\tilde{t})^2 \end{pmatrix},$$

donde $\rho = \pi f(\tilde{t})^3 K'(\tilde{t})$.

Como por hipótesis, la curvatura de Gauss es *estrictamente monótona* en un entorno de $\mathbb{S}^1 \times \{\tilde{t}\}$, se sigue que $K'(\tilde{t}) \neq 0$ y por tanto, $\nabla^2 F(\tilde{t}, \tilde{h})$ es no degenerada.

Con todo esto, $(\tilde{t}, \tilde{h}) \in \mathbb{R}^2$ es un punto crítico no degenerado de F . Aplicando el Lema de Morse [68, Lemma 2.2], existirá un entorno coordenado (U, ϕ) de (\tilde{t}, \tilde{h}) , con $U \subset \mathbb{R}^2$, $\phi : U \rightarrow V$ y $V \subset \mathbb{R}^2$ entorno de $(0, 0)$ tales que

$$\phi(\tilde{t}, \tilde{h}) = (0, 0)$$

y

$$(F \circ \phi^{-1})(x, y) = F(\tilde{t}, \tilde{h}) + x^2 - y^2 = \frac{\pi}{2} + x^2 - y^2,$$

para $(x, y) \in V$. Esto nos permite trabajar con una expresión explícita y sencilla de F , salvo un difeomorfismo previo.

Así, para $(T, h) \in U$, si $\phi(T, h) = (x, y)$, tendremos que

$$\begin{aligned} F(T, h) = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow F(\phi^{-1}(x, y)) = \frac{\pi}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \{(x', y') \in V : x' = y'\} \cup \{(x', y') \in V : x' = -y'\}. \end{aligned}$$

Llamemos β_c, β_o a las curvas $\{(x', y') \in V : x' = y'\}$, $\{(x', y') \in V : x' = -y'\}$ contenidas en V , respectivamente; nótese que ambas son secantes, con $(0, 0) \in \beta_c \cap \beta_o$. Entonces,

$$F(T, h) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (x, y) \in \beta_c \cup \beta_o \Leftrightarrow (T, h) \in \phi^{-1}(\beta_c) \cup \phi^{-1}(\beta_o),$$

usando el difeomorfismo ϕ .

En conclusión, se obtienen dos curvas planas

$$\alpha_c, \alpha_o : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U,$$

de forma que

$$\alpha_c(0) = \alpha_o(0) = (\tilde{t}, \tilde{h}),$$

y además, cumpliendo que, para cualquier punto $(T, h) \in U$ (es decir, próximo a (\tilde{t}, \tilde{h})), se tiene que $F(T, h) = \pi/2$ si y sólo si, (T, h) se halla en la unión de las trazas de las curvas α_c, α_o (es decir, $(T, h) = \alpha_c(s)$ ó $(T, h) = \alpha_o(s)$, con $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$).

De esta forma, los valores (T, h) de la traza de alguna de las curvas α_c, α_o satisfarán $F(T, h) = \pi/2$, que es lo que queremos. Veamos ahora que ambas curvas se pueden poner como grafo sobre el eje T , lo que nos permitirá expresar los valores de h en función de los valores de T (y así obtendremos la función $h(T)$ deseada). Esto lo hacemos estudiando los vectores tangentes de dichas curvas en el origen.

Denotemos por α a cualquiera de dichas curvas. Por la construcción hecha, se tiene que $F \circ \alpha = \pi/2$. Derivando tal igualdad, llegamos a que

$$\langle \nabla F_{\alpha(s)}, \alpha'(s) \rangle = 0,$$

y derivando una vez más,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha'(s) \langle \nabla F_{\alpha(s)}, \alpha'(s) \rangle \\ &= \langle D_{\alpha'(s)} \nabla F_{\alpha(s)}, \alpha'(s) \rangle + \langle \nabla F_{\alpha(s)}, D_{\alpha'(s)} \alpha'(s) \rangle \\ &= \nabla^2 F_{\alpha(s)}(\alpha'(s), \alpha'(s)) + \langle \nabla F_{\alpha(s)}, D_{\alpha'(s)} \alpha'(s) \rangle. \end{aligned}$$

Evaluando en $s = 0$, como $\nabla F_{\alpha(0)} = \nabla F_{(\tilde{t}, \tilde{h})} = (0, 0)$, por (2.30), se llega a

$$\nabla^2 F_{(\tilde{t}, \tilde{h})}(\alpha'(0), \alpha'(0)) = 0.$$

A partir de (2.34), y notando $\alpha'(0) = (x, y)$, concluimos que

$$(x, y) \begin{pmatrix} 0 & \rho/2 \\ \rho/2 & \rho f(\tilde{t})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2y(x + y f(\tilde{t})^2) = 0.$$

De ahí se deduce que $y = 0$, ó $x + y f(\tilde{t})^2 = 0$, por lo que, salvo una constante multiplicativa,

$$(2.35) \quad \alpha'(0) = (1, 0) \quad \text{ó} \quad \alpha'(0) = (1, -1/f(\tilde{t})^2).$$

Así hemos logrado identificar los vectores tangentes en el origen de las dos curvas α_c y α_o obtenidas anteriormente.

Como ambas curvas tienen vectores tangentes *no verticales* en el origen, es posible parametrizar las curvas α_c, α_o , de forma que sean grafos sobre T de ciertas funciones $h_c(T), h_o(T)$, definidas en un entorno de \tilde{t} . Así, para cada instante s' , existirán T', T'' próximos a \tilde{t} tales que

$$(2.36) \quad \alpha_c(s') = (T', h_c(T')), \quad \alpha_o(s') = (T'', h_o(T'')).$$

En principio, T' y T'' son distintos en general, si bien podrían coincidir (por ejemplo, para $s' = 0$, se tiene que $T' = T'' = \tilde{t}$).

Nótese que $F(T, h_c(T)) = F(T, h_o(T)) = \pi/2$, con lo que a partir de T , estamos hallando valores para la curvatura geodésica tales que la curva solución de (2.24), con dichas condiciones iniciales, tiene periodo $2\pi/k$.

Al variar el punto máximo T , una de las soluciones a (2.24) para la correspondiente curvatura geodésica $h(T)$, será un círculo de revolución. A partir de (2.35), (2.36), se tiene que

$$h'(\tilde{t}) = -1/f(\tilde{t})^2 = h'_c(\tilde{t}),$$

por lo que se sigue que las condiciones iniciales $(T, h_c(T))$ en (2.24) dan lugar a círculos de revolución, y por tanto, $(T, h_o(T))$ darán lugar necesariamente a onduloides. Nótese además que

$$(2.37) \quad h'_o(\tilde{t}) = 0.$$

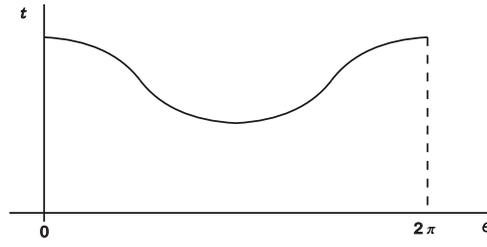
Finalmente, como

$$(2.38) \quad F(T, h_o(T)) = \pi/2,$$

se concluye que los onduloides $\gamma(\theta, T, h_o(T))$, solución al sistema (2.24) con punto máximo T próximo a \tilde{t} , y curvatura geodésica $h_o(T)$, tienen periodo $2\pi/k$, con $k \in \mathbb{N}$, por lo que son onduloides cerrados y embebidos. \square

Ahora nos centraremos en estudiar la estabilidad de onduloides cerrados y embebidos. Una primera observación es que un onduloide estable presenta un *único* punto máximo para la coordenada t (y en consecuencia, también un único mínimo). En caso contrario, la componente normal del campo de rotaciones daría lugar a más de dos regiones nodales (cada región nodal queda limitada por un punto máximo y un punto mínimo), por lo que nuestro onduloide sería inestable en virtud del Corolario 2.4.13. A partir de la Proposición 2.3.5, este hecho equivale a que el periodo de un onduloide cerrado y embebido que sea estable es justamente 2π .

El estudio de los valores propios del operador de Jacobi (2.19) asociado a estas curvas va a ser una herramienta importante para tratar la estabilidad. Más concretamente, nos interesarán los dos primeros valores propios, ya que aparecerán en las hipótesis del resultado principal de esta Sección, que nos permitirá determinar la existencia de onduloides estables.

FIGURA 2.2. Onduloide cerrado, embebido y estable en $S^1 \times I$

Recordemos que en el Lema 2.4.9 ya se vio que cualquier onduloide cerrado y embebido C tiene primer valor propio $\lambda_1(C)$ negativo, y segundo valor propio $\lambda_2(C)$ no positivo. Y que en caso de estabilidad, $\lambda_2(C)$ ha de ser necesariamente nulo (véase Corolario 2.4.10). Esencialmente, esas son las hipótesis que necesitaremos que se cumplan.

Para asegurar que tales hipótesis se verifican, nuestro razonamiento se apoyará en los problemas de valores propios con condiciones de Neumann y Dirichlet. Empezaremos discutiendo la relación existente entre los valores propios asociados a estos problemas, y los asociados al operador de Jacobi, en trozos fundamentales del onduloide.

Sea C un onduloide cerrado y embebido contenido en M , y $u : C \rightarrow \mathbb{R}$ una función propia del operador de Jacobi (2.21) asociado a C , de valor propio λ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que uno de los puntos máximos de $t|_C$ se alcanza en $\theta = 0$ (aplicando adecuada rotación). A partir de la reflexión vertical r con respecto a la recta $\{\theta = 0\}$, dada por

$$r(\theta, t) = (-\theta, t), \quad (\theta, t) \in C,$$

podemos considerar las funciones $u_s, u_a : C \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$u_s = \frac{u + u \circ r}{2}, \quad u_a = \frac{u - u \circ r}{2}.$$

Es fácil ver que u_s es función simétrica y u_a es función antisimétrica con respecto a la recta $\{\theta = 0\}$, y que $u = u_s + u_a$.

En general, llamaremos *trozo fundamental* de un onduloide C a cualquier subconjunto de C limitado por un punto máximo de $t|_C$ y el punto mínimo consecutivo.

En nuestro caso, sea C' el trozo fundamental determinado por el punto máximo que se alcanza para $\theta = 0$. Entonces se tiene que la correspondiente restricción de u_s es una función propia para el operador de Jacobi en C' , verificando la condición de Neumann por ser simétrica, y que la restricción de u_a es una función propia para el operador de Jacobi en C' , verificando la condición de Dirichlet por ser antisimétrica, ambas con valor propio asociado λ .

Denotemos por $\lambda_i^N(C')$ y $\lambda_i^D(C')$ a los valores propios de C' para los problemas de Neumann y Dirichlet, asociados al operador de Jacobi en C' . A continuación, veamos la relación existente entre estos valores propios en C' , y los del onduloide C .

Consideremos el primer valor propio λ_1 del onduloide C , que sabemos negativo por el Lema 2.4.9. Así, aplicando el razonamiento anterior, obtenemos un valor propio de Dirichlet negativo en C' , lo que no es posible ya que $\lambda_i^D(C') \geq 0$. Por tanto, necesariamente $u_a = 0$, y entonces $u = u_s$, con lo que $\lambda_1 = \lambda_1^N(C')$.

Consideremos ahora el segundo valor propio del onduloide λ_2 . Si es estrictamente negativo, un razonamiento análogo al anterior nos lleva a que $\lambda_2 = \lambda_2^N(C')$. En caso contrario, si es mayor o igual que cero, necesariamente $\lambda_2 = 0$ por el Lema 2.4.9.

En particular, se tiene el siguiente lema.

Lema 2.5.5. *Sea λ_i un valor propio del operador de Jacobi en un onduloide cerrado y embebido C , con $i = 1, 2$. Supongamos que $\lambda_i < 0$. Entonces,*

$$\lambda_i^N(C') = \lambda_i, \quad i = 1, 2,$$

con $\lambda_i^N(C')$ el i -ésimo valor propio de Neumann del operador de Jacobi en cualquier trozo fundamental C' de C .

Nuestro siguiente objetivo, en relación al Lema anterior, va a ser obtener información sobre los valores propios asociados al problema de Neumann para el operador de Jacobi en un trozo fundamental de un onduloide. Dichos valores propios son, en general, difíciles de calcular, por lo que nos centraremos en relacionarlos con una cantidad que sí va a resultar computable: la *derivada del periodo* de los onduloides, cuando se consideran variaciones donde mantenemos fija la curvatura geodésica, y vamos moviendo el punto máximo de los onduloides. Esta relación se logrará siguiendo las ideas que aparecen en [81].

Recordemos que dado un onduloide $\gamma(\theta, T_0, h)$ arbitrario, (no tiene que ser cerrado y embebido), con curvatura geodésica constante h y punto máximo T_0 , su periodo se define como la θ -distancia entre dos puntos máximos (o mínimos) consecutivos para la coordenada t . Si mantenemos constante la curvatura geodésica, y variamos ligeramente el punto máximo T , a partir del sistema (2.7) obtendremos otro onduloide $\gamma(\theta, T, h)$, cuyo periodo sólo dependerá de T . Así, podemos ver el periodo de estos onduloides como una función de T , y considerar la derivada de dicho periodo evaluada en $T = T_0$. Esto no es más que considerar la deformación del onduloide original al variar el punto máximo y mantener fija la curvatura geodésica, y estudiar como varía el periodo de los nuevos onduloides.

El siguiente resultado pone en relación esta derivada con el segundo valor propio de Neumann para el operador de Jacobi restringido a un trozo fundamental del onduloide original.

Lema 2.5.6. ([81, Corollary 2.8]) *Sea C un onduloide contenido en M , próximo a $\mathbb{S}^1 \times \{\bar{t}\}$, y denotemos por C' a un trozo fundamental de C .*

Entonces el segundo valor propio para el problema de Neumann $\lambda_2^N(C')$ asociado al operador de Jacobi en C' es positivo si y sólo si la derivada del periodo de los onduloides con respecto al punto máximo es positiva (derivada computada bajo curvatura geodésica constante).

DEMOSTRACIÓN. Nos basaremos en la demostración que aparece en [81], omitiendo algunos detalles rutinarios.

Sea $C = \gamma(\theta, T_0, h)$ y consideremos la variación por onduloides $\gamma(\theta, T, h)$, inducida al variar el punto máximo T y mantener la misma curvatura h , con T próximo a T_0 . Recuerdese que podemos ver los onduloides como grafos sobre el eje θ . Así, dicha variación vendrá dada por

$$(2.39) \quad \varphi_T(\theta) = \gamma(\theta, T, h) = (\theta, t(\theta, T, h)),$$

cuyo campo variacional es

$$(2.40) \quad X(\theta) = \left(0, \frac{\partial}{\partial T} \Big|_{T=T_0} t(\theta, T, h) \right),$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$.

Se puede comprobar que la función variacional asociada

$$u(\theta) = \langle X(\theta), N(\theta) \rangle = \sin \sigma(\theta) \left. \frac{\partial}{\partial T} \right|_{T=T_0} t(\theta, T, h),$$

es una función de Jacobi, que satisface $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$ y $u''(0) < 0$, de manera que $u'(\varepsilon) < 0$ para $\varepsilon > 0$ próximos a 0.

Supongamos que la derivada del periodo es positiva. En primer lugar, encontraremos una expresión adecuada para dicha derivada, que nos permite extraer alguna información. Sea $\theta_2 > 0$ el primer instante en el que $t|_C$ alcanza un mínimo, de forma que $[0, \theta_2]$ determine un trozo fundamental de C , que llamaremos C' . Además, es claro que $\sigma(\theta_2) = \pi/2$, y que σ es decreciente en dicho instante (por ser C un onduloide), por lo que $\sigma'(\theta_2) < 0$.

Aplicando el Teorema de la Función Implícita a $\sigma(\theta, T)$ en el punto (θ_2, T_0) , se obtiene una función $\theta(T)$ tal que

$$(2.41) \quad \theta(T_0) = \theta_2, \quad \sigma(\theta(T), T) = \pi/2,$$

por lo que $\theta(T)$ nos da el periodo (más concretamente, medio periodo) del onduloide $\gamma(\theta, T, h)$. Calculando $\theta'(T)$, a partir de (2.41) y de la derivada de u , se sigue que la derivada del periodo en $T = T_0$ es igual a

$$(2.42) \quad \frac{2 u'(\theta_2)}{f(t(\theta_2, T_0)) \sigma'(\theta_2)}.$$

Como estamos suponiendo por hipótesis que tal derivada es positiva, se deduce que $u'(\theta_2) < 0$.

Centrémonos ahora en el intervalo $(0, \theta_2)$. En dicho intervalo, la función u se anula, a lo sumo, una vez. Esto se debe a que, en caso contrario, si consideramos dos ceros consecutivos θ_3, θ_4 de u , se sigue que el primer valor propio del problema de Dirichlet en (θ_3, θ_4) es cero (recuérdese que u es función de Jacobi, y que en (θ_3, θ_4) tiene signo constante), y entonces $\lambda_1^D(C')$ será estrictamente negativo, por la monotonía de los valores propios [30], lo que es contradictorio.

Por otro lado, u' no se anula en el intervalo $(0, \theta_2)$. Como $u'(\varepsilon) < 0$ para $\varepsilon > 0$, y $u'(\theta_2) < 0$ (es decir, u' será negativa cerca de los extremos de $(0, \theta_2)$), si u' se anulara en algún instante, forzosamente u'' tendría dos ceros en $(0, \theta_2)$. Entonces, la función u también tendría dos ceros en dicho intervalo, ya que $u'' + (K + h^2)u = 0$ (debido a que $J(u) = 0$). En tal caso podríamos razonar como antes, para llegar a contradicción. Así, u' resulta estrictamente negativa en el intervalo $(0, \theta_2)$.

Sea $\theta_3 > \theta_2$ el primer cero de u' . Como u' es estrictamente negativa en $(0, \theta_3)$ y se anula en los extremos, se tiene que u'' necesariamente cambiará de signo en dicho intervalo (esto es, se anula en algún instante). Por esto, como u es estrictamente decreciente en $(0, \theta_3)$, u se anulará *una única vez* en dicho intervalo. Aplicando el Lema 2.4.4, u es la segunda función propia del problema de Neumann en dicho intervalo, y entonces el correspondiente valor propio será cero. Y de nuevo usando la monotonía de los valores propios, concluimos que $\lambda_2^N(C') > 0$.

Supongamos ahora que $\lambda_2^N(C') > 0$. Si la derivada del periodo fuese negativa, aplicando directamente [81, Cor. 2.8] se obtiene que $\lambda_2^N(C') < 0$, lo que resulta contradictorio. Y si la derivada del periodo es nula, aplicando el mismo razonamiento anterior obtendremos, a partir de (2.42), que $u'(\theta_2) = 0$, con lo que $\theta_3 = \theta_2$ y $\lambda_2^N(C') = 0$, de nuevo una contradicción. Así que la derivada debe ser positiva, lo que se prueba lo enunciado. \square

Nota 2.5.7. El punto clave de la demostración anterior es que la función variacional asociada u es una función propia para el problema de Neumann en un trozo fundamental (dándonos información sobre el signo del correspondiente valor propio asociado), cuya derivada aparece en la expresión de la derivada del periodo. Este hecho hace que podamos relacionar ambos conceptos por medio del Lema 2.5.6.

El siguiente resultado nos permite determinar el signo de la derivada del periodo de onduloides cerrados y embebidos (próximos a $S^1 \times \{\tilde{t}\}$), a partir de la siguiente condición propia de la superficie. Gracias a él, podremos discutir el signo del segundo valor propio de Neumann en un trozo fundamental de un onduloide, sin necesidad de calcularlo explícitamente, aplicando el Lema 2.5.6 anterior.

Recordemos que en el Lema 2.5.4, demostrábamos la existencia de onduloides cerrados y embebidos en toros para los que existe un paralelo $S^1 \times \{\tilde{t}\}$ tal que $[(f')^2 - ff''](\tilde{t}) = 1$, y donde la curvatura de Gauss K es diferenciable y estrictamente monótona en un entorno de \tilde{t} .

Lema 2.5.8. *Sea $S^1 \times I$ una superficie con una métrica (2.1), y supongamos que existe $\tilde{t} \in I$ satisfaciendo que $[(f')^2 - ff''](\tilde{t}) = 1$, y que la curvatura de Gauss es diferenciable y estrictamente monótona en un entorno de \tilde{t} .*

Entonces, la derivada del periodo de un onduloide cerrado y embebido con respecto al punto máximo T es estrictamente positiva, para $T > \tilde{t}$ suficientemente próximos, si y sólo si

$$(2.43) \quad 3f(\tilde{t})^2 (\tilde{h} K'(\tilde{t}) - K''(\tilde{t})) + 5f(\tilde{t})^4 K'(\tilde{t})^2 > 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $T_0 > \tilde{t}$ suficientemente próximo, y $h_0(T_0)$ la curvatura geodésica correspondiente al onduloide cerrado y embebido con altura máxima T_0 , sobre el que queremos hallar la derivada del periodo (seguiremos la notación del Lema 2.5.4).

Es claro que la derivada del periodo en $T = T_0$, calculada bajo curvatura geodésica constante $h_0(T_0)$, tendrá el mismo signo que la derivada del periodo en $T = \tilde{t}$, bajo curvatura geodésica $\tilde{h} = h(\tilde{t})$, ya que la derivada conservará el mismo signo en un entorno de (\tilde{t}, \tilde{h}) . Así pues, pasaremos a calcular la derivada del periodo de onduloides en $T = \tilde{t}$, bajo curvatura geodésica \tilde{h} .

Denotemos por $t(\theta, T)$, $\sigma(\theta, T)$ a las soluciones de (2.24) con condiciones iniciales $t(0, T) = T$, $\sigma(0, T) = \pi/2$ y curvatura geodésica \tilde{h} , y sea $\gamma(\theta, T, \tilde{h})$ el correspondiente onduloide.

Buscamos una función $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verificando $\sigma(\theta(T), T) = \pi/2$. Si tal función existe, el periodo de $\gamma(\theta, T, \tilde{h})$ vendrá dado justamente por $2\theta(T)$.

Consideremos la función auxiliar F definida por

$$(2.44) \quad \sigma(\theta, T) - \pi/2 = (T - \tilde{t}) F(\theta, T),$$

extendida de forma continua en (θ, \tilde{t}) . Es decir, en dichos puntos, F tomará el valor del correspondiente límite:

$$F(\theta, \tilde{t}) = \lim_{T \rightarrow \tilde{t}} \frac{\sigma(\theta, T) - \pi/2}{(T - \tilde{t})} = \sigma_T(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{f(\tilde{t})},$$

a partir de (2.28). Nótese que $F(\pi, \tilde{t}) = 0$. Además, para $T \neq \tilde{t}$, se tiene que $F(\theta, T) = 0$ si y sólo si $\sigma(\theta, T) = \pi/2$.

Más aún, a partir del desarrollo de Taylor (2.26) de $\sigma(\theta, T)$ del Lema 2.5.4, haciendo $h = \tilde{h}$, se obtiene una expresión cómoda de tal función F :

$$(2.45) \quad F(\theta, T) = \sigma_T(\theta) + \frac{1}{2} \sigma_{TT}(\theta) (T - \tilde{t}) + \frac{1}{6} \sigma_{TTT}(\theta) (T - \tilde{t})^2 + O((T - \tilde{t})^3).$$

Derivando ahora con respecto a θ , y evaluando en el punto (π, \tilde{t}) , llegamos a

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(\pi, \tilde{t}) = \sigma'_T(\pi) = \frac{-1}{f(\tilde{t})} \neq 0.$$

Por tanto, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita, para afirmar la existencia de una función $\theta(T)$, definida sobre un entorno de \tilde{t} , tal que $\theta(\tilde{t}) = \pi$ y

$$(2.46) \quad F(\theta(T), T) = 0,$$

lo que equivale a que $\sigma(\theta(T), T) = \pi/2$. Así, por lo comentado anteriormente, esta función $\theta(T)$, para T próximo a \tilde{t} , nos da el periodo del onduloide $\gamma(\theta, T, \tilde{h})$ (recuérdese que tal onduloide no tiene que ser cerrado y embebido).

Ahora nos interesa calcular la derivada de $\theta(T)$. Como

$$\theta(T) = \theta(\tilde{t}) + \theta'(\tilde{t}) (T - \tilde{t}) + \frac{1}{2} \theta''(\tilde{t}) (T - \tilde{t})^2 + O((T - \tilde{t})^3),$$

se sigue que

$$(2.47) \quad \theta'(T) = \theta'(\tilde{t}) + \theta''(\tilde{t}) (T - \tilde{t}) + O((T - \tilde{t})^2).$$

Derivando (2.46) se obtiene

$$\theta'(T) = -\frac{\partial F/\partial T}{\partial F/\partial \theta}(\theta(T), T).$$

Evaluando en $T = \tilde{t}$ y teniendo en cuenta (2.45), tenemos que

$$\theta'(\tilde{t}) = \frac{-\sigma_{TT}(\pi)}{2\sigma'_T(\pi)} = \frac{1}{2} f(\tilde{t}) \sigma_{TT}(\pi).$$

A partir de (2.34), $\sigma_{TT}(\pi) = 0$, y entonces $\theta'(\tilde{t}) = 0$.

Derivando una vez más (2.46) y evaluando en $T = \tilde{t}$, como $\theta'(\tilde{t}) = 0$ se tiene que

$$\theta''(\tilde{t}) = \frac{-\partial^2 F/\partial T^2}{\partial F/\partial \theta}(\pi, \tilde{t}) = \frac{-\sigma_{TTT}(\pi)}{3\sigma'_T(\pi)} = \frac{1}{3} f(\tilde{t}) \sigma_{TTT}(\pi).$$

Tal y como indica (2.47), y teniendo en cuenta que $\theta'(\tilde{t}) = 0$, es claro que el signo de $\theta'(T)$, para $T > \tilde{t}$, coincidirá con el signo de $\sigma_{TTT}(\pi)$. Para calcular este valor, hemos de resolver previamente el sistema de ecuaciones diferenciales que involucra a t_{TTT} , σ_{TTT} , que se obtiene de forma análoga a como se hizo en el Lema 2.5.4 (habrá que considerar, en este caso, los términos que acompañan al monomio $(T - \tilde{t})^3$). Así, se tiene

$$\begin{aligned} t'_{TTT} &= -2f(\tilde{t})\sigma_T^3 - 3f'(\tilde{t})(t_T\sigma_{TT} + t_{TT}\sigma_T) \\ &\quad - 3f''(\tilde{t})t_T^2\sigma_T - f(\tilde{t})\sigma_{TTT}, \\ \sigma'_{TTT} &= \frac{t_{TTT}}{f(\tilde{t})} + 3f'(\tilde{t})\sigma_T\sigma_{TT} + 3\frac{f'(\tilde{t})^2}{f(\tilde{t})}t_T\sigma_T^2 \\ &\quad + \frac{f'(\tilde{t})f''(\tilde{t}) - f'''(\tilde{t})f(\tilde{t})}{f(\tilde{t})}(3t_T t_{TT} + t_T^3). \end{aligned}$$

Tras resolver el sistema y evaluar, se sigue que

$$(2.48) \quad \sigma_{TTT}(\pi) = \frac{\pi}{8f(\tilde{t})} \left\{ 3f(\tilde{t})^2(\tilde{h}K'(\tilde{t}) - K''(\tilde{t})) + 5f(\tilde{t})^4K'(\tilde{t})^2 \right\}.$$

Es claro entonces que $\theta'(T) > 0$, con $T > \tilde{t}$, si y sólo si

$$3f(\tilde{t})^2 (\tilde{h} K'(\tilde{t}) - K''(\tilde{t})) + 5f(\tilde{t})^4 K'(\tilde{t})^2 > 0,$$

con lo que el Lema queda demostrado. \square

Finalmente enunciamos el resultado clave que usaremos para probar la existencia de onduloideos cerrados, embebidos y *estables*. La idea consiste en aplicar los resultados que aparecen en [59] (véase también [62]).

Consideremos una superficie $M = S^1 \times I$ bajo las condiciones del Lema 2.5.4, y sea $\gamma_{T_0} = \gamma(\theta, T_0, h_o(T_0))$ un onduloide cerrado y embebido, con T_0 próximo a \tilde{t} , $T_0 > \tilde{t}$. Sabemos por dicho Lema que $\gamma(\theta, T, h_o(T))$, con T próximo a T_0 , da lugar a una variación por onduloideos, todos ellos cerrados y embebidos. Esto es, en cada instante de la deformación, se tiene una curva con curvatura geodésica constante. En estas condiciones, si se cumple cierta hipótesis sobre los valores propios asociados al operador de Jacobi en γ_{T_0} , se tiene que la estabilidad del onduloide depende únicamente del signo que tengan las derivadas de la curvatura geodésica y del área asociadas a la variación.

Lema 2.5.9. ([59, Lemma 2],[62, Theorem 1.3]) *Sea γ_{T_0} un onduloide cerrado y embebido contenido en $S^1 \times I$, con punto máximo T_0 , y sea $\gamma(\theta, T, h_o(T))$ una variación por onduloideos cerrados y embebidos con curvatura $h_o(T)$, para T próximos a T_0 (que sabemos que existe por el Lema 2.5.4). Supongamos que $\lambda_1 < 0 \leq \lambda_2$ para el problema de valores propios (2.21) asociado al operador de Jacobi en el onduloide γ_{T_0} . Entonces γ_{T_0} es estable si y sólo si*

$$\frac{dh_o}{dT} \frac{da}{dT} < 0,$$

en $T = T_0$, donde $\frac{da}{dT}$ indica la variación de área inducida por la familia $\gamma(\theta, T, h_o(T))$.

Nota 2.5.10. La variación de área inducida por la familia de curvas $\gamma(\theta, T, h_o(T))$, que no encierran ningún área por sí solas, se calcula de la forma habitual: considérese un círculo de revolución arbitrario, suficientemente alejado de las curvas de la familia para que no haya intersección. Entonces, la unión del círculo de revolución y cada curva de la familia sí bordea una región acotada R_T en la superficie, encerrando una cantidad de área. Así, la derivada del área encerrada por dichas regiones R_T es justamente la variación del área inducida (es un método similar al expuesto en la Nota 2.4.20 anterior).

Remarcamos que la variación considerada, a diferencia de la definida por (2.39), no mantiene constante la curvatura geodésica de cada curva de la deformación; en cada instante T , la curvatura geodésica es igual a $h_o(T)$ (y de esta forma, los onduloideos que van surgiendo son cerrados y embebidos).

2.6. Regiones estables

En esta Sección recordaremos el concepto de región estable en una superficie, además de proporcionar algunos criterios que nos permitirán discutir el carácter estable de ciertos conjuntos de $S^1 \times I$, cuyo borde está compuesto por curvas con curvatura geodésica constante. Dichos criterios serán usados más adelante, para clasificar las regiones estables de las superficies consideradas en los Capítulos 3 y 4.

Las regiones isoperimétricas constituyen mínimos *globales* del funcional perímetro, bajo una restricción sobre el área encerrada. Con vistas a encontrar tales regiones, resulta de gran utilidad introducir un concepto más débil, el de *regiones estables*, que se van a corresponder con los mínimos relativos (de segundo orden) del perímetro, para variaciones preservando el área encerrada. De esta manera, se puede pensar que las regiones estables son soluciones *locales* del problema isoperimétrico.

Definición 5. Sea M una superficie, y Ω un subconjunto de M . Diremos que Ω es una *región estable* si $\partial\Omega$ es una curva embebida estable, no necesariamente conexa (con curvatura geodésica constante respecto del vector normal interior).

De esta forma, las regiones estables estarán bordeadas por curvas estables, que son mínimos locales de segundo orden para el perímetro, para variaciones infinitesimales que preservan el área encerrada. Así, toda región isoperimétrica (mínimo global del perímetro) es también una región estable de la superficie. A lo largo de nuestro trabajo, dado un conjunto $\Omega \subset M$, diremos indistintamente que Ω es una región estable, o que su borde $\partial\Omega$ es estable.

Nuestro esquema de trabajo se basará en la clasificación de las regiones estables de una superficie para determinar las regiones isoperimétricas. En vistas a obtener dicha clasificación, presentamos ahora varios resultados que nos proporcionan criterios de estabilidad para ciertos conjuntos bordeados por curvas con curvatura geodésica constante. Empezaremos mostrando la condición que han de verificar los anillos horizontales bordeados por dos círculos de revolución, contenidos en nuestras superficies.

Lema 2.6.1. ([82, Lemma 1.7]) *Sea $B = \mathbb{S}^1 \times [t_1, t_2]$ un anillo contenido en $M = \mathbb{S}^1 \times I$, bordeado por dos círculos de revolución. Entonces, ∂B es estable si y sólo si, cada una de sus componentes $\mathbb{S}^1 \times \{t_i\}$ es estable ($i = 1, 2$) y*

$$(2.49) \quad \frac{K + h^2}{L}(t_1) + \frac{K + h^2}{L}(t_2) \leq 0.$$

En el caso de que B sea un anillo simétrico $\mathbb{S}^1 \times [-t, t]$, las condiciones anteriores se reducen a que

$$(K + h^2)(t) \leq 0.$$

Nota 2.6.2. Recalamos que las condiciones expresadas en el Lema 2.6.1 se pueden expresar en función de f , teniendo en cuenta que

$$\frac{K + h^2}{L}(t) = \frac{[(f')^2 - ff'']}{2\pi f(t)^3}.$$

Sea ahora M una de nuestras superficies. Llamaremos *anillo vertical* al dominio de M bordeado por dos geodésicas verticales. El siguiente lema demuestra que una unión de anillos verticales es siempre una región estable.

Lema 2.6.3. *Cualquier unión finita de anillos verticales disjuntos es estable.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una geodésica vertical C de M . Veamos que su longitud es menor o igual que cualquier otra curva D cerrada y embebida, del mismo tipo de homotopía y suficientemente próxima a C . Nótese que dicha curva D puede verse como un grafo definido sobre C .

Sea N el campo normal unitario al conjunto de todas las geodésicas verticales, que puede extenderse a toda la superficie M . De hecho, a partir de (2.6), como el vector tangente a C es vertical (y coincidente con ∂_t), se tiene que

$$N(\theta, t) = \frac{1}{f(t)} \partial_\theta, \quad \text{para cada } (\theta, t) \in \mathbb{S}^1 \times I.$$

Entonces, como C es una geodésica, su curvatura geodésica h es igual a cero, por lo que

$$\langle D_\nu N, \nu \rangle = -\langle D_\nu \nu, N \rangle = -h = 0,$$

siendo ν el vector tangente correspondiente. De ahí se deduce que $\text{div}(N) = 0$.

Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que la curva homótopa D interseca a C (en caso de que esto no ocurra, se puede aplicar un giro infinitesimal, que preserva longitudes, hasta que haya intersección). Sean p_1, p_2 dos puntos de intersección consecutivos, y denotemos por C_1, D_1 a las restricciones de las curvas C y D entre los puntos p_1 y p_2 . Llamemos ahora Σ al dominio bordeado por C_1 y D_1 (véase la Figura 2.3).

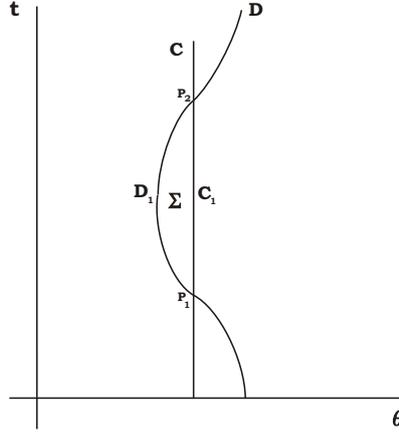


FIGURA 2.3. Región Σ delimitada por C_1 y D_1

Si aplicamos el Teorema de la divergencia al campo N sobre el dominio Σ , notando por μ al normal exterior a Σ , se tiene

$$(2.50) \quad 0 = \int_{\Sigma} \operatorname{div}(N) = \int_{\partial\Sigma} \langle N, \mu \rangle = \int_{C_1} \langle N, \mu \rangle + \int_{D_1} \langle N, \mu \rangle.$$

Es claro que, dependiendo de que $\theta|_{C_1}$ sea mayor o menor que $\theta|_{D_1}$, el normal exterior $\mu|_{C_1}$ coincidirá con $N|_{C_1}$, o con $-N|_{C_1}$.

Supongamos que $\mu|_{C_1} = N|_{C_1}$. Entonces $\langle N|_{C_1}, \mu|_{C_1} \rangle = 1$, por lo que (2.50) se reduce a

$$0 = L(C_1) + \int_{D_1} \langle N, \mu \rangle,$$

donde L indica longitud. Por otra parte, aplicando el lema de Schwartz,

$$\langle N, \mu \rangle = |N| |\mu| \cos(\beta) \geq -1,$$

donde β denota el ángulo formado entre N y μ . Así, la expresión (2.50) resulta

$$0 \geq L(C_1) - L(D_1),$$

lo que implica que $L(D_1) \geq L(C_1)$.

Si $\mu|_{C_1} = -N|_{C_1}$, teniendo en cuenta ahora que

$$\langle N, \mu \rangle = |N| |\mu| \cos(\beta) \leq 1,$$

un razonamiento análogo nos llevará a que la expresión (2.50) implica que

$$0 \leq -L(C_1) + L(D_1),$$

concluyendo de igual manera que $L(D_1) \geq L(C_1)$. Repitiendo este proceso en cada región determinada por las curvas C y D , finalmente obtenemos que $L(C) \leq L(D)$.

Con esto, ahora es claro que si tomamos un anillo vertical Ω , cualquier variación infinitesimal de $\partial\Omega$, preservando el área encerrada, tendrá más longitud (ya que cada curva

del borde del anillo pasará a ser una curva homótopa D , de mayor longitud por el razonamiento anterior). Esto nos dice que $\partial\Omega$ es un mínimo local para el funcional longitud, cuando el área considerada es constante, y por tanto Ω es una región estable. Claramente, este mismo argumento también se cumple para uniones arbitrarias de anillos verticales disjuntos. \square

Enunciamos ahora un criterio general para estudiar la estabilidad de uniones de un disco (con curvatura de Gauss constante), y un anillo simétrico.

Lema 2.6.4. *Sea $\mathbb{S}^1 \times I$ una superficie dotada con una métrica de tipo (2.1). Consideremos un disco D contenido en una región con curvatura de Gauss constante e igual a K_0 , y un anillo simétrico $B = \mathbb{S}^1 \times [-t, t]$, de forma que ∂D y ∂B tienen la misma curvatura geodésica h respecto al normal interior a $\Omega = D \cup B$.*

Entonces, Ω es estable si y sólo si D y B son conjuntos estables y

$$(2.51) \quad L(\partial D)^{-1} (K_0 + h^2) + L(\partial B)^{-1} (K(t) + h^2) \leq 0,$$

donde L denota el perímetro.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que tanto D como B son estables y que se satisface la condición (2.51). Sea u una función de media nula definida en $\partial\Omega$, y denotemos por u_1, u_2 a las restricciones de u a $\partial D, \partial B$, respectivamente. Es posible expresar cada restricción como $u_i = c_i + v_i$, con c_i una constante real y v_i una función de media nula, para $i = 1, 2$. De hecho, basta tomar

$$c_1 = \frac{\int_{\partial D} u_1}{L(\partial D)}, \quad c_2 = \frac{\int_{\partial B} u_2}{L(\partial B)},$$

y

$$v_i = u_i - c_i, \quad i = 1, 2.$$

Entonces, a partir de (2.16), se tendrá que

$$\begin{aligned} I(u_1) &= I(c_1 + v_1) = I(c_1) + I(v_1) + 2Q(c_1, v_1) \\ &= -\left(\int_{\partial D} c_1^2 (K + h^2) \right) + I(v_1) - 2 \int_{\partial D} v_1 (K + h^2) c_1 \\ &= -c_1^2 L(\partial D) (K_0 + h^2) + I(v_1) - 2(K_0 + h^2) c_1 \int_{\partial D} v_1 \\ &\geq -c_1^2 L(\partial D) (K_0 + h^2), \end{aligned}$$

ya que v_1 es de media nula, y D es estable, con lo que $I(v_1) \geq 0$ en virtud de (2.17).

Análogamente,

$$\begin{aligned} I(u_2) &= I(c_2 + v_2) = I(c_2) + I(v_2) + 2Q(c_2, v_2) \\ &= -\left(\int_{\partial B} c_2^2 (K + h^2) \right) + I(v_2) - 2 \int_{\partial B} v_2 (K + h^2) c_2 \\ &= -c_2^2 L(\partial B) (K(t) + h^2) + I(v_2) - 2c_2 (K(t) + h^2) \int_{\partial B} v_2 \\ &\geq -c_2^2 L(\partial B) (K(t) + h^2). \end{aligned}$$

Entonces,

$$(2.52) \quad \begin{aligned} I(u) &= I(u_1) + I(u_2) \\ &\geq -c_1^2 L(\partial D) (K_0 + h^2) - c_2^2 L(\partial B) (K(t) + h^2). \end{aligned}$$

Por otro lado, como u es una función de media nula, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} u = \int_{\partial D} u_1 + \int_{\partial B} u_2 \\ &= \int_{\partial D} (c_1 + v_1) + \int_{\partial B} (c_2 + v_2) = c_1 L(\partial D) + c_2 L(\partial B), \end{aligned}$$

de donde

$$c_2 = \frac{-c_1 L(\partial D)}{L(\partial B)}.$$

Así, sustituyendo en (2.52) se sigue que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq -c_1^2 L(\partial D) (K_0 + h^2) - \frac{c_1^2 L(\partial D)^2}{L(\partial B)^2} L(\partial B) (K(t) + h^2) \\ &= -\frac{c_1^2 L(\partial D)}{L(\partial B)} \left(L(\partial B) (K_0 + h^2) + L(\partial D) (K(t) + h^2) \right) \geq 0, \end{aligned}$$

porque estamos suponiendo que se cumple (2.51). A partir de (2.17), se concluye que Ω es estable.

Supongamos ahora que Ω es estable. Entonces, necesariamente D y B son también estables. Consideremos la función

$$(2.53) \quad u = \begin{cases} -L(\partial B), & \partial D, \\ L(\partial D), & \partial B, \end{cases}$$

que trivialmente tiene media nula. Por la estabilidad de Ω se tendrá que $I(u) \geq 0$. Pero

$$\begin{aligned} I(u) &= -\int_{\partial D} L(\partial B)^2 (K + h^2) - \int_{\partial B} L(\partial D)^2 (K + h^2) \\ &= -L(\partial B) L(\partial D) \left(L(\partial B) (K_0 + h^2) + L(\partial D) (K(t) + h^2) \right), \end{aligned}$$

de donde se obtiene (2.51). □

Nota 2.6.5. Hemos preferido enunciar el Lema 2.6.4 imponiendo que el disco D esté contenido en una región con curvatura de Gauss constante. Esto se debe a que en las Secciones posteriores, lo aplicaremos en dicha situación. En el caso de que D no tenga curvatura de Gauss constante, es fácil ver que la condición (2.51) vendrá dada por

$$(2.54) \quad L(\partial B) \left(\int_{\partial D} (K + h^2) \right) + L(\partial D)^2 (K(t) + h^2) \leq 0.$$

Para acabar esta Sección, mostramos un resultado que nos asegura la estabilidad de un anillo bordeado por un onduloide y un paralelo, si se satisfacen ciertas condiciones.

Lema 2.6.6. *Sea una superficie $M = \mathbb{S}^1 \times I$ tal que existe $\tilde{t} \in I$ con $[(f')^2 - ff''](\tilde{t}) = 1$. Supongamos que K es estrictamente monótona y diferenciable en un entorno de \tilde{t} , y que el anillo asimétrico asociado a \tilde{t} es estable y satisface estrictamente la condición (2.49).*

Sea γ_T un onduloide cerrado, embebido y estable contenido en M , con altura máxima T suficientemente próxima a \tilde{t} , y sea Ω_T el anillo bordeado por γ_T y por el paralelo $\mathbb{S}^1 \times \{t(T)\}$ con la misma curvatura geodésica que γ_T (con respecto al normal interior a la región que bordean). Supongamos además que $(K + h^2)(t(T)) < 0$.

Entonces, Ω_T es una región estable.

DEMOSTRACIÓN. Sea u una función de media nula arbitraria, definida en $\partial\Omega_T$, y normalizada para que

$$\int_{\partial\Omega} u^2 = 1.$$

Denotemos por u_1, u_2 a las restricciones de la función u a γ_T y $\mathbb{S}^1 \times \{t(T)\}$, respectivamente. Tal y como se hizo en la demostración del Lema 2.6.4, es posible expresar $u_i = c_i + v_i$, con c_i una constante real y v_i una función de media nula, para $i = 1, 2$.

Nótese que las hipótesis implican que el paralelo $\mathbb{S}^1 \times \{t(T)\}$ es estable, ya que se satisface la condición (2.22). Teniendo en cuenta también la estabilidad de γ_T , y denotando por h su curvatura geodésica, se sigue que

$$\begin{aligned} I(u) &= I(u_1) + I(u_2) \\ &\geq -c_1^2 \left(\int_{\gamma_T} (K + h^2) \right) - 2c_1 \left(\int_{\gamma_T} v_1 (K + h^2) \right) - c_2^2 L(t(T)) (K + h^2)(t(T)). \end{aligned}$$

Por otro lado, el hecho de que u tenga media nula implica que

$$c_2 = \frac{-c_1 L(\gamma_T)}{L(t(T))},$$

donde $L(\gamma_T)$ indica la longitud del onduloide γ_T . Así,

$$\begin{aligned} (2.55) \quad I(u) &\geq -c_1^2 \left(\int_{\gamma_T} (K + h^2) \right) - 2c_1 \left(\int_{\gamma_T} v_1 (K + h^2) \right) \\ &\quad - \frac{c_1^2 L(\gamma_T)^2}{L(t(T))^2} L(t(T)) (K + h^2)(t(T)) \\ &= -c_1^2 L(\gamma_T)^2 \left(\frac{\int_{\gamma_T} (K + h^2)}{L(\gamma_T)^2} + \frac{(K + h^2)(t(T))}{L(t(T))} \right) - 2c_1 \int_{\gamma_T} v_1 (K + h^2). \end{aligned}$$

Analicemos ahora los signos de cada sumando de (2.55). Como T está próximo a \tilde{t} , se sigue que el onduloide γ_T estará próximo al círculo de revolución $\mathbb{S}^1 \times \{\tilde{t}\}$. En consecuencia,

$$L(\gamma_T) \longrightarrow L(\tilde{t})$$

y

$$\int_{\gamma_T} (K + h^2) \longrightarrow L(\tilde{t}) (K + h^2)(\tilde{t}),$$

cuando T tiende a \tilde{t} , y además Ω_T estará próximo al anillo asimétrico asociado a \tilde{t} . Como dicho anillo satisface *estrictamente* la condición (2.49) por hipótesis, concluimos que el primer sumando en (2.55) es positivo, para T suficientemente próximo a \tilde{t} , por este argumento de aproximación. Centrémonos ahora en el segundo sumando de (2.55).

Sean $v_1^+ = \max\{v_1, 0\}$, $v_1^- = -\min\{v_1, 0\}$. Entonces,

$$v_1 = v_1^+ - v_1^-.$$

Como la curvatura geodésica h de γ_T es constante y v_1 es una función de media nula,

$$\begin{aligned} (2.56) \quad \int_{\gamma_T} v_1 (K + h^2) &= \int_{\gamma_T} v_1 K + \int_{\gamma_T} v_1 h^2 = \int_{\gamma_T} v_1 K \\ &= \int_{\gamma_T} v_1^+ K - \int_{\gamma_T} v_1^- K \\ &\leq K(s_1) \int_{\gamma_T} v_1^+ - K(s_2) \int_{\gamma_T} v_1^-, \end{aligned}$$

con $s_1, s_2 \in (0, t_0)$ tales que $K(s_1) = \max_{\gamma_T} K$ y $K(s_2) = \min_{\gamma_T} K$.

Como T es próximo a \tilde{t} , podemos suponer que el onduloide γ_T se encuentra contenido en una banda horizontal alrededor de $S^1 \times \{\tilde{t}\}$, concretamente en la banda delimitada por los paralelos $S^1 \times \{s_1\}$ y $S^1 \times \{s_2\}$ (debido a la monotonía de la curvatura de Gauss, los extremos absolutos de $K|_{\gamma_T}$ corresponderán con los puntos de máxima y mínima altura del onduloide). Llamando

$$\varepsilon_T = K(s_1) - K(s_2) > 0,$$

se tiene que $K(s_1) = K(s_2) + \varepsilon_T$, y entonces (2.56) queda

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_T} v_1 (K + h^2) &\leq (K(s_2) + \varepsilon_T) \int_{\gamma_T} v_1^+ - K(s_2) \int_{\gamma_T} v_1^- \\ &= K(s_2) \left(\int_{\gamma_T} (v_1^+ - v_1^-) \right) + \varepsilon_T \int_{\gamma_T} v_1^+ \\ &= K(s_2) \left(\int_{\gamma_T} v_1 \right) + \varepsilon_T \int_{\gamma_T} v_1^+ = \varepsilon_T \int_{\gamma_T} v_1^+, \end{aligned}$$

ya que v_1 es de media nula.

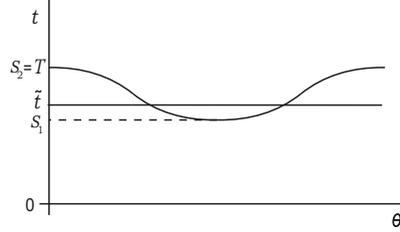


FIGURA 2.4. El onduloide γ_T y el círculo de revolución $S^1 \times \{\tilde{t}\}$

Consecuentemente, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz [21, Chapter V.1], se tiene

$$\left| \int_{\gamma_T} v_1 (K + h^2) \right| \leq \varepsilon_T \left| \int_{\gamma_T} v_1^+ \right| \leq \varepsilon_T \left(\int_{\gamma_T} (v_1^+)^2 \right)^{\frac{1}{2}} L(\gamma_T)^{\frac{1}{2}}.$$

Obsérvese que tanto $K(s_1) = \max_{\gamma_T} K$ como $K(s_2) = \min_{\gamma_T} K$ tienden a $K(\tilde{t})$ cuando T se aproxima a \tilde{t} . Por ello, ε_T también tiende a cero. Intentamos ahora acotar $\int_{\gamma_T} (v_1^+)^2$.

Descompongamos γ_T en dos conjuntos disjuntos $A = \{p \in \gamma_T : v_1(p) \geq 0\}$ y $B = \{p \in \gamma_T : v_1(p) < 0\}$. Es claro que $v_1^+|_A = v_1|_A$, y que $v_1^+|_B = 0$. Entonces

$$\int_{\gamma_T} v_1^2 = \int_A v_1^2 + \int_B v_1^2 \geq \int_A v_1^2 = \int_A (v_1^+)^2 = \int_A (v_1^+)^2 + \int_B (v_1^+)^2 = \int_{\gamma_T} (v_1^+)^2.$$

Por otro lado, como $u_1 = v_1 + c_1$, con v_1 función de media nula, se sigue inmediatamente que

$$\int_{\gamma} u_1^2 = \int_{\gamma} v_1^2 + \int_{\gamma} c_1^2 \geq \int_{\gamma} v_1^2.$$

Con todo ello, se tiene

$$\int_{\gamma_T} (v_1^+)^2 \leq \int_{\gamma_T} v_1^2 \leq \int_{\gamma_T} u_1^2 = \int_{\gamma_T} u^2 \leq 1,$$

y finalmente

$$\left| \int_{\gamma_T} v_1 (K + h^2) \right| \leq \varepsilon_T L(\gamma_T)^{\frac{1}{2}},$$

de forma que el segundo sumando en (2.55) es despreciable, para T próximo a \tilde{t} .

Así, concluimos que $I(u)$ es positivo, y aplicando (2.17), Ω_T resulta ser una región estable, para valores de T suficientemente próximos a \tilde{t} . \square

2.7. Generalidades sobre superficies de revolución

Dedicamos esta última Sección del Capítulo 2 a recordar ciertas nociones básicas referentes a las superficies de revolución de \mathbb{R}^3 , que necesitaremos especialmente a lo largo del Capítulo 4. Consideremos la superficie

$$M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = g(z)^2\},$$

con $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y simétrica, esto es, $g(z) = g(-z)$, $z \in \mathbb{R}$. Supongamos también que g es función creciente para $z > 0$. Nótese que esta superficie se genera a partir de la rotación alrededor del eje vertical de la gráfica de la función g .

Algunos de los ejemplos que estudiaremos en el Capítulo 4 vendrán dados de esta forma. Por ello, nos será de gran utilidad conocer la función f asociada a una métrica de tipo (2.1), que nos permita ver M como una superficie de tipo $S^1 \times \mathbb{R}$. De esta forma, se podrán aplicar los resultados de este Capítulo 2 para estudiar dicha superficie.

Denotando por $\tau(z)$ a la longitud del arco determinado por $z > 0$ de un meridiano de M , se tiene que

$$\tau(z) = \int_0^z \sqrt{1 + g'(\xi)^2} d\xi.$$

Así, para cada $z > 0$, obtenemos el parámetro $t = \tau(z)$ asociado a altura z , a considerar en $S^1 \times \mathbb{R}$. Además, como $\tau'(z) > 0$ para todo $z > 0$, podemos considerar la función inversa τ^{-1} , y entonces la función f vendrá dada por

$$(2.57) \quad f(t) = g(\tau^{-1}(t)).$$

Desafortunadamente, en algunas ocasiones no será posible hallar explícitamente la función f , bien porque el cálculo de la inversa τ^{-1} sea complejo, o bien porque las expresiones resultantes no resulten cómodas para nuestros intereses. En tales situaciones, tendremos que trabajar directamente con la función g . A partir de (2.57) se puede comprobar que la longitud y curvatura geodésica de un círculo de revolución $S^1 \times \{z\}$ vendrán dadas por

$$\begin{aligned} L(z) &= L(\tau(z)) = 2\pi g(z), \\ h(z) &= h(\tau(z)) = \frac{f'(\tau(z))}{f(\tau(z))} = \frac{g'(z)}{g(z)} \frac{1}{\sqrt{1 + g'(z)^2}}. \end{aligned}$$

Análogamente, se obtienen las siguientes expresiones, a las que haremos referencia más adelante:

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{-g''(z)}{g(z)} \frac{1}{(1 + g'(z)^2)^2}, \\ [(f')^2 - ff''] &= \frac{g'(z)^2}{(1 + g'(z)^2)} - \frac{g(z)g''(z)}{(1 + g'(z)^2)^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, el área encerrada por un anillo horizontal, bordeado por dos paralelos, será igual a

$$A(S^1 \times [z_1, z_2]) = \int_{z_1}^{z_2} g(\xi) \sqrt{1 + g'(\xi)^2} d\xi.$$

El problema isoperimétrico en toros rotacionalmente simétricos

En este Capítulo trataremos el problema isoperimétrico en una familia concreta de superficies: *toros rotacionalmente simétricos*, que presentan una *simetría horizontal* con respecto al paralelo de mayor longitud, y con *curvatura de Gauss decreciente* como función de la distancia a dicho paralelo. Un ejemplo de superficie de esta familia es el toro de revolución estándar.

El principal resultado que obtenemos es la clasificación completa de las regiones estables que pueden aparecer en estas superficies (Teorema 3.3.6), además de discutir cuales de esos conjuntos constituyen regiones isoperimétricas. Téngase en cuenta que la compacidad de las superficies asegura, en este caso, la existencia de soluciones isoperimétricas.

Seguiremos el esquema descrito en el Capítulo 1. Para ello, y con vistas a utilizar los resultados referentes a superficies de tipo $S^1 \times I$, nos centraremos en un intervalo acotado, y será necesario identificar los paralelos del borde de $S^1 \times I$, para que la superficie resultante sea un toro rotacionalmente simétrico.

En la Sección 3.2 clasificamos las curvas con curvatura geodésica constante en estas superficies (Teorema 3.2.5), a partir de los resultados generales de la Sección 2.3. Dichas curvas resultan ser los círculos de revolución (o paralelos), las geodésicas verticales, los nodoides, los onduloideos, y un tipo de curvas particular, las hélices.

A partir de estas curvas, se obtiene en la Sección 3.3 la lista de regiones estables que pueden aparecer:

- i) discos bordeados por curvas de curvatura geodésica constante (simétricos respecto del paralelo de mayor longitud, o contenidos donde la curvatura de Gauss es constante),
- ii) anillos horizontales bordeados por dos círculos de revolución (simétricos o no simétricos respecto del paralelo de menor longitud),
- iii) uniones de anillos verticales, cada uno de ellos bordeado por dos geodésicas verticales, o uniones de anillos bordeados por curvas tipo hélice,
- iv) anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución,
- v) uniones de un disco y un anillo simétrico.

Mostraremos además que todas estas posibilidades realmente pueden darse, comprobando su existencia y su carácter estable en ejemplos concretos.

Finalmente, en la Sección 3.4 analizamos qué regiones estables pueden ser isoperimétricas. Se descartarán las uniones de anillos bordeados por hélices, y las formadas por más de un anillo vertical, y proporcionaremos ejemplos en los que discos, anillos horizontales, anillos verticales y anillos bordeados por onduloide y círculo de revolución son soluciones isoperimétricas. El caso de las uniones de un disco y un anillo simétrico no ha podido ser descartado en general, si bien no son soluciones en ninguno de los ejemplos que hemos estudiado.

Resaltamos que soluciones isoperimétricas en un toro llano de dimensión dos se pueden determinar de forma sencilla, y consisten en discos para valores pequeños del área, y en bandas bordeadas por dos geodésicas de longitud mínima (véanse [55], [56]). Sin embargo, el mismo problema en el toro de revolución estándar ha permanecido sin resolver durante mucho tiempo (tal y como se comenta en [34]), a pesar de ser una superficie con características y propiedades bien conocidas. A partir de nuestra clasificación de regiones estables, conseguimos reducir el problema a una comparación de perímetros entre los distintos candidatos. En la Sección 3.4, describiremos las distintas soluciones que aparecen en diversos toros de revolución estándar, caracterizando totalmente las regiones isoperimétricas en ciertos casos (Teorema 3.4.9).

3.1. Descripción de nuestras superficies

A lo largo de este Capítulo, las superficies que consideraremos serán toros rotacionalmente simétricos, esto es, dotados con un grupo uniparamétrico de isometrías. Además, supondremos que dichas superficies son simétricas y con curvatura de Gauss decreciente desde el paralelo de mayor longitud.

Realizaremos nuestro estudio apoyándonos en los resultados obtenidos en el Capítulo 2, por lo que primero hemos de precisar que dichos toros de revolución pueden verse como superficies $S^1 \times I$ con adecuada métrica de tipo (2.1). En realidad, será necesario realizar cierta identificación adicional sobre los paralelos del borde de $S^1 \times I$ para que se obtenga un toro de revolución. Describamos inicialmente esta identificación.

Sea $I = [-t_0, t_0]$ un intervalo real *acotado*, con $t_0 \in \mathbb{R}$, y consideremos la superficie $S^1 \times I$ con métrica de tipo (2.1), definida por medio de una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ positiva, simétrica, de clase C^1 , y C^2 a trozos. Además, asumiremos que

$$(3.1) \quad f'(t_0) = f'(-t_0) = 0.$$

Nótese que esta superficie se corresponde con un anillo de revolución acotado, cuya curvatura de Gauss K es, en general, continua a trozos. Supondremos también que K es decreciente con respecto a la distancia al ecuador $S^1 \times \{0\}$.

Mediante la *identificación* de los paralelos $S^1 \times \{t_0\}$ y $S^1 \times \{-t_0\}$ que componen el borde de dicho anillo acotado (identificación que se hace de forma diferenciable gracias a (3.1)), la superficie que se obtiene finalmente es un toro rotacionalmente simétrico, que en lo que sigue denotaremos por M , que es simétrico y con curvatura de Gauss decreciente desde el ecuador.

De esta manera, las principales magnitudes geométricas, como la curvatura de Gauss, o la longitud y la curvatura geodésica de los círculos de revolución, vendrán dados por las expresiones que aparecen en la Sección 2.2, y los resultados obtenidos en el Capítulo 2 se podrán aplicar en este contexto.

Nota 3.1.1. La anterior parametrización de nuestros toros de revolución, y la hipótesis de monotonía sobre la curvatura de Gauss K , hace que el valor máximo de K se alcance sobre el ecuador $S^1 \times \{0\}$, mientras que el mínimo se realiza sobre el paralelo $S^1 \times \{t_0\} = S^1 \times \{-t_0\}$.

Las hipótesis anteriores determinan algunas propiedades de la superficie, que quedan recogidas en el siguiente Lema.

Lema 3.1.2. *Sea M un toro de revolución, simétrico y con curvatura de Gauss decreciente desde el ecuador. Entonces,*

- i) *La función f es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, t_0]$.*

- ii) La función $(f')^2 - ff''$ es creciente en el intervalo $(-t_0, 0)$, y decreciente en el intervalo $(0, t_0)$.
- iii) La curvatura geodésica $h(t)$ de un círculo de revolución $\mathbb{S}^1 \times \{t\}$ es negativa en el intervalo $(0, t_0)$, y positiva en $(-t_0, 0)$. Como consecuencia, $h(t)$ sólo se anula para $t = 0$ ó para $t = t_0$.

DEMOSTRACIÓN.

i) Como nuestra superficie es compacta, contendrá puntos elípticos (esto es, puntos con curvatura de Gauss positiva), por lo que $K(0) > 0$. Por otra parte, al ser un toro de revolución, también contendrá puntos hiperbólicos (esto es, con curvatura negativa), por lo que $K(t_0) < 0$. A partir de la monotonía de K , se sigue que será estrictamente positiva en $[0, t_1)$, nula en $[t_1, t'_1]$, y estrictamente negativa en $(t'_1, t_0]$, siendo t_1, t'_1 dos puntos del intervalo $(0, t_0)$ que podrían coincidir.

Como $(f')' = f'' = -Kf$ a partir de (2.2), el anterior razonamiento determina el signo de f'' , y en consecuencia, el crecimiento de f' . Teniendo en cuenta la hipótesis (3.1) y que $f'(0) = 0$, es fácil deducir que f' es estrictamente negativa en $(0, t_0)$, lo que prueba i).

ii) Es consecuencia de que $(f')^2 - ff''$ y K tengan el mismo comportamiento monótono (véase la Nota 2.2.2).

iii) En el apartado i) hemos visto que f' es negativa en $(0, t_0)$, por lo que $h(t) = f'(t)/f(t)$ también será negativa en dicho intervalo. Por otro lado, se deduce de las hipótesis sobre f que $h(0) = h(t_0) = 0$. La demostración se concluye teniendo en cuenta la antisimetría de $h(t)$ dada por el Lema 2.3.4. \square

Nota 3.1.3. Como la función f es simétrica, se deduce del apartado i) del Lema 3.1.2 que el ecuador $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ es el paralelo de mayor longitud de M , mientras que $\mathbb{S}^1 \times \{t_0\}$ es el de menor longitud.

Nota 3.1.4. Ya hemos comentado que la función $(f')^2 - ff''$ presenta el mismo carácter monótono que la curvatura de Gauss. Por tanto, será decreciente en el intervalo $(0, t_0)$. Nótese que

$$[(f')^2 - ff''](0) = f(0)^2 K(0) > 0,$$

y que

$$[(f')^2 - ff''](t_0) = f(t_0)^2 K(t_0) < 0.$$

Así, en caso de que la función f es de clase C^2 , existirá por continuidad algún instante donde $(f')^2 - ff''$ se anule. Si eso ocurre únicamente para un instante $t_1 \in (0, t_0)$, entonces $(f')^2 - ff''$ será positiva en $[0, t_1)$ y negativa en $(t_1, t_0]$. En virtud del Lema 2.3.4, eso implica que $h(t)$ es decreciente en $[0, t_1)$ y creciente en $(t_1, t_0]$. Si por el contrario, hay un intervalo $J \subset (0, t_0)$ donde $(f')^2 - ff''$ se anula, el comportamiento será el mismo, con la salvedad de que $h(t)$ será constante sobre el intervalo J .

Si f es de clase C^2 a trozos, podría no haber puntos para los que $(f')^2 - ff''$ no se anule. Sin embargo, si ha de existir un instante $t'_1 \in (0, t_0)$ en el que tal función cambia de signo. En este caso, el mismo razonamiento anterior nos dirá que $h(t)$ es decreciente en $[0, t'_1)$ y creciente en (t'_1, t_0) .

De esta manera, el comportamiento de $h(t)$ queda totalmente determinado (teniendo en cuenta la antisimetría existente).

Mostramos ahora dos ejemplos de superficies incluidas en esta familia de superficies.

Ejemplo 3.1. El toro de revolución estándar, obtenido al girar un círculo de radio r alrededor de un eje contenido en el mismo plano que el círculo, y cuyo centro se encuentra a una distancia $a > 0$ de dicho eje, con $a > r$, es una de las superficies que estamos

considerando. En este caso, el intervalo I puede tomarse como $[-\pi r, \pi r]$, y la métrica (2.1) vendrá dada por la función

$$f(t) = a + r \cos(t/r), \quad t \in I.$$

Dicha función es positiva y de clase C^∞ , y la curvatura de Gauss (2.2) será igual a

$$K(t) = \frac{\cos(t/r)}{r^2(a + r \cos(t/r))}, \quad t \in I,$$

que es continua y estrictamente decreciente en $(0, \pi r)$.

Ejemplo 3.2. Otro ejemplo viene dado por la siguiente superficie: sea S una esfera de radio $a > 0$, a la que se le han quitado dos discos abiertos idénticos, cada uno centrado en un polo. Denotemos por t^* y $-t^*$ las alturas verticales a las que se encuentran las dos componentes del borde de S . La métrica (2.1) en S vendrá dada por

$$f(t) = \frac{1}{a} \cos(at), \quad t \in [-t^*, t^*].$$

Pegamos un anillo hiperbólico acotado de curvatura constante $-b^2$ (con $b > 0$) a cada una de las componentes de ∂S , de forma adecuada para obtener una superficie de clase C^1 , y C^2 a trozos (ver la Nota 3.1.6 posterior). Denotemos por H_1 al anillo hiperbólico superior, de altura máxima d/b . Entonces, la métrica (2.1) en H_1 vendrá dada por

$$f(t) = c \cosh(d - bt), \quad t \in [t^*, d/b],$$

con $c > 0$. De igual manera, en el anillo hiperbólico inferior H_2 , la métrica (2.1) vendrá determinada por la correspondiente simetrización de f .

Nota 3.1.5. Imponemos que la altura máxima de H_1 sea d/b por comodidad, para que el mínimo valor alcanzado por f sea $f(d/b) = c$.

Nota 3.1.6. Es posible construir una superficie de clase C^1 , y C^2 a trozos mediante la construcción anterior; equivalentemente, los parámetros a, b, c, d y t^* que aparecen en la definición de la función f pueden determinarse apropiadamente, tal y como se detalla a continuación.

Fijemos $a > 0$ y consideremos la esfera de \mathbb{R}^3 de radio a centrada en el origen. Elijamos $t^* \in (0, \pi/2)$, que será la altura a la que se encontrará el disco, centrado en el polo norte, que será suprimido de la esfera (nótese que para cada t^* , hay un único disco horizontal a dicha altura). Veamos qué condición ha de verificar b , lo que determinará el anillo hiperbólico a considerar.

En el paralelo $\mathbb{S}^1 \times \{t^*\}$, como queremos que la superficie esté bien definida y sea de clase C^1 , f y f' han de estar bien definidas; eso es equivalente a que se den las dos igualdades siguientes:

$$(3.2) \quad \frac{1}{a} \cos(at^*) = c \cosh(d - bt^*),$$

$$(3.3) \quad -\sin(at^*) = -bc \sinh(d - bt^*).$$

Como

$$\cosh^2(d - bt^*) - \sinh^2(d - bt^*) = 1,$$

se sigue que

$$\frac{1}{a^2 c^2} \cos^2(at^*) - \frac{1}{b^2 c^2} \sin^2(at^*) = 1.$$

Despejando, nos queda

$$(3.4) \quad c^2 = \frac{1}{a^2} \cos^2(at^*) - \frac{1}{b^2} \sin^2(at^*).$$

De ahí se sigue que, necesariamente,

$$\frac{1}{a^2} \cos^2(at^*) - \frac{1}{b^2} \sin^2(at^*) > 0,$$

de donde obtenemos que

$$b^2 > a^2 \frac{\sin^2(at^*)}{\cos^2(at^*)} = a^2 \tan^2(at^*),$$

y entonces

$$(3.5) \quad b > a \tan(at^*),$$

condición que debe verificar b para que f y f' estén bien definidas, y nuestra superficie sea de clase C^1 . Seguidamente, tomando b satisfaciendo (3.5), a partir de (3.4), se tiene

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{1}{a^2} \cos^2(at^*) - \frac{1}{b^2} \sin^2(at^*)} \\ &= \frac{1}{ab} \sqrt{(a^2 + b^2) \cos^2(at^*) - a^2}, \end{aligned}$$

que sólo depende de los parámetros ya fijados a , b y t^* . Finalmente, de la ecuación (3.2) se deduce que

$$(3.6) \quad d = bt^* + \cosh^{-1} \left(\frac{\cos(at^*)}{ac} \right).$$

Esto prueba que la función f está bien definida en $[-d/b, d/b]$, y que es de clase C^1 . Como la curvatura de Gauss K toma constantes distintas en S y en H_1 , se tiene que K es continua a trozos en $[0, d/b]$, y decreciente desde el ecuador. Además, f resulta simétrica respecto de $S^1 \times \{0\}$, y

$$f'(d/b) = -bc \sinh(0) = 0,$$

por lo que se satisfacen todas las hipótesis necesarias para que la función f proporcione un toro rotacionalmente simétrico de nuestra familia.

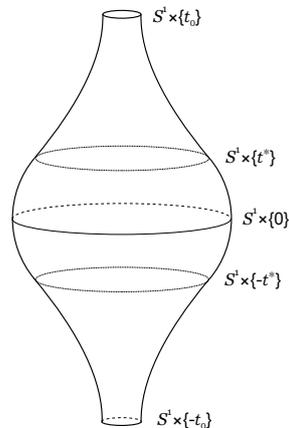


FIGURA 3.1. Toro rotacionalmente simétrico, con curvatura de Gauss decreciente desde el ecuador y continua a trozos

Nota 3.1.7. Este segundo ejemplo también podría considerarse a partir de la función

$$f(t) = \cos(at), \quad t \in [-t^*, t^*]$$

en S , obteniendo otro tipo de superficies distintas, si bien nosotros no profundizaremos en su estudio particular.

3.2. Curvas con curvatura geodésica constante

En esta Sección pretendemos clasificar las curvas con curvatura geodésica constante que aparecen en nuestros toros de revolución. Para ello, nos serviremos del sistema (2.7), descrito en la Proposición 2.3.1 para superficies $S^1 \times I$, y de la primera integral (2.8) asociada. Empecemos caracterizando las curvas con curvatura constante que no tocan a los paralelos $S^1 \times \{-t_0\}, S^1 \times \{t_0\}$.

Teorema 3.2.1. *Sea M un toro rotacionalmente simétrico con curvatura de Gauss decreciente desde el ecuador. Supongamos además que M presenta una simetría horizontal. Sea C una curva conexa, cerrada y embebida en M con curvatura geodésica constante, que no corta al paralelo $S^1 \times \{t_0\}$.*

Entonces C es un círculo de revolución, un nodoide o un onduloide.

DEMOSTRACIÓN. Parametricemos la curva C como $(\theta(s), t(s))$, solución del sistema (2.7), contenida en $S^1 \times [-t_0, t_0]$, con las hipótesis e identificación anteriores.

La primera observación es que tanto el mínimo como el máximo de $t|_C$ se han de alcanzar. Si esto no ocurriese, como $t|_C$ toma valores en el intervalo acotado $[-t_0, t_0]$, la única posibilidad es que existan dos líneas horizontales $S^1 \times \{h_1\}, S^1 \times \{h_2\}$ tales que $t(s) \in (h_1, h_2)$, y que $t(s)$ se aproxime asintóticamente a cada una de ellas. Pero como la curva es cerrada, esto no puede ocurrir. Por tanto, $t|_C$ alcanzará sus valores máximo y mínimo.

Si $t|_C$ es constante, entonces C es un círculo de revolución.

Supongamos ahora que $t|_C$ alcanza un máximo estricto en s_0 (es decir, $t|_C$ no es constante). Sea $s_1 > s_0$ el siguiente punto crítico de $t|_C$, que resultará ser un mínimo. Entonces, usando la Proposición 2.3.5, se concluye que C es un onduloide o un nodoide. \square

Nota 3.2.2. En el Teorema anterior, el hecho de que la curvatura de Gauss sea decreciente desde determinado paralelo no juega ningún papel, esencialmente porque la Proposición 2.3.5 se verifica con independencia del comportamiento que presente la curvatura. Este hecho sí se usará de manera esencial en la siguiente demostración.

Tratemos ahora las curvas que tocan al paralelo $S^1 \times \{t_0\}$. Dentro de dichas curvas se van a encontrar las curvas tipo *hélice* (véase la Figura 3.2). Dichas curvas son geodésicas de nuestra superficie, y en general, no siempre son curvas cerradas; si las vemos contenidas en $S^1 \times I$, resultan disconexas cuando $\sigma \in (0, \pi/4)$ (en estos casos, la identificación del paralelo $S^1 \times \{-t_0\}$ con $S^1 \times \{t_0\}$ permite que lleguen a ser cerradas).

El siguiente Teorema completa la clasificación de curvas cerradas y embebidas con curvatura geodésica constante en nuestras superficies.

Teorema 3.2.3. *Sea M un toro rotacionalmente simétrico con curvatura de Gauss decreciente desde el ecuador. Supongamos además que M presenta una simetría horizontal. Sea C una curva conexa, cerrada y embebida en M con curvatura geodésica constante, que corta al paralelo $S^1 \times \{t_0\}$.*

Entonces C es una geodésica vertical, una curva tipo hélice, o una de las curvas indicadas en el Teorema 3.2.1.

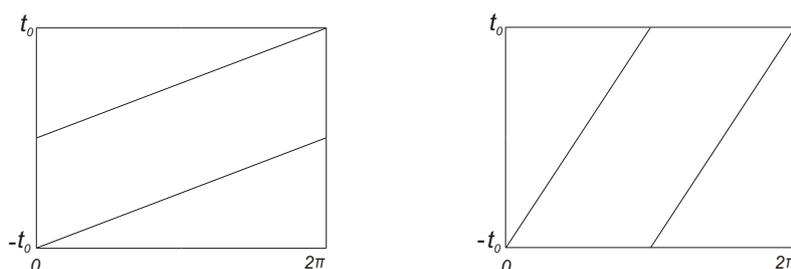


FIGURA 3.2. Dos hélices cerradas para uno de nuestros toros, vistas en $[0, 2\pi] \times [-t_0, t_0]$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la curva C contenida en $S^1 \times [-t_0, t_0]$, parametrizada como solución $(\theta(s), t(s))$ de (2.7).

Supongamos que C toca tangencialmente al paralelo $S^1 \times \{t_0\}$ en un instante s_0 , y sea $\theta_0 = \theta(s_0)$. Se tendrá que $\sigma(s_0) = \pi/2$. Entonces, para cada t^* próximo a t_0 , existirán dos instantes s_1, s_2 tales que $t(s_1) = t(s_2) = t^*$. Como la curva tiene curvatura geodésica constante, se sigue que la primera integral (2.8) asociada $E(s)$ será también constante, con lo que $E(s_1) = E(s_2)$. Pero esto implica que $\sin \sigma(s_1) = \sin \sigma(s_2)$, de donde $\sigma(s_1) = \sigma(s_2)$, o $\sigma(s_1) = \pi - \sigma(s_2)$. Es claro que la primera opción no puede darse, y entonces, repitiendo este razonamiento para cada valor t^* tomado por $t|_C$, concluimos que C presenta una simetría respecto del eje vertical $\{\theta_0\} \times [-t_0, t_0]$.

