LECCIONES

DE

MATEMÁTICAS

POR

JOSÉ ANDRÉS IRUESTE,

Doctor en Ciencias
y Catedrático-Decano de esa Facultad
en la Universidad de Granada.

TOMO I.

ARITMÉTICA.

GRANADA

Imprenta de José López Guevara

1890

A LA MEMORIA

DEL EMINENTE MATEMÁTICO, INSIGNE PROFESOR Y PROBO CIUDADANO

SR. D. JUAN CORTÁZAR,

22 **DEDICA**

ESTE PRIMER ENSAYO PÚBLICO DE TRABAJOS CIENTÍFICOS,

su respetuoso discípulo, agradecido Auxiliar, y cariñoso amigo

EL AUTOR.

PRÓLOGO DE LA ARITMÉTICA.

Principiada esta obra há cerca de tres lustros, é interrumpida tan largo tiempo, por varias causas, nos hemos decidido á continuarla, animados por el juicio que mereció el 1.er Cuaderno á los compañeros que lo leyeron, y para satisfacer por escrito nuestra pasión por la enseñanza, que, aun cuando parezca paradójico, no podemos satisfacer oralmente, á pesar de nuestro cargo oficial, por tristes y múltiplas razones que fuera ocioso enumerar.

Aunque innecesario para algunos, no será del todo inútil motivar las principales innovaciones que presentamos en el Libro 1.°, base y fundamento de toda la ciencia de los números; en los demás no hay reformas tan radicales.

La *primera* es la generalidad con que se trata la Teoría de los números enteros, para cualquier sistema numerativo; generalidad sin la cual creemos no hay conocimientos verdaderamente científicos, y que además juzgamos de conveniencia didáctica, pues los principiantes de Matemáticas no se fijan en el fondo de las primeras operaciones aritméticas, porque las saben hacer de rutina, desde la 1.ª enseñanza; mas, cuando por variar el sistema numerativo, no pueden seguir esa rutina, preciso es que se fijen en el fondo de cada operación para saber hacerla.

Es la *segunda* la consideración de los números negativos, cuya existencia en *Aritmética* creemos justificada, no sólo por necesitarse de ellos en la Teoría de logaritmos que no debe faltar en *aquélla*, si ha de ser regularmente *completa*, si que también por tener un origen tan lógico, como los fraccionarios é incomensurables le tienen por división ó extracción de raíces respectivamente, pues todos son resultados ideales de operaciones imposibles de verificar inmediatamente, pero que deben ser admitidas en abstracto, para el cálculo: primero porque en éste realmente desaparece bajo el signo lo significado; segundo, porque á veces operaciones contrarias á las imposibles, destruyendo á éstas, hacen que resulten números reales ó efectivos aplicables á cualesquiera cantidades; y tercero, porque aun esos resultados, absurdos en abstracto, tienen lógica y genuína interpretación concreta para algunas especies de cantidades, como se patentiza oportunamente.

Por último, llamamos la atención sobre el orden adoptado para las teorías de *divisibilidad*, *números primos, máximo común divisor, mínimo común múltiplo y factores simples y compuestos,* que expuestas comunmente en el orden nombrado, producen: el que estén por virtud de él separados los dos métodos para hallar ya el máximo común divisor, ya el mínimo común múltiplo; el estudio de los números primos, ya aislados, ya considerados como factores, y el de éstos de la divisibilidad que los origina.

Para terminar, hacemos nuestras las palabras con que también termina el prólogo de sus excelentes «Lecciones de Aritmética» nuestro estimado maestro D. Ambrosio Moya.

«Hemos ejecutado este trabajo á impulsos del amor á la ciencia y á la juventud estudiosa; no tenga otro móvil quien le critique y desde ahora le prometemos nuestro sincero reconocimiento.»

El cual otorgamos desde ahora á nuestro compañero Sr. Cassinello, quien, con una paciencia increíble, ha revisado minuciosamente la segunda mitad de este tratado, hallando la mayoría de las erratas relativas á esa parte, que constan en la lista siguiente.

Granada—Marzo—1890.

ERRATAS PRINCIPALES (*).

Pág.ª	Línea.	Dice.	Debe decir.
21	21	(dos tercios, cinco medios)	(cinco medios)
30	23,24	así sucesivamente con sólo dar con los anteriores, y	con los anteriores y así sucesivamente con sólo dar
54	17	9·4·3·8·15	9·4·3·2·8·15
55	4	(egf)	(egh)
60	Ejemplo.	196630	96630
64	9	5730800	57308000
69	—6—7	$(r+r'+r'')+r''')$:E	$(r+r'+r'+r''')$: E
»	—4	$A+B+C+D$; E	$(A+B+C+D)$: E
76	—7	3319	2319
86	12	$b\overset{2}{a}\ldots b\overset{2}{b}$	$b\overset{2}{a}\ldots b^2b$
»	13	$2\overset{2}{a}b+a\overset{2}{b}+\overset{2}{a}b+\overset{2}{2}ab+\overset{3}{b}$	$2a^2b+a^2b+ab^2+2ab^2+b^3$
88	—4	(Ese Corolario debe estar en el número 96 como Teorema 2.°)	
93	—10	*raíz*	*raíz cuadrada*
97	– 3	100 d^3	1000 d^3
100	8	18233	182830
104	13	5×6	5×5
105	6,7	*cifra*	*cifra significativa*
107	5	signo y	signo—y
109	21	26,	*2b.*
110	18	mas por	mas
111	18	2;18	2·18
112	6	2·2·3	2·3·3
117	—11	B^4=e	B^4.e
124	2	(72-3.°)	(73)
136	—4	q	Q
138	—5	*m. c. m. c*	*m. c. m.*

(*) El signo — delante del número que designa la línea, indica que se empiece á contarlas por la parte inferior de la página.

Pág.ª	Línea.	Dice.	Debe decir.
138	—2	210	220
141	—14	$Mm=Dd'$	$M:m=Dd'$
144	—15	$r+r^2$	r^2+r
148	—9	$10^n:<$	$10^n>$
151	—13	primos	primeros
161	9	346	347
170	13	ordinarias	en ordinarias
175	12,13	sumandos	datos
188	22,23	incomensurables	comensurables
189	18	v—v	v—v'
190	5	del de	de
»	20	sumandos	datos
200	17	40	10
205	10	6366	6636
219	3	la de interpolación	el n.º de términos interpolados más 1
222	37	$\sqrt{\ }$	$\sqrt[n]{\ }$
226	13	$a_3+\ldots+b_n$	$a_3+\ldots+a_n$
233	5	$\frac{1}{b^{nd}}:\frac{1}{b^{2d}}$	$\frac{1}{b^{nd}}:\ldots:\frac{1}{b^{2d}}$
244, 245	(Hay algunas cifras erróneas fáciles de notar).		
247	13	19,82	18,92
250	17	cifra	cifra significativa
»	21	16,8	16,1
254	—6	0,010721	0,000721
»	—2	244,32	244,23
255	última	55,94	54,94
274	12	15544	11144
»	14	40558,	40118,
275	—2	11030	11040
276	16	día	de hora
302	22,23,29	$(1+r)^{n-1}$	$(1+r)^{n}$.
303	1,15		

LECCION PRELIMINAR.

INTRODUCCION Á LAS MATEMÁTICAS.

«Facultades del alma humana; productos respectivos de su ejercicio. (I). (*)

Conocimiento; verdad y error; certeza y duda; criterios; evidencia. (II).

Nocion ó idea; juicio y proposicion; raciocinio ó razonamiento. (III).

Verdades indemostrables y demostrables; diferencia entre raciocinio y demostracion. (IV).

Ciencia; su fondo ó materia y su forma: sus principios fundamentales y formales: sus proposiciones y teorías: sus métodos analítico, sintético y constructivo. (V).

Definiciones, axiomas, postulados. (VI).

Teoremas, problemas, lemas, corolarios y escolios;

(*) Los números entre ( ) indican se consulte el párrafo correspondiente del texto.

proposiciones recíprocas y contradictorias. (VII).

Planteo, resolucion, soluciones, demostracion y discusion de un problema. (VIII).

Problemas determinados, indeterminados é imposibles.

Idea de los métodos analítico y sintético para demostrar teoremas y resolver problemas y de las demostraciones indirectas ó *ad absurdum*. (IX).

Division de las ciencias en racionales y esperimentales: sus caracteres respectivos. (X).»

I. El alma humana tiene tres facultades ó modos diversos de comunicarse con el mundo, llamadas *sensibilidad, inteligencia* ó pensamiento y *voluntad;* así como, á los resultados ó productos del ejercicio de cada facultad, se los llama respectivamente *sensaciones*, *conocimientos* y *deseos*. No se crea, sin embargo, que funcionan independiente y separadamente las tres facultades; por el contrario, funcionan casi siempre unidas, como que no son, segun ya se ha dicho, más que maneras ó modos de funcionar del alma única á que pertenecen: Así p. ej. á la vista de un brillante, nuestra alma *siente*, ó recibe la *sensacion* del *brillo,* por el ejercicio de la *sensibilidad;* *conoce*, ó adquiere el *conocimiento* inmediato del *tamaño* y mediato del *valor* de dicha alhaja, por el ejercicio de la *inteligencia;* y *desea*, ó forma el *deseo* de poseerla, siquiera sea por médios lícitos, por el ejercicio de la *voluntad*.

Hay, no obstante, conocimientos y deseos sin sensaciones correspondientes; p. ej.: el conocimiento de Dios y el deseo de unirse á Él, de toda alma religiosa.

II. Conocimiento es, pues, todo producto inmediato ó mediato de la inteligencia, cuyo ejercicio supone *algo* sobre qué verificarse, siquiera sea la misma alma, como en el conocimiento *inmanente* ó *psicológico*. En otros términos, todo conocimiento supone: un *sujeto* cognoscente, —el alma que conoce,—un *objeto* conocido, y la *relación* entre *sujeto* y *objeto*, la cual constituye esencialmente el conocimiento. *Verdad* ó conocimiento verdadero es todo conocimiento de un objeto tal cual éste es, sin faltas, añadiduras, ni mudanzas de sus atributos ó cualidades: y *error*, falsedad, ó conocimiento erróneo ó falso, es todo conocimiento en que el objeto no aparece á la inteligencia tal cual es, sino con faltas, añadiduras ó mudanzas de sus atributos ó cualidades.

Certeza ó certidumbre es la conciencia de la verdad, es decir: el estado del alma que posee la verdad plena y seguramente; y *duda* es, por el contrario, la inseguridad ó incertidumbre de si un conocimiento determinado es verdadero ó falso. *Criterio* es todo carácter para distinguir la verdad del error, es decir, para adquirir certeza. El principal criterio es la *evidencia* ó testimonio que da nuestra razón de las verdades que la competen.

III. Atendiendo á la naturaleza ó género de sus objetos, los conocimientos pueden ser de tres clases, á saber: *nociones, juicios y raciocinios*.

Noción, *concepto* ó *idea* es el conocimiento de un sér real ó ideal, sustancia ó atributo.

Juicio es el conocimiento de una relación entre dos ideas. Todo juicio se expresa en una oración gramatical ó *proposición*.