El argumento anterior implica además que si C toca también al paralelo $S^1 \times \{-t_0\}$, lo hará de forma tangencial (tómense $s_1 = s_0$, y s_2 el instante de contacto con $S^1 \times \{-t_0\}$, y téngase en cuenta que $\sigma(s_0) = \pi/2$). En tal caso, se puede aplicar la Proposición 2.3.5 para concluir que C es un nodoide o un onduloide tocando tangencialmente a $S^1 \times \{t_0\}$. En el caso del nodoide, se creará un contacto irregular tras identificar los paralelos que forman el borde de $S^1 \times [-t_0, t_0]$.

Por otro lado, si la curva C no toca al paralelo $S^1 \times \{-t_0\}$, por la simetría vertical existente se deduce que existen paralelos de la superficie que no cortan a C . Sea p uno de tales paralelos, y reparametricemos $S^1 \times I$ de manera que los bordes a identificar (para obtener un toro) coincidan con p . Así, se obtiene una nueva superficie $S^1 \times I$ (que habrá perdido la simetría y la monotonía de la curvatura de Gauss), y nuestra curva no tocará el borde de la nueva superficie. Estamos en situación de aplicar el Teorema 3.2.1 (para el que no son necesarias las hipótesis sobre la curvatura de Gauss, tal y como se indica en la Nota 3.2.2), para concluir que C es un paralelo, un nodoide o un onduloide (tocando tangencialmente $S^1 \times \{t_0\}$).

Supongamos ahora que C corta transversalmente a $S^1 \times \{t_0\}$. Si existe un paralelo que no interseca a la curva, podemos proceder como antes para afirmar, vía una reparametrización, que C es un paralelo, un nodoide o un onduloide (cortando transversalmente a $S^1 \times \{t_0\}$). Nos centraremos entonces en el caso de que todo paralelo de $S^1 \times [-t_0, t_0]$ corte a nuestra curva. Hacemos la siguiente discusión: que exista una componente conexa de C uniendo los paralelos $S^1 \times \{t_0\}$ y $S^1 \times \{-t_0\}$, o que no exista tal componente.

i) En el caso de que dichos paralelos no estén conectados por C , consideremos una componente de la curva que corte a uno de estos paralelos, por ejemplo, a $S^1 \times \{t_0\}$. Entonces, necesariamente dicha componente partirá y llegará al paralelo $S^1 \times \{t_0\}$, esto es, sus extremos se hallarán en este paralelo (esto es debido a que la componente no

puede llegar a $S^1 \times \{-t_0\}$, y a que C es una curva cerrada). Usando el argumento del principio de la demostración, para cada altura t^* de dicha componente, los correspondientes instantes s_1, s_2 tales que $t(s_1) = t(s_2) = t^*$ verificarán que $\sigma(s_1) = \pi - \sigma(s_2)$, y en consecuencia, la componente será simétrica verticalmente.

La consecuencia del anterior razonamiento es que existe de un paralelo que no corta a la componente de C que estamos considerando. La existencia de dicho paralelo se deduce a partir de la primera integral (2.8). Sea s_3 el instante tal que $t(s_3)$ alcanza su mínimo valor sobre la componente. Como todo paralelo corta a C , necesariamente habrá otro instante s_4 , correspondiente a otra componente distinta, tal que $t(s_3) = t(s_4)$. Como $E(s_3) = E(s_4)$, se tiene que $\sigma(s_3) = \sigma(s_4)$, con lo que $\sigma(s_4) = \pi/2$, y por tanto, $t(s_4)$ será un máximo o mínimo local. Así, $S^1 \times \{t(s_3)\}$ tocará tangencialmente a la curva C . Reparametrizando $S^1 \times I$ como antes, para que los paralelos a identificar coincidan con $S^1 \times \{t(s_3)\}$, concluimos, como antes, que C es un onduloide o un nodoide (este último presentando un contacto irregular).

ii) En el caso de que los paralelos $S^1 \times \{-t_0\}$ y $S^1 \times \{t_0\}$ estén conectados por una componente de C , llamemos s_0, s_1 a los instantes tales que $t(s_0) = -t_0, t(s_1) = t_0$. Tomando $c = 0$ en la primera integral (2.8), se tendrá que

$$E(s_0) = f(-t_0) \sin \sigma(s_0) - h \int_0^{-t_0} f(\xi) d\xi,$$

$$E(s_1) = f(t_0) \sin \sigma(s_1) - h \int_0^{t_0} f(\xi) d\xi.$$

Es claro que $f(t_0) = f(-t_0)$, que $\int_0^{-t_0} f(\xi) d\xi = -\int_0^{t_0} f(\xi) d\xi$, y que $\sin \sigma(s_0) = \sin \sigma(s_1)$ (si $\theta(s_0) = \theta(s_1)$, es claro por la continuidad y diferenciabilidad de la curva, tras la identificación; y si $\theta(s_0) \neq \theta(s_1)$, se puede obtener a partir de la primera integral, que cada intersección de la curva con el paralelo $S^1 \times \{t_0\}$ se produce con el mismo ángulo). Con todo esto, como $E(s_0) = E(s_1)$, se llega a que $h = 0$, luego la curva es una geodésica de $S^1 \times [-t_0, t_0]$, esto es, una geodésica vertical o una hélice. \square

Nota 3.2.4. En la anterior demostración se ha usado que la primera integral (2.8) es constante sobre la curva cerrada C vista en el toro; lo que ocurre es que al verla contenida en el $S^1 \times [-t_0, t_0]$, puede que dicha curva se descomponga en varias componentes, pero la primera integral seguirá tomando el mismo valor constante en cada componente.

Como conclusión, se tiene el siguiente Teorema, que engloba lo obtenido en los Teoremas 3.2.1 y 3.2.3.

Teorema 3.2.5. *Sea M un toro de revolución, simétrico y con curvatura decreciente desde el ecuador. Sea $C \subset M$ una curva cerrada y embebida con curvatura geodésica constante.*

Entonces, C es un círculo de revolución, un nodoide, un onduloide, una geodésica vertical o una hélice.

3.2.1. Existencia de onduloides estables. Pasamos ahora a demostrar, utilizando los resultados de la Sección 2.5, la existencia de onduloides cerrados, embebidos y estables en nuestra familia de superficies. Para ello, nos centraremos en los toros de revolución estándar del Ejemplo 3.1, que vienen determinados por la función

$$f(t) = a + r \cos(t/r), \quad t \in [-\pi r, \pi r].$$

En primer lugar veremos que hay existencia de onduloides cerrados y embebidos en cualquiera de estos toros, aplicando el Lema 2.5.4. Y después, usando el Lema 2.5.9, justificaremos que hay onduloides estables en *determinados* toros de revolución estándar.

La primera observación que hacemos es que las hipótesis del Lema 2.5.4 se verifican en cualquier toro estándar, ya que es inmediato comprobar que

$$[(f')^2 - ff''](\tilde{t}) = 1, \quad \text{para } \tilde{t} = \pi r/2.$$

Además,

$$K(t) = \frac{-f''(t)}{f(t)} = \frac{\cos(t/r)}{r(a + r \cos(t/r))},$$

que es una función diferenciable, con

$$K'(t) = -\frac{a \sin(t/r)}{r^2 (a + r \cos(t/r))^2}.$$

Como $K'(\tilde{t}) = -a^{-1}r^{-2} < 0$, se sigue que la curvatura de Gauss K es estrictamente decreciente en $t = \tilde{t}$. Con esto ya podemos concluir, a partir del Lema 2.5.4, que existe una familia $\gamma(\theta, T, h_o(T))$ de onduloideos cerrados y embebidos, con T próximo a \tilde{t} , parametrizados por el punto máximo T alcanzado por la coordenada t .

En cuanto a la *estabilidad*, reseñamos en primer lugar que la condición (2.43) que aparece en el Lema 2.5.8 también se verifica, ya que el término de la izquierda de (2.43) es igual, en este caso, a

$$\frac{5a^2 + 9r^2}{r^4},$$

que es estrictamente positivo. En consecuencia, la derivada del periodo de un onduloide cerrado y embebido (de la familia anterior) con respecto al punto máximo T es positiva, para $T > \tilde{t}$ (derivada calculada manteniendo fija la curvatura geodésica). Esto nos va a permitir determinar el segundo valor propio para el operador de Jacobi asociado a tales curvas (necesario para poder aplicar el Lema 2.5.9).

Lema 3.2.6. *Sea C un onduloide cerrado y embebido en un toro de revolución estándar, suficientemente próximo a $S^1 \times \{\tilde{t}\}$. Entonces el segundo valor propio λ_2 del operador de Jacobi en C es igual a cero.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 2.4.9 sabemos que $\lambda_2 \leq 0$. Supongamos que $\lambda_2 < 0$. Entonces, a partir del Lema 2.5.5, se sigue que λ_1, λ_2 satisfacen la condición de Neumann en cualquier trozo fundamental C' de C , y además, $\lambda_2^N(C') = \lambda_2 < 0$. Pero esto contradice el Lema 2.5.6, ya que hemos visto anteriormente que la derivada del periodo es positiva. Por tanto, necesariamente $\lambda_2 = 0$. \square

Ahora ya estamos en condiciones de probar el resultado que asegura la existencia de onduloideos cerrados, embebidos y estables, en ciertos toros de revolución estándar.

Lema 3.2.7. *Sea M un toro de revolución estándar del Ejemplo 3.1, con $r < a < 3r$. Entonces hay onduloideos cerrados y embebidos en M que son estables.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma(\theta, T, h_o(T))$ la familia de onduloideos cerrados y embebidos, con $T > \tilde{t}$ suficientemente próximos, que existe gracias al Lema 2.5.4. Sea C una de estas curvas. Por los Lemas 2.4.9 y 3.2.6, se tiene que el primer valor propio del operador de Jacobi en C es negativo, y el segundo valor propio es igual a cero; esto es, $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$, por lo que se puede aplicar el Lema 2.5.9 para estudiar la estabilidad del onduloide C .

Nos ocupamos primero de calcular la derivada de la curvatura geodésica h_o de los onduloideos de la familia, para valores de T mayores que \tilde{t} ; más concretamente, nos interesa conocer su signo. Ya se ha visto que $h'_o(\tilde{t}) = 0$ (recuérdese la expresión (2.37), vista en

la demostración del Lema 2.5.4). Por otra parte, derivando sucesivamente (2.38) se tiene que

$$F_T + F_h h'_o = 0$$

y

$$(3.7) \quad F_{TT} + 2 F_{Th} h'_o + F_{hh} (h'_o)^2 + F_h h''_o = 0.$$

Pretendemos determinar el valor de $h''_o(\tilde{t})$, que nos permitirá conocer el signo de $h'_o(T)$. Si sustituimos directamente, como $F_h(\tilde{t}, \tilde{h}) = \sigma_h(\pi) = 0$ (véase (2.30)), no obtenemos ninguna información de la anterior igualdad (3.7). Pero si derivamos dicha igualdad una vez más, evaluando en $T = \tilde{t}$, es rutinario ver que

$$F_{TTT}(\tilde{t}, \tilde{h}) + 3 F_{Th}(\tilde{t}, \tilde{h}) h''_o(\tilde{t}) = 0,$$

y entonces

$$(3.8) \quad h''_o(\tilde{t}) = \frac{-F_{TTT}(\tilde{t}, \tilde{h})}{3 F_{Th}(\tilde{t}, \tilde{h})} = \frac{-\sigma_{TTT}(\pi)}{3 \sigma_{Th}(\pi)} = \frac{-\sigma_{TTT}(\pi)}{3 \rho/2},$$

donde hemos tenido en cuenta la definición (2.25) de F y la expresión (2.34) de su hessiano en (\tilde{t}, \tilde{h}) (recuérdese que el valor de ρ , ya definido en (2.34), es $\pi f(\tilde{t})^3 K'(\tilde{t})$).

El valor de $\sigma_{TTT}(\pi)$ ya ha sido calculado en (2.48); en este caso, es fácil comprobar que

$$\sigma_{TTT}(\pi) = \frac{\pi (5 a^2 + 9 r^2)}{8 a r^4}$$

y

$$\rho = \frac{-\pi a^2}{r^2},$$

con lo que finalmente

$$(3.9) \quad h''_o(\tilde{t}) = \frac{5 a^2 + 9 r^2}{12 a^3 r^2}.$$

Como $h''_o(\tilde{t}) > 0$, esto implica que h'_o es una función estrictamente creciente en $T = \tilde{t}$; luego para $T > \tilde{t}$, concluimos que $h'_o(T) > h'_o(\tilde{t}) = 0$ (en virtud de (2.37)); en definitiva,

$$h'_o(T) > 0, \quad \text{para } T > \tilde{t}.$$

Nos centramos ahora en discutir el signo de la variación del área inducida por esta deformación por onduloideas (detallada en la Nota 2.5.10), dada por

$$(3.10) \quad \varphi_T(\theta) = \gamma(\theta, T, h_o(T)) = (\theta, t(\theta, T, h_o(T))).$$

Es fácil ver que el campo vectorial asociado es igual a

$$\frac{\partial}{\partial T} \varphi_T(\theta) = \left(t_T(\theta) + h'_o(T) t_h(\theta) \right) \partial_t,$$

con lo que la derivada del área a lo largo de esta deformación viene dada por

$$\int_0^{2\pi} f(T) \left(t_T(\theta) + h'_o(T) t_h(\theta) \right) d\theta.$$

Para $T = \tilde{t}$, teniendo en cuenta (2.28) y que $h'_o(\tilde{t}) = 0$, esa expresión se reduce a

$$\int_0^{2\pi} f(\tilde{t}) t_T(\theta) d\theta = f(\tilde{t}) \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta,$$

que claramente se anula.

Derivando una vez más, resulta que la segunda derivada del área, en $T = \tilde{t}$, es igual a

$$\int_0^{2\pi} \left(f'(\tilde{t}) t_T(\theta)^2 + f(\tilde{t}) (t_{TT}(\theta) + h_o''(\tilde{t}) t_h(\theta)) \right) d\theta,$$

donde de nuevo se ha tenido en cuenta que $h_o'(\tilde{t}) = 0$. En nuestro caso, a partir de las expresiones (2.28), (2.31), y (2.29), dicha integral se puede calcular, obteniendo finalmente

$$\frac{(a^2 - 9r^2)\pi}{6r^2} < 0,$$

ya que $a < 3r$ por hipótesis. Así, la variación del área es una función estrictamente decreciente en $T = \tilde{t}$, por lo que será estrictamente negativa para $T > \tilde{t}$.

Con estos cálculos, se concluye, aplicando el Lema 2.5.9, que C es un onduloide estable, para valores de T próximos a \tilde{t} , con $T > \tilde{t}$. \square

Esto muestra, en general, que en nuestros toros de revolución pueden existir onduloides cerrados, embebidos y estables, por lo que dichas curvas han de ser tenidas en cuenta como posibles componentes del borde de regiones estables e isoperimétricas.

Nota 3.2.8. Precisamos brevemente que, aunque una curva C cerrada de tipo *hélice* no encierra por sí misma área alguna, se puede estudiar su estabilidad, tal y como se indicó en la Nota 2.4.20 para geodésicas verticales. De hecho, el mismo razonamiento usado en el Lema 2.6.3 permite llegar a idéntica conclusión: cualquier curva cerrada del mismo tipo de homotopía y próxima a C tendrá más perímetro que C (esto se debe a que estas curvas también son geodésicas, y entonces la misma demostración se puede adaptar). Así, igual que para las geodésicas verticales, se tiene que *todas* las hélices cerradas de nuestra superficie son *estables*.

3.3. Regiones estables

El principal resultado de esta Sección es la clasificación de las regiones estables que aparecen en nuestros toros de revolución, detallada en el Teorema 3.3.6. Dicha clasificación va a derivarse del estudio de las posibles combinaciones de curvas con curvatura geodésica constante, descritas en el Teorema 3.2.5. Además, veremos con ejemplos concretos que todas las posibilidades enunciadas en el Teorema 3.3.6 pueden llegar a darse, por lo que dicho Teorema proporciona una caracterización completa de las regiones estables. Dicha caracterización nos servirá de punto de partida para encontrar las regiones isoperimétricas de nuestras superficies.

En primer lugar, nos centramos en los anillos horizontales bordeados por dos paralelos. El Lema 2.6.1 y las hipótesis de monotonía sobre la curvatura de Gauss van a permitir describir la evolución que presentan los anillos horizontales *estables* en este tipo de toros.

3.3.1. Evolución de los anillos horizontales estables. Ya comentamos en la Nota 3.1.4 que la función $(f')^2 - ff''$ pasaba de ser positiva a ser negativa a lo largo del intervalo $[0, t_0]$. Denotemos por $t_c \in \mathbb{R}$ al ínfimo de los puntos en $[0, t_0]$ donde $(f')^2 - ff''$ es menor o igual que cero. Así, t_c representa el instante donde dicha función deja de ser positiva (dicho instante es el primer momento donde se anula, o donde cambia de signo). Como

$$K + h^2 = \frac{(f')^2 - ff''}{f^2},$$

en virtud del Lema 2.6.1 se sigue que los anillos horizontales simétricos $\mathbb{S}^1 \times [-t, t]$ serán estables si y sólo si $t \in [t_c, t_0]$.

Dicho de otra forma, si partimos del paralelo de menor longitud $S^1 \times \{t_0\}$ y vamos considerando los anillos simétricos $S^1 \times [-t, t]$ a medida que t tiende a 0, resulta que los anillos estables se corresponden con los valores de t entre t_0 y t_c , y a partir de ahí, los anillos simétricos pasan a ser inestables. Por tanto, los anillos simétricos estables se *concentrarán* en torno al paralelo de menor longitud $S^1 \times \{t_0\}$, siendo $S^1 \times [-t_c, t_c]$ el que encerrará un área mayor.

A partir de $S^1 \times [-t_c, t_c]$, surgirán los anillos horizontales asimétricos $S^1 \times [t_1, t_2]$ estables. La primera observación a tener en cuenta es que las curvaturas geodésicas de los paralelos del borde, respecto del normal interior, han de coincidir. Eso implica, según el Lema 3.1.2, que $t_1 < 0, t_2 > 0$. Además, ambos paralelos han de ser estables, por lo que

$$[(f')^2 - ff''](t_i) \leq 1, \quad i = 1, 2,$$

aplicando el Lema 2.4.16. Denotando por $\tilde{t} \in (0, t_c)$ al supremo de los puntos en $(0, t_c)$ donde $(f')^2 - ff'' \geq 1$, se sigue que $t_2 \geq \tilde{t}$ y $t_1 \leq -\tilde{t}$.

Teniendo en cuenta cómo es la curvatura geodésica $h(t)$ de los círculos de revolución, cuyo comportamiento se describió en la Nota 3.1.4 (decreciente en $(-t_c, t_c)$ y creciente en $(-t_0, -t_c) \cup (t_c, t_0)$), se tiene que para cada $t_2 \in (\tilde{t}, t_c)$, existe un único valor $t_1 \in \mathbb{R}$, contenido en $(-t_0, -t_c)$, tal que $S^1 \times [t_1, t_2]$ es un anillo asimétrico cuyo borde está formado por paralelos estables con curvatura geodésica constante respecto del normal interior. Esos son todos los *posibles* anillos asimétricos *estables*, a los que habrá que aplicar la condición (2.49) para determinar su estabilidad.

Nota 3.3.1. Hacemos notar que, dado un anillo asimétrico estable $S^1 \times [t_1, t_2]$, satisfaciendo las condiciones anteriores, se tiene, a partir del Lema 2.4.6, que

$$\lambda_1(t_2) = -\frac{[(f')^2 - ff''](t_2)}{f(t_2)^2} = -(K + h^2)(t_2) < 0,$$

ya que $t_2 \in (\tilde{t}, t_c)$. A la vista del Lema 2.4.14, el primer valor propio correspondiente al paralelo $S^1 \times \{t_1\}$ debe ser necesariamente positivo. Como $t_1 \in (-t_0, -t_c)$, eso se tendrá siempre que $[(f')^2 - ff''](t_1) \neq 0$.

Así, los anillos asimétricos estables $S^1 \times [t_1, t_2]$ se irán obteniendo para valores de t_2 desde t_c hasta \tilde{t} . En este último instante, según el Lema 2.5.1, podrán aparecer los onduloideos estables, y por tanto, los anillos estables bordeados por un onduloide y un círculo de revolución, con curvatura geodésica constante. Además, como los onduloideos tienen primer valor propio asociado negativo, los paralelos del borde de tales anillos se hallarán contenidos en $S^1 \times [-t_0, -t_c]$ (en caso contrario, tendrán primer valor propio negativo). Un criterio para estudiar la estabilidad de estos anillos viene dado en el Lema 2.6.6.

El siguiente resultado nos describe cómo son los discos estables de nuestras superficies, que estarán bordeados por nodoides cerrados, embebidos y estables.

Lema 3.3.2. *Sea C un nodoide cerrado, embebido y estable contenido en M . Entonces, C se encuentra contenido en una región con curvatura de Gauss constante, o interseca al ecuador de forma ortogonal y simétrica.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que C no se halla contenido en una región con curvatura de Gauss K constante. A partir del Lema 2.3.11, se sigue que C intersecará al ecuador $S^1 \times \{0\}$ o al paralelo $S^1 \times \{t_0\}$, de forma simétrica y ortogonal (bajo las hipótesis de nuestras superficies, los nodoides cerrados y embebidos cortan los paralelos respecto de los cuales la curvatura es monótona). Pero si dicha intersección es con $S^1 \times \{t_0\}$, como K es *creciente* desde dicho paralelo, aplicando el Lema 2.4.18 se concluye que C es inestable. \square

Nota 3.3.3. En la demostración anterior, al aplicar los Lemas 2.3.11 y 2.4.18, conviene tener presente que nuestros toros de revolución también pueden parametrizarse de forma que el paralelo $S^1 \times \{0\}$ sea el de menor longitud.

Antes de enunciar el Teorema que nos da la clasificación de las regiones estables en nuestras superficies, tratemos la estabilidad de las regiones cuyo borde contiene curvas de tipo hélice. Recuérdense que tales curvas son siempre geodésicas estables. Diremos que dos hélices C, C' son *paralelas* si C se obtiene a partir de C' , mediante una rotación cuyo eje es el mismo que el de nuestro toro de revolución. Es claro que para que dos hélices no se intersequen, han de ser necesariamente paralelas.

Lema 3.3.4. *Sea Ω una región estable de M , con una curva tipo hélice contenida en $\partial\Omega$. Entonces Ω es una unión de anillos bordeados por hélices paralelas.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, es evidente que $\partial\Omega$ debe contener un número par de hélices, ya que en caso contrario no se bordearía una región cerrada. Además, tales hélices han de ser todas paralelas, para evitar que se produzcan intersecciones.

Por otro lado, es claro que cualquier hélice interseca a paralelos, onduloideos y geodésicas verticales. Por ello, $\partial\Omega$ sólo puede contener nodoides cerrados y embebidos, además de las hélices. Pero si hubiera algún nodoide en $\partial\Omega$, como tienen primer valor propio negativo según la Nota 2.4.11, Ω resultaría inestable, aplicando los Lemas 2.4.7 y 2.4.14. Así, Ω consistirá necesariamente en una unión finita de anillos bordeados por hélices paralelas. \square

Lema 3.3.5. *Sea Ω una unión finita de anillos disjuntos bordeados por hélices paralelas. Entonces, Ω es una región estable.*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que se puede aplicar el mismo razonamiento que en el Lema 2.6.3, para demostrar que un anillo bordeado por dos hélices (y en consecuencia, una unión finita de anillos de este tipo) constituye siempre una región estable. \square

Ahora establecemos nuestro resultado principal, que describe todas las posibles regiones estables en nuestras superficies.

Teorema 3.3.6. *Sea M un toro rotacionalmente simétrico con una simetría horizontal, y con curvatura de Gauss (posiblemente discontinua) decreciente desde el paralelo de mayor longitud. Sea Ω una región estable en M . Entonces Ω es uno de estos conjuntos:*

- i) *un disco bordeado por una curva de curvatura geodésica constante, simétrico con respecto al paralelo de mayor longitud, o contenido en una región con curvatura de Gauss constante, o su complementario,*
- ii) *un anillo horizontal simétrico con respecto al paralelo de menor longitud, bordeado por dos círculos de revolución contenidos cada uno de ellos en la región $K + h^2 \leq 0$, o su complementario,*
- iii) *un anillo horizontal asimétrico bordeado por dos círculos de revolución contenidos en la región $K + h^2 \leq 4\pi^2 / L^2$ y verificando la condición (2.49), o su complementario,*
- iv) *una unión de anillos verticales, bordeados por geodésicas verticales,*
- v) *una unión de anillos bordeados por hélices paralelas,*
- vi) *un anillo bordeado por un onduloide estable, en las condiciones del Lema 2.5.1, y un círculo de revolución contenido en la región $K + h^2 < 0$,*
- vii) *una unión de un disco y un anillo simétrico con la misma curvatura geodésica, en las condiciones indicadas, o su complementario.*

DEMOSTRACIÓN. Como Ω es una región estable, se tiene que $\partial\Omega$ es una curva embebida y estable (no necesariamente conexa) de curvatura geodésica constante, con respecto al normal interior. Por el Teorema 3.2.5, $\partial\Omega$ se compondrá de círculos de revolución, geodésicas verticales, nodoides, onduloideas y hélices. Ahora razonaremos qué combinaciones de estas curvas resultan estables.

El hecho de que las curvas que conforman $\partial\Omega$ tengan curvatura geodésica constante respecto del normal interior, implica que, a lo sumo, habrá dos círculos de revolución en $\partial\Omega$. En efecto, supongamos que hubiera tres de estos círculos. Entonces, llegamos a contradicción teniendo en cuenta el Lema 3.1.2, ya que dos de ellos se hallarían en una misma mitad de M (en $S^1 \times (-t_0, 0)$ o en $S^1 \times (0, t_0)$), por lo que no se satisfaría la condición de curvatura geodésica constante (recuérdese que en cada mitad, la curvatura $h(t)$ de los paralelos, calculada respecto el normal $-\partial_t$, tiene signo constante).

En el caso de que un onduloide pertenezca a $\partial\Omega$, se sigue por el Lema 2.4.14 que no podrá estar acompañado de nodoides, geodésicas verticales o hélices, ya que el primer valor propio asociado a estas curvas es no positivo. Tampoco puede aparecer otro onduloide, aplicando el mismo resultado. Por ello, Ω se reducirá a un anillo bordeado por el onduloide y un *único* círculo de revolución (no tendría sentido si apareciesen dos de ellos, y ya hemos comentado que más de dos no pueden aparecer), con primer valor propio *estrictamente* positivo (es decir, cumpliendo $(K + h^2)(t) < 0$ a la vista del Lema 2.4.6), dando lugar a una región estable de tipo vi).

En el caso de que un nodoide pertenezca a $\partial\Omega$, un razonamiento análogo al anterior impide que en $\partial\Omega$ aparezcan onduloideas, geodésicas verticales, hélices o algún otro nodoide, por lo que las posibilidades se reducen a que el nodoide esté solo, obteniendo una región de tipo i), y en las condiciones que establece el Lema 3.3.2, o que venga acompañado de dos círculos de revolución (si hubiera uno solo, no se encerraría ningún área). En este último caso, se ha de tener necesariamente un anillo simétrico, porque para anillos asimétricos, uno de sus paralelos tiene primer valor propio negativo, al estar contenido en la región donde $K + h^2 > 0$ (véase la Nota 3.3.1), y entonces el Lema 2.4.14 nos volvería a dar inestabilidad. Así, se obtendrá una región estable de tipo vii).

Supongamos ahora que $\partial\Omega$ no contiene ni onduloideas ni nodoides. Si aparece algún círculo de revolución en $\partial\Omega$, las geodésicas verticales y las hélices quedan descartadas, ya que intersecarían a dichos círculos. Teniendo en cuenta la primera observación hecha en esta demostración, las posibilidades que quedan a Ω son ser un anillo simétrico de tipo ii), verificando la condición establecida en el Lema 2.6.1, o ser un anillo asimétrico de tipo iii), por el Lema 2.4.16.

Finalmente, por los Lemas 2.6.3 y 3.3.5, se tiene que las regiones de tipo iv) y v) son siempre regiones estables. \square

El Teorema 3.3.6 muestra las posibles regiones estables que pueden aparecer en nuestras superficies. Acabamos la Sección justificando que efectivamente todas ellas se dan en ciertas superficies.

Obviamente, existen discos de curvatura geodésica constante que son estables; en realidad, para áreas pequeñas, la solución isoperimétrica es de este tipo, como se podrá ver en posteriores ejemplos en la Sección 3.4.

En cuanto a la existencia de anillos horizontales simétricos y asimétricos *estables*, es fácil encontrar superficies (por ejemplo, toros de revolución estándar apropiados), donde la condición (2.49) del Lema 2.6.1 se cumple.

Por otra parte, ya sabemos que toda unión finita de anillos verticales, o anillos bordeados por curvas tipo hélice, es estable en cualquier toro de revolución, en virtud de los Lemas 2.6.3 y 3.3.5.

Nos centramos ahora en probar, en las posteriores Notas 3.3.7 y 3.3.10, la existencia de regiones estables de tipo vi) y vii), es decir, anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución, y uniones de un disco y un anillo simétrico, en las condiciones descritas en el Teorema 3.3.6. Empezaremos comprobando que hay superficies en las que conjuntos de tipo vi) son efectivamente estables.

Nota 3.3.7. Consideremos un toro de revolución estándar descrito en el Ejemplo 3.1, con $r < a < 3r$. Siguiendo la notación del Lema 3.2.7, sea $\gamma_T = \gamma(\theta, T, h_o(T))$ un onduloide cerrado, embebido y estable, con condición inicial T próxima a $\tilde{t} = \pi r/2$. Sea Ω_T el anillo bordeado por γ_T , y por el círculo de revolución $S^1 \times \{t(T)\}$ que tiene la misma curvatura geodésica que γ_T (con respecto al normal interior a la región que bordean), y contenido además en la región $K + h^2 < 0$ (equivalentemente, con primer valor propio asociado al operador de Jacobi positivo). Obsérvese que como $h_o(T)$ estará próximo a $\tilde{h} = h(\tilde{t})$, es posible encontrar dicho paralelo $S^1 \times \{t(T)\}$ cumpliendo las condiciones anteriores en nuestro toro estándar (por las propiedades de la curvatura geodésica $h(t)$ de los paralelos descritas, en el Lema 3.1.2 y en la Nota 3.1.4).

Veamos que estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.6.6 para asegurar la estabilidad de Ω_T . En primer lugar, para cualquier toro de revolución estándar, se tiene que $[(f')^2 - ff''](\tilde{t}) = 1$ para $\tilde{t} = \pi r/2$. Además, la curvatura de Gauss K es estrictamente decreciente en entornos de \tilde{t} . Finalmente, es rutinario comprobar (véase el Lema 3.3.9 posterior) que el último anillo asimétrico de la superficie (asociado a \tilde{t}) satisface *estrictamente* la condición de estabilidad (2.49).

Por tanto, estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.6.6, para concluir que Ω_T es una región estable de nuestro toro de revolución.

Nota 3.3.8. El hecho de que $a < 3r$, considerado en la anterior Nota 3.3.7, sólo se requiere para asegurarnos de la existencia de onduloides cerrados, embebidos y estables.

Lema 3.3.9. Sea M un toro de revolución estándar, descrito en el Ejemplo 3.1, y consideremos el último anillo asimétrico $B = S^1 \times [t', \tilde{t}]$ asociado a $\tilde{t} = \pi r/2$, de forma que ∂B tiene curvatura geodésica constante respecto al normal interior. Entonces B es estable, satisfaciendo estrictamente la condición de estabilidad (2.49).

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que la función f de estos ejemplos viene dada por

$$f(t) = a + r \cos(t/r), \quad t \in [-\pi r, \pi r].$$

Entonces, es inmediato comprobar que

$$[(f')^2 - ff''](t) = 1 + \frac{a}{r} \cos(t/r),$$

que es estrictamente decreciente en $[0, \pi r]$, con $[(f')^2 - ff''](\tilde{t}) = 1$.

Como cada componente de ∂B ha de tener la misma curvatura geodésica con respecto al normal interior a B , se sigue que $h(\tilde{t}) = -h(t')$. En este caso

$$h(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{-\sin(t/r)}{a + r \cos(t/r)},$$

con lo que es posible determinar explícitamente el valor de t' , teniendo en cuenta que ha de ser negativo:

$$t' = -r \arccos \left(\frac{-2ar}{a^2 + r^2} \right).$$

Ahora ya podemos usar el Lema 2.6.1 para estudiar la estabilidad de $B = \mathbb{S}^1 \times [t', \tilde{t}]$. Es fácil ver que $\mathbb{S}^1 \times \{t'\}$ es estable, a partir del Lema 2.3.4, ya que trivialmente

$$[(f')^2 - ff''](t') = 1 - \frac{2a^2}{a\pi(a^2 - r^2)^2} < 1.$$

Además, como

$$(3.11) \quad \frac{K + h^2}{L}(t') + \frac{K + h^2}{L}(\tilde{t}) = \frac{-2r^2}{a\pi(a^2 - r^2)^2} < 0,$$

la condición de estabilidad (2.49) se satisface estrictamente, por lo que concluimos que B es estable. \square

Veamos ahora que también existen toros de nuestra familia en los que los conjuntos de tipo vii), es decir, uniones de un disco y un anillo simétrico de igual curvatura geodésica, son estables. Concretamente, aplicaremos el Lema 2.6.4 para demostrar que hay uniones de ese tipo *estables*, en ciertas superficies del Ejemplo 3.2.

Nota 3.3.10. Sea \tilde{M} una de las superficies descritas en el Ejemplo 3.2, obtenida a partir de una esfera con curvatura de Gauss igual a a^2 , y dos anillos hiperbólicos de curvatura $-b^2$. Consideremos un disco $D \subset \tilde{M}$, contenido en la parte esférica y bordeado por un nodoide cerrado y embebido, y sea $h = h(\partial D)$ su curvatura geodésica positiva. Sea también $B = \mathbb{S}^1 \times [-t, t] \subset \tilde{M}$ un anillo simétrico contenido en la parte hiperbólica, de forma que $h(-t) = h$. Así, los paralelos de ∂B tendrán la misma curvatura que ∂D , con respecto al normal interior a la región $\Omega = D \cup B$. Nótese que tanto D como B son estables (D puede verse como un disco contenido en una esfera, y $[(f')^2 - ff''](t) = -b^2 c^2 < 0$ en la parte esférica). En esta situación, la condición de estabilidad de Ω , dada por (2.51), es equivalente a

$$(3.12) \quad L(\partial B)(a^2 + h^2) - L(\partial D)(b^2 - h^2) \leq 0.$$

Determinemos en primer lugar las longitudes de ∂D y ∂B . Como $B = \mathbb{S}^1 \times [-t, t]$ está contenido en la parte hiperbólica, entonces

$$L(\partial B) = L(-t) + L(t) = 4\pi f(t) = 4\pi c \cosh(d - bt)$$

Nos va a interesar expresar $L(\partial B)$ en función de h . Como $h = h(-t) = -f'(t)/f(t)$, entonces es fácil comprobar que

$$h = \frac{bc \sinh(d - bt)}{c \cosh(d - bt)} = b \tanh(d - bt),$$

de donde

$$\tanh(d - bt) = \frac{h}{b}.$$

Por otro lado, a partir de la expresión $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$, se puede obtener que

$$\cosh^2(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(x)},$$

con lo que

$$\cosh(d - bt) = \sqrt{\frac{1}{1 - h^2/b^2}} = b(b^2 - h^2)^{-1/2},$$

y entonces

$$(3.13) \quad L(\partial B) = 4\pi c b (b^2 - h^2)^{-1/2}.$$

Por otro lado, sabemos que el disco D está contenido enteramente en la parte esférica de \tilde{M} . Esto nos va a permitir hallar la longitud de ∂D , en función de su curvatura geodésica

h , de la siguiente manera (remarcamos que se podría usar la desigualdad isoperimétrica para obtener una expresión de esa longitud en función del área encerrada, pero eso no sería de utilidad para nuestros razonamientos):

La idea es ver ∂D como un círculo de revolución de una esfera. Pensemos momentáneamente en que el disco D está contenido, *no* en la parte esférica de \tilde{M} , *sino* en la esfera S de la que se partía al principio. Como ∂D tiene curvatura geodésica constante, resulta ser un círculo geodésico, de forma que si rotamos la esfera hasta que el centro de ∂D coincida con el polo sur de S , ∂D pasará a ser una curva de altura constante en la esfera, es decir, un círculo de revolución o paralelo.

Nótese que la longitud, el área encerrada por la curva, y la curvatura geodésica no han variado en ningún momento, y que este movimiento rígido que se aplica permite ver ∂D de manera sencilla (como un paralelo) para obtener su longitud.

Por medio de este movimiento rígido que hace que ∂D sea un círculo de revolución, la esfera S salvo sus polos resulta ser una superficie isométrica a la superficie $S^1 \times (0, \pi)$ bajo la métrica

$$d\tilde{s}^2 = dt^2 + g(t)^2 d\theta^2,$$

donde $\theta \in [0, 2\pi]$ y $t \in (0, \pi)$, con $g : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \frac{1}{a} \sin(at).$$

Por tanto, podemos pensar en ∂D como un círculo de revolución $S^1 \times \{\tau\}$ en $S^1 \times (0, \pi)$, con $0 < \tau < \pi/2$ (ya que ∂D está contenido en un hemisferio de S , por la construcción de \tilde{M}), de forma que

$$L(\partial D) = L(S^1 \times \{\tau\}) = 2\pi g(\tau) = \frac{2\pi}{a} \sin(a\tau).$$

Como antes, pretendemos expresar $L(\partial D)$ en función de la curvatura geodésica h . Al estar viendo ∂D inmerso en $S^1 \times (0, \pi)$, su curvatura será igual a

$$h(S^1 \times \{\tau\}) = \frac{g'(\tau)}{g(\tau)} = a \cot(a\tau).$$

Dicha curvatura está calculada con respecto al vector normal $-\partial_t$ en $S^1 \times (0, \pi)$. Recuerdese que h se computaba respecto al normal interior a Ω , por lo que ambos normales coinciden tras aplicar el anterior movimiento rígido. Así, el valor y el signo de h y $h(S^1 \times \{\tau\})$ coinciden, por lo que

$$h = a \cot(a\tau).$$

Despejando,

$$\cot(a\tau) = h/a.$$

Por otra parte, usando que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, se puede obtener fácilmente que

$$\sin^2(x) = \frac{1}{1 + \cot^2(x)},$$

de donde deducimos que

$$\sin(a\tau) = \sqrt{\frac{1}{1 + h^2/a^2}} = a(a^2 + h^2)^{-1/2},$$

y entonces

$$(3.14) \quad L(\partial D) = 2\pi (a^2 + h^2)^{-1/2}.$$

Así, a partir de (3.13) y (3.14), la expresión (3.12) será equivalente a

$$(3.15) \quad 2bc(a^2 + h^2)^{3/2} - (b^2 - h^2)^{3/2} \leq 0.$$

Ahora simplemente particularizaremos a una superficie \tilde{M} concreta, de forma que se satisfaga (3.15). Obsérvese que para valores de c suficientemente pequeños, es de esperar que se cumpla dicha condición.

Empecemos determinando los parámetros que van a caracterizar a la superficie \tilde{M} . Elijamos $a = 1$ y $t^* = \pi/6$. A partir de la expresión (3.5) que aparece en el Ejemplo 3.2, para dichos valores hemos de tomar $b > a \tan(at^*) = 0,577$. Tomemos $b = 0,578$; consecuentemente, a partir de (3.4), resultará que $c = 0,0410512$. Con estos datos también se puede obtener el valor de d , a través de (3.6), quedando la superficie \tilde{M} totalmente determinada.

Conocida la superficie \tilde{M} , hay que tener en cuenta varias cuestiones referentes a los nodoides y paralelos contenidos en dicha superficie:

- Los nodoides cerrados y embebidos pueden ser parametrizados en función del punto máximo que alcanzan. Esto permite determinar numéricamente los datos que necesitaremos.
- Como ∂D ha de ser una curva cerrada y embebida, hemos de comprobar que no aparezcan autointersecciones en los nodoides que consideremos.
- Existen superficies del tipo descrito en el Ejemplo 3.2, para las que ninguna unión de disco y anillo simétrico verifica la condición de curvatura geodésica constante en el borde (respecto del normal interior). Habrá que cuidar que no se nos presente esta situación.

Para la superficie \tilde{M} determinada por los parámetros anteriores, hemos comprobado, haciendo los cálculos explícitos, que existen discos D bordeados por nodoides cerrados y embebidos (sin autointersecciones), y anillos simétricos B contenidos en la parte hiperbólica de \tilde{M} , tales que $h(\partial D) = h(\partial B) = h$, con respecto al normal interior a la unión $D \cup B$. Por ejemplo, para $h = 0,33$, nos encontraremos en dicha situación; y además, el término de la izquierda de la condición (3.15) es estrictamente negativo; concretamente, se obtiene un valor igual a $-0,0514$.

Con ello concluimos, a partir del Lema 2.6.4, que en efecto, las regiones de tipo vii) son estables en ciertas superficies. Por tanto, todas las posibilidades enunciadas en el Teorema 3.3.6 pueden aparecer en general.

Nota 3.3.11. Remitimos al lector a la Nota 3.4.12 de la siguiente Sección, en la que se mostrará que también existen regiones estables de tipo vii) en toros de revolución estándar. Esto se obtendrá a partir de la condición expuesta en la Nota 2.6.5, para lo que será necesario determinar el perímetro de un nodoide cerrado y embebido en estas superficies. Dicho cálculo se explica con detalle en la Sección 3.4, por lo que nos parece más adecuado demostrar este hecho más adelante.

3.4. Regiones isoperimétricas

En esta Sección aplicaremos los resultados obtenidos anteriormente para determinar cuales son las regiones isoperimétricas que pueden aparecer en nuestras superficies, es decir, en toros rotacionalmente simétricos presentando una simetría horizontal y con curvatura de Gauss decreciente desde el paralelo de menor longitud.

La existencia de regiones isoperimétricas en una superficie no siempre está garantizada, y en general, no es una cuestión trivial. Sin embargo, en el caso que estamos tratando

en este Capítulo, las superficies son *compactas*, por lo que, a partir de resultados derivados de la Teoría Geométrica de la Medida [72], podemos asegurar la existencia de soluciones al problema isoperimétrico para cualquier valor del área que consideremos.

Precisamos que nuestro objetivo no consiste en determinar las regiones isoperimétricas para cada superficie concreta de nuestra familia, debido a la extensión de la misma. Lo que pretendemos es dar una clasificación general de los conjuntos que pueden aparecer como soluciones. Esto nos permitirá, dada cualquier superficie de la familia, determinar las regiones isoperimétricas usando algún razonamiento adicional, particular a la superficie (por ejemplo, mediante comparaciones numéricas del perímetro de los candidatos o aplicando adecuados movimientos rígidos que creen contactos irregulares).

Debido a que toda región isoperimétrica es estable, nuestro punto de partida será la caracterización de regiones estables realizada en el Teorema 3.3.6. Algunos de los conjuntos descritos en dicho Teorema van a poder ser descartados como soluciones isoperimétricas en un primer paso, lo que reducirá el número de candidatos a tener en cuenta.

Por otra parte, se verá que algunos conjuntos estables, cuando son regiones isoperimétricas de la superficie, han de verificar ciertas condiciones. Es decir, el carácter isoperimétrico va a determinar, de alguna manera, la posición de algunos conjuntos en la superficie.

Por último, estudiaremos en detalle dos superficies concretas de nuestra familia: los toros de revolución estándar del Ejemplo 3.1, y las superficies descritas en el Ejemplo 3.2. En ambos casos, se pueden realizar los cálculos explícitos de área y longitud de cada candidato, lo que nos permitirá clasificar las regiones isoperimétricas en determinadas situaciones.

El primer resultado que vamos a ver se refiere a los conjuntos de tipo v), descritos en el Teorema 3.3.6. Dichos conjuntos, a pesar de ser siempre regiones estables, no pueden aparecer como soluciones isoperimétricas.

Lema 3.4.1. *Sea M una de nuestras superficies. Entonces, ninguna unión de anillos bordeados por hélices resulta ser solución isoperimétrica en M .*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que cualquier curva cerrada de tipo hélice C tiene estrictamente más longitud que una geodésica vertical C' , en $S^1 \times [-t_0, t_0]$. Así, para cada anillo bordeado por hélices, es posible considerar un anillo vertical (bordeado por dos geodésicas verticales), encerrando la misma área, pero con menos perímetro. Esto ya prueba lo enunciado. \square

El siguiente resultado descarta de forma sencilla los conjuntos de tipo iv), uniones de anillos verticales disjuntos, cuando la unión está compuesta por dos o más anillos. Así, si en el borde de una región isoperimétrica hay una geodésica vertical, dicha región necesariamente consistirá en un único anillo vertical.

Lema 3.4.2. *La unión de dos o más anillos verticales en M no es una región isoperimétrica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Ω una tal unión, y Ω_1 uno de los anillos verticales. Es claro que, tras aplicar adecuada rotación a Ω_1 , una de las geodésicas verticales de $\partial\Omega_1$ se encontrará con otra geodésica vertical de $\partial\Omega$, no contenida en $\partial\Omega_1$. Obsérvese que dicho movimiento preserva el área encerrada, y si eliminamos las dos geodésicas que se han solapado, obtenemos un nuevo conjunto con *estrictamente* menos perímetro, por lo que Ω no podrá ser región isoperimétrica. \square

Nota 3.4.3. Nótese que el anterior argumento no puede aplicarse si Ω consta únicamente de un anillo vertical

El siguiente Lema trata las regiones de tipo vi), anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución. Para que estos conjuntos sean estables, ya sabemos que se han de satisfacer las propiedades enunciadas en el Teorema 3.3.6: el onduloide intersecará al paralelo donde la función $(f')^2 - ff''$ pasa de ser menor que 1 a ser mayor que 1, y el círculo de revolución estará contenido en la región donde $K + h^2 < 0$. Cuando además sean soluciones isoperimétricas, han de cumplirse las siguientes condiciones adicionales, que determinan la posición del onduloide y del círculo de revolución en la superficie.

Para demostrar este resultado, viendo la superficie como $S^1 \times [-t_0, t_0]$, llamaremos *mitad inferior* de $S^1 \times [-t_0, t_0]$ a $S^1 \times [-t_0, 0]$, y *mitad superior* a $S^1 \times [0, t_0]$.

Lema 3.4.4. *Sea Ω una región isoperimétrica contenida en $S^1 \times [-t_0, t_0]$, bordeada por un onduloide C y un círculo de revolución $S^1 \times \{t\}$. Entonces,*

- i) C y $S^1 \times \{t\}$ no están contenidos en la misma mitad de la superficie.
- ii) C no interseca a $S^1 \times \{-t\}$.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el círculo de revolución $S^1 \times \{t\}$ se encuentra contenido en la mitad inferior, es decir, $t \in [-t_0, 0]$. Como además, por el Teorema 3.3.6, se ha de verificar que $(K + h^2)(t) < 0$, se sigue que $t \in (-t_0, -t_c)$, siendo $t_c \in (0, t_0)$ el primer instante donde $K + h^2$ (o equivalentemente $(f')^2 - ff''$) se anula, o donde cambia de signo (ya definimos t_c al inicio de la Subsección 3.3.1).

i) Supongamos que el onduloide C se encuentra contenido también en la mitad inferior $S^1 \times [-t_0, 0]$. Denotemos por t_m, t_M a los puntos mínimo y máximo de $t|_C$, respectivamente.

Si $t = -t_0$, como $f'(-t_0) = 0$, entonces la curvatura geodésica de $S^1 \times \{t\}$ será igual a cero, por lo que C también tendrá curvatura nula ($\partial\Omega$ ha de tener curvatura geodésica constante respecto del normal interior). Sin embargo, teniendo en cuenta (2.10) y que f es *estrictamente creciente* en $[-t_0, 0]$ (visto en el Lema 3.1.2), esto último no es posible (ya que $f(t_M) > f(t_m)$); por tanto, $t \neq -t_0$.

Además, por el Lema 2.5.1, el onduloide C ha de intersecar el paralelo donde $(f')^2 - ff'' = 1$ pasa de ser menor que 1 a ser mayor. Como $(f')^2 - ff''$ es monótona en la mitad inferior y

$$[(f')^2 - ff''](t) = f(t)^2 (K + h^2)(t) < 0,$$

entonces C estará contenido en $S^1 \times [t, 0]$ (en el otro caso, las curvas del borde de Ω se intersecarían). Veamos que en esta situación, podemos construir una nueva región encerrando la misma área y con menor perímetro estricto.

Considérese un paralelo $S^1 \times \{t^*\}$ que interseque a C , con t^* próximo a t_M , y reemplacemos la parte de C por encima de dicho paralelo, por el correspondiente segmento de paralelo. Obsérvese que esto hace que la nueva curva tenga menos perímetro que C , ya que, si llamamos (θ_1, θ_2) al θ -segmento donde estamos realizando la modificación, la longitud del correspondiente segmento de $S^1 \times \{t^*\}$ será igual a

$$(3.16) \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(t(\theta))^2} d\theta = (\theta_2 - \theta_1) f(t^*),$$

mientras que la longitud de la parte eliminada del onduloide es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(t(\theta))^2 + (dt/d\theta)^2} d\theta,$$

que es estrictamente mayor que (3.16).

Cambiamos también $S^1 \times \{t\}$ por otro paralelo $S^1 \times \{\bar{t}\}$, con $\bar{t} < t$. Como $f(\bar{t}) < f(t)$, por la monotonía estricta de f , el nuevo paralelo tendrá menos longitud que el original.

Es claro que existen adecuados t^* y \bar{t} para los que el nuevo conjunto encierra la misma área que Ω . Como además se reduce perímetro en cada componente, esto contradice el carácter isoperimétrico de Ω , y por tanto, las curvas de $\partial\Omega$ no pueden hallarse en la misma mitad de la superficie.

ii) Supongamos ahora que C interseca al paralelo $S^1 \times \{-t\}$, que estará contenido en la mitad superior de la superficie. En este caso, es posible obtener un conjunto encerrando la misma cantidad de área y con el mismo perímetro, pero con frontera irregular. La construcción es la siguiente:

Sea $C' \subset C$ la parte del onduloide C que queda contenida en $S^1 \times [-t, t_0]$, es decir, la parte de C por encima del paralelo $S^1 \times \{-t\}$. Reemplacemos C' por el correspondiente segmento del paralelo $S^1 \times \{-t\}$. Por otro lado, reflejemos C' respecto de $S^1 \times \{0\}$. Dicha reflexión llevará los extremos de C' sobre $S^1 \times \{t\}$. Eliminando el segmento de $S^1 \times \{t\}$ que se encuentra entre dichos extremos, obtenemos un nuevo conjunto Ω' que claramente encierra la misma área y tiene el mismo perímetro. Por tanto, como Ω es isoperimétrico, Ω' también lo será. Pero $\partial\Omega'$ no es regular (no es diferenciable), por lo que de nuevo llegamos a contradicción. \square

Nota 3.4.5. Indiquemos de forma concisa otra manera de probar el primer apartado del anterior Lema 3.4.4. Supongamos que las curvas que forman el borde de Ω se hallan en la misma mitad. Entonces, a partir del Lema 3.1.2 y del Lema 2.3.7, se sigue que el signo de las curvaturas geodésicas de ambas curvas coincide, medida con respecto al vector normal definido por (2.6). En consecuencia, con respecto al normal que apunta hacia el interior de Ω , las curvaturas tienen signo distinto, por lo que $\partial\Omega$ no tiene curvatura geodésica constante, y no puede bordear una región isoperimétrica (ni siquiera resulta ser una curva estable).

Centrémonos ahora en los nodoides cerrados y embebidos, que bordearán discos en nuestras superficies. Ya hemos visto que, para que estos discos sean estables, o bien intersecarán simétrica y ortogonalmente al paralelo $S^1 \times \{0\}$, o bien estarán contenidos en regiones donde la curvatura de Gauss es constante. Precisemos ciertas propiedades que se han de cumplir, cuando uno de estos discos, con curvatura de Gauss constante, forma parte de una región isoperimétrica.

Sea D un disco bordeado por una curva de curvatura geodésica constante, encerrando área $a > 0$ y contenido en una región con curvatura de Gauss K constante. Sea D' otro disco encerrando área a , tal que $\partial D'$ es también de curvatura geodésica constante, cumpliendo que

$$K|_D < K|_{D'}.$$

Entonces, a partir de [82, Lemma 2.7], se deduce que

$$L(\partial D) > L(\partial D').$$

A partir de esto, y teniendo en cuenta que $K(0)$ es el valor máximo alcanzado por la curvatura de Gauss en nuestros toros de revolución, se obtiene el siguiente resultado:

Lema 3.4.6. *Sea $D \subset M$ un disco bordeado por una curva con curvatura geodésica constante, contenido en una región donde la curvatura de Gauss K es constante. Supongamos que D es una componente de una región isoperimétrica (que podría ser conexa). Entonces, necesariamente ocurrirá una de estas posibilidades:*

- i) $K|_D$ coincide con el valor máximo de la curvatura de Gauss $K(0)$, ó

- ii) $K|_D < K(0)$ y no existe ningún disco D' encerrando la misma cantidad de área que D y bordeado por una curva de curvatura geodésica constante, con $K|_D < K|_{D'}$.

Nota 3.4.7. La interpretación adecuada de Lema 3.4.6 es que los discos isoperimétricos, con o sin curvatura de Gauss K constante, tienden a situarse donde la curvatura de Gauss se hace máxima.

Pasamos ahora a estudiar las regiones isoperimétricas en dos tipos de superficies de nuestra familia. A partir del Teorema 3.3.6 y de los resultados vistos en esta Sección, se tiene que los candidatos a ser soluciones isoperimétricas son discos (bordeados por curvas con curvatura geodésica constante), anillos horizontales (simétricos o asimétricos), anillos verticales, anillos bordeados por un onduloide y un paralelo, y uniones de un disco y un anillo simétrico.

3.4.1. Regiones isoperimétricas en toros de revolución estándar. Empezaremos estudiando las soluciones isoperimétricas de los toros de revolución estándar, descritos en el Ejemplo 3.1. En estos casos, es posible realizar las comparaciones de perímetro necesarias que permiten determinar las soluciones para cada toro estándar que se considere.

Estas superficies quedan totalmente determinadas una vez conocidos los valores de $r > 0$ y $a > 0$, con $a > r$. Recordemos que la métrica (2.1) de esta superficie viene dada por la función

$$f(t) = a + r \cos(t/r),$$

con $t \in I = [-t_0, t_0] = [-\pi r, \pi r]$. A partir de dicha función, fácilmente derivable e integrable, es posible realizar *explícitamente* todos los cálculos, referentes a longitudes y áreas, que se precisan.

En primer lugar, denotemos por β el área total de una de estas superficies. Entonces

$$\beta = 2\pi \int_{-\pi r}^{\pi r} (a + r \cos(t/r)) dt = 4\pi^2 ar.$$

La longitud de un círculo de revolución $S^1 \times \{t\}$ vendrá dada por

$$L(t) = 2\pi f(t) = 2\pi (a + r \cos(t/r)),$$

y la de cualquier geodésica vertical $\{\theta\} \times I$ será igual a $2\pi r$ (longitud del círculo que se rota para obtener la superficie).

Por lo que ya se ha visto, un onduloide C cerrado y embebido puede verse como grafo sobre θ , de la forma

$$\{(\theta, t(\theta)) \in S^1 \times [-t_0, t_0] : \theta \in [0, 2\pi]\},$$

con lo que su longitud será

$$(3.17) \quad L(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{f(t(\theta))^2 + (dt/d\theta)^2} d\theta.$$

Dado un nodoide cerrado y acotado C , que sea estable, necesariamente estará centrado en el ecuador $S^1 \times \{0\}$, por el Lema 3.3.2. Para dichos nodoides, también es posible obtener su longitud y el área que encierra, a partir del sistema (2.7). Los cálculos que realizamos en la práctica consisten en considerar C como una curva solución $(\theta(s), t(s), \sigma(s))$ parametrizada por el arco s , de forma que el instante inicial $s = 0$ se corresponde con el punto de máxima altura del nodoide. Entonces, se halla el primer instante s_1 en el que $\sigma(s_1) = \pi$, que corresponderá a recorrer un cuarto de C . Así, se deduce que la longitud del nodoide es justamente $4s_1$.

En cuanto al área, usamos una idea similar; la cuarta parte del área encerrada coincidirá con

$$\left| \int_0^{s_1} f(t(s)) \theta(s) \cos \sigma(s) ds \right| = - \int_0^{s_1} f(t(s)) \theta(s) \cos \sigma(s) ds,$$

donde estamos viendo C como curva parametrizada por s , de la forma $(t(s), \theta(s))$; nótese que $\cos \sigma(s) \leq 0$, para todo $s \in [0, s_1]$. En este caso, tomamos la curva como grafo sobre el eje vertical para facilitar los cálculos (la función f es constante horizontalmente, para cada valor de $t(s)$, y no lo es verticalmente para los valores de $\theta(s)$).

Ambas cantidades son numéricamente computables para cada toro de revolución estándar que se considere.

Por otro lado, dado un anillo simétrico $S^1 \times [-t, t]$, su perímetro es igual a $2L(t)$, y el área de la región que encierra resulta ser

$$2\pi \left(\int_{-\pi r}^{-t} f(t) dt + \int_t^{\pi r} f(t) dt \right) = 4\pi \int_t^{\pi r} f(t) dt.$$

Para un anillo asimétrico $S^1 \times [t_1, t_2]$, con $t_1 \in [-t_0, 0]$ y $t_2 \in [0, t_0]$, la condición de curvatura geodésica constante respecto al normal interior

$$h(t_1) = -h(t_2)$$

va a permitir expresar t_1 en función de t_2 . Su perímetro será $L(t_1) + L(t_2)$, y el área encerrada será igual a

$$2\pi \int_{-\pi r}^{t_1} f(t) dt + 2\pi \int_{t_2}^{\pi r} f(t) dt.$$

Nota 3.4.8. Téngase en cuenta que cualquier anillo horizontal (simétrico o asimétrico) determina dos regiones en nuestros toros de revolución, *una* que contendrá al paralelo de menor longitud $S^1 \times \{t_0\}$, y la *complementaria* a ésta. Las anteriores expresiones del área se refieren, tal y como se deduce de los correspondientes intervalos de integración, a las regiones que *contienen* a $S^1 \times \{t_0\}$.

Finalmente, un anillo vertical bordeado por dos geodésicas verticales, tendrá siempre perímetro $4\pi r$, sea cual sea el área que encierre.

A partir de estos cálculos explícitos, se obtiene fácilmente el siguiente resultado:

Teorema 3.4.9. *Sea M un toro de revolución estándar, parametrizado por r y a , de forma que $r \leq a/2$. Entonces las regiones isoperimétricas son discos con curvatura geodésica constante, y anillos verticales, y sus complementarios.*

DEMOSTRACIÓN. Como $S^1 \times \{-\pi r\} = S^1 \times \{\pi r\}$ es el paralelo de menor longitud, y la función f es estrictamente creciente en $[-\pi r, 0]$, y estrictamente decreciente en $[0, \pi r]$, entonces se sigue que

$$L(t) > L(-\pi r) = 2\pi f(-\pi r) = 2\pi(a - r) \geq 2\pi r, \quad \text{para } t \in (-\pi r, \pi r),$$

ya que $r \leq a/2$ por hipótesis. Esto ya nos dice que cualquier círculo de revolución $S^1 \times \{t\}$ tiene estrictamente más longitud que cualquier geodésica vertical. Por tanto, un anillo horizontal bordeado por dos círculos de revolución (sea simétrico o asimétrico) tendrá estrictamente más longitud que un anillo vertical, por lo que aquellos pueden ser descartados. Además, la unión de un anillo simétrico y un disco tampoco podrá ser una región isoperimétrica en este caso, ya que el anillo simétrico podrá sustituirse por un anillo vertical, reduciéndose el perímetro.

Finalmente, como cualquier onduloide se puede expresar como grafo sobre θ , su longitud (3.17) será mayor que $L(-\pi r)$. Aplicando el mismo razonamiento anterior, los anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución tampoco pueden ser soluciones isoperimétricas.

Así, de los candidatos mostrados en el Teorema 3.3.6, sólo nos quedan los discos de curvatura geodésica constante (que son las soluciones isoperimétricas para áreas pequeñas), y los anillos verticales. Hemos comprobado que estos anillos también aparecen como solución en dichos toros de revolución (es más, aparecen incluso antes de que los discos dejen de ser embebidos en la superficie). Por ejemplo, para $r = 0,2a$, ambos tipos de conjunto son regiones isoperimétricas. \square

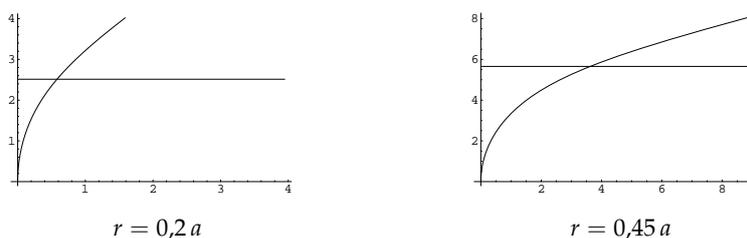


FIGURA 3.3. Perfiles isoperimétricos correspondientes a dos toros de revolución estándar con $r \leq a/2$

Nota 3.4.10. La Figura 3.3 muestra las dos posibles situaciones que presenta el perfil isoperimétrico de los toros de revolución estándar, cuando $r \leq a/2$. Aunque en ambos casos las soluciones son discos y anillos verticales, merece la pena resaltar un hecho que los diferencia.

Cuando r es suficientemente pequeño, el toro resulta muy estrecho, por lo que los nodoides (que bordean a los discos) dejan de ser embebidos a partir de cierto instante. De hecho, para $r = 0,2a$, no hay discos de área mitad (véase la gráfica en la Figura 3.3).

Por otro lado, cuando r toma valores mayores, sí que existen discos embebidos encerrando área mitad, aunque siempre tienen perímetro mayor que los anillos verticales, bajo la hipótesis de que $r \leq a/2$ (un ejemplo de este hecho se tiene cuando $r = 0,45$).

Para los casos en los que $r > a/2$, la descripción de las regiones isoperimétricas resulta más variada, al aparecer soluciones de tipos distintos a los del caso anterior. Desafortunadamente, no hemos encontrado ningún argumento que proporcione resultados generales en estos casos (que, por otra parte, resultarían de interés relativo). Por tanto, procederemos a enumerar qué tipo de regiones isoperimétricas van apareciendo para los distintos valores de los parámetros que determinan esta superficie.

Tal y como se hizo en el caso previo, a partir de las expresiones anteriores sigue siendo posible calcular *explícitamente* el perfil isoperimétrico de cada toro de revolución estándar. Describimos ahora los resultados obtenidos, a medida que r aumenta. Nos centraremos en valores del área comprendidos en el intervalo $(0, \beta/2)$, ya que para valores superiores las soluciones vendrán dadas por los correspondientes conjuntos complementarios.

Para valores de r próximos a $a/2$, el comportamiento es el mismo que el descrito en el Teorema 3.4.9: al principio, las soluciones son discos para áreas pequeñas, y a partir de cierto valor del área, las soluciones pasan a ser anillos verticales. Dicho comportamiento se corresponde con la idea de que el perfil isoperimétrico presenta una cierta *continuidad*

con respecto al parámetro r , de forma que no muestra cambios bruscos al modificar ligeramente dicho parámetro.

La Figura 3.4 muestra el comportamiento comentado en el párrafo anterior, para los casos de $r = 0,52a$ y $r = 0,7a$. En esas gráficas (y en las sucesivas), la curva que parte del origen se corresponde con el perímetro de los discos, mientras que la recta horizontal indica el perímetro de los anillos verticales. La otra curva que parte del eje vertical muestra el perímetro de los anillos simétricos estables (hasta el primer punto grueso), de los anillos asimétricos estables (hasta el segundo punto grueso) y finalmente el de los anillos asimétricos inestables. Además, la curva que no toca al eje vertical se corresponde con el perímetro de las uniones de un disco y un anillo simétrico (esto es debido a que dichos conjuntos no encierran nunca áreas próximas a cero).

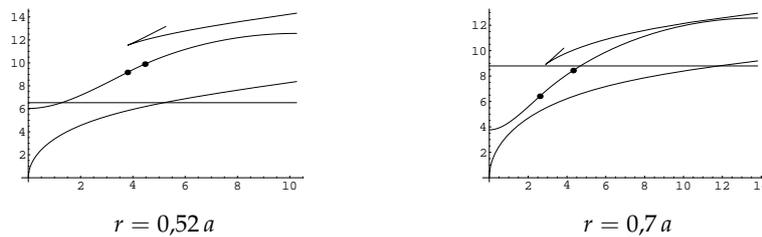


FIGURA 3.4. Perfiles correspondientes a dos toros de revolución estándar, donde las soluciones isoperimétricas son discos y anillos verticales

Seguidamente, existe un intervalo de valores de r para el que las regiones isoperimétricas estarán bordeadas por nodoides, y por tanto serán discos, para cualquier cantidad de área (véase la Figura 3.5). Esto es consecuencia de que, al aumentar r , la longitud de las geodésicas verticales y, por tanto, de los anillos verticales también aumenta, lo que hace que éstos no puedan ser solución.

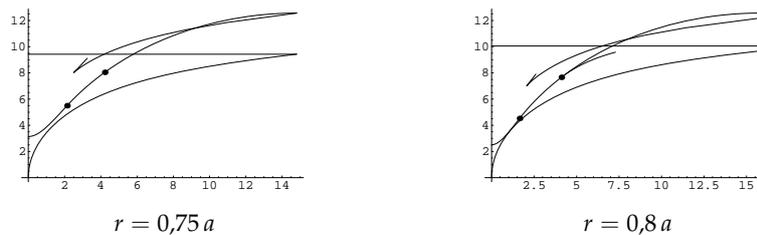


FIGURA 3.5. Perfiles correspondientes a toros de revolución estándar para los que los discos son las regiones isoperimétricas, para cualquier valor del área

Después, existe otro intervalo de valores de r para los que los anillos horizontales ya aparecen como solución. Así, las regiones isoperimétricas en estos casos vienen dadas por discos al principio, luego anillos *simétricos* y finalmente discos de nuevo, hasta llegar a área $\beta/2$ (tal y como se observa en la Figura 3.6). Precisamos además que este rango de valores de r es muy pequeño, en comparación con situaciones anteriores, por lo que este comportamiento se aprecia en *relativamente* pocos toros de revolución.

Finalmente, a medida que r toma valores más próximos a a , los últimos anillos simétricos son regiones isoperimétricas para el área que encierran, y entonces los anillos horizontales *asimétricos* también aparecen como solución (véase la Figura 3.7). En estos casos,

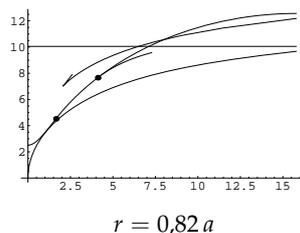


FIGURA 3.6. Perfil correspondiente a un toro de revolución estándar, para el que las soluciones son discos y anillos simétricos

las soluciones vendrán dadas por discos, anillos simétricos y anillos asimétricos, para acabar con discos, cuando el área considerada es cercana al valor $\beta/2$.

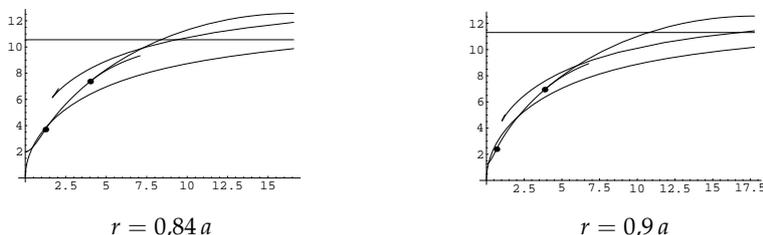


FIGURA 3.7. Perfiles correspondientes a dos toros de revolución estándar, donde hay anillos asimétricos que son soluciones isoperimétricas

Nota 3.4.11. Por la Nota 3.3.7, sabemos que en los toros de revolución estándar con $a < 3r$, existen dominios bordeados por un onduloide y un círculo de revolución que son regiones estables. Sin embargo, a la vista de los resultados obtenidos, se sigue que dichos dominios no aparecen como soluciones isoperimétricas, en ninguno de estos toros (su perímetro viene indicado en algunas de las gráficas anteriores, correspondiéndose con una curva que parte del segundo punto grueso y se mantiene por debajo de la asociada a los anillos asimétricos inestables).

Recuérdese que la estabilidad de tales dominios era consecuencia de que el anillo asimétrico $S^1 \times [t', \tilde{t}]$ correspondiente a $\tilde{t} = \pi r/2$, es siempre una región estable (Lema 3.3.9). Pero tal anillo no es solución isoperimétrica, para el área que encierra, en ningún caso. De hecho, tiene más perímetro que un anillo vertical, si $r \leq a/2$ (ya visto en el Teorema 3.4.9), o que el correspondiente disco, si $r > a/2$. En consecuencia, debido a la continuidad del perfil, los primeros dominios bordeados por un onduloide y un círculo de revolución, que surgen a partir del anillo $S^1 \times [t', \tilde{t}]$, tendrán demasiado perímetro para ser regiones isoperimétricas.

Nota 3.4.12. Tal y como se anunció en la Nota 3.3.11, estamos ahora en condiciones de demostrar que los conjuntos de tipo vii) del Teorema 3.3.6, consistentes en uniones de un disco y un anillo simétrico, pueden aparecer como regiones estables en algunos toros de revolución estándar. Recuérdese que ya se vio que dichas regiones sí que aparecen en las superficies del Ejemplo 3.2.

Como en los toros de revolución estándar la curvatura de Gauss no es constante en ninguna región, la condición de estabilidad de dichas uniones vendrá dada por (2.54), obtenida en la Nota 2.6.5.

Centrémonos en un toro de revolución estándar M determinado por parámetros $a > 0$, $r \in (0, a)$. Sea $D \subset M$ un disco estable bordeado por un nodoide cerrado y embebido de curvatura geodésica constante (necesariamente intersectará al paralelo $S^1 \times \{0\}$, en virtud del Lema 3.3.2). Denotaremos por h a la curvatura positiva de ∂D . Sea $B = S^1 \times [-t, t]$ un anillo simétrico *estrictamente* estable (equivalentemente, verificando $(K + h^2)(t) < 0$), tal que $h = h(-t)$. Así, la unión $D \cup B$ tendrá borde con curvatura geodésica constante respecto al normal que apunta hacia el interior.

Como $K(0) \geq K(t)$, para todo $t \in [-\pi r, \pi r]$, bastará comprobar que

$$L(\partial B) \left(\int_{\partial D} (K(0) + h^2) \right) + L(\partial D)^2 (K(t) + h^2) \leq 0,$$

o equivalentemente

$$(3.18) \quad L(\partial B) (K(0) + h^2) + L(\partial D) (K(t) + h^2) \leq 0,$$

para afirmar que se cumple (2.54).

Particularicemos ahora al toro determinado por $a = 1$, $r = 0,7$, y para una unión $D \cup B$ concreta. Consideremos el disco D bordeado por un nodoide cuya altura máxima es igual a $T = 1,7 < \pi r$. A partir de lo comentado al inicio de esta Sección, se puede comprobar que la longitud del nodoide es $L(\partial D) = 8,4738$, y que el área que encierra es igual a 10,3349. Obsérvese que la correspondiente gráfica de la Figura 3.4 muestra que dicho disco es región isoperimétrica para el área que encierra, por lo que también será estable. Por otro lado, la curvatura geodésica de ∂D puede hallarse gracias a la primera integral E , definida por (2.8), para $c = 0$. Así, como $E(0) = 0$ trivialmente, se tiene que E es constantemente nula. Entonces

$$0 = E(T) = f(T) - h \int_{\partial D} f(\xi) d\xi,$$

de donde

$$h = \frac{f(T)}{\int_{\partial D} f(\xi) d\xi} = 1,10873.$$

Se puede comprobar que $t = 1,91403$ determina el anillo simétrico $B = S^1 \times [-t, t]$ tal que $\partial D \cup \partial B$ tiene curvatura geodésica constante respecto del normal apuntando al interior de la unión. Además,

$$(K + h^2)(t) < 0,$$

por lo que el anillo B también resulta ser estable, por el Lema 2.6.1. Nótese también que ∂D y ∂B no se intersecan. Finalmente, es inmediato comprobar que

$$L(\partial B) (K(0) + h^2) + L(\partial D) (K(t) + h^2) = -11,405 < 0,$$

por lo que se satisface la condición (3.18), y por tanto $D \cup B$ es una región estable en dicho toro de revolución estándar.

Nota 3.4.13. Hemos visto en la Nota 3.4.12 que las uniones de un disco y un anillo simétrico (con curvatura geodésica constante) pueden ser estables en algunos toros de revolución estándar. Sin embargo, en ninguno de los ejemplos que hemos estudiado acaban siendo soluciones isoperimétricas (las gráficas anteriores muestran como siempre tienen excesivo perímetro). Aunque no hemos encontrado un razonamiento general que las descarte, pensamos que dichas uniones no son soluciones en ningún caso.

Nota 3.4.14. En la descripción de las regiones isoperimétricas en toros de revolución estándar se aprecia que para área mitad $\beta/2$, la solución viene siempre dada por un disco o por un anillo vertical, sea cual sea el toro estándar que se considere. Este no es un hecho general para los toros de revolución de nuestra familia, tal y como se verá más adelante.

3.4.2. Regiones isoperimétricas en \tilde{M} . Estudiemos ahora las regiones isoperimétricas en otro tipo de toros de revolución, concretamente en las superficies \tilde{M} descritas en el Ejemplo 3.2. Recuérdese que estas superficies se obtienen a partir de una esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a la que se le quitan dos discos abiertos idénticos centrados en los polos, añadiendo posteriormente un anillo hiperbólico adecuado en cada una de las componentes del borde.

Estas superficies son interesantes porque nos van a permitir justificar que los anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución pueden ser regiones isoperimétricas, cosa que no sucedía en los toros de revolución estándar de la Subsección anterior. En consecuencia, se deduce que los *onduloides* pueden *realmente* formar parte de la frontera de las regiones isoperimétricas de una superficie en general. Este es un hecho que no aparece en ningún trabajo previo, al menos en los que nosotros conocemos, aunque dichas curvas sí generan hipersuperficies que bordean dominios isoperimétricos en ciertos productos riemannianos de dimensión alta, como se demuestra en [81]. Aparte de esto, también describiremos cómo evolucionan las soluciones isoperimétricas en este tipo de superficies.

Remitimos al lector al Ejemplo 3.2 de la Sección 3.1, donde se explicaron con detalle este tipo de superficies. Simplemente recordaremos que éstas se parametrizaban, en la parte esférica, con la función

$$f(t) = \frac{1}{a} \cos(at), \quad t \in [-t^*, t^*],$$

siendo $a > 0$ el radio de la esfera inicial; y en la parte hiperbólica superior, la parametrización venía dada por

$$f(t) = c \cosh(d - bt), \quad t \in [t^*, d/b],$$

donde $-b^2$ ($b > 0$) es la curvatura de Gauss de los anillos hiperbólicos que se pegan a la parte esférica, y c, d son números reales positivos, cuya expresión se determinó en la Nota 3.1.6. Finalmente, el paralelo $S^1 \times \{t^*\}$ es el paralelo donde se unen ambas partes esférica e hiperbólica. En la parte hiperbólica inferior se considera la correspondiente simetrización de f .

El área total β de estas superficies será igual a

$$\beta = 22\pi \left(\int_0^{t^*} f(t) dt + \int_{t^*}^{d/b} f(t) dt \right) = 4\pi \left(\frac{1}{a^2} \sin(at^*) + \frac{c}{b} \sinh(d - bt^*) \right).$$

La longitud de un círculo de revolución $S^1 \times \{t\}$ será

$$L(t) = 2\pi f(t),$$

por lo que su expresión dependerá de la parte de la superficie en la que se encuentre. Además, su curvatura geodésica vendrá dada por

$$h(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \begin{cases} -a \tan(at), & t \in [0, t^*], \\ -b \tanh(d - bt), & t \in [t^*, d/b] \end{cases}$$

y por la correspondiente expresión antisimétrica, para los valores negativos.

Igual que antes, la longitud de un onduloide cerrado y embebido vendrá dada por (3.17), y dado un nodoide cerrado y embebido, la longitud y el área que encierra se pueden calcular de manera análoga a como se hizo para toros de revolución estándar, en la Subsección anterior. Finalmente, la longitud de una geodésica vertical es justamente $2d/b$.

Para estas superficies, la función $(f')^2 - ff''$ toma valores constantes: es igual a 1 en la parte esférica, y es igual a $-b^2 c^2$ en la parte hiperbólica. Por tanto, todos los círculos de revolución son estables, por el Lema 2.4.16. Además, aplicando el Lema 2.6.1, todo

anillo simétrico contenido en la parte hiperbólica será estable, y los contenidos en la parte esférica serán inestables.

Dado un anillo simétrico $\mathbb{S}^1 \times [-t, t]$, con $t \in (t^*, d/b)$, es decir, contenido en la parte hiperbólica y por tanto estable, se tiene que su perímetro viene dado por $4\pi f(t)$. Además, el área de la región delimitada por dicho anillo y conteniendo al paralelo de menor longitud $\mathbb{S}^1 \times \{d/b\}$, es igual a

$$4\pi \int_t^{d/b} f(s) ds = \frac{4\pi c}{b} \sinh(d - bt).$$

En cuanto a los anillos asimétricos $\mathbb{S}^1 \times [t_1, t_2]$, como consecuencia de la condición de curvatura geodésica constante

$$(3.19) \quad h(t_1) = -h(t_2)$$

y del comportamiento monótono de la función $h(t)$, se deduce fácilmente que uno de los paralelos del borde se ha de hallar en la parte esférica inferior, y el otro en la parte hiperbólica superior. Así, podemos suponer a partir de ahora que $t_1 \in (-t^*, 0)$ y que $t_2 \in (t^*, d/b)$.

Además, es posible expresar t_1 en función de t_2 , gracias a la condición (3.19), de forma que

$$t_1 = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{-b \tanh(d - bt_2)}{a} \right).$$

El perímetro de $\mathbb{S}^1 \times [t_1, t_2]$ será

$$L(t_1) + L(t_2) = 2\pi(f(t_1) + f(t_2)),$$

y el área que encierra la correspondiente región, conteniendo a $\mathbb{S}^1 \times \{d/b\}$, vendrá dada por

$$2\pi \int_{-d/b}^{t_1} f(t) dt + 2\pi \int_{t_2}^{d/b} f(t) dt.$$

Los discos estables bordeados por nodoides cerrados y embebidos que formen parte de una región isoperimétrica pueden, en principio, hallarse contenidos en la parte esférica, en la parte hiperbólica, o intersecando al paralelo $\mathbb{S}^1 \times \{t^*\}$. En virtud de [82, Lemma 2.7], o aplicando el Lema 3.4.6, se sigue que los discos en la parte esférica tendrán menos perímetro que los contenidos en la parte hiperbólica, para áreas iguales.

En cuanto a los discos que intersequen a $\mathbb{S}^1 \times \{t^*\}$, se deduce a partir del Lema 2.3.9 (véase la Nota 2.3.10) que también han de cortar al paralelo $\mathbb{S}^1 \times \{-t^*\}$. En caso contrario, la función $(f')^2 - ff''$ resultaría monótona sobre los puntos del nodoide y, tal y como se vio en la demostración del Lema 2.3.9, eso implicaría que la curva no es cerrada y embebida. Sin embargo, en los ejemplos que hemos estudiado, ningún disco en esta situación acaba siendo solución isoperimétrica.

No olvidemos que uno de nuestros objetivos es justificar que un anillo bordeado por un onduloide y un paralelo puede ser una región isoperimétrica en estas superficies. Por tanto, hemos preferido centrarnos, principalmente, en aquellas en las que los anillos verticales tienen *excesivo* perímetro y no son soluciones; para ello, basta tomar la parte hiperbólica *suficientemente* alargada. Más concretamente, como el paralelo de mayor longitud es $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$, con perímetro igual a $L(0) = 2\pi/a$, y la longitud de una geodésica vertical es justamente $2d/b$, se tiene que cuando

$$(3.20) \quad d/b > \pi/a,$$

cualquier anillo vertical tendrá más perímetro que el anillo horizontal (simétrico o asimétrico) para la misma cantidad de área, por lo que los anillos verticales podrán ser descartados como candidatos isoperimétricos.

Por tanto, empezaremos centrándonos en las superficies que verifican la desigualdad (3.20). Destacamos que esta superficie, tal y como se precisó en la Nota 3.1.6, queda totalmente determinada a partir de tres parámetros (los valores de a , t^* y b). Describimos ahora los distintos comportamientos observados en la evolución de las regiones isoperimétricas de estas superficies \tilde{M} , para valores del área en el intervalo $(0, \beta/2)$.

Caso 1. En ciertas situaciones, las soluciones resultan ser discos bordeados por curvas de curvatura geodésica constante (que se encontrarán contenidas en la parte esférica), para valores pequeños del área, y luego anillos simétricos (bordeados por círculos de revolución contenidos en la parte hiperbólica), hasta llegar a área mitad $\beta/2$.

Un ejemplo que ilustra este comportamiento viene dado por la superficie construida a partir de una esfera con curvatura de Gauss igual a 1 (es decir, tomando $a = 1$), y un anillo hiperbólico con curvatura de Gauss $-b^2$, para $b = 0,536$. Para $t^* = \pi/7$, estos datos dan lugar a una de nuestras superficies, para la que la mitad del área total es igual a

$$\beta/2 = 12,2152,$$

y el perfil isoperimétrico que se obtiene es el siguiente:

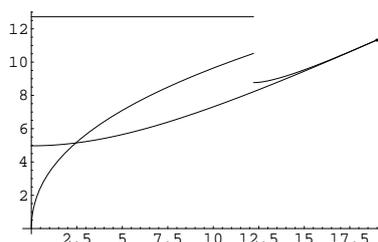


FIGURA 3.8. Perfil isoperimétrico correspondiente a la superficie \tilde{M} , de parámetros $a = 1$, $b = 0,536$ y $t^* = \pi/7$

La curva horizontal de la Figura 3.8 representa a los anillos verticales, cuyo perímetro es siempre constante. La curva que parte del origen es la correspondiente a los discos, y se aprecia que éstos son soluciones para valores pequeños del área (hasta llegar a un cierto valor a_0). Las otras dos curvas vienen determinadas por la longitud de los anillos simétricos y asimétricos (la que no toca el eje vertical es la correspondiente a anillos asimétricos). Se ve que, para los valores del área en el intervalo $(a_0, \beta/2)$, las soluciones son los anillos simétricos.

El valor $\beta/2$ correspondiente a la mitad del área total encerrada por la superficie es justamente el valor donde terminan las curvas correspondientes a anillos verticales y a discos. Se tiene que, en este caso, la *mayoría* de los anillos asimétricos encierran un área superior a $\beta/2$.

Además, en este ejemplo se tiene que no hay dominios formados por uniones de un disco y un anillo simétrico, debido a que cualquier unión verificando la condición de curvatura geodésica constante presentará autointersecciones (es decir, el borde del anillo y del disco se intersecan).

Caso 2. Hay otras ocasiones en las que las regiones isoperimétricas de \tilde{M} son discos para áreas pequeñas, ciertos anillos simétricos, y finalmente anillos asimétricos para valores del área próximos a $\beta/2$ (con un círculo de revolución en la parte esférica y otro en la parte hiperbólica). En particular, el anillo asimétrico $S^1 \times [0, d/b]$ es la solución para área mitad.

Por ejemplo, la superficie \tilde{M} obtenida con los datos $a = 1$, $b = 0,578$ y $t^* = \pi/6$, presenta regiones isoperimétricas que siguen la anterior evolución, como se aprecia en la Figura 3.9, correspondiente al perfil isoperimétrico. La mitad del área total de esta superficie es

$$\beta/2 = 12,5452.$$

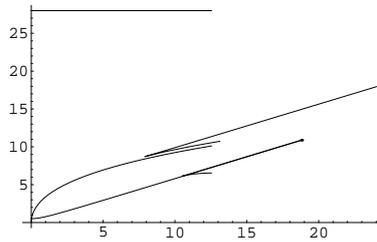


FIGURA 3.9. Perfil isoperimétrico correspondiente a otra superficie \tilde{M}

En la Figura 3.9, la curva horizontal corresponde a anillos verticales, siempre con perímetro constante y, en este caso, muy grande, por lo que nunca son soluciones. Como antes, la curva que parte del origen representa la longitud de los discos, que son las soluciones para un pequeño intervalo de áreas $(0, a_0)$. Seguidamente, las regiones isoperimétricas son anillos simétricos (cuya longitud viene representada por la otra curva que parte del eje vertical) para áreas pertenecientes a otro intervalo (a_0, a_1) , y anillos asimétricos para valores del área en $(a_1, \beta/2)$.

En este caso, se produce un fenómeno llamativo: el área encerrada por los anillos simétricos estables va aumentando hasta llegar a $S^1 \times [-t^*, t^*]$, de forma que los últimos en aparecer encierran un área superior a $\beta/2$. Tras éstos, los primeros anillos asimétricos $S^1 \times [t_1, t_2]$ que surgen, a medida que t_2 se mueve desde t^* hasta d/b , presentan área cada vez menor, hasta llegar a los anillos asimétricos que son soluciones isoperimétricas, para los que el área encerrada vuelve a ser creciente, hasta alcanzar el valor $\beta/2$ para $S^1 \times [0, d/b]$. Se tiene que los últimos anillos simétricos y los primeros anillos asimétricos encierran la misma cantidad de área, con el mismo perímetro (véase la Figura 3.9), lo que concuerda, en particular, con el hecho de que $S^1 \times [-t^*, t^*]$ sea estable (mínimo del perímetro para variaciones infinitesimales). Esta evolución puede compararse con la que veremos más adelante, en el Ejemplo 4.4 del Capítulo 4, dedicado a otro tipo de superficies distintas.

En esta superficie, sí hay que tener en cuenta las uniones de un disco y un anillo simétrico, ya que se satisface la condición de curvatura geodésica constante. Sin embargo, la longitud de estos conjuntos es siempre mayor que la de los discos, para áreas iguales (dicha longitud se corresponde con la curva de la Figura 3.9 que no toca al eje vertical), y por tanto, nunca constituyen soluciones isoperimétricas.

Como antes, el valor $\beta/2$ de la mitad del área de la superficie coincide con el valor donde las curvas que representan la longitud de anillos verticales y discos terminan. Finalmente remarcamos que los anillos asimétricos son las regiones isoperimétricas para cierto intervalo de áreas, incluyendo al valor $\beta/2$.

Veamos ahora una consecuencia importante que se puede deducir de los resultados obtenidos para las superficies de tipo \tilde{M} : los anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución pueden aparecer como soluciones isoperimétricas en nuestras superficies.

Este hecho pone de manifiesto que las curvas de tipo onduloide forman parte del borde de las regiones isoperimétricas de una superficie. Esta situación no aparece reflejada en ninguno de los trabajos que conocemos, y el único resultado de naturaleza similar aparece en [81, Prop. 3.4], donde en el espacio producto $S^1(r) \times \mathbb{R}^n$, cuando $n \geq 9$, dichas curvas generan hipersuperficies que forman parte de la frontera de algunas regiones isoperimétricas. Sin embargo, en dimensiones bajas, y en particular en superficies, no conocemos ninguna referencia en la literatura en la que una curva tipo onduloide bordeé una solución isoperimétrica.

Procedamos a describir nuestro razonamiento: considérese una superficie \tilde{M} del Ejemplo 3.2, en la que existan anillos asimétricos que sean soluciones isoperimétricas (el Caso 2 anterior muestra una superficie verificando esta propiedad), y fijemos $B = S^1 \times [t_1, t_2]$ uno de dichos anillos.

Por lo comentado previamente sabemos que uno de los paralelos de ∂B , sea por ejemplo $S^1 \times \{t_1\}$, se encontrará en la parte esférica, donde $(f')^2 - ff''$ es constantemente igual a 1, y que el otro paralelo $S^1 \times \{t_2\}$ estará contenido en la parte hiperbólica. Nuestro argumento consiste en rotar ligeramente la parte esférica de \tilde{M} , manteniendo fija la parte hiperbólica, de forma que la curva $S^1 \times \{t_1\}$ se mantenga contenida, en todo instante, en la parte esférica. Dicho movimiento rígido no provoca cambios en las propiedades que satisface \tilde{M} , y hace que del anillo B se pase a tener una nueva región B' , que claramente encierra la misma cantidad de área y tiene el mismo perímetro que B . Por tanto, B' resultará ser también una región isoperimétrica, bordeada por el paralelo $S^1 \times \{t_2\}$ (que no ha sido modificado), y por una curva C contenida en la parte esférica, que aparece al aplicar la rotación. Justifiquemos ahora que dicha curva C es una curva tipo onduloide.

En principio, es claro que C no es un círculo de revolución, ya que esta curva no tiene altura constante. Sin embargo, la curvatura geodésica de C sí que es constante (obsérvese que el paralelo $S^1 \times \{t_1\}$, visto contenido en la esfera, no cambia su curvatura geodésica al aplicar el movimiento rígido). Por tanto, C ha de ser una de las curvas descritas en el Teorema 3.2.5. Como trivialmente no es una geodésica vertical, ni tampoco un nodoide (recuérdese que aplicamos una ligera rotación, de forma que el paralelo original no llega a tocar la parte hiperbólica), se concluye que necesariamente C es un onduloide.

Consecuentemente, podemos enunciar el siguiente Lema, que resume lo que acabamos de demostrar: los anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución son, realmente, regiones isoperimétricas en nuestros toros de revolución.

Lema 3.4.15. *Existen anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución que son soluciones isoperimétricas en ciertos toros de revolución con curvatura de Gauss decreciente y con una simetría horizontal.*

Nota 3.4.16. En este tipo de superficies \tilde{M} es fácil comprobar que, cuando la parte hiperbólica es suficientemente corta, de forma que

$$L(d/b) = 2\pi c > 2d/b,$$

entonces cualquier círculo de revolución tiene más longitud que una geodésica vertical, y consecuentemente las regiones isoperimétricas, en tal caso, son discos (contenidos en la parte esférica) para áreas pequeñas, y posteriormente anillos verticales. Esto ocurre, por ejemplo, si consideramos la superficie \tilde{M} determinada por los parámetros $a = 1$, $b = 1$ y

$t^* = \pi/7$, con lo que $c = 0,7896$ y $d = 0,9738$ (la Figura 3.10 muestra el correspondiente perfil isoperimétrico).

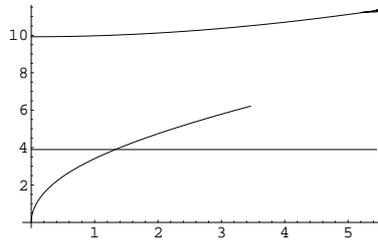


FIGURA 3.10. Discos y anillos verticales son las regiones isoperimétricas en algunas superficies \tilde{M}

3.4.3. Consideraciones finales. A la vista de los resultados obtenidos a lo largo de esta Sección 3.4, podemos enunciar el siguiente resultado, referente a las regiones isoperimétricas que pueden aparecer en los toros de revolución de nuestra familia.

Teorema 3.4.17. *Sea M un toro de revolución, simétrico y con curvatura de Gauss decreciente desde el paralelo de mayor longitud. Sea Ω una región isoperimétrica de M*

Entonces, Ω consistirá en un disco bordeado por una curva de curvatura geodésica constante, un anillo horizontal simétrico o asimétrico, un anillo bordeado por un onduloide y un círculo de revolución, un anillo vertical, o posiblemente una unión de un disco y un anillo simétrico (con la misma curvatura geodésica constante), o el complementario de uno de estos conjuntos.

Nota 3.4.18. En el Lema 2.6.4 se vio que hay regiones formadas por la unión de un disco y un anillo simétrico que son estables en este tipo de superficies \tilde{M} . Sin embargo, al igual que en los toros de revolución estándar, no hemos encontrado ninguna superficie concreta donde tales regiones resulten isoperimétricas (los cálculos numéricos realizados así nos lo muestran). De hecho, la condición de que las componentes del borde tengan la misma curvatura geodésica se verifica en pocas ocasiones, por lo que dichas uniones no llegan a aparecer en muchas de estas superficies. Aun así, no hemos hallado un razonamiento general que permita descartar este tipo de conjuntos, debido principalmente a que esta familia de superficies es muy amplia.

Pensamos que para este tipo de conjuntos, sólo un argumento de comparación directa del perímetro permitirá descartarlos, o determinar que son regiones isoperimétricas, tanto para las superficies de los tipos descritos en los ejemplos anteriores, como en cualquier otro toro rotacionalmente simétrico con simetría horizontal y curvatura decreciente.

Nota 3.4.19. Hacemos notar que, en las superficies del tipo descrito en el Ejemplo 3.2 que se han estudiado, las regiones isoperimétricas para área mitad $\beta/2$ han resultado ser un anillo horizontal (simétrico o asimétrico), un anillo bordeado por un onduloide y un círculo de revolución, y un anillo vertical.

Nota 3.4.20. Nótese que no existen toros de revolución con curvatura de Gauss K creciente desde el ecuador. En caso de existir, se tendría que $K < 0$ en todo punto, ya que los puntos del paralelo de menor longitud son hiperbólicos, y K resultaría decreciente desde dicho paralelo. Esto da lugar a contradicción, porque los toros son superficies compactas, y por tanto, con puntos elípticos.

El problema isoperimétrico en anillos de revolución completos

Pasamos ahora a estudiar el problema isoperimétrico en otra superficie rotacionalmente simétrica, en esta ocasión en un contexto no compacto: *anillos de revolución completos, simétricos* y con *curvatura de Gauss creciente* desde el paralelo de menor longitud. Dentro de esta familia se hallan superficies bien conocidas como las catenoides y los hiperboloides de una hoja.

Nuestro principal logro es determinar totalmente las regiones isoperimétricas de las superficies de esta familia (Teorema 4.4.22). Además, como consecuencia interesante, completamos la clasificación de las regiones isoperimétricas en las cuádricas de revolución no degeneradas de \mathbb{R}^3 (Corolario 4.5.6).

Al igual que en Capítulo anterior, nuestro punto de partida es la caracterización de las curvas con curvatura geodésica constante. En este caso, las únicas curvas de este tipo con longitud finita resultan ser los paralelos, los nodoides y los onduloideos (Teorema 4.2.1).

En la Sección 4.3 mostraremos las regiones estables de estas superficies (Teorema 4.3.2), confirmando su existencia en algunos ejemplos concretos.

La Sección 4.4 está dedicada al estudio de las regiones isoperimétricas. Téngase en cuenta que nuestros anillos no son superficies compactas, por lo que, en principio, la existencia de soluciones isoperimétricas no está asegurada (a diferencia de lo que ocurría con los toros de revolución tratados en el Capítulo 3).

Nosotros nos ocuparemos de esta cuestión usando las técnicas habituales, considerando sucesiones minimizantes y estudiando su convergencia. De esta forma, veremos que hay situaciones en las que no hay solución para ningún valor del área (por ejemplo, en las catenoides minimales), mientras que en otras ocasiones, la existencia sólo se tiene para determinados valores del área.

Para este tipo de superficies, sí obtenemos un argumento general que permite descartar las uniones de un disco y un anillo simétrico como posible región isoperimétrica, de forma que éstas, en caso de existir, vendrán dadas por los siguientes conjuntos:

- i) discos contenidos en regiones donde la curvatura de Gauss es constantemente igual a su máximo valor,
- ii) anillos horizontales bordeados por dos círculos de revolución (simétricos o no simétricos con respecto al paralelo de menor longitud),
- iii) anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución.

Además, se estudiarán en detalle varios ejemplos de anillos de nuestra familia, determinando las soluciones isoperimétricas en cada una de ellas.

Finalmente, en la Sección 4.5, aplicamos los resultados anteriores para examinar el comportamiento isoperimétrico que presentan los hiperboloides de una hoja (Teorema 4.5.1). Como consecuencia, logramos completar la clasificación de las regiones isoperimétricas en las cuádricas de revolución no degeneradas, descritas en el Corolario 4.5.6, así como para el paraboloides hiperbólico recto.

4.1. Descripción de nuestras superficies

En este Capítulo estudiaremos el problema isoperimétrico en otra familia de superficies rotacionalmente simétricas, en este caso no acotadas: anillos de revolución completos, simétricos y con curvatura de Gauss creciente desde el paralelo de menor longitud.

Al igual que el Capítulo 3, pretendemos abordar este problema utilizando los resultados del Capítulo 2. Así, veremos los anillos de revolución como superficies $S^1 \times \mathbb{R}$, con métrica de tipo (2.1) definida a partir de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ positiva, simétrica, en general de clase C^1 , y C^2 a trozos.

La simetría de la función f implica que la superficie $S^1 \times \mathbb{R}$ es simétrica respecto del ecuador $S^1 \times \{0\}$. Además, se tendrá que

$$f'(t) = -f'(-t), \quad t \in \mathbb{R},$$

de donde se tiene, en particular, que $f'(0) = 0$. Finalmente, asumiremos que la curvatura de Gauss K es una función creciente con respecto a la distancia al ecuador.

Así, con estas consideraciones, la superficie $M = S^1 \times \mathbb{R}$ es un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura de Gauss creciente respecto del ecuador, y estaremos en posición de poder aplicar los resultados generales descritos en el Capítulo 2.

Nota 4.1.1. La hipótesis de monotonía impuesta sobre la curvatura de Gauss K provoca que ésta presente las siguientes propiedades:

1. El mínimo valor de K se alcanza sobre el paralelo $S^1 \times \{0\}$.
2. Como no existen finales completos con curvatura positiva, se sigue que

$$K(t) \leq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, como K es creciente y acotada en \mathbb{R}^+ , el límite

$$K_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t)$$

necesariamente existe. En particular, se tiene que $K_\infty \leq 0$. Dicho valor no siempre se alcanzará en la superficie, y en caso de que eso ocurra, se corresponderá con el máximo valor de K .

3. Es evidente que si $K(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}^+$, entonces K será idénticamente nula en $[t_0, +\infty)$, con lo que nuestro anillo $S^1 \times \mathbb{R}$ será llano en entornos de sus dos finales.

4. En particular, si $K(0) = 0$, entonces K será idénticamente nula y el anillo $S^1 \times \mathbb{R}$ resultará ser un *cilindro recto* completo, donde las regiones isoperimétricas están totalmente clasificadas (son discos, y anillos horizontales bordeados por dos paralelos [56]). Por tanto, asumiremos de aquí en adelante que $K(0) < 0$ en nuestras superficies.

El siguiente Lema muestra otras propiedades que satisfacen este tipo de superficies, consecuencia de las hipótesis realizadas.

Lema 4.1.2. *Sea M un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador. Entonces,*

- i) *La función f es creciente en \mathbb{R}^+ .*
- ii) *La función $(f')^2 - f f''$ es decreciente en \mathbb{R}^- y creciente en \mathbb{R}^+ .*

DEMOSTRACIÓN.

i) Como K es no-positiva, se sigue a partir de (2.2) que $f'' = -K f \geq 0$ y por tanto, f'

será creciente. Como $f'(0) = 0$, concluimos que $f' \geq 0$, para $t > 0$, por lo que f resulta ser creciente para $t \geq 0$.

ii) Recuérdese que las funciones $(f')^2 - ff''$ y K presentan el mismo carácter monótono (véase la Nota 2.2.2). Por tanto, $(f')^2 - ff''$ será decreciente en \mathbb{R}^- y creciente en \mathbb{R}^+ . \square

Nota 4.1.3. Justifiquemos que $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ es el paralelo de *menor longitud* de M . Nótese que f es creciente en \mathbb{R}^+ , por el Lema 4.1.2. Supongamos que f es constante en un intervalo $[0, \varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$. Entonces, $K = 0$ en dicho intervalo, lo que implica que M sería un cilindro recto, en virtud de la Nota 4.1.1 (y todos los paralelos tendrán la misma longitud). En caso contrario, como f será estrictamente creciente en un entorno del origen, el ecuador $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ resulta el paralelo de menor longitud de M .

Nota 4.1.4. Veamos que en este caso, la curvatura geodésica $h(t)$ de los círculos de revolución $\mathbb{S}^1 \times \{t\}$ puede presentar diversos comportamientos, a diferencia de lo que ocurría al considerar toros de revolución, véase la Nota 3.1.4. Gracias a la antisimetría de $h(t)$, podemos centrar nuestro estudio en \mathbb{R}^+ .

En primer lugar, destacamos que en la demostración del Lema 4.1.2 se ha visto que $f'(t) \geq 0$, para todo $t > 0$. Eso implica inmediatamente que $h(t) = f'(t)/f(t) \geq 0$, para todo $t > 0$.

Por otro lado, a partir del Lema 2.3.4 sabemos que el crecimiento de $h(t)$ vendrá determinado por el signo que tome la función $(f')^2 - ff''$, que es función creciente en \mathbb{R}^+ en virtud del Lema 4.1.2. Además,

$$[(f')^2 - ff''](0) = K(0) f(0)^2 < 0.$$

Analizando detenidamente las distintas alternativas que presentará el signo de la función $(f')^2 - ff''$, es fácil concluir que $h(t)$ se comportará siguiendo una de estas cuatro pautas:

- i) $h(t)$ es estrictamente creciente en \mathbb{R}^+ .
- ii) Existe $t' \in \mathbb{R}^+$ tal que $h(t)$ es creciente en $(0, t')$, y constante para $t \geq t'$.
- iii) Existen $t', t'' \in \mathbb{R}^+$ tales que $h(t)$ es creciente en $(0, t')$, constante en (t', t'') y decreciente para $t \geq t''$.
- iv) Existe $t' \in \mathbb{R}^+$ tal que $h(t)$ es creciente en $(0, t')$ y decreciente en $(t', +\infty)$.

Teniendo en cuenta que $h(0) = f'(0)/f(0) = 0$, que $h(t) \geq 0$ en \mathbb{R}^+ , y que una vez que $h(t)$ es decreciente, no puede anularse (dicha situación llevaría a contradicción con el crecimiento de $(f')^2 - ff''$), las cuatro posibilidades anteriores determinan completamente el comportamiento de $h(t)$.

Del análisis anterior se deduce adicionalmente que $h(t)$ sólo se anula en $t = 0$, y consecuentemente $h(t) > 0$ si $t > 0$. Por la antisimetría concluimos que la curvatura geodésica de los círculos de revolución tiene distinto signo en cada *mitad* de nuestro anillo.

4.2. Curvas con curvatura geodésica constante

Pasamos ahora a clasificar las curvas con curvatura geodésica constante contenidas en nuestros anillos. Al igual que hicimos en el Capítulo 3, a partir del sistema (2.7) y de la primera integral (2.8), se llega al siguiente Teorema, de forma análoga a como se hizo en el Teorema 3.2.5. Debido a que estamos interesados en las curvas con curvatura geodésica constante *cerradas y embebidas*, lo enunciamos en dicho contexto.

Teorema 4.2.1. *Sea M un anillo de revolución, simétrico y con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador. Sea C una curva cerrada y embebida con curvatura geodésica constante.*

Entonces, C es un paralelo, un nodoide o un onduloide, satisfaciendo estos dos últimos las condiciones expresadas en la Proposición 2.3.5.

Nota 4.2.2. De forma similar a lo que ocurría para toros de revolución, las curvas generadoras del anillo $S^1 \times \mathbb{R}$, visto como superficie de revolución, y las curvas de tipo hélice, son también curvas con curvatura geodésica constante. Sin embargo, no son cerradas ni embebidas, y de hecho, tampoco tienen longitud finita. Por tanto, ni siquiera constituyen curvas estables, de ahí que no se vayan a tener en cuenta.

4.2.1. Existencia de onduloides estables. En esta Subsección vamos a dar un ejemplo concreto de un anillo de revolución simétrico y con curvatura creciente, donde existen *onduloides cerrados, embebidos y estables*. De esta forma, habrá que considerar a estas curvas como posibles componentes del borde de regiones estables e isoperimétricas. Seguiremos un esquema similar al utilizado en la Subsección 3.2.1.

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = t^2 + L, \quad t \in \mathbb{R},$$

con $L > 0$. Dicha función es diferenciable, simétrica y positiva, por lo que si consideramos $M = S^1 \times \mathbb{R}$ con métrica (2.1) determinada por f , se obtendrá un anillo de revolución M simétrico con respecto al ecuador $S^1 \times \{0\}$. Además,

$$K(t) = \frac{f''(t)}{f(t)} = \frac{-2}{t^2 + L},$$

con lo que la curvatura de Gauss de M resulta *estrictamente creciente* desde el ecuador, y por tanto, M es una superficie contenida en la familia de anillos que estamos considerando. Veamos que en M existen onduloides cerrados, embebidos y estables, aplicando los resultados de la Sección 2.5.

Nos ocupamos en primer lugar de la existencia de onduloides cerrados y embebidos, que viene dada por el Lema 2.5.4. Como

$$[(f')^2 - ff''](t) = 2(t^2 - L),$$

se sigue que

$$[(f')^2 - ff''](t) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad t = \pm\sqrt{L+1/2}.$$

Fijemos $\tilde{t} = \sqrt{L+1/2}$.

Entonces, las hipótesis del Lema 2.5.4 se satisfacen trivialmente en esta superficie, ya que la curvatura de Gauss K es claramente diferenciable y estrictamente creciente en un entorno de \tilde{t} (de hecho, lo es en todo \mathbb{R}). Como consecuencia, podemos asegurar la existencia de una familia de onduloides cerrados y embebidos $\gamma(\theta, T, h_o(T))$ contenidos en M , parametrizados por su punto máximo T , con T próximo a \tilde{t} .

Pasemos a discutir la estabilidad de dichos onduloides cerrados y embebidos. A partir del Lema 2.5.8, se deduce que la derivada del periodo de dichos onduloides con respecto al punto máximo T (y curvatura geodésica fija) es positiva para $T > \tilde{t}$, ya que es rutinario comprobar que el término de la izquierda de la condición (2.43) es igual a

$$\frac{100 + 336L + 320L^2}{1 + 4L},$$

que es estrictamente positivo. Esto nos permite demostrar el siguiente Lema, de forma idéntica a la realizada en el Lema 3.2.6.

Lema 4.2.3. *Sea C un onduloide cerrado y embebido contenido en el anillo de revolución $S^1 \times \mathbb{R}$, con métrica (2.1) determinada por la función $f(t) = t^2 + L$, y sea $\tilde{t} = \sqrt{L+1/2}$.*

Supongamos que C está suficiente próximo al paralelo $S^1 \times \{\tilde{t}\}$. Entonces, el segundo valor propio asociado al operador de Jacobi en C es igual a cero.

Para enunciar el próximo Lema, análogo al Lema 3.2.7 que se vio en el Capítulo 3, fijaremos previamente el valor

$$L_0 = \frac{3 + \sqrt{61}}{8}.$$

Lema 4.2.4. *Sea $M = S^1 \times \mathbb{R}$ el anillo de revolución con métrica de tipo (2.1) determinada por la función $f(t) = t^2 + L$. Entonces, si $L < L_0$, existen onduloideos cerrados y embebidos contenidos en M que son estables.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración sigue el mismo esquema que el de la demostración del Lema 3.2.7. Sea $\gamma(\theta, t, h_o(T))$ la familia de onduloideos cerrados y embebidos en M , que sabemos que existe gracias al Lema 2.5.4 para $T > \tilde{t}$ suficientemente próximos. Sea C uno de los onduloideos de dicha familia. Gracias a los Lemas 2.4.9 y 4.2.3, estamos en disposición de aplicar el Lema 2.5.9 para estudiar la estabilidad de C .

Empecemos discutiendo el signo de la derivada de h_o para $T > \tilde{t} = \sqrt{L+1/2}$. A partir de (2.37), sabemos que $h'(\tilde{t}) = 0$. En cuanto a $h''(\tilde{t})$, a partir de (3.8) y teniendo en cuenta (2.48), se tiene que

$$h''_o(\tilde{t}) = \frac{-2\sigma_{TTT}(\pi)}{3\pi f(\tilde{t})^3 K'(\tilde{t})} = \frac{-25 - 84L - 80L^2}{3\sqrt{L+1/2}(1+4L)^{3'}}$$

que es estrictamente negativo. Por tanto, h'_o es estrictamente decreciente en \tilde{t} , por lo que, para $T > \tilde{t}$, concluimos que $h'_o(T) < h'_o(\tilde{t}) = 0$.

Pasamos a estudiar el signo de la variación del área inducida por la deformación por onduloideos dada por (3.10) (véase también la Nota 2.5.10) en $T = \tilde{t}$. Al igual que vimos en el Lema 3.2.7, se tiene que la primera derivada del área a lo largo de la deformación se anula en $T = \tilde{t}$, mientras que la segunda derivada en $T = \tilde{t}$ se puede comprobar que es igual a

$$\frac{(13 + 12L - 16L^2)\sqrt{L+1/2}\pi}{6 + 12L}.$$

Dicho valor es positivo si $L < L_0$, y en tal caso, la primera derivada del área es creciente en $T = \tilde{t}$ y positiva para $T > \tilde{t}$.

Así, aplicando el Lema 2.5.9, se concluye que C es un onduloide *estable* contenido en M , para $T > \tilde{t}$ suficientemente próximo y $L < L_0$. \square

4.3. Regiones estables

Nos centramos ahora en las regiones estables de nuestros anillos de revolución. La clasificación de estas regiones, obtenida en el Teorema 4.3.2, nos permitirá discutir cuáles son las soluciones isoperimétricas en estas superficies. Tal y como se hizo en el Capítulo 3, el estudio de las combinaciones de curvas con curvatura geodésica constante será el punto de partida que nos conduzca a dicha clasificación. Además, mostraremos que todas las posibilidades descritas en el Teorema 4.3.2 se dan, considerando varios ejemplos concretos.

Antes de enunciar el Teorema de clasificación de regiones estables, comentaremos brevemente algunos aspectos sobre la evolución que llevan a cabo los anillos horizontales estables en nuestros anillos de revolución. La progresión descrita en la Subsección 3.3.1 del Capítulo 3, dedicado a los toros de revolución, se ajusta, en general, a lo que ocurre

para anillos. Sin embargo, pueden aparecer ciertas diferencias en algunas situaciones, provocadas por las propiedades específicas de cada anillo de revolución.

Por ejemplo, la curvatura geodésica de los círculos de revolución puede presentar ahora comportamientos diversos (véase la Nota 4.1.4); en caso de que sea estrictamente creciente en todo \mathbb{R} , la condición de curvatura geodésica constante para los anillos asimétricos no se verificará, lo que imposibilitará la aparición de éstos. Por otro lado, en el Ejemplo 4.4 de la Sección 4.4 posterior, veremos otra situación en la que la evolución de los anillos horizontales estables presenta ciertas particularidades. Por tanto, en estas superficies, dicha evolución dependerá en gran medida del anillo de revolución que se considere.

Recuérdese que la curvatura de Gauss de nuestros anillos es creciente desde el ecuador. Este hecho va a provocar que los únicos nodoides cerrados, embebidos y estables se hallen contenidos en regiones con curvatura de Gauss constante.

Lema 4.3.1. *Sea $C \subset M$ un nodoide cerrado y embebido, no contenido en una región con curvatura de Gauss constante. Entonces C es inestable.*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia del Lema 2.4.18. □

Pasamos a demostrar el resultado que clasifica las regiones estables en nuestros anillos de revolución. El lector puede comparar este resultado con el Teorema 3.3.6, que describe las regiones estables en toros de revolución simétricos y con curvatura de Gauss decreciente desde el ecuador.

Teorema 4.3.2. *Sea M un anillo rotacionalmente simétrico completo, simétrico y con curvatura de Gauss (posiblemente discontinua) creciente desde el ecuador. Sea Ω una región estable de M . Entonces Ω es uno de estos conjuntos:*

- i) *un disco bordeado por una curva con curvatura geodésica constante, contenido en una región con curvatura de Gauss constante,*
- ii) *un anillo horizontal simétrico con respecto al ecuador, bordeado por dos círculos de revolución contenidos cada uno de ellos en la región $K + h^2 \leq 0$,*
- iii) *un anillo horizontal asimétrico bordeado por dos círculos de revolución contenidos en la región $K + h^2 \leq 4\pi^2 / L^2$ y verificando la condición (2.49),*
- iv) *un anillo bordeado por un onduloide estable, en las condiciones del Lema 2.5.1, y un círculo de revolución contenido en la región $K + h^2 < 0$,*
- v) *una unión de un disco (con curvatura de Gauss constante) y un anillo simétrico con la misma curvatura geodésica constante, en las condiciones indicadas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Ω una región estable contenida en M . Como el primer valor propio del operador de Jacobi (2.19) asociado a una curva tipo nodoide u onduloide es negativo (véanse el Lema 2.4.9 y la Nota 2.4.11), se sigue que $\partial\Omega$ contendrá, como mucho, a una de estas curvas. Por otro lado, ya hemos comentado en la Nota 4.1.4 que la curvatura geodésica $h(t)$ de los paralelos tiene distinto signo en cada una de las mitades del anillo, por lo que $\partial\Omega$ contendrá, a lo sumo, un paralelo en cada mitad.

Si $\partial\Omega$ no contiene ni nodoides ni onduloides, entonces Ω se reducirá a un anillo horizontal de tipo ii) o iii), satisfaciendo las condiciones descritas en el Lema 2.6.1. Además, como los paralelos del borde han de ser estables, en el caso de un anillo asimétrico se ha de satisfacer la condición (2.22).

Si $\partial\Omega$ contiene a un nodoide, por el Lema 4.3.1 se sigue que Ω es una región de tipo i) o v).

Si $\partial\Omega$ contiene a un onduloide, entonces Ω debe ser una región de tipo iv), cumpliendo la condición del Lema 2.5.1. Además, el primer valor propio del operador de Jacobi en

el paralelo del borde, ha de ser estrictamente positivo, y por tanto, contenido en la región donde $K + h^2 < 0$, a partir del Lema 2.4.6. \square

Nota 4.3.3.

1. Conviene remarcar que, a diferencia de lo que ocurría al considerar toros de revolución, los anillos bordeados por curvas generadoras del anillo de revolución, o por curvas tipo hélice, no aparecen ahora como regiones estables. Como ya se comentó, tales curvas no tienen perímetro finito en este caso.

2. Además, los únicos nodoides cerrados, embebidos y estables son los contenidos en regiones con curvatura de Gauss constante. Esto es consecuencia de la monotonía existente en nuestros anillos (véase Lema 4.3.1).

3. Los conjuntos complementarios a los descritos en el Teorema 4.3.2 encierran un *área no finita*, por lo que no los consideraremos regiones estables.

Veamos ahora que todas las regiones descritas en el Teorema 4.3.2 se dan efectivamente en nuestros anillos de revolución. Obviamente, los nodoides con curvatura de Gauss constante son estables, como consecuencia de la desigualdad isoperimétrica. Por ejemplo, en un anillo donde $K_\infty = 0$, y se alcance en un entorno de un final, los discos contenidos en dicho entorno serán claramente estables (de hecho serán las regiones isoperimétricas para áreas pequeñas).

En cuanto a los anillos horizontales (simétricos o asimétricos), es fácil encontrar ejemplos donde se satisfagan las condiciones de estabilidad del Lema 2.6.1 (sin ir más lejos, basta considerar el ejemplo descrito en la Subsección 4.2.1, como parcialmente se ve en la siguiente Nota 4.3.4). En cualquier caso, en la Sección 4.4 se mostrarán superficies de nuestra familia donde tales anillos son soluciones isoperimétricas.

Nos centramos ahora en describir dos anillos de revolución donde existen regiones de tipo iv) y v) del Teorema 4.3.2 que son estables.

Nota 4.3.4. Consideremos el anillo de revolución $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ descrito en la Subsección 4.2.1, determinado por la función

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = t^2 + L, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ya demostramos en el Lema 4.2.4 que existen onduloideos cerrados, embebidos y estables en M , cuando $L < L_0$. Veamos ahora que hay anillos bordeados por uno de esos onduloideos y por un paralelo, que son estables en M . Para ello nos serviremos del Lema 2.6.6.

En el estudio realizado a lo largo de la Subsección 4.2.1, se vio que, para $\tilde{t} = \sqrt{L + 1/2}$, se tiene que

$$[(f')^2 - ff''](\tilde{t}) = 1,$$

Además, la curvatura de Gauss

$$K(t) = \frac{-2}{t^2 + L}$$

es diferenciable y estrictamente creciente en todo \mathbb{R} .

Fijemos γ_T un onduloide cerrado, embebido y estable, con punto máximo T próximo a \tilde{t} , y sea Ω_T el anillo bordeado por γ_T y por el paralelo $\mathbb{S}^1 \times \{t(T)\}$, de forma que $\partial\Omega_T$ tenga curvatura geodésica constante con respecto al normal interior a Ω_T . Nótese que la curvatura geodésica de los paralelos contenidos en M viene dada por

$$(4.1) \quad h(t) = \frac{2t}{t^2 + L},$$

que es una función creciente en $(0, \sqrt{L})$ y decreciente en $(\sqrt{L}, +\infty)$. Por tanto, como la curvatura de γ_T será próxima a $h(\bar{t})$, es posible hallar tal paralelo $S^1 \times \{t(T)\}$, verificando además que $(K + h^2)(t(T)) < 0$.

Veamos finalmente que el anillo asimétrico correspondiente a \bar{t} , es estable y satisface estrictamente la condición (2.49). Es fácil comprobar, a partir de (4.1), que dicho anillo $S^1 \times [t', \bar{t}]$ se corresponde con

$$t' = \frac{-L}{\sqrt{L+1/2}}.$$

Entonces, la condición (2.49) es equivalente a

$$\frac{-1}{L^2(1+4L)^2\pi} \leq 0,$$

que se cumple trivialmente de manera *estricta*.

Así, estamos en condiciones de aplicar el Lema 2.6.6 para afirmar que efectivamente, Ω_T es una región estable de M .

Nota 4.3.5. Mostremos un ejemplo de superficie donde existen uniones estables de un disco y un anillo simétrico. Consideremos la función

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t^2}{t_0^2}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{2t}{t_0}, & t > t_0, \end{cases}$$

definida de forma simétrica en \mathbb{R}^- . Dicha función es de clase C^1 , y C^2 a trozos. Denotemos por $M = S^1 \times \mathbb{R}$ al anillo completo con métrica (2.1) asociada a f . En este caso, la curvatura de Gauss de M es igual a

$$K(t) = \begin{cases} \frac{-2}{t^2+t_0^2}, & 0 \leq t < t_0, \\ 0, & t > t_0, \end{cases}$$

que es creciente, por lo que M es una superficie dentro de nuestro estudio. Además, como K_∞ se alcanza, existirán nodoides cerrados, embebidos bordeando discos estables en M . Por otro lado,

$$[(f')^2 - ff''](t) = \begin{cases} \frac{2t^2-2t_0^2}{t_0^4}, & 0 \leq t < t_0, \\ \frac{4}{t_0}, & t > t_0, \end{cases}$$

con lo que los anillos simétricos $S^1 \times [-t, t]$ serán estables para $t \in [0, t_0)$, según el Lema 2.6.1.

Fijemos ahora $t \in [0, t_0)$ y $B_t = S^1 \times [-t, t]$. Nótese que $h(t) > 0$, por lo comentado en la Nota 4.1.4. Sea $D \subset M$ el disco con curvatura de Gauss nula y curvatura geodésica $h(\partial D) = h(t)$, que tendrá radio $1/h(t)$. Entonces es claro que

$$L(\partial D) = \frac{2\pi}{h(t)}.$$

En este caso, la condición (2.51) que nos da la estabilidad de $\Omega = D \cup B_t$ es equivalente a

$$\frac{2f'(t)^3 + f'(t)^2 - f(t)f''(t)}{f(t)f'(t)} \leq 0,$$

ya que $K_0 = K_\infty = 0$. Es rutinario comprobar que dicha condición se satisface, por ejemplo, tomando $t_0 = 2$ y $t \in (0, 1)$, por lo que las correspondientes uniones $D \cup B_t$ resultan estables en esta superficie.

4.4. Regiones isoperimétricas

En esta Sección nos ocuparemos de describir las regiones isoperimétricas de los anillos de revolución completos, simétricos y con curvatura creciente desde el ecuador. Tal y como se ha comentado previamente, la existencia de estas regiones no está garantizada, al tratarse de superficies no compactas (de hecho, se verán situaciones en las que no hay regiones isoperimétricas para ningún valor del área). Por ello, comenzaremos discutiendo varias cuestiones relativas a la existencia.

El principal propósito de esta Sección es encontrar las regiones isoperimétricas en este tipo de superficies. A partir del Teorema 4.3.2, que describe las regiones estables, lograremos nuestro objetivo, clasificando todas las soluciones isoperimétricas (Teorema 4.4.22). Además, se analizará la evolución de estas soluciones en varios anillos de revolución particulares.

Finalmente, y como una consecuencia derivada de nuestro estudio, nos ocuparemos de los hiperboloides de una hoja, determinando su comportamiento isoperimétrico en todo caso (Teorema 4.5.1). Esto nos permitirá dejar zanjada la cuestión isoperimétrica en la familia de cuádricas de revolución no degeneradas de \mathbb{R}^3 (Corolario 4.5.6).

4.4.1. Existencia de regiones isoperimétricas. Tratemos ahora la existencia de regiones isoperimétricas en nuestros anillos. Tal y como se ha comentado antes, ésta no es una cuestión trivial, ya que estamos trabajando con superficies no compactas, y por tanto, la existencia de dichas regiones no está asegurada. Esto se debe, esencialmente, a que una sucesión minimizante podría tener una parte que diverja, lo que conllevará *pérdida de área* en infinito (véase el Lema 2.1.1 de la Sección 2.1).

De hecho, en este ambiente de superficies de revolución no compactas (con alguna hipótesis de monotonía sobre la curvatura de Gauss) en el que estamos trabajando, hay ejemplos de superficies en las que no hay existencia de regiones isoperimétricas para ningún valor del área. Por ejemplo, en [82] se muestra que en planos de revolución con curvatura de Gauss estrictamente creciente no existen dichas regiones.

En este sentido, dentro de la familia de anillos que estamos considerando, veremos algunos ejemplos de no existencia, como es el caso de las catenoides minimales. También mostraremos, por medio de varios ejemplos, que la existencia de regiones isoperimétricas no presenta un comportamiento *uniforme*, en el sentido de que en una misma superficie puede ocurrir que haya soluciones isoperimétricas para ciertos valores del área, mientras que para otros valores no se tenga esa existencia.

Intuitivamente, en nuestros anillos de revolución, parece lógico pensar que si una sucesión minimizante $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una parte que diverge hacia un final, los conjuntos de dicha parte se han de *aproximar* a un disco (debido al carácter minimizante de la sucesión, y a que la curvatura de Gauss es creciente). El siguiente resultado deja patente este hecho, así como la repercusión que tiene sobre el conjunto límite de la parte convergente de $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: bajo tales condiciones, dicho conjunto límite ha de ser un anillo simétrico.

A partir de este momento, denotaremos por $M(K_\infty)$ al plano completo con curvatura de Gauss constante K_∞ .

Teorema 4.4.1. *Sea M un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador. Consideremos $A > 0$, y una sucesión minimizante $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para área A .*

Entonces, si el área A_c de la parte convergente y el área A_d de la parte divergente de $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son estrictamente positivas, se tiene que el valor del perfil isoperimétrico $I(A)$ vendrá dado por la

suma de los perímetros de un anillo simétrico estable en M , y de un disco contenido en $M(K_\infty)$, ambos con la misma curvatura geodésica. Además, la unión de esos dos conjuntos es estable en $M \cup M(K_\infty)$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por Ω_n^d, Ω_n^c a los conjuntos de la parte divergente y convergente, respectivamente, en los que se descompone Ω_n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Recuérdese que

$$A_d = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{área}(\Omega_n^d), \quad A_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{área}(\Omega_n^c).$$

Como $K \leq K_\infty$, aplicando la desigualdad isoperimétrica clásica y tomando límites se llega a que

$$L_d^2 \geq 4\pi A_d - K_\infty A_d^2,$$

donde $L_d = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\partial\Omega_n^d)$.

Por otro lado, considérese un disco $D \subset M(K_\infty)$ de área $A_d > 0$. De nuevo aplicando la desigualdad isoperimétrica se tiene que

$$L(\partial D) = 4\pi A_d - K_\infty A_d^2 \leq L_d^2.$$

Afirmamos que $L(\partial D) = L_d$. En efecto, siempre resulta posible aproximar el disco D mediante una sucesión $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de discos geodésicos en M (centrados en una sucesión divergente de puntos), de forma que

$$\text{área}(D_n) = \text{área}(\Omega_n^d), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Así, si $L(\partial D) < L_d$, se tendrá que la sucesión $\{\Omega_n^c \cup D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mejora la sucesión minimizante $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, lo que es contradictorio. Por tanto, necesariamente $L(\partial D) = L_d$.

Denotemos por Ω al conjunto límite de la sucesión convergente $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que será distinto del conjunto vacío ya que $A_c > 0$. El razonamiento anterior implica que $I(A)$ viene dado por el perímetro de la unión $\Omega \cup D$. Es claro que dicha unión ha de ser estable en $M \cup M(K_\infty)$: en caso contrario, se podría encontrar un conjunto (suficientemente próximo) contenido en $M \cup M(K_\infty)$, encerrando la misma área y con menos perímetro, cuya aproximación en M daría lugar, como antes, a contradicción con el carácter minimizante de $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Recuérdese que, en particular, Ω es una región estable, al ser la solución isoperimétrica para área $A_c > 0$. Por tanto, ha de consistir en uno de los conjuntos descritos en el Teorema 4.3.2. Como el primer valor propio del operador (2.19) asociado al disco $D \subset M(K_\infty)$ es negativo, la única posibilidad que no contradice la estabilidad de $\Omega \cup D$ es que Ω sea un anillo simétrico (nótese que los discos, onduloideos y uno de los paralelos de los anillos asimétricos en M tienen primer valor propio asociado estrictamente negativo, lo que implicaría la inestabilidad de $\Omega \cup D$, a partir del Lema 2.4.14 y la Nota 2.4.15). Así, se tiene lo enunciado. \square

Nota 4.4.2. Hacemos énfasis en el hecho de que, para poder afirmar que Ω coincide con un anillo simétrico, es fundamental que $A_d > 0$. Eso asegura la existencia del disco D en el anterior razonamiento, lo que conlleva la determinación de Ω . Si $A_d = 0$, entonces el argumento empleado no da ninguna información sobre Ω , que es, en general, una región estable de la superficie.

Una lectura interesante del Teorema 4.4.1 es la siguiente: dada una sucesión minimizante para área $A > 0$, si tanto A_c como A_d son estrictamente positivos, entonces existe una unión de un anillo simétrico en M y un disco en $M(K_\infty)$ que proporcionan el valor del perfil isoperimétrico para área $A = A_c + A_d$. Eso quiere decir que ningún conjunto de área A contenido en M puede tener estrictamente menos perímetro que dicha unión. Sin

embargo, la Proposición 4.4.4 va a afirmar que ese tipo de uniones son siempre mejoradas por ciertos conjuntos de M . La consecuencia final de todo esto es que para cualquier sucesión minimizante, o bien $A_d = 0$, o bien $A_c = 0$.

Antes de demostrar la Proposición 4.4.4, necesitamos el siguiente Lema de tipo analítico, referido a anillos horizontales simétricos contenidos en este tipo de superficies.

Lema 4.4.3. *Sea M un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador. Si $R \subset M$ es un anillo simétrico estable con curvatura geodésica h , perímetro L y área A , entonces*

$$(4.2) \quad L > hA.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $R = \mathbb{S}^1 \times [-t, t]$, con $t > 0$. Entonces,

$$h = \frac{f'(t)}{f(t)}, \quad L = 4\pi f(t), \quad A = 4\pi \int_0^t f(s) ds.$$

Para demostrar el enunciado, basta probar la desigualdad $L^2 - LhA > 0$, equivalentemente

$$(4.3) \quad f(t)^2 - f'(t) \int_0^t f(s) ds > 0, \quad t > 0.$$

Denotemos por g a la derivada con respecto a t del término de la izquierda de (4.3). Entonces

$$(4.4) \quad \begin{aligned} g(t) &= f(t) f'(t) - f''(t) \int_0^t f(s) ds \\ &= f(t) f'(t) + K(t) f(t) \int_0^t f(s) ds, \end{aligned}$$

y derivando una vez más, se puede comprobar que

$$(4.5) \quad g'(t) = h(t) g(t) + m(t),$$

donde $m(t) = K'(t) f(t) \int_0^t f(s) ds$.

Teniendo en cuenta que, a partir de (4.4), se tiene claramente que $g(0) = 0$, es posible hallar la expresión explícita de g , resolviendo la ecuación diferencial (4.5). Así, se tiene que [50, Cor. 2,1, p. 48]

$$g(t) = e^{\int_0^t h(s) ds} \int_0^t e^{-\int_0^s h(u) du} m(s) ds.$$

Es evidente que $g(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$. Eso implica que el término de la izquierda en (4.3) es una función no decreciente, de donde se deduce la desigualdad deseada. \square

Proposición 4.4.4. *Sea M un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador. Sea $h > 0$. Entonces la unión de un anillo simétrico estable R_h en M , y un disco D_h en $M(K_\infty)$, con la misma curvatura geodésica h , tiene más perímetro que el disco D contenido $M(K_\infty)$ de área $A(R_h) + A(D_h)$.*

DEMOSTRACIÓN. Demostremos que

$$(4.6) \quad (L(\partial D_h) + L(\partial R_h))^2 > L(\partial D)^2.$$

Llamando $-b^2 = K_\infty$, y $A = A(R_h) + A(D_h)$, se sigue, por la desigualdad isoperimétrica en $M(-b^2)$, que

$$\begin{aligned} L(\partial D_h)^2 &= 4\pi A(D_h) + b^2 A(D_h)^2, \\ L(\partial D)^2 &= 4\pi A + b^2 A^2. \end{aligned}$$

Usando el Lema 4.4.3 para el anillo R_h , se tiene que

$$(4.7) \quad \begin{aligned} (L(\partial D_h) + L(\partial R_h))^2 &= L(\partial D_h)^2 + L(\partial R_h)^2 + 2L(\partial D_h)L(\partial R_h) \\ &= (4\pi A(D_h) + b^2 A(D_h)^2) + L(\partial R_h)^2 + 2L(\partial D_h)L(\partial R_h) \\ &> 4\pi A(D_h) + b^2 A(D_h)^2 + h^2 A(R_h)^2 + 2hL(\partial D_h)A(R_h). \end{aligned}$$

Para completar la demostración, es necesario relacionar la curvatura geodésica h con $L(\partial D_h)$ y $A(D_h)$. Distinguiamos dos posibles situaciones.

Caso 1. Supongamos que $b \neq 0$.

El disco D_h estará contenido en el plano $M(-b^2)$, que se puede ver como una superficie $S^1 \times [0, +\infty)$ con métrica

$$ds^2 = g(t)^2 d\theta + dt^2, \quad \theta \in S^1, t \geq 0,$$

con $g(t) = b^{-1} \sinh(bt)$. De esta manera, ∂D_h se corresponderá con un círculo de revolución $S^1 \times \{r\}$ en $S^1 \times [0, +\infty)$, con $r > 0$. Entonces

$$(4.8) \quad \begin{aligned} L(\partial D_h) &= 2\pi g(r) = 2\pi b^{-1} \sinh(br), \\ A(D_h) &= 2\pi \int_0^r g(s) ds = 2\pi b^{-2} (\cosh(br) - 1), \end{aligned}$$

y

$$(4.9) \quad h = \frac{g'(r)}{g(r)} = b \coth(br) > b,$$

de donde

$$(4.10) \quad br = \coth^{-1}(h/b).$$

Así, usando (4.10) en las expresiones de (4.8), se tiene que

$$\begin{aligned} L(\partial D_h) &= 2\pi b^{-1} \sinh(\coth^{-1}(h/b)) = 2\pi (h^2 - b^2)^{-1/2}, \\ A(D_h) &= 2\pi b^{-2} (\cosh(\coth^{-1}(h/b)) - 1) = 2\pi b^{-2} (h(h^2 - b^2)^{-1/2} - 1), \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$(4.11) \quad hL(\partial D_h) = 2\pi + b^2 A(D_h).$$

Con todo, usando (4.9) y (4.11) en (4.7), se tiene

$$\begin{aligned} (L(\partial D_h) + L(\partial R_h))^2 &> 4\pi A(D_h) + b^2 A(D_h)^2 + b^2 A(R_h)^2 + 2hL(\partial D_h)A(R_h) \\ &> 4\pi A(D_h) + b^2 A(D_h)^2 + b^2 A(R_h)^2 + 2(2\pi + b^2 A(D_h))A(R_h) \\ &= 4\pi (A(D_h) + A(R_h)) + b^2 (A(D_h) + A(R_h))^2 \\ &= 4\pi A + b^2 A^2 = L(\partial D)^2, \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Caso 2. Supongamos que $b = 0$.

En este caso, el disco D_h se halla contenido en el plano euclídeo, con lo que

$$L(\partial D_h) = 2\pi h^{-1},$$

por lo que se deduce de (4.7) que

$$\begin{aligned} (L(\partial D_h) + L(\partial R_h))^2 &> 4\pi A(D_h) + h^2 A(R_h)^2 + 4\pi A(R_h) \\ &> 4\pi (A(D_h) + A(R_h)) > 4\pi A = L(\partial D)^2, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Corolario 4.4.5. *Sea M un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador, y consideremos una sucesión minimizante para área $A > 0$. Entonces, las áreas A_d, A_c de las partes divergente y convergente no pueden ser simultáneamente positivas.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que A_c, A_d son ambos positivos, y lleguemos a contradicción. En virtud del Teorema 4.4.1, el valor del perfil isoperimétrico $I(A)$ vendrá dado por una unión de un anillo simétrico contenido en M , y un disco contenido en $M(K_\infty)$. Sin embargo, gracias a la Proposición 4.4.4, se puede hallar un disco D de área A contenido en $M(K_\infty)$ tal que

$$L(\partial D) < I(A).$$

Es posible aproximar el disco D por discos geodésicos D_n contenidos en M , $n \in \mathbb{N}$, todos de área A . Así, encontraremos un disco $D_{n_0} \subset M$, con $\text{área}(D_{n_0}) = A$, tal que

$$L(\partial D_{n_0}) < I(A),$$

lo que es contradictorio. □

Destacamos el siguiente resultado, cuya prueba se deduce de la anterior demostración.

Corolario 4.4.6. *El valor del perfil isoperimétrico de M para un área dada $A > 0$, no puede obtenerse mediante la suma de los perímetros de un anillo simétrico estable, y un disco contenido en $M(K_\infty)$.*

A efectos prácticos, estos últimos resultados proporcionan la siguiente información referente a la existencia de regiones isoperimétricas. Dada una sucesión minimizante para área $A > 0$, se sigue, a partir del Corolario 4.4.5, que

$$A_d = 0, \quad \text{ó} \quad A_c = 0.$$

Si $A_d = 0$, entonces necesariamente $A_c = A$, por lo que ya se deduce la existencia de una región isoperimétrica para área A : el conjunto límite de la parte convergente de la sucesión.

Por otro lado, si $A_c = 0$, entonces se tiene que el perfil isoperimétrico $I(A)$ vendrá dado por un disco con curvatura de Gauss constante e igual a K_∞ . Si dicho disco se encuentra contenido en nuestro anillo (esto es, si K_∞ se alcanza), entonces constituirá una región isoperimétrica para área $A_d = A$.

Una consecuencia de esta discusión es el siguiente Lema, que nos asegura la existencia de soluciones isoperimétricas en ciertas situaciones, y que usaremos más adelante.

Lema 4.4.7. *Sea $A > 0$, y sea D un disco contenido en $M(K_\infty)$ encerrando área A . Supongamos que existe un conjunto Ω en M , encerrando área A y satisfaciendo que $L(\partial\Omega) < L(\partial D)$. Entonces, existe una región isoperimétrica en M para área A .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una sucesión minimizante para área A , y sus partes convergente y divergente. A partir del Corolario 4.4.5 se tiene que, o bien $A_c = 0$, o bien $A_d = 0$.

Supongamos que $A_c = 0$. Entonces, se deduce, tal y como se ha razonado antes, que el valor del perfil isoperimétrico $I(A)$ vendrá dado por el perímetro del disco D . Pero eso es contradictorio, ya que $L(\partial\Omega) < L(\partial D)$. Así, necesariamente $A_d = 0$, lo que implica la existencia de solución isoperimétrica para área A . □

4.4.2. Regiones isoperimétricas en anillos de revolución. Pasamos a describir en esta Subsección las regiones isoperimétricas que aparecen en nuestros anillos. Los conjuntos candidatos vendrán dados por la clasificación de regiones estables del Teorema 4.3.2. Veremos que, salvo las uniones de un disco y un anillo simétrico, el resto de posibilidades pueden ser soluciones isoperimétricas en nuestras superficies. Además, demostraremos que la existencia de dichas regiones no siempre está garantizada, es decir, hay anillos en los que no hay regiones isoperimétricas para ningún valor, o para un cierto intervalo de valores del área.

Empezamos poniendo de manifiesto que los conjuntos formados por la unión de un disco y un anillo simétrico nunca constituyen una región isoperimétrica en nuestros anillos. Esto se deriva inmediatamente de razonamientos anteriores.

Lema 4.4.8. *Sea M un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador. Entonces, ninguna unión de un disco y un anillo simétrico es región isoperimétrica en M .*

DEMOSTRACIÓN. Independientemente de que el valor K_∞ se alcance en M , el enunciado se deduce del Corolario 4.4.6 \square

Corolario 4.4.9. *Las regiones isoperimétricas de un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador son siempre conexas, en caso de existir.*

DEMOSTRACIÓN. Cualquier región isoperimétrica es estable, y por tanto, ha de coincidir con alguno de los conjuntos descritos en el Teorema 4.3.2. La única posibilidad no conexa ha quedado descartada en el Lema 4.4.8. \square

Nota 4.4.10. Este último Corolario garantiza la conexión de las regiones isoperimétricas en nuestras superficies. Nosotros no vamos a profundizar en esta cuestión; simplemente indicaremos que, en general, esta propiedad no está asegurada. Por ejemplo, en ambiente rotacionalmente simétrico, se ha demostrado que en esferas simétricas con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador, hay anillos horizontales que son soluciones isoperimétricas [82, § 3.1]. En consecuencia, los complementarios de dichos anillos, que son conjuntos *no conexos*, también serán soluciones.

A raíz del Teorema 4.3.2 y del Lema 4.4.8, se sigue que si estamos interesados en describir las regiones isoperimétricas en nuestros anillos, hemos de centrarnos en

- i) discos contenidos en regiones con curvatura de Gauss constante,
- ii) anillos horizontales simétricos estables,
- iii) anillos horizontales asimétricos estables, y
- iv) anillos estables bordeados por un onduleide y un círculo de revolución.

Comprobaremos que esos cuatro tipos de conjuntos son realmente soluciones isoperimétricas en ciertos anillos de nuestra familia.

Antes de eso, veamos en el siguiente resultado cómo los discos con curvatura de Gauss constante han de situarse en la región donde la curvatura es máxima, en caso de que sean isoperimétricos. Este hecho va en concordancia con una idea general, para este tipo de problemas, que se deriva de la desigualdad isoperimétrica: *los mejores discos al considerar cuestiones isoperimétricas se encuentran donde la curvatura de Gauss es mayor*. La idea de la demostración reside de nuevo en un argumento de aproximación, análogo a los usados en el Teorema 4.4.1 o en el Corolario 4.4.5.

Lema 4.4.11. *Sea M un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura creciente desde el ecuador. Supongamos que un disco D , bordeado por un nodoide cerrado y embebido, es*

una región isoperimétrica de M . Entonces D está contenido en un entorno de un final de M , con curvatura de Gauss constantemente igual a K_∞ .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que D encierra área $A > 0$. Por el Teorema 4.3.2 sabemos que, en particular, el disco estará contenido en una región con curvatura de Gauss constante. Sea K_c dicha constante. Entonces se tiene que

$$L(\partial D)^2 = 4\pi A - K_c A^2.$$

Por otro lado, consideremos el plano $M(K_\infty)$, y sea D_∞ un disco en $M(K_\infty)$ encerrando área A . Entonces

$$L^2(\partial D_\infty) = 4\pi A - K_\infty A^2.$$

Si $K_c < K_\infty$, entonces es claro que $L(\partial D) > L(\partial D_\infty)$. En tal caso, aproximando D_∞ por discos geodésicos $D_n \subset M$ de área A , $n \in \mathbb{N}$, será posible encontrar $D_{n_0} \subset M$ con estrictamente menos perímetro que D , lo que nos lleva a contradicción. Por tanto, necesariamente $K_c = K_\infty$, lo que demuestra lo anunciado. \square

Corolario 4.4.12. *Si la curvatura de Gauss es estrictamente creciente en entornos de los finales de M , entonces ningún nodoide bordea una región isoperimétrica de M .*

El siguiente Lema nos muestra que el hecho de que el valor supremo K_∞ de la curvatura de Gauss K se alcance, implica existencia de soluciones isoperimétricas para cualquier valor del área, además de determinar las soluciones para valores pequeños del área.

Lema 4.4.13. *Sea M un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador. Supongamos que la curvatura de Gauss K alcanza el valor K_∞ .*

Entonces, existen regiones isoperimétricas en M para cualquier área que se considere, y además, para áreas pequeñas, dichas regiones son discos con curvatura de Gauss igual a K_∞ .

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $A > 0$, y consideremos una sucesión minimizante para área A . Entonces, el Corolario 4.4.5 implica que $A_d = 0$, o que $A_c = 0$.

i) Supongamos que K_∞ se alcanza. Si $A_d = 0$, se tiene existencia de forma inmediata; y si $A_c = 0$, entonces el perfil isoperimétrico $I(A)$ vendrá dado por un disco contenido en $M(K_\infty)$, que en este caso se hallará en la superficie. De aquí se deduce la existencia de regiones isoperimétricas para cualquier valor del área.

Además, a partir del Teorema 4.3.2 y del Lema 4.4.8, los candidatos a ser soluciones son los anillos horizontales, los anillos bordeados por un onduloide y un paralelo, y los discos con curvatura de Gauss constante e igual a K_∞ . Es claro que el perímetro de cualquier anillo será estrictamente mayor que $c = 4\pi L(0) > 0$, mientras que el perímetro de un disco encerrando área A vendrá dado por $(4\pi A - K_\infty A^2)^{1/2}$, que será menor que c para valores de A suficientemente pequeños. Por tanto, para dichas áreas, la solución ha de ser un disco con curvatura de Gauss K_∞ . \square

Nota 4.4.14. En el caso de que la curvatura de Gauss K no alcance el valor K_∞ (o equivalentemente, si K es estrictamente creciente en un entorno de un final), entonces no habrá regiones isoperimétricas en M para áreas pequeñas.

Esto se debe a que, teniendo en cuenta el Lema 4.4.8 y el Corolario 4.4.12, las únicas regiones estables de M candidatas a ser isoperimétricas serán los anillos horizontales, y los anillos bordeados por un onduloide y un paralelo. Sin embargo, siguiendo los razonamientos de la demostración anterior, para valores del área suficientemente pequeños, existirán discos contenido en $M(K_\infty)$ con menos longitud que cualquiera de los candidatos. Tales discos se podrán aproximar mediante discos geodésicos contenidos en M , también con menos longitud que los candidatos. En consecuencia, para dichos valores

del área (que constituirán un intervalo real), no habrá existencia de soluciones isoperimétricas.

Nota 4.4.15. Indicamos que las regiones isoperimétricas consistentes en anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución en estas superficies también han de satisfacer las condiciones expresadas en el Lema 3.4.4 (las demostraciones se pueden adaptar a esta situación).

Seguidamente, centraremos nuestra atención en algunos ejemplos concretos de anillos de revolución de nuestra familia. Nuestra intención principal es mostrar qué conjuntos aparecen como soluciones isoperimétricas, además de poner de manifiesto algunas situaciones de no existencia. A partir de lo comentado anteriormente, la determinación de las regiones isoperimétricas se va a reducir a una *comparación* de perímetros entre los distintos candidatos a tener en cuenta. Estudiaremos en detalle cada ejemplo para describir el correspondiente comportamiento isoperimétrico.

El primer ejemplo trata la familia de *catenoides minimales*, para las que no existen regiones isoperimétricas, para cualquier valor del área que se considere.

Ejemplo 4.1. Sea M una catenoide minimal definida por

$$x^2 + y^2 = g(z)^2 = \lambda^2 \cosh^2(z/\lambda), \quad \lambda > 0.$$

Esta superficie pertenece a la familia de anillos que estamos considerando. En efecto, M tiene la topología de un anillo de revolución completo, es simétrica con respecto al paralelo $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = \lambda^2\}$, y su curvatura de Gauss viene dada por

$$K(z) = \frac{-1}{\lambda^2 \cosh^4(z/\lambda)},$$

que es estrictamente creciente desde dicho paralelo.

Además, como la longitud de un meridiano de M viene dada por (véase Sección 2.7)

$$t(z) = \int_0^z \sqrt{1 + g'(s)^2} ds = \lambda \sinh(z/\lambda),$$

se sigue que M puede verse como una superficie $S^1 \times \mathbb{R}$ con métrica

$$ds^2 = f(t)^2 d\theta^2 + dt^2, \quad \theta \in S^1, t \in \mathbb{R},$$

de tipo (2.1), con

$$f(t) = g(\tau^{-1}(t)) = \lambda \cosh(\sinh^{-1}(t/\lambda)) = \sqrt{\lambda^2 + t^2}.$$

De esta forma, el ecuador de nuestro anillo se corresponderá con el paralelo $S^1 \times \{0\}$.

Así, viendo la catenoide como una superficie $S^1 \times \mathbb{R}$ con métrica de tipo (2.1), se tiene que la longitud y la curvatura geodésica de un círculo de revolución $S^1 \times \{t\}$ serán

$$L(t) = 2\pi \sqrt{\lambda^2 + t^2}, \quad h(t) = \frac{t}{\lambda^2 + t^2},$$

y la curvatura de Gauss será igual a

$$K(t) = \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + t^2)^2}.$$

Obsérvese que K es estrictamente creciente, por lo que no habrá nodoides cerrados y embebidos que sean estables, en virtud del Lema 4.3.1, y en consecuencia, ningún disco será región isoperimétrica de M . Además, $K_\infty = 0$.

Por otro lado, se tiene que

$$[(f')^2 - ff''](t) = \frac{-\lambda^2 + t^2}{\lambda^2 + t^2}.$$

Entonces,

$$[(f')^2 - ff''](t) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad t = \pm\lambda,$$

y

$$[(f')^2 - ff''](t) < 1, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Esto nos da las siguientes consecuencias importantes:

- i) Todos los círculos de revolución $\mathbb{S}^1 \times \{t\}$ de M son estables, por el Lema 2.4.16.
- ii) Los anillos simétricos $\mathbb{S}^1 \times [-t, t]$ son estables para $t \in (0, \lambda]$, según el Lema 2.6.1.
- iii) A partir del Lema 2.5.1, se tiene que no existen onduloides cerrados y embebidos que sean estables en M .

Todo esto hace que los únicos candidatos a ser regiones isoperimétricas sean los anillos horizontales estables (simétricos y asimétricos). El perímetro y el área encerrada por estos conjuntos se puede calcular explícitamente de la siguiente manera.

Es rutinario comprobar que

$$F(t) = \frac{1}{2} \left(t \sqrt{\lambda^2 + t^2} + \lambda^2 \log \left(\frac{t + \sqrt{\lambda^2 + t^2}}{\lambda} \right) \right)$$

es una primitiva de f . Entonces, para un anillo simétrico estable $\mathbb{S}^1 \times [-t, t]$, con $t \in (0, \lambda]$, el perímetro y el área encerrada son

$$\begin{aligned} L(\mathbb{S}^1 \times [-t, t]) &= 4\pi f(t) = 4\pi \sqrt{\lambda^2 + t^2}, \\ A(\mathbb{S}^1 \times [-t, t]) &= 4\pi \int_0^t f(s) ds = 4\pi F(t). \end{aligned}$$

En cuanto a los anillos asimétricos, estos aparecen a partir del mayor anillo simétrico estable contenido en M , haciendo que uno de los paralelos del borde tienda a un final, mientras el otro se va aproximando al ecuador de M , de forma que se preserve la condición de curvatura geodésica constante.

Precisamente, este último hecho nos va a permitir expresar uno de los paralelos del borde en función del otro. Así, dado un anillo asimétrico estable $\mathbb{S}^1 \times [t_1, t_2]$, con $t_2 > \lambda$, $t_1 \in [-\lambda, 0)$, la condición $h(t_2) = -h(t_1)$ se satisface si y sólo si

$$t_1 = \frac{-\lambda^2}{t_2}.$$

Dicho calculo nos permite calcular el perímetro y el área encerrada por un anillo asimétrico arbitrario $B_{t_2} = \mathbb{S}^1 \times [-\lambda^2/t_2, t_2]$, obteniéndose que

$$\begin{aligned} L(B_{t_2}) &= 2\pi(f(-\lambda^2/t_2) + f(t_2)), \\ A(B_{t_2}) &= 2\pi \int_{-\lambda^2/t_2}^{t_2} f(s) ds = 2\pi(F(t_2) - F(-\lambda^2/t_2)). \end{aligned}$$

Además, se puede comprobar que la condición de estabilidad (2.49) para estos anillos asimétricos es equivalente a

$$\lambda^5 + \lambda^3 t_2^2 - \lambda^2 t_2^3 - t_2^5 < 0,$$

que se satisface porque $t_2 > \lambda$. Por tanto, todos los anillos asimétricos en M resultan estables.

Fijemos ahora un valor $a > 0$, y sea D un disco contenido en $M(K_\infty) = M(0)$, esto es, en el plano euclídeo, que encierre área a . Entonces, su perímetro será

$$L(\partial D) = \sqrt{4\pi a}.$$

Centrémonos ahora en la catenoide M_1 asociada a $\lambda = 1$. Los cálculos anteriores nos permiten comparar los conjuntos candidatos a ser soluciones isoperimétricas (anillos horizontales) con los discos contenidos en $M(0)$, para determinar el comportamiento isoperimétrico que muestra dicha catenoide.

Así, para cualquier valor positivo $a > 0$, se tiene que el anillo simétrico o asimétrico que encierra área a tiene más perímetro que el correspondiente disco contenido en $M(0)$. Dicha comparación de perímetros se puede hacer explícitamente, obteniéndose la gráfica de la Figura 4.1.

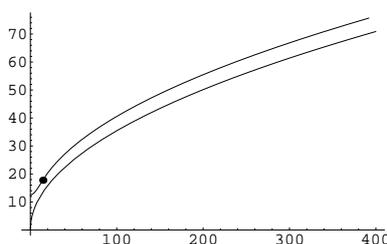


FIGURA 4.1. Comparación de los perímetros de anillos horizontales en M_1 y discos en $M(0)$

La curva de la Figura 4.1 que parte del origen corresponde al perímetro de los discos de $M(0)$, y siempre se mantiene por debajo de la curva correspondiente a los anillos horizontales. El punto donde se pasa de tener anillos simétricos a asimétricos queda representado de forma más gruesa.

La conclusión que se extrae de este ejemplo es que, aproximando los discos de $M(0)$ mediante discos geodésicos en M_1 (que no tendrán curvatura geodésica constante y consecuentemente, no son ni siquiera estables), se obtienen conjuntos con menos perímetro que los candidatos a ser regiones isoperimétricas. Por tanto, no existen tales regiones en M_1 .