Raciocinio ó *razonamiento* es el conocimiento de una relación entre dos ó más juicios.

IV. *Verdades indemostrables*, intuitivas ó evidentes por sí mismas son aquéllas cuyo solo enunciado ó expresión basta para producir *certeza* de ellas, en quien las entiende; p. ej.: El todo es mayor que cada una de sus partes; Dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí. Por el contrario, llámase verdades demostrables, discursivas, no evidentes por sí mismas, á las que necesitan un razonamiento más ó menos largo para ser evidentes, ó producir certeza en quien las comprende. Ese razonamiento se llama *demostración,* y exige para conseguir dicha evidencia, á más de la exactitud de las relaciones ó juicios que le constituyen, la verdad ya evidente de los juicios que le sirven de base ó punto de partida. La falta de una siquiera de esas dos condiciones hace que el razonamiento, en vez de ser una demostración, sea un *sofisma,* si dicha falta es voluntaria, ó un *paralogismo* si es involuntaria. Entre los paralogismos se llama *círculo vicioso* el que supone ya evidente lo mismo que se quiere demostrar.

Tanto los juicios, ó las proposiciones que los expresan, como los razonamientos, pueden ser particulares ó generales, es decir: referirse á objetos determinados—designados con nombres propios, p. ej.,—ó á objetos que formen un género, como los designados con nombres apelativos ó colectivos.

Todas las verdades generales y evidentes relativas á los conocimientos humanos pertenecen á la ciencia llamada Lógica, de la cual es un brevísimo resúmen esta Introduccion á la ciencia matemática». En general.......

V. *Ciencia* es una serie de verdades generales y evidentes mútuamente enlazadas y subordinadas todas á la idea del asunto ú objeto de *la ciencia*. El *fondo* ó *materia* de cada ciencia son las verdades que la integran, y su *forma* el modo cómo esas verdades se encadenan y enlazan para ir haciendose evidentes unas por otras. *Principios* de una ciencia, son las verdades indemostrables que sirven de bases para las demostraciones de las siguientes verdades.—Los principios científicos son de dos clases: *fundamentales* y *formales*; los primeros son los especiales de cada ciencia que sirven á ésta de verdadero fundamento ó apoyo: los segundos son los comunes á todas las ciencias del mismo género, ó son las leyes de la inteligencia en la adquisicion de las verdades científicas y en la organizacion de éstas para formar ciencia. *Proposiciones* científicas son las oraciones ó cláusulas que espresan verdades de la ciencia ó su investigacion.

Teoria es la serie ordenada de proposiciones relativas á un mismo asunto; de modo que cada ciencia es una gran teoría y cada teoría una pequeña ciencia. *Método*, en general, es la marcha ordenada para hacer algo: y método científico la marcha ordenada de la inteligencia para adquirir conocimientos científicos y para esponerlos ó enseñarlos. Hay dos métodos científicos llamados respectivamente *análisis* ó método analítico y *síntesis* ó método sintético.

El Análisis procede de lo compuesto á lo simple, elevandose de lo particular y determinado á lo general é indeterminado. La Síntesis, por el contrario, procede de lo general á lo particular, de los principios á sus consecuencias. Para la perfecta constitucion de cualquier ciencia conviene combinar armónicamente ambos métodos, formando lo que se llama método constructivo que empieza por la análisis y concluye por la síntesis.

Todas las reglas para la buena construccion científica, ó sea para el buen uso de los métodos científicos, se resumen en la llamada ley de la unidad y variedad armónicas qué exige se conozca cada objeto de ciencia: 1.° en su *unidad* ó conjunto; 2.° en su *variedad* de partes, especies ó aspectos y 3.° en la *armonia* de relaciones de las partes, especies ó aspectos, entre sí y con el todo.

VI. Las proposiciones científicas tienen desde la antigüedad nombres técnicos que conviene saber:

Definicion es la espresion de los caractéres propios y esclusivos de lo definido.

Axiomas son las proposiciones en que se enuncian verdades indemostrables relativas á objetos ya definidos.

Los *postulados* son proposiciones de carácter práctico, no tan evidentes como los axiomas, pero que no necesitan, ni á veces tienen, demostracion.

VII. *Teoremas* son las proposiciones demostrables, qué forman el cuerpo de la ciencia, enunciando sus verdades principales.

Problemas son las proposiciones en que se pide hallar algo desconocido ó incógnito, en virtud de sus relaciones con cosas conocidas ó *datos*.

Lemas son los teoremas que sirven de auxilio anticipado para la comprension, resolucion ó demostracion de otras proposiciones.

Corolarios son las proposiciones secundarias que se deducen de otras, sin demostracion necesaria, por lo obvia y sencilla. Son lo mismo que consecuencias.

Escolios son las advertencias que se intercalan para aclarar, ampliar ó restringir proposiciones anteriores.

Casi todas las proposiciones científicas pueden ser enunciadas bajo esta forma: Si A es B, C es D; y entónces á la primera parte—Si A es B—se la llama *hipótesis* y á la segunda—C es D—*tésis* ó conclusion. Es claro que aun bajo otra forma gramatical existen la hipótesis y la tésis y se las halla facilmente. Eso supuesto, se llama proposicion recíproca ó inversa de otra—que toma correlativamente el nombre de directa—la que tiene por hipótesis la tésis y por tésis la hipótesis de aquella. Así, la recíproca de la proposicion—ej.º anterior será: Si C es D, A es B. A veces, una proposicion tiene varias recíprocas, cuando consta de varias hipótesis para una misma conclusion ó viceversa. Claro es que siempre se puede formar gramaticalmente la recíproca ó las recíprocas de una proposicion dada, mas podrán ser verdaderas ó falsas independientemente de la directa. Es, pues, necesario, para completar cada teoría científica, decir si son verdaderas ó falsas las recíprocas de las proposiciones principales ó directas y demostrarlo.

Proposiciones contradictorias son dos tales que la una niegue justa y precisamente lo que la otra afirma; p. ej. A es B, A no es B. Es evidente, que de la verdad de una proposicion se infiere lógicamente la falsedad de su contradictoria y vice-versa de la falsedad de la una resulta evidentemente la verdad de la otra de esas dos proposiciones, y ésto es el fundamento de las demostraciones indirectas, como veremos luégo.

VIII. *Plantear* un problema es analizar su enunciado hasta descubrir y espresar las relaciones, entre datos é incógnitas, qué han de servir de punto de partida para conocer éstas. *Resolver* un problema es hallar sus incógnitas, espresando las operaciones que conducen á dicho hallazgo. Suele llamarse *solucion* de un problema á cada modo de resolverle, y tambien, y mas propiamente, á cada incógnita ya hallada ó á cada combinacion de ellas, si son varias, que satisface á las condiciones del enunciado.

Es claro que á cada resolucion de un problema científico ha de acompañar su correspondiente demostracion, á menos que no la necesite por su evidencia intuitiva. *Discusion* de un problema es el exámen de todos los casos que pueden suceder relativos á los datos, y de la influencia de cada caso en las soluciones. *Problema determinado* es el que tiene un número finito de soluciones, *indeterminado* el que tiene infinitas soluciones y *absurdo ó imposible* el que no tiene solucion alguna.

IX. En la demostracion de los teoremas y en la resolucion de los problemas, lo mismo que en la organizacion de cada ciencia ó teoría, puede seguirse la Análisis ó la Síntesis. Se sigue el método analítico cuando, partiendo de la proposicion enunciada, se ve de que otra ú otras podria ser consecuencia y de cuales éstas y así sucesivamente hasta llegar á cuestiones ya sabidas. Por el contrario, el método sintético, partiendo de proposiciones ya evidentes, conduce de consecuencia en consecuencia hasta la que se quiere demostrar ó resolver.

Hay otro método de demostracion llamado indirecto ó *ad absurdum*. Consiste en probar la verdad de una proposicion demostrando la falsedad de su contradictoria, por el absurdo que resultaría, como consecuencia, si dicha contradictoria fuese verdadera.

X. Las ciencias humanas se dividen en dos clases: racionales y esperimentales. Las primeras tratan de objetos ideales, necesarios, eternos, inaccesibles á los sentidos corporales, aunque éstos y el sentido interno—la imaginacion—presten poderoso auxilio para el estudio de dichas ciencias, dando formas sensibles, aunque imperfectas, á los conceptos racionales—objetos verdaderos de ése estudio.—Las ciencias de observacion, empíricas ó esperimentales, por el contrario, tienen sus objetos pertenecientes al mundo real, ya en su parte material ó sensible, ya en la espiritual ó moral.

En consecuencia, las ciencias racionales se organizan ó constituyen por razonamiento puro, fundado primeramente en las definiciones del objeto total de cada una y de los objétos de sus diversas teorías; y las esperimentales se forman por la combinacion del raciocinio, medio imprescindible, en toda marcha verdaderamente científica, con la observacion y la esperiencia, es decir con los datos, que nos proporcionen los sentidos y todos nuestros medios de conocer.

Sin embargo, como ya hemos indicado, prestan auxilio á las ciencias racionales, los sentidos y la imaginacion, materializando los objetos de aquellas, ya con signos, como los que representan números, ya con imágenes como las que nos formamos de las figuras geométricas. Tambien le prestan otras funciones intelectuales, como la induccion, la abstraccion, la generalizacion, la memoria; cuyos oficios respectivos pueden verse en un tratado de Psicologia á de Lógica.

MATEMÁTICA ELEMENTAL.

TOMO 1.º

MATEMÁTICA ELEMENTAL.

LECCION 1.ª

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES.--DIVISIONES DE LA MATEMÁTICA.

«*Ideas de finitud y de infinitud relativa y absoluta; ejemplos que las aclaran* (1). *Definiciones (VI) de cantidad, calidad, órden, y número*; *escolios (VII) sobre ellas; division del número en cardinal y ordinal (2). Cantidad abstracta y concreta; finita, infinita é infinitesimal (3). Medir, medicion, medida; unidad (4). Cantidad mensurable é inmensurable; ejemplos de una y otra (5). Números abstracto y concreto*; *entero, quebrado é inconmensurable (6). Espacio y tiempo; movimiento y reposo; fuerzas, equilibrio (7). Matemáticas ó Matemática; razones para ambos nombres; matemáticas puras y mixtas ó aplicadas. (8). Algoritmia ó Aritmologia; Geometria; Cronometria; Cinemática ó Foronomia; partes elemental y general de cada una de esas ciencias (9). Aritmética y Álgebra, valor lógico de esa division de la Algoritmia (10). Principales signos matemáticos*; *igualdad, desigualdad, sus miembros y propiedades fundamentales (11).*

1. Todo hombre en pleno uso de razon tiene, con más ó ménos claridad, las ideas (III) de *finitud* y de *infinitud* y las aplica sin cesar á todos los demás objetos de conocimiento (II). Así, llama *finitos* á los objetos limitados totalmente, es decir con principio y fin; é *infinitos* á los objetos ilimitados total ó parcialmente, es

decir, sin principio ni fin; ó con uno solo de esos dos accidentes. Es claro que *finitud* es la propiedad de ser finito, é *infinitud* la de ser infinito, y que esas dos propiedades las pensamos, lo mismo de *seres reales*, ó existentes en el Universo, que de los que sólo existen para nuestra inteligencia—*seres ideales*—.Todos los objetos percibidos por los sentidos corporales son necesariamente finitos y sólo son infinitos algunos que concibe nuestra razon, como el Tiempo, el Espacio, el Ser Supremo. La infinitud puede ser *absoluta*—la de Dios y sus atributos—,ó *relativa*—la de los objetos ilimitados sólo parcialmente, es decir, en algun sentido, pero limitados en otro ú otros;—p. ej.ª la de un ángulo rectilíneo.