Nota 4.4.16.

1. Hemos comprobado que para otros valores del parámetro λ , se obtiene el mismo comportamiento isoperimétrico, es decir, no hay existencia de regiones isoperimétricas (véase la Figura 4.2). Es de esperar que este hecho se repita para *todas* las catenoides de esta familia, lo que se obtendría demostrando dos desigualdades de tipo analítico, concretamente las que relacionan los perímetros de los anillos horizontales con el de los discos para áreas iguales. Atendiendo a nuestra pretensión original de mostrar algunos ejemplos significativos, sin llegar a estudiar todas las superficies de nuestra familia de anillos, hemos preferido detener el análisis de las catenoides minimales en este punto, indicando simplemente el comportamiento que se espera.

2. La idea que subyace de los cálculos anteriores es que en cualquier catenoide minimal, es posible encontrar una sucesión de discos geodésicos *inestables*, todos ellos encerrando una cantidad de área prefijada, que van aproximándose a uno de los finales de la catenoide, de forma que el perímetro va decreciendo de manera estricta.

3. El estudio de cuestiones isoperimétricas en superficies minimales es un tema de gran interés en los últimos años [31], [32]. A partir del Ejemplo 4.1, se extrae que el perfil

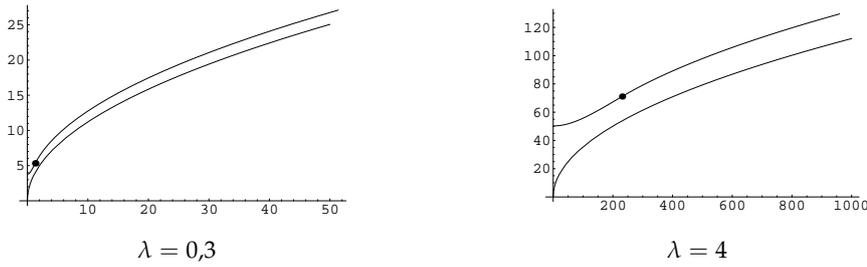


FIGURA 4.2. Gráficas correspondientes a otras catenoides minimales

isoperimétrico en las catenoides minimales coincide justamente con el perfil del plano euclídeo,

$$I(a) = (4\pi a)^{1/2}, \quad a > 0,$$

lo que implica que se verifica la desigualdad isoperimétrica plana en dichas catenoides. Esto concuerda con la conjetura que afirma que en cualquier superficie minimal, dicha desigualdad isoperimétrica plana ha de satisfacerse [31].

El anterior ejemplo muestra que existen superficies en las que no hay regiones isoperimétricas para ningún valor del área. Sin embargo, puede darse el fenómeno de que, dada una superficie concreta, existan dichas regiones para *ciertos* valores del área, mientras que para otros valores no haya soluciones isoperimétricas. Este hecho se manifiesta, por ejemplo, en la siguiente familia de *catenoides no minimales*.

Ejemplo 4.2. Sea M una catenoide no minimal dada por

$$x^2 + y^2 = g(z)^2 = a^2 \cosh(z)^2, \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 1.$$

Se puede comprobar que la curvatura media de M es igual a $a^2 - 1$.

Al igual que ocurría para las catenoides minimales del Ejemplo 4.1, este tipo de superficies tiene la topología de un anillo de revolución completo, son simétricas con respecto al paralelo $\{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = a^2\}$, y su curvatura de Gauss

$$K(z) = \frac{-1}{(1 + a^2 \sinh(z)^2)^2}$$

es estrictamente creciente con respecto a la distancia a dicho paralelo. Por tanto, son superficies dentro de nuestra familia de anillos de revolución. Obsérvese además que $K_\infty = 0$, lo que da lugar a que estas superficies también tengan finales llanos.

En este caso, no resulta sencillo hallar la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que permite considerar M como una superficie $S^1 \times \mathbb{R}$ con métrica de tipo (2.1) (esencialmente porque la longitud de los meridianos no presenta una expresión cómoda que permita trabajar con su inversa). Por tanto, en este ejemplo, realizaremos los cálculos utilizando la función que genera la superficie de revolución, es decir,

$$g(z) = a \cosh(z), \quad z \in \mathbb{R},$$

y las igualdades de la Sección 2.7. Así, para un círculo de revolución $S^1 \times \{z\}$, con $z \in \mathbb{R}$,

$$L(z) = 2\pi a \cosh(z), \quad h(z) = \frac{\tanh(z)}{\sqrt{1 + a^2 \sinh(z)^2}},$$

con lo que el paralelo $S^1 \times \{0\}$ es el de menor longitud, y al que nos referiremos por ecuador.

Se tiene también que

$$[(f')^2 - ff''](z) = \frac{a^2(a^2 \sinh(z)^4 - 1)}{(1 + a^2 \sinh(z)^2)^2},$$

de donde se obtiene que $[(f')^2 - ff''](z) < 1$, para todo $z \in \mathbb{R}$, por lo que, como en el Ejemplo 4.1 anterior, todo paralelo de M es estable, y no existen onduloides cerrados y embebidos que sean estables en M .

Además,

$$[(f')^2 - ff''](z) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad z = \pm \sinh^{-1}(a^{-1/2}),$$

por lo que un anillo simétrico $S^1 \times [-z, z]$ será estable si y sólo si $z \in (0, \sinh^{-1}(a^{-1/2})]$.

Como K es estrictamente creciente, se sigue que no existen nodoides cerrados, embebidos y estables en M , lo que implica que los únicos candidatos a ser regiones isoperimétricas serán, como antes, los anillos horizontales.

En este caso, es posible de nuevo hallar explícitamente el perímetro y el área que encierran los anillos simétricos y asimétricos en M , lo que nos permite compararlos con los discos contenidos en el plano euclídeo $M(K_\infty) = M(0)$. Hemos observado tres comportamientos diferentes, dependiendo del parámetro a considerado, que describimos en los siguientes ejemplos concretos.

Caso a. Para $a = 2$, hemos observado que el disco contenido en $M(0)$ tiene siempre menos perímetro que el correspondiente anillo horizontal (simétrico o asimétrico) encerrando la misma área. Por tanto, en esta situación, tal y como ocurre para las catenoides minimales del Ejemplo 4.1, no hay regiones isoperimétricas para ningún valor del área.

Caso b. Sin embargo, si $a = 0,52$ se tiene una situación diferente. Para valores pequeños del área, se tiene que los discos contenidos en $M(0)$ tienen menos perímetro que los correspondientes anillos simétricos; por tanto, no habrá existencia para tales valores. Al ir aumentando el área, hay un intervalo de valores para los que los anillos simétricos son mejores que los discos en $M(0)$, por lo que tales anillos son soluciones isoperimétricas, en virtud del Lema 4.4.7 (nótese que no hay otros candidatos para dichos valores del área). Finalmente, para áreas grandes, se vuelve a tener que los discos en $M(0)$ tienen menos perímetro que los anillos simétricos restantes, y que los anillos asimétricos (para áreas iguales), y en consecuencia, tampoco habrá regiones isoperimétricas.

Caso c. Por último, para $a = 0,45$, se tiene un comportamiento similar al anterior, sólo que en este caso, existe un intervalo I de valores del área para los que los últimos anillos simétricos, y los primeros anillos asimétricos, tienen menos perímetro que los correspondientes discos en $M(0)$ de igual área, por lo que dichos anillos son regiones isoperimétricas. Para valores del área fuera del intervalo I , los discos en $M(0)$ son mejores y no se tiene existencia de regiones isoperimétricas.

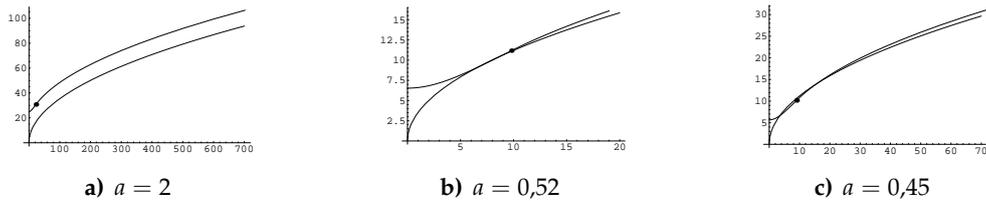


FIGURA 4.3. Gráficas correspondientes a catenoides no minimales, para distintos valores de a

La Figura 4.3 muestra las gráficas correspondientes a las tres catenoides no minimales estudiadas. Al igual que en la Figura 4.2, la curva que parte del origen de coordenadas corresponde a los discos contenidos en $M(0)$, mientras que la otra curva representa el perímetro de los anillos simétricos y asimétricos.

Nota 4.4.17.

1. Los tres comportamientos descritos anteriormente son los únicos observados en esta familia de catenoides no minimales, al considerar distintos valores del parámetro a .

2. Las catenoides anteriores correspondientes a los parámetros $a = 0,52$ y $a = 0,45$ muestran dos ejemplos de superficies donde se tiene existencia de regiones isoperimétricas para ciertos valores del área, mientras que para otros valores, no se da tal circunstancia. Este es un fenómeno interesante y llamativo, que no aparece de forma destacada en la literatura que trata estas cuestiones en ambientes no compactos, al menos en los trabajos que conocemos.

En los dos ejemplos anteriores, se ha visto que para áreas grandes, no hay regiones isoperimétricas. Este hecho no se cumple en general, tal y como se va a mostrar en el Ejemplo 4.3: existen superficies dentro de nuestra familia para las que, a partir de un cierto valor del área, todas las soluciones isoperimétricas son anillos asimétricos.

Ejemplo 4.3. Consideremos $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ con la métrica (2.1) dada por la función

$$f(t) = \sqrt{1 + at^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

con $a < 1$. Nótese que f es una función simétrica y diferenciable y que la curvatura de Gauss de M vendrá dada por

$$K(t) = \frac{-f''(t)}{f(t)} = \frac{-a}{(1 + at^2)^2},$$

que es estrictamente creciente desde el paralelo $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$, con $K_\infty = 0$. Por tanto, M es un anillo de revolución dentro de nuestra familia.

La primera observación que realizamos es que debido a la monotonía estricta de la curvatura de Gauss K , se sigue que no encontraremos nodoides cerrados, embebidos y estables en estas superficies.

Sea $\mathbb{S}^1 \times \{t\}$, con $t \in \mathbb{R}$, un paralelo contenido en M . Entonces, su longitud y su curvatura geodésica serán

$$L(t) = 2\pi f(t), \quad h(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{at}{1 + at^2}.$$

También se tiene que

$$[(f')^2 - ff''](t) = \frac{a(at^2 - 1)}{1 + at^2},$$

que se anula únicamente cuando $t = \pm a^{-1/2}$. Esto implica que los anillos simétricos $\mathbb{S}^1 \times [-t, t]$ serán estables solamente cuando $t \in (0, a^{-1/2}]$.

Además, como $a < 1$, es fácil ver que $[(f')^2 - ff''](t) < 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, todo paralelo es estable, y en virtud del Lema 2.5.1, no existen onduloides cerrados, embebidos y estables en M .

En cuanto a un anillo asimétrico $\mathbb{S}^1 \times [t_1, t_2]$, con $t_2 > a^{-1/2}$, $t_1 \in (-a^{-1/2}, 0)$, la condición de curvatura geodésica $h(t_2) = -h(t_1)$ se cumple si y sólo si

$$(4.12) \quad t_1 = \frac{-1}{at_2}.$$

Además, los paralelos del borde siempre son estables, y la condición de estabilidad (2.49) es equivalente a que

$$-\frac{a(-1+at^2)^2}{2\pi(1+at^2)^{5/2}} \leq 0,$$

que se satisface trivialmente. Por tanto, todos los anillos asimétricos $S^1 \times [t_1, t_2]$, para $t_2 > a^{-1/2}$, son estables (a partir de (4.12), se tendrá que $t_1 \in (-a^{-1/2}, 0)$).

A tenor de lo expuesto anteriormente, los únicos candidatos a ser soluciones isoperimétricas, en este caso, son los anillos horizontales. Las expresiones de sus longitudes y áreas encerradas se pueden calcular explícitamente, y así compararlas con los discos contenidos en $M(K_\infty) = M(0)$. Hemos apreciado dos posibilidades distintas, que se muestran en la Figura 4.4.

Para $a = 0,1$, no hay regiones isoperimétricas para áreas pequeñas, ya que los discos en $M(0)$ tienen menos perímetro que los correspondientes anillos simétricos. Luego, a partir de determinado valor del área, sí hay soluciones isoperimétricas, consistentes primero en anillos simétricos y luego en anillos asimétricos.

Por otro lado, si $a = 0,6$, se sigue que todos los anillos simétricos y los primeros anillos asimétricos tienen más perímetro que los discos en $M(0)$ (lo que conlleva la no existencia de regiones isoperimétricas), y a partir de cierto instante, las soluciones son anillos asimétricos.

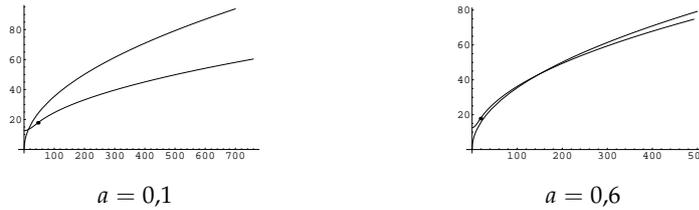


FIGURA 4.4. Posibles comportamientos de las superficies del Ejemplo 4.3

Nota 4.4.18. Justifiquemos que para áreas grandes, los anillos asimétricos tienen menos perímetro que los discos contenidos en $M(0)$ (siempre que $a < 1$).

Fijemos un valor del área, y consideremos el anillo simétrico $B_{t_2} = S^1 \times [t_1, t_2] \subset M$, y el disco $D \subset M(0)$ que encierran dicho valor. Si denotemos por G a la función que expresa la diferencia entre el perímetro de B_t y la longitud de ∂D , se tiene que

$$G(t_2) = L(B_t) - L(\partial D) = 2\pi \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{at_2^2}} + \sqrt{1 + at_2^2} - \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{at_2^2}}}{at_2} + t_2 \sqrt{1 + at_2^2} + \frac{\operatorname{csch}^{-1}(\sqrt{at_2}) + \sinh^{-1}(\sqrt{at_2})}{\sqrt{a}} \right)^{1/2} \right\}.$$

El signo de dicha función nos dirá qué conjunto tiene menos perímetro. Nótese que cuando t_2 tiende a $+\infty$, dichos conjuntos encierran áreas grandes. Como $a < 1$, se tiene que

$$(4.13) \quad \lim_{t_2 \rightarrow +\infty} G(t_2) = -\infty,$$

por lo que concluimos que las soluciones isoperimétricas serán anillos asimétricos.

Nota 4.4.19. Si se trata el Ejemplo 4.3 anterior tomando $a = 1$, el comportamiento isoperimétrico cambia, ya que *todos* los discos contenidos en $M(0)$ tienen menos perímetro que los anillos horizontales (para áreas iguales). Por tanto, ese sería otro caso de no

existencia de soluciones, ya que no hay otros candidatos isoperimétricos (al igual que antes, no existirán onduloides cerrados, embebidos y estables). De hecho, es fácil ver que el límite (4.13) es igual a 2π , lo que implica que, para áreas grandes, los discos son mejores que los anillos asimétricos.

Nota 4.4.20. No hemos estudiado en profundidad las superficies del Ejemplo 4.3 para valores de a estrictamente mayores que 1, aunque sí hemos detectado ciertas diferencias respecto a los casos anteriores, que pasamos a resumir brevemente.

En primer lugar, la función $(f')^2 - ff''$ toma valores mayores que 1; concretamente,

$$[(f')^2 - ff''](t) = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad t = \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{a^2-a}}.$$

Este hecho conlleva una consecuencia importante: pueden existir onduloides cerrados, embebidos y estables, por lo que habrá que tener en cuenta a los anillos bordeados por una de estas curvas, y por un paralelo, como posibles regiones isoperimétricas. Además, los anillos horizontales asimétricos $S^1 \times [t_1, t_2]$ dejarán de ser estables cuando t_2 tome valores mayores que $(1+a)^{1/2}(a^2-a)^{-1/2}$.

En esta situación, y aunque no lo podemos justificar rigurosamente (ya que resulta difícil hallar la longitud de los onduloides cerrados y embebidos), ciertos cálculos y estimaciones que hemos realizado, nos hacen pensar que tampoco habrá existencia de regiones isoperimétricas en ninguna de estas superficies.

Mostramos ahora un ejemplo de anillo de revolución en el que el valor K_∞ es alcanzado por la curvatura de Gauss. En consecuencia, a partir del Lema 4.4.13, las soluciones isoperimétricas siempre existen, y para áreas pequeñas son discos contenidos en la región donde la curvatura de Gauss es constantemente igual a K_∞ . Además, esta superficie presenta un comportamiento poco habitual en la evolución de los anillos horizontales.

Destacamos que la superficie descrita en el Ejemplo 4.4 posterior es de clase C^2 a trozos, por lo que su curvatura de Gauss resulta discontinua.

Ejemplo 4.4. Consideremos $M = S^1 \times \mathbb{R}$, con la métrica (2.1) determinada por la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$f(t) = \begin{cases} -t, & t \leq -2, \\ \frac{t^2+4}{4}, & t \in [-2, 2], \\ t, & t \geq 2. \end{cases}$$

Dicha función f es positiva, simétrica y de clase C^1 , y C^2 a trozos. Además, la curvatura de Gauss de M vendrá dada por

$$K(t) = \begin{cases} 0, & t < -2, \\ \frac{-2}{t^2+4}, & t \in (-2, 2), \\ 0, & t > 2, \end{cases}$$

que es creciente con respecto a la distancia al paralelo $S^1 \times \{0\}$. Por tanto, M es un anillo de revolución perteneciente a la familia que estamos considerando.

Nótese que, en este caso, $K_\infty = 0$, y que hay regiones donde K es constantemente igual a K_∞ , por lo que habrá existencia de soluciones isoperimétricas para cualquier valor del área que se considere, a partir del Lema 4.4.13, y además, los discos contenidos en tales regiones pueden ser soluciones isoperimétricas (de hecho son las soluciones para áreas próximas a cero).

Dado un círculo de revolución $S^1 \times \{t\}$, con $t \in \mathbb{R}$, su longitud será $L(t) = 2\pi f(t)$, y su curvatura geodésica vendrá dada por

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & t < -2, \\ \frac{2t}{t^2+4}, & t \in [-2, 2], \\ \frac{1}{t}, & t > 2. \end{cases}$$

Remarcamos que h es una función continua.

Además

$$(4.14) \quad [(f')^2 - ff''](t) = \begin{cases} 1, & t < -2, \\ \frac{t^2-4}{8}, & t \in [-2, 2], \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

En particular, $(f')^2 - ff'' < 0$, para $t \in (-2, 2)$, y $(f')^2 - ff'' > 0$, para $t < -2$ ó $t > 2$.

A partir de los Lemas 2.4.16 y 2.6.1, se tiene que todos los paralelos de la superficie serán estables, y que los anillos simétricos $S^1 \times [-t, t]$ serán estables para $t \in (0, 2)$.

Para los anillos asimétricos $S^1 \times [t_1, t_2]$, con $t_1 \in (-t_0, 0)$, $t_2 > t_0$, la condición de curvatura geodésica constante implica que

$$t_1 = -t_2 + \sqrt{t_2^2 - 4}.$$

Para discutir su estabilidad, sólo hay que estudiar cuando se satisface la condición de estabilidad (2.49), ya que, tal y como se indicó antes, todos los paralelos son estables. Se puede comprobar que dicha condición es equivalente a que

$$1 + \frac{2(4 - t_2^2 + t_2\sqrt{t_2^2 - 4})}{(-t_2 + \sqrt{t_2^2 - 4})^3} \leq 0,$$

que se cumple sólo cuando $t_2 \geq t' = 2,17868$.

Hemos estudiado con detalle la evolución de los anillos horizontales en este ejemplo, porque presentan un comportamiento particular. Tal y como se ha comentado antes, los anillos simétricos $S^1 \times [-t, t]$ son estables, para $t \in (0, 2)$. A partir del último anillo simétrico, surgen los anillos asimétricos estables $S^1 \times [t_1, t_2]$, para $t > 2$.

- Los primeros anillos asimétricos que aparecen, concretamente para $t_2 \in (2, t')$, son inestables; de hecho, encierran valores del área ya tomados por los últimos anillos horizontales, y éstos lo hacen con ligeramente menos perímetro.

- Sea ahora $t'' = 2,3198$. Para cada $t_2 \in (t', t'')$, se tiene que el anillo asimétrico correspondiente es estable, pero hay un anillo simétrico estable encerrando la misma área, con menos perímetro.

- Finalmente, para cada $t_2 > t''$, el anillo asimétrico será estable, y tendrá menos perímetro que el anillo simétrico de igual área.

En cuanto a los onduloideos cerrados, embebidos y estables, el Lema 2.5.1 los obliga a estar enteramente contenidos en las regiones de M donde $(f')^2 - ff'' = 1$.

Para realizar la comparación entre los perímetros de los anillos horizontales, y los discos contenidos en la región de M donde $K = K_\infty$, es necesario hallar las expresiones del perímetro y área encerradas. No es difícil calcular dichas expresiones, para obtener finalmente que los discos tienen menos perímetro que los anillos horizontales, para cualquier área que se considere, tal y como muestra la Figura 4.6.

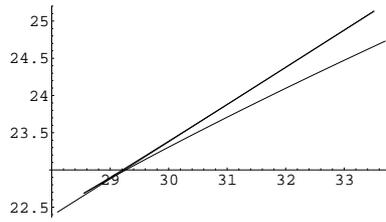


FIGURA 4.5. Detalle de la evolución de los anillos horizontales

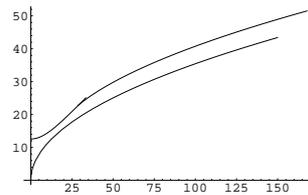


FIGURA 4.6. Los discos son mejores que los anillos horizontales

A partir de ahí, y aunque hay que tener en cuenta los anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución como posibles candidatos, se intuye que las soluciones isoperimétricas han de ser discos de M contenidos en la región donde K es constantemente igual a K_∞ . Al menos para áreas pequeñas, dicha afirmación es cierta, según el Lema 4.4.13.

Pasamos ahora a describir un ejemplo donde los anillos bordeados por un onduloide y un círculo de revolución son regiones isoperimétricas. Nuestra demostración es de carácter constructivo, es decir, vamos a construir un anillo de revolución que verifique dicha propiedad.

Ya vimos en el Capítulo 3 que estos conjuntos son regiones isoperimétricas en ciertos toros de revolución. En aquella ocasión, eso era consecuencia de girar ligeramente uno de los paralelos del borde de un anillo asimétrico que fuera solución isoperimétrica.

Nuestra idea consiste en partir de un anillo de revolución *acotado* M' donde el último anillo asimétrico sea mejor que el disco contenido en $M(0)$ de igual área. Así, extendiendo adecuadamente M' , de forma que la curvatura de Gauss sea *estrictamente* creciente y tienda a cero, se tendrá que tal último anillo asimétrico será una región isoperimétrica en el anillo extendido. Y consecuentemente, los primeros anillos bordeados por un onduloide y un paralelo también lo serán.

Ejemplo 4.5. Consideremos la función

$$f(t) = a - r \cos(t/r), \quad t \in [-\pi r, \pi r],$$

con $a > r > 0$. Nótese que f es la función asociada a un toro de revolución estándar (consúltese el Ejemplo 3.1), parametrizada en este caso de forma que el paralelo de mínima longitud del toro sea $S^1 \times \{0\}$. De manera análoga a la que usada en el Lema 3.3.9, es sencillo comprobar que el mayor anillo asimétrico estable se corresponderá ahora con $R = S^1 \times [t_0, t_1]$, para $t_1 = \pi r/2$, y

$$t_0 = -r \cos^{-1} \left(\frac{2ar}{a^2 + r^2} \right).$$

Además, el área A y el perímetro L de este anillo vienen dados por

$$A = \pi a r \left(\pi - \frac{4 a r}{a^2 + r^2} + 2 \arccos \left(\frac{2 a r}{a^2 + r^2} \right) \right),$$

$$L = 4\pi \frac{a^3}{a^2 + r^2}.$$

Es fácil ver que, cuando a tiende a r , se verifica que

$$(4.15) \quad L^2 < 4\pi A.$$

Eso implica que R tiene menos perímetro que el disco contenido en $M(0)$ de área A . Sin embargo,

$$K(t_1) = 0, \quad [(f')^2 - ff''](t_1) = 0.$$

Eso nos impide considerar como anillo acotado inicial a $\mathbb{S}^1 \times [-t_1, t_1]$, porque nuestro razonamiento requiere extender la curvatura de Gauss (y en consecuencia, la función $(f')^2 - ff''$) de forma estrictamente creciente (eso garantizará que en la nueva superficie, el último anillo asimétrico estable coincida justamente con R). En este caso, tal extensión haría que K tomase valores positivos, con lo que no obtendríamos un anillo de revolución de nuestra familia. Para solventar este obstáculo, realizamos la siguiente modificación.

Fijemos dos valores para a y r , de forma que se satisfaga (4.15), y consideremos la función

$$f_s(t) = a - r \cos(t/s), \quad t \in [-\pi s, \pi s],$$

con $s < r$. Nótese que f_s tiende a f cuando s se aproxima a r .

Denotemos por M_s el anillo de revolución acotado asociado a la función f_s . La curvatura de Gauss K_s de M_s es

$$K_s(t) = \frac{-r \cos(t/s)}{s^2(a - r \cos(t/s))},$$

que es estrictamente creciente en $t > 0$, y

$$[(f')^2 - ff''](t) = \frac{r(r - a \cos(t/s))}{s^2}.$$

Dicha función toma el valor 1 para

$$t_1^s = s \cos^{-1} \left(\frac{r^2 - s^2}{a r} \right),$$

por lo que el mayor anillo asimétrico de M_s se corresponderá con $R_s = \mathbb{S}^1 \times [t_0^s, t_1^s]$, con $t_0^s \in (-\pi s, 0)$ satisfaciendo la condición de curvatura geodésica constante; de hecho,

$$t_0^s = -s \cos^{-1} \left(\frac{a^2 r^2 - r^4 + a^2 s^2 + r^2 s^2}{a r (a^2 - r^2 + 2s^2)} \right).$$

Además, como $s < r$, se tiene que

$$K_s(t_1^s) = \frac{-r^2 + s^2}{s^2 (a^2 - r^2 + s^2)} < 0,$$

y si hacemos que s se aproxime a r , se sigue que t_0^s, t_1^s tienden a t_0, t_1 , por lo que R_s tenderá a R . Entonces, es claro que

$$(4.16) \quad L^2(\partial R_s) < 4\pi A(R_s),$$

para s suficientemente próximo a r , en virtud de (4.15).

Fijemos ahora s próximo a r , de forma que se verifique (4.16), y tomemos M_s como anillo acotado inicial. En este caso, sí va a resultar posible extender la curvatura de Gauss

$K_s : [-t_1^s, t_1^s] \rightarrow \mathbb{R}$ a una función $\tilde{K} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma simétrica, negativa, diferenciable, y estrictamente creciente en \mathbb{R}^+ , con $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{K}(t) = 0$.

Es claro que dicha función \tilde{K} nos proporcionará un anillo de revolución simétrico \tilde{M} , con curvatura de Gauss \tilde{K} , sin más que resolver la ecuación diferencial

$$u'' + \tilde{K}u = 0,$$

con condiciones iniciales $u(0) = f_s(0)$, $u'(0) = 0$, y tomar la función solución u para definir la correspondiente métrica (2.1). Además, M_s estará contenido en \tilde{M} .

Para \tilde{M} , tendremos que el mayor anillo asimétrico estable será R_s , ya que \tilde{K} se ha extendido de forma estrictamente creciente, y por tanto,

$$[(u')^2 - uu''](t) > 1, \quad \text{si } t > t_1^s.$$

Dicho anillo R_s tiene menos perímetro que el disco contenido en $M(\tilde{K}_\infty) = M(0)$ de igual área, porque (4.16) se satisface. Esto último implica que R_s es una región isoperimétrica en \tilde{M} . Por la continuidad del perfil isoperimétrico, concluimos que los primeros anillos bordeados por un onduloide y un paralelo (que surgen tras dicho último anillo asimétrico R_s) también serán soluciones isoperimétricas. Así, podemos enunciar el siguiente resultado:

Lema 4.4.21. *Existen anillos de revolución completos, simétricos y con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador donde anillos bordeados por un onduloide y un paralelo son regiones isoperimétricas.*

El Teorema 4.3.2 clasifica las regiones estables en anillos de revolución completos, simétricos y con curvatura de Gauss K creciente desde el ecuador. Dichas regiones proporcionan los conjuntos candidatos a ser soluciones isoperimétricas. A partir del Lema 4.4.8, las uniones de un disco con K constante y un anillo simétrico quedaron descartadas, por lo que, a la vista de los Ejemplos anteriores, se tiene el siguiente Teorema, que enumera las posibles soluciones isoperimétricas en estas superficies.

Teorema 4.4.22. *Sea M un anillo de revolución completo, simétrico y con curvatura de Gauss creciente desde el ecuador. Entonces, cualquier región isoperimétrica, en caso de existir, ha de coincidir con uno de los siguientes conjuntos:*

- i) *Un disco bordeado por un nodoide cerrado y embebido, y con curvatura de Gauss constante K_∞ .*
- ii) *Un anillo horizontal, bordeado por dos círculos de revolución, simétricos respecto del ecuador, y contenidos en la región donde la función $K + h^2$ es menor o igual que cero.*
- iii) *Un anillo horizontal asimétrico estable, bordeado por dos círculos de revolución contenidos donde la función $K + h^2$ es menor o igual que 1.*
- iv) *Un anillo bordeado por un onduloide cerrado, embebido y estable, y un círculo de revolución contenido en la región donde $K + h^2$ es menor que cero.*

A tenor de los resultados obtenidos en los Ejemplos que aparecen en esta Sección, se tiene que los cuatro tipos de conjuntos descritos en el Teorema 4.4.22 realmente pueden ser regiones isoperimétricas en alguno de los anillos de nuestra familia.

4.5. Cuádricas de revolución

En particular, los resultados obtenidos en la Sección anterior se pueden aplicar para estudiar el problema isoperimétrico en una familia de superficies bien conocida, los

hiperboloides de una hoja, definidos por

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 z^2 - \mu^2 = 0, \quad \lambda, \mu \neq 0.$$

Estas superficies se pueden ver como anillos de revolución simétricos con curvatura de Gauss creciente desde el paralelo de menor longitud, por lo que son superficies de nuestra familia. El Teorema 4.5.1 describe el comportamiento isoperimétrico en estos hiperboloides.

Por otro lado, si nos centramos en el contexto de las *cuádricas de revolución* de \mathbb{R}^3 , la única familia de la que se desconocían las soluciones isoperimétricas era, precisamente, la de los hiperboloides de una hoja. El resto de cuádricas ya habían sido estudiadas en diversos trabajos de forma indirecta, como señalaremos más adelante [9], [82], [75]. Así, una consecuencia interesante que se deriva de nuestro estudio es que se completa la clasificación de las regiones isoperimétricas en las cuádricas de revolución de \mathbb{R}^3 (Corolario 4.5.6).

El siguiente resultado pasa a describir las regiones isoperimétricas que pueden presentarse en un hiperboloide de una hoja. Adelantamos que los anillos bordeados por un onduloide y un paralelo no van a aparecer, mientras que los otros tipos de candidatos sí proporcionarán valores del perfil isoperimétrico.

Teorema 4.5.1. *Consideremos un hiperboloide de revolución de una hoja en \mathbb{R}^3 , definido por*

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 z^2 - \mu^2 = 0, \quad \lambda, \mu \neq 0.$$

Entonces, para cualquier valor $A > 0$, el perfil isoperimétrico $I(A)$ vendrá dado por el perímetro de los siguientes conjuntos:

- i) *un disco contenido en $M(K_\infty) = M(0)$, o*
- ii) *un anillo simétrico estable, o*
- iii) *un anillo asimétrico estable.*

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que cualquier hiperboloide de una hoja M puede verse como una superficie de revolución, definida por

$$x^2 + y^2 = g(z)^2,$$

con $g(z) = (\mu^2 + \lambda^2 z^2)^{1/2}$.

Para este tipo de superficies, no es fácil tratar con la función f que permite ver M como $S^1 \times \mathbb{R}$ con una métrica de tipo (2.1), ya que la inversa de la longitud de los meridianos no presenta una expresión cómoda. Por tanto, tal y como hicimos en el Ejemplo 4.2, trabajaremos sobre esta superficie con la función g , y las expresiones de la Sección 2.7.

De esta forma, la curvatura de Gauss de M vendrá dada por

$$K(z) = \frac{-\lambda^2 \mu^2}{(\mu^2 + (\lambda^2 + \lambda^4)z^2)^2},$$

que es estrictamente creciente con $K_\infty = 0$, y

$$(4.17) \quad [(f')^2 - ff''](z) = \frac{-\lambda^2 \mu^4 + (\lambda^6 + \lambda^8)z^4}{(\mu^2 + (\lambda^2 + \lambda^4)z^2)^2},$$

que resulta *estrictamente* menor que 1, para todo $z \in \mathbb{R}$. Por tanto, no existirán onduloides cerrados, embebidos y estables contenidos en M . Esto ya implica, teniendo en cuenta el Teorema 4.4.22, que los conjuntos candidatos a proporcionar el perfil isoperimétrico son los anillos horizontales, y los discos contenidos en $M(K_\infty) = M(0)$. \square

Nota 4.5.2. Tal y como se ha hecho en Ejemplos anteriores, es posible calcular explícitamente los perímetros y áreas encerradas por los anillos horizontales estables, a fin de compararlos con los discos contenidos en $M(0)$ y determinar las soluciones isoperimétricas en cada hiperboloide concreto.

Dado cualquier hiperboloide de una hoja, se puede comprobar que la función asociada $(f')^2 - ff''$, definida por (4.17), se anula únicamente cuando $z = z_0 = b(\lambda^4 + \lambda^6)^{-1/4}$. Por tanto, los anillos horizontales simétricos $S^1 \times [-z, z]$, con $t > 0$, serán estables si y sólo si $t \in (0, z_0]$.

Por otro lado, como

$$h(z) = \frac{\lambda^2 z}{g(z) \sqrt{\mu^2 + \lambda^2 z^2 + \lambda^4 z^2}},$$

se sigue que un anillo asimétrico $S^1 \times [z_1, z_2]$, con $z_1 \in (-z_0, 0)$, $z_2 > z_0$, verificará la condición de curvatura constante si y sólo si

$$z_1 = \frac{-\mu^2}{\lambda^2 \sqrt{1 + \lambda^2 z_2}}.$$

A partir de las expresiones del perímetro y el área encerrada por los anillos simétricos y asimétricos de M , y tras comparar estos conjuntos con los discos contenidos en $M(0)$, hemos observado dos comportamientos distintos, que se muestran en la Figura 4.7.

- Para $\lambda = 0,8, \mu = 1$, se tiene que los discos son mejores para áreas pequeñas, y a partir de un instante, las soluciones vendrán dadas por anillos asimétricos.

- Para $\lambda = 0,3, \mu = 1$, el perfil isoperimétrico viene dado primero por discos, después por anillos simétricos y finalmente por todos los anillos asimétricos.

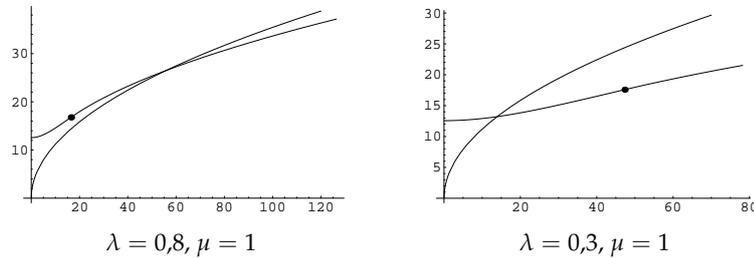


FIGURA 4.7. Dos comportamientos distintos en los hiperboloides de una hoja

En consecuencia, los tres tipos de conjuntos descritos en el Teorema 4.5.1 proporcionan el perfil isoperimétrico en distintas situaciones. Cuando para cierto valor del área $a > 0$, dicho perfil venga dado por un disco contenido en $M(0)$, se tendrá que no existen regiones isoperimétricas para área a , mientras que en el resto de los casos, la solución isoperimétrica consistirá en un anillo simétrico o asimétrico, en virtud del Lema 4.4.7.

Corolario 4.5.3. *Las regiones isoperimétricas en un hiperboloide de una hoja, en caso de existir, son anillos horizontales simétricos y asimétricos.*

Nota 4.5.4. Realizamos ahora algunas observaciones encaminadas a determinar de forma precisa el perfil isoperimétrico de un hiperboloide de una hoja. Recordamos previamente que, mediante la aplicación de adecuada homotecia, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\mu = 1$.

1. Hemos comprobado numéricamente que el último anillo simétrico estable, que es $S^1 \times [-z_0, z_0]$, tiene menos perímetro que el disco de $M(0)$ de igual área si y sólo si

$\lambda < 0,582684$. Además, se puede demostrar analíticamente que la función

$$L(S^1 \times [-z, z]) - \sqrt{4\pi A(S^1 \times [-z, z])}$$

es estrictamente decreciente o negativa, para todo $z \in (0, z_0)$. De ahí se deduce que, salvo a lo sumo para un valor del área, el perímetro de discos y el de anillos simétricos nunca van a coincidir.

Combinando ambas propiedades, se obtiene que habrá anillos simétricos que son isoperimétricos si y sólo si $\lambda < 0,582684$; y también que cuando un anillo simétrico es mejor que el correspondiente disco, el resto de anillos simétricos de la evolución verifican la misma propiedad.

2. De manera similar, se puede comprobar que la función dependiente de z_2

$$L(S^1 \times [z_1, z_2]) - \sqrt{4\pi A(S^1 \times [z_1, z_2])}$$

tiene límite $-\infty$ cuando z_2 tiende a $+\infty$. Eso implica que los anillos asimétricos son mejores que los discos en $M(0)$ para áreas grandes, y por tanto, serán las regiones isoperimétricas a partir de cierto valor (en virtud del Lema 4.4.7 y de la inestabilidad de los anillos simétricos que encierran grandes áreas).

3. Aunque no hemos logrado demostrarlo de forma general, a la vista del comportamiento observado en los distintos ejemplos, pensamos que el perímetro de anillos asimétricos y de discos (para áreas iguales) sólo coincidirán una vez como mucho. Esto determinaría completamente el perfil isoperimétrico en hiperboloides de una hoja, que se reduciría únicamente a las dos posibilidades mostradas en la Figura 4.7.

Nota 4.5.5. Aunque no hemos logrado hallar un argumento que lo justifique rigurosamente, pensamos que en los hiperboloides de una hoja, todo anillo asimétrico satisfaciendo la condición de curvatura geodésica constante es estable, es decir, satisface (2.49). De hecho, es lo que ocurre en todos los ejemplos concretos que hemos considerado, aunque una demostración en general de tal hecho resulta más compleja. Además, en la Nota 4.5.4 anterior, se ha justificado, en el caso general, el carácter isoperimétrico de tales conjuntos a partir de un cierto instante, lo que también implica su estabilidad.

El Teorema 4.5.1 nos permite cerrar el estudio del problema isoperimétrico en el conjunto de *cuádricas de revolución no degeneradas*. Recordemos la lista completa de tales cuádricas de \mathbb{R}^3 .

Cuádricas de revolución no degeneradas

Cilindro circular recto	$x^2 + y^2 = \mu^2$	$\mu \neq 0$
Esfera	$x^2 + y^2 + z^2 = \mu^2$	$\mu \neq 0$
Elipsoide con curvatura de Gauss decreciente	$x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2 = \mu^2$	$\lambda^2 < 1, \mu \neq 0$
Elipsoide con curvatura de Gauss creciente	$x^2 + y^2 + \lambda^2 z^2 = \mu^2$	$\lambda^2 > 1, \mu \neq 0$
Paraboloide (elíptico)	$x^2 + y^2 = \lambda z$	$\lambda \neq 0$
Hiperboloide de una hoja	$x^2 + y^2 - \lambda^2 z^2 - \mu^2 = 0$	$\lambda, \mu \neq 0$
Hiperboloide de dos hojas	$x^2 + y^2 - \lambda^2 z^2 + \mu^2 = 0$	$\lambda, \mu \neq 0$

Queremos destacar que el problema isoperimétrico en estas cuádricas no se ha abordado de manera particular, sino que ha sido a través del estudio de familias más amplias, a las que algunas de estas superficies pertenecen. Gracias a diversos trabajos previos y a los resultados de esta Sección, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.5.6. *Las regiones isoperimétricas en las cuádricas de revolución son:*

- i) *En el cilindro circular recto, discos geodésicos o anillos horizontales.*
- ii) *En paraboloides y en las componentes conexas de los hiperboloides de dos hojas, discos geodésicos centrados en el punto de máxima curvatura.*
- iii) *En esferas, discos geodésicos.*
- iv) *En elipsoides con curvatura creciente, discos centrados en los polos, y sus complementarios.*
- v) *En elipsoides con curvatura decreciente, una familia de discos bordeados por curvas con curvatura geodésica constante, simétricas respecto al paralelo de mayor longitud, y sus complementarios.*
- vi) *En hiperboloides de una hoja, en caso de existir, son anillos horizontales simétricos o asimétricos respecto al paralelo de menor longitud.*

DEMOSTRACIÓN. El caso del cilindro circular recto es un ejemplo clásico, tratado por ejemplo en [56]. De hecho, esta superficie puede verse como una superficie $S^1 \times \mathbb{R}$ con métrica de tipo (2.1) dada por una función constante. Así, usando técnicas análogas a las de este Capítulo, se tendrá que las soluciones isoperimétricas son discos geodésicos y anillos horizontales (los discos serán solución hasta que se autointersequen o tengan más perímetro que los anillos).

El problema isoperimétrico en el paraboloide de revolución fue estudiado en [9]. Dicho trabajo es el primero en el que se trata este problema en superficies con alguna hipótesis de monotonía sobre la curvatura de Gauss, y es más general, porque versa sobre planos de revolución con curvatura decreciente desde un polo. En [75] y en [82] se obtienen las mismas conclusiones usando técnicas diferentes: las regiones isoperimétricas existen para cualquier área que se considere, y son discos geodésicos centrados en el punto de curvatura de Gauss máxima.

En cuanto a las componentes conexas del hiperboloide de dos hojas, se tiene que la curvatura de Gauss, en función de z , viene dada por

$$K(z) = \frac{\lambda^2 \mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2 z^2 + \lambda^4 z^2)^2}.$$

Como es positiva y decreciente desde un punto, se pueden aplicar los resultados obtenidos en [9] (y también los que aparecen en [75], [82]) para concluir igualmente que las soluciones existen y son discos centrados en dicho punto de curvatura máxima.

El caso de las esferas es otro ejemplo bien conocido, y se deduce de forma inmediata de la desigualdad isoperimétrica clásica.

Los elipsoides fueron tratados en [82, § 3], tanto para curvatura de Gauss creciente como decreciente (de hecho, se trabaja en un ambiente más general, admitiendo incluso que la curvatura tome valores negativos). En el caso creciente, las soluciones son discos centrados en los polos, mientras que en el caso decreciente, existe una familia de nodos cerrados y embebidos que bordean las regiones isoperimétricas. Las curvas de dicha familia son simétricas con respecto al paralelo de mayor longitud, y dan lugar a una foliación del elipsoide. En [75, § 3] se pueden encontrar también ciertos resultados (no tan generales) referentes al caso de curvatura creciente. Como los elipsoides son superficies compactas, también habrá que tener en cuenta a los correspondientes complementarios como soluciones isoperimétricas.

Finalmente, en nuestro Teorema 4.5.1 se describen las regiones isoperimétricas en hiperboloides de una hoja, en caso de existir. Dichas regiones (que no existen para valores

pequeños del área) son anillos horizontales bordeados por dos círculos de revolución (simétricos o no simétricos con respecto al paralelo de menor longitud). \square

Nota 4.5.7. Conviene destacar que, en virtud del Corolario 4.5.6, no todas las regiones isoperimétricas en las cuádricas de revolución son invariantes por el grupo uniparamétrico de isometrías, si bien al aplicarle una rotación a una de ellas, seguiremos teniendo una solución del mismo tipo. Sólo para algunas cuádricas particulares se tiene dicha invariancia.

Nota 4.5.8. Finalmente añadimos que el paraboloides hiperbólico, dado por

$$z = \lambda xy, \quad \lambda > 0,$$

no es invariante por la acción del grupo de rotaciones de \mathbb{R}^3 , aunque sí posee un grupo uniparamétrico de isometrías intrínsecas. Es fácil ver que la curvatura de Gauss es negativa, estrictamente creciente, y que además $K_\infty = 0$. Estas superficies han sido tratadas en [82], donde se muestra que no hay regiones isoperimétricas para ningún valor del área. De hecho, el perfil isoperimétrico para estas superficies coincide con el del plano euclídeo.

Parte II

Problemas isoperimétricos planos múltiples

Introducción Parte II

En esta parte de la Memoria vamos a ocuparnos del estudio de algunos problemas isoperimétricos *múltiples* en el *plano euclídeo*. En general, en este tipo de problemas se busca la configuración de curvas que determina n regiones de áreas a_1, \dots, a_n prefijadas, usando la menor longitud total posible. Nosotros nos centraremos en un ambiente plano, si bien estos problemas se pueden proponer, en general, en cualquier superficie riemanniana (por ejemplo, existen interesantes artículos en la literatura, a los que nos referiremos más adelante, que los discuten en esferas [65] o en conos [64]).

Dentro del Cálculo de Variaciones, este tipo de problemas ha despertado bastante interés en los últimos años, debido a las múltiples aplicaciones en diversos fenómenos físicos. Resultan modelos adecuados para el estudio de multitud de fenómenos naturales, como la forma que adopta un tejido celular, el comportamiento de una membrana separando dos fluidos, y otros más, como se describe en el libro de D'Arcy W. Thompson [91] o en el trabajo de D. Weaire y S. Hutzler [94]. Se pueden consultar interesantes artículos que hacen hincapié en los aspectos físicos de este problema, como por ejemplo [46] y [38], con aplicaciones a diversas áreas.

El estudio de este tipo de problemas en un subconjunto dado $S \subset \mathbb{R}^2$ conlleva tratar algunas cuestiones de cierta complejidad. En principio, tal y como ocurre al considerar problemas isoperimétricos en general, la existencia de una solución no está garantizada. Sin embargo, utilizando argumentos propios de la Teoría Geométrica de la Medida [72], los trabajos de F. Almgren [2] y F. Morgan [71] permiten asegurar la existencia de una configuración de curvas encerrando áreas prefijadas con longitud total mínima. Además, dichos resultados nos proporcionan las primeras condiciones de regularidad de las configuraciones *minimizantes*. Éstas estarán formadas, en general, por segmentos o arcos de circunferencia (esto es, curvas con curvatura geodésica constante) que se encuentran de tres en tres en ciertos puntos del interior de S y formando ángulos de 120 grados, y que intersecan a ∂S , cada curva en un punto distinto. Adicionalmente, se han de satisfacer también otras dos condiciones más: la suma ordenada de las curvaturas de las tres curvas que se encuentran en cada punto del interior de S es nula, y las curvas que intersecan a ∂S lo hacen ortogonalmente. En el Capítulo 6 precisaremos rigurosamente estas condiciones de regularidad.

Si bien los anteriores resultados de existencia y regularidad pueden llegar a reducir considerablemente el conjunto de configuraciones de curvas a tener en cuenta, dicho conjunto seguirá siendo muy amplio. Esta es la principal dificultad que nos encontramos al tratar estos problemas. No olvidemos que las regiones determinadas por las configuraciones no tienen, en principio, que ser conexas, por lo que cada una podría estar formada por *varias componentes*. Además, la región complementaria a la unión de las regiones determinadas por cualquier configuración, que llamaremos región *exterior*, también podría ser disconexa, presentando alguna componente acotada (nos referiremos a estas componentes acotadas del exterior como *cámaras vacías*). Estos dos hechos hacen que el conjunto de posibles configuraciones a considerar sea demasiado grande.

Intuitivamente es de esperar que cualquier configuración minimizante presente todas sus regiones conexas, pero desafortunadamente no se ha encontrado, hasta el momento, un argumento que permita afirmar eso en general.

En esta Parte II de la Memoria nos ocuparemos de dos problemas múltiples planos particulares, utilizando enfoques distintos. En el Capítulo 7, trataremos el problema de la partición isoperimétrica de un disco, consistente en encontrar la configuración de curvas que divide a un disco plano en n regiones de áreas prefijadas, con la menor longitud posible. El principal resultado que probamos, que aparece en [26], resuelve completamente el problema en el caso de tres regiones (Teorema 7.5.1):

La partición isoperimétrica de un disco en tres regiones de áreas prefijadas viene dada por la configuración estándar de la Figura 5.1.

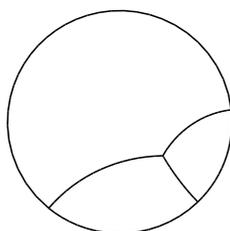


FIGURA 5.1. Partición isoperimétrica del disco en tres regiones de áreas dadas

El tratamiento de este problema incluye la hipótesis de que la suma de los valores iniciales de las áreas coincida con el área total del disco. En nuestro trabajo, la solución se obtiene gracias a que logramos reducir el conjunto de posibles configuraciones, a partir de una cota sobre el número de componentes de una determinada región con características especiales. De esta forma, el análisis de las distintas posibilidades nos conduce a la configuración minimizante (o partición isoperimétrica).

En el Capítulo 8 discutiremos el problema de la pompa plana múltiple, que persigue determinar la configuración de curvas en el plano, que delimita n regiones de áreas inicialmente dadas, con longitud mínima. Para este problema, recordaremos las principales propiedades de las soluciones, y mostraremos una nueva dirección de trabajo para abordar dicho problema. Concretamente, nuestro principal logro es la caracterización de las configuraciones que satisfacen las propiedades de regularidad con ciertos objetos geométricos, las *figuras recíprocas*, introducidas por J. C. Maxwell [66], [67] (véase también un trabajo posterior de C. Moukarzel [77]) en siglo pasado dentro de un marco físico. Si bien nuestro estudio, siguiendo esta dirección, todavía no se ha completado, creemos que esta caracterización nos permitirá tratar este problema de forma que se logren progresos significativos.

En los últimos años, el problema de la pompa plana ha sido especialmente tratado en diversos trabajos. M. N. Bleicher obtuvo unos primeros resultados generales (véanse [11], [12]), que más tarde han sido usados en el tratamiento (y resolución) de estos problemas. En 1993, J. Foisy y otros [44] resolvieron el problema para el caso $n = 2$, demostrando que la *pompa doble estándar* en \mathbb{R}^2 es la única solución. Su idea reside en suponer que el exterior es conexo, lo que permite aplicar ciertas *transformaciones* a las componentes (reflexiones con un efecto similar al de los giros) que provocan contactos irregulares, concluyendo que las regiones han de ser conexas. Una vez visto eso, prueban que el perímetro de las soluciones es creciente respecto cualquiera de las áreas, lo que implica que no puede haber cámaras vacías y que la solución es, por tanto, la pompa doble estándar. Destacamos también un trabajo posterior de Morgan y W. Wichiramala [76],

en el que demuestran que, de hecho, la pompa doble estándar es la única configuración estable para dos regiones.

Si bien el caso $n = 2$ se resuelve con razonamientos relativamente sencillos, para tres regiones el problema se torna algo más complejo. Por ello, en un principio, su estudio se llevó a cabo añadiendo alguna hipótesis adicional que permitiera abordarlo. Así, C. Cox y otros [36] probaron en 1994 que la *pompa triple estándar* es la que minimiza el perímetro para tres áreas cualesquiera de forma única, bajo la suposición de que cada región sea conexa (incluyendo el exterior, lo que implica que asumen que no aparezcan cámaras vacías). Bajo dicha hipótesis de conexión, sólo aparecen tres tipos distintos de candidatos, y usando un argumento rotacional (para obtener contactos irregulares en las dos configuraciones no minimizantes) acaban obteniendo la solución. En 1996, Bleicher [13] dio un paso más y demostró que, bajo la hipótesis de que las regiones R_i , $i > 0$, sean conexas, la solución al problema para tres y cuatro valores del área no puede presentar cámaras vacías. En 1998 R. P. Devereaux [39] obtuvo que la pompa triple estándar es la solución al problema si se impone que no existan cámaras vacías y que todas las regiones tengan la misma *presión*. Esta segunda hipótesis implica que las curvas separando regiones adyacentes tienen curvatura cero y por tanto, son segmentos. Este hecho permite descartar las configuraciones que presentan regiones desconexas, gracias a las simetrías adicionales que presentan muchas componentes (por lo que se podrán intercambiar, logrando así reducir el perímetro total). En la Subsección 6.2.4 definiremos de forma precisa el concepto de presión de una región.

Finalmente, W. Wichiramala [96] resolvió el problema para tres regiones de área prefijada de forma general en 2004 (si bien dicha resolución ya apareció en 2002 en su tesis doctoral [95]), apoyándose, en parte, en trabajos anteriormente citados ([36], [39]). El principal logro de Wichiramala es obtener una cota sobre el número de componentes convexas que presenta una configuración minimizante, lo que le permite clasificar, mediante un cuidadoso estudio, todas las configuraciones candidatas a ser solución. A partir del análisis de las propiedades geométricas de las componentes, atendiendo al número de lados y a su disposición en la configuración, y utilizando también algunos argumentos variacionales, consigue descartar todas las posibilidades salvo la pompa triple estándar, concluyendo así que esa es la solución al problema general.

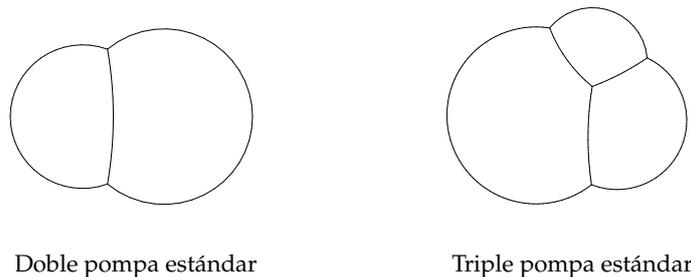


FIGURA 5.2. Las configuraciones minimizantes para $n = 2$ y $n = 3$

Destacamos también que Wichiramala hace uso en su trabajo del *enfoque débil* introducido previamente en [44], y usado también en [39], lo que le permite centrarse en las configuraciones que no presentan cámaras vacías. A grandes rasgos, dicho enfoque se basa en lo siguiente: fijadas áreas a_1, \dots, a_n , se define la *configuración minimizante débil* para dichas áreas como la configuración con menor perímetro de todas las que encierran áreas mayores o iguales que a_1, \dots, a_n . Claramente, cualquier configuración minimizante débil

no tiene cámaras vacías (asígnese el área de dichas cámaras vacías a componentes adyacentes, y estaremos reduciendo el perímetro con una nueva configuración que encierra áreas mayores). Así, probando que toda configuración minimizante débil es una pompa triple estándar, la solución al problema general también será la pompa triple estándar, gracias a que el perímetro de estas configuraciones es creciente con respecto a cualquiera de las tres áreas consideradas (tal y como ocurría para las pompas dobles estándar).

Indiquemos además que, centrándonos en el plano y para valores prefijados del área, la pompa doble estándar y la pompa triple estándar son únicas, salvo aplicación de las isometrías de \mathbb{R}^2 . Este hecho, demostrado en ambiente más general por A. Montesinos Amilibia [3] y para el caso de dos regiones en el plano en [44], permite hablar de *unicidad* de soluciones para el problema de la pompa plana, en los casos de dos y tres regiones.

En cuanto a la partición isoperimétrica del disco, no hay apenas trabajos previos al nuestro, si bien se hacen algunos comentarios en un trabajo de Bleicher [12, § III] (sobre particiones de un triángulo equilátero, de un cuadrado y de un disco en regiones de igual área), y en otro de Y. Tomonaga [92]. Resaltamos también un trabajo posterior de S. Cox [37], en el que se presentan los candidatos a ser particiones isoperimétricas del disco para n regiones conexas de igual área, con $n \leq 43$, a partir de simulaciones computacionales.

En general, la cuestión más interesante que aún está por resolver en este tipo de problemas, desde el punto de vista matemático, es demostrar que las configuraciones minimizantes han de tener regiones conexas, tanto en \mathbb{R}^2 como en un disco plano.

Por otro lado, el estudio de este problema también se ha llevado a cabo en otros ambientes distintos a los que nosotros hemos considerado. Por ejemplo, el problema *de frontera libre* de la pompa doble en esquinas del plano (sin que éstas aporten perímetro a las distintas configuraciones) ha sido resuelto parcialmente (véase G. Hruska y otros [57]). Una recopilación de los resultados referentes a todos estos problemas planos puede encontrarse en [24].

Finalmente, indicaremos que el problema de la pompa doble en toros llanos fue solucionado por J. Corneli y otros [34], describiendo los cinco posibles tipos que pueden presentar las soluciones (dependiendo de las áreas consideradas, y del toro concreto con el que se trabaje). En cuanto a ambientes *no planos*, por citar algunos ejemplos, destacamos el trabajo de J. Masters [65], que resolvió el problema de la pompa doble en la esfera S^2 , y el de R. Lopez y T. Borawski [64] que solventan el mismo problema en conos de \mathbb{R}^3 .

CAPÍTULO 6

Preliminares

A lo largo de este Capítulo, denotaremos por S al espacio ambiente donde planteemos nuestro problema, que se corresponderá con el plano Euclídeo \mathbb{R}^2 , o con un disco cerrado $D \subset \mathbb{R}^2$, centrado en el origen y de radio unidad (aunque los resultados obtenidos son ciertos en un disco arbitrario). La mayoría de las definiciones y resultados que se van a obtener serán aplicables a ambas situaciones, si bien iremos indicando las distintas particularidades en cada uno de los espacios a medida que se vayan presentando.

En términos precisos, el problema isoperimétrico que vamos a considerar en S es el siguiente: dados a_1, \dots, a_n números reales positivos, buscamos la configuración de curvas en S que determina n regiones R_i (no necesariamente conexas), cada una de ellas de área a_i , con la menor longitud total posible. En el caso de que S sea un disco $D \subset \mathbb{R}^2$, impondremos además que

$$(6.1) \quad a_1 + \dots + a_n = \text{área}(D).$$

Cuando exista una tal configuración de longitud mínima, la llamaremos *configuración minimizante* en S para áreas a_1, \dots, a_n (y, en ocasiones, *solución* para los valores del área considerados). Con frecuencia, nos referiremos a la longitud de una configuración como *perímetro* de la configuración.

Nota . Cuando nos centremos en un disco plano, la hipótesis adicional (6.1) anterior implica que nuestro problema consiste en hallar la configuración de curvas que *divide* al disco en n regiones de áreas dadas, con el menor perímetro posible. Para que nuestro estudio tenga la mayor generalidad, permitiremos que las curvas *toquen* el borde del disco. La longitud de dicho borde no se tendrá en cuenta a la hora de computar el perímetro total de las distintas divisiones, ya que es una cantidad constante que no va a cambiar en ningún momento. Así, en el caso de que S sea un disco plano, nuestro problema puede verse encuadrado dentro de los denominados problemas isoperimétricos de *frontera libre*.

6.1. Existencia de configuraciones minimizantes. Condiciones de regularidad

Como siempre que se tratan problemas de tipo isoperimétrico, la existencia de soluciones no es una cuestión trivial. El siguiente resultado, consecuencia de los trabajos de F. Morgan [69], [71], nos asegura la existencia de configuraciones minimizantes para cualesquiera valores del área que consideremos, además de darnos las primeras propiedades de regularidad que se han de cumplir.

Teorema 6.1.1. ([71, Th. 2.3]) Sean a_1, \dots, a_n números reales positivos. Entonces, existe una configuración minimizante C en S para áreas a_1, \dots, a_n .

Además, C estará formada por curvas con curvatura geodésica constante, que se encuentran de tres en tres en puntos del interior de S formando ángulos de 120 grados, y que intersecan a ∂S en puntos distintos cada vez. Asimismo, todas las curvas de C separando componentes de dos regiones específicas tendrán la misma curvatura.

Nota 6.1.2. A lo largo de toda esta parte de la Memoria, el espacio ambiente en el que nos moveremos será el plano euclídeo o un disco cerrado plano, como ya se ha comentado. Entonces, la curvatura geodésica de una curva coincidirá con la curvatura usual de una curva plana. Por tanto, del Teorema 6.1.1 se deduce que las curvas que conformen una configuración minimizante en \mathcal{S} serán segmentos de recta o arcos de circunferencia.

Nota 6.1.3. El Teorema 6.1.1 también es cierto cuando consideramos este problema en superficies riemannianas compactas [71, Re. 2.4].

6.1.1. Configuraciones admisibles. Pasamos a realizar algunas definiciones y a introducir la notación que emplearemos en lo sucesivo.

Definición 6. Una configuración de curvas en \mathcal{S} se dice admisible si es un grafo contenido en \mathcal{S} formado por un número finito de vértices y lados, de forma que

- i) los vértices en el interior de \mathcal{S} son de grado tres (es decir, en cada uno de ellos se encuentran tres lados), y
- ii) los vértices en $\partial\mathcal{S}$ son de grado uno.

Nótese que si $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$, entonces $\partial\mathcal{S}$ se reduce al conjunto vacío, y la segunda condición no tendrá ninguna significación.

El conjunto de configuraciones admisibles en \mathcal{S} constituye el *menor espacio* donde hemos de centrar nuestro estudio, con objeto de encontrar las configuraciones minimizantes, en virtud del Teorema 6.1.1. Veremos que el resto de propiedades descritas en dicho Teorema se pueden obtener a partir de técnicas que desarrollaremos en la Subsección 6.2.3.

Admitiremos que una configuración admisible C determina n regiones acotadas en \mathcal{S} , que denotaremos por R_1, \dots, R_n , y que, en general, no tienen que ser conexas.

Dadas dos regiones adyacentes R_i, R_j , denotaremos por C_{ij} la curva que las separa. Dicha curva tampoco será necesariamente conexa, y estará compuesta por todos los lados que separan componentes de las regiones R_i y R_j . Sea

$$I(i) = \{j \neq i : R_j \text{ es adyacente a } R_i\}.$$

Entonces se tiene que

$$\partial R_i = \bigcup_{j \in I(i)} C_{ij}.$$

Finalmente, denotaremos por N_{ij} al vector normal unitario a la curva C_{ij} que apunta hacia el interior de la región R_i , y por h_{ij} a la curvatura geodésica de C_{ij} con respecto al normal N_{ij} .

6.1.2. Condiciones de regularidad. El Teorema 6.1.1 nos ha proporcionado las primeras propiedades geométricas y topológicas que verifican las soluciones de nuestro problema. Así, cualquier configuración minimizante estará compuesta por curvas

- con curvatura geodésica constante,
- encontrándose de tres en tres en puntos del interior de \mathcal{S} , formando ángulos de 120 grados, y
- cada curva que interseque a $\partial\mathcal{S}$ lo hará en un punto distinto.

Nos referiremos a estas propiedades como *condiciones de regularidad* de las configuraciones minimizantes. Las siguientes dos observaciones muestran otras condiciones de regularidad importantes, que no se deducen del Teorema 6.1.1.

Nota 6.1.4. M. N. Bleicher [11] demostró en el año 1987, con anterioridad a [71], que una configuración minimizante, en caso de existir, ha de satisfacer las condiciones de regularidad descritas en el Teorema 6.1.1. En dicho trabajo no se trata la cuestión de existencia de soluciones, y se centra en el caso del plano, aunque sus argumentos se extienden de forma inmediata si consideramos un disco.

Además de algunas propiedades interesantes de las configuraciones minimizantes en general, Bleicher probó que, dado un vértice interior donde se encuentren tres lados C_{ij} , C_{jk} , C_{ki} , se verifica la siguiente condición referente a las curvaturas:

$$(6.2) \quad h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0.$$

Es decir, en una configuración minimizante, la suma *ordenada* de las curvaturas de las (tres) curvas que se encuentran en el interior de \mathcal{S} es nula. Esta propiedad se ha de considerar también como una condición de regularidad más, y en particular, nos permitirá definir un concepto fundamental en nuestro estudio, la presión de una región, en la Subsección 6.2.4.

Nosotros veremos más adelante que, a partir del tratamiento variacional y de la primera fórmula de variación de la longitud (6.5), se obtiene la condición (6.2) anterior, junto con el resto de condiciones de regularidad descritas en el Teorema 6.1.1 (a excepción de que en cada vértice interior se encuentren justamente tres lados de la configuración, y que en cada vértice del borde de \mathcal{S} llegue sólo un lado).

Nota 6.1.5. En el caso de que \mathcal{S} sea un disco plano D se obtendrá, también como consecuencia de la primera fórmula de variación de la longitud (6.5), una condición de regularidad adicional sobre los puntos donde una configuración minimizante interseca a ∂D . Concretamente, dichas intersecciones se producen de forma ortogonal (véase la Proposición 6.2.6).

6.2. Fórmulas de variación. Configuraciones estacionarias

Una primera forma de abordar este problema isoperimétrico, habitual en este contexto, es utilizar un enfoque puramente variacional. No hay que olvidar que, en realidad, estamos buscando *mínimos globales* de un cierto funcional relacionado con el perímetro, dentro de la familia de configuraciones admisibles, bajo una restricción de área. Así, parece natural intentar clasificar previamente los *mínimos locales* asociados a dicho funcional perímetro, o al menos describir sus propiedades principales. Estos mínimos locales se van a corresponder con las *configuraciones estacionarias*. Además, estas técnicas variacionales nos proporcionarán herramientas con las que podremos detectar, en ciertas ocasiones, configuraciones admisibles que no son minimizantes.

En esencia, la idea básica de estas técnicas es la misma que reside en los problemas de optimización para funciones reales de variable real. Fijemos n valores positivos del área y sea C una configuración en \mathcal{S} que determine n regiones encerrando dichos valores. Es claro que si podemos deformar ligeramente C , de forma que se preserven las áreas encerradas y se reduzca el perímetro, entonces C no podrá ser una configuración minimizante. Por otro lado, cualquier deformación infinitesimal de una configuración minimizante, que mantenga constantes las áreas encerradas, dará lugar a configuraciones con mayor perímetro.

Esto nos conduce a que, dada una configuración minimizante $C \subset \mathcal{S}$, si tenemos una función *suficientemente buena* que exprese el perímetro de las deformaciones infinitesimales de C que mantienen constante el área encerrada, se sigue que dicha función ha de tener primera derivada nula y segunda derivada no negativa en el instante inicial (que corresponderá a la configuración original C). Gracias a técnicas propias de la Teoría

Geométrica de la Medida [89], es posible llevar a la práctica este esquema, obteniendo explícitamente las expresiones de dichas derivadas, conocidas como *fórmulas de variación de la longitud*, así como la condición analítica que ha de satisfacer una deformación para que preserve las áreas encerradas. Describamos de forma rigurosa estas ideas.

6.2.1. Variaciones de una configuración admisible. Sea $C \subset \mathcal{S}$ una configuración admisible determinando n regiones de áreas prefijadas. A partir de ahora, llamaremos *variación* de C en \mathcal{S} a cualquier deformación infinitesimal de C en \mathcal{S} , diferenciable y dependiente de un parámetro. Analíticamente, una variación se corresponderá con una familia de aplicaciones diferenciables

$$\{\varphi_t : C \rightarrow \mathcal{S}, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\},$$

de forma que φ_0 sea la inclusión de C en \mathcal{S} (por tanto, $\varphi_0(p) = p$, para todo $p \in C$), y que $\varphi_t(C)$ sea una configuración admisible determinando n regiones, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Además, estamos interesados en que los vértices de C que se hallan en $\partial\mathcal{S}$, permanezcan en todo momento contenidos en $\partial\mathcal{S}$. Esto es equivalente a que

$$\varphi_t(C \cap \partial\mathcal{S}) \subset \partial\mathcal{S}, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Denotaremos por X al campo vectorial infinitesimal asociado a la variación φ_t , definido por

$$X = \left. \frac{d\varphi_t}{dt} \right|_{t=0},$$

que es diferenciable en cada lado $C_{ij} \subset C$, y por u_{ij} a la componente normal de X en C_{ij} . Es decir,

$$u_{ij} = \langle X, N_{ij} \rangle.$$

Obsérvese que $X(p)$ resulta tangente a $\partial\mathcal{S}$, para todo $p \in C \cap \partial\mathcal{S}$.

Estas variaciones deformarán nuestra configuración de forma diferenciable, haciendo que tanto las áreas encerradas como la longitud de cada curva varíen. Fijada una de estas variaciones, denotaremos por $A_i(t)$ al área encerrada por la región R_i correspondiente al instante t , y $L(t)$ representará la longitud total de la configuración $\varphi_t(C)$. Por los resultados que aparecen en [89], se sigue que estos dos funcionales son diferenciables en el instante inicial y además, dichas derivadas pueden calcularse explícitamente.

La siguiente Proposición muestra, a partir de las nociones anteriores, la condición analítica que ha de satisfacer una variación, para que las áreas encerradas se preserven hasta primer orden.

Proposición 6.2.1. *Sea $C \subset \mathcal{S}$ una configuración admisible, y $\varphi_t : C \rightarrow \mathcal{S}$ una variación diferenciable con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Sea X el campo asociado a la variación. Entonces, la derivada del área encerrada por la región R_i de $\varphi_t(C)$ viene dada por*

$$(6.3) \quad \left. \frac{dA_i}{dt} \right|_{t=0} = - \sum_{j \in I(i)} \int_{C_{ij}} u_{ij}.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, a partir de los resultados obtenidos en [89, § 9], se sigue que

$$\left. \frac{dA_i}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H^2(\varphi_t(R_i)) = \int_{R_i} \operatorname{div} X = - \int_{\partial R_i} \langle X, N \rangle = - \sum_{j \in I(i)} \int_{C_{ij}} \langle X, N_{ij} \rangle.$$

□

Nota 6.2.2. A partir de la anterior Proposición, se tiene que una variación preservará las áreas hasta primer orden si y sólo si

$$(6.4) \quad \sum_{j \in I(i)} \int_{C_{ij}} u_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

6.2.2. Primera fórmula de variación de la longitud. Para cualquier variación de una configuración admisible, la derivada de la longitud total viene dada por el siguiente resultado.

Proposición 6.2.3 (Primera variación de la longitud). Sean $C \subset \mathcal{S}$ una configuración admisible, y $\varphi_t : C \rightarrow D$ una variación diferenciable con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y campo asociado X . Entonces, la primera derivada de la longitud $L(t)$ de $\varphi_t(C)$ en el instante $t = 0$ es

$$(6.5) \quad \left. \frac{dL}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in I(i)}} \left\{ \int_{C_{ij}} h_{ij} u_{ij} + \sum_{p \in \partial C_{ij}} \langle X(p), \nu_{ij}(p) \rangle \right\},$$

donde $\nu_{ij}(p)$ es el conormal interior a p en C_{ij} .

DEMOSTRACIÓN. Fijemos una región R_i . De nuevo usando los resultados que aparecen en [89], se tiene que la variación de la longitud de ∂R_i vendrá dada por

$$(6.6) \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(\varphi_t(\partial R_i)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H^1(\varphi_t(\partial R_i)) = \int_{\partial R_i} \operatorname{div} X = \sum_{j \in I(i)} \int_{C_{ij}} \operatorname{div} X.$$

Para aplicar el teorema de la divergencia en este caso, hemos de centrarnos en la parte tangente de X . Así, descomponiendo $X = X^T + X^N$ y centrándonos en cada curva C_{ij} , se tendrá que

$$\int_{C_{ij}} \operatorname{div} X^T = - \sum_{p \in \partial C_{ij}} \langle X^T, \nu_{ij} \rangle(p) = - \sum_{p \in \partial C_{ij}} \langle X, \nu_{ij} \rangle(p),$$

donde $\nu_{ij}(p)$ es el vector conormal interior a p en C_{ij} (es decir, el vector tangente a C_{ij} apuntando hacia el interior). Por otro lado, en la curva C_{ij} ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X^N &= \operatorname{div} (\langle X, N_{ij} \rangle N_{ij}) = \langle D_{\nu_{ij}}(u_{ij} N_{ij}), \nu_{ij} \rangle \\ &= \langle (\nu_{ij} u_{ij}) N_{ij}, \nu_{ij} \rangle + u_{ij} \langle D_{\nu_{ij}} N_{ij}, \nu_{ij} \rangle \\ &= u_{ij} \langle D_{\nu_{ij}} N_{ij}, \nu_{ij} \rangle = -h_{ij} u_{ij}, \end{aligned}$$

ya que, por definición, la curvatura geodésica h_{ij} de C_{ij} es

$$h_{ij} = -\operatorname{div} N_{ij} = -\langle D_{\nu_{ij}} N_{ij}, \nu_{ij} \rangle.$$

Con todo, sustituyendo en (6.6), se tiene que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(\varphi_t(\partial R_i)) = - \sum_{j \in I(i)} \sum_{p \in \partial C_{ij}} \langle X, \nu_{ij} \rangle(p) - \sum_{j \in I(i)} \int_{C_{ij}} h_{ij} u_{ij}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que la longitud total de $\varphi_t(C)$ es la mitad de la suma, con $i = 1, \dots, n$, de las longitudes de ∂R_i (al sumar los términos de todas las regiones, cada curva se cuenta dos veces), se concluye que

$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in I(i)}} \left\{ \int_{C_{ij}} h_{ij} u_{ij} + \sum_{p \in \partial C_{ij}} \langle X(p), \nu_{ij}(p) \rangle \right\}.$$

□

Nota 6.2.4. En general, para una superficie S contenida en \mathbb{R}^3 , y una curva $C \subset S$, el vector conormal a C en S , en un punto $p \in C$, se define como el vector normal a C y tangente a S en p . En nuestro caso, para una curva C_{ij} contenida en $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$, dado $p \in C_{ij}$, el vector conormal a p en C_{ij} se reduce simplemente al vector tangente a la curva en el punto.

6.2.3. Configuraciones estacionarias. A partir de la igualdad (6.3), conocida como primera variación del área, y de la primera variación de la longitud (6.5), pasamos a definir un concepto importante, el de configuración estacionaria.

Definición 7. Diremos que una configuración admisible es *estacionaria* si (6.5) se anula para cualquier variación que preserve las áreas.

De la propia definición se sigue que las configuraciones estacionarias son justamente los *puntos críticos* del funcional longitud, cuando consideramos variaciones que preservan el área. Nótese que dichas variaciones satisfarán la condición analítica (6.4).

Es claro que cualquier configuración minimizante será, en particular, estacionaria.

6.2.3.1. Obtención de variaciones para una configuración estacionaria. Dada una configuración estacionaria $C \subset \mathcal{S}$, es posible obtener una variación de C a partir de adecuadas funciones diferenciables definidas sobre cada curva C_{ij} de C , de forma que las componentes normales del campo asociado a dicha variación sean justamente las funciones iniciales. Esta propiedad, basada en [4, Lemma 2.4] y utilizada habitualmente en este contexto variacional, va a resultar fundamental a la hora de considerar deformaciones de una configuración estacionaria, tal y como se verá en el resto del Capítulo. Sean funciones diferenciables

$$u_{ij} : C_{ij} \longrightarrow \mathbb{R},$$

para cada lado C_{ij} de C . La hipótesis básica que se ha de cumplir para que ocurra lo anterior es que, dado cualquier vértice p de C contenido en el interior de \mathcal{S} , las anteriores funciones han de verificar que

$$(6.7) \quad u_{ij}(p) + u_{jk}(p) + u_{ki}(p) = 0,$$

donde C_{ij} , C_{jk} , C_{ki} son los tres lados de C que se encuentran en p . Dicha expresión debe entenderse como una cierta *compatibilidad* en el vértice p , donde hay definidas tres de las funciones iniciales.