A las ideas de *finitud* y de *infinitud relativa* van implícitamente unidos los juicios (III) de comparacion y de relacion mutua de cada objeto finito ó infinito relativo con otro ú otros análogos, y de ahí las ideas de *cantidad, calidad, órden y número.*

2. *Cantidad* es la propiedad de ser cuántos, es decir más ó ménos, mayores ó menores los seres finitos ó infinitos relativos, comparados unos con otros los del mismo género. *Calidad* (que aquí mentamos sólo por su vulgar union á la *cantidad* para apreciar los objetos) es la propiedad de ser mejores ó peores unos objetos que otros. Puede decirse que calidad es la cantidad de bondad. *Órden* es la disposicion relativa, ó de unos respecto á otros, de varios objetos, en el Tiempo ó en el Espacio. *Número* es, en su más lata acepcion, la cantidad ó el órden determinados exacta ó aproximada, material ó mentalmente. Si el número se refiere á la cantidad, es llamado *cardinal;* y si al órden, *ordinal.* De las definiciones anteriores se infieren fácilmente los siguientes *escolios* (VII).

1.° Tanto la cantidad como la calidad pueden referirse á un objeto solo, ó á varios, pero supuestos siempre otros análogos con quienes comparar aquellos, pues nada es, en absoluto, mayor ó menor, más ó ménos, mejor ó peor, sino con relacion á algo respectivamente menor ó mayor, ménos ó más, peor ó mejor.

2.° El órden sólo puede referirse á varios objetos.

3.° La cantidad es la propiedad fundamental, de las cuatro definidas, en este número, á la cual pueden reducirse natural ó artificialmente las otras tres, al ménos para su estudio, como veremos en el curso de estas lecciones.

4.° La cantidad es sólo propiedad ó atributo de las cosas cuántas, como la bondad de las buenas, etc.; más se usa el nombre abstracto *cantidad* como apelativo, siempre que se habla de dicha propiedad sin referirla á objeto alguno.

3, *Cantidad abstracta*, es la cantidad no referida á objeto alguno determinado. *Cantidad concreta* es la referida á objeto determinado, v. g.: cantidad de placer, de talento, de fuerza, de dinero, etc.

La cantidad (abstracta ó concreta) puede tambien ser clasificada, segun el grado de limitacion de los objetos á que se refiera ó pueda referirse (1), como sigue:

Cantidad finita es la de los objetos limitados totalmente ó en todos sentidos.

Cantidad infinita ó infinitamente grande es la de los objetos ilimitados en algun sentido aunque limitados en otros ú otros, sin lo cual no tendrían cantidad, como no la tienen, v. g. Dios y sus atributos.

Cantidad infinitesimal ó infinitamente pequeña es la de los elementos indivisibles de que constan todas las cantidades; p. ej. los instantes de que consta el tiempo.

4. *Medir* una cantidad es determinar su relacion exacta ó aproximada con otra cantidad del mismo génenero tomada como tipo de comparacion: relacion análoga á la que toda pluralidad de objetos tiene con uno de ellos. *Medicion* es el acto ó la operacion de medir y *medida* el resultado inmediato de la medicion. A veces, tambien se entiende por medida la cantidad tipo de comparacion para medir las de su género, y cuyo verdadero nombre es unidad de medida ó sólo *unidad*.

5. Lo espuesto últimamente autoriza la siguente clasificacion de las cantidades, relativamente á su medicion.

Cantidad mensurable ó medible es toda aquella cuya medicion exácta ó aproximada se concibe posible, aunque tal vez no lo sea para las limitadas facultades humanas. Tales son todas las cantidades (reales ó ideales) relativas al mundo material ó sensible, como: cantidad de espacio, de tiempo, de fuerza, de calor, etc.

Cantidad inmensurable ó inmedible es toda aquella cuya medicion no se concibe posible para nadie: solo sí su comparacion vaga con otra de su genero para afirmar su relacion de igualdad ó desigualdad. Tales son todas las cantidades relativas al mundo espiritual ó supra-sensible, como: cantidad de placer, de dolor, de belleza, de talento, de bondad, de maldad, etc.

6. De lo espuesto se deduce que sólo las cantidades mensurables (5) son determinables numéricamente (2), y ésto cuando se compara y relaciona á las del mismo género cualitativo y órden cuantitativo, es decir, á las concretas relativas á objetos del mismo nombre y además todos finitos ó infinitos, ó infinitesimales (3). En efecto, la medicion exácta ó aproximada que toda determinacion numérica presupone (4), no sólo exige la previa fijacion de unidad—cantidad del mismo género que la determinanda, —sino el que esa unidad sea finita, infinita ó infinitesimal, segun lo sea respectivamente la cantidad que ha de medirse. Segun que se esprese ó no el nombre ó género, de los objetos cuya cantidad ó cuyo órden son determinados numéricamente, los números respectivos son abstractos ó concretos.

Númeró abstracto cardinal es, pues, la relacion de cualquier cantidad con la unidad de su género; ej°. *ocho*. *Número abstracto ordinal* es la relacion entre el lugar ó sitio de *cualquier* objeto y el de otro ú otros objetos análogos y con aquel coordenados; ej.° *octavo*. *Número concreto cardinal* es la espresion de *cada* cantidad concreta; ej.° *ocho varas*. *Número concreto ordinal* es la espresion del sitio de *cada* objeto entre varios del mismo nombre coordenados: ej.° *octavo dia*. El nombre de cada número concreto consta, pues, del nombre de nn abstracto y del de la unidad concreta correspondiente, en plural ó en singular. Cuando se dice *número*, simplemente, se entiende número abstracto cardinal.

El número cardinal (abstracto ó concreto) se divide, bajo otro aspecto, en *entero, quebrado ó fracciona rio, é inconmensurable*.

Número entero abstracto es la relacion de cualquier cantidad y su unidad, si aquella contiene á ésta exactamente una ó varias veces. Ej.° ocho, ciento. *Número entero concreto* es la espresion de la medida de cada cantidad concreta, si ésta contiene exactamente á su unidad una ó varias veces; ej.° ocho dias, cien varas.

Número quebrado ó fraccionario abstracto es la relacion entre cualquier cantidad y su unidad, si aquella no contiene á ésta exactamente, pero sí contiene á cada una de las partes iguales en que se la suponga dividida; ej.° dos tercios, cinco medios, dos y medio. Si la cantidad cuya relacion con la unidad es un quebrado, vale mas que la unidad, dicha relacion puede espresarse de dos modos: ó diciendo sólo cuántas partes iguales de unidad contiene la cantidad (dos tercios, cinco medios), ó diciendo priméro cuántas unidades completas y en seguida cuántas partes de otra unidad integran la cantidad medida (dos y medio). Bajo esta última forma el número fraccionario es llamado número mixto, siendo, como se comprende facilmente, mera cuestion de forma en su espresion, llamar á un número, mixto ó fraccionario, pues p. ej.° cinco medios, dos y medio, son dos nombres distintos de un solo y mismo número.

Número fraccionario concreto es la espresion de la medida de cada cantidad, cuando su relacion con la unidad es un fraccionario abstracto, cuyo nombre seguido del de la unidad, forma el nombre del quebrado concreto; ej.° dos tercios de dia, cinco medios cuartillos ó dos y medio cuartillos.

Por último.....

Número inconmensurable abstracto es la relacion de cualquier cantidad á su unidad, si aquella no contiene exactamente á esta ni á parte alguna de las iguales en que se la divida, cualquiera que sea el número de partes.

Número inconmensurable concreto es lo que resulta de referir un inconmensurable abstracto á la unidad correspondiente. Los números inconmensurables no tienen espresion propia exacta, sino cuando resultan de las combinaciones de los números enteros y fraccionarios, como se verá despues.

7. El Espacio y el Tiempo son indefinibles, aunque todo hombre en sano juicio sabe bien lo que son y sabe que son infinitos, si bien puedese concebir en uno y en otro porciones limitadas total ó parcialmente que son llamadas respectivamente espacios y tiempos. *Movimiento* es la variacion de algo en el Espacio en tiempos sucesivos; *reposo* es, por el contrario, la fijeza de algo en el Espacio, en tiempos sucesivos. *Fuerza* es toda causa de movimiento, aunque no siempre le producen cuando son varias. *Equilibrio* es el efecto que producen varias fuerzas que mutuamente se destruyen y no producen movimiento.

8. *Matemáticas ó Matemática* es la ciencia de la cantidad mensurable, la cual desde ahora podremos llamar tambien cantidad matemática. Nombrada esa ciencia primeramente en singular, como realmente puede hacerse por la unidad de su objeto, se usa mas bien el nombre en plural, por la gran estension é importancia de sus varias partes, cada una de las cuales constituye una verdadera ciencia. En el curso de esta obra la nombraremos indistintamente de ambos modos, por no romper del todo con el uso, ni con las razones lógicas é históricas que autorizan se nombre en singular.

Matemáticas puras son las que tratan de la cantidad abstracta (3) y de las cantidades en el Espacio, en el Tiempo y en el movimiento. *Matemáticas mixtas ó aplicadas* son las que tratan de cantidades materiales ó físicas como de fuerza, de calor etc. Mediante ciertos convenios tambien se puede considerar matemáticamente algunas cantidades del mundo inmaterial, como se hace en algunas obras intituladas Matemática moral, social etc.

9. Segun su definicion y las reglas para la buena organizacion científica, la Matemática pura deberia dividirse en cuatro partes, que tratáran respectivamente: 1.ª de la cantidad abstracta; 2.ª de la cantidad en el Espacio; 3.ª de la cantidad en el Tiempo, y 4.ª de la cantidad en el movimiento—combinacion armonica del espacio y del tiempo.—La 3.ª parte no está aun constituida como ciencia, aunque ya se la nombra Cronometria. Las otras tres estan ya organizadas, aunque no perfectamente, y son llamadas: la 1.ª *Algoritmia* (ciencia del cálculo) ó *Aritmologia* (ciencia del número); la 2.ª *Geometria* y la 4.ª. *Cinemàtica* ó *Foronomía*. La mas conveniente subdivisión de cada una de esas ciencias en su actual estado, parece ser en dos partes: *elemental* que esponga las verdades más sencillas y usuales relativas al objeto de la ciencia y *general* que trate ya dicho objeto en todas sus determinaciones.

10. Asi la *Algoritmia* se divide, casi unánimente por todos los matemáticos, en Aritmética y Algebra, partes caracterizadas respectivamente por la anterior consideracion, que no fundandose en razones lógicas, sino sólo en razones de conveniencia didáctica, no da mas valor lógico á dicha division que el de ser casi completamente necesaria hasta mejor organizacion de la Algoritmia. Segun lo que precede, el *Algebra* completa deberia estar fuera de la Algoritmia elemental, y el nombre de Algebra elemental, tan usado oficial y extraoficialmente, tiene aun ménos razon de ser que la division en Aritmética y Algebra. Conformandonos sin embargo, con la nomenclatura usual, incluiremos tambien en esta obra, lo que comunmente se entiende por Algebra elemental.

11. Los principales signos matemáticos, que por usarse en todas las partes de esa gran ciencia deberemos esplicar en estas generalidades, son los que espresan las relaciones de igualdad ó desigualdad—base y fundamento del concepto de cantidad.—La relacion de igualdad se espresa con el signo = colocado, en el órden de lectura, entre

las cantidades que son ó se suponen iguales, en cada cuestion matemática; p. ej.º A=B, que se lee A igual á B, ó A igual B; llamandose, en general, *igualdad* matemática á la espresion de la relacion de igualdad, y *desigualdad* á la espresion de la desigualdad ó relacion general entre cantidades desiguales. Debe tenerse, pues, mucho cuidado con las dos acepciones, una abstracta y otra material, de las palabras igualdad, desigualdad. El sígno de desigualdad es el $<$ ó el $>$ colocado entre las cantidades desiguales, siempre con el vértice ó punta vuelta hacia la cantidad menor. Así, $A < B$, $B > A$, se leen respectivamente A menor que B, B mayor que A. Primer miembro de una igualdad ó desigualdad es lo que se espresa antes del signo $=, >$ ó $<$ y segundo miembro lo que se espresa despues. Es evidente ó axiomático (VI) que *la relacion de igualdad ó desigualdad entre dos cantidades no cambia cuando con ambas se hace una misma operacion* matemática. Este axioma es fundamental en toda la ciencia matemática así como los dos siguientes.

Dos cosas iguales á una tercera son iguales entre sí.

Dos cosas, una mayor y otra menor que una tercera, son desiguales entre sí; siendo evidente cual es la mayor y cual la menor.

Los signos de relacion $= > <$ se usan á veces cruzados de arriba á abajo por un trazo recto y entonces significan la negacion de la relacion que significarían sin trazo.

Ademas de los signos de *relaciones matemáticas*, afirmativos ó negativos, se emplean, como es natural, signos de *cantidades* y de *operaciones* ó combinaciones de cantidades, los cuales se irán manifestando con su significado, á medida que lo exijan las teorias respectivas, bastando aqui la advertencia general de que las *letras* sueltas, ya usadas en varios ejemplos puestos en esta leccion, son los signos mas generales de cantidades, es decir: representan, al menos en Algoritmia, cantidades indeterminadas de valor.

ARITMÉTICA.

LECCION 2.ª

DIVISIONES DE LA ARITMETICA.—NUMERACION DE ENTEROS.

«*Definicion de la Aritmética y su division usual en dos partes:* 1.ª *Aritmética abstracta*; 2.ª *Aritmética concreta* (12). *Division razonada de la Aritmética abstracta en* 4 *libros:* 1.º *Teoría de los números enteros;* 2.º *Teoría de los números fraccionarios;* 3.º *Teoría de los números inconmensurables*; *y* 4.º *Relaciones aritméticas entre números abstractos cualesquiera* (13). *Subdivision razonada de cada uno de los* 3 *primeros libros en* 3 *capítulos;* 1.º *Numeracion;* 2.º *Operaciones;* 3.º *Propiedades* (14). *Numeracion en general: su division en verbal y escrita* (15). *Generacion primitiva de los números enteros cardinales por agregacion de unidades, y en consecuencia, infinidad de dichos números, y necesidad de un sistema verbal de numeracion de enteros* (16). *Teoría general de cualquier sistema verbal regular de numeracion de enteros: base, unidades numerativas y números elementales de* 1.º, 2.º, 3.er *órden, etc.* (17). *Cada unidad numerativa vale más que todos los mayores números elementales de órdenes inferiores* (18). *Nomenclatura en el sistema usual ó décuplo:* 1.º *de las unidades numerativas y números elementales de órdenes sucesivos; grupos periódicos de aquellas:* 2.º *de un entero cualquiera no elemental* (19). *Numeracion escrita; idea general de sus sistemas antiguos; numeracion romana* (20). *Teoría ge-*

neral de los sistemas regulares de numeracion escrita; base, cifras y guarismos; valores absoluto y relativo de cada cifra (21). *Aplicacion de esa teoría general al sistema décuplo; reglas para escribir y leer en él números enteros* (22). *Nomenclatura de los números ordinales; notacion gráfica de los mismos* (23).»

12. *Aritmética es la parte elemental de la ciencia de los números.* Esta definicion comprende no sólo á la Aritmética que nombramos (10) como parte elemental de la Algoritmia, es decir, de la 1.ª rama de la Matemática pura, sino tambien las aplicaciones elementales de esa rama á los números concretos más usados en la vida social. Así definida, la division natural de la Aritmética es en dos partes, que traten respectivamente de los números abstractos y de los números concretos, y que por tanto, podrán nombrarse breve y exactamente: *Aritmética abstracta* y *Aritmética concreta.*

Es indudable que el órden en que deben ser estudiadas es el mismo en que acabamos de nombrarlas, pues que segun lo dicho, la 2.ª no es mas que la aplicacion de la 1.ª á los números concretos más usuales. La 1.ª parte es, pues, lo que en la leccion 1.ª hemos considerado como parte elemental de la *ciencia de la cantidad abstracta*, porque en ésta no cabe indudablemente estudiar más, que su determinacion numérica y las relaciones de los números abstractos resultantes de esa determinacion. Es verdad que esos números no siempre aparecen completamente determinados de valor, mas no por eso se crea, como erróneamente se considera en muchas obras, que *las cantidades* pueden ser,—en general, en abstracto, ni ménos en concreto,—combinadas y relacionadas directamente, es decir, sin suponerlas explícita ó implícitamente referidas á su unidad. Lo que hay es, que en las cuestiones verdaderamente generales—todas las algebráicas y algunas aritméticas—se deja la unidad indeterminada de valor, porque lo son tambien las cantidades consideradas, mas á no ser tal vez, en las dos primeras operaciones algorítmicas—adicion y sustraccion—no se combinan ni relacionan matemáticamente *cantidades*, sino *números* determinados ó indeterminados; constantes ó variables; abstractos ó concretos; finitos, infinitos ó infinitesimales; reales ó ideales. Esta última denominacion exije una breve explicacion que se ampliará más adelante. Entendemos por números *ideales* los resultados de operaciones matemáticas imposibles de realizar (p. ej° restar ó quitar un número mayor de otro menor) con números dados; resultados que, á pesar de su implícita ó esplícita absurdidad se les somete á operaciones ulteriores, en virtud de ciertos convenios.

Sin embargo de lo que acabamos de esponer, usaremos indistintamente, como se acostumbra, los términos *número* y *cantidad*, por un tropo ó figura retórica, á veces conveniente.

Postulados. *Cualquier cantidad puede ser expresada por cualquier número*, tomando la unidad correspondiente. *Cualquier cantidad puede ser unidad de todas las cantidades de su género*, resultando los números respectivos correspondientes. *Cualquier número puede referirse á cualquier unidad*, resultando la cantidad correspondiente.

13. En lo que acabamos de esponer, y en la leccion anterior queda, aunque sumariamente, estudiado el objeto total de la Aritmética: toca ahora, para seguir la ley lógica (V) estudiar las diversas especies de ese objeto, y las relaciones de esas especies entre sí, y con el todo. A la division del número en *abstracto* y *concreto* corresponde la de la Aritmética en las 2 partes ya indicadas. A la division del número en *entero*, *quebrado é inconmensurable*, corresponde la de la Aritmética abstracta en tres secciones correlativas, que llamaremos *libros*; y completaremos el estudio elemental de los números abstractos, con un 4.° libro que trate de las relaciones aritméticas entre dichos números, sean enteros, fraccionarios ó inconmensurables. Las subdivisiones de la Aritmética concreta han de obedecer á otras consideraciones que en su lugar espondremos.

14. A su vez, los tres primeros libros de la Aritmética abstracta deben subdividirse análogamente, pues tanto en los números enteros, como en los fraccionarios é inconmensurables, hay que considerar sucesiva y ordenadamente: 1.° su *numeracion*, ó modo primitivo y originario de ser formados y espresados: 2.° sus *operaciones*, ó modos diversos elementales de ser formados ó engendrados unos por otros; y 3.° sus *propiedades* elementales, relativas forzosamente á la numeracion ó á las operaciones numéricas. Cada una de esas tres teorías (V) constituirá un *Capítulo* en el libro correspondiente. El 4.° libro se subdividirá á su tiempo en los capítulos convenientes.

PARTE 1.ª

ARITMÉTICA ABSTRACTA.

LIBRO PRIMERO. - TEORÍA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

CAPÍTULO 1.º NUMERACION.

15. *Numeracion* en general, *es la formacion y espresion primitivas de cada especie de números*, y como los modos más generales de espresar todas nuestras ideas, son la palabra y la escritura, y como la *espresion* sea la mas estensa é importante parte de la *numeracion*, divídese ésta comunmente, mejor dicho, su teoría aritmética, en dos secciones: *Numeracion verbal y Numeracion escrita*, que estudiaremos en ese órden, despues de hacerlo de la qué lógicamente debe precederles, sin duda, á saber:

§ 1.º GENERACION PRIMITIVA DE LOS ENTEROS.

16. Como se infiere de su definicion, la generacion primitiva y universal de los números enteros, es la agregacion sucesiva de unidades, y como por grande que sea un número entero, se le puede concebir agregadas más unidades, resulta que es infinita la cantidad de números enteros, y por tanto que es imposible saber nombrarlos sin ciertas reglas sistemáticas, que permitan componer los nombres de los enteros sucesivos, con los nombres de

los enteros menores, ya nombrados.

§ 2.° Numeracion verbal de enteros.