Además, si las funciones tomadas satisfacen la condición (6.4), la correspondiente variación asociada se podrá tomar de forma que preserve, en todo instante, el área encerrada por las distintas regiones determinadas por C .

Para $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$, esta propiedad de obtención de variaciones aparece explícitamente en [60, Lemma 3.2]. En el caso del disco plano, aunque los argumentos son esencialmente los mismos, el hecho de que exista borde hace que haya que cuidar ciertos detalles ([26, § 1]).

Lema 6.2.5. *Sea $C \subset \mathcal{S}$ una configuración estacionaria, y sean $u_{ij} : C_{ij} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables satisfaciendo las condiciones (6.4) y (6.7). Entonces, existe una variación de C que mantiene constante el área encerrada en cada instante, y cuyo campo infinitesimal asociado tiene a las funciones u_{ij} como componentes normales.*

DEMOSTRACIÓN. En el caso de que $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$, el resultado está demostrado en [60, Lemma 3.2]. Detallamos la demostración para el caso en el que \mathcal{S} sea un disco plano.

Es posible tomar un campo vectorial X definido en C , de forma que en cada curva C_{ij} se cumpla que $u_{ij} = \langle X, N_{ij} \rangle$, y que además sea tangente a ∂D en los vértices del borde. Nótese que la condición (6.7) determinará las componentes normales en los vértices interiores, pero tendremos libertad para definir las componentes tangentes. Razonemos ahora que es posible encontrar una variación uniparamétrica $\varphi_t : C \rightarrow D$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, con campo vectorial velocidad inicial X , tal que $\varphi_t(p) = \exp(tX(p))$, para los puntos p fuera de un pequeño entorno arbitrario de ∂D .

En primer lugar, fijemos un entorno U de ∂D que no contenga ningún vértice interior de C , y modifiquemos X de manera que sea normal a C en U . Sea ahora ν el campo normal a ∂D apuntando hacia el interior del disco, extendido a U de manera tangente a los lados de C . También consideraremos el campo X extendido a $U \cap D$ por medio de la función exponencial (de forma que $p \mapsto \exp_p(tX(p))$ sea la variación asociada a X en $U \cap D$). Sea λ una función diferenciable con soporte $\text{sop}(\lambda)$ contenido en U , que tome el valor 1 cerca de ∂D .

Consideremos el campo $Y = X - \langle X, \lambda \nu \rangle \lambda \nu$, y el grupo local uniparamétrico Ψ_t generado por Y . Fuera de U , los campos Y y X coinciden, ya que λ se anula; y, como por nuestra construcción, ν es tangente a C y X es normal a C en U , concluimos que $Y = X$ en C . Además, para $p \in \partial D$, se tiene que $Y(p)$ coincide con $X(p)$, y por tanto es tangente a ∂D . Así la deformación $\Psi_t(C \cap U)$ tiene campo vectorial velocidad inicial Y , que coincide con X , y es tangente a ∂D . La variación $\Psi_t(C)$ también coincidirá con $\exp_p(tX(p))$ en U , fuera del soporte de λ . Por ello, finalmente podemos definir la variación φ_t como

$$\varphi_t(p) = \begin{cases} \exp_p(tX(p)), & \text{fuera de } \text{sop}(\lambda) \\ \psi_t(p), & \text{en } U. \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tX(p)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(p, tX(p), 1) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(p, X(p), t) = X(p), \end{aligned}$$

con lo que en efecto, dicha variación tiene a X como campo asociado.

La anterior variación preservará las áreas encerradas hasta primer orden, ya que se cumple (6.4). Veamos que podemos conseguir que la variación mantenga constantes las áreas en todo instante.

Renombremos las regiones R_i , si fuera necesario, de forma que R_i sea adyacente a R_{i+1} , para $i = 1, \dots, n-1$. Eligiendo funciones positivas v_i con soporte en el interior de la curva $C_{i(i+1)}$ y fuera del entorno U , se tendrá que la variación inducida por el campo vectorial $v_i N_{i(i+1)}$ hace que el área A_i encerrada por la región R_i disminuya, y que A_{i+1} aumente, manteniendo constante el área encerrada por el resto de las regiones.

Considérese ahora la variación dada por

$$(t, s_1, \dots, s_{n-1}) \mapsto \exp_p \left(tX(p) + \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i N_{i(i+1)}(p) \right), \quad p \in C \cap (D - U),$$

e igual a $\varphi_t(p)$, para $p \in C \cap U$. Sea (A_1, \dots, A_{n-1}) la función de (t, s_1, \dots, s_{n-1}) dada por las áreas de las regiones R_1, \dots, R_{n-1} en cada instante de la anterior deformación. A partir de lo comentado anteriormente,

$$\frac{\partial A_i}{\partial s_i} < 0, \quad \frac{\partial A_{i+1}}{\partial s_i} > 0,$$

Además, el resto de derivadas parciales son nulas. Así, se tiene que la matriz jacobiana

$$\frac{\partial(A_1, \dots, A_{n-1})}{\partial(s_1, \dots, s_{n-1})}$$

es triangular inferior, con entradas no nulas en su diagonal principal, y por tanto regular. Ahora se puede aplicar el Teorema de la Función Implícita a (A_1, \dots, A_{n-1}) en el punto $(t, s_1, \dots, s_{n-1}) = (0, 0, \dots, 0)$, obteniéndose funciones diferenciables $s_1(t), \dots, s_{n-1}(t)$ tales que $A_i(t, s_1(t), \dots, s_{n-1}(t))$ es constantemente igual a $A_i(0, 0, \dots, 0)$ en todo instante t , para cada $i = 1, \dots, n-1$, y en consecuencia, el área encerrada por R_1, \dots, R_{n-1} se mantendrá constante. Además, A_n también permanecerá constante y por ello, la anterior variación preserva las áreas.

El campo velocidad inicial asociado a dicha variación es igual a X , en $C \cap U$, e igual a $X + \sum_{i=1}^{n-1} s'_i(0) v_i N_{i(i+1)}$, en $C \cap (D - U)$. Nótese que, como la variación $\{\varphi_t\}$ preserva el área hasta primer orden, se tiene que $s'_i(0) = 0$ (derívase la expresión constante $A_i(t, s_1(t), \dots, s_{n-1}(t))$), por lo que concluimos que el campo velocidad inicial coincide con X en toda la configuración C . \square

El anterior Lema 6.2.5 nos permite construir variaciones de configuraciones estacionarias, a partir de funciones adecuadas. La primera consecuencia que obtenemos de este hecho es el siguiente resultado, que recoge las principales propiedades de dichas configuraciones.

Proposición 6.2.6. *Dada una configuración estacionaria $C \subset \mathcal{S}$, se verifican las siguientes condiciones:*

- i) *La curvatura geodésica h_{ij} de cada curva C_{ij} es constante.*
- ii) *Los lados de C se encuentran de tres en tres formando ángulos de 120 grados en los vértices interiores.*
- iii) *Se verifica la condición de equilibrio: dados tres lados C_{ij}, C_{jk}, C_{ki} que se encuentran en un vértice interior, sus curvaturas geodésicas satisfacen*

$$h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0.$$

- iv) *Los lados de C que intersecan a $\partial\mathcal{S}$ lo hacen ortogonalmente.*

DEMOSTRACIÓN. Todas las propiedades se obtienen como consecuencia de las fórmulas de variación (6.3) y (6.5), y del Lema 6.2.5.

i) Consideremos una curva C_{ij} , y una función φ con soporte contenido en el interior de C_{ij} , tal que

$$\int_{C_{ij}} \varphi = 0.$$

Nótese que la variación asociada a dicha función φ , y a las funciones nulas definidas en el resto de lados de C , preservará el área en virtud del Lema 6.2.5, y entonces, como C es estacionaria, la primera variación de la longitud (6.5) será nula. Pero en este caso

$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{2} \int_{C_{ij}} h_{ij} \varphi,$$

ya que la variación deja invariantes los vértices de C . Así,

$$\int_{C_{ij}} h_{ij} \varphi = 0,$$

para toda función φ de media nula en el interior de C_{ij} , de donde se deduce necesariamente que h_{ij} es constante en C_{ij} .

ii) Sea ahora p un vértice interior. Por el Teorema 6.1.1, denotemos por C_{ij} , C_{jk} , C_{ki} a las tres curvas que se encuentran en dicho vértice. Veamos que el ángulo que forman cada par de estas curvas es de 120 grados. Fijemos inicialmente un vector unitario $v \in \mathbb{R}^2$.

Tomemos una función u_{ij} con soporte contenido en C_{ij} , con media nula, y tal que $u_{ij} = \langle v, N_{ij}(p) \rangle$. Es claro que es posible elegir una tal función. De igual forma, tomemos funciones u_{jk} , u_{ki} definidas en C_{jk} , C_{ki} cumpliendo las mismas condiciones.

La variación definida por dichas funciones (y por las funciones nulas en el resto de lados de C) preservará el área, ya que, por ejemplo,

$$\left. \frac{dA_i}{dt} \right|_{t=0} = - \int_{C_{ij}} u_{ij} + \int_{C_{ki}} u_{ki} = 0.$$

Como C es estacionaria, entonces (6.5) será nula. Pero

$$\begin{aligned} \left. \frac{dL}{dt} \right|_{t=0} &= - \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \sum_{j \in I(i)} h_{ij} \int_{C_{ij}} u_{ij} + \sum_{j \in I(i)} \sum_{q \in \partial C_{ij}} \langle X(q), v_{ij}(q) \rangle \right\} \\ &= \langle X(p), v_{ij}(p) + v_{jk}(p) + v_{ki}(p) \rangle, \end{aligned}$$

ya que sabemos que las curvaturas geodésicas son constantes (por el primer apartado), las funciones son de media nula, y el único vértice que mueve la variación es justamente p . Así,

$$\langle X(p), v_{ij}(p) + v_{jk}(p) + v_{ki}(p) \rangle = 0.$$

Eso implica necesariamente que $X(p) = v$. En efecto, si $X(p) - v \neq 0$, entonces,

$$\langle X(p) - v, N_{ij}(p) \rangle = u_{ij}(p) - \langle v, N_{ij}(p) \rangle = 0,$$

por lo que $X(p) - v \in T_p C_{ij}$, para todo v , lo que es imposible. Por tanto, $X(p) = v$, y en consecuencia,

$$\langle v, v_{ij}(p) + v_{jk}(p) + v_{ki}(p) \rangle = 0,$$

para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^2$, lo que nos lleva a que

$$(6.8) \quad v_{ij}(p) + v_{jk}(p) + v_{ki}(p) = 0,$$

y equivalentemente

$$N_{ij}(p) + N_{jk}(p) + N_{ki}(p) = 0.$$

El hecho de que los vectores sean unitarios implica que los ángulos que forman dos a dos son justamente de 120 grados: el coseno del ángulo formado entre v_{ij} y v_{jk} será igual a

$$\frac{\langle v_{ij}, v_{jk} \rangle}{\|v_{ij}\| \|v_{jk}\|} = \langle v_{ij}, v_{jk} \rangle.$$

Por otro lado, a partir de (6.8), se tiene que

$$\|v_{ki}\|^2 = \|-v_{ij} - v_{jk}\|^2 = \|v_{ij}\|^2 + \|v_{jk}\|^2 + 2 \langle v_{ij}, v_{jk} \rangle,$$

de donde $\langle v_{ij}, v_{jk} \rangle = -1/2$. Luego el coseno anterior es igual a $-1/2$, y entonces el correspondiente ángulo ha de ser de 120 grados.

iii) Denotemos por p al vértice interior donde se intersecan las curvas C_{ij} , C_{jk} , C_{ki} , y tomemos una curva cerrada γ cuyo interior contenga a p y corte a dichas curvas. Fijemos también $a > 0$.

Tomemos ahora una función u_{ij} con soporte contenido en cierto entorno prefijado de $C_{ij} \cap C$ (que no contenga al vértice p), tal que $\int_{C_{ij}} u_{ij} = a$. Sean también u_{jk} , u_{ki} funciones

cumpliendo las mismas condiciones. Como

$$\left. \frac{dA_i}{dt} \right|_{t=0} = - \int_{C_{ij}} u_{ij} - \int_{C_{ik}} u_{ik} = - \int_{C_{ij}} u_{ij} + \int_{C_{ki}} u_{ki} = -a + a = 0,$$

se tiene que la variación definida por dichas funciones preservará áreas. Entonces, como C es estacionaria, se sigue que

$$0 = \left. \frac{dL}{dt} \right|_{t=0} = a (h_{ij} + h_{jk} + h_{ki}),$$

ya que tal variación deja invariantes los vértices, y cada curvatura geodésica es constante. Así, se concluye que $h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0$.

iv) Consideremos ahora un vértice $p \in \partial S$, tal que $p \in C_{ij}$. Sea u una función definida en p y en el interior de C_{ij} , de media nula.

Como en los casos anteriores, la variación asociada preservará el área, y entonces

$$0 = \left. \frac{dL}{dt} \right|_{t=0} = \langle X(p), v_{ij}(p) \rangle.$$

Como $X(p) \in T_p \partial S$, concluimos que $v_{ij}(p)$ es ortogonal a ∂S en el punto p . \square

Nota 6.2.7. Resaltamos que la primera propiedad obtenida en la Proposición 6.2.6 indica que la curvatura geodésica h_{ij} de un lado C_{ij} (posiblemente desconexo) de una configuración estacionaria es constante; es decir, todas las componentes de C_{ij} tendrá la *misma* curvatura constante.

Nota 6.2.8. Nótese que, salvo las condiciones referidas a cuantas curvas se encuentran en los vértices (*de tres en tres* en los vértices interiores, y *sólo una* curva en cada vértice de ∂D), el resto de condiciones de regularidad de una configuración minimizante, descritas en el Teorema 6.1.1, se obtienen como consecuencia de las fórmulas de variación. Además, la condición (6.2) en los vértices interiores también queda probada, así como la condición de ortogonalidad de los lados que intersecan a ∂S en una configuración minimizante.

Nota 6.2.9. Sea p un vértice interior de una configuración estacionaria C , y sean C_{ij} , C_{jk} , C_{ki} las tres curvas que se encuentran en p . La condición ii) de la Proposición 6.2.6 implica que la suma ordenada de los vectores tangentes (unitarios) en p a las curvas es cero, esto es,

$$v_{ij} + v_{jk} + v_{ki} = 0,$$

donde dicha suma sólo tiene sentido evaluada en el vértice p . Eso implica que

$$(6.9) \quad N_{ij} + N_{jk} + N_{ki} = 0,$$

y consecuentemente, para cualquier variación de C que se considere, las correspondientes componentes normales del campo variacional asociado cumplirán que

$$u_{ij}(p) + u_{jk}(p) + u_{ki}(p) = 0.$$

6.2.4. Presión de una región. Ahora introduciremos un concepto importante en nuestro estudio: la *presión* de una región. Este concepto ya ha aparecido en otros trabajos [39], [96], y permite comprender varias consideraciones físicas [46], [38]. El hecho fundamental para que la siguiente definición tenga sentido es que se cumpla la condición de equilibrio (6.2), tal y como se verá más adelante.

Definición 8. Sea C una configuración estacionaria. Definimos la presión de cada región R_i como un número $p_i \in \mathbb{R}$ tal que

$$(6.10) \quad h_{ij} = p_i - p_j, \text{ para todo lado } C_{ij}.$$

Nota 6.2.10. En el caso de que $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$, para configuraciones estacionarias contenidas en el plano, es posible definir también la presión p_0 de la región exterior R_0 , siguiendo la misma definición (6.10). Esto es debido a que en los vértices de la configuración que tocan dicha región R_0 , la condición (6.2) se cumple igualmente (se pueden ver como vértices contenidos en el *interior* de \mathbb{R}^2).

Nota 6.2.11. La determinación de las presiones en una configuración estacionaria dada se lleva a cabo mediante un proceso recurrente: fijada una región R_k , se le asigna arbitrariamente una presión p_k , y a partir de la expresión (6.10), se van obteniendo las presiones del resto de regiones. Este proceso podría hacer que se le asignaran dos presiones diferentes a una región con varias componentes conexas, pero justamente la condición (6.2) evita que se llegue a esa situación.

Para ilustrar esta última afirmación, consideremos tres regiones R_i, R_j, R_k que se encuentran en un vértice. Definida la presión p_k , se tendrá a partir de (6.10) que $p_i = h_{ik} + p_k$ y $p_j = h_{jk} + p_k$. Pero a partir de la presión p_j , también es posible definir una presión p'_i en la región R_i por $p'_i = h_{ij} + p_j$. Sin embargo, usando la condición (6.2),

$$p'_i = (-h_{jk} - h_{ki}) + p_j = (p_k - p_j + p_i - p_k) + p_j = p_i,$$

con lo que ambas definiciones coinciden. La reiteración de este proceso permite afirmar que las presiones en una configuración estacionaria pueden determinarse correctamente, aunque las regiones presenten varias componentes.

Nota 6.2.12. Obsérvese que estas presiones están definidas salvo una constante aditiva, de manera que no estarán unívocamente determinadas; dadas p_1, \dots, p_n presiones correspondientes a una configuración estacionaria C , si consideramos $p'_i = p_i + c$, con $c \in \mathbb{R}$, se tiene que p'_1, \dots, p'_n también constituyen presiones para las regiones de C .

Nota 6.2.13. A partir de las presiones, es posible expresar la primera variación de la longitud (6.5) para *configuraciones estacionarias* de la siguiente manera:

$$(6.11) \quad \left. \frac{dL}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n p_i \left. \frac{dA_i}{dt} \right|_{t=0}.$$

En efecto; consideremos una configuración estacionaria C . Usando ii) y iv) de la Proposición 6.2.6, es fácil ver que los sumandos que aparecen en (6.5) evaluados en los vértices de C se anulan, y aplicando (6.10) nos queda

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \left. \frac{dL}{dt} \right|_{t=0} &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in I(i)}} \int_{C_{ij}} h_{ij} u_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in I(i)}} \int_{C_{ij}} p_i u_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in I(i)}} \int_{C_{ij}} p_j u_{ij} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in I(i)}} \int_{C_{ij}} p_i u_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ i \in I(j)}} \int_{C_{ij}} p_i u_{ji} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in I(i)}} \int_{C_{ij}} p_i u_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ i \in I(j)}} \int_{C_{ij}} p_i u_{ij} \\ &= - \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in I(i)}} p_i \int_{C_{ij}} u_{ij} = \sum_{i=1}^n p_i \left. \frac{dA_i}{dt} \right|_{t=0}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la igualdad (6.3) en la última línea.

Obsérvese que, si se considera una constante $c \in \mathbb{R}$ y presiones $p'_i = p_i + c$, la anterior expresión (6.11) no varía, ya que, como $\sum_{i=1}^n A_i(t) = \pi$, entonces $\sum_{i=1}^n dA_i/dt = 0$, y por tanto no aparecerá ningún término adicional.

6.2.5. Segunda fórmula de variación de la longitud. Podemos ahora enunciar el siguiente resultado, donde se muestra la expresión de la segunda variación de la longitud para configuraciones estacionarias, y deformaciones que preservan el área hasta segundo orden:

Proposición 6.2.14 (Segunda variación de la longitud). *Sea $C \subset \mathcal{S}$ una configuración estacionaria, y sea $\varphi_t : C \rightarrow \mathcal{S}$ una variación que preserva áreas hasta segundo orden, con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y con campo vectorial asociado X . Entonces, la segunda derivada de la longitud $L(t)$ de $\varphi_t(C)$ en el instante $t = 0$ viene dada por*

$$(6.13) \quad -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j \in I(i)}} \left\{ \int_{C_{ij}} (u''_{ij} + h_{ij}^2 u_{ij}) u_{ij} + \sum_{\substack{p \in \partial C_{ij} \\ p \in \text{int}(\mathcal{S})}} \left(-q_{ij} u_{ij}^2 + u_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial v_{ij}} \right) (p) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{p \in \partial C_{ij} \\ p \in \partial \mathcal{S}}} \left(u_{ij}^2 + u_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial v_{ij}} \right) (p) \right\},$$

donde $q_{ij}(p) = (h_{ki} + h_{kj})(p) / \sqrt{3}$, y R_k es la tercera región tocando el vértice p .

DEMOSTRACIÓN. Derivando los términos integrales de (6.5), nos queda (no indicaremos en lo sucesivo la dependencia con respecto al parámetro t)

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\int_{C_{ij}} h_{ij} u_{ij} \right) = \int_{C_{ij}} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h_{ij} \right) u_{ij} + h_{ij} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\int_{C_{ij}} u_{ij} \right).$$

La expresión de la derivada de la curvatura geodésica, con respecto a la variación φ_t , se computa según [6, Th. 2.7], obteniendo

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h_{ij} = u''_{ij} + h_{ij}^2 u_{ij}.$$

Por otro lado, operando como en (6.12), es fácil ver que

$$\sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j \in I(i)}} h_{ij} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\int_{C_{ij}} u_{ij} \right) = 2 \sum_{i=1}^n p_i \frac{d^2 A_i}{dt^2} \Big|_{t=0},$$

que se anula al estar considerando una variación que preserve las áreas hasta segundo orden (nótese que es necesario descomponer la curvatura geodésica h_{ij} en función de las presiones, para que los índices vayan bien y se pueda usar (6.3), haciendo así que aparezca la segunda derivada de A_i).

Por otra parte, derivando el segundo término en (6.5), se tiene

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle X, v_{ij} \rangle = \langle D_X X, v_{ij} \rangle + \langle X, D_X v_{ij} \rangle.$$

Expresando X como suma de su parte normal $X^N = \langle X, N_{ij} \rangle N_{ij}$ y su parte tangente $X^T = \langle X, v_{ij} \rangle v_{ij}$, es claro que

$$\begin{aligned} \langle X, D_X v_{ij} \rangle &= \langle X, N_{ij} \rangle \langle N_{ij}, D_X v_{ij} \rangle + \langle X, v_{ij} \rangle \langle v_{ij}, D_X v_{ij} \rangle \\ &= u_{ij} \langle N_{ij}, D_X v_{ij} \rangle. \end{aligned}$$

Usando un cálculo análogo al que aparece en [60, Lemma 3.4] (que detallaremos en la Nota 6.2.15 posterior), se puede comprobar finalmente que

$$\langle N_{ij}, D_X v_{ij} \rangle = h_{ij} \langle X, v_{ij} \rangle + \frac{\partial u_{ij}}{\partial v_{ij}},$$

donde $\frac{\partial u_{ij}}{\partial v_{ij}} = v_{ij} u_{ij}$. Así se concluye que

$$(6.14) \quad \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle X, v_{ij} \rangle = \langle D_X X, v_{ij} \rangle + u_{ij} h_{ij} \langle X, v_{ij} \rangle + u_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial v_{ij}}.$$

Para $p \in \text{int}(\mathcal{S})$, la sumatoria correspondiente al primer término de (6.14) se anula, ya que $v_{ij} + v_{jk} + v_{ki} = 0$, por (6.8). Además, el segundo término es igual a $-q_{ij} u_{ij}^2$, a partir de ciertos cálculos [60], que detallamos en la Nota 6.2.16.

Para $p \in \partial\mathcal{S}$, consideremos la curva C_{ij} que corta a $\partial\mathcal{S}$ en el vértice p . Denotemos por t_p, n_p los vectores tangente y normal interior a $\partial\mathcal{S}$ en p . Como la configuración es estacionaria, C_{ij} corta ortogonalmente a $\partial\mathcal{S}$ en p , y entonces $n_p = v_{ij}(p)$. Además, como $X(p)$ es un vector tangente (no unitario) a $\partial\mathcal{S}$ en p , se obtiene que $X(p) = u_{ij}(p) t_p$. En consecuencia, $\langle X, v_{ij} \rangle(p) = 0$, y

$$\begin{aligned} \langle D_X X, v_{ij} \rangle(p) &= \langle D_{X(p)} X, v_{ij}(p) \rangle = u_{ij}(p) \langle D_{t_p}(u_{ij} t), n_p \rangle \\ &= u_{ij}^2(p) \langle D_{t_p} t, n_p \rangle + u_{ij}(p) (t_p u_{ij}) \langle t_p, n_p \rangle \\ &= u_{ij}^2(p) H_{\partial\mathcal{S}}(p) = u_{ij}^2(p), \end{aligned}$$

ya que, en el caso de que \mathcal{S} sea un disco, $\partial\mathcal{S}$ es una circunferencia de radio unidad y su curvatura es igual a uno. Esto nos conduce a (6.13), concluyendo así la demostración. \square

Nota 6.2.15. Detallemos los cálculos que aparecen en [60, Lemma 3.4], y que demuestran que

$$(6.15) \quad \langle N_{ij}, D_X v_{ij} \rangle = h_{ij} \langle X, v_{ij} \rangle + \frac{\partial u_{ij}}{\partial v_{ij}}.$$

En efecto: Como v_{ij} y N_{ij} son ortogonales, se sigue que

$$\langle N_{ij}, D_X v_{ij} \rangle = -\langle D_X N_{ij}, v_{ij} \rangle.$$

Tomemos un campo tangente arbitrario Z , que verifique que $[X, Z] = 0$, y comprobemos que $D_X N = -\nabla_Z(\langle X, N \rangle) - A_N(X^T)$.

Es claro por las hipótesis sobre Z que

$$\langle D_X N, Z \rangle = -\langle N, D_X Z \rangle = -\langle N, D_Z X \rangle = -\langle N, D_Z(X^N) \rangle - \langle N, D_Z(X^T) \rangle.$$

Como

$$D_Z(X^N) = D_Z(\langle X, N \rangle N) = \langle X, N \rangle D_Z N + Z(\langle X, N \rangle) N,$$

entonces

$$(6.16) \quad \langle N, D_Z(X^N) \rangle = Z \langle X, N \rangle,$$

ya que $\langle N, N \rangle = 1$.

Por otro lado, para X', Y' campos tangentes cualesquiera, como

$$\sigma(X', Y') = (D_{X'} Y')^N = \langle D_{X'} Y', N \rangle N,$$

entonces

$$\langle D_{X'} Y', N \rangle = \langle \sigma(X', Y'), N \rangle = \langle A_N(X'), Y' \rangle,$$

donde estamos denotando por A_N al endomorfismo autoadjunto de Weingarten. Particularizando para $X' = Z$ y $Y' = X^T$, se tiene que

$$(6.17) \quad \langle N, D_Z(X^T) \rangle = \langle A_N(Z), X^T \rangle = \langle A_N(X^T), Z \rangle.$$

A partir de (6.16) y (6.17) se sigue que

$$\begin{aligned} \langle D_X N, Z \rangle &= -Z \langle X, N \rangle - \langle A_N(X^T), Z \rangle \\ &= -\langle Z, \nabla_Z(\langle X, N \rangle) \rangle - \langle A_N(X^T), Z \rangle \\ &= \langle -\nabla_Z(\langle X, N \rangle) - A_N(X^T), Z \rangle, \end{aligned}$$

para todo campo Z . De ahí se deduce que

$$D_X N = -\nabla_Z(\langle X, N \rangle) - A_N(X^T).$$

Particularizando ahora a $Z = v_{ij}$, $N = N_{ij}$, nos quedará

$$D_X N_{ij} = -\nabla_{v_{ij}} \langle X, N_{ij} \rangle - A_{N_{ij}}(X^T),$$

y con ello

$$\begin{aligned} \langle N_{ij}, D_X v_{ij} \rangle &= -\langle D_X N_{ij}, v_{ij} \rangle = \langle \nabla_{v_{ij}}(u_{ij}) + A_{N_{ij}}(X^T), v_{ij} \rangle \\ &= \langle A_{N_{ij}}(X^T), v_{ij} \rangle + \langle \nabla_{v_{ij}} u_{ij}, v_{ij} \rangle \\ &= \langle \sigma(X^T, v_{ij}), N_{ij} \rangle + v_{ij} u_{ij} \\ &= \sigma_{ij}(X^T, v_{ij}) + \frac{\partial u_{ij}}{\partial v_{ij}}. \end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(X^T, v_{ij}) &= \langle \sigma(\langle X, v_{ij} \rangle v_{ij}, v_{ij}), N_{ij} \rangle \\ &= \langle X, v_{ij} \rangle \langle (D_{v_{ij}} v_{ij})^N, N_{ij} \rangle \\ &= \langle X, v_{ij} \rangle \langle D_{v_{ij}} v_{ij}, N_{ij} \rangle = \langle X, v_{ij} \rangle h_{ij}, \end{aligned}$$

se tiene la igualdad deseada (6.15).

Nota 6.2.16. Veamos que

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j \in I(i)}} \sum_{\substack{p \in \partial C_{ij} \\ p \in \text{int}(D)}} u_{ij} h_{ij} \langle X, v_{ij} \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j \in I(i)}} \sum_{\substack{p \in \partial C_{ij} \\ p \in \text{int}(D)}} -q_{ij} u_{ij}^2.$$

En efecto; denotemos por ∇ al conjunto de vértices interiores de la configuración, y veamos la anterior sumatoria indizada en los vértices de ∇ .

Sea $p \in \nabla$, y sean C_{ij} , C_{jk} y C_{ki} las tres curvas que se encuentran en el vértice p . Los vectores normales y conormales interiores, tras aplicación de adecuado giro, pueden suponerse dispuestos según la Figura 6.1.

Recuérdese que

$$u_{ij} = -u_{ji}, \quad h_{ij} = -h_{ji},$$

y que $v_{ij} = v_{ji}$ (los vectores conormales son interiores a p en cada curva). A partir de la Figura 6.1, y teniendo en cuenta los ángulos que forman entre ellos, dichos vectores

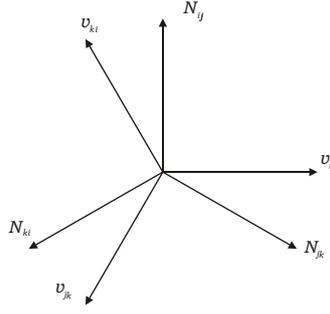


FIGURA 6.1.

pueden expresarse en coordenadas de la siguiente manera:

$$v_{ij} = (1, 0), v_{jk} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2} \right), v_{ki} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

y

$$N_{ij} = (0, 1), N_{jk} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \right), N_{ki} = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \right).$$

Por ello,

$$\begin{aligned} v_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-N_{ki} + N_{jk}), \\ v_{jk} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-N_{ij} + N_{ki}), \\ v_{ki} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-N_{jk} + N_{ij}), \end{aligned}$$

y consecuentemente,

$$\begin{aligned} \langle X, v_{ij} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-u_{ki} + u_{jk}), \\ \langle X, v_{jk} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-u_{ij} + u_{ki}), \\ \langle X, v_{ki} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-u_{jk} + u_{ij}). \end{aligned}$$

Eso nos lleva a que

$$\begin{aligned} &\left(N_{ij} h_{ij} \langle X, v_{ij} \rangle + N_{jk} h_{jk} \langle X, v_{jk} \rangle + N_{ki} h_{ki} \langle X, v_{ki} \rangle \right) (p) = \\ &\left(\frac{1}{\sqrt{3}} N_{ij} h_{ij} (u_{jk} - u_{ki}) + \frac{1}{\sqrt{3}} N_{jk} h_{jk} (u_{ki} - u_{ij}) + \frac{1}{\sqrt{3}} N_{ki} h_{ki} (u_{ij} - u_{jk}) \right) (p) = \\ &\frac{1}{\sqrt{3}} \left(N_{ij} u_{ij} (h_{jk} - h_{ki}) + N_{jk} u_{jk} (h_{ki} - h_{ij}) + N_{ki} u_{ki} (h_{ij} - h_{jk}) \right) (p) + \\ &\frac{1}{\sqrt{3}} \left(N_{ij} (h_{ki} u_{jk} - h_{jk} u_{ki}) + N_{jk} (h_{ij} u_{ki} - h_{ki} u_{ij}) + N_{ki} (h_{jk} u_{ij} - h_{ij} u_{jk}) \right) (p), \end{aligned}$$

donde hemos reagrupado adecuadamente tras usar las identidades $N_{ij} = -N_{jk} - N_{ki}$, $N_{jk} = -N_{ki} - N_{ij}$, $N_{ki} = -N_{ij} - N_{jk}$ en la última igualdad.

Al indizar en $p \in \nabla$, el sumando correspondiente a la curva C_{ij} aparecerá dos veces, ya que $u_{ij} h_{ij} \langle X, v_{ij} \rangle = u_{ji} h_{ji} \langle X, v_{ji} \rangle$. Teniendo eso en cuenta, se sigue que

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j \in I(i)}} \sum_{\substack{p \in \partial C_{ij} \\ p \in \text{int}(D)}} u_{ij} h_{ij} \langle X, v_{ij} \rangle = \\
& -\frac{1}{2} \sum_{p \in \nabla} 2 \left(u_{ij}^2 \frac{h_{jk} - h_{ki}}{\sqrt{3}} + u_{jk}^2 \frac{h_{ki} - h_{ij}}{\sqrt{3}} + u_{ki}^2 \frac{h_{ij} - h_{jk}}{\sqrt{3}} \right) (p) \\
& -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{p \in \nabla} 2 \left(u_{ij} (h_{ki} u_{jk} - h_{jk} u_{ki}) + u_{jk} (h_{ij} u_{ki} - h_{ki} u_{ij}) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. u_{ki} (h_{jk} u_{ij} - h_{ij} u_{jk}) \right) (p) \\
& = -\frac{1}{2} \sum_{p \in \nabla} 2 \left(-q_{ij} u_{ij}^2 - q_{jk} u_{jk}^2 - q_{ki} u_{ki}^2 \right) (p),
\end{aligned}$$

ya que la segunda sumatoria se anula debido a que el determinante

$$\begin{vmatrix} N_{ij} & u_{ij} & h_{ij} \\ N_{jk} & u_{jk} & h_{jk} \\ N_{ki} & u_{ki} & h_{ki} \end{vmatrix}$$

es cero (la suma de las tres filas da lugar a la fila nula). Finalmente, volviendo a indizar en $i = 1, \dots, n, j \in I(i)$ y $p \in \partial C_{ij}, p \in \text{int}(D)$, se tiene lo anunciado.

6.2.6. Variaciones por configuraciones estacionarias. Presentamos ahora de forma breve un tipo de variaciones que usaremos en posteriores Capítulos.

Dada una configuración estacionaria C , y una variación

$$\{ \varphi_t : C \rightarrow \mathcal{S}, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \},$$

diremos que la variación es *por configuraciones estacionarias* si en cada instante de la deformación, se obtienen configuraciones estacionarias, es decir,

$$\varphi_t(C) \text{ es configuración estacionaria, } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

En virtud de la Proposición 6.2.6 se tendrá que dichas variaciones preservarán los ángulos entre los lados en vértices interiores, y la ortogonalidad en los vértices de $\partial \mathcal{S}$, en todo instante. Además los lados se mantendrán con curvatura geodésica constante en cada instante (no necesariamente la *misma* constante).

Dada una de estas variaciones, que preserve el área de todas las regiones hasta primer orden, siguiendo los argumentos de la demostración del Lema 6.2.5 anterior, es posible modificarla adecuadamente para que las áreas se mantengan constantes a lo largo de toda la deformación. En tal situación, a partir de (6.11) se puede obtener que la segunda derivada de la longitud viene dada por

$$(6.18) \quad \frac{d^2 L}{dt^2} = \sum_{\alpha} \frac{dp_{\alpha}}{dt} \frac{dA_{\alpha}}{dt},$$

donde α se refiere ahora a las *componentes* de la configuración estacionaria, y no a las regiones, y dp_{α}/dt representa la derivada de la presión de la componente α -ésima con respecto a la variación. Dicha expresión será de gran utilidad en los siguientes Capítulos.

En general, si las áreas no se preservan hasta segundo orden, la segunda derivada de la longitud, para una variación de C por configuraciones estacionarias, vendrá dada por

$$\frac{d^2L}{dt^2} = \sum_{\alpha} \frac{dp_{\alpha}}{dt} \frac{dA_{\alpha}}{dt} + p_{\alpha} \frac{d^2A_{\alpha}}{dt^2},$$

que también se obtiene a partir de (6.11). Nótese que cuando la variación preserva las áreas de las *regiones* hasta segundo orden, entonces

$$\frac{d^2A_k}{dt^2} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

y el segundo sumando anterior puede reagruparse indizando en las distintas regiones, de forma que

$$\sum_{\alpha} p_{\alpha} \frac{d^2A_{\alpha}}{dt^2} = \sum_{k=1}^n p_k \frac{d^2A_k}{dt^2} = 0$$

Nota 6.2.17. Téngase en cuenta que la derivada de la curvatura geodésica h_{ij} a lo largo de la deformación, dada por

$$u''_{ij} + h_{ij}^2 u_{ij},$$

sólo depende de la componente normal u_{ij} del campo vectorial asociado X , y que la modificación resultante de aplicar el Lema 6.2.5 sólo modifica la aceleración de la variación. Además, la condición de preservar ángulos sólo depende del campo velocidad inicial.

Nota 6.2.18. Obsérvese que, en particular, dada una variación que preserve los ángulos entre los lados de la configuración en todo instante, se tiene que

$$D_X(v_{ij} + v_{jk} + v_{ki}) = 0,$$

ya que $v_{ij} + v_{jk} + v_{ki}$ se anulará constantemente.

6.3. Configuraciones estables

Terminamos este Capítulo recordando la noción de configuración estable. Tal y como se ha comentado anteriormente, las configuraciones estacionarias representan los puntos críticos del funcional longitud, para variaciones que preservan las áreas encerradas. Apoyándonos en esta idea, definimos ahora el concepto de configuración estable.

Definición 9. Diremos que una configuración estacionaria $C \subset \mathcal{S}$ es *estable* si es un *mínimo local* de segundo orden del funcional longitud, para cualquier variación preservando áreas. En caso de que una configuración no sea estable, diremos que es *inestable*.

Así, si deformamos ligeramente una configuración estable C preservando las áreas encerradas, obtendremos en cada instante configuraciones con *mayor* longitud que C .

Por otro lado, como las configuraciones minimizantes son *mínimos globales* del funcional longitud, se sigue de la definición anterior que toda configuración minimizante es, en particular, estable. Sin embargo, no toda configuración estable es minimizante, como se verá en los posteriores Capítulos.

Pasamos ahora a realizar ciertas definiciones, con el fin de obtener una condición que permita discutir la estabilidad.

Sea $C \subset \mathcal{S}$ una configuración estacionaria. Diremos que una función $u : \bigcup_{i,j} C_{ij} \rightarrow \mathbb{R}$ es *admisibile* si las restricciones $u_{ij} = u|_{C_{ij}}$ pertenecen al espacio de Sobolev $W^{1,2}(C_{ij})$, y verifican que, para cualquier vértice p de la configuración, contenido en el interior de \mathcal{S} ,

$$u_{ij}(p) + u_{jk}(p) + u_{ki}(p) = 0,$$

con C_{ij} , C_{jk} , C_{ki} las tres curvas que se encuentran en p . Estas funciones, a la vista de los resultados de esta Sección, se corresponden con las variaciones de C que tienen como componentes normales del campo variacional asociado justamente las funciones u_{ij} (véase el Lema 6.2.5). En consecuencia, a partir de la expresión (6.3), dichas variaciones preservarán las áreas si y sólo si

$$(6.19) \quad \sum_{j \in I(i)} \int_{C_{ij}} u_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Diremos que una función admisible u definida sobre C es una *función de Jacobi* si la variación asociada preserva la curvatura geodésica de cada lado $C_{ij} \subset C$, y los ángulos en cada vértice. Esto quiere decir que la curvatura geodésica h_{ij} del lado C_{ij} se mantiene constante a lo largo de la deformación. En consecuencia, se tendrá que la derivada de la curvatura geodésica h_{ij} de C_{ij} respecto de la variación se anula, es decir,

$$(6.20) \quad u''_{ij} + h_{ij}^2 u_{ij} = 0.$$

Es claro que la componente normal del campo de Killing generado por el grupo uniparamétrico de rotaciones alrededor del origen siempre dan lugar a una función de Jacobi.

Por otro lado, la segunda variación de la longitud (6.13) permite definir una forma bilineal inducida sobre el espacio de funciones admisibles, que llamaremos *forma índice* asociada a C , y que viene dada por

$$(6.21) \quad Q(u, v) = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j \in I(i)}} \int_{C_{ij}} (u''_{ij} + h_{ij}^2 u_{ij}) v_{ij} \right. \\ \left. + \sum_{\substack{p \in \partial C_{ij} \\ p \in \text{int}(\mathcal{S})}} \left(-q_{ij} u_{ij} + \frac{\partial u_{ij}}{\partial v_{ij}} \right) (p) v_{ij}(p) + \sum_{\substack{p \in \partial C_{ij} \\ p \in \partial \mathcal{S}}} \left(u_{ij} + \frac{\partial u_{ij}}{\partial v_{ij}} \right) (p) v_{ij}(p) \right\},$$

donde u, v son funciones admisibles, y q_{ij} son las funciones ya definidas en la Proposición 6.2.14.

Con esta notación, resulta posible establecer una condición analítica para determinar si una configuración es estable o no. Así, por las definiciones realizadas, se sigue que una configuración estacionaria C será estable si y sólo si

$$(6.22) \quad Q(u, u) \geq 0, \quad \text{para toda función admisible } u : C \rightarrow \mathbb{R} \text{ satisfaciendo (6.19).}$$

Particiones Isoperimétricas de un disco plano

En este Capítulo, nos centraremos en un disco D contenido en el plano Euclídeo \mathbb{R}^2 y estudiaremos el problema isoperimétrico consistente en dividir D en n regiones de áreas prefijadas mediante una configuración de curvas con la menor longitud posible. En virtud del Teorema 6.1.1 y de la Proposición 6.2.6, sabemos que dicho problema tiene solución, sea cual sea el número n de regiones que consideremos, y además, dicha solución consistirá en un grafo contenido en el disco, cuyos lados son curvas con curvatura geodésica constante, encontrándose de tres en tres en vértices en el interior de D formando ángulos de 120 grados y satisfaciendo la condición (6.2), y cortando ∂D ortogonalmente, cada curva en un punto distinto.

Dado que las configuraciones admisibles en este caso, inducen divisiones del disco en n regiones, normalmente nos referiremos a ellas como particiones. Además, denominaremos *particiones isoperimétricas* a las configuraciones minimizantes para áreas prefijadas. La notación que utilizaremos será la introducida en el Capítulo 6 anterior, donde también aparecen varios de los resultados que aplicaremos en nuestro estudio.

Tal y como indicábamos en el Capítulo 5 introductorio, la mayor dificultad con la que nos enfrentamos es la posible *no conexión* de las regiones en una configuración minimizante o partición isoperimétrica. Este hecho hace que el conjunto de candidatos a ser solución sea muy amplio, obligándonos a admitir, en un principio, configuraciones de diversos tipos topológicos.

El esquema de este Capítulo es el siguiente. En primer lugar, veremos que en caso de considerar dos regiones, la correspondiente configuración minimizante se obtiene, casi de forma inmediata, a partir de las condiciones de regularidad descritas en el Teorema 6.1.1 y la Proposición 6.2.6.

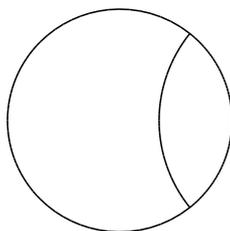


FIGURA 7.1. Partición isoperimétrica del disco en dos regiones de áreas dadas

Desafortunadamente, en el resto de situaciones, determinar la solución se convierte en una tarea más compleja. Un resultado fundamental en nuestro trabajo es el Lema 7.3.1, que proporciona una cota sobre el número de componentes conexas de la región de mayor presión. Esta cota nos permitirá, para el caso de tres regiones, reducir el número de candidatos considerablemente, hasta quedarnos con las diez configuraciones que muestra la Figura 7.4. A partir de ahí, tras descartar las posibilidades que no son minimizantes (usando, entre otros, ciertos argumentos de estabilidad), concluiremos que la solución es

la configuración estándar de la Figura 7.2, consistente en tres lados que se encuentran en un único vértice del interior del disco.

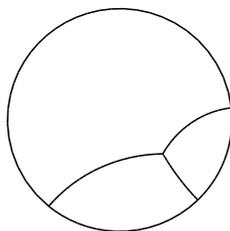


FIGURA 7.2. Partición isoperimétrica del disco en tres regiones de áreas dadas

Destacamos que las soluciones obtenidas para dos y tres regiones son únicas, salvo rotaciones del disco.

Finalmente, concluiremos este Capítulo con varias observaciones relativas a este problema, cuando el número de regiones aumenta.

7.1. Partición isoperimétrica para dos regiones

Comencemos nuestro estudio considerando en esta Sección el problema consistente en hallar la partición isoperimétrica del disco D en dos regiones de áreas dadas. En este caso, la resolución del problema resulta relativamente sencilla, gracias a los resultados anteriormente expuestos y, obviamente, al hecho de que estemos dividiendo al disco en sólo dos regiones. El siguiente Teorema, consecuencia de las condiciones de regularidad descritas en el Teorema 6.1.1 y en la Proposición 6.2.6, caracteriza completamente las configuraciones minimizantes para dos regiones.

Teorema 7.1.1. *Sea C una configuración minimizante, dividiendo al disco D en dos regiones de áreas dadas. Entonces C es un arco de circunferencia o un segmento que interseca ortogonalmente a ∂D .*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que existe una tal configuración minimizante C en virtud del Teorema 6.1.1. Dicho Teorema, junto con la Proposición 6.2.6, nos da las propiedades de regularidad que satisface C .

En primer lugar, es claro que no puede haber vértices de C en el interior del disco, al estar considerando únicamente dos regiones. Por tanto, C estará compuesta por arcos de circunferencia o segmentos (esto es, curvas con curvatura geodésica constante), que cortan ortogonalmente a ∂D . Supongamos que hubiera más de una de estas curvas. Entonces, aplicando adecuada rotación, con centro en el origen, a una de las curvas, es posible obtener una nueva configuración C' , de igual perímetro y encerrando los mismos valores del área que C , que presenta un vértice en ∂D de donde partirán dos curvas distintas (basta girar una curva hasta que entre en contacto con otra). Esto impide que C' pueda ser minimizante, lo que implica que C ha de estar formada por una sola curva. \square

Nota 7.1.2. La unicidad de la partición isoperimétrica del disco, en el caso de dos regiones, es evidente, salvo rotaciones del disco con centro en el origen.

Nota 7.1.3. Se deduce del Teorema 7.1.1 que la partición isoperimétrica del disco en dos regiones de igual área viene dada a partir de cualquiera de sus diámetros.

7.2. Algunos resultados sobre particiones isoperimétricas

Enunciaremos en esta Sección algunos resultados generales referentes a las configuraciones minimizantes, que serán usados más adelante. El primer Lema nos proporciona una cota superior global sobre el perímetro total de una configuración minimizante.

Lema 7.2.1. *Dada una partición isoperimétrica C del disco en n regiones, se tiene que el perímetro total de C es menor o igual que n .*

Además, la igualdad nunca se alcanza si $n \geq 4$. Si la igualdad se da en el caso $n = 3$, entonces C consiste en tres segmentos dividiendo al disco en tres regiones de igual área.

DEMOSTRACIÓN. Es siempre posible dividir el disco en n regiones usando n radios de manera adecuada, para cualesquiera valores del área. De ahí ya se deduce que el perímetro de C será menor o igual que n .

Para el caso $n \geq 4$, la división anterior presenta una singularidad no permitida en el origen (es un vértice donde se encuentran n lados), y por tanto no puede ser minimizante. En consecuencia, cualquier solución tendrá longitud estrictamente menor que n (si dicha longitud minimizante fuese n , entonces cualquier partición de longitud n sería solución, incluyendo la anterior, que es irregular).

En el caso de que se dé la igualdad para $n = 3$, la división anterior será minimizante y, en particular, estacionaria. Esto implica que los tres radios han de formar ángulos de 120 grados entre sí, y entonces las tres regiones encerrarán la misma área. \square

La idea utilizada en la demostración del Teorema 7.1.1, basada en la aplicación de rotaciones centradas en el origen para demostrar que una partición del disco no es minimizante, inspira la demostración de los dos siguientes resultados.

Lema 7.2.2. *Una configuración minimizante debe ser conexa.*

DEMOSTRACIÓN. Cualquier configuración no conexa puede ser descartada como minimizante, aplicando una rotación centrada en el origen a una de sus componentes conexas. Este movimiento preservará la longitud y las áreas encerradas por la configuración, y dará lugar a un vértice irregular cuando dicha componente toque a otra. \square

Nota 7.2.3. Sea C una configuración estacionaria y Ω una componente conexa de $D - C$ (es decir, una componente de una región). Supongamos que $\partial\Omega \cap \partial D$ no es conexo. En esta situación, se puede aplicar el Lema 7.2.2 anterior, para concluir que C no puede ser minimizante.

Ya hemos comentado que, en principio, dada una configuración admisible $C \subset D$, una región puede estar compuesta por varias componentes. Nos referiremos a las componentes que toquen a ∂D como *componentes del borde*, mientras que las que no toquen dicho borde serán *componentes interiores*. Además, llamaremos *m-componente* de una región a una componente conexa bordeada por m curvas, que no necesariamente han de ser lados de C , ya que pueden ser curvas contenidas en ∂D .

Lema 7.2.4. ([96, Cor. 2.22], [39, Lemma 3.1]) *En una configuración minimizante para tres o más regiones, no puede haber ninguna 2-componente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea C una configuración minimizante, y supongamos que presenta una 2-componente Ω . Si Ω es una componente del borde, aplicando una rotación de centro el origen, se podremos girar Ω hasta producir un vértice irregular, lo cual contradice el carácter minimizante de C . Por otro lado, si Ω es una componente interior, se

sigue a partir de [96, Lemma 5.1] que los lados adyacentes a Ω pertenecen a una misma circunferencia. Así, aplicando de nuevo una rotación (alrededor del centro de la anterior circunferencia), iremos trasladando Ω hasta llegar a un contacto irregular, lo que vuelve a resultar contradictorio. \square

Nota 7.2.5. Otra idea interesante que permite demostrar el Lema 7.2.4 es la que aparece en [44, Lemma 2.4]. Usando una reflexión construida a partir de una 2-componente, van obteniendo configuraciones de igual perímetro, que encierran las mismas áreas, con un efecto similar al producido por las rotaciones anteriores. Remitimos al lector interesado en los detalles al trabajo original [44].

7.3. Cota para el número de componentes de la región de mayor presión

En la Subsección 6.2.4 definíamos la presión de una región, que es una asignación numérica, de forma que para un lado C_{ij} en una configuración estacionaria, su curvatura geodésica h_{ij} viene dada por

$$h_{ij} = p_i - p_j,$$

siendo p_i, p_j presiones correspondientes a las regiones R_i, R_j .

A partir de dicha definición, es inmediato observar que un lado que separe dos regiones adyacentes tendrá curvatura geodésica *positiva* respecto al normal que apunta hacia la región con mayor presión; por tanto, la regiones de mayor presión *curvan* los lados que las separan de las regiones con una menor presión.

En esta Sección nos centraremos en la región de mayor presión de las configuraciones *estables*, que denotaremos por R_1 en lo sucesivo. Nótese que consideramos configuraciones satisfaciendo la condición de estabilidad (6.22), aunque las presiones se definen, en general, para configuraciones estacionarias.

Tal y como se ha comentado anteriormente, la principal dificultad con la que nos enfrentamos es que, como las regiones pueden presentarse con varias componentes en un grafo minimizante, el conjunto de posibilidades a tener es muy amplio. Nuestro objetivo es encontrar una cota sobre el número de componentes conexas de R_1 , en cualquier configuración estable que divida al disco en n regiones. Veremos que, en tal situación, R_1 tendrá a lo sumo $n - 1$ componentes no-hexagonales (las componentes hexagonales, o 6-componentes, también se podrán controlar). Como todo grafo minimizante es, en particular, estable, esta cota nos permitirá reducir el campo de posibilidades para el problema de tres regiones, y obtener un listado (finito) de candidatos para la correspondiente partición isoperimétrica.

Lema 7.3.1. *Sea C una configuración estable dividiendo a un disco D en n regiones de áreas dadas. Entonces la región de mayor presión R_1 tiene, a lo sumo, $n - 1$ componentes no-hexagonales.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que R_1 tiene como mínimo n componentes no-hexagonales $\Omega_1, \dots, \Omega_n$. En tal caso, vamos a encontrar una variación preservando áreas con forma índice (6.21) negativa, lo que contradice el carácter estable de C , según (6.22).

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, consideremos la variación dada por la función u_i que toma el valor uno en $\partial\Omega_i$, y cero en el resto de la configuración (es fácil ver que cada función u_i así definida verifica la condición (6.7) en los vértices de $\partial\Omega_i$, y por tanto, a partir de ella se puede construir la correspondiente variación, según el Lema 6.2.5). Distingamos previamente dos casos distintos.

a) Si Ω_i es una componente que toca a ∂D , entonces

$$(7.1) \quad Q(u_i, u_i) = - \sum_{j \in I(1)} \left\{ \int_{C_{1j} \cap \partial \Omega_i} h_{1j}^2 + \sum_{\substack{p \in \partial C_{1j} \cap \partial \Omega_i \\ p \in \text{int}(D)}} -q_{1j}(p) + \sum_{\substack{p \in \partial C_{1j} \cap \partial \Omega_i \\ p \in \partial D}} 1 \right\}.$$

Hay que tener en cuenta en este cálculo que la función u_i es constantemente igual a uno en

$$\bigcup_{j \in I(1)} C_{1j} \cap \partial \Omega_i,$$

y cero en el resto de la configuración, por lo que sus derivadas se anulan. Además, en esta situación, cada término en la forma índice (6.21) aparecerá repetido, ya que $q_{ij} = q_{ji}$ por definición, y los factores con u_{ij} y h_{ij} aparecen cuadráticamente, lo que hace que no les afecta el cambio de orden en los índices al ir sumando. Por esta razón no aparece el factor multiplicativo $1/2$ en (7.1).

Para $p \in C_{1j} \cap C_{1k} \cap \partial \Omega_i$, se tiene

$$-q_{1j}(p) - q_{1k}(p) = -\frac{h_{k1} + h_{kj} + h_{j1} + h_{jk}}{\sqrt{3}}(p) = -\frac{h_{k1} + h_{j1}}{\sqrt{3}}(p) \geq 0,$$

ya que R_1 es la región de mayor presión. En consecuencia, la segunda sumatoria resulta negativa, por lo que (7.1) es estrictamente negativa.

b) Si Ω_i es una componente interior, entonces $Q(u_i, u_i)$ se calcula igual que antes, sin que aparezca en este caso la última sumatoria (que corresponde a vértices de ∂D). Así, se obtendrá que $Q(u_i, u_i) \leq 0$. Ahora no se tiene asegurada la desigualdad estricta; de hecho, es fácil comprobar que se dará la igualdad si y sólo si cada lado de $\partial \Omega_i$ es un segmento, equivalentemente $h_{1j} = 0$, para cada $C_{1j} \subset \partial \Omega_i$. Veamos, sin embargo, que en este caso, como Ω_i es componente no-hexagonal, sí se tiene que $Q(u_i, u_i) < 0$:

Aplicando el Teorema de Gauss-Bonnet [40, § 4-5, p. 269] a la componente interior Ω_i , se tiene que

$$(7.2) \quad \sum_{\substack{j \in I(1) \\ C_{1j} \subset \partial \Omega_i}} l_{1j} h_{1j} = \frac{(6 - m) \pi}{3},$$

donde l_{1j} , h_{1j} son la longitud y la curvatura geodésica (respecto del normal que apunta al interior de Ω_i) de cada lado de $\partial \Omega_i$, y m el número total de lados. En el caso de que todas las curvaturas h_{1j} sean cero, necesariamente $m = 6$. Y recíprocamente, si $m = 6$, como las curvaturas son siempre mayores o iguales que cero (al ser Ω_i componente de la región de mayor presión), se tendrá finalmente que éstas son todas cero. En resumen, $h_{1j} = 0$ para todos los lados de una componente interior si y sólo si $m = 6$ (para tres regiones, es fácil ver que en este caso todas las presiones serán iguales que coincidir).

Como consecuencia de lo anterior, se tiene que sólo las 6-componentes (interiores) satisfacen $Q(u_i, u_i) = 0$.

Ahora vamos a justificar la existencia de números reales no nulos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que la función

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, \quad \text{en } \bigcup_{i=1, \dots, n} \partial \Omega_i,$$

extendida por cero al resto de la configuración, sea la componente normal de un campo X asociado a una variación que preserva áreas hasta primer orden. Como una tal función satisface trivialmente la condición (6.7) en los vértices interiores, a la vista del Lema 6.2.5, basta imponer que se preserven las áreas de las regiones R_1, \dots, R_{n-1} hasta primer orden

(cumpliéndose eso, también se tendrá que el área de R_n se conserva). En virtud de (6.4), eso es equivalente a que

$$\begin{aligned} \left. \frac{dA_j}{dt} \right|_{t=0} &= - \sum_{k \in I(j)} \int_{C_{jk}} \langle X, N_{jk} \rangle = - \sum_{i=1, \dots, n} \int_{C_{j1} \cap \partial \Omega_i} \langle X, N_{j1} \rangle \\ &= \sum_{i=1, \dots, n} \int_{C_{j1} \cap \partial \Omega_i} \lambda_i u_i = \sum_{i=1, \dots, n} \lambda_i L(C_{j1} \cap \partial \Omega_i) = 0, \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, n - 1$. Nos surge así un sistema lineal homogéneo a resolver, con $n - 1$ ecuaciones y n incógnitas $\{\lambda_i\}_{i=1, \dots, n}$. Tal sistema resulta siempre compatible indeterminado, por lo que tanto existirán soluciones $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ no nulas.

Así, la variación asociada a $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ preservará áreas, y además

$$Q(u, u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 Q(u_i, u_i) < 0,$$

al ser Ω_i componente no hexagonal, $i = 1 \dots, n$. Esto contradice el hecho de que C sea estable, y por tanto, R_1 presentará, a lo sumo, $n - 1$ componentes no hexagonales. \square

Nota 7.3.2. Argumentos análogos a los de la demostración anterior permiten demostrar que en una configuración estable dividiendo D en n regiones, no puede haber ninguna región con n componentes no-hexagonales *convexas*, con alguna de ellas estrictamente convexa, entendiendo por convexidad el hecho de que todas las curvaturas geodésicas de los lados que bordean la componente sean mayores o iguales que cero, respecto del normal apuntado hacia el interior de dicha componente.

El Lema 7.3.1 nos permite clasificar los candidatos minimizantes, cuando se consideran divisiones del disco en tres regiones.

Lema 7.3.3. *Sea $C \subset D$ una configuración minimizante dividiendo D en tres regiones de áreas dadas. Entonces C es una de las configuraciones de la Figura 7.4.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que todas las presiones son iguales. En tal caso, todos los lados son segmentos. Si hubiera una componente interior, el mismo razonamiento del Lema 7.3.1 nos dice que tiene que ser un hexágono. Es fácil ver entonces que los lados que parten de los vértices del hexágono, tienen que llegar a ∂D (en caso contrario, existirían dos rectas paralelas que intersecan a ∂D de manera ortogonal, lo que no es posible). Esto implica que C ha de coincidir con la configuración de la Figura 7.3, y entonces las regiones R_2 y R_3 (que en este caso, también son las regiones de mayor presión) tendrán tres componentes, lo que da inestabilidad aplicando el Lema 7.3.1.

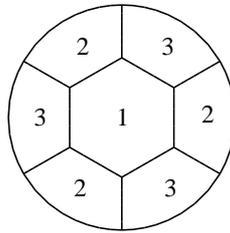


FIGURA 7.3. Una configuración con una componente hexagonal interior

Si no hubiera componentes interiores (y las presiones fueran iguales), entonces C tiene que corresponderse con la configuración estándar **(10)**, ya que solamente habrá un vértice interior (si hubiera dos o más, cada uno determinaría una 3-componente que toca ∂D cuyos lados son segmentos, y en consecuencia, el disco tendría más de un centro).

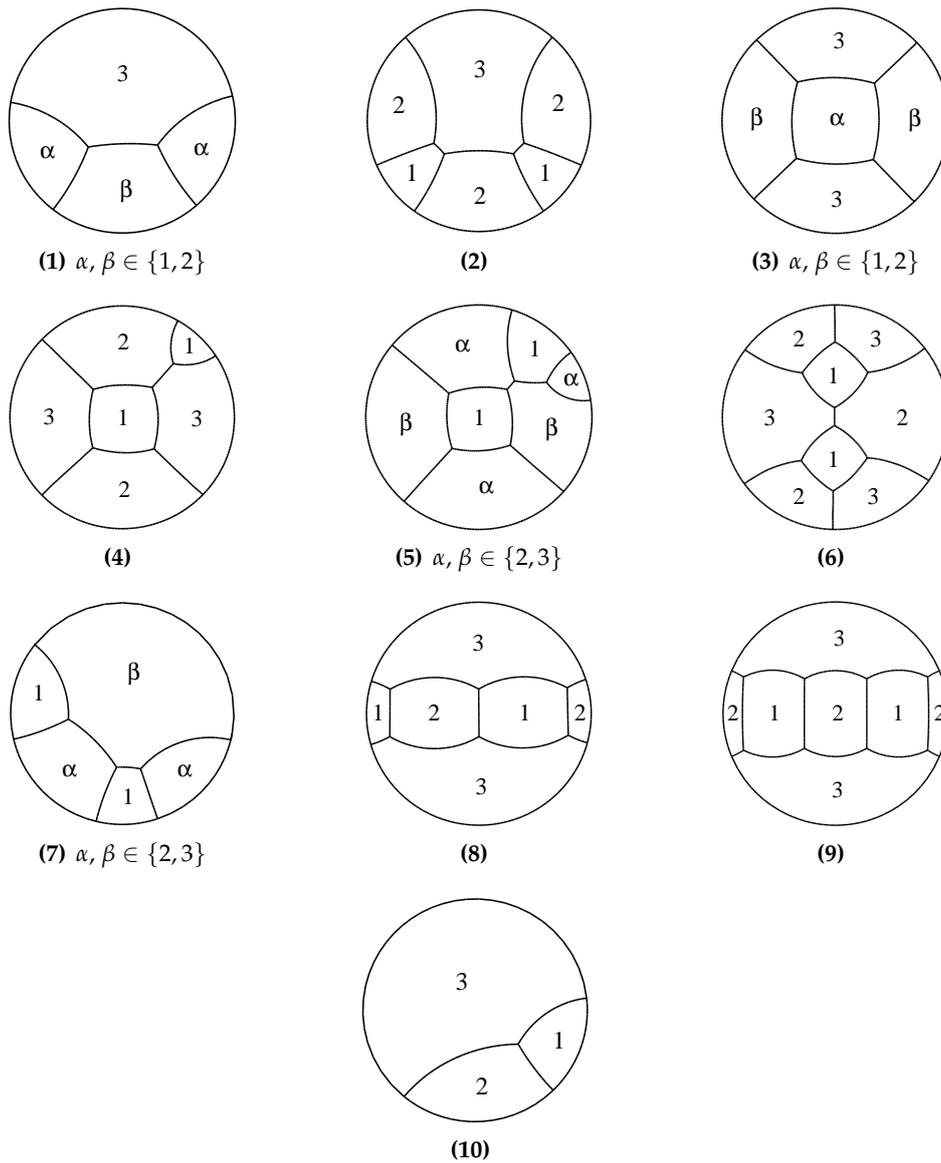


FIGURA 7.4. Las diez posibilidades para una configuración minimizante

Supongamos ahora que $p_1 \geq p_2 \geq p_3$, con $p_1 > p_3$ (esto es, las presiones no son todas iguales). Entonces ninguna componente de R_1 estará totalmente bordeada por segmentos, y por lo tanto, no será hexagonal. En consecuencia, R_1 tendrá a lo sumo dos componentes, aplicando el Lema 7.3.1.

Si Ω es una componente interior de R_1 , aplicando el Teorema de Gauss-Bonnet (7.2) (teniendo en cuenta que todas las curvaturas son mayores o iguales que cero, y alguna estrictamente positiva por la suposición sobre las presiones) se llega a que $\partial\Omega$ consta, a lo más, de cinco lados. Como en total tenemos tres regiones, dicho número de lados debe ser necesariamente par. Por el Lema 7.2.4, Ω no puede ser una 2-componente, por lo que concluimos que Ω será una 4-componente.

Por otro lado, si Ω es una componente de R_1 que toca ∂D , a partir del Teorema de Gauss-Bonnet se tendrá que

$$(7.3) \quad l(\partial\Omega \cap \partial D) + \sum_{\substack{i \in I(1) \\ C_{1i} \in \partial\Omega}} l_{1i} h_{1i} = \frac{(5-m)\pi}{3},$$

donde m es el número de lados de Ω (incluyendo la curva contenida en ∂D), y l_{1i} , h_{1i} son la longitud, y la curvatura geodésica de dichos lados, respecto del normal apuntando hacia Ω . Como antes, $h_{1i} \geq 0$, para todo i , por lo que Ω será una 3-componente o una 4-componente.

Un detalle que se ha de tener en cuenta en la siguiente discusión es que, dado un vértice interior de nuestra configuración, necesariamente será un vértice donde las tres regiones R_1 , R_2 y R_3 se encuentran.

Supongamos que R_1 es conexa, esto es, consta de una única componente. Si R_1 toca ∂D y tiene tres lados, entonces tenemos la configuración estándar **(10)** (el lado que parte del vértice interior de R_1 y no está contenido en ∂R_1 debe llegar a ∂D . En caso contrario, tendríamos un segundo vértice interior y R_1 no podría ser conexa). Si por el contrario, R_1 está bordeada por cuatro lados, un razonamiento análogo, unido a la Nota 7.3.4 posterior, nos lleva a que C se corresponde con la configuración **(1)**. Finalmente, si R_1 es interior, entonces tendrá cuatro lados. Como antes, los lados que salen de los vértices de R_1 llegarán a ∂D , por lo que nos aparece la configuración **(3)**.

Supongamos ahora que R_1 tiene dos componentes conexas, A y B . Dichas componentes pueden ser interiores, o tocar a ∂D . Analicemos cada situación.

a) Ambas componentes tocan a ∂D , y por tanto estarán bordeadas por tres o cuatro lados.

i) Supongamos que A y B tienen tres lados cada una. Entonces los únicos vértices interiores de la configuración son los correspondientes a estas componentes. Si ambos vértices se unen mediante un lado, obtenemos la configuración **(1)**. En otro caso, los lados que parten de dichos vértices y no pertenecen a ∂R_1 , intersecarán a ∂D , obteniéndose una configuración disconexa, que no será minimizante por el Lema 7.2.2.

ii) Supongamos ahora que una de las componentes, por ejemplo A , tiene cuatro lados, y que B tiene tres lados. El lado que sale del vértice interior de B no contenido en ∂B no puede llegar a ∂D , ya que entonces la configuración sería disconexa. Por tanto, dicho lado ha de llegar a uno de los vértices interiores de A , y entonces tendremos la configuración **(7)**.

iii) Si tanto A como B tienen cuatro lados, como los únicos vértices interiores son los de tales componentes, teniendo en cuenta que no pueden aparecer 2-componentes y que la configuración ha de ser conexa, se obtendrán las configuraciones **(2)** (teniendo en cuenta la Nota 7.3.4) y **(3)**. En este último caso, la 4-componente interior resultante no puede ser de la región R_3 , región de menor presión, ya que aplicando el Teorema de Gauss-Bonnet (7.2) se llegaría a contradicción (en este caso, las curvaturas serían todas menores o iguales que cero, con alguna estrictamente negativa).

b) A es una componente tocando ∂D y B es una componente interior; entonces A tendrá tres o cuatro lados, y B tendrá cuatro.

i) Supongamos primero que A tiene tres lados. Necesariamente el vértice interior de A se unirá mediante un lado a la componente B . Como no pueden aparecer más vértices interiores, se llega a la configuración **(4)**.

ii) Supongamos ahora que A tiene cuatro lados. Como C ha de ser conexo y no puede haber ninguna 2-componente, en este caso las posibilidades son, o bien que un vértice interior de A se una con uno de B , o bien que los dos vértices interiores de A se unan con dos de B . De ahí surgen las configuraciones (5) y (8) (obsérvese, como antes, que la 4-componente interior no puede pertenecer a R_3).

c) Tanto A como B son componentes interiores, y en consecuencia, ambas tendrán cuatro lados. Además, los únicos vértices interiores serán los de las componentes. Si éstas no se unen por medio de ningún lado, C resultará disconexa, y por tanto no minimizante.

Si las componentes se unen por un único lado, entonces nos aparece la configuración (6).

Si se unen a través de dos lados, C se corresponde con la configuración (9) (con la componente interior de cuatro lados perteneciendo a R_2 y no a R_3).

Si se unen tres veces, se puede comprobar que habrá una 4-componente interior de R_3 , región de menor presión, dando lugar, como antes, a contradicción con (7.2).

Finalmente, si cada vértice de A se une con uno de B , la configuración no tocará al borde del disco, y entonces desplazándola hasta que haya un contacto con ∂D , crearemos un vértice irregular y el grafo tampoco será minimizante. \square

Nota 7.3.4. Nótese que no pueden existir simultáneamente dos 3-componentes de R_3 tocando a ∂D , ya que entonces el origen (que es el centro del disco) estaría contenido en dos componentes disjuntas (esto se debe a que las intersecciones de los lados con ∂D serán ortogonales, y las curvaturas de tales lados serán menores o iguales que cero).

7.4. Configuraciones inestables y no-minimizantes

En esta Sección obtendremos las herramientas que nos permitirán descartar las configuraciones que, aunque aparecen descritas en la Figura 7.4, no son solución a nuestro problema. Así, proporcionaremos algunos resultados que probarán la inestabilidad de algunas configuraciones, y otros que nos servirán para justificar el carácter no minimizante de ciertas posibilidades (aunque sean estables).

El objetivo de los primeros resultados que mostramos a continuación es obtener un primer criterio de inestabilidad, aplicable a las configuraciones que determinen una región con dos 3-componentes tocando ∂D (Proposición 7.4.10). Este criterio se basa en la existencia de ciertas variaciones que preservan, en todo instante, las propiedades geométricas de las configuraciones estacionarias (Proposición 7.4.8), e involucra el uso de transformaciones de Möbius. Además, deduciremos como consecuencia importante la unicidad de la configuración estándar para tres regiones (Proposición 7.4.4 y Teorema 7.4.5).

Lema 7.4.1. *Sea $C_{12} \subset D$ un arco circular o segmento que corta ortogonalmente a ∂D , separando dos regiones R'_1 y R'_2 con presiones asociadas p_1 y p_2 (la curvatura geodésica de C_{12} con respecto al normal apuntando a R'_1 será igual a $p_1 - p_2$).*

Entonces, para cualquier $v \in C_{12}$, existen únicas curvas C_{23}, C_{31} de curvatura geodésica constante que dan lugar a una configuración estándar (10). Además, la presión p_3 correspondiente a la tercera región R_3 es una función monótona en v , tomando todos los valores entre $-\infty$ y $+\infty$, y todas las regiones R_3^v están anidadas.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $v \in C_{12}$. Sea $q \in C_{12} \cap \partial D$. Consideremos la transformación de Möbius $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{i(z+q)}{q-z}.$$

Recordemos que las transformaciones de Möbius son aplicaciones conformes (preservan los ángulos entre curvas) y que mantienen invariante el conjunto de curvas de curvatura constante.

Como ∂D es una curva de curvatura constante, y f lleva el punto $q \in \partial D$ al infinito, se sigue que $f(\partial D)$ es una recta (curva de curvatura constante cero que *pasa* por infinito), que podemos asumir que es el eje real. Consecuentemente, f transforma el interior del disco en el semiplano superior. Por la misma razón, $f(C_{12})$ será una recta L que corta ortogonalmente a $f(\partial D)$.

Supongamos que existen curvas C_{23}, C_{31} de curvatura geodésica constante, encontrándose en el punto v de forma que $C_{12} \cup C_{23} \cup C_{31}$ es una configuración estándar. Veamos primero su unicidad:

Como f es una aplicación conforme, la suma de las curvaturas geodésicas de $f(C_{ij})$ es cero. Además, $f(C_{23}), f(C_{31})$ intersecarán ortogonalmente el eje real. En consecuencia, $f(C_{23}), f(C_{31})$ serán arcos circulares centrados en el eje real, con el mismo radio por la condición (6.2) (nótese que la curvatura de $f(C_{12})$ es cero). Entonces $f(C_{23}), f(C_{31})$ son únicos y por tanto, C_{23} y C_{31} también lo son, una vez fijado v . Es claro que las regiones determinadas por $f(C_{23})$ y $f(C_{31})$ resultan anidadas, cuando vamos variando el punto v a lo largo de C_{12} , lo que implica que R_3^v también lo serán.

Por otro lado, a partir de $f(v) \in L$, es posible construir dos arcos de circunferencia centrados en el eje real, que pasen por $f(v)$ y que formen ángulos de 120 grados con $f(C_{12})$. Aplicando la inversa de la función f , se obtienen curvas que formarán una configuración estándar en el disco, de donde también deducimos la existencia.

Hallemos ahora la curvatura de las curvas C_{23}, C_{31} , en función del punto v , a partir de la situación en el semiplano, tras aplicar la transformación f . Sea $d > 0$ la distancia del punto $f(v)$ al eje real, y sea x el punto de intersección de la recta L y el eje real. Denotemos por z_0 al centro del arco $f(C_{31})$, y por r a su radio. Centrándonos en el triángulo de vértices $x, z_0, f(v)$, es fácil ver que

$$z_0 = x + \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad r = \frac{2d}{\sqrt{3}}.$$

Análogamente, el centro z'_0 y el radio de $f(C_{23})$ serán

$$z'_0 = x - \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad r = \frac{2d}{\sqrt{3}}.$$

Aplicando la inversa de f y el Lema 7.4.3 posterior, se pueden calcular las curvaturas geodésicas h_{31}, h_{32} de las curvas C_{31}, C_{32} , obteniéndose

$$(7.4) \quad h_{31} = \frac{1}{4} \left(-\sqrt{3}d - 2x + \frac{\sqrt{3}(1+x^2)}{d} \right),$$

$$(7.5) \quad h_{32} = \frac{1}{4} \left(-\sqrt{3}d + 2x + \frac{\sqrt{3}(1+x^2)}{d} \right).$$

Entonces $p_3 = p_1 + h_{31}$ decrece desde $+\infty$ a $-\infty$, cuando d va desde 0 a $+\infty$, por la monotonía de h_{31} . \square

Nota 7.4.2. En la anterior construcción, resaltamos que las presiones p_1, p_2 se mantienen constantes, ya que el arco C_{12} no varía.

Demostramos ahora el siguiente Lema técnico, del que hacíamos uso anteriormente, y que nos indica cómo cambia la curvatura de una circunferencia al aplicar una transformación de Möbius.

Lema 7.4.3. Sea C una circunferencia de centro z_0 y radio $r > 0$, y consideremos una transformación de Möbius $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Entonces, la curvatura geodésica de $f(C)$ viene dada por

$$\left| \frac{|c|^2 r^2 - |cz_0 + d|^2}{r|bc - ad|} \right|.$$

DEMOSTRACIÓN. Es fácil comprobar que f puede escribirse como composición de traslaciones, homotecias e inversiones (identificando \mathbb{R}^2 con \mathbb{C}); de hecho, se tiene que $f = s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$, con

$$s_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad s_2(z) = \frac{1}{z}, \quad s_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2} z, \quad s_4(z) = z + \frac{a}{c}.$$

Al aplicar una traslación a la circunferencia C , obtendremos una nueva circunferencia, que tendrá como centro al trasladado del anterior, con el mismo radio.

Es trivial comprobar que, si aplicamos una homotecia de razón λ , la circunferencia $C(z_0, r)$ pasará a ser $C(\lambda z_0, |\lambda| r)$.

Para una inversión s , trabajando con la ecuación general de una circunferencia se puede ver que el centro w_0 y el radio r_0 de $s(C)$ vendrán dados por

$$w_0 = -\frac{\bar{z}_0}{r^2 - |z_0|^2}, \quad r_0 = \frac{r}{|r^2 - |z_0|^2|}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} s_1(C(z_0, r)) &= C\left(z_0 + \frac{d}{c}, r\right), \\ (s_2 \circ s_1)(C(z_0, r)) &= s_2\left(C\left(z_0 + \frac{d}{c}, r\right)\right) \\ &= C\left(-\frac{\overline{z_0 + d/c}}{r^2 - |z_0 + d/c|^2}, \frac{r}{|r^2 - |z_0 + d/c|^2|}\right). \end{aligned}$$

Análogamente, $(s_3 \circ s_2 \circ s_1)(C(z_0, r))$ vendrá dada por

$$C\left(-\frac{bc - ad}{c^2} \frac{\overline{z_0 + d/c}}{r^2 - |z_0 + d/c|^2}, \frac{|bc - ad|}{|c|^2} \frac{r}{|r^2 - |z_0 + d/c|^2|}\right).$$

Finalmente, como s_4 es una traslación, se concluye que $(s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1)(C(z_0, r)) = f(C(z_0, r))$ será una circunferencia de radio

$$\frac{|bc - ad|}{|c|^2} \frac{r}{|r^2 - |z_0 + d/c|^2|},$$

y por tanto, la curvatura geodésica de $f(C)$ será

$$\left| \frac{|c|^2 r^2 - |cz_0 + d|^2}{r|bc - ad|} \right|.$$

□

Una primera consecuencia importante que se deriva del Lema 7.4.1 es la unicidad de la configuración estándar del disco D para tres regiones, con respecto a las presiones, y también con respecto a las áreas encerradas.

Proposición 7.4.4. *Dadas tres presiones cualesquiera, existe una configuración estándar dividiendo D en tres regiones con las presiones dadas. Tal configuración resulta única, salvo movimientos rígidos del disco.*

DEMOSTRACIÓN. Sean p_1, p_2, p_3 las presiones dadas. Es claro que existe un arco circular o un segmento C_{12} , de curvatura geodésica $p_1 - p_2$, dividiendo D en dos regiones y intersecando ortogonalmente ∂D (fíjese un punto de ∂D , considérese la recta tangente al borde y tómesese adecuado centro para que el arco correspondiente tenga el radio dado, esto es, $|p_1 - p_2|^{-1}$, si $|p_1 - p_2| \neq 0$. Si $p_1 = p_2$, entonces bastará tomar un diámetro). Aplicando el Lema 7.4.1, se puede encontrar un vértice $v \in C_{12}$ y únicas curvas C_{23} y C_{31} tales que $C_{12} \cup C_{23} \cup C_{31}$ es una configuración estándar dividiendo D en tres regiones, justamente con presiones p_1, p_2 y p_3 (nótese que al ir variando el punto v , p_3 se moverá desde $-\infty$ hasta $+\infty$). La unicidad se deduce de la propia construcción y del Lema 7.4.1. \square

Teorema 7.4.5. *Dados tres números reales positivos a_1, a_2, a_3 con $a_1 + a_2 + a_3 = \text{área}(D)$, existe una única configuración estándar, salvo movimientos rígidos del disco, dividiendo D en tres regiones de áreas a_i .*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos dos configuraciones estándar

$$\begin{aligned} C &= C_{12} \cup C_{23} \cup C_{31}, \\ C' &= C'_{12} \cup C'_{23} \cup C'_{31}, \end{aligned}$$

dividiendo al disco en regiones de área a_i , con área $(R_i) = \text{área}(R'_i) = a_i, i = 1, 2, 3$.

En caso de que $h_{12} = h'_{12}$, se puede aplicar adecuada rotación para conseguir que los vértices de los lados C_{12}, C'_{12} que tocan ∂D coincidan, y además, que dichos lados también coincidan, en un entorno de los vértices. Aplicando ahora el Lema 7.4.1 al lado C_{12} , se concluye que los vértices interiores de C y C' han de coincidir, ya que ambas configuraciones dividen al disco en regiones de igual área (téngase en cuenta que moviendo el vértice interior de C_{12} , las correspondientes regiones resultan anidadas). Por tanto, $C = C'$,

Supongamos ahora que $h_{12} > h'_{12}$. Aplicando el Lema 7.4.1 sobre el lado C_{23} de la configuración C , encontraremos una variación de C para la que la presión p_1 de la región R_1 disminuye de forma continua, sin que cambien las presiones p_2 y p_3 . Por ello existirá un instante en la deformación en el que la correspondiente configuración C'' satisfará que $h''_{12} = h'_{12}$ (la curvatura geodésica viene dada por la diferencia de presiones, y la presión de R_1 va decreciendo continuamente). Además, como $p_1 > p'_1$, se sigue que $\text{área}(R''_1) > a_1$ (ya que R''_1 estará contenida estrictamente en R_1 , según el Lema 7.4.1) y, en consecuencia, $\text{área}(R''_i) < a_i$, para $i = 2, 3$, ya que las configuraciones son tipo estándar.

Apliquemos ahora adecuada isometría del disco para que los lados C'_{12} y C''_{12} coincidan en un entorno del vértice no interior de C_{12} (nótese que dichos lados tienen idénticas curvaturas geodésicas y por lo tanto, es posible considerar tal isometría). Como

$$\text{área}(R''_1) > a_1 = \text{área}(R'_1),$$

una nueva aplicación del Lema 7.4.1 sobre el lado C'_{12} implica que

$$\text{área}(R''_2) > \text{área}(R'_2) = a_2,$$

lo que nos lleva a contradicción (antes vimos que $\text{área}(R''_2) < a_2$). Por tanto, C y C' han de coincidir. \square

El siguiente resultado resultará fundamental para la demostración de la posterior Proposición 7.4.8.

Proposición 7.4.6. *Consideremos tres arcos circulares o segmentos C_1, C_2, C_3 contenidos en un disco D , que se encuentran en un vértice interior, formando ángulos de 120 grados y satisfaciendo la condición (6.2). Si C_1 y C_2 intersecan ∂D ortogonalmente, entonces C_3 también lo hace.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Ω la componente bordeada por C_1, C_2 y ∂D , y fijemos $p \in \partial D - \partial\Omega$. Consideremos una transformación de Möbius f que lleve el interior del disco en el semiplano superior, y el punto p a infinito. Con esto se tendrá que la imagen mediante f de ∂D es una recta, que podemos pensar que coincide con el eje real. Pretendemos ver ahora que la prolongación de $f(C_3)$ interseca ortogonalmente al eje real. Visto eso, aplicando la inversa de f se tendrá lo enunciado.

Por las hipótesis es claro que $f(C_1)$ y $f(C_2)$ son curvas de curvatura constante, que se encuentran formando 120 grados, y que cortan ortogonalmente al eje real. Además, como f es una aplicación conforme, la condición (6.2) se preservará.

En caso de que $f(C_3)$ sea una recta, su curvatura geodésica será nula, y entonces, en virtud de (6.2), $f(C_1), f(C_2)$ tendrán la misma curvatura. Como dichas curvas se cortan formando ángulos de 120 grados, se concluye que (la prolongación de) $f(C_3)$ es una recta totalmente vertical, que corta al eje real ortogonalmente.

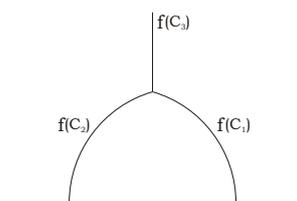


FIGURA 7.5. Si $f(C_3)$ es una recta, cortará ortogonalmente al eje real

En caso de que $f(C_3)$ sea un arco circular, entonces las prolongaciones de $f(C_1), f(C_2), f(C_3)$ darán lugar a una pompa doble plana estándar (véase [96, Lemma 5.1]), por lo que los centros de los tres arcos estarán alineados (más concretamente, la mediatriz del segmento que une los dos vértices de la pompa doble plana contendrá a los centros de los tres arcos, al ser una cuerda común a las tres circunferencias). Como los centros de $f(C_1)$ y $f(C_2)$ se encuentran en el eje real (ya que lo cortan ortogonalmente), se sigue que el centro de $f(C_3)$ también lo estará. Así, concluimos que $f(C_3)$ también interseca al eje real de manera ortogonal.

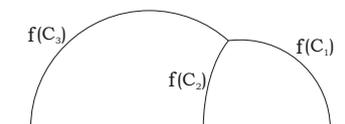


FIGURA 7.6. Si $f(C_3)$ es un arco circular, será ortogonal al eje real

□

Nota 7.4.7. Remarquemos que, en la anterior demostración, cuando $f(C_3)$ es una recta, es fundamental que se cumpla (6.2), para que coincidan las curvaturas de las otras dos curvas y en consecuencia, $f(C_3)$ sea una recta *vertical*.

El siguiente resultado justifica la existencia de variaciones preservando las propiedades geométricas de las configuraciones estacionarias, descritas en la Proposición 6.2.6, para configuraciones estacionarias con una 3-componente tocando el borde del disco.

Proposición 7.4.8. *Dada una configuración estacionaria C con una 3-componente Ω que toca ∂D , existe una variación de C por configuraciones estacionarias tal que*

- i) *la presión de Ω crece estrictamente, manteniéndose constante en el resto de componentes,*
- ii) *el área de Ω decrece estrictamente, y*
- iii) *deja invariante los lados de C que no pertenecen a $\partial\Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea v el vértice interior de Ω , y ℓ el lado de C que parte de v y no pertenece a $\partial\Omega$. La prolongación de ℓ cortará ortogonalmente a ∂D , por la Proposición 7.4.6, en un punto p no contenido en $\partial\Omega$. La variación del enunciado surge al ir moviendo v a lo largo de ℓ , hacia el interior de Ω , y aplicar el Lema 7.4.1. Como nos vamos alejando del punto p , se tendrá que la presión de la 3-componente irá en aumento, y el área encerrada irá decreciendo, sin que cambien las presiones del resto de componentes de la configuración. Además, los únicos lados que se modifican son los de $\partial\Omega$. \square

Nota 7.4.9. Las configuraciones que se van obteniendo en la variación descrita en la Proposición 7.4.8 no cumplen, en general, la condición i) de la Proposición 6.2.6; es decir, las curvaturas geodésicas de *todas* las componentes de una curva C_{ij} , si bien seguirán siendo constantes, no tomarán el *mismo valor* constante. Esto se debe a que al cambiar la curvatura de los lados que forman $\partial\Omega$, los nuevos valores no coincidirán con las curvaturas de otros lados separando las mismas regiones (que no son modificados). Así, no serán configuraciones estacionarias en el sentido estricto, aunque siguen satisfaciendo las condiciones de regularidad referidas a los ángulos, y la condición (6.2), en cada uno de sus vértices. Por la misma razón, si Ω es una componente de una región R , su presión Ω no coincidirá con la presión de las otras componentes que formen R , a medida que vamos deformando Ω .

De hecho, si obviamos las regiones y nos centramos en las *componentes* que induce la configuración inicial, sí se tienen grafos estacionarios en cada instante. Como nosotros usaremos la Proposición 7.4.8 para obtener la inestabilidad de ciertas configuraciones, considerando las componentes que determinan, nuestros razonamientos y conclusiones no se verán afectados por estos detalles.

Proposición 7.4.10. *Sea C una configuración estacionaria con una región R que tiene, al menos, dos 3-componentes que tocan a ∂D . Entonces C es inestable.*

DEMOSTRACIÓN. Sean Ω_1, Ω_2 dos 3-componentes de R que tocan a ∂D . Veamos en primer lugar que Ω_1 y Ω_2 son congruentes, esto es, coinciden tras adecuado giro centrado en el origen. Por la Proposición 7.4.6, a partir de cada 3-componente Ω_i podemos considerar una configuración estándar, sin más que prolongar el lado de C que interseca a $\partial\Omega_i$. Por la unicidad obtenida de la Proposición 7.4.4, se sigue que ambas configuraciones estándar son la misma, salvo cierta rotación, y por tanto, Ω_1 y Ω_2 han de coincidir.

Por otro lado, se puede aplicar la Proposición 7.4.8, obteniendo una variación independiente en cada componente Ω_i . Las componentes normales u_i de los campos asociados a cada variación tienen soportes disjuntos (cada variación deforma *solamente* la componente Ω_i), y satisfacen la condición (6.7) en cada vértice (al preservarse los ángulos en cada instante). Además, como la presión crece y el área encerrada disminuye en cada componente, se sigue que

$$\frac{dp_i}{dt} \frac{dA_i}{dt} < 0, \quad i = 1, 2,$$

donde p_i, A_i indican la presión y el área encerrada por cada componente Ω_i , y la derivada se toma a lo largo de la variación.

La idea es construir ahora una variación global de C que preserve el área de cada región. Como Ω_1 y Ω_2 son congruentes, cada variación anterior deforma a la 3-componente en la misma medida, de manera que $u = u_1 - u_2$ verificará la condición (6.4), y también (6.7), y por tanto la variación asociada a u preservará el área. Además, se tiene por construcción que tal variación global será por configuraciones estacionarias (ya que las originales lo son, y tienen soportes disjuntos). A partir de (6.18), se tendrá que

$$Q(u, u) = Q(u_1, u_1) + Q(u_2, u_2) = \sum_{i=1}^2 \frac{dp_i}{dt} \frac{dA_i}{dt} < 0,$$

con lo que se concluye que C es inestable, según (6.22). \square

Dada una configuración C y una función de Jacobi u definida sobre C (introducidas en la Sección 6.3), se dice que $x \in C$ es un *punto nodal* si $u(x) = 0$. Un *dominio nodal* para la función u es una componente conexa del complementario en C del conjunto de puntos nodales. El siguiente resultado muestra la inestabilidad de las configuraciones estacionarias que tienen *muchos* dominios nodales.

Proposición 7.4.11. ([60, Proposition 5.2]) *Sea C una configuración estacionaria separando el disco en tres regiones. Supongamos que u es una función de Jacobi con, al menos, cuatro dominios nodales, de forma que ningún punto nodal es un vértice de C . Entonces C es inestable.*

DEMOSTRACIÓN. Sean M_1, \dots, M_4 cuatro dominios nodales para la función u . Supongamos que C es estable. Para $i = 1, \dots, 4$ definimos u_i como la restricción de u a M_i , extendiendo por cero al resto de la configuración. Aplicando [60, Lemma 3.7], se tendrá que cada función u_i es derivable (nótese que estamos extendiendo por cero y $u_i|_{\partial M_i} = 0$), y además, como u es función de Jacobi y por tanto, admisible, u_i será una función admisible, con $Q(u_i, u_i) = 0$.

Es posible encontrar una combinación lineal no trivial v de u_1, u_2, u_3 ,

$$v = \sum_{i=1}^3 \lambda_i u_i$$

de forma que se cumpla la condición de media nula (6.4) para las regiones R_1, R_2 y R_3 . En efecto, basta asegurarse de que

$$\int_{\partial R_1} v = 0, \quad \int_{\partial R_2} v = 0,$$

para que la variación asociada a v (obsérvese que v satisface (6.7), porque las funciones u_i son admisibles con soporte disjunto, y se podrá aplicar el Lema 6.2.5) preserve las áreas de las regiones R_1, R_2 , y en consecuencia, también la de R_3 . Pero

$$\begin{aligned} \int_{\partial R_1} v &= \lambda_1 \int_{\partial R_1} u_1 + \lambda_2 \int_{\partial R_1} u_2 + \lambda_3 \int_{\partial R_1} u_3, \\ \int_{\partial R_2} v &= \lambda_1 \int_{\partial R_2} u_1 + \lambda_2 \int_{\partial R_2} u_2 + \lambda_3 \int_{\partial R_2} u_3, \end{aligned}$$

de donde surge un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, que será compatible indeterminado. Sea $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ una terna trivial que sea solución a dicho sistema, y sea entonces $v = \sum_{i=1}^3 \lambda_i u_i$.

Claramente v es función admisible, $Q(v, v) = 0$ y la variación asociada preserva áreas. Como C es estable, a partir de [60, Lemma 3.6] podemos afirmar que, en cada lado C_{jk} de

C , v es diferenciable y $v'' + h_{jk} v$ es constante. Pero dicha constante será justamente cero, ya que u_i verifica la condición de Jacobi (6.20) en cada lado, al ser u función de Jacobi. Así,

$$v'' + h_{jk} v = 0, \quad \text{en todo lado } C_{jk}.$$

Sea ahora x un punto nodal tal que $x \in \partial M_4 \cap M_3$ (si es necesario, reordenamos los subíndices para que eso sea posible), y llamemos ℓ el lado que lo contiene. Como $u_i|_{M_4} = 0$ para $i = 1, 2, 3$, se sigue que v y v' se anulan en M_4 . Sea $q \in \ell \cap M_4$ próximo a x . Como $v(q) = v'(q) = 0$ y v verifica una ecuación diferencial de segundo orden en ℓ , entonces $v = 0$ en ℓ . Pero si tomamos $q' \in \ell \cap M_3$,

$$v(q') = \lambda_3 u_3(q') \neq 0,$$

ya que q' no es un punto nodal, y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda_3 \neq 0$. Esto nos lleva a contradicción, y prueba el resultado. \square

Nota 7.4.12. La misma demostración anterior se puede adaptar para afirmar que una configuración estacionaria dividiendo al disco en n regiones, que posea una función de Jacobi con $n + 1$ dominios nodales, es inestable.

Nos ocupamos ahora de otra característica topológica que puede presentar una configuración: la *cocircularidad* entre lados. Este concepto ya aparece en [96, Remark 5.32], donde se analiza en detalle la estructura de las configuraciones con dicha propiedad.

Definición 10. Dados dos lados no rectos de una configuración C , diremos que son *cocirculares* si tienen el mismo centro y el mismo radio de curvatura. Una componente se dice *cocircular* si es una 4-componente con dos lados cocirculares opuestos.

Nota 7.4.13. Dada una 4-componente interior, no puede ocurrir que los dos pares de lados opuestos sean cocirculares; en caso de que eso ocurriese, se tendría que los cuatro vértices de la componente pertenecen a dos circunferencias distintas, cosa que es imposible (tres puntos determinan unívocamente una circunferencia).

El siguiente resultado nos va a permitir describir la estructura de las distintas componentes de una configuración estacionaria, y se usará de manera esencial más adelante, en repetidas ocasiones.

Lema 7.4.14. ([96, Lemma 5.3]) Sean e, f, g tres lados consecutivos de una componente, y sean v_1, v_2 los correspondientes vértices. Supongamos que e y g tienen la misma curvatura geodésica, y que los ángulos en cada vértice son los mismos. Sea R la mediatriz del segmento que une v_1 y v_2 .

Entonces los lados e y g son simétricos respecto de R . Además, si e y g son cocirculares, el centro común se halla en R , y si e y g no son cocirculares, R coincide con la mediatriz que une los centros de dichos lados.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que la simetría respecto de R lleva el vértice v_1 a v_2 . Además, como R es la mediatriz del segmento $\overline{v_1 v_2}$ (que es una cuerda de f), se tiene que el vector tangente a f en v_1 es simétrico al vector tangente a f en v_2 . En consecuencia, como los ángulos en los vértices coinciden, se sigue que el vector normal al lado e en v_1 es simétrico al vector normal a g en v_2 , y entonces, los centros de los arcos e y g también son simétricos. Al tener la misma curvatura, y por tanto el mismo radio, se concluye que e y g son simétricos respecto de R .

Si además de tener centros simétricos, e y g son cocirculares, ambos arcos tendrán el mismo centro, que necesariamente se hallará en R (porque será un punto fijo de la simetría).

Si, por el contrario, e y g no son cocirculares, al tener centros simétricos, el punto medio del segmento que los une ha de reposar sobre R , con lo que R será la mediatriz de dicho segmento. \square

Lema 7.4.15. ([96, Lemma 5.38]) *Sea C una configuración estacionaria con una cadena de, al menos, tres 4-componentes cocirculares, de manera que la primera y la última son componentes tocando ∂D y el resto son componentes interiores (la cocircularidad se refiere a los lados de las componentes que tocan el borde del disco). Supongamos además que las componentes adyacentes a la cadena pertenecen a una misma región.*

Entonces existe una deformación continua que preserva perímetro y áreas, y que crea un vértice irregular. En consecuencia, C no puede ser minimizante.

DEMOSTRACIÓN. Indicaremos un breve esquema de la demostración, que puede seguirse en detalle en [96]. Llamemos Ω_i a las 4-componentes de la cadena, con Ω_1, Ω_n las componentes tocando el borde del disco y Ω_i adyacente a Ω_{i+1} . Sea c_i el centro de los lados cocirculares de Ω_i .

Aplicando el mismo argumento que aparece en [96, Lemma 5.36 y Lemma 5.37], es posible mover estos puntos, *manteniendo* las distancias $d(c_i, c_{i+1}), d(c_1, 0), d(c_n, 0)$ (para así preservar los ángulos en cada vértice de la configuración) de forma que c_1 y c_n se encuentren cada vez más próximos. Este movimiento de los centros, manteniendo además los radios de cada arco, provoca una deformación continua en C (por configuraciones estacionarias, ya que los ángulos no cambiarán), que acabará creando un vértice irregular.

Además, se tiene que dicha deformación preservará perímetro y áreas; esto es consecuencia de que, dadas dos circunferencias secantes, si movemos un centro c_i , colocamos el otro centro c_{i+1} a la misma distancia $d(c_i, c_{i+1})$ y no cambiamos los correspondientes radios, la cuerda determinada por los puntos de intersección de las nuevas circunferencias tendrá la misma longitud que la determinada por los originales. Así, el perímetro de los arcos de la nueva configuración, y las áreas encerradas, se mantendrán constantes (véanse expresiones explícitas de la longitud y área determinadas por un arco en [44], sólo dependientes de la cuerda asociada a dicho arco). Otra consecuencia de este hecho es que, en la deformación, los lados que conectan cada par de lados cocirculares de C son los originales, salvo un movimiento rígido. \square

Nota 7.4.16. En la anterior demostración, la cocircularidad existente es la que permite mover la poligonal formada por los centros c_1, \dots, c_n y el origen, manteniendo las distancias indicadas anteriormente. Sin esa cocircularidad, habría más centros de arcos a tener en cuenta, y no sería posible moverlos preservando las distancias ([96, Lemma 5.36 y Lemma 5.37]).

La idea intuitiva de la deformación es desplazar cada componente de la cadena sobre la adyacente como si se estuviese aplicando un giro (cada par de componentes adyacentes se pueden ver como dos circunferencias secantes), hasta que se produzca un contacto.

En esta última parte de la Sección mostraremos algunos resultados referentes a la partición del disco en *tres regiones* de áreas dadas. Más concretamente, nuestro interés se centrará en hallar un argumento que permita descartar la configuración (8) de la Figura 7.4, como minimizante (también aplicable a la configuración (9)). En primer lugar, la Nota 7.4.17 impedirá que la cocircularidad aparezca en este tipo de configuraciones, y finalmente, un argumento geométrico pondrá de manifiesto su carácter no minimizante.

Nota 7.4.17. ([96, Lemma 5.35]) Consideremos una configuración dividiendo al disco en tres regiones, que presenta una cadena de 4-componentes interiores. Supongamos que una de las 4-componentes, sea Ω_1 , es cocircular. Llamemos l_1 y l'_1 los lados con el mismo

centro, y sea e_1 uno de los lados que unen l_1 con l'_1 , de vértices v y v' . Sea también l_2 el tercer lado que sale del vértice v , y l'_2 el tercer lado que sale de v' (véase la Figura 7.7).

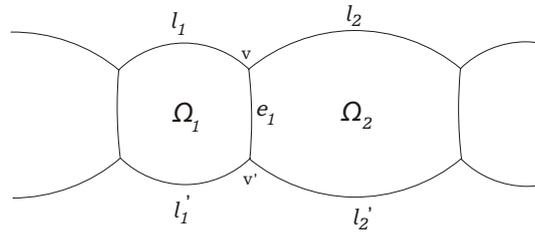


FIGURA 7.7. Cadena de 4-componentes interiores

Como se cumple la condición (6.2) referente a las curvaturas, al prolongar los lados l_1, e_1, l_2 (que se encuentran en v) se obtendrá una pompa doble plana B [96, Lemma 5.1]. Análogamente, prolongando los lados l'_1, e_1, l'_2 se obtendrá otra pompa doble plana B' . Como l_1 y l'_1 son cocirculares, tienen el mismo centro y el mismo radio, por lo que sus prolongaciones coincidirán (ambas son la misma, uniendo v y v'). Consecuentemente, $B = B'$. Eso ya nos dice que las prolongaciones de l_2 y l'_2 también coincidirán, y por tanto serán arcos cocirculares, con lo que Ω_2 , la componente adyacente a Ω_1 conteniendo a v y a v' , es también una 4-componente cocircular. Repitiendo el proceso, se concluye que todas las 4-componentes de la cadena son cocirculares.

Proposición 7.4.18. *La configuración (8) de la Figura 7.4 no es minimizante.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que esta configuración es minimizante. Denotemos por $\Omega_1 \subset R_1, \Omega_2 \subset R_2$ a las componentes interiores, y por $\Omega'_1 \subset R_1, \Omega'_2 \subset R_2$ a las componentes que tocan ∂D .

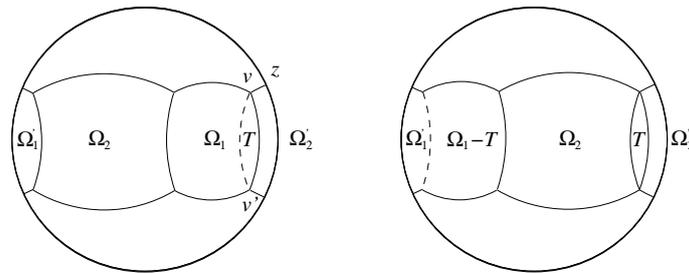


FIGURA 7.8. Deformación de una cadena de 4-componentes simétricas, obteniendo una configuración con vértices irregulares

Consideremos los lados l_a, l_b de $\partial\Omega_2$ que también pertenecen a ∂R_3 . Supongamos que son cocirculares. Entonces, por la Nota 7.4.17 se sigue que todas las 4-componentes de la cadena serán cocirculares, y aplicando el Lema 7.4.15, la configuración no será minimizante.

En consecuencia, los lados l_a y l_b no pueden ser cocirculares. Sea l_{12} el lado común a Ω_1 y Ω_2 . Aplicando el Lema 7.4.14 a l_a, l_{12} y l_b , se tiene que existe una simetría con respecto a la mediatriz del segmento que une los centros de l_a y l_b , que intercambia los lados l_a y l_b , y deja invariante l_{12} . Sea ahora l'_{12} el lado común a Ω'_1 y Ω_2 . De nuevo aplicando el Lema 7.4.14, a l_a, l'_{12} y l_b , resulta que tal simetría también deja invariante l'_{12} , y por tanto es una simetría horizontal para la componente Ω_2 (para poder afirmar

que no aparecen dos ejes de simetría distintos, uno en cada aplicación del Lema 7.4.14, es fundamental que l_a y l_b no sean cocirculares, ya que tales ejes vienen determinados por la mediatriz del segmento que une los centros de tales lados; si fuesen cocirculares, la mediatriz no estaría unívocamente definida).

Repitiendo el proceso en cada componente, se concluye que existe una simetría horizontal global para la cadena de 4-componentes (obsérvese que gracias a la Nota 7.4.17, ninguna de esas 4-componentes presentará cocircularidad en sus lados superior e inferior). El eje de dicha simetría coincidirá con la mediatriz a la cuerda que determinan los vértices de $\partial\Omega'_2 \cap \partial D$, por lo que cortará ortogonalmente a ∂D . Así, lo que realmente se tiene es una *simetría horizontal global* para toda la configuración.

Usando el mismo Lema 7.4.14, se puede comprobar que Ω_2 y Ω_1 presentan simetrías verticales (se tienen las correspondientes no-cocircularidades entre l_{12} y l'_{12} , y entre l_{12} y $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega'_2$ en virtud de [96, Lemma 5.34]).

Recurramos ahora a las presiones p_i de las regiones R_i , $i = 1, 2, 3$. Si $p_1 = p_2$, usando las simetrías obtenidas previamente, se sigue que Ω_1 y Ω_2 son congruentes, esto es, son componentes idénticas y por tanto encierran igual área. Entonces, intercambiando dichas componentes y eliminando lados innecesarios (lados que separan componentes de la misma región), obtendremos una configuración con estrictamente menos perímetro y encerrando las mismas áreas, lo que contradice el carácter minimizante de la configuración original.

Si $p_2 = p_3$, aplicándole a Ω_2 la igualdad (7.2), obtenida a partir del Teorema de Gauss-Bonnet, se llega a contradicción (ya que $h_{21} < 0$ y $h_{23} = 0$).

Así, podemos suponer que $p_1 > p_2 > p_3$. Sea z el vértice superior de $\partial\Omega'_2 \cap \partial D$ (véase la Figura 7.8), y θ el ángulo entre el segmento $\overline{0z}$ y una línea recta horizontal (paralela al eje de simetría horizontal de la configuración). Distingamos dos casos:

Supongamos que θ es mayor o igual que $\pi/4$, y veamos que en este caso, la configuración tiene *demasiada* longitud para ser minimizante. Como $\theta \geq \pi/4$, la segunda coordenada de z será mayor o igual que $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$. Entonces, viendo $\partial\Omega'_2 - \partial D$ como un grafo vertical, se tiene que la longitud de $\partial\Omega'_2 - \partial D$ será mayor o igual que $\sqrt{2}$. Usando un argumento similar, y teniendo en cuenta que el punto de $\partial\Omega_2$ de máxima altura está por encima de z , tendremos que la longitud de $\partial\Omega_2$ será mayor o igual que $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Sumando ambas estimaciones, se tiene que el perímetro de la configuración es mayor que tres, y no puede ser minimizante, aplicando el Lema 7.2.1.

Supongamos ahora que θ es menor que $\pi/4$. Sea l el lado común a $\partial\Omega_1$ y $\partial\Omega'_2$, y sean v, v' sus vértices. Denotemos por \tilde{l} a la curva simétrica a l con respecto al segmento $\overline{vv'}$, y llamemos T a la porción de Ω_1 encerrada por l y \tilde{l} . Es posible trasladar Ω_2 hasta que toque a T , y por otro lado, se puede reflejar $\Omega_1 - T$ respecto de un eje vertical y trasladarla horizontalmente, hasta que la reflexión de \tilde{l} coincida con l_{12} (todos estos movimientos se pueden hacer porque los correspondientes lados tienen la misma curvatura, y la misma longitud por las simetrías verticales existentes). Tras eliminar un lado innecesario, la nueva configuración resultante, con idénticos perímetro y áreas encerradas que la original, presenta un vértice irregular, y por tanto, ninguna de ellas podrá ser minimizante.

El único detalle que falta para completar este argumento es comprobar que dicha nueva configuración permanece contenida en el disco D . Para probar esto, es suficiente mostrar que la porción de la configuración original por encima de la línea recta horizontal L que pasa por z no se sale del disco, con los distintos desplazamientos.

Sea ℓ_a la parte de l_a que queda por encima de la línea L , y sea l_z el lado de $\partial\Omega'_2$ que contiene a z . Como l_a y l_z tienen la misma curvatura h_{23} , y por la simetría existente en Ω_1 parten de vértices (v y el simétrico vertical de v) situados a la misma altura, y formando el mismo ángulo (por la regularidad en los vértices), se sigue que formarán ángulos idénticos con la recta L . Así, ℓ_a formará un ángulo θ con L . Si trasladamos ℓ_a horizontalmente hasta que toque a z , como estamos suponiendo que $\theta < \pi/4$, se tiene que el ángulo formado por el trasladado de ℓ_a con $\overline{0z}$ (que es un radio) es igual a $2\theta < \pi/2$, por lo que dicho trasladado se quedará dentro de D . Eso ya nos dice que los movimientos aplicados a Ω_2 en la construcción anterior mantienen a tal componente dentro del disco. Por otro lado, como el ángulo que forma el lado $\partial\Omega_1 \cap \partial R_3$ que toca a v , con la línea horizontal que pasa por v , es menor que el formado por l_a (se comprueba fácilmente estudiando los vectores tangentes en el vértice v , teniendo en cuenta que $p_1 > p_2$ y por tanto, el lado que separa Ω_1 y Ω_2 se curva hacia Ω_2), la componente Ω_1 se halla a menor altura que Ω_2 , por lo que los desplazamientos anteriores también la mantendrán dentro del disco, tal y como se deseaba. \square

7.5. Partición isoperimétrica para tres regiones

En esta Sección demostraremos que la partición isoperimétrica de un disco en tres regiones de áreas dadas es justamente la configuración estándar de la Figura 7.2, apoyándonos en los resultados que previamente hemos obtenido.

Teorema 7.5.1. *Sea $C \subset D$ una configuración minimizante, dividiendo al disco en tres regiones de áreas dadas. Entonces C es una configuración estándar (10), única salvo movimientos rígidos del disco.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos por el Teorema 6.1.1 que existe una tal configuración minimizante C . Además, por el Lema 7.3.3, se tiene que C debe ser una de las configuraciones de la Figura 7.4.

Las configuraciones (1) y (2) son inestables, por la Proposición 7.4.10.

La configuración (3) es también inestable: es fácil ver que los lados correspondientes a C_{12} no son cocirculares [96, Lemma 5.34]. Entonces, por la Nota 7.4.17, ningún par de lados opuestos de las componentes de ∂R_3 serán cocirculares, por lo que podemos aplicar repetidamente el Lema 7.4.14, para afirmar que C presenta una simetría vertical. Por otra parte, los lados correspondientes a C_{13} no pueden ser cocirculares si C es minimizante (si lo fuesen, usando la Nota 7.4.17 y el Lema 7.4.15 llegaríamos a contradicción). Entonces, de nuevo el Lema 7.4.14 nos da la existencia de una simetría horizontal en nuestra configuración. Ambos ejes de simetría se encontrarán en el origen (ya que son diámetros del disco), y además lo harán ortogonalmente (ya que coinciden si se componen en órdenes distintos). Así, la componente normal u del campo de Killing asociado al grupo uniparamétrico de rotaciones alrededor del origen, es una función de Jacobi en C , que se anula en cuatro puntos (uno en el interior de cada lado de la 4-componente central). De esta forma, u tiene como mínimo cuatro dominios nodales, y por la Proposición 7.4.11, se concluye que C es inestable.

Descartemos ahora las configuraciones (4) y (5). Ambas presentan una 4-componente interior de R_1 , de la que parten tres lados que tocan ∂D . Si se prolonga el cuarto lado que parte de tal componente, tal prolongación cortará a ∂D ortogonalmente, por la Proposición 7.4.6 (para la configuración (5) se ha de aplicar dos veces, primero para la 3-componente exterior de R_α , y después para la 4-componente de R_1 que toca el borde), obteniendo entonces una configuración de tipo (3). Aplicando los argumentos anteriores, la

4-componente interior presentará dos simetrías ortogonales encontrándose en el origen, y como antes, se tendrá inestabilidad debido a la existencia de cuatro dominios nodales.

Consideremos ahora la configuración (6). Fijemos una de las 4-componentes interiores de R_1 , y llamémosla Ω . La prolongación del lado que sale de Ω y no llega a ∂D cortará ortogonalmente la frontera del disco, debido a la existencia de una simetría en Ω (aplíquese Lema 7.4.14), que en realidad es una simetría para el disco. Así, se obtiene una configuración de tipo (3). Como antes, Ω presentará dos simetrías ortogonales, cuyos ejes de simetría se intersecan en el origen (esto nos diría que el origen pertenece a la componente Ω), lo que nos permite encontrar cuatro dominios nodales y concluir inestabilidad por la Proposición 7.4.11. Nótese además, que si aplicamos el mismo razonamiento a la otra 4-componente de R_1 , llegaremos a que el origen pertenece a dos componentes distintas, lo que indica que geoméricamente, esta configuración nunca puede darse verificando las condiciones de regularidad.

Sea ahora la configuración (7). Aplicando el Lema 7.4.14, las dos 4-componentes serán simétricas respecto de dos ejes r_1, r_2 que pasan por el centro del disco (obsérvese que los correspondientes lados no son cocirculares). Para fijar ideas, sea r_1 el eje de simetría en la 4-componente de R_1 . Denotemos por q_1, q_2 a los puntos de intersección de cada eje con los lados interiores de las 4-componentes, que por las simetrías existentes serán ceros de la función de Jacobi u inducida por el grupo de rotaciones alrededor del origen (la intersección de los ejes con los lados es ortogonal). Por cómo es la simetría de eje r_2 , es fácil ver que la reflexión con respecto a dicho eje lleva el punto q_1 sobre un punto de la frontera de la 3-componente de R_1 , que no es un vértice de la configuración. Este nuevo punto es otro cero de la función de Jacobi u , que entonces presentará cuatro dominios nodales. En virtud de la Proposición 7.4.11, se sigue que la configuración es inestable.

La configuración (8) no es minimizante, aplicando directamente la Proposición 7.4.18.

Veamos finalmente que la configuración (9) es inestable. Si los lados superiores e inferiores de cada componente fueran cocirculares, entonces el Lema 7.4.15 nos diría que la configuración no es minimizante. Así, dichos lados no pueden ser cocirculares, por lo que es fácil obtener una simetría horizontal para la configuración (que es también una simetría del disco), a partir del Lema 7.4.14. Además, aplicando el mismo Lema se sigue que cada 4-componente interior tiene una simetría vertical, de donde se deduce que las componentes interiores de R_1 son idénticas. Gracias a este hecho, podemos considerar la función que vale 1 en una de estas componentes, -1 en la otra componente y cero en el resto de la configuración, de forma que la variación asociada a u preservará las áreas de cada región, esto es, se verifican las ecuaciones (6.4). Es inmediato comprobar que la forma índice (6.21), evaluada en esta función constante a trozos, es igual a

$$(7.6) \quad - \sum_{j \in \{2,3\}} \left\{ \int_{C_{1j}} h_{1j}^2 + \sum_{\substack{p \in \partial C_{1j} \\ p \in \text{int}(D)}} -q_{1j}(p) \right\} \\ = - \sum_{j \in \{2,3\}} \left\{ \int_{C_{1j}} h_{1j}^2 + \sum_{p \in V} \left(-q_{12}(p) - q_{13}(p) \right) \right\},$$

donde V representa el conjunto de vértices interiores de la configuración. Como

$$-q_{12}(p) - q_{13}(p) = -\frac{h_{31} + h_{21}}{\sqrt{3}} > 0,$$

concluimos que (7.6) es negativa, con lo que se tiene la inestabilidad de la configuración. Se podría usar también un argumento análogo al de la Proposición 7.4.18, para ver que esta configuración (8) no es minimizante.

Así, la única posibilidad que nos queda es la configuración **(10)**, la configuración estándar. La unicidad, para áreas fijas, se obtiene a partir del Teorema 7.4.5. \square

7.6. Consideraciones finales

Los Teoremas 7.1.1 y 7.5.1 muestran las particiones isoperimétricas de un disco en dos y tres regiones de áreas fijas, obteniéndose en ambos casos que dichas regiones son conexas. Obviamente, se puede seguir estudiando este problema para un número superior de regiones.

Sin embargo, resultaría más interesante obtener *propiedades generales* que satisfagan las particiones isoperimétricas. En esta dirección, y a la vista de los resultados conseguidos, y de lo que ocurre en otros problemas de naturaleza similar, resulta natural enunciar la siguiente Conjetura.

Conjetura 7.1. Una partición isoperimétrica, que divida al disco en n regiones de áreas dadas, tendrá todas sus regiones conexas.

La Conjetura 7.1 resulta muy interesante (no sólo para este problema, sino en contextos isoperimétricos más generales), a la vez que compleja de demostrar. De hecho, en muchos estudios de problemas similares se impone tal condición como hipótesis inicial, como por ejemplo en [36], [39], [57] y en todos los trabajos que tratan estas cuestiones desde un punto de vista físico.

Por otro lado, es posible abordar el problema general para n regiones de la misma forma que hemos resuelto el caso $n = 3$; el Lema 7.3.1 nos da una cota sobre el número de componentes conexas no-hexagonales de la región de mayor presión. Concretamente, la configuración minimizante tendrá, a lo sumo, $n - 1$ componentes no-hexagonales. Mediante argumentos combinatorios se podría obtener la lista de posibles candidatos a ser solución, para cada valor de n .

La dificultad ahora reside en que el número de candidatos aumenta notablemente al considerar un número mayor de regiones. No obstante, muchos de los resultados de este Capítulo permitirán descartar algunas de las posibilidades que se presenten. En el caso de que la Conjetura 7.1 fuera cierta, este problema resultaría más tratable, al reducirse el número de posibles candidatos.

Ahora mostraremos las configuraciones que pensamos que resuelven este problema, para determinado número de regiones.

Conjetura 7.2. La configuración minimizante que divide el disco en cuatro regiones de áreas prefijadas viene dada por la configuración **(1)** de la Figura 7.9.

Conjetura 7.3. La configuración minimizante que divide el disco en cinco regiones de áreas prefijadas viene dada por la configuración **(2)** de la Figura 7.9.

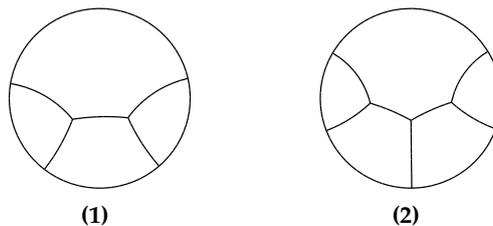


FIGURA 7.9. Particiones isoperimétricas conjeturadas para $n = 4$ y $n = 5$

Para cada caso anterior, pensamos que hay otra posible configuración estable: para $n = 4$, la configuración en la que tres regiones tocan el borde del disco, bordeando una región interior de tres lados; y para $n = 5$, la configuración con cuatro regiones tocando el borde del disco, y bordeando una región interior de cuatro lados. Pero ciertas estimaciones, realizadas con el programa computacional Surface Evolver [20] para áreas iguales, sugieren que no son minimizantes.

El siguiente resultado demuestra que, al considerar el problema para cuatro regiones *conexas* en el disco, para valores del área (a_1, a_2, a_3, a_4) próximos a $(\pi/4, \pi/4, \pi/4, \pi/4)$, la solución viene dada por la configuración **(1)** de la Figura 7.9 (lo que refuerza, en parte, la Conjetura 7.2).

Lema 7.6.1. *La configuración **(1)** de la Figura 7.9 tiene menos perímetro que la configuración dada por una región interior de tres lados, rodeada por tres regiones exteriores de cuatro lados, cuando se consideran regiones de igual área $\pi/4$.*

*En consecuencia, la partición isoperimétrica del disco en cuatro regiones conexas, de áreas (a_1, a_2, a_3, a_4) próximas a $(\pi/4, \pi/4, \pi/4, \pi/4)$, es la configuración **(1)** de la Figura 7.9.*

DEMOSTRACIÓN. Debido a la hipótesis de *conexión*, es fácil ver que las únicas configuraciones a tener en cuenta son las que aparecen en el enunciado del Lema. Veamos que la configuración con una región interior bordeada por tres regiones exteriores, todas de área $\pi/4$, tiene perímetro mayor que 4, por lo que no puede ser minimizante, en virtud del Lema 7.2.1.

Es natural pensar para áreas iguales, dicha configuración se obtiene a partir de tres radios (formando ángulos de 120 grados), y que la región interior surge del vértice interior, de forma que la configuración resulta ser 3-rotacionalmente simétrica.

En estas condiciones, la región interior ha de corresponder necesariamente a R_1 ; en caso contrario, como las presiones de las tres regiones exteriores coinciden (al estar separadas por radios) y entonces, tales regiones son las de mayor presión (justamente la de R_1), se sigue que la región interior tendrá presión menor o igual que el resto, y por tanto, se corresponderá con R_4 . Pero entonces, aplicando el Teorema de Gauss-Bonnet (7.2) llegamos inmediatamente a contradicción. Así, R_1 es la región interior, lo que implica que tal región es *convexa*.

Es inmediato ver que el perímetro de ∂R_1 , en virtud de la desigualdad isoperimétrica clásica, será mayor o igual que π . Por ello, si vemos que cada uno de los lados que parten de ∂R_1 y llegan a ∂D tiene longitud mayor o igual que 0,3, el perímetro de la configuración será mayor que cuatro, y por tanto no será minimizante, según el Lema 7.2.1.

Sea l_e uno de esos lados, y supongamos que su longitud es menor que 0,3. Bajo esta suposición, vamos a hacer una estimación del área encerrada por la región interior, obteniendo un valor estrictamente mayor que $\pi/4$, lo que resultará contradictorio. Si consideramos el triángulo equilátero inscrito en ∂R_1 , determinado por los vértices interiores, dicha área se puede descomponer en el área encerrada por el triángulo, y el área de las tres porciones p_i restantes.

Se tiene, tras realizar los cálculos, que el área del triángulo equilátero inscrito es igual a

$$a_T = 3 \frac{\sqrt{3}}{4} x^2,$$

donde x es la longitud del segmento que une un vértice con el baricentro del triángulo (que coincide con el centro del disco, por la simetría existente). Por otro lado, el área encerrada por una porción p_i se puede calcular explícitamente (por ejemplo, véase [44,

Prop 2.1]), obteniéndose

$$a_{p_i} = \frac{x^2}{4} (2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Así, el área de la región interior será igual a

$$a_T + 3a_{p_e} = 3 \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + 3 \frac{x^2}{4} (2\pi - 3\sqrt{3}) \geq 1,03 > \frac{\pi}{4},$$

donde se ha usado que $x \geq 0,7$, ya que la longitud de l_e es menor que 0,3. Por tanto, se tiene que tal estimación es contradictoria, con lo que necesariamente la longitud de l_e ha de ser mayor o igual que 0,3. Entonces el perímetro de la configuración será mayor o igual que $\pi + 3(0,3) > 4$, lo que nos permite concluir que no puede ser minimizante.

Por tanto, la partición isoperimétrica del disco en cuatro regiones conexas de áreas iguales es la configuración (1) de la Figura 7.9. Por la continuidad del perfil isoperimétrico, se sigue que para áreas suficientemente próximas a $(\pi/4, \pi/4, \pi/4, \pi/4)$, la configuración minimizante será del mismo tipo. \square

En el caso de dividir el disco en seis regiones, establecemos la siguiente Conjetura.

Conjetura 7.4. La configuración minimizante que divide el disco en seis regiones de áreas prefijadas viene dada por la configuración de la Figura 7.10.

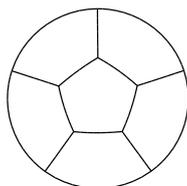


FIGURA 7.10. Partición isoperimétrica conjeturada para $n = 6$

Como antes, pensamos que las configuraciones de la Figura 7.11 son estables, pero nuevamente estimaciones hechas con el programa Surface Evolver, considerando áreas iguales, nos indican que no son minimizantes.

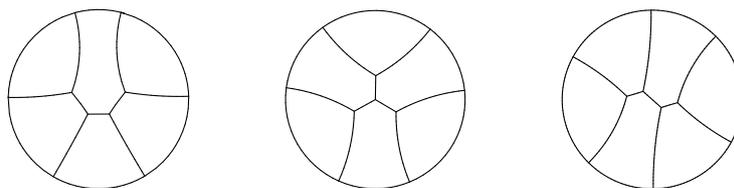


FIGURA 7.11. Otras configuraciones, posiblemente estables, para $n = 6$

El Problema de la Pompa Plana Múltiple

En este Capítulo nos centraremos en el plano Euclídeo \mathbb{R}^2 , y trataremos el problema isoperimétrico consistente en encontrar la configuración de curvas planas que determina n regiones de áreas prefijadas, con la menor longitud total posible. Gracias al Teorema 6.1.1, podemos afirmar que existe una solución a este problema, para cualquier número de regiones que se considere. Nos referiremos a dicha solución como *configuración minimizante*. Además, en virtud de la Proposición 6.2.6, se tiene que cualquier configuración minimizante será un grafo plano cuyos lados tienen curvatura geodésica constante, que se encuentran de tres en tres formando ángulos de 120 grados, y verifican la condición (6.2).

Esta cuestión ha sido estudiada en espacios euclídeos de dimensión mayor. De hecho, en el caso tridimensional, este problema modela el comportamiento que siguen las *pompas de jabón*, lo que ha hecho que se encuentren en la literatura bastantes trabajos relacionados con esa temática, debido, en cierto modo, al interés físico que suscita (véanse [72, § 13], [91]). Por esta razón, en este Capítulo denominaremos *pompa plana* a cualquier configuración de curvas que determine n regiones en el plano de áreas dadas (como usualmente ocurre al tratar este tipo de problemas).

En este caso, al igual que en el Capítulo 7, la principal dificultad vuelve a residir en el hecho de que, en una configuración minimizante C , las correspondientes regiones pueden ser disconexas. Además, la región *exterior* de C , esto es, el conjunto complementario en \mathbb{R}^2 de la unión de todas las regiones y que denotaremos por R_0 , también puede presentar varias componentes conexas acotadas. A dichas componentes conexas acotadas de R_0 las llamaremos *cámaras vacías*.

Sin embargo, es razonable creer que las soluciones tendrán una composición más simple, y que presentarán todas sus regiones conexas (tal y como ocurre cuando consideramos el problema para un único valor del área). Por otra parte, resulta intuitivo pensar que si contraemos las cámaras vacías de una pompa plana hasta que desaparezcan, el perímetro total decrecerá. Por tanto, la siguiente Conjetura, que aparece en todos los trabajos relacionados con este problema y que es análoga a la Conjetura 7.1 anterior, debe ser cierta.

Conjetura 8.1. Una configuración minimizante para áreas a_1, \dots, a_n tiene todas sus regiones conexas, y la región exterior también es conexa.

En el caso de dos y tres regiones, este problema ya ha sido resuelto: J. Foisy y otros [44], y W. Wichiramala [96] demostraron, respectivamente, que la pompa doble estándar y la pompa triple estándar (véase la Figura 8.1) son las configuraciones minimizantes, y ambas satisfacen la Conjetura 8.1.

En nuestro estudio, todavía inacabado, presentamos algunas ideas y resultados que pueden ayudar a la comprensión y resolución generales de este problema. Nuestro principal logro es la caracterización del conjunto de pompas planas estacionarias en términos de *figuras recíprocas*. Estos objetos geométricos (introducidos por J. C. Maxwell [66], [67]) consisten, básicamente, en una serie de puntos en el plano (tantos como el número de

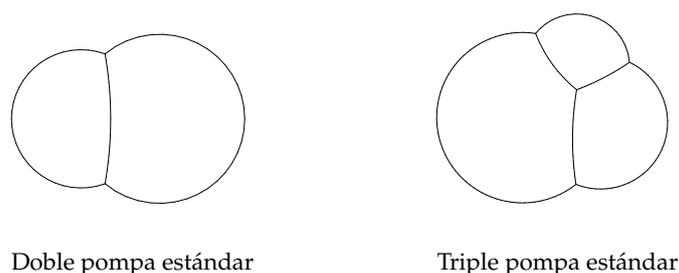


FIGURA 8.1. Las configuraciones minimizantes para $n = 2$ y $n = 3$

componentes que tenga la pompa), definidos en relación a los centros de los lados de la pompa.

A partir de dicha caracterización, nuestro objetivo es encontrar variaciones de una configuración estacionaria, mediante variaciones de los puntos de su figura recíproca asociada. Dichas variaciones permitirán, por ejemplo, discutir el carácter estable de la configuración inicial.

En este esquema, basado en ciertas ideas que aparecen en [77], jugarán un papel importante las presiones introducidas en la Subsección 6.2.4, ya que también formarán parte de las figuras recíprocas asociadas a pompas planas estacionarias.

Previamente a exponer nuestros resultados, mostramos algunos resultados generales para pompas planas minimizantes, obtenidos en otros trabajos.

8.1. Algunos resultados sobre pompas planas minimizantes

Este problema ha sido tratado en diversos trabajos en los últimos años, lo que ha permitido obtener muchas propiedades que han de satisfacer las configuraciones minimizantes. En esta Sección recordaremos principalmente los más generales, algunos de ellos análogos a los que aparecen en la Sección 7.2.

Una primera consecuencia inmediata que se extrae del Teorema 6.1.1 es la conexión de las configuraciones minimizantes.

Lema 8.1.1. *Toda configuración minimizante, vista como un grafo plano, es conexa.*

DEMOSTRACIÓN. En caso de que una configuración minimizante sea desconexa, podemos desplazar una de sus componentes hasta que toque de manera tangencial a otra componente. Dicho movimiento creará una nueva configuración que seguirá siendo minimizante, ya que encerrará las mismas áreas y tendrá el mismo perímetro. Pero dicha nueva configuración es irregular, porque presenta un vértice donde confluyen *cuatro* lados, lo que contradice el Teorema 6.1.1. \square

Al igual que en el Capítulo 7, denominaremos m -componente de una región a una componente conexa de bordeada por m lados. El siguiente Lema indica que las pompas planas minimizantes no pueden presentar ninguna 2-componente.

Lema 8.1.2. ([39, Lemma 3.1]) *Una configuración minimizante no puede presentar ninguna 2-componente.*

DEMOSTRACIÓN. Dado un vértice donde se encuentren tres lados formando ángulos de 120 grados, se puede comprobar que se obtiene una pompa doble plana estándar

al prolongar dichos lados [96, Lemma 5.1]. A partir de dicha propiedad se deduce que los lados adyacentes a cualquier 2-componente pertenecen a un mismo círculo. Por tanto, podemos aplicar una rotación que *deslice* la 2-componente hasta obtener un contacto irregular, llegando así a contradicción. \square

Lema 8.1.3. ([13, Lemma 6], [96, Prop. 2.21]) *En una configuración minimizante, dos componentes distintas no pueden tener dos lados en común.*

DEMOSTRACIÓN. Comentamos brevemente la idea de la demostración, omitiendo los detalles técnicos. Supongamos que e_1, e_2 son lados comunes a dos componentes distintas en una configuración minimizante. Un argumento basado en la técnica de *cortar y pegar*, permite construir una nueva configuración, de igual perímetro y encerrando las mismas áreas (es fundamental que e_1 y e_2 sean lados comunes a ambas componentes para que se preserven las áreas). Esencialmente, dicho argumento produce una reflexión en las componentes que conectan los lados e_1 y e_2 , pero provoca que uno de los nuevos lados sea irregular. \square

El siguiente resultado, referente a configuraciones estacionarias, se utilizará más adelante.

Lema 8.1.4. ([36, Lemma 4.1], [13, Th. 1]) *Sea C una pompa plana estacionaria, y sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada que corta tangencialmente a los lados de C , evitando los vértices de C . Entonces, las curvaturas geodésicas de los curvas de C que son intersecados por Γ suman cero.*

Remitimos al lector a los trabajos de Bleicher [13] y Devereaux [39], donde se muestran otras propiedades generales que verifican las configuraciones estacionarias y minimizantes, y también al de Wichiramala [96], donde se estudia detalladamente la estructura que tienen las m -componentes, y las simetrías que éstas presentan.

Nota 8.1.5. El número de lados y de vértices de una configuración, que sea conexa vista como grafo plano, que presente regiones conexas y que no tenga cámaras vacías, se puede determinar a partir de la característica de Euler [40, § 4-5]. Por la conexión, podemos considerar la configuración topológicamente como un disco plano, por lo que

$$1 = n - e + v,$$

donde n es el número de caras (que son las regiones de nuestra configuración), e el número de lados y v el número de vértices. Como se tiene que cada lado da lugar a dos vértices diferentes, y de cada vértice salen tres lados distintos, se cumple la relación

$$3v = 2e,$$

de donde deducimos que

$$(8.1) \quad e = 3(n - 1), \quad v = 2(n - 1).$$

Si permitimos que la configuración tenga regiones disconexas y cámaras vacías, se puede obtener de la misma manera el número de lados y vértices, considerando como caras a las componentes de las regiones y las cámaras vacías.

8.2. Resultados principales

Tal y como se ha comentado antes, nuestro principal resultado es la caracterización de las configuraciones planas estacionarias, a partir de ciertos objetos de carácter geométrico, que son intrínsecos a las configuraciones: las figuras recíprocas asociadas. Estas figuras recíprocas van a venir dadas por las presiones de las componentes (determinadas, en esencia, por las curvaturas geodésicas de los lados), y por una serie de puntos en el plano, relacionados con los centros de los lados.

En esta Sección veremos cómo asignar a cada pompa plana estacionaria una figura recíproca particular, que denominaremos *figura recíproca estándar*, y cómo *recuperar* la pompa a partir de ella. Además, estudiaremos bajo qué condiciones una figura recíproca arbitraria constituye la figura recíproca estándar de una configuración estacionaria.

De esta forma, la anterior caracterización nos permitirá *olvidarnos* de las pompas estacionarias, para centrarnos en las figuras recíprocas estándar asociadas. Bajo este enfoque, nuestro objetivo será encontrar *variaciones* de una figura recíproca estándar a partir de figuras recíprocas adecuadas, que den lugar a variaciones de la pompa plana original.

Los primeros resultados que pasamos a mostrar van encaminados a justificar que podemos restringirnos a configuraciones estacionarias cuyos lados sean de curvatura no nula. Las figuras recíprocas se definen, en general, sobre grafos planos cuyos vértices son de grado tres, y cuyos lados son arcos *circulares*. Por ello, necesitaremos asumir que en nuestras configuraciones, los lados no sean segmentos de recta.

En principio, esto supone una restricción importante en nuestro estudio; de hecho, las soluciones de nuestro problema al considerar dos y tres regiones *de igual área* presentan lados rectos. Sin embargo, un razonamiento que involucra a la proyección estereográfica va a permitirnos aproximar cualquier pompa plana estacionaria por medio de pompas estacionarias con lados no rectos, con lo que la anterior restricción no restará generalidad a nuestro trabajo.

Realizamos previamente la siguiente definición, que en cierto sentido generaliza el concepto de configuración estacionaria (o pompa estacionaria) a cualquier superficie riemanniana.

Definición 11. Sea M una superficie riemanniana sin borde. Llamaremos configuración regular (o pompa regular) a cualquier grafo en M formado por un número finito de vértices y lados verificando las siguientes propiedades:

- i) todos los lados tienen curvatura geodésica constante,
- ii) los lados se encuentran en los vértices, de tres en tres, formando ángulos de 120 grados, y
- iii) se satisface la condición (6.2), es decir, la suma ordenada de las curvaturas geodésicas de los tres lados que se encuentran en un vértice arbitrario es igual a cero.

La noción de pompa regular hace referencia a las configuraciones que satisfacen las propiedades de regularidad de las configuraciones estacionarias planas (Proposición 6.2.6). Así, es claro que toda pompa plana estacionaria es una pompa regular.

Proposición 8.2.1. *Consideremos la proyección estereográfica*

$$\pi : \mathbb{S}^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

con N el polo norte de la esfera euclídea tridimensional. Sea C una pompa plana estacionaria.

Entonces, $\pi^{-1}(C)$ es una pompa regular en $\mathbb{S}^2 - \{N\}$. Recíprocamente, dada C' una pompa regular contenida en $\mathbb{S}^2 - \{N\}$, se tiene que $\pi(C')$ es una pompa regular plana.

DEMOSTRACIÓN. Como la proyección estereográfica es un difeomorfismo conforme entre $\mathbb{S}^2 - \{N\}$ y \mathbb{R}^2 , la condición referente a que los vértices se encuentren formando ángulos de 120 grados se cumplirá para $\pi^{-1}(C)$ y $\pi(C')$. Además, tanto π como π^{-1} preservan el conjunto de curvas con curvatura geodésica constante. Por tanto, basta probar que dado un vértice de $\pi^{-1}(C)$, se satisface la condición (6.2) referente a la suma ordenada de las curvaturas geodésicas. Veamos esto último en ambiente general.

Sea (M, g) una superficie riemanniana, y sea $g' = e^{2u} g$ una métrica conforme, donde u es una función definida en M . Dada una curva arbitraria $\Gamma \subset M$, con T, N los campos tangente y normal unitarios con respecto a la métrica g , la curvatura geodésica k_g de Γ con respecto dicha métrica es

$$k_g = g(D_T T, N).$$

Por otro lado, denotando por T', N' los campos tangente y normal unitarios con respecto a la métrica g' , es fácil ver que

$$T' = e^{-u} T, \quad N' = e^{-u} N,$$

y entonces la curvatura geodésica $k_{g'}$ de Γ con respecto a g' es

$$k_{g'} = g'(D_{T'} T', N') = e^{-3u} g'(D_T T, N).$$

Para relacionar k_g y $k_{g'}$, hacemos uso de la siguiente propiedad de la conexión de Levi-Civita [41, Th. 3.6]: dada una métrica arbitraria h y tres campos vectoriales diferenciables X, Y, Z , denotando por D a la conexión de Levi-Civita asociada a h , se tiene que

$$2h(D_X Y, Z) = X(h(Y, Z)) + Y(h(X, Z)) - Z(h(X, Y)) + \\ h([X, Y], Z) - h([X, Z], Y) - h([Y, Z], X),$$

donde $[,]$ denota al corchete de Lie. Entonces,

$$2g'(D_{T'} T, N) = 2T(g'(T, N)) - N(g'(T, T)) + g'([T, T], N) - 2g'([T, N], T) \\ = -N(e^{2u} g(T, T)) - 2e^{2u} g([T, N], T) \\ = -N(e^{2u}) - 2e^{2u} g(D_T N, T) \\ = -N(e^{2u}) + 2e^{2u} g(D_T T, N).$$

Así,

$$k_{g'} = e^{-3u} \left(-\frac{1}{2} N(e^{2u}) + e^{2u} k_g \right),$$

y por tanto,

$$e^u k_{g'} = -\frac{1}{2} e^{-2u} N(e^{2u}) + k_g.$$

Finalmente, es fácil ver que $N(e^{2u}) = 2e^{2u} N(u)$, con lo que se concluye que

$$(8.2) \quad e^u k_{g'} = -N(u) + k_g.$$

A partir de la relación (8.2), se sigue de forma inmediata que fijado un vértice de $\pi^{-1}(C)$, las tres curvas que se encuentran en dicho vértice tienen suma de curvaturas geodésicas igual a cero, ya que la suma de los vectores normales también se anula (al ser π una aplicación conforme). Esto completa la demostración de la Proposición. \square

A partir de la Proposición 8.2.1 anterior también se deduce el siguiente Corolario.

Corolario 8.2.2. *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una pompa plana estacionaria, y sea $f : \bar{C} \rightarrow \bar{C}$ una transformación de Möbius tal que $f(C) \cap \{\infty\}$ es el conjunto vacío. Entonces $f(C) \subset \mathbb{R}^2$ es una pompa plana regular.*

El siguiente Corolario muestra que podemos aproximar cualquier pompa plana estacionaria por pompas regulares con lados de curvatura geodésica no nula. Este resultado va a permitir que nos restrinjamos a configuraciones *sin lados rectos*, ya que gracias a esta aproximación, lo que ocurra para tales configuraciones será extensible a cualquier configuración general.

Corolario 8.2.3. *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una pompa plana estacionaria arbitraria. Entonces existe una sucesión $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de pompas regulares sin lados rectos, que converge a C de forma diferenciable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea π la proyección estereográfica, y $C' = \pi^{-1}(C) \subset \mathbb{S}^2 - \{N\}$. La idea de la demostración se basa en hallar pompas regulares en \mathbb{S}^2 próximas a C' , de forma que sus lados no sean círculos que pasan por el polo norte. A partir de ahí, aplicando la proyección estereográfica y gracias a la Proposición 8.2.1, obtendremos una sucesión de pompas planas regulares que no presentan segmentos de recta (recuérdese que π aplica las rectas del plano en círculos de la esfera que pasan por N).

Consideremos el conjunto finito de todos los círculos en \mathbb{S}^2 que se obtienen al extender los lados de la pompa C' . Fijemos un entorno $U \subset \mathbb{S}^2$ de N . Nótese que, aunque ningún lado de C' pasa por N , las extensiones sí que podrían pasar por dicho punto. En cualquier caso, es posible elegir una sucesión $\{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de puntos en U que se aproxime a N , de forma que los puntos N_i no pertenezcan a ninguna de las extensiones de los lados. Además, dicha sucesión puede tomarse contenida en el complementario de la unión de las regiones determinadas por C' (es decir, en el *exterior* de C'). Fijemos un punto N_i , y rotemos la esfera hasta que N_i se convierta en el polo norte. Con esta rotación, C' tendrá lados (y extensiones) que no pasan por el nuevo polo norte N_i , así que su proyección C_i sobre el plano no presentará lados con curvatura nula. De esta forma surge una sucesión $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que tiende a C (ya que N_i tiende a N) de forma diferenciable. \square

Nota 8.2.4. En la anterior demostración, los puntos N_i han de tomarse necesariamente en el exterior de C' , para que al aplicar la proyección estereográfica y obtener la sucesión de pompas planas C_i , ninguna componente de estas pompas pase a estar no acotada.

El siguiente resultado muestra que, dada una pompa plana estacionaria, si en un vértice se encuentran tres lados *circulares*, se satisface una interesante propiedad referida a los centros de dichos lados, gracias a las condiciones de regularidad.

Lema 8.2.5. *Sea C una pompa plana estacionaria, y sea z un vértice arbitrario de C donde se encuentran tres lados circulares. Entonces, los tres lados tienen sus centros alineados.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por C_{ij} , C_{jk} , C_{ki} a los tres lados circulares que se encuentran en z . Como C es estacionaria, se verificará la condición (6.2), esto es,

$$h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0,$$

y además, se cumplirá la condición (6.9) de la Nota 6.2.9 evaluada en el vértice z , por lo que

$$N_{ij} + N_{jk} + N_{ki} = 0.$$

Veamos que esas dos condiciones implican que los centros de los arcos están alineados. Sea c_{ij} el centro del lado C_{ij} . Entonces

$$c_{ij} = z_{ijk} + \frac{1}{h_{ij}} N_{ij},$$

de donde

$$N_{ij} = h_{ij} (c_{ij} - z_{ijk}).$$

Así, a partir de (6.9), se sigue que

$$h_{ij} (c_{ij} - z_{ijk}) + h_{jk} (c_{jk} - z_{ijk}) + h_{ki} (c_{ki} - z_{ijk}) = 0.$$

Sea ahora $x \in \mathbb{R}^2$. A partir de la anterior expresión se tiene que

$$\begin{aligned} h_{ij} (c_{ij} - x) + h_{ij} (x - z_{ijk}) + h_{jk} (c_{jk} - x) + \\ h_{jk} (x - z_{ijk}) + h_{ki} (c_{ki} - x) + h_{ki} (x - z_{ijk}) = 0. \end{aligned}$$

Sacando factor común,

$$h_{ij} (c_{ij} - x) + h_{jk} (c_{jk} - x) + h_{ki} (c_{ki} - x) + (h_{ij} + h_{jk} + h_{ki}) (x - z_{ijk}) = 0.$$

Finalmente, a la vista de (6.2), concluimos que

$$(8.3) \quad h_{ij}(c_{ij} - x) + h_{jk}(c_{jk} - x) + h_{ki}(c_{ki} - x) = 0.$$

De ahí ya se deduce, sin más que hacer $x = 0$ y teniendo en cuenta que todas las curvaturas geodésicas son no nulas y que satisfacen (6.2), que los centros c_{ij} , c_{jk} , c_{ki} están alineados. \square

El anterior Lema se puede refinar, para ver en qué orden exacto se encuentran alineados los centros de los lados circulares asociados a un vértice de una pompa estacionaria, en función de las presiones.

Corolario 8.2.6. *Sea z_{ijk} un vértice de una pompa estacionaria, con $p_i < p_j < p_k$. Entonces, existe una línea recta en la que los centros c_{ij} , c_{ki} , c_{jk} de los lados circulares que se encuentran en z_{ijk} , se hallan alineados en ese orden.*

DEMOSTRACIÓN. A partir de la condición (8.3), se tiene que

$$(p_i - p_j)c_{ij} + (p_j - p_k)c_{jk} + (p_k - p_i)c_{ki} = 0.$$

Intercalando el sumando p_k en el primer factor, se llega a

$$(p_i - p_k)c_{ij} + (p_k - p_j)c_{jk} + (p_j - p_k)c_{jk} + (p_k - p_i)c_{ki} = 0,$$

de donde

$$\left(\frac{p_k - p_i}{p_k - p_j} \right) (c_{ij} - c_{ki}) = c_{ij} - c_{jk}.$$

Como $p_k - p_i > p_k - p_j$, el cociente de la anterior igualdad resulta estrictamente mayor que uno. Entonces, si consideramos los vectores $c_{ij} - c_{ki}$, $c_{ij} - c_{jk}$ de \mathbb{R}^2 , se concluye que el orden de los centros debe ser el anunciado. \square

8.2.1. Figuras recíprocas. Pasamos a introducir ahora la noción de figura recíproca de una pompa plana estacionaria. En virtud de los resultados anteriores, supondremos a partir de este instante que dichas pompas tienen todos sus lados circulares.

La idea de asignar a cada pompa plana una figura recíproca surge a partir de un trabajo de C. Moukarzel [77], en el que, desde un punto de vista físico, se estudian las propiedades de las configuraciones planas estacionarias. Una de estas propiedades es que toda pompa plana estacionaria admite una de estas figuras recíprocas, que en esencia ponen en correspondencia las componentes de la pompa con puntos del plano. Por ello, a partir de este momento, se tendrá en cuenta el número de *componentes* (y no de regiones) que posea una pompa, incluyendo a la región exterior y a sus posibles cámaras vacías.

Definición 12. Sea C una pompa plana estacionaria compuesta por n componentes acotadas, tal que todos sus lados son arcos de circunferencia. Una *figura recíproca* asociada a C es un par (p_i, x_i) , con $p_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, \dots, n$, verificando las siguientes condiciones:

- i) p_i es la presión asociada a la componente S_i , y
- ii) para todo lado C_{ij} de C , los puntos c_{ij} , x_i , x_j están alineados, donde c_{ij} es el centro de C_{ij} .

Nota 8.2.7. Destacamos que, en general, los puntos x_i de una figura recíproca no tienen que pertenecer a las componentes S_i de la pompa considerada.

Nota 8.2.8. Tal y como se indica en [77], el concepto de figura recíproca es más general, y puede definirse sobre particiones circulares planas, esto es, grafos planos trivalentes con todos los lados circulares.

Así, una figura recíproca asociada a una pompa estacionaria consta de las presiones asociadas a cada componente, y de una serie de puntos del plano (tantos como componentes) satisfaciendo cierta propiedad de alineación con los centros de los lados de la pompa. La existencia de figuras recíprocas para una pompa plana estacionaria se detalla en la siguiente Subsección 8.2.2.

8.2.2. Figura recíproca estándar asociada a una pompa plana estacionaria. En [77, Section IV] viene demostrada la existencia de figuras recíprocas asociadas a pompas planas estacionarias. De hecho, ahí se detalla la construcción de lo que nosotros llamaremos *figura recíproca estándar*. Procedemos ahora a describir dicha construcción.

Fijemos una pompa plana estacionaria. El primer paso consiste en fijar un punto x_0 y una presión p_0 correspondientes a una componente S_0 (normalmente, dicha componente suele ser la componente no acotada de la región exterior R_0). Esta elección es totalmente arbitraria, por lo que, por simplicidad, se podría tomar como x_0 al origen de \mathbb{R}^2 , y $p_0 = 0$.

Recuérdese que, fijada una presión, las curvaturas geodésicas de los lados de la pompa determinan unívocamente el resto de presiones (tal y como se indicó en la Subsección 6.2.4). Así, sólo nos falta indicar cómo se obtienen los puntos x_i restantes. El proceso es el siguiente:

Consideremos una componente S_1 adyacente a S_0 , y sea C_{01} el lado que las separa. Por la propia definición de figura recíproca, el punto x_1 debe ser elegido sobre la línea recta que pasa por x_0 y por c_{01} , que es el centro del lado C_{01} .

A partir de ahí, el resto de los puntos se determinarán a partir de intersecciones de rectas. Para una componente S_2 adyacente a S_0 y a S_1 , con lados comunes C_{02} , C_{12} respectivamente, el punto x_2 ha de estar simultáneamente en dos rectas distintas, la que pasa por x_0 y c_{02} , y la que pasa por x_1 y c_{12} . En caso de que dichas rectas sean paralelas, cosa que en principio, podría ocurrir, habría que reiniciar el proceso, ya que la elección realizada para x_1 no es adecuada (de hecho, es suficiente tomar x_1 de forma que la recta determinada por x_1 y c_{12} tenga una dirección distinta a la del vector $\overline{x_0 c_{02}}$). Reiterando este proceso, iremos obteniendo todos los puntos de la figura recíproca.

Sin embargo, esta construcción presenta algunos problemas a primera vista. A priori, no está claro que al final, los puntos hallados acaben satisfaciendo *todas* las condiciones de alineación necesarias. Además, podría ocurrir, a lo largo de este procedimiento, que se obtuvieran dos puntos *distintos* para una misma componente. Cualquiera de estas cosas haría que nuestra construcción no fuera correcta.

Afortunadamente, ninguno de esos dos contratiempos ocurre en realidad. Pasemos a comprobarlo, expresando de forma rigurosa el proceso descrito anteriormente mediante un sistema de ecuaciones (cuyas incógnitas son los puntos de la figura recíproca), que tendrá solución única.

Sea C una pompa plana estacionaria, con todos sus lados con curvatura geodésica no nula. Centrémonos inicialmente en una n -componente S_0 bordeada por n componentes distintas S_i , con $i = 1, \dots, n$, y hallemos los puntos de la figura recíproca correspondientes a dichas componentes. Podemos suponer, sin perder generalidad en virtud de la Nota 6.2.12, que las presiones p_i de las componentes S_i son no nulas, para $i = 1, \dots, n$ (la presión asociada a la componente S_0 sí podría, en principio, ser igual a cero). Ordenaremos las componentes de forma que S_i sea adyacente a S_{i+1} , para $i = 1, \dots, n - 1$.

Nota . Gracias al Lema 8.1.3, dada cualquier pompa estacionaria, es posible elegir una componente S_0 en las condiciones anteriores. Destacamos que alguna de las componentes S_i que bordean a S_0 podría coincidir con la región exterior R_0 .

Fijemos $x_0 \in \mathbb{R}^2$ como punto de la figura recíproca correspondiente a S_0 . Veamos qué ecuaciones han de satisfacer el resto de puntos x_i , para $i = 1, \dots, n$.

Para cada lado C_{0i} , con $i = 1, \dots, n$, tocando a la región exterior R_0 , la alineación de x_0 , x_i y el centro c_{0i} del lado C_{0i} implica que se debe satisfacer

$$(8.4) \quad x_i - x_0 = A_i (c_{0i} - x_0),$$

con $A_i \in \mathbb{R}$.

Para cada lado $C_{i(i+1)}$, $i = 1, \dots, n$, la alineación de los puntos x_i , x_{i+1} y el centro $c_{i(i+1)}$ de $C_{i(i+1)}$ implica que

$$(8.5) \quad x_{i+1} - x_i = B_i (c_{i(i+1)} - x_i),$$

con $B_i \in \mathbb{R}$. Veamos que a partir del sistema definido por las ecuaciones (8.4) y (8.5), es posible determinar los puntos x_i .

Nota . Por la propia construcción, se sigue que el índice $n + 1$ se corresponderá con el índice 1, cada vez que aparezca en los centros, presiones y curvaturas de la configuración.

A partir de (8.4), tenemos que

$$(8.6) \quad \begin{aligned} x_i &= A_i (c_{0i} - x_0) + x_0, \\ x_{i+1} &= A_{i+1} (c_{0(i+1)} - x_0) + x_0. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (8.5), se sigue que

$$\begin{aligned} A_{i+1} (c_{0(i+1)} - x_0) - A_i (c_{0i} - x_0) &= B_i (c_{i(i+1)} - A_i (c_{0i} - x_0) - x_0) \\ &= B_i (c_{i(i+1)} - x_0) - B_i A_i (c_{0i} - x_0), \end{aligned}$$

de donde

$$(8.7) \quad -A_{i+1} (c_{0(i+1)} - x_0) + A_i (c_{0i} - x_0) (1 - B_i) + B_i (c_{i(i+1)} - x_0) = 0,$$

que es una expresión que sólo involucra a los coeficientes A_i , B_i .