17. *Sistema de numeracion verbal ó sistema verbal de numeracion es el conjunto armónico de reglas para nombrar los números.* La teoría general de un sistema cualquiera *regular* de numeracion de enteros, es decir, de un sistema cualquiera como el usual, es la siguiente:

Suponiendo dados nombres arbitrarios á los primeros números enteros, hasta uno determinado, que llamaremos desde ahora *base*, podremos considerar á ésta como una nueva unidad auxiliar para el fin propuesto, y que nombraremos de 2.° órden, supuesto que llamemos de 1.° á las unidades simples ó principales á que se refieran los números en cuestion. Pues bien, refiriendo los nombres, ya sabidos, de los primeros enteros hasta la base, á unidades de 2.° órden y combinándolos además, bajo esa nueva acepcion, con sus acepciones primitivas, podremos nombrar hasta el número que conste de tantas unidades de segundo órden cuántos contenga la base de las de 1.° Dando un nombre nuevo á ese número límite y considerándolo como unidad de 3.er órden, podremos contar por éstas como por las de 1.° y 2.°, combinando ademas estos nuevos nombres así sucesivamente con sólo dar con los anteriores, y nombres distintos á los primeros números hasta la base y á las unidades de 2.° 3.er orden, etc, se podrá nombrar facilmente números enteros muy grandes, aunque no todos, pues son infinitos (16). *Base de un sistema verbal regular de numeracion es,* pues, *el número de unidades de cada orden que componen la unidad del órden inmediato superior. Unidades numerativas son las de* 1.° 2.° 3.er *órden, etc. Números elementales son los que constan de unidades numerativas de un solo órden,* y *no más, por supuesto que las que forman la base.* A los números elementales se los dice respectivamente del órden de la unidad numerativa á que se refieren. Esta es, pues, el primero ó menor número elemental de su órden respectivo, como

p. ej.° la *unidad* de 1.er órden ó sea la primitiva á que se refieren todos los números enteros, es el menor ó primero de todos ellos—el número *uno*—.Mas aunque del mismo *valor*, tienen nombres distintos las unidades numerativas y los números elementales respectivos de cada órden.

18. Teorema. *Cada unidad numerativa vale más que todos los números elementales reunidos, de órdenes inferiores al de aquella.*

Porque de la teoría general, ántes espuesta, se deduce, que cada unidad numerativa consta de *una unidad simple más* que el número formado por la reunion de todos los elementales de órdenes inferiores al de dicha unidad numerativa.

19. En el sistema usual en todo el mundo civilizado, reciben nombres distintos é independientes los primeros enteros hasta el llamado *diez* (en castellano)—*base* del sistema, al cual por eso se le dice décuplo ó decimal—:se llama *decena* á la unidad numerativa de segundo órden formada por *diez* de primero, y se cuenta: dos decenas, tres decenas, cuatro decenas, etc, hásta diez decenas—unidad de tercer órden, que como tal, se llama *centena*, y como número, *ciento*—(17). Realmente no se dice dos decenas tres decenas etc; sino *veinte*, *treinta* etc, nombres derivados del latin y consagrados por el uso.

Despues se cuenta: *doscientos*, *trescientos*, *cuatrocientos*, etc,hasta nuevecientos=*novecientos*. Los nombres *unidad, decena, centena* de las unidades numerativas y los de los números elementales de los tres primeros órdenes se repiten para los tres órdenes siguientes—cuarto, quinto y sexto—posponiendo á dichos nombres la frase *de millar* para las unidades numerativas y la voz *mil* para los números, es decir; unidad de millar—de cuarto orden—;decena de millar—unidad de quinto órden—;centena de millar-unidad de sexto órden—;un mil ó *mil*, *dos mil*, *tres mil*,.. *diez mil*, *veinte mil*, *treinta mil*; ...;*cien mil*, *doscientos mil*, *trescientos mil*,..... *novecientos mil*.

Por último, los nombres de las unidades de los seis primeros órdenes y los de los números elementales respectivos se repiten periódicamente para todos los demas órdenes, que vienen así á quedar clasificados en grupos de á seis, teniendo cada grupo un nombre genérico, el cual se pospone á los nombres de los números elementales de los seis primero órdenes, para completar los nombres de los respectivos de los otros órdenes. El primer grupo de á seis es el de las *unidades* simples, el segundo de los *millones,* el tercero de los *trillones,* etc; y por tanto las unidades de los órdenes sétimo, treceavo, décimo-nono, etc, se les llama respectivamente, unidad de millon, billon, de trillon etc; las de los órdenes octavo de catorceavo, vigésimo, etc, decena de millon, de billon, de trillon, etc, y así sucesivamente; y los números elementales análogos se les dice: un millon, dos millones, nueve millones (órden séptimo); diez millones,.... veinte millones,....noventa millones (orden octavo);............un billon, dos billones,.....nueve billones, (órden treceavo); diez billones, veinte billones,.....noventa billones (órden catorceavo), etc.

Los números no elementales, y que evidentemente hay, comprendidos entre cada dos elementales consecutivos, se nombran del modo siguiente. Si no pasan del cuarto órden ó estan entre dos números elementales de los órdenes séptimo, treceavo, decimonono, etc,—de seis en seis—se nombra primero completo el número elemental inmediato inferior, y en seguida los números menores que la unidad del mismo orden que dicho número elemental, (*) p. ej.° los números comprendidos entre quinientos y seiscientos, se nombran: quinientos uno, quinientos dos, quinientos tres,.... hasta quinientos noventa y nueve, porque los números menores que una

(*) Sabidas son las escepciones *once, doce, trece, catorce y quince.*

centena—unidad del mismo órden que quinientos ó *cinco* cientos—son: uno, dos, tres, cuatro,.........., noventa y nueve. Si el número no es de los órdenes recien indicados, se nombra atendiendo á los grupos de á tres y de á seis en que hemos clasificado las unidades numerativas, y combinando los nombres de los números elementales que integran el propuesto, de modo que resulten destacados ésos grupos, cada uno de los cuales se nombra como si estuviese solo, añadiendo en seguida el nombre genérico que le corresponda, p. ej.^{o}:

		Nombre de cada grupo.
	Doscientos *mil* cuatrocientos noventa y siete	*trillones*,
	ochocientos cincuenta y dos *mil* ciento treinta y dos	*billones*,
	trescientos seis *mil* ochocientos cincuenta y siete	*millones*,
	quinientas sesenta *mil* doscientas cuarenta y cuatro	*unidades*.
ó bien	quinientos sesenta *mil* doscientos cuarenta y cuatro.	

§ 3.° NUMERACION ESCRITA.

20. La escritura ó representacion gráfica de los enteros cardinales con todas las letras de sus nombres respectivos, si es conveniente en ciertos casos—recibos, pagarés y otros documentos importantes—, sería inconvenientísima en Aritmética, por eso, desde la más remota antigüedad, se han representado más breve y sencillamente que escribiendo esos nombres, dando á cada letra del respectivo idioma un valor numérico, ó sólo á algunas de ellas. Independientes del sistema verbal, y por tanto, irregulares é imperfectos esos sistemas—si éste nombre merecen—de numeracion escrita, no hablaríamos más de ellos, sinó se usase aún en relojes, inscripciones de edificios, etc, el sistema que usó el pueblo rey y que por esa razon, vamos á esponer sumariamente.

Numeracion romana. A siete letras nada más daban valores numéricos los antiguos romanos, y eran las que con sus valores respectivos están á continuacion: I=uno, V=cinco, X=diez, L=cincuenta, C=ciento, D=quinientos, M=mil.

Para representar con esas letras un número entero cualquiera, tenian presentes, además de sus valores, arriba espresos, las reglas siguientes:

1ª *Los valores de cada dos letras, escritas una tras otra, se suman ó agregan cuando está ántes, en el órden de lectura, la de mayor valor y por el contrario se restan ó se quita el valor menor del mayor cuando está ántes la letra de valor menor.*

Ej.os: DC=seiscientos, CD=cuatrocientos; XI=once, IX=nueve; MC=mil ciento, CM=novecientos.

2.ª *Cada rayita ó trazo recto horizontal puesto encima de una letra la dá un valor mil veces mayor.*

Ej.os: $\overline{V}$=cinco mil, $\overline{\overline{D}}$=quinientos millones, $\overline{\overline{\overline{L}}}$=cincuenta mil millones.

Otras reglas convencionales había en la numeracion romana, pero bastando con las dos dichas para escribir y leer cualquier entero en ese sistema, nada más diremos.

21. Tratémos ahora de dar una idea general de los sistemas regulares de numeracion escrita, es decir, sistemas análogos y correspondientes á los verbales respectivos.

Representando con un signo ó *cifra* cada número elemental de 1.er órden, ó sean los números menores que la *base* del sistema verbal, como los nombres de esos números se repiten periódicamente para todos los demás órdenes, añadiéndoles el nombre de la unidad numerativa correspondiente, se infiere que esas mismas cifras servirán para representar todos los números elementales, si al *valor absoluto* de unidades que significan por sus figuras, se une el *valor relativo* ó el *órden* de esas unidades, que se espresa dando á cada cifra el mismo lugar en el órden inverso al de lectura, que el *órden numerativo* á que se refiera la cifra. Para ésto es indispensable una *cifra sin valor numérico*, pero que sirva para ocupar los lugares de los órdenes numerativos que falten, á fin de que las cifras *significativas*, ó con valor numérico, ocupen sus lugares correlativos.

Base de un sistema regular de numeracian escrita es su número de cifras, inclusa la que nada vale por sí sola. Indudablemente esta *base* vale lo mismo que la del sistema verbal correspondiente.

Cifras son los signos que representan los primeros números, hasta la base ménos uno, y el signo que sólo sirve para ocupar lugares.

Guarismo es todo entero escrito con una ó más cifras, segun lo exija su valor menor ó mayor que la base numerativa.

22. Aplicando esa teoría general al sistema décuplo tendremos los siguientes signos y sus valores respectivos:

Cifra sin valor.

0=cero,

Cifras significativas, números elementales de primer órden.

1=uno, 2=dos, 3=tres,
4=cuatro, 5=cinco, 6=seis,
7=siete, 8=ocho, 9=nueve.

NÚMEROS ELEMENTALES DE....

2.° ÓRDEN.		3. ÓRDEN.		4.° ÓRDEN.		5.° ÓRDFN.		6.° ÓRDEN.	
Guarismos.	Valores.	Guarismos.	Valores.	Guarismos.	Valores.	Guarismos.	Valores.	Guarismos.	Valores.
10 ---	diez.	100 ---	ciento	1000 ---	mil	10000 ---	diez mil	100000---	cien mil
20 ---	veinte	200 ---	doscientos	2000 ---	dos mil	20000 ---	veinte mil	200000---	doscientos mil
30 ---	treinta	300 ---	trescientos	3000 ---	tres mil	30000 ---	treinta mil	300000---	trescientos mil
40 ---	cuarenta	400 ---	cuatrocientos	4000 ---	cuatro mil	40000 ---	cuarenta mil	400000--	cuatrocientos mil
50 ---	cincuenta	500 ---	quinientos	5000 ---	cinco mil	50000 ---	cincuentamil	500000---	quinientos mil
60 ---	sesenta	600 ---	seiscientos	6000 ---	seis mil	60000 ---	sesenta mil	600000---	seiscientos mil
70 ---	setenta	700 ---	setecientos	7000 ---	siete mil	70000 ---	setenta mil	700000---	setecientos mil
80 ---	ochenta	800 ---	ochocientos	8000 ---	ocho mil	80000 ---	ochenta mil	800000---	ochocientos mil
90 ---	noventa	900 ---	novecientos	9000 ---	nueve mil	90000 ---	noventa mil	900000---	novecientos mil

Y así sucesivamente, *para escribir un número elemental cualquiera basta escribir priméro la cifra significativa cuyo valor absoluto sea el de unidades numerativas que ése número elemental contenga y en seguida, es decir, á la derecha de esa cifra tántos ceros cuántos órdenes haya menores que el de dicho número elemental.*

Para escribir un número cualquiera no elemental, basta suponer escrito el número elemental de mayor órden que aquel contenga, y sustituir los ceros por las cifras significativas de los órdenes inferiores, colocadas en sus lugares correlativos.