Por otro lado, considerando la expresión (8.3) asociada al vértice $z_{0i(i+1)}$, haciendo $x = x_0$ se tiene que

$$(8.8) \quad -h_{0(i+1)} (c_{0(i+1)} - x_0) + h_{0i} (c_{0i} - x_0) + h_{i(i+1)} (c_{i(i+1)} - x_0) = 0.$$

Obsérvese que si encontramos valores $\mu_i \in \mathbb{R}$ no nulos, para $i, \dots, n - 1$, que satisfagan

$$(8.9) \quad \frac{-h_{0(i+1)}}{-A_{i+1}} = \frac{h_{0i}}{A_i (1 - B_i)} = \frac{h_{i(i+1)}}{B_i} = \mu_i,$$

entonces los valores de A_i y B_i que se obtienen a partir de (8.9) verificarán la ecuación (8.7), en virtud de la igualdad (8.8). Pasemos pues a encontrar dichos valores μ_i , a partir del sistema definido por (8.9), que explícitamente vendrá dado por

$$(8.10) \quad \begin{cases} h_{0(i+1)} = \mu_i A_{i+1} \\ h_{0i} = \mu_i A_i (1 - B_i) \\ h_{i(i+1)} = \mu_i B_i \end{cases}$$

Se tendrá que

$$\begin{aligned} h_{0i} &= \mu_i A_i (1 - B_i) = \mu_i A_i - \mu_i A_i B_i = \mu_i A_i - h_{i(i+1)} A_i \\ &= A_i (\mu_i - h_{i(i+1)}) = \frac{h_{0i}}{\mu_{i-1}} (\mu_i - h_{i(i+1)}), \end{aligned}$$

de donde

$$1 = \frac{\mu_i - h_{i(i+1)}}{\mu_{i-1}},$$

y equivalentemente

$$\mu_i = \mu_{i-1} + h_{i(i+1)} = \mu_{i-1} + (p_i - p_{i+1}).$$

De esta forma, fijado μ_1 , se obtienen el resto de valores μ_i de forma recurrente. Así, por ejemplo, tomando $\mu_1 = -p_2$, se sigue que $\mu_2 = -p_3$, y en general,

$$(8.11) \quad \mu_i = -p_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Para dichos valores, se tiene que

$$A_i = \frac{h_{0i}}{-p_i} = \frac{p_i - p_0}{p_i},$$

$$B_i = \frac{h_{i(i+1)}}{-p_{i+1}} = \frac{p_{i+1} - p_i}{p_{i+1}}.$$

Finalmente, volviendo a las ecuaciones (8.4), (8.5), se tiene

$$(8.12) \quad x_i = x_0 + \frac{(p_i - p_0)}{p_i} (c_{0i} - x_0),$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{(p_{i+1} - p_i)}{p_{i+1}} (c_{i(i+1)} - x_i),$$

expresiones que determinan los puntos de la figura recíproca.

Nota 8.2.9. A partir de (8.12), se pueden obtener las siguientes expresiones equivalentes:

$$(8.13) \quad p_i x_i - p_0 x_0 = (p_i - p_0) c_{0i},$$

$$p_{i+1} x_{i+1} - p_i x_i = (p_{i+1} - p_i) c_{i(i+1)}.$$

Nota 8.2.10. Al explicar la idea de la construcción al inicio de esta Subsección, comentábamos que en un primer paso se *elegía* el punto x_1 sobre la recta determinada por x_0 y c_{01} . Dicho grado de libertad se corresponde con la elección realizada para el valor μ_1 .

Nota 8.2.11. Destacamos que el punto x_1 satisface la condición de alineamiento con x_n y el centro c_{1n} . Esto se deduce de (8.6), una vez se compruebe que x_{n+1} , que se obtiene a partir de x_n y en realidad corresponde a la componente S_1 , coincide con x_1 , o equivalentemente si el coeficiente A_{n+1} coincide con A_1 . A la vista de (8.10), eso es equivalente a que $\mu_1 = \mu_{n+1}$. Teniendo en cuenta (8.11), esta última condición se cumple en virtud del Lema 8.1.4. Así, esta construcción se *cierra* de forma correcta.

Una vez obtenidos x_1, \dots, x_n , el resto de puntos de la figura recíproca asociada a la pompa C se obtienen extendiendo este proceso a las componentes adyacentes a S_1, \dots, S_n . Dicho proceso estará bien definido siempre y cuando el punto asignado a una componente no dependa de la componente adyacente que se considere para determinarlo. Esto es, hemos de comprobar que, a partir de (8.12), a una misma componente no se le llega a asignar dos puntos distintos. Veamos que eso es consecuencia, una vez más, de la condición (8.3) asociada a cada vértice de una pompa estacionaria.

Sea z_{ijk} un vértice asociado a componentes S_i, S_j, S_k , y sean x_i, x_j puntos de la figura recíproca correspondientes a S_i, S_j . A partir de (8.12), podemos determinar el punto x_k usando el lado C_{ik} , llegando a

$$x_k = x_i + \frac{(p_k - p_i)}{p_k} (c_{ik} - x_i),$$

o por otro lado, podemos usar el lado C_{jk} , obteniendo

$$x_k = x_j + \frac{(p_k - p_j)}{p_k}(c_{jk} - x_j).$$

Ambas expresiones coincidirán si

$$(8.14) \quad (x_i - x_j) + \frac{(p_k - p_i)}{p_k}(c_{ik} - x_i) - \frac{(p_k - p_j)}{p_k}(c_{jk} - x_j) = 0.$$

Operando, se llega a que la condición (8.14) es equivalente a que

$$(8.15) \quad h_{ki} c_{ik} + h_{jk} c_{jk} + (p_i x_i - p_j x_j) = 0.$$

Considerando el lado C_{ij} , y usando de nuevo (8.12), se llega a (8.15) es equivalente a que

$$p_i x_i - p_j x_j = h_{ij} c_{ij},$$

que se satisface trivialmente en virtud de la condición (8.3). Por tanto, tal y como se deseaba, la definición de los puntos de la figura recíproca es independiente de las componentes adyacentes que se vayan considerando a lo largo del proceso, por lo que nuestra construcción de la *figura recíproca estándar* está bien definida.

Nota 8.2.12. Consideremos un vértice z_{ijk} de una pompa estacionaria C , y sean x_i, x_j, x_k los puntos correspondientes a la figura recíproca estándar de C . Entonces, esos tres puntos no se hallan alineados. Esto es consecuencia de lo que se ha visto anteriormente: el sistema que determina los puntos de la figura recíproca estándar tiene una única solución, una vez determinados los dos primeros puntos. Fijados éstos, el resto de puntos quedan definidos unívocamente por las intersecciones apropiadas.

Si x_i, x_j, x_k estuvieran sobre una misma línea l , entonces los centros de los arcos c_{ij}, c_{jk}, c_{ki} también se encontrarían en l . En tal caso, se puede comprobar que el punto x_k no estaría definido de forma única, ya que sería posible elegirlo tomando cualquier punto de l .

Nota 8.2.13. Una consecuencia de la Nota 8.2.12 anterior es que, dado un vértice z_{ijk} en una configuración estacionaria, se tiene que

$$p_i(p_j - p_k)x_i + p_j(p_k - p_i)x_j + p_k(p_i - p_j)x_k \neq 0.$$

En caso de que se tuviera igualdad a cero, deduciríamos inmediatamente la alineación de los puntos x_i, x_j, x_k .

8.2.3. Condiciones para obtener una pompa plana estacionaria. En la Subsección 8.2.2 anterior, hemos visto que toda pompa plana estacionaria admite una figura recíproca *estándar*, compuesta por las presiones de las componentes de la pompa, y por los puntos determinados por las expresiones (8.12).

Nuestro objetivo ahora es analizar el *recíproco*. Esto es, dados números reales p_i y puntos x_i en el plano, con $i = 1, \dots, n$, pretendemos estudiar cuando se puede construir una pompa plana estacionaria, con una estructura concreta, a partir del par (p_i, x_i) , de forma que tenga a dicho par como figura recíproca estándar asociada.

Veremos que si un par (p_i, x_i) satisface ciertas condiciones, será posible obtener una pompa plana estacionaria con una disposición inicial (que nos dirá qué vértices y qué lados conforman la pompa), con (p_i, x_i) como figura recíproca estándar asociada.

Para la determinación de una pompa plana que admita figura recíproca, los lados serán arcos circulares. Por tanto, solamente necesitamos conocer los centros y radios de los distintos lados de la configuración. Una vez conocidos éstos, la pompa plana estará totalmente definida. El computo de los radios es inmediato, ya que son los inversos (positivos) de las curvaturas geodésicas, que se pueden obtener a partir de las presiones. En

cuanto a los centros, como pretendemos que el par original constituya una figura recíproca estándar de la correspondiente pompa, se determinarán a partir de las expresiones (8.12), o equivalentemente, por medio de (8.13).

El cálculo de los centros y los radios se realizará teniendo en cuenta qué lados forman la pompa plana que estamos considerando. Ese dato nos lo proporcionará la estructura inicial que consideremos. Nótese, por ejemplo, que dadas dos presiones p_i, p_j cualesquiera, se podría considerar un valor $p_i - p_j$ que no tuviera sentido, porque no exista un lado separando las correspondientes componentes. Igualmente, sólo será necesario aplicar las expresiones (8.12) para los centros de los lados que indique la estructura inicial.

En general, la partición circular obtenida a partir de estos centros y radios, no verificará las condiciones de regularidad de las pompas estacionarias; siendo más precisos, la condición de que los lados se encuentren en los vértices formando ángulos de 120 grados no se obtiene al considerar un par inicial arbitrario. El análisis de dicha propiedad será el que determine la condición que ha de cumplir dicho par, para obtener realmente una pompa satisfaciendo las condiciones de regularidad. Detallemos ahora este proceso.

Fijemos inicialmente $p_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$, y sean p_1, \dots, p_n números reales no nulos, y x_1, \dots, x_n puntos del plano. Sea también una configuración plana, que nos sirva de estructura para saber qué lados C_{ij} vamos considerar durante todo este proceso. Supondremos además que $p_i \neq p_j$, siempre que el lado C_{ij} tenga sentido según la estructura inicial.

A partir del par (p_i, x_i) , $i = 1, \dots, n$, definimos los radios

$$(8.16) \quad r_{ij} = \frac{1}{|p_i - p_j|} > 0,$$

y, a partir de las expresiones dadas en (8.12), definimos los centros por

$$(8.17) \quad \begin{aligned} c_{0i} &= x_0 + \frac{p_i}{p_i - p_0}(x_i - x_0), \\ c_{ij} &= x_i + \frac{p_j}{p_j - p_i}(x_j - x_i) = x_j + \frac{p_i}{p_i - p_j}(x_i - x_j), \end{aligned}$$

para los lados que tengan sentido.

A partir de los centros c_{ij} y los radios r_{ij} , podemos considerar la configuración circular que determinan, a la que denotaremos por \mathcal{C} . Estamos interesados en saber qué hipótesis se han de cumplir para que dicha configuración sea una pompa estacionaria.

Recuérdese que en el Lema 8.2.5 se vio que, dado un vértice de una pompa plana estacionaria, los centros de los lados que se encuentran en dicho vértice están alineados. Comprobemos en primer lugar que este hecho se cumple, según las definiciones (8.17) anteriores.

Lema 8.2.14. *Dados $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$, consideremos la configuración circular \mathcal{C} que se determina a partir de las definiciones (8.16) y (8.17) anteriores, según una estructura inicial. Sea z_{ijk} un vértice de \mathcal{C} . Entonces, los centros c_{ij} , c_{jk} , c_{ki} de los lados que se encuentran en z_{ijk} están alineados.*

DEMOSTRACIÓN. Según las definiciones (8.17), el centro c_{ij} satisfará que

$$(p_j - p_i) c_{ij} = (p_j - p_i) x_i + p_j (x_j - x_i) = p_j x_j - p_i x_i.$$

Considerando las igualdades análogas para c_{jk} , c_{ki} , y sumándolas, se llega a

$$(8.18) \quad (p_j - p_i) c_{ij} + (p_k - p_j) c_{jk} + (p_i - p_k) c_{ki} = 0,$$

de donde se deduce que c_{ij} , c_{jk} , c_{ki} están alineados. \square

Obtengamos ahora la condición analítica que ha de verificar un par (p_i, x_i) para que la configuración circular asociada \mathcal{C} , construida a partir de (8.16) y (8.17), sea una pompa plana estacionaria. A la vista de la construcción realizada, basta centrarse en los vértices de la configuración, e imponer que los tres lados que se encuentran en cada uno de ellos, lo hagan formando ángulos de 120 grados.

Sea z_{ijk} un vértice, y sean c_{ij}, c_{jk}, c_{ki} los centros de los tres arcos, de radios r_{ij}, r_{jk}, r_{ki} , que se encuentran en z_{ijk} . A partir del Lema 8.2.14, podemos suponer sin pérdida de generalidad que los centros se hallan alineados según el orden c_{ij}, c_{ki}, c_{jk} , con $p_i < p_k$ (si fuera necesario, reordénense los índices). Entonces, a partir de (8.18) y siguiendo las mismas ideas que en las demostraciones del Lema 8.2.5 y del Corolario (8.2.6), se llegará a

$$0 < \frac{p_k - p_j}{p_k - p_i} < 1,$$

de donde se sigue que $p_i < p_j < p_k$.

Como deseamos imponer que los lados se encuentren de dos en dos formando ángulos de 120 grados, es fácil ver que entonces los segmentos que unen dos centros consecutivos con el vértice han de formar ángulos de 60 grados (véase [3, Prop. 3.1]). Es decir,

- los segmentos $\overline{c_{ij} z_{ijk}}$ y $\overline{c_{ki} z_{ijk}}$ forman un ángulo de 60 grados, y
- los segmentos $\overline{c_{ki} z_{ijk}}$ y $\overline{c_{jk} z_{ijk}}$ forman un ángulo de 60 grados,

y en consecuencia, $\overline{c_{ij} z_{ijk}}$ y $\overline{c_{jk} z_{ijk}}$ formarán un ángulo de 120 grados. Nótese que la longitud de cada uno de estos segmentos es el radio del correspondiente arco circular. Gracias a ello, es posible calcular las distancias entre los distintos centros para que se cumpla la condición deseada.

Lema 8.2.15. ([3, Prop. 3.1]) *Dada una configuración circular construida a partir de un par (p_i, x_i) , $i = 1, \dots, n$, según las definiciones (8.16), (8.17), se tiene que los arcos asociados a un vértice z_{ijk} de centros c_{ij}, c_{jk}, c_{ki} y radios r_{ij}, r_{jk}, r_{ki} , respectivamente, se encuentran formando ángulos de 120 grados si y sólo si,*

$$(8.19) \quad \begin{aligned} d^2(c_{ij}, c_{ki}) &= r_{ij}^2 + r_{ki}^2 - r_{ij} r_{ki}, \\ d^2(c_{ki}, c_{jk}) &= r_{ki}^2 + r_{jk}^2 - r_{ki} r_{jk}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia del Teorema del Coseno, aplicado a los triángulos cuyos vértices son cada par de centros consecutivos y z_{ijk} . \square

Nota 8.2.16. La primera igualdad del Lema 8.2.15 es la que asegura que los arcos de centros c_{ij} y c_{ki} forman ángulos de 120 grados, y la segunda igualdad garantiza que ocurre lo mismo con los lados de centros c_{ki} y c_{jk} . Como consecuencia de ambas, se sigue que los lados de centros c_{ij} y c_{jk} también se cortarán formando idéntico ángulo.

El Lema 8.2.15 nos proporciona las condiciones necesarias y suficientes para que, a partir de un par (p_i, x_i) , obtengamos una pompa estacionaria, de forma que dicho par sea una figura recíproca estándar asociada. Tales condiciones (8.19) vienen expresadas en términos de los centros y los radios de los correspondientes arcos circulares. Pasamos ahora a expresarlas explícitamente en función de los elementos que conforman el par.

Por un lado, a partir de (8.17), se tiene inmediatamente que

$$\begin{aligned} d(c_{ij}, c_{ki}) &= |c_{ij} - c_{ki}| \\ &= \left| \frac{p_i(p_j - p_k)x_i + p_j(p_k - p_i)x_j + p_k(p_i - p_j)x_k}{(p_j - p_i)(p_k - p_i)} \right|. \end{aligned}$$

Por otro lado, como $p_i < p_j < p_k$ en nuestra situación, se tiene que

$$r_{ij} = \frac{1}{p_j - p_i}, \quad r_{ki} = \frac{1}{p_k - p_i},$$

y

$$r_{ij}^2 + r_{ki}^2 - r_{ij} r_{ki} = \frac{p_i^2 + p_j^2 + p_k^2 - p_i p_j - p_i p_k - p_j p_k}{(p_j - p_i)^2 (p_k - p_i)^2}.$$

Por tanto, las expresiones (8.19) del Lema 8.2.15 son equivalentes a que

$$\begin{aligned} & |p_i(p_j - p_k)x_i + p_j(p_k - p_i)x_j + p_k(p_i - p_j)x_k|^2 \\ & = p_i^2 + p_j^2 + p_k^2 - p_i p_j - p_i p_k - p_j p_k, \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$(8.20) \quad |p_i(p_j - p_k)x_i + p_j(p_k - p_i)x_j + p_k(p_i - p_j)x_k|^2 - (p_i^2 + p_j^2 + p_k^2 - p_i p_j - p_i p_k - p_j p_k) = 0.$$

Nota 8.2.17. La condición (8.20) surge al considerar la primera igualdad del Lema 8.2.15, que se refiere a un vértice fijo. Si considerásemos la segunda igualdad, obtendríamos la misma condición, (obsérvese que (8.20) es una expresión simétrica con respecto a los índices).

La expresión (8.20) nos da la condición analítica que nos va a permitir saber cuando un par (p_i, x_i) da lugar a una pompa plana estacionaria, que además tenga a dicho par como figura recíproca estándar asociada. Si dicha condición se satisface en *todos* los vértices de la configuración considerada (la estructura inicial de la pompa nos dirá qué vértices hay que tener en cuenta), entonces a partir de (p_i, x_i) , y de los centros y radios definidos por (8.16), (8.17), se acabará obteniendo lo deseado.

Resumimos en el siguiente Lema la conclusión extraída de los argumentos de esta Subsección 8.2.3.

Lema 8.2.18. *Dados $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{R}$, $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^2$, y una estructura inicial, se obtiene una pompa plana estacionaria \mathcal{C} a partir de las definiciones (8.16) y (8.17), con figura recíproca estándar asociada justamente el par inicial (p_i, x_i) , si y sólo si se verifica la condición (8.20) en todo vértice de \mathcal{C} .*

Nota 8.2.19. Es rutinario comprobar que se tiene la siguiente igualdad, referida al primer sumando de (8.20):

$$\begin{aligned} & p_i(p_j - p_k)x_i + p_j(p_k - p_i)x_j + p_k(p_i - p_j)x_k \\ & = p_i p_j (x_i - x_j) + p_j p_k (x_j - x_k) + p_k p_i (x_k - x_i), \end{aligned}$$

y esta otra igualdad referida al segundo sumando de (8.20):

$$p_i^2 + p_j^2 + p_k^2 - p_i p_j - p_i p_k - p_j p_k = \frac{1}{2} ((p_i - p_j)^2 + (p_j - p_k)^2 + (p_k - p_i)^2).$$

8.2.4. Aplicación de estructura asociada a una pompa estacionaria. Nuestra intención ahora es utilizar herramientas analíticas que nos permitan estudiar, de forma global, si un par arbitrario (q, y) satisface la condición (8.20) en todos los vértices de la configuración que estemos considerando. Para ello, vamos a definir una aplicación, que llamaremos *aplicación de estructura*, que nos permita tratar dicha cuestión desde un punto de vista funcional. Detallemos dicha aplicación, indicando algunas de sus propiedades más interesantes.

Sea C una pompa plana estacionaria, compuesta por n componentes acotadas. Por tanto, teniendo en cuenta la Nota 8.1.5, C tendrá $3(n-1)$ lados y $2(n-1)$ vértices, que consideraremos ordenados a lo largo de este momento. Fijemos $p_0 \in \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^2$, y sea (p, x) la figura recíproca estándar asociada a C , con

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Definición 13. La aplicación de estructura asociada a la pompa plana estacionaria C es la aplicación

$$F : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-1)}$$

definida de la siguiente manera: para $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$, definimos

$$F(q, y) = (F_{ijk}(q, y))_{z_{ijk}},$$

donde cada función coordenada F_{ijk} de F se refiere a un vértice z_{ijk} de C , y viene dada por

$$F_{ijk}(q, y) = |g_{ijk}(q, y)|^2 - f_{ijk}(q),$$

siendo

$$g_{ijk}(q, y) = q_i(q_j - q_k)y_i + q_j(q_k - q_i)y_j + q_k(q_i - q_j)y_k \in \mathbb{R}^2,$$

y

$$f_{ijk}(q) = p_i^2 + p_j^2 + p_k^2 - p_i p_j - p_i p_k - p_j p_k \in \mathbb{R}.$$

Es claro, teniendo en cuenta la condición (8.20), que $F(p, x) = 0$. Además, por la propia definición realizada, se sigue que los pares

$$(q, y) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^2)^n \text{ tales que } F(q, y) = 0,$$

darán lugar a pompas estacionarias, tomando como radios y centros de los lados circulares los determinados por (8.16) y (8.17). Además, dada una de estas pompas, su figura recíproca estándar asociada será justamente el par (q, y) del que proviene.

La anterior es la principal propiedad de la aplicación de estructura: los elementos que la *anulan* son justamente figuras recíprocas estándar asociadas a pompas planas estacionarias. Este hecho, tal y como veremos más adelante, es clave en el esquema de nuestro estudio, ya que nos va a servir de conexión entre el Análisis Funcional y la búsqueda de variaciones de pompas estacionarias por pompas estacionarias.

Describimos ahora algunas propiedades que verifica la aplicación de estructura asociada a una pompa estacionaria. El primer resultado, que es inmediato a la vista de su definición, pone de manifiesto que estamos en condiciones de aplicar todas las herramientas analíticas para funciones entre espacios euclídeos.

Lema 8.2.20. *La aplicación de estructura F asociada a una pompa estacionaria es una función analítica entre espacios euclídeos.*

Denotemos ahora por D_2F a la diferencial de F con respecto a la segunda coordenada $y \in (\mathbb{R}^2)^n$, manteniendo fija la primera coordenada $q \in \mathbb{R}^n$ (más adelante detallaremos las razones de esta consideración). En tal caso, dicha diferencial puede verse como una aplicación lineal entre los siguientes espacios:

$$D_2F : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-1)}.$$

Veamos en primer lugar qué condiciones han de satisfacer los elementos del núcleo de D_2F , y comprobemos también que dicho núcleo tiene, al menos, dimensión tres.

Lema 8.2.21. Sea C una pompa estacionaria, y sea $(q, y) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^2)^n$. Entonces se tiene que $e \in (\mathbb{R}^2)^n$ es un elemento del núcleo de $D_2F(q, y)$ si y sólo si

$$\langle g_{ijk}(q, y), g_{ijk}(q, e) \rangle = 0,$$

para todo z_{ijk} vértice de C .

DEMOSTRACIÓN. Sean $q = (q_1, \dots, q_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $e = (e_1, \dots, e_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$. Sea A la matriz jacobiana de F con respecto a la segunda coordenada, en el punto (q, y) , cuyas filas se corresponderán con los vértices de C . Entonces, la imagen por $D_2F(q, y)$ del vector e vendrá dada por el producto de la matriz A y el vector e . Fijemos un vértice z_{ijk} de C , y estudiemos la coordenada de dicho producto correspondiente a z_{ijk} .

La fila de la matriz A correspondiente a z_{ijk} puede identificarse con

$$\left(\frac{\partial F_{ijk}}{\partial x_1}(q, y), \dots, \frac{\partial F_{ijk}}{\partial x_n}(q, y) \right) \in (\mathbb{R}^2)^n.$$

Así, la coordenada referida del producto Ae será igual a

$$(8.21) \quad \sum_{r=1, \dots, n} \left\langle \frac{\partial F_{ijk}}{\partial x_r}(q, y), e_r \right\rangle.$$

Nótese que para $r \notin \{i, j, k\}$, se tiene que

$$\frac{\partial F_{ijk}}{\partial x_r}(q, y) = 0,$$

mientras que, por ejemplo,

$$\frac{\partial F_{ijk}}{\partial x_i}(q, y) = 2 p_i (p_j - p_k) g_{ijk}(q, y).$$

Entonces, (8.21) será igual a

$$\begin{aligned} & \langle 2 p_i (p_j - p_k) g_{ijk}(q, y), e_i \rangle + \langle 2 p_j (p_k - p_i) g_{ijk}(q, y), e_j \rangle \\ & + \langle 2 p_k (p_i - p_j) g_{ijk}(q, y), e_i \rangle \\ & = 2 \langle g_{ijk}(q, y), g_{ijk}(q, e) \rangle. \end{aligned}$$

De ahí se deduce claramente que $e \in \text{Ker} D_2F(q, y)$ si y sólo si $g_{ijk}(q, y)$ y $g_{ijk}(q, e)$ son vectores ortogonales, para todo vértice z_{ijk} . \square

Para el siguiente resultado, que muestra que el núcleo de la diferencial contiene elementos no triviales, denotaremos por $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a cualquier rotación del plano, que es una isometría o movimiento rígido de \mathbb{R}^2 .

Lema 8.2.22. Sea C una pompa estacionaria y $(q, y) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2)^n$. Entonces,

- i) el vector $(v, \dots, v) \in (\mathbb{R}^2)^n$ es un elemento de $\text{Ker} D_2F(q, y)$, para todo $v \in \mathbb{R}^2$, y
- ii) el vector $(R(y_1), \dots, R(y_n)) \in (\mathbb{R}^2)^n$ es un elemento de $\text{Ker} D_2F(q, y)$.

DEMOSTRACIÓN. Comprobemos que en ambos casos se satisface la condición indicada en el Lema 8.2.21.

- i) Tomemos un vector $v \in \mathbb{R}^2$ cualquiera y sea $e = (v, \dots, v) \in (\mathbb{R}^2)^n$. Como

$$\begin{aligned} g_{ijk}(q, e) &= q_i(q_j - q_k)v + q_j(q_k - q_i)v + q_k(q_i - q_j)v \\ &= (q_i(q_j - q_k) + q_j(q_k - q_i) + q_k(q_i - q_j))v = 0, \end{aligned}$$

se sigue claramente que $g_{ijk}(q, e)$ es ortogonal a $g_{ijk}(q, y)$, por lo que $e \in \text{Ker} D_2F(q, y)$.

ii) Denotemos ahora por e' al vector $(R(y_1), \dots, R(y_n))$ de $(\mathbb{R}^2)^n$. Entonces

$$\begin{aligned} g_{ijk}(q, e') &= q_i(q_j - q_k)R(x_i) + q_j(q_k - q_i)R(x_j) + q_k(q_i - q_j)R(x_k) \\ &= R(q_i(q_j - q_k)x_i + q_j(q_k - q_i)x_j + q_k(q_i - q_j)x_k) = R(g_{ijk}(q, y)), \end{aligned}$$

de donde también se deduce que $e' \in \text{Ker}D_2F(q, y)$. \square

Nota 8.2.23. La interpretación que extraemos del Lema 8.2.22 es que, para presiones fijas, el núcleo de la diferencial

$$D_2F : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-1)},$$

en cualquier elemento de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^2)^n$, tiene dimensión mayor o igual que tres.

Existen ciertas configuraciones estacionarias para las que el núcleo de la diferencial de la aplicación de estructura F asociada, calculada sobre su figura recíproca estándar, tiene justamente dimensión tres, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo. En estos casos, los únicos elementos que hay en el núcleo son los indicados en el Lema 8.2.22.

Ejemplo 8.1. Consideremos una pompa triple estándar C , encerrando áreas cualesquiera. Se tiene que C consta de tres regiones conexas, seis lados y cuatro vértices, que denotaremos explícitamente por $z_{012}, z_{023}, z_{013}, z_{123}$.

Tomemos $p_0 = 0, x_0 = (0, 0)$, y sea

$$F : \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^2)^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

la aplicación de estructura asociada a C ; sea también (p, x) la figura recíproca estándar asociada, con $p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3, x = (x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^2)^3$. Veamos que $\text{Ker}D_2F(p, x)$ tiene dimensión tres.

Fijemos $e = (e_1, e_2, e_3) \in (\mathbb{R}^2)^3$. A partir del Lema 8.2.21, $e \in \text{Ker}D_2F(p, x)$ si y sólo si

$$\langle g_{ijk}(p, x), g_{ijk}(p, e) \rangle = 0,$$

para todo z_{ijk} vértice. De ahí surgen las siguientes cuatro condiciones:

$$\begin{aligned} \langle x_1 - x_2, e_1 - e_2 \rangle &= 0, \\ \langle x_2 - x_3, e_2 - e_3 \rangle &= 0, \\ \langle x_3 - x_1, e_3 - e_1 \rangle &= 0, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \langle p_1 p_2 (x_1 - x_2) + p_2 p_3 (x_2 - x_3) + p_3 p_1 (x_3 - x_1), \\ p_1 p_2 (e_1 - e_2) + p_2 p_3 (e_2 - e_3) + p_3 p_1 (e_3 - e_1) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Consideremos ahora $R_{\pi/2}$, la rotación en el plano de ángulo $\pi/2$. Entonces las tres primeras condiciones pueden expresarse como

$$(8.22) \quad \begin{aligned} e_1 - e_2 &= \lambda_{12} R_{\pi/2}(x_1 - x_2), \\ e_2 - e_3 &= \lambda_{23} R_{\pi/2}(x_2 - x_3), \\ e_3 - e_1 &= \lambda_{13} R_{\pi/2}(x_3 - x_1), \end{aligned}$$

siendo $\lambda_{12}, \lambda_{23}, \lambda_{13}$ números reales. Sumando dichas expresiones, se tiene que

$$0 = R_{\pi/2}(\lambda_{12}(x_1 - x_2) + \lambda_{23}(x_2 - x_3) + \lambda_{13}(x_3 - x_1)),$$

de donde

$$\lambda_{12}(x_1 - x_2) + \lambda_{23}(x_2 - x_3) + \lambda_{13}(x_3 - x_1) = 0,$$

o equivalentemente

$$(8.23) \quad (\lambda_{12} - \lambda_{13})x_1 + (\lambda_{23} - \lambda_{12})x_2 + (\lambda_{13} - \lambda_{23})x_3 = 0.$$

Por la Nota 8.2.12, sabemos que x_1, x_2, x_3 no pueden encontrarse alineados (al ser puntos de una figura recíproca estándar). Eso implica que algún coeficiente en (8.23) ha de ser nulo, y en consecuencia, se deduce que

$$\lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{13}.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ el valor común de esos tres coeficientes.

Análogamente, la cuarta condición se puede expresar como

$$(8.24) \quad p_1 p_2 (e_1 - e_2) + p_2 p_3 (e_2 - e_3) + p_3 p_1 (e_3 - e_1) \\ = \lambda_{123} R_{\pi/2}(p_1 p_2 (x_1 - x_2) + p_2 p_3 (x_2 - x_3) + p_3 p_1 (x_3 - x_1)),$$

para cierto $\lambda_{123} \in \mathbb{R}$. Usando (8.22), y teniendo en cuenta el coeficiente λ anteriormente definido, llegamos a

$$\lambda p_1 p_2 R_{\pi/2}(x_1 - x_2) + \lambda p_2 p_3 R_{\pi/2}(x_2 - x_3) + \lambda p_3 p_1 R_{\pi/2}(x_3 - x_1) \\ = \lambda_{123} R_{\pi/2}(p_1 p_2 (x_1 - x_2) + p_2 p_3 (x_2 - x_3) + p_3 p_1 (x_3 - x_1)),$$

por lo que, a partir de la inyectividad de $R_{\pi/2}$, concluimos que

$$\lambda p_1 p_2 (x_1 - x_2) + \lambda p_2 p_3 (x_2 - x_3) + \lambda p_3 p_1 (x_3 - x_1) \\ = \lambda_{123} (p_1 p_2 (x_1 - x_2) + p_2 p_3 (x_2 - x_3) + p_3 p_1 (x_3 - x_1)).$$

Como

$$p_1 p_2 (x_1 - x_2) + p_2 p_3 (x_2 - x_3) + p_3 p_1 (x_3 - x_1) = g_{123}(p, x),$$

en virtud de la Nota 8.2.19, y dicho elemento es no nulo (por la Nota 8.2.13), se tendrá que $\lambda_{123} = \lambda$.

Por tanto, todos los coeficientes que aparecen en (8.22), (8.24) coinciden. Si todos son nulos, se tendrá que $e_1 = e_2 = e_3$, con lo que los únicos elementos de $\text{Ker}D_2F(p, x)$ son los vectores de la forma

$$(e', e', e'), \quad e' \in \mathbb{R}^2.$$

Por otro lado, si dichos coeficientes no son nulos, entonces a partir de (8.22) se obtiene que existe un vector $e'' \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$e_i = e'' - \lambda R_{\pi/2}(x_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

con lo que los vectores de $\text{Ker}D_2F(p, x)$ serán

$$(e'', e'', e'') + \mu (R_{\pi/2}(x_1), R_{\pi/2}(x_2), R_{\pi/2}(x_3)), \quad e'' \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}.$$

Esto ya nos dice que la dimensión de $\text{Ker}D_2F(p, x)$ es igual a tres.

Nota 8.2.24. El mismo razonamiento, de forma trivial, es aplicable a la pompa doble estándar, obteniéndose el mismo resultado. Además, se puede comprobar, de manera análoga, que las configuraciones estándar para cuatro y cinco regiones también satisfacen la misma propiedad: el núcleo de la diferencial de la aplicación de estructura, calculada en la figura recíproca estándar asociada, tiene dimensión tres.

La siguiente definición surge a partir de la Nota 8.2.23 y del Ejemplo 8.1. En general, dada una configuración estacionaria C y su aplicación de estructura asociada F , sabemos que el núcleo de la diferencial

$$D_2F : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-1)}$$

con respecto a la segunda coordenada (manteniendo fijas las presiones), tiene dimensión mayor o igual que tres. Destaquemos el hecho de que la dimensión sea *justamente* igual a tres, cuando se calcula D_2F sobre la figura recíproca estándar asociada a C .

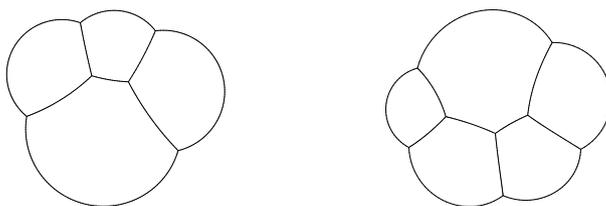


FIGURA 8.2. Configuraciones estándar para cuatro y cinco regiones

Definición 14. Sea C una pompa plana estacionaria y (p, x) su figura recíproca estándar asociada. Diremos que C es *rígida* si la dimensión del núcleo de $D_2F(p, x)$ es justamente tres, siendo F la aplicación de estructura de C .

Una consecuencia interesante que se deduce de la anterior definición es que, dada una pompa rígida, la diferencial de su aplicación de estructura, calculada sobre la figura recíproca estándar, tiene siempre *rango máximo*, igual a $2n - 3$, donde n es el número de componentes conexas acotadas de la pompa. Obsérvese que el codominio de dicha diferencial tiene dimensión $2n - 2$.

El Ejemplo 8.1 anterior muestra que las configuraciones estándar para dos, tres, cuatro y cinco regiones son pompas rígidas.

8.3. Objetivos de este enfoque

El principal objetivo que perseguimos con este tratamiento del problema de la pompa plana múltiple es encontrar variaciones de una pompa estacionaria por pompas estacionarias, a partir de la caracterización por figuras recíprocas estándar. Es decir, dada una configuración estacionaria, pretendemos *deformar* su figura recíproca estándar asociada adecuadamente, para ir obteniendo pares que satisfagan la condición (8.20) en los correspondientes vértices y proporcionen configuraciones estacionarias en cada instante.

De hecho, nos interesa justificar la existencia de variaciones que *sólo* dependan de cómo cambian las presiones, de forma que los puntos del plano de cada par se obtengan a partir de dichas presiones. Con tales variaciones, el estudio de la estabilidad de las configuraciones estacionarias podrá llevarse a cabo desde un enfoque distinto a los considerados hasta ahora en este contexto.

8.3.1. Variaciones de la figura recíproca estándar. Empecemos viendo cómo los elementos del núcleo de la diferencial de la aplicación de estructura de una pompa estacionaria nos proporcionan variaciones infinitesimales de la figura recíproca estándar asociada, que satisfacen la condición (8.20) en todos los vértices de la pompa inicial.

Sea C una pompa plana estacionaria con n componentes conexas acotadas, y denotemos por (p, x) a su figura recíproca estándar asociada, con

$$p = (p_1, \dots, p_n), \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Sea también $F : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-1)}$ la aplicación de estructura asociada a C .

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que cualquier variación infinitesimal del punto x_i viene dada por

$$x_i(t) = x_i + t v_i, \quad t \in \mathbb{R}, \quad v_i \in \mathbb{R}^2.$$

Sean $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$, y veamos que

$$F(p, x(t)) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad v \in \text{Ker} D_2 F(p, x).$$

En consecuencia, las únicas direcciones que proporcionarán variaciones de la figura recíproca (manteniendo constantes las presiones) adecuadas a nuestros propósitos, serán las que constituyen el núcleo de dicha diferencial.

En efecto, sea $v \in \text{Ker} D_2 F(p, x)$. Dado un vértice z_{ijk} de C , es fácil comprobar que

$$g_{ijk}(p, x(t)) = g_{ijk}(p, x) + t g_{ijk}(p, v).$$

Recuérdese que $g_{ijk}(p, x)$ es ortogonal a $g_{ijk}(p, v)$ en virtud del Lema 8.2.21. Se sigue entonces que cuando t tiende a cero, $g_{ijk}(p, x(t))$ será también ortogonal a $g_{ijk}(p, v)$, con lo que $v \in \text{Ker} D_2 F(p, x(t))$.

Consideremos ahora la aplicación

$$t \longmapsto F(p, x(t)).$$

Se tiene que

$$\frac{d}{dt} F(p, x(t)) = D_2 F(p, x(t))(v) = 0,$$

por lo visto anteriormente.

Por tanto, $F(p, x(t)) = 0$, para valores de t próximos a cero, con lo que el par $(p, x(t))$ satisface la condición (8.20) en todo vértice, y dará lugar a una pompa estacionaria.

Este hecho pone de manifiesto una interpretación variacional de las pompas rígidas. Para presiones constantes, los elementos del núcleo de la diferencial de la aplicación de estructura se reducen justamente a los descritos en el Lema 8.2.22. Las variaciones infinitesimales que determinan dichos elementos se corresponden con traslaciones y rotaciones del plano euclídeo.

Así, podemos afirmar que las pompas rígidas son las que, para presiones constantes, solamente tienen a las traslaciones y a los giros como variaciones infinitesimales estacionarias. Si considerásemos presiones variables, podrían existir otras variaciones de este tipo para dichas pompas.

8.3.2. Dirección a seguir. Para acabar esta Sección, indicaremos brevemente las ideas en las que estamos trabajando actualmente, continuando el enfoque mostrado en este Capítulo. Aún nos quedan por resolver algunas cuestiones, que esperamos solventar en breve, con el fin de aplicar los resultados que se extraigan al estudio, principalmente, de las configuraciones con regiones disconexas.

Nuestro punto de partida es intentar aplicar el Teorema de la Función Implícita a la aplicación de estructura, con la idea de obtener variaciones (que sólo dependan de las presiones) de la figura recíproca estándar asociada a una pompa estacionaria, por pares que satisfagan (8.20). Esto nos proporcionaría variaciones de la pompa original por pompas estacionarias. Veremos que, para llevar esto a cabo, es necesario centrarse en las pompas rígidas. Además, mostraremos unas expresiones particulares para las fórmulas de variación del área y de la longitud, en las que sólo intervienen, esencialmente, las presiones.

Sea C una pompa plana estacionaria, y (p, x) su figura recíproca estándar. Consideremos también la aplicación de estructura asociada a C ,

$$F : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-1)}.$$

Ya hemos visto que $F(p, x) = 0$.

Para poder aplicar el Teorema de la Función Inversa a F en el punto (p, x) , necesitaríamos que la diferencial

$$D_2F(p, x) : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-1)}$$

tuviera rango máximo, es decir, igual a $2n - 2$. Sin embargo, eso no se tiene en ningún caso ya que, a partir del Lema 8.2.22, se deduce que tal rango será, a lo sumo, igual a $2n - 3$. Este hecho nos obliga a recurrir a un planteamiento alternativo.

En principio, en este punto, parece razonable (y necesario) restringir nuestro estudio al conjunto de pompas cuya diferencial tiene el *mayor rango permitido* en este contexto, esto es, al conjunto de *pompas rígidas*. En cualquier otro caso, por la propia definición, el núcleo de la diferencial tendrá dimensión estrictamente mayor que tres, por lo que el rango será estrictamente menor que $2n - 3$.

Por otro lado, denotemos por $F^1, \dots, F^{2n-3}, F^{2n-2}$ a las funciones coordenadas de la aplicación de estructura F . Establecemos la siguiente *hipótesis*.

Hipótesis 1.

Sea $(q, y) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^2)^n$ tal que $F^i(q, y) = 0$, para $i = 1, \dots, 2n - 3$. Entonces se tiene que

$$F^{2n-2}(q, y) = 0.$$

Bajo dicha hipótesis, va a ser posible considerar la aplicación

$$\tilde{F} : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n-3},$$

definida por las $2n - 3$ primeras funciones coordenadas de F ,

$$\tilde{F} = (F^1, \dots, F^{2n-3})$$

y usar el Teorema de la Función Inversa para obtener las variaciones deseadas.

En efecto; dada una pompa rígida C y su figura recíproca asociada (p, x) , sabemos que la dimensión de $\text{Ker} D_2F(p, x)$ es igual a tres, y por tanto el rango de $D_2F(p, x)$ es $2n - 3$. Como la aplicación \tilde{F} está formada por las primeras $2n - 3$ funciones coordenadas de F , podemos suponer que el rango de $D_2\tilde{F}(p, x)$ es justamente $2n - 3$, con lo que estaremos en condiciones de aplicar el Teorema de la Función Inversa a \tilde{F} .

De esta forma, podemos afirmar la existencia de un entorno $B \subset \mathbb{R}^n$ de p , y de una aplicación $\mathbf{x} : B \rightarrow (\mathbb{R}^2)^n$, tales que $\mathbf{x}(p) = x$, y

$$\tilde{F}(q, \mathbf{x}(q)) = 0, \text{ para todo } q \in B.$$

En virtud de la Hipótesis 1, se sigue que $F^{2n-2}(q, \mathbf{x}(q)) = 0$, por lo que se concluye que

$$F(q, \mathbf{x}(q)) = 0, \quad q \in B.$$

Es decir, los pares $(q, \mathbf{x}(q))$ satisfacen la condición (8.20) en todos los vértices de la configuración, para todo $q \in B$.

Este procedimiento proporciona variaciones de una pompa rígida C por pompas estacionarias, suponiendo que se satisface la Hipótesis 1. Basta considerar la figura recíproca estándar (p, x) asociada a C , y modificar las correspondientes presiones. Así, para cada $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ suficientemente próximo a (p_1, \dots, p_n) , gracias a la anterior aplicación \mathbf{x} , tendremos que $(q, \mathbf{x}(q))$ es un par que satisface la condición (8.20) en todo vértice, y por tanto, a partir de las expresiones (8.16), (8.17), obtendremos una pompa estacionaria con $(q, \mathbf{x}(q))$ como figura recíproca estándar asociada.

Resumimos lo que acabamos de justificar en el siguiente resultado.

Teorema 8.3.1. *Sea C una pompa plana rígida, y supongamos que se satisface la Hipótesis 1. Entonces, existen variaciones de C por pompas estacionarias, determinadas en cada instante por las presiones de las regiones.*

La característica principal de dichas variaciones es que dependen únicamente de las presiones en cada instante, lo que nos permitirá ajustar dichas presiones según resulte más conveniente en cada ocasión.

En el anterior razonamiento se usa de manera fundamental la Hipótesis 1, ya que en otro caso resulta imposible aplicar el Teorema de la Función Inversa. En este contexto, dicha hipótesis parece razonable por varias razones. En primer lugar, es trivial comprobar que si una configuración presenta una 2-componente, entonces la Hipótesis 1 se cumple. Esto es debido a que los dos vértices asociados a dicha componente dan lugar a funciones coordenadas F^1, F^2 idénticas.

Por otro lado, una justificación más general de este hecho es la siguiente: vimos que la obtención de los centros de los lados de una pompa, a partir de un par que satisfaga la condición (8.20), mediante las expresiones (8.17), queda *unívocamente determinada* usando la información dada por todos los vértices salvo uno. Esto sugiere que si en todos los vértices de una pompa, excepto en uno de ellos, se verifican las condiciones de regularidad, entonces dichas condiciones se verificarán también en ese último vértice.

De hecho, para alguna configuración concreta, hemos probado que la Hipótesis 1 se cumple. Por ejemplo, consideremos la pompa triple estándar, y sean $z_{012}, z_{013}, z_{023}, z_{123}$ sus cuatro vértices. La correspondiente aplicación de estructura

$$F : \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^2)^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

tendrá una función coordenada asociada a cada vértice z_{ijk} .

Entonces, suponiendo que las funciones coordenadas asociadas a $z_{012}, z_{013}, z_{023}$ se anulan sobre un par, hemos comprobado que la función coordenada asociada a z_{123} también se anula. Para ello, en lugar de trabajar directamente con las expresiones dadas por (8.20), utilizamos las condiciones equivalentes (8.19) descritas en el Lema 8.2.15, referentes a distancias entre centros. De esta manera es posible comprobar que, en esta situación concreta, la Hipótesis 1 se cumple. Omitimos los detalles de este caso particular.

En resumen, aunque la Hipótesis 1 ha de ser demostrada en general, en nuestro contexto parece bastante razonable suponer que es verídica.

Nota 8.3.2. Para las pompas planas que no son rígidas, resulta necesario encontrar otros métodos para abordar su estudio. Es de esperar que dichas configuraciones no sean minimizantes en ninguna situación, pero dicha afirmación requiere un análisis más profundo.

Concluimos este Capítulo mostrando expresiones particulares para las fórmulas de variación del área y del perímetro, donde explícitamente aparecen las presiones de cada componente, para variaciones por pompas estacionarias. Previamente demostramos el siguiente resultado, que se usa más adelante.

Lema 8.3.3. *Sea C una pompa plana estacionaria, y consideremos una variación de C por pompas estacionarias, con campo variacional asociado X . Entonces, en cada vértice z_{ijk} de C , se tiene que*

$$v_{ki} \langle X, N_{ki} \rangle + h_{ki} \langle X, v_{ki} \rangle + v_{kj} \langle X, N_{kj} \rangle + h_{kj} \langle X, v_{kj} \rangle = 0,$$

donde v_s, N_s indican los vector tangente y normal a la curva C_s en z_{ijk} .

DEMOSTRACIÓN. Como estamos considerando una variación por pompas estacionarias, los ángulos se preservarán en todo instante. Así, $\langle N_{ki}, N_{kj} \rangle$ es constante a lo largo de la deformación, por lo que

$$0 = X \langle N_{ki}, N_{kj} \rangle = \langle D_X N_{ki}, N_{kj} \rangle + \langle D_X N_{kj}, N_{ki} \rangle.$$

Como

$$\begin{aligned} D_X N_{ki} &= -\nabla \langle X, N_{ki} \rangle - A_{kj}(\langle X, v_{ki} \rangle v_{ki}), \\ D_X N_{kj} &= -\nabla \langle X, N_{kj} \rangle - A_{ki}(\langle X, v_{kj} \rangle v_{kj}), \end{aligned}$$

donde A_s es el endomorfismo de Weingarten de C_s con respecto al normal N_s , se llega a que

$$(8.25) \quad \begin{aligned} 0 &= \langle \nabla \langle X, N_{ki} \rangle, N_{kj} \rangle + \langle A_{ki}(\langle X, v_{ki} \rangle v_{ki}), N_{kj} \rangle \\ &+ \langle \nabla \langle X, N_{kj} \rangle, N_{ki} \rangle + \langle A_{kj}(\langle X, v_{kj} \rangle v_{kj}), N_{ki} \rangle. \end{aligned}$$

Analicemos ahora los sumandos que aparecen en (8.25).

Se puede comprobar, de forma similar a un razonamiento que aparece en la Nota 6.2.16, que

$$\langle N_{kj}, v_{ki} \rangle v_{ki} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{ki}, \quad \langle N_{ki}, v_{kj} \rangle v_{kj} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{kj}.$$

Entonces,

$$\langle \nabla \langle X, N_{ki} \rangle, N_{kj} \rangle = \left\langle \nabla \langle X, N_{ki} \rangle, \frac{\sqrt{3}}{2} v_{ki} \right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{ki}(\langle X, N_{ki} \rangle).$$

Por otro lado, como $A_{ki}(\langle X, v_{ki} \rangle v_{ki}) = h_{ki} \langle X, v_{ki} \rangle v_{ki}$, se tiene que

$$\langle A_{ki}(\langle X, v_{ki} \rangle v_{ki}), N_{kj} \rangle = h_{ki} \langle X, v_{ki} \rangle \langle v_{ki}, N_{kj} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} h_{ki} \langle X, v_{ki} \rangle.$$

Análogamente, se tendrá que

$$\begin{aligned} \langle \nabla \langle X, N_{kj} \rangle, N_{ki} \rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2} v_{kj}(\langle X, N_{kj} \rangle), \\ \langle A_{kj}(\langle X, v_{kj} \rangle v_{kj}), N_{ki} \rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2} h_{kj} \langle X, v_{kj} \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo en (8.25), se llega a la igualdad deseada. \square

En el siguiente Lema, omitiremos por simplicidad indicar la dependencia con respecto al parámetro de la variación considerada.

Lema 8.3.4. *Sea C una pompa estacionaria, y consideremos una variación de C por pompas estacionarias. Entonces, la derivada del área encerrada por una componente S_i es igual a*

$$- \sum_{j \in I(i)} \left(\frac{1}{(p_i - p_j)^2} \frac{d}{dt} (p_i - p_j) L(C_{ij}) + \frac{1}{(p_i - p_j)} \sum_{p \in \partial C_{ij}} \langle X(p), v_{ij}(p) \rangle \right).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea X el campo variacional, y sea $u_{ij} = \langle X, N_{ij} \rangle$. Sabemos que la derivada del área A_i encerrada por S_i viene dada por (6.3),

$$\frac{dA_i}{dt} = - \sum_{j \in I(i)} \int_{C_{ij}} u_{ij}.$$

Por otro lado, como $h_{ij} = p_i - p_j$, se tiene que

$$\frac{d}{dt}(p_i - p_j) = u''_{ij} + (p_i - p_j)^2 u_{ij}.$$

De ahí se obtiene, despejando u_{ij} e integrando sobre C_{ij} , que

$$\int_{C_{ij}} u_{ij} = \frac{1}{(p_i - p_j)^2} \frac{d}{dt}(p_i - p_j) L(C_{ij}) - \frac{1}{(p_i - p_j)^2} \int_{C_{ij}} u''_{ij}.$$

Como

$$\int_{C_{ij}} u''_{ij} = - \sum_{p \in \partial C_{ij}} v_{ij}(p) (\langle X, N_{ij} \rangle),$$

concluimos que

$$\sum_{j \in I(i)} \int_{C_{ij}} u_{ij} = \sum_{j \in I(i)} \frac{1}{(p_i - p_j)^2} \left(\frac{d}{dt}(p_i - p_j) L(C_{ij}) + \sum_{p \in \partial C_{ij}} v_{ij}(p) (\langle X, N_{ij} \rangle) \right).$$

Finalmente, aplicando el Lema 8.3.3, se tiene que

$$\sum_{j \in I(i)} \sum_{p \in \partial C_{ij}} v_{ij}(p) (\langle X, N_{ij} \rangle) = \sum_{j \in I(i)} \sum_{p \in \partial C_{ij}} h_{ij} \langle X(p), v_{ij}(p) \rangle,$$

lo que prueba el resultado. \square

Nota 8.3.5. Una demostración análoga a la del Lema 8.3.4, prueba que la primera variación de la longitud vendrá dada por

$$-\frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1, \dots, \\ j \in I(i)}} \left(\frac{1}{(p_i - p_j)} \frac{d}{dt}(p_i - p_j) L(C_{ij}) + \sum_{p \in \partial C_{ij}} \langle X(p), v_{ij}(p) \rangle \right).$$

Parte III

Apéndice

El problema isoperimétrico en espacios euclídeos con densidad

9.1. Introducción

En los últimos años, las variedades riemannianas dotadas con una densidad están siendo objeto de estudio en diversos trabajos. Un ejemplo de esta situación, con aplicaciones en Probabilidad y Estadística, viene dado por la densidad gaussiana.

Resaltamos que el hecho de considerar una densidad en la variedad, que pondere el cálculo del volumen y del perímetro, no resulta equivalente a reescalar la métrica, por lo que la generalización de las nociones y resultados de la Geometría Riemanniana a variedades con densidad constituye una cuestión interesante. Remitimos al lector a los recientes trabajos de V. Bayle [8], F. Morgan [74] e I. Corwin y otros [35], donde se exponen los últimos avances en estos temas.

También es posible estudiar el problema isoperimétrico, en este ambiente más general. Por ejemplo, para la densidad gaussiana $\exp(-\pi|x|^2)$ en \mathbb{R}^n se sabe, gracias a los trabajos de C. Borell [17], y V. N. Sudakov y B. S. Cirel'son [90] en la década de los setenta, que los semiespacios son regiones isoperimétricas para cualquier volumen prefijado. En 1982 A. Ehrhard [42] encontró una nueva demostración de esta propiedad isoperimétrica de los semiespacios, adaptando las técnicas de simetrización a este ambiente gaussiano. En 1997 S. Bobkov proporcionó una demostración interesante de la desigualdad isoperimétrica gaussiana [15]. Un buen resumen de estos trabajos previos, incluyendo nuevos avances en este sentido, pueden encontrarse en [85, § 3].

Más recientemente, S. Bobkov y C. Houdré [16], centrándose en densidades unimodales con medida total finita en la recta real, lograron calcular explícitamente el perfil isoperimétrico, determinando además algunas de las regiones isoperimétricas. En 2003 M. Gromov [48] estudió las variedades con densidad como “mm-espacios”, y mostró la generalización natural de curvatura media en este contexto, obtenida a partir de la primera variación del perímetro.

El problema isoperimétrico en \mathbb{R}^2 con algunas densidades particulares ha sido tratado por C. Carroll y otros [29], apoyándose en algunos resultados de este Capítulo. Concretamente, demuestran que para la densidad $f(x) = |x|^p$, con $p \in [-2, 0)$, no existen regiones isoperimétricas, y cuando $p \geq 0$, establecen la conjetura de que las soluciones isoperimétricas (que existen en virtud de nuestro Teorema 9.3.5) han de ser bolas conteniendo al origen, pero no centradas en él (éstas últimas son inestables, según nuestro Corolario 9.4.11). Además, para la densidad $f(x, y) = e^x$ prueban que no hay existencia de minimizantes, y sugieren que lo mismo ocurre para la densidad $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$.

En este Capítulo, nosotros tratamos varias cuestiones referentes al problema isoperimétrico en el espacio euclídeo con densidad. Empezaremos demostrando en la Sección 9.3 algunos resultados de existencia de regiones isoperimétricas para densidades definidas en el espacio euclídeo con medida total infinita (Teoremas 9.3.1 y 9.3.5).

En la Sección 9.4 usaremos un enfoque variacional para caracterizar la estabilidad de las bolas centradas en el origen para densidades radiales (Teorema 9.4.9). A partir de este resultado, se tiene el Corolario 9.4.10, que afirma que

las bolas centradas en el origen son estables para cualquier densidad diferenciable, radial y log-convexa.

Por otro lado, en el Corolario 9.4.11 obtenemos que

las bolas centradas en el origen son inestables para cualquier densidad diferenciable, radial y estrictamente log-cóncava.

Además, a partir del Corolario 9.4.10 surge la siguiente conjetura natural: para una densidad radial log-convexa en \mathbb{R}^{n+1} , las bolas centradas en el origen son *minimizantes* para cualquier volumen. Dicha conjetura será probada en el caso unidimensional, y para la densidad $\exp(|x|^2)$ en cualquier dimensión, en Secciones posteriores.

La Sección 9.5 está dedicada a la recta real, y en ella se describen completamente las regiones isoperimétricas para el caso de densidades unimodales. Se usarán ciertos argumentos por comparación que derivarán a la vez existencia y unicidad de minimizantes. Como consecuencias interesantes, se resuelve el problema isoperimétrico para densidades de tipo log-cóncavo y log-convexo (Corolarios 9.5.5 y 9.5.8), mejorando los resultados de S. Bobkov y C. Houdré [16], además de confirmar la conjetura anterior sobre densidades log-convexas, en el caso estricto. Bajo las mismas técnicas, se tratarán también los casos de semirrectas cerradas $[0, +\infty)$ y de intervalos compactos, y el problema de frontera libre en dichos ambientes.

En la Sección 9.6 nos ocuparemos de una densidad particular definida en \mathbb{R}^{n+1} , dada por $f(x) = \exp(c|x|^2)$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. El Teorema 9.6.2 caracteriza completamente las regiones isoperimétricas para esta densidad:

En \mathbb{R}^{n+1} con la densidad definida por $f(x) = \exp(c|x|^2)$, para cada volumen fijo, la correspondiente bola centrada en el origen es la única región isoperimétrica.

Este resultado, demostrado en dimensión arbitraria, refuerza la conjetura realizada en la Sección 9.4 sobre densidades radiales log-convexas. Esta densidad, a diferencia de la densidad gaussiana, da lugar a volumen total infinito para $c > 0$, por lo que la existencia de minimizantes no es una cuestión trivial. La demostración de dicha propiedad se llevará a cabo usando resultados de las Secciones anteriores y con ciertas técnicas de simetrización. Destacamos que este resultado ya fue probado por C. Borell [14], aunque de dicho trabajo no se deduce la *unicidad* que nosotros obtenemos. Como Corolario, se obtiene finalmente una generalización de la desigualdad de Faber-Krahn.

Los resultados que aparecen en este último Capítulo también se pueden encontrar en [86].

9.2. Preliminares

En esta Sección recordaremos brevemente algunas nociones que necesitaremos a lo largo de este Capítulo.

A partir de ahora, nos centraremos en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} , $n \in \mathbb{N}$. Consideremos una densidad continua positiva $f = e^\psi$ definida en \mathbb{R}^{n+1} (nótese que $\psi = \log(f)$). Para cualquier conjunto de Borel Ω contenido en \mathbb{R}^{n+1} , el *volumen* o *medida* de Ω vendrá dado

por

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} f \, dv,$$

y el *perímetro* de Ω vendrá dado por

$$P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} f \, da,$$

donde dv y da son los elementos de volumen y área euclídeos, que provendrán en general de la medida de Lebesgue y la medida de Hausdorff n -dimensional en \mathbb{R}^{n+1} .

De igual forma, el *perímetro* de Ω relativo a un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se define como

$$P(\Omega, U) = \int_{\partial\Omega \cap U} f \, da.$$

Nota 9.2.1. Considerar esta densidad en \mathbb{R}^{n+1} para ponderar volumen y *perímetro* no equivale a reescalar por un factor λ la métrica euclídea original de manera conforme, en cuyo caso ambas magnitudes se reescalarían bajo diferentes potencias de λ .

Definimos también el *perfil isoperimétrico* como la función

$$I_f : [0, \text{vol}(\mathbb{R}^{n+1})) \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$I_f(V) = \inf\{P(\Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ abierto diferenciable con } \text{vol}(\Omega) = V\}.$$

A partir de esta definición, una *región isoperimétrica* (o simplemente un conjunto *minimizante*) para volumen V es un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\text{vol}(\Omega) = V$ y $P(\Omega) = I_f(V)$.

Finalmente, fijado un volumen $V > 0$, es posible considerar, a partir de la definición de *perfil isoperimétrico*, una *sucesión minimizante* para V , es decir, una sucesión $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos diferenciables contenidos en \mathbb{R}^{n+1} , de forma que

$$\text{vol}(\Omega_n) = V, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

y cuya sucesión de *perímetros* $\{P(\Omega_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tienda al valor $I(V)$.

9.3. Existencia y Regularidad

En esta Sección trataremos la existencia y regularidad de regiones isoperimétricas en los espacios euclídeos \mathbb{R}^n con una densidad definida. En general, para una variedad riemanniana con densidad, los razonamientos habituales de compacidad de la Teoría Geométrica de la Medida (véanse [89, 27.3, 31.2] o [72, 5.5, 9.1] y [70, 4.1] o [84, Thm. 2.1]) pueden aplicarse para discutir la existencia de regiones isoperimétricas. En los casos en los que la medida total sea finita, se deduce que las regiones isoperimétricas existen, para cualquier volumen inicial que se considere. Por tanto, nosotros nos centraremos en las situaciones en las que el volumen total sea infinito, proporcionando algunos resultados de existencia (Teoremas 9.3.1 y 9.3.5). Por otro lado, las soluciones isoperimétricas, en caso de que existan, serán conjuntos abiertos cumpliendo las propiedades de regularidad habituales en este contexto (Teorema 9.3.7).

Pasamos a demostrar el primer resultado de existencia.

Teorema 9.3.1. Sea $f = e^\psi$ una densidad definida en \mathbb{R}^{n+1} tal que $f(x) \rightarrow +\infty$ cuando $|x| \rightarrow +\infty$. Supongamos que la sucesión definida por

$$\zeta(m) = \frac{\text{mín} \{f(x) : m \leq |x| \leq m+2\}}{\text{máx} \{f(x)^{n/(n+1)} : m \leq |x| \leq m+2\}}$$

tiende a infinito. Entonces, para esta densidad, existen minimizantes de cualquier volumen dado y son conjuntos acotados de \mathbb{R}^{n+1} .

Nota 9.3.2. Durante la demostración de este resultado se verá que es suficiente suponer que el cociente $\min f(x) / \max f(x)^{n/(n+1)}$ sobre divisiones cúbicas de \mathbb{R}^{n+1} tiende a infinito.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $v(\Omega)$ y $a(\partial\Omega)$ el volumen y área euclídeos de un conjunto Ω . Consideremos una división de \mathbb{R}^{n+1} por medio de cubos abiertos de diámetro 1 y volumen euclídeo v_0 . Sea $\alpha > 0$ la constante isoperimétrica [72, § 12.3 (1)] tal que cualquier conjunto Ω dentro de un cubo C de la división y con $v(\Omega) \leq v_0/2$, verifica que

$$a(\partial\Omega \cap C) \geq \alpha v(\Omega)^{n/n+1}.$$

Por otro lado, existirá $m = m(C) \in \mathbb{N}$ tal que el cubo C esté contenido en la región $\{m \leq |x| \leq m+2\}$. Entonces, a partir de las definiciones de volumen y perímetro dados por la densidad f , y de la sucesión $\{\zeta(m)\}$, no es difícil obtener la siguiente desigualdad:

$$(9.1) \quad P(\partial\Omega \cap C) \geq \alpha \zeta(m) \text{vol}(\Omega)^{n/(n+1)},$$

para cualquier conjunto $\Omega \subset C \subset \{m \leq |x| \leq m+2\}$, con $v(\Omega) \leq v_0/2$.

Fijemos ahora $V > 0$, y consideremos una sucesión minimizante para volumen V en \mathbb{R}^{n+1} ; esto es, una sucesión de conjuntos abiertos diferenciables de volumen V para el espacio euclídeo con densidad, cuyos perímetros se aproximan al valor del perfil isoperimétrico $I_f(V)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que dichos perímetros están acotados superiormente por $I_f(V) + 1$. A partir del Teorema de Compacidad [73, 5.5 y 9.1], es posible extraer una parcial convergente de dicha sucesión. Por esta razón, podemos pensar que la sucesión minimizante es convergente.

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis sobre la sucesión $\zeta(m)$, existirá $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\zeta(m) \geq (1/\varepsilon)^{n/(n+1)}$, para todo $m \geq m_0$. Por otro lado, como f diverge cuando $|x|$ tiende a $+\infty$, podemos suponer que $v(\Omega) \leq v_0/2$ cuando $\Omega \subset C \subset \{|x| \geq m_0\}$. En particular, aplicando (9.1) para los conjuntos Ω en la anterior situación, se sigue que

$$\text{vol}(\Omega) \leq \left(\frac{P(\Omega, C)}{\alpha \zeta(m)} \right)^{(n+1)/n} \leq \varepsilon \alpha' P(\Omega, C)^{(n+1)/n},$$

con $\alpha' = (1/\alpha)^{(n+1)/n}$.

Si ahora sumamos, sobre la colección de cubos C_m contenidos $\{|x| \geq m\}$, la desigualdad anterior, se obtiene que para cualquier conjunto Ω de la sucesión minimizante, y cualquier $m \geq m_0$,

$$\begin{aligned} \text{vol} \left(\Omega \cap \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}_m} C \right) \right) &\leq \varepsilon \alpha' \left(\sum_{C \in \mathcal{C}_m} P(\Omega, C) \right)^{(n+1)/n} \\ &\leq \varepsilon \alpha' P(\Omega)^{(n+1)/n} \leq \varepsilon \alpha' (I_f(V) + 1)^{(n+1)/n}. \end{aligned}$$

De ahí se deduce que los conjuntos de nuestra sucesión minimizante no pierden volumen en infinito, y por tanto, el conjunto límite será una región isoperimétrica para volumen V .

Para demostrar que cualquier región isoperimétrica Ω es un conjunto acotado de \mathbb{R}^{n+1} , procederemos como en [72, Lemma 13.6], véase también [84, Prop. 3.7]. Consideremos un cubo arbitrario $C_r = [-r, r]^{n+1}$ alrededor del origen y dividamos en cubos congruentes de diámetro 1, a lo sumo. Siguiendo la notación $V(r) = \text{vol}(\Omega - C_r)$ y

$P(r) = P(\Omega, \mathbb{R}^{n+1} - C_r)$, se tiene como antes que

$$(9.2) \quad V(r) \leq \varepsilon \alpha' P(r)^{(n+1)/n}, \quad \text{para } r > 0 \text{ suficientemente grande.}$$

Por otro lado, siguiendo las ideas de [72, Lemma 13.5], es posible encontrar una constante $H > 0$, que depende de $\partial\Omega$, de forma que cualquier variación pequeña $|\Delta V|$ de volumen en C_r da lugar a una variación de perímetro $|\Delta P|$ acotada por

$$|\Delta P| \leq H |\Delta V|.$$

Entonces, una variación del volumen de $\Omega - C_r$ supondrá una variación del perímetro acotada por $H|V(r)| + |V'(r)|$ (por la aportación de ∂C_r), para casi todo r (suficientemente grande). Como Ω es un conjunto minimizante, se tiene que para casi todo $r > 0$ suficientemente grande,

$$(9.3) \quad P(r) \leq H V(r) + |V'(r)|.$$

Como $V(r)$ es claramente no-creciente, y tiende a 0 cuando $r \rightarrow +\infty$, combinando las desigualdades (9.2) y (9.3) se llega a que, para cierto valor $c > 0$,

$$c V(r)^{n/(n+1)} \leq -V'(r),$$

para casi todo $r > 0$ suficientemente grande. Si ahora suponemos que Ω es no acotado, entonces $V(r) \neq 0$ y se deduce fácilmente que

$$(n+1) (V^{1/(n+1)})' = V^{-n/(n+1)} V' \leq -c < 0,$$

para casi todo $r > 0$ suficientemente grande, lo que contradice el hecho de que V sea positiva y no-creciente. \square

Nuestro siguiente objetivo es mejorar el Teorema 9.3.1, suavizando las hipótesis requeridas para dimensión dos. Para ello, necesitamos previamente el siguiente Lema, que nos conducirá al Teorema 9.3.5.

Lema 9.3.3. *Sea f una densidad definida en \mathbb{R}^2 , radial y no-decreciente en $[r_0, +\infty)$, con $r_0 > 0$. Entonces, para cualquier conjunto abierto y diferenciable $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contenido en la región $\{|x| \geq r_0\}$, y verificando $P(\Omega) < P(\partial D(r_0)) = 2\pi r_0 f(r_0)$, se tiene la siguiente desigualdad:*

$$P(\Omega)^2 \geq 2 f(r_0) \text{vol}(\Omega).$$

Nota 9.3.4. Para el disco $D(r_0)$ centrado en el origen y de radio r_0 , como la densidad f es radial, es claro que $P(\partial D(r_0)) = 2\pi r_0 f(r_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos pensar que Ω es conexo. Además, la hipótesis sobre el perímetro implica que Ω está acotado y que su clausura $\overline{\Omega}$ no puede contener ningún círculo centrado en el origen. Así, sean r_1 y r_2 las distancias mínima y máxima de $\overline{\Omega}$ al origen, respectivamente. Denotemos por Ω_t a la intersección de Ω con el círculo de radio t , para $t \in (r_1, r_2)$. Es claro que la longitud euclídea de Ω_t es estrictamente menor que $2\pi t$, y que $\partial\Omega_t$ consta al menos de dos puntos. Así se tiene

$$(9.4) \quad \begin{aligned} P(\Omega) &= \int_{\partial\Omega} f(s) ds = \int_{r_1}^{r_2} \left(\int_{\partial\Omega_t} f(s) ds \right) dt \\ &= \int_{r_1}^{r_2} f(t) \text{card}(\partial\Omega_t) dt \geq 2f(r_0) (r_2 - r_1), \end{aligned}$$

donde se ha usado que la densidad es no-decreciente en $[r_0, +\infty)$.

Por otro lado, consideremos la función $F : (r_1, r_2) \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$F(t, x) = tx/|x|.$$

Es fácil ver que $\Omega \subset F(A)$, donde A es el conjunto abierto de pares (t, x) con $t < |x|$ y $f(tx/|x|) < f(x)$ (dado $x_0 \in \Omega$, basta tomar $t = |x_0|$ y $x = \lambda x_0 \in \partial\Omega$ con $|\lambda| > 1$).

Así, la definición del conjunto A junto con el teorema de Fubini nos dan

$$(9.5) \quad \begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &\leq \text{vol}(F(A)) = \int_{F(A)} f(s) ds \leq \int_A f\left(\frac{tx}{|x|}\right) d(t, x) \\ &\leq \int_A f(x) d(t, x) \leq \int_{r_1}^{r_2} \int_{\partial\Omega} f(x) dx dt = (r_2 - r_1) P(\Omega). \end{aligned}$$

Multiplicando las desigualdades (9.4) y (9.5), se obtiene la desigualdad anunciada. \square

Teorema 9.3.5. *Consideremos \mathbb{R}^2 con una densidad f radial y no-decreciente de forma que $f(x) \rightarrow +\infty$, cuando $|x| \rightarrow +\infty$. Entonces, existen minimizantes para cualquier volumen.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos una sucesión minimizante formada por conjuntos abiertos diferenciables, todos con volumen $V > 0$ y perímetros tendiendo a $I_f(V)$. Por el Teorema de Compacidad [73, 9.1] podemos asumir que tal sucesión converge. También podemos suponer que cualquier conjunto Ω de dicha sucesión satisface $P(\Omega) \leq I_f(V) + 1$. Además, como la densidad tiende a $+\infty$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $I_f(V) + 1 < 2\pi m f(m)$, para $m \geq m_0$. Con todo esto, para cada conjunto Ω , podemos aplicar el Lema 9.3.3 a la unión Ω'_m de todas las componentes conexas de Ω contenidas en $\{|x| \geq m\}$ (para $m \geq m_0$), llegando a que

$$\text{vol}(\Omega'_m) \leq \frac{P(\Omega'_m)^2}{2f(m)} \leq \frac{(I_f(V) + 1)^2}{2f(m)}, \quad m \geq m_0.$$

Como $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(m) = +\infty$, se deduce que para cualquier conjunto de la sucesión no hay pérdida de volumen en infinito, por lo que el conjunto límite encerrará volumen V , y por tanto, será minimizante para dicho volumen. \square

Nota 9.3.6. Resaltamos que la hipótesis de *no-decrecimiento* de la densidad es fundamental para que el Teorema 9.3.5 sea cierto (incluso en dimensiones superiores). Por ejemplo, considérese la densidad $f(x) = 1 + |x|^2$ definida en \mathbb{R}^{n+1} ($n > 1$), modificada adecuadamente de forma que cada volumen V_k racional positivo pueda ser encerrado mediante un conjunto (homeomorfo a un disco) de perímetro $1/k$ (a medida que V_k sea mayor, el correspondiente perímetro $1/k$ va decreciendo); esto es posible conseguirlo provocando que el grafo de f presente adecuada sucesión de mínimos relativos que tienda a cero. Entonces, dado cualquier volumen, será posible encontrar una sucesión de conjuntos encerrando dicho volumen, con perímetro arbitrariamente pequeño, lo que implica que no existen regiones isoperimétricas.

Acabamos esta sección recordando las propiedades de regularidad del borde de un conjunto minimizante en un espacio euclídeo con densidad. El resultado es cierto también para cualquier variedad riemanniana (diferenciable) con densidad.

Teorema 9.3.7. ([73, 3.10]) *Consideremos una densidad diferenciable definida en \mathbb{R}^{n+1} . Dada una región isoperimétrica Ω , se tiene que $\Sigma = \partial\Omega$ es una hipersuperficie embebida analítica, salvo posiblemente un conjunto cerrado de singularidades con dimensión de Hausdorff menor o igual que $n - 7$.*

9.4. Fórmulas de Variación

En esta Sección usaremos un enfoque variacional para obtener interesantes propiedades de los conjuntos de \mathbb{R}^{n+1} que minimizan el perímetro hasta segundo orden, para variaciones preservando el volumen. A partir del cálculo de las fórmulas de variación,

lograremos caracterizar la estabilidad de las bolas centradas en el origen para densidades radiales en el espacio euclídeo (Teorema 9.4.9). Además, enunciaremos la Conjetura 9.1, que afirma que dichas bolas son regiones isoperimétricas para cualquier volumen dado, para las densidades radiales log-convexas.

A lo largo de esta Sección, consideraremos densidades diferenciables $f = e^\psi$ definidas en \mathbb{R}^{n+1} . Dicha hipótesis de derivabilidad sobre la densidad facilitará nuestro tratamiento variacional. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto abierto diferenciable, y denotemos por Σ a $\partial\Omega$ y por N al vector normal unitario que apunta hacia el interior. También consideraremos variaciones uniparamétricas

$$\{\phi_t\}_{|t|<\varepsilon} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

con $X = d\phi_t/dt$ como campo infinitesimal asociado y $u = \langle X, N \rangle$ como componente normal de X . Además, $\phi_0 = id|_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Notaremos $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$ y $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$.

Las funciones volumen y perímetro asociadas a la variación vendrán dadas por

$$V(t) = \text{vol}(\Omega_t), \quad P(t) = P(\Omega_t), \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Las primeras derivadas de estas funciones ya aparecen calculadas explícitamente en [8, Chapter 3]. Nosotros incluimos aquí otra demostración de las mismas.

Lema 9.4.1. *Consideremos \mathbb{R}^{n+1} con una densidad diferenciable $f = e^\psi$ y sea Ω un conjunto diferenciable con $\partial\Omega = \Sigma$. La primera derivada de las funciones volumen y perímetro asociadas a una variación con campo asociado X y componente normal $u = \langle X, N \rangle$ vienen dadas por*

$$V'(0) = - \int_{\Sigma} f u \, dv, \quad P'(0) = - \int_{\Sigma} (nH - \langle \nabla \psi, N \rangle) f u \, da,$$

donde H es la curvatura media (euclídea) de Σ y $\nabla \psi$ es el gradiente (euclídeo) de ψ .

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $\text{div } X$ (resp. $\text{div}_{\Sigma} X$) a la divergencia de X (resp. relativa a Σ). Sea $X(f) = \langle \nabla f, X \rangle$. Como

$$V(t) = \int_{\Omega_t} f \, dv = \int_{\Omega} (f \circ \phi_t) |Jac(\phi_t)| \, dv,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} V'(0) &= \int_{\Omega} X(f) \, dv + \int_{\Omega} f \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |Jac(\phi_t)| \right) \, dv \\ &= \int_{\Omega} (\langle \nabla f, X \rangle + f \, \text{div } X) \, dv = \int_{\Omega} \text{div}(fX) \, dv = - \int_{\Sigma} f u \, da, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que $(d/dt)|_{t=0} |Jac(\phi_t)| = \text{div } X$ [89, § 9], y en la última igualdad se ha aplicado el Teorema de la divergencia.

Análogamente, para el perímetro se tiene

$$\begin{aligned} P'(0) &= \int_{\Sigma} X(f) \, da + \int_{\Sigma} f \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} |Jac(\phi_t)| \right) \, da \\ &= \int_{\Sigma} (\langle \nabla f, X \rangle + f \, \text{div}_{\Sigma} X) \, da = \int_{\Sigma} (\langle \nabla f, uN \rangle + \text{div}_{\Sigma}(fX)) \, da \\ &= \int_{\Sigma} f u \langle \nabla \psi, N \rangle \, da - \int_{\Sigma} nH f u \, da = - \int_{\Sigma} (nH - \langle \nabla \psi, N \rangle) f u \, da. \end{aligned}$$

Para obtener la cuarta igualdad hemos tenido en cuenta que la integral sobre Σ de la divergencia de la parte tangente de fX se anula, por otra aplicación del Teorema de la divergencia. \square

Tal y como se hace en [8, Chapter 3], la expresión anterior sugiere la siguiente definición.

Definición 15. Consideremos \mathbb{R}^{n+1} con una densidad diferenciable $f = e^\psi$. Sea Ω un conjunto abierto de \mathbb{R}^{n+1} , y $\Sigma = \partial\Omega$. Se define la *curvatura media* (generalizada) de Σ con respecto a N como la función

$$(9.6) \quad H_\psi = nH - \langle \nabla\psi, N \rangle,$$

donde N es el vector normal interior a Σ , y H es la curvatura media euclídea de Σ con respecto a N .

Nota 9.4.2. Con la anterior definición (9.6), la primera variación del perímetro se puede escribir como

$$P'(0) = - \int_{\Sigma} H_\psi f u \, da.$$

De forma análoga a como se hizo en el Capítulo 2, diremos que una variación $\{\phi_t\}_t$ preserva el volumen si $V(t)$ es constante para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Y diremos que un conjunto Ω es *estacionario* si $P'(0) = 0$ para cualquier variación preservando volumen. Así, los conjuntos estacionarios pueden verse como los puntos críticos del funcional perímetro. Es claro que cualquier región isoperimétrica es, en particular, estacionaria.

La siguiente caracterización de conjuntos estacionarios es similar a la establecida por J. L. Barbosa y M. do Carmo [4, Proposition 2.7] en el caso de \mathbb{R}^{n+1} con la densidad estándar $f \equiv 1$. La demostración está basada en el Lema 9.4.1 y en el hecho de que cualquier función u ortogonal a f en $L^2(\Sigma)$ es la componente normal de un campo vectorial asociado a una variación que preserva el volumen [4, Lemma 2.2].

Proposición 9.4.3. . Sea $f = e^\psi$ una densidad diferenciable definida en \mathbb{R}^{n+1} . Entonces, para Ω un conjunto abierto y diferenciable, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) Ω es estacionario.
- (ii) $\Sigma = \partial\Omega$ tiene curvatura media (generalizada) constante H_0 .
- (iii) Existe una constante H_0 tal que $(P - H_0 V)'(0) = 0$, para cualquier variación de Ω .

Ejemplo 9.1. Consideremos una densidad diferenciable $f = e^\psi$ definida sobre la recta real. Entonces, es fácil probar que un intervalo acotado (a, b) es estacionario si y sólo si $\psi'(a) = -\psi'(b)$.

El siguiente ejemplo muestra algunas hipersuperficies de \mathbb{R}^{n+1} con curvatura media (generalizada) constante, cuando la densidad que consideramos es *radial*.

Ejemplo 9.2. Sea $f = e^\psi$ una densidad radial definida en \mathbb{R}^{n+1} . Como necesariamente ψ ha de ser una función radial en \mathbb{R}^{n+1} , podemos escribir

$$\psi(x) = \delta(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1},$$

para cierta función δ . Es inmediato comprobar que

$$\nabla\psi(x) = \frac{\delta'(r)}{r} x, \quad r = |x|,$$

por lo que la curvatura media H_ψ de una hipersuperficie Σ con respecto al normal interior N vendrá dada por

$$H_\psi(x) = nH(x) - \frac{\delta'(r)}{r} \langle x, N(x) \rangle, \quad r = |x|,$$

donde H es la curvatura media euclídea de Σ con respecto a N .

En particular, en el caso de que Σ es una esfera de radio $r > 0$, su curvatura media generalizada H_ψ será constante si y sólo si Σ está centrada en el origen. En tal situación, $H_\psi = n/r + \delta'(r)$.

Por otro lado, si Σ es un hiperplano definido por $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, w \rangle = c\}$, con $w \in \mathbb{R}^{n+1}$, $|w| = 1$, entonces la curvatura media de Σ con respecto al normal $N = -w$ es

$$(9.7) \quad H_\psi(x) = -c \frac{\delta'(r)}{r}, \quad r = |x|.$$

En este caso, se sigue que cualquier hiperplano que pase por el origen es una hipersuperficie minimal de \mathbb{R}^{n+1} , para cualquier densidad radial.

En general, no podemos esperar que un hiperplano arbitrario de \mathbb{R}^{n+1} , que no pase por el origen, tenga curvatura media generalizada constante para una densidad radial. De hecho, a partir de (9.7) se obtiene fácilmente el siguiente lema, que caracteriza las densidades para las que ocurre tal hecho.

Lema 9.4.4. *Sea $f = e^\psi$ una densidad radial y diferenciable definida en \mathbb{R}^{n+1} . Supongamos que existe un hiperplano Σ de curvatura media H_ψ constante, y que no contiene al origen. Entonces existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ y $r_0 > 0$ tales que*

$$\psi(x) = e^{a|x|^2+b}, \quad \text{para } |x| \geq r_0.$$

Siguiendo el esquema variacional habitual, calcularemos ahora la segunda fórmula de variación para el funcional $P - H_\psi V$, para cualquier deformación de un conjunto estacionario.

Proposición 9.4.5. ([8, Section 3.4.6]) *Sea Ω un conjunto abierto estacionario en \mathbb{R}^{n+1} dotado de una densidad diferenciable $f = e^\psi$. Sea N el vector normal unitario interior a $\Sigma = \partial\Omega$, y H_ψ la curvatura media constante de Σ con respecto a N . Entonces, si consideramos una variación de Ω con campo vectorial asociado $X = uN$ en Σ , se tiene que*

$$(9.8) \quad (P - H_\psi V)''(0) = \int_\Sigma f (|\nabla_\Sigma u|^2 - |\sigma|^2 u^2) da + \int_\Sigma f u^2 (\nabla^2 \psi)(N, N) da,$$

donde $\nabla_\Sigma u$ es el gradiente de u relativo a Σ , $|\sigma|^2$ es la suma al cuadrado de las curvaturas principales de Σ , y $\nabla^2 \psi$ es el hessiano euclídeo de ψ .

DEMOSTRACIÓN. A partir de las primeras fórmulas de variación para volumen y perímetro del Lema 9.4.1 se tiene que

$$(P - H_\psi V)'(t) = - \int_{\Sigma_t} (H_\psi)_t f u_t da_t + H_\psi \int_{\Sigma_t} f u_t da_t,$$

donde $(H_\psi)_t$ es la curvatura media de Σ_t . Derivando y evaluando en $t = 0$, llegamos a

$$(9.9) \quad (P - H_\psi V)''(0) = - \int_\Sigma H'_\psi(0) f u da,$$

por lo que tenemos que calcular la derivada de la curvatura media generalizada a lo largo de Σ_t . Denotando por $D_U V$ a la conexión de Levi-Civita en \mathbb{R}^{n+1} , a partir de la expresión (9.6), se tendrá que

$$\begin{aligned} H'_\psi(0) &= nH'(0) - \langle D_X \nabla \psi, N \rangle - \langle \nabla \psi, D_X N \rangle \\ &= nH'(0) - u (\nabla^2 \psi)(N, N) + \langle \nabla \psi, \nabla_\Sigma u \rangle, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado que $D_X N = -\nabla_\Sigma u$. Por otro lado, se sabe que

$$(9.10) \quad nH'(0) = \Delta_\Sigma u + |\sigma|^2 u,$$

con Δ_Σ el Laplaciano relativo a Σ (véase [87]). Así,

$$H'_\psi(0) = \Delta_\Sigma u + |\sigma|^2 u - u (\nabla^2 \psi)(N, N) + \langle \nabla_\Sigma \psi, \nabla_\Sigma u \rangle.$$

Sustituyendo en (9.9) se concluye que

$$(9.11) \quad (P - H_\psi V)''(0) = - \int_\Sigma f u (\Delta_\Sigma u + |\sigma|^2 u) da - \int_\Sigma f u \langle \nabla_\Sigma \psi, \nabla_\Sigma u \rangle da \\ + \int_\Sigma f u^2 (\nabla^2 \psi)(N, N) da.$$

Finalmente, integrando por partes, llegamos a que

$$- \int_\Sigma f u (\Delta_\Sigma u + |\sigma|^2 u) da - \int_\Sigma f u \langle \nabla_\Sigma \psi, \nabla_\Sigma u \rangle da = \int_\Sigma f (|\nabla_\Sigma u|^2 - |\sigma|^2 u^2) da,$$

con lo que se tiene lo enunciado. \square

Nota 9.4.6. En una variedad riemanniana diferenciable con densidad, en la segunda variación aparece un término adicional que depende de la curvatura de Ricci de la variedad en la dirección normal N . Más concretamente, dicho término proviene de (9.10), y coincide con

$$- \int_\Sigma \text{Ric}(N, N) f u^2 da.$$

La expresión (9.8), o equivalentemente (9.11), define una forma cuadrática en C_0^∞ llamada *forma índice* asociada a Σ , que denotaremos por Q_ψ . Concretamente, para $u, v \in C_0^\infty$,

$$(9.12) \quad Q_\psi(u, v) = - \int_\Sigma f (\Delta_\Sigma u + |\sigma|^2 u) v da \\ - \int_\Sigma f \langle \nabla_\Sigma \psi, \nabla_\Sigma u \rangle v da + \int_\Sigma f u v (\nabla^2 \psi)(N, N) da.$$

Estamos ahora en condiciones de definir la noción de conjunto estable, que se corresponde con los *mínimos locales* para el funcional perímetro asociado a variaciones que preservan el volumen encerrado.

Definición 16. Sea Ω un conjunto abierto y diferenciable contenido en el espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} con una densidad diferenciable. Diremos que Ω es un conjunto *estable* si es estacionario, y verifica que $P''(0) \geq 0$ para cualquier variación preservando el volumen.

Tal y como se hace en [4, Proposition 2.10], podemos caracterizar la estabilidad de un conjunto en términos de la forma índice (9.12). Así, se tiene el siguiente resultado.

Lema 9.4.7. Consideremos \mathbb{R}^{n+1} con una densidad diferenciable $f = e^\psi$, y sea Ω un conjunto abierto y diferenciable de \mathbb{R}^{n+1} . Entonces, Ω es estable si y sólo si es estacionario y la forma índice (9.12) de $\Sigma = \partial\Omega$ satisface

$$Q_\psi(u, u) \geq 0 \text{ para cualquier } u \in C_0^\infty(\Sigma) \text{ tal que } \int_\Sigma f u da = 0.$$

El Lema 9.4.7 nos da la condición que ha de satisfacer la forma índice para que un conjunto sea estable. A la vista de la definición y de (9.8), dicha condición es, explícitamente, equivalente a que

$$(9.13) \quad \int_\Sigma f (|\nabla_\Sigma u|^2 - |\sigma|^2 u^2) da + \int_\Sigma f u^2 (\nabla^2 \psi)(N, N) da \geq 0,$$

para toda función $u \in C_0^\infty(\Sigma)$ tal que $\int_\Sigma f u da = 0$.

Un análisis de (9.13) sugiere que el hecho de que la densidad $f = e^\psi$ considerada sea *log-convexa* o *log-cóncava* (equivalentemente, que la función ψ sea convexa o cóncava) va

a influir en el estudio de la estabilidad de un conjunto. Téngase en cuenta que, en caso de que f sea log-convexa, entonces $(\nabla^2\psi)(w, w) \geq 0$, mientras que si f es log-cóncava, entonces $(\nabla^2\psi)(w, w) \leq 0$, para todo $w \in \mathbb{R}^{n+1}$.

De esta forma, en vista del segundo sumando de (9.13), se sigue que la noción de estabilidad es más restrictiva cuando la densidad es log-cóncava, mientras que cuando sea log-convexa, dicho sumando será siempre mayor o igual que cero, haciendo que la estabilidad de los conjuntos sea más asequible. Los Corolarios 9.4.10 y 9.4.11, referentes a bolas centradas en el origen, son una muestra de este fenómeno.

El siguiente resultado trata el carácter conexo de los conjuntos estables cuando la densidad considerada es log-cóncava. Se obtiene como consecuencia del Lema 9.4.7, sin más que utilizar funciones localmente constantes que no se anulen en ningún instante en la forma índice (9.12).

Corolario 9.4.8. *Si Ω es una región diferenciable estable en \mathbb{R}^{n+1} con una densidad diferenciable y log-cóncava, entonces la hipersuperficie $\Sigma = \partial\Omega$ es conexa o totalmente geodésica. Además, si la densidad es estrictamente log-cóncava, se tiene que Σ es conexa.*

El principal resultado de esta Sección también guarda relación con el carácter log-convexo o log-cóncavo de la densidad considerada en \mathbb{R}^{n+1} . El siguiente Teorema 9.4.9 nos caracteriza la estabilidad de las bolas centradas en el origen, para densidades diferenciables y radiales. Nos va a conducir, además, a formular una conjetura referente a las regiones isoperimétricas de \mathbb{R}^{n+1} para densidades diferenciables, radiales y log-convexas.

Teorema 9.4.9. *Consideremos una densidad diferenciable y radial $f = e^\psi$ en \mathbb{R}^{n+1} . Denotemos por $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a la función definida por $\delta(|x|) = \psi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, la bola B_r centrada en el origen y de radio $r > 0$ es estable si y sólo si $\delta''(r) \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Usaremos el Lema 9.4.7 para caracterizar la estabilidad. Es evidente que, en este caso, $\Sigma = \partial B_r$ es una esfera de radio r centrada en el origen. Entonces, como la densidad es radial, se sigue que es constante sobre Σ . En consecuencia, una función $u \in C^\infty$ es ortogonal a f en $L^2(\Sigma)$ (y por tanto, dará lugar a una variación diferenciable preservando volumen) si y sólo si u tiene media nula en Σ . Además, se tiene que $(\nabla^2\psi)(N, N) = \delta''(r)$ en Σ , siendo N el vector normal unitario a Σ apuntando hacia el interior.

Entonces, la forma índice (9.12) resulta

$$(9.14) \quad Q_\psi(u, u) = f(r) \int_\Sigma (|\nabla_\Sigma u|^2 - |\sigma|^2 u^2) da + f(r) \delta''(r) \int_\Sigma u^2 da.$$

Como las bolas son estables en \mathbb{R}^{n+1} al considerar la densidad estándar $f \equiv 1$, se tendrá que el primer sumando es no-negativo, anulándose en el caso de que la función u dé lugar a una traslación en \mathbb{R}^{n+1} .

Si $\delta''(r) \geq 0$, entonces la forma índice es no-negativa y la bola B_r es estable, en virtud del Lema 9.4.7. Recíprocamente, si B_r es estable, lo será en particular al considerar traslaciones infinitesimales, de donde se deduce necesariamente que $\delta''(r) \geq 0$, lo que concluye la demostración. \square

Corolario 9.4.10. *En un espacio euclídeo con densidad diferenciable, radial y log-convexa, las bolas centradas en el origen son estables.*

A partir del Corolario anterior, formulamos la siguiente conjetura.

Conjetura 9.1. Sea \mathbb{R}^{n+1} con un densidad diferenciable, radial y log-convexa. Entonces, las bolas centradas en el origen son regiones isoperimétricas para cualquier volumen dado.

En las Secciones 9.5 y 9.6 veremos que la Conjetura 9.1 es cierta en algunas situaciones particulares. Concretamente, se cumplirá en el caso de la recta real y densidades estrictamente log-convexas (Corolario 9.5.9), y también para la densidad $f(x) = \exp |x^2|$, para $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ (Teorema 9.6.2). Además, también se tendrá que la unicidad de los conjuntos minimizantes.

Otra consecuencia interesante del Teorema 9.4.9 es que para una densidad *estrictamente* log-cóncava en \mathbb{R}^{n+1} , las bolas resultan ser inestables, y por tanto no serán soluciones isoperimétricas.

Corolario 9.4.11. *En un espacio euclídeo con densidad diferenciable, radial y estrictamente log-cóncava, las bolas centradas en el origen son inestables.*

DEMOSTRACIÓN. Si usamos el criterio dado por el Lema 9.4.7, con la componente normal u correspondiente al campo de traslaciones de \mathbb{R}^{n+1} , que son variaciones preservando el volumen, se puede razonar, de forma análoga a la demostración del Teorema 9.4.9, que $Q_\psi(u, u) < 0$, lo que da la inestabilidad. \square

El hecho de que las bolas puedan ser inestables en este contexto de espacios con densidad nos lleva a pensar que el tratamiento del problema isoperimétrico, en ciertas situaciones, puede ser complejo. El siguiente ejemplo muestra que existen densidades (radiales y log-cóncavas) para las que los conjuntos minimizantes no son ni bolas ni semiespacios.

Corolario 9.4.12. *Hay densidades diferenciables, radiales y log-cóncavas (con volumen total finito) definidas en \mathbb{R}^2 para las que las regiones isoperimétricas no son semiplanos ni bolas.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la densidad $f = e^\psi$, con $\psi(x) = -\sqrt{|x|^2 + 1}$. El volumen total V_0 de esta densidad se puede comprobar que es finito, y por tanto, existirán conjuntos minimizantes para cualquier volumen que se fije, tal y como se indica al comienzo de la Sección 9.3. El Hessiano de ψ en cualquier punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ viene dado por

$$(\nabla^2 \psi)_{(x,y)}(a, b) = \frac{-(bx - ay)^2 - a^2 - b^2}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}},$$

por lo que f resulta ser estrictamente log-cóncava. Se sigue por el Ejemplo 9.2 que las únicas bolas con curvatura media constante son las centradas en el origen, que por el Teorema 9.4.9 son inestables. Por otro lado, teniendo en cuenta el Ejemplo 9.2 y el Lema 9.4.4, los únicos planos con curvatura media constante son los que pasan por el origen. Estos planos encierran volumen $V_0/2$, es decir, la mitad del volumen total, por lo que para volúmenes diferentes el correspondiente minimizante no puede ser ni una bola ni un semiplano. \square

9.5. La recta real con densidad

En esta Sección pretendemos analizar el problema isoperimétrico en la recta real \mathbb{R} , con una densidad log-cóncava o log-convexa. Para ello, empezaremos estudiando dicho problema en un ambiente más asequible, el de densidades *unimodales*.

Definición 17. Diremos que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *unimodal* si existe $x_0 \in (0, +\infty]$ tal que f es creciente (respectivamente decreciente) en $(-\infty, x_0)$, y creciente (respectivamente decreciente) en $(x_0, +\infty)$.

Nótese que, en particular, y de acuerdo a esta definición, las funciones que sean monótonas, es decir, crecientes o decrecientes en todo \mathbb{R} , y no necesariamente de manera estricta, también son funciones unimodales.

El estudio de las densidades de tipo unimodal, nos va a permitir resolver completamente el problema isoperimétrico para densidades log-cóncavas y log-convexas definidas en \mathbb{R} (Corolarios 9.5.5 y 9.5.8), describiendo los minimizantes que se pueden dar en cada caso. Como consecuencia interesante, deduciremos que la Conjetura 9.1 se verifica en el caso unidimensional, para densidades estrictamente log-convexas.

A modo de ejemplo de aplicación, en otras situaciones, de las técnicas introducidas en esta Sección, discutiremos también el problema isoperimétrico en semirrectas y en intervalos reales acotados, para densidades unimodales. Finalmente también consideraremos el problema de frontera libre en estos mismos espacios, para densidades del mismo tipo.

Resaltamos que el estudio del problema isoperimétrico para densidades de tipo unimodal ya ha sido previamente considerado por S. Bobkov y C. Houdré [16, Section 13], con la hipótesis adicional de volumen total de \mathbb{R} finito. En dicho trabajo, se calcula el perfil isoperimétrico y se dan algunos ejemplos de regiones isoperimétricas. Nuestro enfoque del problema, además de ser más general, utiliza técnicas y procedimientos sencillos, que nos permitirán clasificar *completamente* los conjuntos minimizantes, además de ser aplicables en otras situaciones.

9.5.1. El problema isoperimétrico para densidades unimodales. Comencemos discutiendo el problema isoperimétrico para densidades monótonas, que constituyen un caso particular de las unimodales. Destacamos que para estas densidades, habrá ocasiones en las que los conjuntos minimizantes no existan para ningún volumen prefijado.

Recordemos previamente que, dada una función f , se dice que un final $E = \pm\infty$ tiene medida finita si f es integrable en un entorno de E .

Proposición 9.5.1. *Sea f una densidad monótona definida en \mathbb{R} y denotemos por E el final donde f alcanza su ínfimo valor.*

Si E tiene medida finita, entonces para cualquier volumen que se considere, una semirrecta conteniendo a E es la única región isoperimétrica.

Si E tiene medida infinita, entonces el perfil isoperimétrico coincide con la constante $2f(E)$, donde $f(E) = \lim_{x \rightarrow E} f(x) \in \mathbb{R}$, y dicho valor se alcanzará (caso de existencia de minimizante) o se aproximará (caso de no existencia) por medio de intervalos acotados tendiendo a E .

DEMOSTRACIÓN. En el caso de que E tenga medida finita, fijado un volumen V , cualquier candidato Ω' diferente de una semirrecta conteniendo a E de volumen V constará de, al menos, dos puntos en el borde, con uno de ellos colocado fuera de la semirrecta. Por la monotonía de f , se concluye que Ω' tiene estrictamente más perímetro que la semirrecta.

En el caso de que E tenga medida infinita, cualquier abierto U encerrando un volumen dado tendrá como mínimo dos puntos en el borde. Desplazando U hacia el final E , se obtiene que el perfil isoperimétrico es justamente $2f(E)$. Dicho valor será alcanzado por un intervalo acotado, en caso de que f se haga constante en un intervalo de E (y entonces dicho intervalo será la solución isoperimétrica), o podrá aproximar por una sucesión de tales intervalos (lo que implica la no existencia de región isoperimétrica). \square

Nota 9.5.2. Todas las posibilidades mostradas en la Proposición 9.5.1 anterior pueden ocurrir. Para la densidad creciente $f(x) = e^x$, el final $E = -\infty$ tiene medida finita y las semirrectas $(-\infty, x)$ son los únicos minimizantes para volumen fijo. Además, el perfil

isoperimétrico viene dado por $I_f(V) = V$, para $V > 0$. Por otro lado, para la densidad estándar $f \equiv 1$ el perfil es constante y las regiones isoperimétricas resultan ser intervalos acotados. Finalmente, con la densidad $f(x) = e^x + 1$, se tiene que el final $E = -\infty$ tiene medida infinita, el perfil es constantemente igual a 2 $f(E) = 2$ y nunca se alcanza (puede ir aproximándose por intervalos acotados que tienden a E), por lo que las regiones isoperimétricas no existen.

Pasamos a discutir ahora el caso de las densidades unimodales en general. Dada una función unimodal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es *creciente-decreciente* (respectivamente *decreciente-creciente*) si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que f es creciente (resp. decreciente) en $(-\infty, x_0)$ y decreciente (resp. creciente) en $(x_0, +\infty)$, no necesariamente de manera estricta. El siguiente resultado describe cómo son las regiones isoperimétricas para densidades unimodales de tipo creciente-decreciente.

Teorema 9.5.3. *Sea f una densidad creciente-decreciente en \mathbb{R} . Entonces, si para un volumen dado existe minimizante, éste será una semirrecta, un intervalo acotado donde f alcanza su máximo o su mínimo, o el complementario de uno de estos conjuntos. Si no existe minimizante, el perímetro ínfimo se aproximará a partir de un intervalo acotado tendiendo a $\pm\infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un conjunto abierto diferenciable encerrando el volumen prefijado. Si su clausura contiene a un punto x_0 donde f alcanza su máximo, entonces es posible reemplazar dicho conjunto por un intervalo conteniendo a x_0 , preservando el volumen y reduciendo el perímetro. Y entre todos los posibles, existe uno con el menor perímetro (síganse los argumentos rutinarios que se derivan de la compacidad).

Supongamos ahora que la clausura no contiene ningún punto donde f alcance su máximo valor. Entonces, como la densidad es monótona a ambos lados del máximo (o del intervalo donde f alcance su máximo), por la Proposición 9.5.1 podemos centrarnos en conjuntos que sean un intervalo en un lado, o la unión de dos intervalos (uno a cada lado). Para los intervalos situados a un lado, desplazándolos hacia el final correspondiente, se sigue que el minimizante será una semirrecta (si algún final tiene medida finita), o el perímetro ínfimo será $2 \min\{f(-\infty), f(+\infty)\}$, que podrá ser alcanzado por intervalos acotados contenidos donde f toma constantemente su mínimo valor. Como la unión de dos de estos intervalos (uno a cada lado) se puede sustituir por un único intervalo del mismo tipo, reduciendo perímetro, se concluye que los posibles minimizantes son los anunciados. Además, si no hay existencia, nos aproximaremos al perímetro ínfimo a través de intervalos acotados, aproximándose al correspondiente final. \square

Los siguientes ejemplos muestran que todas las posibilidades enunciadas en el Teorema 9.5.3 se pueden dar.

Ejemplo 9.3. Consideremos la densidad $f(x) = e^{-|x|}$, que tiene medida total finita (Figura 9.1). Es fácil ver que todos los candidatos para volumen $V = 1$ (semirrectas, cualquier intervalo acotado conteniendo al origen, y complementarios) tienen el mismo perímetro. Así, todas las posibilidades ocurren realmente. Además, esto muestra que no hay unicidad de minimizantes para $V = 1$, y que, aunque la densidad sea simétrica, las regiones isoperimétricas (acotadas) no tienen que serlo.

Ejemplo 9.4. Consideremos ahora la siguiente densidad definida en \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & x \leq \log(6), \\ \frac{1}{6} & x \geq \log(6). \end{cases}$$

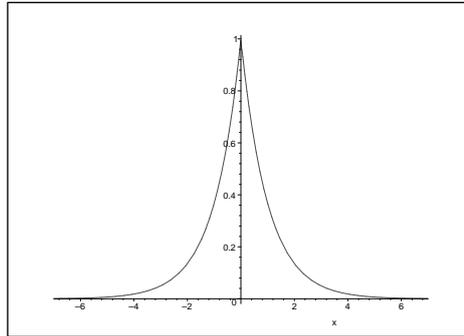


FIGURA 9.1. Para la densidad $e^{-|x|}$, todos los posibles minimizantes se dan

El final izquierdo tiene medida finita, mientras que el final derecho tiene medida infinita (véase la gráfica de la Figura 9.2). Así, sólo las semirrectas conteniendo a $-\infty$ y los intervalos acotados son los posibles minimizantes para un volumen dado. Para $V = 1/3$, se puede probar que que las regiones isoperimétricas son la correspondiente semirrecta, y cualquier intervalo acotado contenido en $[1/6, +\infty)$. Sin embargo, para volumen $V > 1/3$, sólo los intervalos acotados contenidos en $[1/6, +\infty)$ son minimizantes. Este hecho muestra que los minimizantes acotados no tienen que contener siempre al punto donde f alcanza su máximo.

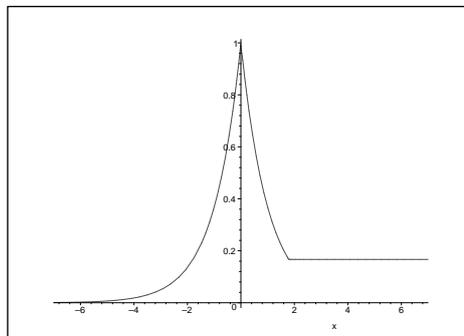


FIGURA 9.2. Para esta densidad, los minimizantes son semirrectas e intervalos acotados

Ejemplo 9.5. Sea ahora la densidad definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & x \leq \log(6), \\ \frac{1}{9} + \frac{1}{x - \log(6) + 18} & x \geq \log(6), \end{cases}$$

a la que corresponde la gráfica de la Figura 9.3. Como en el Ejemplo 9.4, los finales $-\infty$ y $+\infty$ tienen medida finita e infinita, respectivamente. Se puede comprobar que para volúmenes pequeños, las semirrectas conteniendo a $-\infty$ son minimizantes. Sin embargo, para volumen $V = 1/3$, es posible encontrar una sucesión de intervalos acotados de volumen V que converge a $+\infty$, con perímetro tendiendo a $2/9$. Como las semirrectas y

cualquier intervalo acotado de volumen V tienen más perímetro, se concluye que para volumen $1/3$ no existen regiones isoperimétricas para esta densidad.

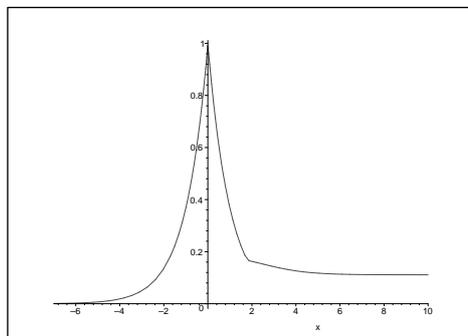


FIGURA 9.3. Para esta densidad, no siempre hay existencia de minimizantes

Estudiamos ahora el problema isoperimétrico para densidades unimodales de tipo decreciente-creciente. Esto es, dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ densidad real, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que f es decreciente en el intervalo $(-\infty, x_0)$, y creciente en $(x_0, +\infty)$. Obsérvese que en estos casos, siempre se alcanzará el mínimo de f . Para tratar el problema isoperimétrico con estas densidades reales, usaremos las mismas técnicas que anteriormente, obteniéndose el siguiente resultado.

Teorema 9.5.4. *Sea f una densidad decreciente-creciente definida en \mathbb{R} . Entonces, las regiones isoperimétricas existen para cualquier volumen que se considere. Además, dichas regiones son intervalos acotados en cuya clausura la densidad f alcanza su mínimo valor.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Ω un conjunto abierto encerrando un volumen finito, y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto donde f alcance su mínimo. Consideremos el intervalo acotado I (conteniendo a x_0) de forma que

$$\text{vol}(I \cap (-\infty, x_0]) = \text{vol}(\Omega \cap (-\infty, x_0]), \quad \text{vol}(I \cap [x_0, +\infty)) = \text{vol}(\Omega \cap [x_0, +\infty)),$$

es decir, encerrando el mismo volumen que Ω , a cada lado de x_0 . Es fácil ver que dicho intervalo tiene menos perímetro que Ω . Así, desde el punto de vista isoperimétrico, nos podemos centrar en intervalos acotados cuyo clausura contiene a x_0 . Finalmente, como entre todos esos intervalos existe uno de perímetro mínimo, ese será el minimizante en cuestión. \square

9.5.2. El problema isoperimétrico para densidades de tipo log-cóncavo y log-convexo. Ahora nos centraremos en las densidades de tipo *log-cóncavo* y *log-convexo*, aplicando los resultados obtenidos para densidades unimodales en la Subsección 9.5.1 anterior. El siguiente corolario es una consecuencia directa de la Proposición 9.5.1, el Teorema 9.5.3 y de algunas propiedades elementales de las funciones cóncavas.

Corolario 9.5.5. *Sea f una densidad log-cóncava definida en \mathbb{R} . Entonces se tiene*

- i) *Si la medida total es finita, entonces existen los minimizantes para cualquier volumen prefijado, y éstos pueden ser semirrectas, uniones de dos semirrectas disjuntas, o intervalos acotados conteniendo al máximo de f .*
- ii) *Si ambos finales tienen medida infinita, entonces la densidad resulta necesariamente constante y los minimizantes para cualquier valor del volumen son intervalos acotados.*

- iii) Si la densidad tiene volumen infinito pero uno de sus finales tiene medida finita, entonces las semirrectas conteniendo dicho final son las únicas regiones isoperimétricas para volumen fijo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f = e^\psi$, con ψ función cóncava.

i) Como el volumen total es finito, existirán minimizantes para cualquier valor del volumen que se considere. Además, f ha de tender a 0 en cada uno de los finales. Entonces, ψ ha de tender necesariamente a $-\infty$ para $x \rightarrow \pm\infty$, con lo que será una función creciente-decreciente que presenta un máximo, por concavidad. En consecuencia, f también será creciente-decreciente, alcanzando su máximo valor en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Aplicando directamente el Teorema 9.5.3, los minimizantes serán semirrectas, intervalos acotados, o complementarios. Nótese que como f no alcanza su mínimo valor, los intervalos acotados que pueden aparecer son los que contienen a x_0 .

ii) Si ambos finales tienen medida infinita, entonces ψ no puede tender a $-\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Como ψ es cóncava, la única posibilidad es que sea constante, por lo que la densidad también será constante en \mathbb{R} . Entonces los minimizantes serán intervalos acotados, para cualquier volumen.

iii) En este caso, la densidad tiene un final con medida finita, y otro con medida infinita (al tener volumen total infinito). Así, ψ tenderá a $-\infty$ en un final, pero no tenderá a $-\infty$ en el otro. Al ser cóncava, ψ tiene que ser monótona, y por tanto también lo será f . A partir de la Proposición 9.5.1, los únicos minimizantes serán semirrectas conteniendo al final de medida finita. \square

El Ejemplo 9.3 anterior prueba que todos los posibles conjuntos minimizantes, que aparecen en el Corolario 9.5.5 para el caso de densidad log-cóncava con medida total finita, pueden aparecer. En este mismo contexto, C. Borell [18, Corollary 2.2] ya demostró que las semirrectas son siempre regiones isoperimétricas (véase también [16, Corollary 13.8]). En el siguiente Corolario 9.5.6 daremos una demostración diferente de este hecho, obteniendo además *unicidad*, para el caso de densidades *estrictamente* log-cóncavas.

Corolario 9.5.6. Sea $f = e^\psi$ una densidad log-cóncava definida en \mathbb{R} , con volumen total finito. Entonces, las semirrectas son siempre regiones isoperimétricas para cualquier volumen. Además, si la densidad es estrictamente log-cóncava, las semirrectas son los únicos minimizantes.

DEMOSTRACIÓN. En este caso, la densidad será creciente-decreciente, alcanzando su máximo valor en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Gracias al Corolario 9.5.5, apartado i), y obviando los correspondientes complementarios, basta comparar el perímetro de semirrectas e intervalos acotados (conteniendo a x_0) que encierren el mismo volumen. Fijemos $V > 0$, y sea $x_V \in \mathbb{R}$ tal que $\text{vol}((x_V, +\infty)) = V$ (es decir, consideramos la semirrecta $(x_V, +\infty)$ que encierra volumen V). Para cualquier $x \in (-\infty, x_V)$, sea $y(x) > x$ el único valor satisfaciendo que $\text{vol}((x, y(x))) = V$ (esto es, todos los posibles intervalos acotados encerrando volumen V). El perímetro de todos estos intervalos acotados de volumen V vendrá dado por la función

$$P(x) = f(x) + f(y(x)).$$

Por otro lado, $P(-\infty)$ y $P(x_V)$ representan el perímetro de las dos semirrectas que encierran volumen V . Así, esta función nos da el perímetro de cualquier candidato de volumen V , por lo que el mínimo de P nos determinará la región isoperimétrica para volumen V .

Como $y(x)$ aumenta a medida que x crece, y como la densidad es log-cóncava, se tiene que $P(x)$ es una función absolutamente continua con derivadas por la derecha y

por la izquierda en cada punto. De hecho, la derivada por la derecha P'_r , en cualquier punto $x \in (-\infty, x_V)$, viene dada por

$$(9.15) \quad \begin{aligned} P'_r(x) &= f'(x) + f'(y(x)) y'(x) \\ &= f(x) \psi'(x) + f(y(x)) \psi'(y(x)) y'(x) \\ &= f(x) \{ \psi'_r(x) + \psi'_r(y(x)) \}, \end{aligned}$$

ya que $f' = f \psi'$ (recuérdese que $f = e^\psi$), y $f(y(x)) y'(x) = f(x)$ (que se obtiene derivando la igualdad $\text{vol}((x, y(x))) = \int_x^{y(x)} f(s) ds = V$).

Teniendo en cuenta (9.15), y que ψ'_r es no-creciente por la concavidad de ψ , se tiene que $P'_r(x)/f(x)$ es también no-creciente (recuérdese que $y(x)$ es creciente). Así, como $f > 0$, se sigue que P'_r será siempre positiva, siempre negativa, o primero positiva y luego negativa. De ello se deduce que $P(x)$ es monótona o creciente-decreciente en $(-\infty, x_V)$. En cualquiera de los casos, es seguro que el ínfimo de $P(x)$ se alcanzará en algún final, por lo que la semirrecta de volumen V conteniendo dicho final será la solución isoperimétrica. Además, si en un entorno de dicho final, la función P es constante, el ínfimo también se alcanzará en otros puntos del intervalo $(-\infty, x_V)$, por lo que los correspondientes intervalos acotados también resultarán ser solución.

Finalmente, en el caso de que f sea estrictamente log-cóncava, se obtendrá que P es monótona, o creciente-decreciente, pero de forma *estricta*, con lo que el ínfimo de P no podrá alcanzarse en ningún punto de $(-\infty, x_V)$, sino en alguno de los finales, obteniéndose así la unicidad de las semirrectas como minimizantes, para cualquier volumen V . \square

Nota 9.5.7. Dos ejemplos interesantes, dentro de la rama de la Probabilidad y la Estadística, donde se puede aplicar el Corolario 9.5.6 corresponden a la densidad gaussiana estándar $f(x) = e^{-\pi x^2}$ y a la *densidad logística* $f(x) = e^{-x}(1 + e^{-x})^{-2}$. Tal y como se indica en [14], resulta interesante estudiar los minimizantes para estas densidades con una restricción de volumen sobre los funcionales $\text{vol}(\Omega + [-h, h])$, para cualquier $h > 0$. En [16, Remark 13.9] se comenta dicho problema, indicando que las soluciones son semirrectas.

Ahora estudiaremos el problema isoperimétrico para densidades reales *log-convexas*, a partir de la Proposición 9.5.1 y el Teorema 9.5.4.

Corolario 9.5.8. *Sea $f = e^\psi$ una densidad log-convexa definida en \mathbb{R} . Entonces,*

- i) *Si ambos finales tienen medida infinita y $f(-\infty) = f(+\infty) = +\infty$, entonces existen las regiones isoperimétricas para cualquier volumen, y son intervalos acotados en cuya clausura la densidad alcanza su mínimo. Además, si f es estrictamente log-convexa, hay unicidad de minimizantes.*
- ii) *Si ambos finales tienen medida infinita, y además un final E con $f(E) < +\infty$, entonces el perfil isoperimétrico es constante, y se alcanzará o se aproximará por medio de intervalos acotados tendiendo a E .*
- iii) *Si un final tiene medida finita, entonces las semirrectas conteniendo a dicho final son los únicos minimizantes para volumen fijo.*

DEMOSTRACIÓN.

i) En este caso, la densidad será decreciente-creciente, por lo que aplicando el Teorema 9.5.4 se tiene la existencia de minimizantes, que además serán intervalos acotados conteniendo al mínimo de f . Además, en el caso de que f sea estrictamente log-convexa, usando el mismo argumento que en la demostración del Corolario 9.5.6, se obtiene que

el perímetro de los intervalos acotados encerrando un volumen fijo alcanza su mínimo solamente en un punto, y por tanto, habrá un *único* intervalo acotado minimizante.

ii) En esta situación, necesariamente f será monótona (por ser log-convexa), por lo que aplicando la Proposición 9.5.1, se concluye que el perfil será constantemente igual a $2f(E)$, y nos aproximaremos a él por medio de intervalos acotados, alcanzándose si f es constante en un entorno de E .

iii) Bajo estas hipótesis, de nuevo se tiene que f será monótona, por lo que aplicando la Proposición 9.5.1 se tiene lo enunciado. \square

Como consecuencia del Corolario 9.5.8 y del Ejemplo 9.1, se deduce el siguiente resultado, que demuestra la Conjetura 9.1 en dimensión uno en el caso estricto: los intervalos simétricos (bolas centradas en el origen en el caso unidimensional) son soluciones isoperimétricas para cualquier volumen, para una densidad simétrica y *estrictamente* log-convexa. En este caso, además, se tiene unicidad de soluciones.

Corolario 9.5.9. *Sea f una densidad diferenciable, simétrica y estrictamente log-convexa definida en \mathbb{R} . Entonces, fijado un volumen, el intervalo simétrico encerrando dicho volumen es el único minimizante.*

DEMOSTRACIÓN. Bajo esas hipótesis, necesariamente nos encontraremos en el apartado i) del Corolario 9.5.8, ya que f no puede ser monótona por la simetría. Por tanto, los minimizantes serán intervalos acotados, teniéndose además unicidad. Finalmente, a partir del Ejemplo 9.1, se concluye que los únicos intervalos acotados posibles son los simétricos. \square

9.5.3. Semirrectas e intervalos cerrados acotados. Las técnicas usadas a lo largo de esta Sección para el caso real permiten también estudiar el problema isoperimétrico en semirrectas y en intervalos cerrados acotados, con densidades unimodales, y también el problema de frontera libre. Enunciamos brevemente los correspondientes resultados, omitiendo las demostraciones.

En el caso del problema isoperimétrico en semirrectas e intervalos cerrados acotados, se pueden obtener resultados similares a la Proposición 9.5.1, el Teorema 9.5.3 y el Teorema 9.5.4, que resumimos en los siguientes teoremas.

Teorema 9.5.10. *Sea f una densidad unimodal en $[0, +\infty)$. Entonces se tiene que:*

- i) *Si la densidad es creciente, entonces los únicos minimizantes son los intervalos de tipo $(0, x)$. Si la densidad es decreciente y existe el final $E = +\infty$ tiene medida finita, entonces las semirrectas conteniendo a E son los únicos minimizantes. Si la densidad es decreciente y E tiene medida infinita, entonces el perfil isoperimétrico es constantemente igual a $2f(E)$, y se alcanza (caso de que f sea constante en un entorno de E) o se aproxima por intervalos acotados que tienden a E .*
- ii) *Si la densidad es creciente-decreciente, y hay existencia de soluciones isoperimétricas, éstas deben coincidir con un intervalo de tipo $(0, x)$, una semirrecta conteniendo a $+\infty$, un intervalo acotado donde f alcanza su máximo o donde f toma constantemente su mínimo valor, o el complementario de uno de estos conjuntos. Si no hay existencia de soluciones, entonces el perfil isoperimétrico se aproxima por intervalos acotados que tienden a $+\infty$.*
- iii) *Si la densidad es decreciente-creciente, entonces las soluciones isoperimétricas para cualquier volumen existen, y son intervalos acotados en cuya clausura f alcanza su mínimo.*

Ahora enunciaremos el resultado correspondiente al problema isoperimétrico en un intervalo acotado $[a, b]$, que puede tratarse con las mismas herramientas. Obsérvese que en este caso, la existencia de regiones isoperimétricas está asegurada por compacidad.

Teorema 9.5.11. *Sea f una densidad unimodal definida en un intervalo acotado $[a, b]$. Entonces se tiene que*

- i) *Si la densidad es monótona, entonces cualquier región isoperimétrica es un intervalo cuya clausura contiene el extremo del intervalo donde f alcanza su mínimo.*
- ii) *Si la densidad es creciente-decreciente, la solución isoperimétrica será un intervalo cuya clausura contiene un extremo del intervalo, o donde f alcanza su máximo, o donde f iguala su mínimo, o el complementario de uno de estos conjuntos.*
- iii) *Si la densidad es decreciente-creciente, entonces cualquier solución isoperimétrica consiste en un intervalo abierto en cuya clausura f alcanza su mínimo.*

Las mismas técnicas también nos permiten estudiar el problema de frontera libre en semirrectas $[0, +\infty)$, y en intervalos cerrados y acotados $[a, b]$ (para la recta real, dicho problema coincide con el problema isoperimétrico ya tratado). Recordemos que este problema busca los conjuntos minimizantes del *perímetro relativo* a $[0, +\infty)$ o a $[a, b]$ bajo una restricción de volumen. Esto quiere decir, en este caso, que los extremos de los intervalos ambiente no contribuirán al perímetro. Los resultados que se obtienen para este problema son los siguientes.

Teorema 9.5.12. *Sea f una densidad unimodal definida en $[0, +\infty)$. Entonces se tiene que*

- i) *Si la densidad es creciente, entonces los únicos minimizantes para el problema de frontera libre en $[0, +\infty)$ son los intervalos de la forma $(0, x)$. Si la densidad es decreciente y el final $E = +\infty$ tiene medida finita, para cualquier volumen fijado existe solución isoperimétrica, que será una semirrecta conteniendo a E . Si, por el contrario, E tiene medida infinita, caso de que exista un minimizante, éste será un intervalo de la forma $(0, x)$ o un intervalo acotado donde f sea constantemente igual a su mínimo valor. Si no hay existencia, entonces el perfil isoperimétrico será igual a $2f(E)$.*
- ii) *Si la densidad es creciente-decreciente, y existe un minimizante para un volumen fijado, entonces coincidirá con un intervalo de la forma $(0, x)$, una semirrecta conteniendo a $+\infty$, un intervalo acotado donde f alcance su máximo o iguale su mínimo por la derecha, o el complementario de uno de estos conjuntos. Si no existe minimizante, entonces el perfil isoperimétrico se aproximará por intervalos acotados tendiendo a $+\infty$.*
- iii) *Si la densidad es decreciente-creciente, entonces hay existencia de soluciones isoperimétricas para cualquier volumen, y éstas vendrán dadas por intervalos de la forma $(0, x)$ o por intervalos acotados en cuya clausura f alcanza su mínimo.*

Teorema 9.5.13. *Sea f una densidad unimodal definida en el intervalo $[a, b]$. Entonces se tiene que*

- i) *Si la densidad es monótona, entonces los únicos minimizantes para el problema de frontera libre en $[a, b]$ son intervalos en cuya clausura se encuentra algún extremo de $[a, b]$.*
- ii) *Si la densidad es creciente-decreciente, entonces las regiones isoperimétricas vienen dadas por intervalos conteniendo al máximo de f , por intervalos en cuya clausura se encuentra un extremo de $[a, b]$, o por los complementarios de estos conjuntos.*
- iii) *Si la densidad es decreciente-creciente, entonces los minimizantes son intervalos en cuya clausura se encuentra algún extremo de $[a, b]$ o un punto donde f alcanza su mínimo valor, o los complementarios de estos últimos intervalos.*

9.6. La densidad $\exp(|x|^2)$

En esta última Sección trataremos el problema isoperimétrico en \mathbb{R}^{n+1} para una densidad radial log-convexa particular, concretamente para la densidad $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$f(x) = \exp(c|x|^2), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1},$$

donde c es una constante positiva. De hecho, comprobaremos que la Conjetura 9.1 se verifica en este caso: las bolas centradas en el origen son las regiones isoperimétricas para cualquier volumen que se fije (Teorema 9.6.2). Además, veremos que también se tiene *unicidad* de minimizantes. Esta densidad ya fue estudiada por Borell [19, Theorem 4.1], que probó que las bolas centradas en el origen son minimizantes. En su demostración se usa una desigualdad de Brunn-Minkowski, y, a diferencia de nuestro trabajo, no se deduce unicidad.

Nótese que los minimizantes son los mismos que en el espacio euclídeo con densidad estándar $f = 1$ (caso que se corresponde con $c = 0$), y distintos a los que aparecen con la densidad gaussiana ($c < 0$), que es log-cóncava y que, según el Corolario 9.5.6, tiene a las semirrectas como soluciones isoperimétricas.

Para esta densidad, el volumen total no es finito (cosa que sí ocurre en el caso gaussiano), por lo que la existencia de minimizantes no es inmediata. Pero gracias a los resultados de la Sección 9.3, justificaremos que existen regiones isoperimétricas para cualquier volumen que se considere.

La demostración del Teorema 9.6.2 se apoyará en la descripción de minimizantes para densidades log-convexas en el caso unidimensional, hecha en el Corolario 9.5.8, y la simetrización en espacios con medidas producto, descrita en [85]. Se construirá así un análogo a la simetrización de Steiner para la densidad $\exp(c|x|^2)$, que se aplicará en la dirección de los ejes (como hizo L. Bieberbach [10]), para obtener minimizantes centralmente simétricos con frontera conexa. Finalmente, usando la simetrización de Hsiang [58] concluiremos que dicho minimizante ha de ser una bola centrada en el origen.

Resaltamos que las cuestiones referentes a la unicidad de regiones isoperimétricas son siempre difíciles de tratar. Para la densidad gaussiana, la propiedad minimizante de los semiespacios (salvo un conjunto de medida nula) fue obtenida por E. A. Carlen y C. Kerse [28] a partir de la caracterización completa de la igualdad en la desigualdad isoperimétrica. Previamente, A. Ehrhard [43] había proporcionado ciertos resultados de unicidad en este ambiente gaussiano, a partir del estudio de una desigualdad de tipo Brunn-Minkowski. Nosotros probaremos la unicidad de las bolas centradas en el origen como minimizantes para la densidad $\exp(c|x|^2)$. Esto se deberá al hecho de que las bolas aparecen como resultado de una cantidad numerable de simetrizaciones, por lo que basta comprobar que si la simetrización de un minimizante da lugar a una bola, entonces el minimizante es una bola.

Recordemos previamente algunas de las propiedades que se derivan de la simetrización de Steiner (véase [85, Section 3.2]), que usaremos más adelante. Nótese que en este ambiente, como nuestra densidad $f(x) = \exp(c|x|^2)$ puede verse como una medida producto rotacionalmente invariante, es natural pensar en las aplicaciones de esta simetrización.

Sea Ω un conjunto compacto de \mathbb{R}^{n+1} . Consideremos un hiperplano $\pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$ conteniendo al origen. La restricción de la densidad a cualquier recta ortogonal a π resultará ser una densidad diferenciable, simétrica (como la densidad es radial, tendremos simetría con respecto a la intersección de π con la recta) y estrictamente log-convexa.

Se define la *simetrización de Ω respecto a π* como el conjunto Ω_π^* , cuya intersección con cualquier recta R ortogonal a π es la región isoperimétrica en R , con la densidad restringida, correspondiente al volumen de $\Omega \cap R$ (como estamos en una recta, dicho volumen se corresponderá con una longitud). Teniendo en cuenta el Corolario 9.5.9, tal región isoperimétrica será un intervalo centrado en $\pi \cap R$. Consecuentemente, se tendrá que Ω_π^* es un conjunto simétrico respecto de π . La principal propiedad de esta construcción es que se preserva el volumen, y disminuye el perímetro, obteniéndose así un conjunto mejor, desde el punto de vista isoperimétrico.

Lema 9.6.1. ([85, Proposition 8]) *Para cualquier hiperplano π de \mathbb{R}^{n+1} que contenga al origen, la simetrización de Steiner Ω_π^* de un conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ satisface que*

$$\text{vol}(\Omega_\pi^*) = \text{vol}(\Omega), \quad P(\Omega_\pi^*) \leq P(\Omega).$$

Enunciamos ahora el resultado principal de esta Sección, que describe las regiones isoperimétricas para la densidad $f(x) = \exp(c|x|^2)$, $c > 0$.

Teorema 9.6.2. *Consideremos \mathbb{R}^{n+1} con la densidad $f(x) = \exp(c|x|^2)$, $c > 0$. Entonces, para cualquier volumen que se fije, la correspondiente bola centrada en el origen es el único minimizante.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, para esta densidad tenemos asegurada la existencia de minimizantes acotados para cualquier volumen prefijado, por aplicación del Teorema 9.3.1, ya que la correspondiente sucesión

$$\zeta(m) = \frac{\exp(cm^2)}{\exp(c(m+2)^2)^{n/(n+1)}} = \exp\left(cm^2\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) - 4mc\frac{n}{n+1} - 4c\frac{n}{n+1}\right),$$

tiende claramente a infinito. Veamos que las bolas centradas en el origen son regiones isoperimétricas.

Sea Ω un minimizante para un volumen $V > 0$, y apliquemos sucesivamente la simetrización de Steiner a $\overline{\Omega}$ con respecto a los hiperplanos coordenados de \mathbb{R}^{n+1} . Así obtendremos un conjunto Ω^* , también minimizante para volumen V , que resultará simétrico con respecto a todos esos hiperplanos y con frontera conexa. En particular, Ω^* será centralmente simétrico. Así, cualquier hiperplano π que pase por el origen dividirá a Ω^* en dos subconjuntos Ω_i^* , $i = 1, 2$, cada uno contenido en el correspondiente semiespacio abierto π_i (determinados por el hiperplano π), y con $\text{vol}(\Omega_1^*) = \text{vol}(\Omega_2^*)$. Además se verificará que

$$P(\Omega_1, \pi_1) = P(\Omega_2, \pi_2),$$

ya que en caso contrario, mediante la reflexión con respecto del hiperplano π , sería posible obtener un conjunto con igual volumen (ya que la densidad es radial) y menos perímetro que Ω^* , contradiciendo su carácter isoperimétrico.

Por tanto, cada Ω_i^* junto con su correspondiente reflexión será un nuevo minimizante para volumen V . Y esto ocurre para todo hiperplano pasando por el origen. A partir de las propiedades de regularidad del Teorema 9.3.7 y ciertos resultados para la curvatura media constante generalizada, se sigue que $\partial\Omega^*$ es simétrico respecto de cualquier plano pasando por el origen, concluyendo entonces que Ω^* coincide con una bola centrada en el origen.

Para probar la unicidad de estas bolas como regiones isoperimétricas, razonando por inducción, bastaría probar que si una simetrización de un minimizante Ω respecto a un hiperplano coordenado π da lugar a una bola B , entonces Ω es una bola.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\pi = \{x_{n+1} = 0\}$. Sea $D \subset \pi$ la proyección de Ω sobre dicho hiperplano. Por el Teorema 9.3.7 y por el Teorema de Sard,

es posible obtener un recubrimiento de $\Sigma = \partial\Omega$ como sigue: para casi todo punto $p \in D$, la recta ortogonal a π que sale de p intersecará transversalmente a Σ en una cantidad par de puntos $p_i \in \Sigma$. De esta forma, podemos ver Σ como la unión de los grafos de ciertas funciones altura (diferenciables) h_i , definidas sobre entornos $D_p \subset D$ de puntos $p \in D$ (permitimos que p_i sea $\pm\infty$ por si Ω fuese no acotado). Denotemos por $A \subseteq D$ el conjunto de tales puntos p . Por la definición de la simetrización de Steiner, como $\text{vol}(\Omega) = \text{vol}(B)$, se tendrá

$$\sum_{i \text{ impar}} \int_{h_i}^{h_{i+1}} f(x) dx = 2 \int_0^{h^*} f(x) dx \quad \text{sobre } D_p,$$

donde h^* es la función altura de ∂B con respecto al hiperplano π . Derivando,

$$\sum_{i \text{ impar}} (f(h_{i+1}) \nabla h_{i+1} - f(h_i) \nabla h_i) = 2f(h^*) \nabla h^* \quad \text{sobre } D_p,$$

de forma que, al tomar normas, se llega a

$$\sum_j f(h_j) |\nabla h_j| \geq 2f(h^*) |\nabla h^*| \quad \text{sobre } D_p.$$

Por otro lado, aplicando la propiedad isoperimétrica de los intervalos centrados en el origen, que se deduce del Corolario 9.5.9, se tiene que

$$\sum_j f(h_j) \geq 2f(h^*) \quad \text{sobre } D_p,$$

con igualdad si y sólo si la correspondiente sección de Ω es un intervalo centrado en π .

Ahora aplicaremos el Lema 9.6.3 posterior a partir de dichas desigualdades, para $\alpha_j = f(h_j(p))$, $a_j = |\nabla h_j(p)|$, $\alpha = f(h^*(p))$ y $a = |\nabla h^*(p)|$. Se obtiene

$$(9.16) \quad \sum_j f(h_j(p)) \sqrt{1 + |\nabla h_j(p)|^2} \geq 2f(h^*(p)) \sqrt{1 + |\nabla h^*(p)|^2}, \quad p \in A,$$

con igualdad si y sólo si $|\nabla h_j(p)| = |\nabla h^*(p)|$ para todo j , y toda sección de Ω pasando por p es un intervalo centrado en π (esto último ya implicaría que, salvo un conjunto de medida finita, Ω es necesariamente una bola).

Finalmente, a partir de la fórmula de la coárea [72, § 3] y la desigualdad (9.16) se obtiene

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \int_{\Sigma} f da \geq \int_A \left(\sum_j f(h_j(p)) \sqrt{1 + |\nabla h_j(p)|^2} \right) da \\ &\geq \int_A 2f(h^*(p)) \sqrt{1 + |\nabla h^*(p)|^2} da = P(B), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado que $D - A$ no contribuye al perímetro de B . Como Ω es un minimizante, lo que realmente se tiene es la igualdad, y consecuentemente, también en (9.16). Se sigue que para cada punto $p \in A$, la sección de Ω que pasa por p es un intervalo simétrico de la misma longitud que la correspondiente sección de B . Así concluimos que, salvo un conjunto de medida nula, Ω coincide con una bola centrada en el origen. \square

Enunciamos y demostramos ahora el Lema 9.6.3, usado en la anterior demostración.

Lema 9.6.3. Sean $\{\alpha_j\}$, $\{a_j\}$, α , a números reales positivos en cantidad numerable que verifican $\sum_j \alpha_j a_j \geq 2\alpha a$, y que $\sum_j \alpha_j \geq 2\alpha$. Entonces se cumple que

$$\sum_j \alpha_j \sqrt{1 + a_j^2} \geq 2\alpha \sqrt{1 + a^2},$$

con igualdad si y sólo si $a_j = a$ para cada j , y $\sum_j \alpha_j = 2\alpha$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, para $x > 0$. Es claro que $g'(x) = x/\sqrt{1+x^2}$, por lo que $0 < g'(x) < 1$ y, en particular, la función g resulta ser creciente. Además, como $g''(x) = 1/(1+x^2)^{3/2}$, se sigue que g es estrictamente convexa. Denotemos por $\alpha_0 = \sum_j \alpha_j$. Entonces se tiene que

$$(9.17) \quad \sum_j \frac{\alpha_j}{\alpha_0} g(a_j) \geq g\left(\sum_j \frac{\alpha_j}{\alpha_0} a_j\right) \geq g\left(\frac{2\alpha}{\alpha_0} a\right) \geq \frac{2\alpha}{\alpha_0} g(a).$$

La primera desigualdad es consecuencia de la convexidad de g . La segunda desigualdad se debe, teniendo en cuenta las hipótesis, al crecimiento de g . La tercera desigualdad se verifica trivialmente, en función de como hemos definido g , ya que $2\alpha/\alpha_0 \leq 1$ en virtud de las hipótesis. Dicha desigualdad ya nos da la enunciada en el Lema.

Supongamos ahora que en la cadena de desigualdades de (9.17) se dan todas las igualdades. La igualdad en la segunda desigualdad implica, por el crecimiento estricto de g , que $\sum_j \alpha_j a_j = 2\alpha a$. Se puede comprobar fácilmente que la igualdad en la tercera desigualdad implica que $2\alpha = \alpha_0 = \sum_j \alpha_j$. Si también tenemos igualdad en la primera desigualdad, entonces se concluye que $a_j = a$, para todo j . \square

Concluimos esta Sección con un teorema de comparación de valores propios obtenido como consecuencia de la desigualdad isoperimétrica del Teorema 9.6.2. Dado un dominio diferenciable acotado Ω de \mathbb{R}^{n+1} , consideraremos el operador diferencial de segundo orden L sobre C_0^∞ definido por

$$(9.18) \quad (Lu)(x) = (\Delta u)(x) - 2c \langle x, (\nabla u)(x) \rangle, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

donde Δ denota el operador de Laplace euclídeo en Ω . La medida invariante de este operador tiene densidad $f(x) = \exp(c|x|^2)$ ($c \geq 0$).

Corolario 9.6.4. *Sea Ω un dominio diferenciable acotado de \mathbb{R}^{n+1} . Entonces, el menor valor propio no nulo $\lambda_1(\Omega)$ para el operador de segundo orden (9.18) con condiciones de Dirichlet sobre $\partial\Omega$ satisface*

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B),$$

donde B es la bola centrada en el origen con el mismo volumen que Ω para la densidad dada por $f(x) = \exp(c|x|^2)$, $c > 0$. Además, la igualdad se da si y sólo si $\Omega = B$.

DEMOSTRACIÓN. Esta comparación de valores propios es una adaptación de la técnica de simetrización usada para probar la desigualdad de Faber-Krahn en \mathbb{R}^{n+1} [30, p. 87], que se corresponde justamente con la desigualdad pretendida para el caso $c = 0$. \square

Bibliografía

- [1] Colin Adams and Frank Morgan. Isoperimetric curves on hyperbolic surfaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(5):1347–1356, 1999.
- [2] Frederick J. Almgren, Jr. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81:151–154, 1975.
- [3] Ángel Montesinos Amilibia. Existence and uniqueness of standard bubble clusters of given volumes in \mathbb{R}^N . *Asian J. Math.*, 5(1):25–31, 2001.
- [4] J. Lucas M. Barbosa and Manfredo do Carmo. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z.*, 185(3):339–353, 1984.
- [5] J. Lucas M. Barbosa, Manfredo do Carmo, and Jost Eschenburg. Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds. *Math. Z.*, 197(1):123–138, 1988.
- [6] J. Lucas M. Barbosa, Jonas de M. Gomes, and A. M. Silveira. Foliation of 3-dimensional space forms by surfaces with constant mean curvature. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 18(2):1–12, 1987.
- [7] Christophe Bavard and Pierre Pansu. Sur le volume minimal de \mathbf{R}^2 . *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 19(4):479–490, 1986.
- [8] Vincent Bayle. Propriétés de concavité du profil isopérimétrique et applications. Thèse de Doctorat, 2003.
- [9] Itai Benjamini and Jianguo Cao. A new isoperimetric comparison theorem for surfaces of variable curvature. *Duke Math. J.*, 85(2):359–396, 1996.
- [10] Ludwig Bieberbach. Über eine extremaleigenschaft des kreises. *J.-ber. Deutsch. Math.-Verein.*, 24:247–250, 1915.
- [11] Michael Bleicher. Isoperimetric division into a finite number of cells in the plane. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 22(1-4):123–137, 1987.
- [12] Michael Bleicher. Isoperimetric divisions into several cells with natural boundary. In *Intuitive geometry (Siófok, 1985)*, volume 48 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 63–84. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [13] Michael Bleicher. Isoperimetric networks in the Euclidean plane. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 31(4):455–478, 1996.
- [14] Serguei G. Bobkov. Extremal properties of half-spaces for log-concave distributions. *Ann. Probab.*, 24(1):35–48, 1996.
- [15] Serguei G. Bobkov. An isoperimetric inequality on the discrete cube, and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space. *Ann. Probab.*, 25(1):206–214, 1997.
- [16] Serguei G. Bobkov and Christian Houdré. Some connections between isoperimetric and Sobolev-type inequalities. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 129(616):viii+111, 1997.
- [17] Christer Borell. The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space. *Invent. Math.*, 30(2):207–216, 1975.
- [18] Christer Borell. Intrinsic bounds for some real-valued stationary random functions. In *Probability in Banach spaces, V (Medford, Mass., 1984)*, volume 1153 of *Lecture Notes in Math.*, pages 72–95. Springer, Berlin, 1985.
- [19] Christer Borell. The Ornstein-Uhlenbeck velocity process in backward time and isoperimetry. *Chalmers University of Technology*, 1986.
- [20] Kenneth A. Brakke. The surface evolver. *Experiment. Math.*, 1(2):141–165, 1992.
- [21] Haïm Brezis. *Functional Analysis*. Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree. Masson, Paris, 1983. Theory and applications.
- [22] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller. *Geometric inequalities*, volume 285 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ, Springer Series in Soviet Mathematics.
- [23] Antonio Cañete. Stable and isoperimetric regions in rotationally symmetric tori with decreasing Gauss curvature. Aparecerá en *Indiana Univ. Math. J.*, 2007, arXiv:math/0604419.
- [24] Antonio Cañete. Some planar multiple isoperimetric problems. In *Differential geometry and its applications*, pages 129–138. Matfyzpress, Prague, 2005.
- [25] Antonio Cañete. The isoperimetric problem in surfaces of revolution. Aparecerá en *Proceedings of the XV International Workshop of Geometry and Physics*, 2007.

- [26] Antonio Cañete and Manuel Ritoré. Least-perimeter partitions of the disk into three regions of given areas. *Indiana Univ. Math. J.*, 53(3):883–904, 2004, arXiv:math/0307207.
- [27] Antonio Cañete and Manuel Ritoré. The isoperimetric problem in complete annuli of revolution with increasing Gauss curvature. preprint, 2007.
- [28] Eric A. Carlen and Clayton Kerce. On the cases of equality in Bobkov’s inequality and Gaussian rearrangement. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 13(1):1–18, 2001.
- [29] Colin Carroll, Adam Jacob, Quinn Conor, and Robin Walters. The isoperimetric problem on planes with density. preprint, 2006.
- [30] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*, volume 115 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984.
- [31] Jaigyoung Choe. The isoperimetric inequality for a minimal surface with radially connected boundary. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 17(4):583–593, 1990.
- [32] Jaigyoung Choe. The isoperimetric inequality for minimal surfaces in a Riemannian manifold. *J. Reine Angew. Math.*, 506:205–214, 1999.
- [33] Earl A. Coddington and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.
- [34] Joseph Corneli, Paul Holt, George Lee, Nicholas Leger, Eric Schoenfeld, and Benjamin Steinhurst. The double bubble problem on the flat two-torus. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(9):3769–3820 (electronic), 2004.
- [35] Ivan Corwin, Neil Hoffman, Stephanie Hurder, Vojislav Sesum, and Li Xu. Differential geometry of manifolds with density. preprint, 2006.
- [36] Christopher Cox, Lisa Harrison, Michael Hutchings, Susan Kim, Janette Light, Andrew Mauer, and Meg Tilton. The shortest enclosure of three connected areas in \mathbf{R}^2 . *Real Anal. Exchange*, 20(1):313–335, 1994/95.
- [37] Simon J. Cox. Calculations of the minimal perimeter for n deformable cells of equal area confined in a circle. *Phil. Mag. Letts.*, 86:569–578, 2006.
- [38] Simon J. Cox, François Graner, Maria de Fátima Vaz, Claire Monnereau-Pittet, and Nicolas Pittet. Minimal perimeter for N identical bubbles in two dimensions: calculations and simulations. *Philosophical Magazine*, 83:1393–1406, 2003.
- [39] Richard P. Devereaux Vaughn. Planar Soap Bubbles. Ph D thesis, University of California, Davis, 1998.
- [40] Manfredo do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.
- [41] Manfredo do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [42] Antoine Ehrhard. Symétrisation dans l’espace de Gauss. *Math. Scand.*, 53(2):281–301, 1983.
- [43] Antoine Ehrhard. Éléments extrémaux pour les inégalités de Brunn-Minkowski gaussiennes. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 22(2):149–168, 1986.
- [44] Joel Foisy, Manuel Alfaro, Jeffrey Brock, Nickelous Hodges, and Jason Zimba. The standard double soap bubble in \mathbf{R}^2 uniquely minimizes perimeter. *Pacific J. Math.*, 159(1):47–59, 1993.
- [45] Enrico Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, volume 80 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.
- [46] François Graner, Yi Jiang, Eric Janiaud, and Cyrille Flament. Equilibrium energies of 2D fluid foams. *Phys. Rev. E.*, 63:11402, 2001.
- [47] Renata Grimaldi and Pierre Pansu. Calibrations and isoperimetric profiles. Aparecerá en *Amer. J. Math.*, 2007.
- [48] Mikhael Gromov. Isoperimetry of waists and concentration of maps. *Geom. Funct. Anal.*, 13(1):178–215, 2003.
- [49] Thomas C. Hales. The honeycomb conjecture. *Discrete Comput. Geom.*, 25(1):1–22, 2001.
- [50] Philip Hartman. *Ordinary differential equations*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.
- [51] Joel Hass and Frank Morgan. Geodesic nets on the 2-sphere. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124(12):3843–3850, 1996.
- [52] Aladár Heppes. Isogonale sphärische Netze. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, 7:41–48, 1964.
- [53] Aladár Heppes. A note on the shortest partitioning nets of the 2-sphere. In *Intuitive geometry (Budapest, 1995)*, volume 6 of *Bolyai Soc. Math. Stud.*, pages 347–355. János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1997.
- [54] Aladár Heppes. On the partition of the 2-sphere by geodesic nets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(7):2163–2165, 1999.
- [55] Hugh Howards. Soap bubbles on surfaces. undergraduate thesis, Williams College, 1992.
- [56] Hugh Howards, Michael Hutchings, and Frank Morgan. The isoperimetric problem on surfaces. *Amer. Math. Monthly*, 106(5):430–439, 1999.
- [57] G. Christopher Hruska, Dmitriy Leykekhman, Daniel Pinzon, Brian J. Shay, and Joel Foisy. The shortest enclosure of two connected regions in a corner. *Rocky Mountain J. Math.*, 31(2):437–482, 2001.

- [58] Wu Yi Hsiang. A symmetry theorem on isoperimetric regions. Center for Pure and Applied Mathematics Report PAM-409, University of California, Berkeley, 1988.
- [59] Wu-Hsiung Huang and Chun-Chi Lin. Negatively curved sets on surfaces of constant mean curvature in \mathbf{R}^3 are large. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 141(2):105–116, 1998.
- [60] Michael Hutchings, Frank Morgan, Manuel Ritoré, and Antonio Ros. Proof of the double bubble conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 155(2):459–489, 2002.
- [61] Wilbur R. Knorr. *The ancient tradition of geometric problems*. Dover Publications Inc., New York, 1993. Corrected reprint of the 1986 original.
- [62] Miyuki Koiso. Deformation and stability of surfaces with constant mean curvature. *Tohoku Math. J. (2)*, 54(1):145–159, 2002.
- [63] Nicholas J. Korevaar, Rob Kusner, and Bruce Solomon. The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature. *J. Differential Geom.*, 30(2):465–503, 1989.
- [64] Robert Lopez and Tracy Borawski Baker. The double bubble problem on the cone. *New York J. Math.*, 12:157–167 (electronic), 2006.
- [65] Joseph D. Masters. The perimeter-minimizing enclosure of two areas in S^2 . *Real Anal. Exchange*, 22(2):645–654, 1996/97.
- [66] J. C. Maxwell. On reciprocal figures and diagrams of forces. *Phil. Mag. Series*, 4:250–261, 1864.
- [67] J. C. Maxwell. On reciprocal figures, frames and diagrams of forces. *Trans. Royal Soc. Edinburgh*, 26:1–40, 1869–72.
- [68] John Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [69] Frank Morgan. (M, ϵ, δ) -minimal curve regularity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 120(3):677–686, 1994.
- [70] Frank Morgan. Clusters minimizing area plus length of singular curves. *Math. Ann.*, 299(4):697–714, 1994.
- [71] Frank Morgan. Soap bubbles in \mathbf{R}^2 and in surfaces. *Pacific J. Math.*, 165(2):347–361, 1994.
- [72] Frank Morgan. *Geometric measure theory*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 2000.
- [73] Frank Morgan. Regularity of isoperimetric hypersurfaces in Riemannian manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(12):5041–5052 (electronic), 2003.
- [74] Frank Morgan. Manifolds with density. *Notices Amer. Math. Soc.*, 52(8):853–858, 2005.
- [75] Frank Morgan, Michael Hutchings, and Hugh Howards. The isoperimetric problem on surfaces of revolution of decreasing Gauss curvature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352(11):4889–4909, 2000.
- [76] Frank Morgan and Wacharin Wichiramala. The standard double bubble is the unique stable double bubble in \mathbf{R}^2 . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(9):2745–2751 (electronic), 2002.
- [77] Cristian F. Moukarzel. Geometrical consequences of foam equilibrium. *Phys. Rev. E (3)*, 55(6, part A):6866–6880, 1997.
- [78] Robert Osserman. The isoperimetric inequality. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(6):1182–1238, 1978.
- [79] Robert Osserman. Bonnesen-style isoperimetric inequalities. *Amer. Math. Monthly*, 86(1):1–29, 1979.
- [80] Pierre Pansu. Sur la régularité du profil isopérimétrique des surfaces riemanniennes compactes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(1):247–264, 1998.
- [81] Renato H. L. Pedrosa and Manuel Ritoré. Isoperimetric domains in the Riemannian product of a circle with a simply connected space form and applications to free boundary problems. *Indiana Univ. Math. J.*, 48(4):1357–1394, 1999.
- [82] Manuel Ritoré. Constant geodesic curvature curves and isoperimetric domains in rotationally symmetric surfaces. *Comm. Anal. Geom.*, 9(5):1093–1138, 2001.
- [83] Manuel Ritoré. The isoperimetric problem in complete surfaces of nonnegative curvature. *J. Geom. Anal.*, 11(3):509–517, 2001.
- [84] Manuel Ritoré and César Rosales. Existence and characterization of regions minimizing perimeter under a volume constraint inside Euclidean cones. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(11):4601–4622 (electronic), 2004.
- [85] Antonio Ros. The isoperimetric problem. In *Global theory of minimal surfaces*, volume 2 of *Clay Math. Proc.*, pages 175–209. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [86] César Rosales, Antonio Cañete, Vincent Bayle, and Frank Morgan. On the isoperimetric problem in euclidean space with density. Aparecerá en *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 2007, arXiv:math/0602135.
- [87] Harold Rosenberg. Hypersurfaces of constant curvature in space forms. *Bull. Sci. Math.*, 117(2):211–239, 1993.
- [88] Erhard Schmidt. Über eine neue Methode zur Behandlung einer Klasse isoperimetrischer Aufgaben im Grossen. *Math. Z.*, 47:489–642, 1942.
- [89] Leon Simon. *Lectures on geometric measure theory*, volume 3 of *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University*. Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.

- [90] V.N. Sudakov and B. S. Cirel'son. Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures. *Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 41:14–24, 165, 1974. Problems in the theory of probability distributions, II.
- [91] D'Arcy W. Thompson. *On Growth and Form: The Complete Revised Edition*. Dover Publications, 2002.
- [92] Yasurô Tomonaga. *Geometry of length and area. 1*. Dept. of Mathematics, Utsunomiya University, Utsunomiya, 1974.
- [93] Peter Topping. The isoperimetric inequality on a surface. *Manuscripta Math.*, 100(1):23–33, 1999.
- [94] Dennis Weaire and Stefan Hutzler. *The Physics of Foams*. Clarendon Press/Oxford U. Press, New York, 1999.
- [95] Wacharin Wichiramala. The Planar Triple Bubble Problem. Ph D thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 2002.
- [96] Wacharin Wichiramala. Proof of the planar triple bubble conjecture. *J. Reine Angew. Math.*, 567:1–49, 2004.