Para leer un guarismo, se vé cuántos periódos de á seis cifras contiene, empezando por la derecha, el último periódo podrá tener de una á seis cifras; en seguida se lee priméro ese último periodo como si estuviera solo, terminando su nombre por el de sus unidades numerativas es decir, millones, billones, trillones, cuatri-

llones, quillones, etc, segun queden á la derecha uno, dos, tres, cuatro, cinco etc, grupos de á 6 cifras, y así se van leyendo los periodos sucesivos de izquierda á derecha, hasta terminar. Esto supone que se sabe leer números de una á seis cifras, lo cual es bien facil, recordando la clasificacion (19) de las unidades numerativas y de los números elementales.

§ 4.° Numeracion ordinal.

23. Para concluir, vamos á indicar brevemente la nomenclatura y notacion gráfica de los números abstractos ordinales. Suponiendo numerados cardinalmente varios objetos en el mismo *órden* en que estan colocados, el que tenga el núm. 1. es llamado *primero,* el que el 2, *segundo,* y así sucesivamente se nombran tercero, cuarto, quinto, sesto, séptimo, octavo, noveno, y décimo, los que tienen los números cardinales respectivos 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

Esos son los nombres de los diez primeros números ordinales; desde el once en adelante se nombran todos los demás añadiendo á el nombre del núm.° cardinal respectivo la terminacion *avo*; es decir: *onceavo, doceavo, treceavo, etc.*

Esa es la regla más general, por mas que tenga en lenguaje *culto* muchas escepciones que se aprenden comunmente en la gramática.

La notacion de cualquier número ordinal se reduce á escribir el cardinal correspondiente con una ° más pequeña á la derecha y arriba, p. ej°. 8.°=octavo, 19.°= décimonono (diez y nueveavo); 1000.°=milésimo (milavo).

CAPÍTULO 2.° OPERACIONES ELEMENTALES CON LOS NUMS. ENTEROS.

LECCION 3.ª

ALGORITMOS EN GENERAL.—SUMACION DE ENTEROS.

Algoritmo en general; número y nombres de los elementales; dos ramas de cada uno y fundamento numerativo de todas ellas para los números enteros (24). *Primer algoritmo—Sumacion—; idea y nombres de sus dos ramas* (25). *Adicion de cantidades y de números; su definicion, signo é indicacion; nombres de los datos y del resultado* (26). *Adicion vulgar, y proposiciones fundamentales para la adicion científica:* 1.ª *El órden de sumandos no altera la suma;* 2.ª *Descomposicion de los sumandos en otros menores;* 3.ª *Alteracion de los sumandos y sus efectos en la suma;* 4.ª *Composicion de los númeres elementales de una suma respecto á los de los sumandos* (27). *Casos de la Adicion de enteros:* 1.° *sumandos elementales, del mismo ó de distintos órdenes* (28); 2.° *Sumandos enteros cualesquiera; reglas esenciales y accidentales para sumarlos* (29). *Sustraccion, su definicion signo é indicacion, nombres de los datos y del resultado* (30). *Sustraccion vulgar y proposiciones fundamentales para la sustraccion científica:* 1.ª *Descomposicion de minuendo y sustraendo en partes ó sumandos;* 2.ª *Alteraciones sumatorias de los datos y sus efectos en la resta;* 3.ª *Composicion de cada cifra del minuendo respecto á las del mismo órden de sustraendo y resto* (31). *Casos de la sustraccion de enteros:* 1.° *Sustraendo y resto números elementales del mismo órden* (32); 2.ª *Sustraendo y resto enteros cualesquiera; reglas esenciales y accidentales para restar enteros* (33). *Prueba de una operacion aritmética; sus condiciones generales* (34). *Pruebas de la adicion y* *de la sustraccion* (35).

24. *Algoritmo es cada una de las combinaciones, esencialmente distintas, de dos ó más números para formar ó engendrar otros.* Los algoritmos elementales son *tres* nombrados *sumacion, produccion y graduacion*; cada uno comprende dos operaciones inversas una de otra y llamadas genérica y respectivamente ramas progresiva y regresiva del algoritmo, segun indica el siguiente cuadro:

ALGORITMOS.		OPERACIONES.
1° *Sumacion*	1.ª rama ó progresiva	*Adicion.*
	2.ª rama ó regresiva	*Sustraccion.*
2° *Produccion*	1.ª rama «	*Multiplicacion.*
	2.ª « «	*Division.*
3.° *Graduacion*	1.ª « «	*Elevacion.*
	2.ª « «	*Extraccion.*

Todas esas operaciones aritméticas se fundan primeramente en el sistema de numeracion, es decir, en la composicion de cada número entero respecto á los números elementales.

La *numeracion* es tambien un algoritmo, pero no elemental, como veremos oportunamente.

ART.° 1.°—1.er ALGORITMO.=SUMACION.

25 La *combinacion* mas sencilla y elemental que puede hacerse con números, es la que se deduce de las primeras ideas matemáticas, á saber, la de *aumento ó diminucion, agregacion* ó *disgregacion* de unos números con otros; combinacion que, por su misma sencillez, es la única concebible y realizable directamente con cantidades mensurables, aun cuando no esten ni se supongan evaluadas numéricamente.

En efecto, de la definicion de cantidad mensurable ó matemática se deduce, que cantidades concretas homogéneas, ó del mismo nombre, puedense agregar ó *sumar,* formando así otra cantidad homogenea con ellas y mayor que cada una, é inversamente puedese restar ó quitar de una cantidad otra menor, quedando un resto ó resíduo, del mismo género y menor que aquella cantidad mayor.

Pues bien, esas dos operaciones—añadir, agregar ó *sumar* y quitar, disgregar ó *restar,*—se puede, con mas razon, realizarlas con números, constituyendo las dos ramas del primer algoritmo elemental llamadas respectivamente *Adicion* y *Sustraccion.*

§ 1.° Adicion.

26. *Adicion es la operacion de sumar, es decir, de hallar la cantidad ó el número equivalente á dos ó más cantidades ó números agregados;* éstos se llaman *sumandos,* y el resultado que se busca, *suma,* ó total. La adicion es un problema (7) cuyos datos son los *sumandos* y la incógnita la *suma.* El signo de la *adicion* es el $+$ que se lee más y se coloca entre cada dos sumandos seguidos, en el órden de lectura, p. ej.°: $a + b + c$ se lee a más b más c y significa que las cantidades representadas por a, b, c (11) han de ser sumadas.

27. Siendo, como decia Pascal y ya hemos indicado, la idea de *sumar* una de las más primitivas y elementales en la razon humana, claro es que todo el mundo suma á su modo—p. ej° con los dedos, ó representando las unidades de cada sumando por objetos materiales,—más la adicion aritmética ó científica ha de estar fundada priméro, en el sistema de numeracion (24), y además en las siguientes proposiciones que se deducen facilmente de la definicion de suma.

1.ª *El órden de sumandos no altera la suma.* Quiere decir esto que, significando evidentemente la adicion indicada de varios números, que al primero se agregue el segundo, á la suma de estos dos, el tercero, si le hay, á la de esos tres, el cuarto y así sucesivamente, *la suma es la misma, cualquiera que sea el órden en que se supongan colocados los sumandos*, siempre que éstos sean los mismos.

Esta proposicion es corolario (VII) inmediato de la definicion de suma.

2.ª *Para sumar varios números, se puede descomponerlos en otros menores, sumar todos estos, en el órden más conveniente, y se hallará la suma buscada.* Creémos inmediata la evidencia de esta proposicion, que por su caracter práctico es un verdadero postulado.

3.ª *Si uno ó más sumandos varian de valor, todos en un sentido, es decir creciendo ó disminuyendo, es claro que la suma variará en el mismo sentido y en tanto cuanto valga la suma de las variaciones de los sumandos.* Si unos sumandos crecen y otros disminuyen la suma crecerá, si es mayor el total de los aumentos que el de los decrementos, y disminuirá en caso contrario; siendo facil hallar el *cuánto* de la variacion, en cada caso, sabiendo ya sumar y restar.

4.ª *Cada número elemental de una suma debe componerse de la suma de los números elementales, del mismo órden que aquel, de todos los sumandos, más las unidades de ese mismo órden, que contenga la suma de todos los números elementales de órdenes inferiores.* Esto es evidente, suponiendo descompuestos los sumandos en sus números elementales (props.ⁿ 2.ª) y sumados éstos entre sí.

28. Los casos que conviene distinguir, para el estudio sintético (IX) de la Adicion de enteros son dos, como se infiere de las proposiciones 2.ª y 4.ª, á saber: 1.er *caso=Sumandos elementales ó sea de una sola cifra significativa*; 2.° *caso,=Sumandos no elementales ó de varias cifras significativas.* El primer caso se puede considerar subdividido en 2, segun que los sumandos sean *todos* de distintos órdenes, ó del mismo órden, pues si son de ambas clases están en el caso 2.° ó general.

1.er caso. 1.° *Para sumar enteros elementales de dis-*

tintos órdenes, hasta sustituir los ceros del mayor por las cifras significativas de los demás, colocadas en los lugares correspondientes á sus valores relativos.

Ejemplos. $500000+40000+800+70+3=540873.$
$4000000+30000+200+8=4030208.$

La verdad de esa regla es consecuencia del sistema de numeracion, debiendo notarse que es aplicable á cualquier sistema regular, como procuraremos que lo sean todas las susceptibles de ello.

2.º *Para sumar números elementales del mismo órden se suman las cifras significativas y se dá á la suma el valor relativo de aquellas. Dicha suma se halla ó de memoria, ó por una tabla, ó añadiendo unidad por unidad la* 2.ª *cifra á la* 1.ª, *la* 3.ª *á la suma de las dos primeras, y así sucesivamente hasta añadir la cifra del último sumando.*

Esta regla es evidentemente corolario inmediato del sistema de numeracion y de la idea de suma.

Ejemplos. $\left\{\begin{array}{r} 5+7+4=16, \\ 50+70+40=160, \\ 500+700+400=1600, \\ 5000+7000+4000=16000, \end{array}\right.$

22. 2.º caso. *Para sumar enteros cualesquiera se suman sucesiva y separadamente las cifras de cada órden de todos los sumandos* (1.er caso, 2.º) *y si esas sumas parciales son tambien números elementales, se hallará la total por la regla del* 1.er *caso,* 1.º; *pero si no lo son, se escribirá sólo la cifra de órden inferior de cada suma parcial, en el lugar correspondiente, agregando á las cifras del órden inmediato superior, el número de la izquerda de dicha cifra ya escrita, en la suma parcial á que aquella corresponda.*

Estas son las reglas *esenciales* para sumar enteros, mas á fin de facilitar la operacion se suelen usar tambien las siguientes *accesorias ó accidentales.*

1.ª *Se coloca á los sumandos unos debajo de otros,* *correspondiéndose las cifras de cada órden*, lo cual facilita las sumas parciales, por la alineacion de sus sumandos.

2.ª *Se separa á la suma de los sumandos con una raya y se van colocando las cifras de la suma, conforme van hallándose, debajo de las del mismo órden respectivo de los sumandos.*

3.ª *Se principia á sumar por las cifras de* 1.er *órden, siguiendo por los órdenes sucesivos ascendentes*, para poder incorporar, sin correccion alguna, á las cifras de cada órden el número de ese órden que puede refluir de la suma parcial anterior.

Ejemplo. (*) Sumar los números 54301, 25230, 10426, 428 y 30.

Comenzando segun la regla accidental 3.ª, se dice: 1 y 6, 7 y 8, 15 (se escribe el 5 de éste debajo de las cifras de 1.er órden y se guarda el 1 para agregarle en seguida á las cifras de 2.° órden, diciendo) llevo 1, y 3, 4, y 2, 6, y 2, 8, y 3, 11; (escrito el 1—de la dha—se sigue) llevo 1, y 3, 4, y 2, 6, y 4, 10, y 4, 14; 4 y llevo 1, y 4, 5, y 5, 10; 0 y va 1, y 5, 6, y 2, 8, y 1, 9—última cifra de la suma—.

Disposicion de los sumandos y de la suma segun las reglas accidentales 1.ª y 2.ª

54301	SUMANDOS.
25230	
10426	
428	
30	
90415	Suma

Aunque esa es la fraseología más comun al efectuar una adicion y por tanto no la hemos querido suprimir para que sirva de recuerdo ó repaso á los principiantes, debe procurarse omitir muchas palabras que á nada conducen y afean y alargan la operacion cuando se hace en alta voz. Así, ese mismo ejemplo se puede resolver diciendo solamente: 1, y 6, 7, y 8, 15; 1, y 3, 4, y 2, 6, y 2, 8, y 3, 11; 1, y 3, 4, y 2, 6, y 4, 10, y 4, 14; 1 y 4, 5 y 5, 10; 1 y 5, 6 y 2, 8 y 1, 9. Es claro

(*) Mientras no se advierta lo contrario, los guarismos que figuren en todo el curso de la obra se deben suponer escritos en el sistema décuplo ó usual.

que la cifra de órden inferior de cada suma parcial se escribe en su lugar respectivo, aunque no se miente en alta voz.

§ 2.° Sustraccion.

30. *Sustraccion es la operacion de restar, es decir, de hallar uno de dos sumandos, dados el otro y la suma.* Esta toma el nombre de *minuendo,* el sumando dado el de *sustraendo* y el resultado se nombra *resta, resto, residuo* de la sustraccion, *exceso* del minuendo sobre el sustraendo ó *diferencia* entre los dos números dados. El signo de la sustraccion es el—que se lee menos y se coloca entre minuendo y sustraendo en el órden de lectura, es decir, priméro el minuendo, despues el signo— y en seguida el sustraendo: p.ej.° $a-b$ se lee a menos b, y significa que la cantidad representada por b (sustraendo) ha de ser restada, quitada ó sustraida de la representada por a (minuendo).

31. Tambien se suele restar enteros vulgarmente —como sumarlos—representando con los dedos, ú otros objetos materiales, el número de unidades del sustraendo, y quitándolas una á una del minuendo; mas la sustraccion científica se funda en la numeracion, en la adicion y en las siguientes proposiciones.

1.ª *Para restar dos enteros se puede descomponerlos en el mismo número de partes cada uno, restar cada parte del sustraendo de otra del minuendo y la suma de esas restas parciales será la buscada.* Esta proposicion análoga á la 2.ª de la Adicion tiene, como aquella, los caractéres práctico y de evidencia de un verdadero postulado.

2.ª *Si el minuendo solo aumenta ó disminuye en una cantidad cualquiera, la resta aumentará ó disminuirá respectivamente en la misma cantidad; si el sustraendo solo crece ó decrece, la resta decrecerá ó crecerá respectivamente lo mismo. Por consiguiente si minuendo y sustraendo crecen ó decrecen ambos igualmente, la resta* *no variará.* Aunque no de evidencia inmediata, creémos suficientemente clara esta proposicion, para poder omitir su demostracion, proponiéndola como ejercicio.

3.ª *Cada cifra del minuendo mayor que la del mismo órden del sustraendo, es la suma de ésta y de la correspondiente del resto, y cada cifra del minuendo menor que la del mismo órden del sustraendo es la suma de ésta y de la correspondiente del resto, menos una unidad del órden inmediato superior que está incorporada á la cifra de este mismo órden del minuendo.* Esta proposicion es consecuencia de la composicion de una suma (27,4.ª) siendo, como es, el minuendo la suma de sustraendo y resto.

32. Los casos de la sustraccion correlativos, como es natural, á los de la adicion, son dos: 1.º *Sustraendo y resto de una cifra significativa del mismo órden;* 2.º *Sustraendo y resto enteros cualesquiera.*

1.er *caso. El minuendo, en este caso, ha de tener una ó dos cifras significativas, formando un número del mismo órden que la cifra significativa del sustraendo, y la sustraccion se hace restando esta cifra de aquel número, de memoria, ó por una tabla, ó unidad por unidad, y dando á la resta el valor relativo de la cifra del sustraendo.*

Basta el enunciado de esta regla para comprender su verdad.

$$\text{Ejemplos}\left\{\begin{array}{r} 16-7=9, \\ 160-70=90, \\ 1600-700=900, \\ \text{etc,} \end{array}\right.$$

33. 2.º *caso.* Puesto que (31,3.ª) cada cifra del minuendo es la suma de las del mismo órden de sustraendo y resto, ó bien es la cifra de ese órden de dicha suma—cuya unidad del órden inmediato superior se ha incorporado á la cifra correspondiente del minuendo—, podremos dar, ya como evidentes, las siguientes reglas esenciales para restar enteros cualesquiera:

Se resta cada cifra del sustraendo de la correspon-

diente ó del mismo órden del minuendo, si ésta es mayor ó igual que aquella, y si es menor, se resta aquella del número que resulta suponiendo á la izquierda de la del minuendo el 1 *incorporado á la cifra del órden inmediato superior* (31,3.ª), *á la cual hay que suponer con esa unidad ménos, cuando de ella se haya de restar la correlativa del sustraendo, ó bien á ésta con una unidad más* (31,2.ª); cada una de esas restas parciales será evidentemente una cifra (1.er caso) y la suma de estas cifras consideradas con sus valores relativos, es decir, de los órdenes respectivamente iguales á los de las cifras del sustraendo que las originan, será la resta buscada (31,1.ª). Para facilitar la operacion se suelen seguir además las siguientes reglas accidentales: 1.ª *Se colocan minuendo y sustraendo uno debajo de otro,* (si hay sitio, debajo el sustraendo) *de modo que se correspondan las cifras del mismo órden, y se traza una raya para separar la resta de los datos;* 2.ª *se empiezan las restas parciales por las cifras de órden inferior, siguiendo así de derecha á izquierda,* á fin de tener en cuenta, sin enmiendas, las cifras del minuendo que han de considerarse con 1 ménos, ó bien las correspondientes del sustraendo que han de considerarse con 1 más.

EJEMPLOS.

1.° 98476—36364=62112.

Disposicion usual de datos y resto. $\left\{\begin{array}{l}\text{98476 Minuendo.}\\ \text{36364 Sustraendo.}\\ \hline \text{62112 Resto.}\end{array}\right.$

Locuciones usadas al hacer la operacion, especialmente en voz alta.=De 4 á 6, 2; de 6 á 7, 1; de tres á 4, 1; de 6 á 8, 2; de 3 á 9, 6. En este ejemplo todas las cifras del minuendo son mayores que las correlativas del sustraendo, el siguiente es mas general.

2.° 150428—106739=43689.

DISPOSICION.

$$\begin{array}{r} 150428 \\ 106739 \\ \hline 043689 \end{array}$$

Locuciones usuales.

1.er modo.	2.° modo.
De 9 á 18, 9; de 3 á 11, 8: de 7 á 13, 6; de 6 á 9, 3: de 0 á 4, 4; de 1 á 1, 0.	De 9 á 18, 9; 1 y 3, 4, á 12, 8; 1 y 7, 8, á 14, 6; 1 y 6, 7, á 10, 3; 1 y 0, 1 á 5, 4; de 1 á 1, 0.

§ 3.° PRUEBAS DE LA ADICION Y DE LA SUSTRACCION.

34. *Prueba de una operacion aritmética es otra, ó la misma de otro modo, que patentize la exactitud del resultado de la* 1.ª Las condiciones generales de toda prueba son: que se funde en las relaciones esenciales entre los datos y el resultado de la operacion respectiva comprobanda, y á ser posible, que sea mas sencilla que aquella, no dando origen á nuevas cifras.

Es facil que la inexactitud acusada por el resultado de una prueba provenga de error en ella y no en la operacion primitiva, por lo cual se repetirán ambas, en ese caso, ó se acudirá á otra prueba, á modo de *tercero* para decidir una cuestion entre dos. Tampoco arguye absoluta exactitud del resultado primitivo, su conformidad con el de la prueba, pues pudieran ambos ser inexactos y compensarse los errores, apareciendo así dicha conformidad. Esto último es sin embargo muy improbable, si la prueba es buena, pues la *casualidad*, único motivo para la compensacion de errores, está casi por completo desterrada de la ciencia matemática y aún de toda verdadera ciencia.

35. *La más sencilla prueba de la adicion se hace, repitiendo las sumas parciales* (29) *en órden inverso, es decir, de abajo para arriba, si como es natural, se hicieron primitivamente de arriba abajo;*—suponiendo los sumandos unos debajo de otros—. Inútil es decir que la exactitud del primer resultado será acusada por su identidad con el segundo.

La prueba más sencilla y natural de la sustraccion se hará, evidentemente, *sumando el sustraendo y el resto y viendo si la suma es ó no igual al minuendo*—como debe serlo segun la definicion de esa 2.ª rama del 1.er algoritmo elemental—. Otra prueba será restar el resto primitivo del minuendo y ha de resultar por nuevo resto el sustraendo primitivo, en virtud de la posible permutacion de sumandos en toda suma (27, 1.ª)—.

36. A fin de hacer fijar la atencion más de lo acostumbrado en los casos usuales de las operaciones aritméticas, en cuyos fundamentos racionales es dificil pararse, por lo mismo que se saben hacer aquellas veloz y rutinariamente, vamos á terminar el estudio de la sumacion con el siguiente doble ejemplo, de elementos escritos en el sistema numerativo de base doce ó duodecimal, cuyas cifras undécima (onceava) y duodécima (doceava) representaremos por D=diez y U=once:

$$18DU7946+D108423=27004169;$$

$$27004169-D108423=18DU7946.$$

Para la adicion diremós: 6 y 3, 9; 4 y 2, 6; 9 y 4, *trece;* 1 y va 1 (docena), y 7, 8 y 8, diez y seis: 4 y va 1 y U (once), doce y 0 doce; 0 y va 1, y D (diez), once, y 1, doce; 0 y va 1, y 8, 9 y D, diez y nueve; 7 y va 1 y 1, 2.

Para la sustraccion: de 3 á 9, 6; de 2 á 6, 4; de 4 á 11 (trece), 9, y va 1, y 8, 9, á 14 (diez y seis), 7; y va 1, y 0, 1, á 10 (doce), U; y va 1, y 1, 2 á 10, D; y va 1, y D, U, á 17 (diez y nueve), 8, y va 1, á 2, 1.

Escolio 1.° Para facilitar la resolucion anterior, colóquense los datos uno debajo de otro y atiéndase á la siguiente

Tabla de sumar en el sistema duodecimal.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D	U
1	2	3	4	5	6	7	8	9	D	U	10
2	3	4	5	6	7	8	9	D	U	10	11
3	4	5	6	7	8	9	D	U	10	11	12
4	5	6	7	8	9	D	U	10	11	12	13
5	6	7	8	9	D	U	10	11	12	13	14
6	7	8	9	D	U	10	11	12	13	14	15
7	8	9	D	U	10	11	12	13	14	15	16
8	9	D	U	10	11	12	13	14	15	16	17
9	D	U	10	11	12	13	14	15	16	17	18
D	U	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
U	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1D

Para encontrar en esta tabla la suma de dos números, de una cifra cada uno, se busca uno de los sumandos en la 1.ª línea de arriba y el otro en la 1.ª columna de la izquierda, y la suma estará en la casilla donde se crucen la columna y línea respectivas que empiezan por cada sumando, p. ej.º; 8 y 9=15 (diez y siete), D (diez) y 7= 15, 9 y U (once)=18 (veinte).

Escolio 2.º Téngase en cuenta que sólo hemos variado de sistema escrito, por la dificultad de variar tambien de sistema verbal, pero que con la tabla es innecesaria nomenclatura alguna, pues se hallan la suma y resta muda y maquinalmente.

ART.° 2.°—2.° ALGORITMO.=PRODUCCION.

Leccion 4.ª

MULTIPLICACION DE ENTEROS.

2.° *algoritmo—Produccion—nombres de sus dos ramas, é idea de ellas para dos ó más números enteros ó cualesquiera* (37). *Definicion general, signos, é indicacion de la multiplicacion de dos y de más números; nombres individual y colectivo de los datos; nombre del resultado* (38). *Corolarios de la definicion general de multiplicar: valor del producto relativamente al multiplicando...*1.° *segun sea el multiplicador respecto á la unidad,* 2.° *si el multiplicador es entero; definicion especial de la multiplicacion en este caso* (39). *Modo primitivo ó vulgar de multiplicar dos enteros, sus inconvenientes, y proposiciones fundamentales para la multiplicacion científica:* 1.ª *Producto de una suma por un entero* (40); 2.ª *Invariabilidad del producto de dos ó más enteros aunque varíe su órden de colocacion* (41); 3.ª *Productos de sumas, y de productos indicados* (42); 4.ª *Alteraciones de los factores (uno ó más) por sumacion ó produccion, y sus efectos en el producto* (43). *Casos de la multiplicacion de dos enenteros:* 1.° *Factores elementales ó de una sola cifra significativa cada uno; órden numerativo del producto de esas dos cifras* (44); 2.° *Multiplicacion de un entero cualquiera por otro elemental, órden del producto* (45); 3.° *Multiplicacion de dos enteros no elementales; dos modos de hacerla* (46). *Números máximo y mínimo de cifras del producto de dos ó más enteros* (47). *Abreviaciones principales de la multiplicacion de enteros* (48).

37. Segun ya se ha indicado (24), el 2.° algoritmo elemental es llamado *produccion* y *multiplicacion* y *division* sus dos ramas respectivas, para definir las cuales con toda generalidad, antepondremos las siguientes con

sideraciones.

El caso particular de la adicion en que todos los sumandos sean iguales, origina una forma nueva de generacion de enteros, puesto que, en vez de suponer al *n.° suma* engendrado por la *adicion* de todos los *sumandos*, puede suponérsele engendrado por la combinacion, bajo una nueva forma, del *sumando* comun con el *número* de sumandos.

Y como, analizada la composicion del resultado, así concebido, respecto á sus dos datos, se halla: que aquel se compone de tántas partes iguales al sumando comun, cuántas veces está éste repetido, se generaliza ese juicio analítico, á números cualesquiera, y se adquieren las ideas generales de *multiplicacion* y de *producto de dos números* abstractos y aún de un concreto por un abstracto, estendiéndolas á *tres ó más* números, por analogía con las de *adicion* y de *suma* de tres ó más sumandos (27, 1.ª), y concibiendo tambien la rama regresiva—division—del 2.° algoritmo (24), como el problema inverso (VII) de la *multiplicacion* de dos números, cual lo es la *sustraccion* de la *adicion*. Podrémos pues definir clara y generalmente......

38. *Multiplicar dos números abstractos es hallar un tercer número que sea—en valor ó magnitud—respecto á uno de aquellos, lo que el otro es respecto á la unidad; éste se llama multiplicador, aquel multiplicando y el resultado*—hallado ó por hallar—*producto*. Siempre se debe espresar priméro el *multiplicando*—verbal ó gráficamente—aunque, segun demostraremos, pueden permutar sus oficios, y por tanto sus lugares respectivos de colocacion, multiplicando y multiplicador.

Multiplicar tres ó más números es multiplicar los dos primeros espresos por el 3.°, *este producto por el* 4.°, *si lo hay, y así sucesivamente hasta el último.*

En todo caso: *Multiplicacion es la operacion, y producto el resultado de multiplicar dos ó más números, los cuales se llaman colectivamente factores del producto ó de la multiplicacion.*

Los signos usados para indicar la multiplicacion son el aspa $\times$, ó un punto $\cdot$ colocado, uno ú otro, entre cada dos factores, en el órden de lectura, y nombrados ambos: *multiplicado por*, ó símplemente *por*, ó *multiplicado*.

Ej.° $\left\{\begin{matrix} 5\times10\times15 \\ 5\cdot10\cdot15 \end{matrix}\right\}$ se lee.... 5 multiplicado por 10, multiplicado por 15; *ó* 5 por 10, por 15; *ó* 5 multiplicado 10, multiplicado 15.

Esc.° Cuando los factores de un producto son indeterminados ó literales (VI), se suele escribirlos juntos, como si constituyesen una palabra, sin signo alguno intermedio, p. ej.°: $abcd=a\times b\times c\times d$.

Es decir, que las letras juntas, cuando son signos de valores numéricos indeterminados, representan muy distinta idea que cuando son signos de las articulaciónes de la voz humana, y distinta tambien de la que espresan juntas las cifras ó signos de los primeros enteros.

39. De las definiciones generales que anteceden se deducen los siguientes *corolarios*:

1.° El producto de dos números será mayor, igual ó menor que el multiplicando, segun que el multiplicador sea respectivamente mayor, igual ó menor que la unidad.

2.° El producto de un número cualquiera por un entero contiene al multiplicando tántas veces cuántas unidades tiene el multiplicador; por lo que se puede definir en particular: *multiplicar un número cualquiera por un entero es hallar un tercer número, que sea tantas veces mayor que el multiplicando como unidades tiene el multiplicador*. Esta es la idea primitiva de multiplicar (37) y sugiere el medio mas sencillo ó vulgar de hallar el producto de dos enteros, á saber:

40. *Para hallar el producto de dos enteros se puede efectuar la adicion de tantos sumandos, igual cada uno al multiplicando, como unidades tenga el multiplicador*. Mas esa adicion, sobre ser impracticable, por lo

prolija, á poco grande que sea el multiplicador, no constituye una nueva operacion ó generacion numérica, y por tanto precisa deducir de los principios ya establecidos, otras proposiciones que, con aquellos, sirvan de fundamento á la genuina y científica multiplicacion de enteros.

*Prop.*ⁿ 1.ª Teorema. *El producto de una suma por un entero es igual á la suma de productos de cada sumando por el entero.* Pues no siendo los sumandos sino *partes* de un *todo*, es claro que hacer á cada *parte* cierto número de veces mayor y sumar los resultados, es hacer al *todo* ese mismo número de veces mayor.

Esc.° Para indicar que un resultado de operaciones no efectuadas, se ha de someter á operaciones ulteriores, se ponen entre paréntesis los datos y signos que indican aquellas, y se considera al paréntesis con todo lo que encierra, como dato para las operaciones ulteriores. Así, el teorema anterior puede espresarse gráficamente, con datos indeterminados (11), como sigue

$$(a+b+c)\,m=am+bm+cm. \ (^*)$$

41. *Prop.* 2.ª. Teorema. *El órden de factores no influye en el producto.* Es decir, que *un producto no varía de valor, aunque varíe el órden de colocacion de sus factores*, y por tanto, el órden de las multiplicaciones sucesivas necesarias para hacer dicho producto. Para demostrar este teorema consideraremos primero un producto de *dos* factores y luego de *más*.

1.° Sea el producto 5×7.

Como $5=1+1+1+1+1$, multiplicar 5 por 7 es multiplicar esa suma,

luego $5\cdot7=1\cdot7+1\cdot7+1\cdot7+1\cdot7+1\cdot7$

ó $5\cdot7=7+7+7+7+7$

ó $5\cdot7=7\cdot5$ (39).

Como evidentemente los valores de los datos no influyen en la demostracion del márgen, esta es general, para dos enteros cualesquiera.

(*) Toda espresion como la anotada arriba, que indique operaciones y relaciones algorítmicas, con cantidades indeterminadas de valor y representadas por letras, se llama *fórmula ó espresion literal*. Ya se sabe (38) que las letras unidas están multiplicadas y tambien la cantidad encerrada por un paréntesis, está multiplicada por lo que esté unido á él sin signo intermedio.

2.° Sea p.ej.° el producto $9\cdot4\cdot3\cdot2\cdot8\cdot15$;

Es claro que demostrada su invariabilidad, si dos factores seguidos permutan sus lugares, quedará demostrada en general, pues permutando cada factor una ó más veces con sus inmediatos, se le podrá colocar en cualquier sitio. Supongamos, pues, la permutacion del 3 y del 2 y demostrémos que

$$9\cdot4\cdot3\cdot2\cdot8\cdot15=9\cdot4\cdot2\cdot3\cdot8\cdot15.$$

En efecto, espresando lo que vale—segun la definicion de la multiplicacion de enteros—el producto de los factores propuestos hasta el 1.° inclusive de los dos que cambian, tendremos:

$$9\cdot4\cdot3=9\cdot4+9\cdot4+9\cdot4$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad (11) por el factor siguiente 2, será...

$$\begin{aligned} 9\cdot4\cdot3\cdot2 &= 9\cdot4\cdot2+9\cdot4\cdot2+9\cdot4\cdot2 \\ 9\cdot4\cdot3\cdot2 &= 9\cdot4\cdot2\cdot3 \quad (39). \end{aligned}$$

Multiplicando por 8 los dos miembros últimos, y los que resulten, por 15...

$$\begin{aligned} 9\cdot4\cdot3\cdot2\cdot8 &= 9\cdot4\cdot2\cdot3\cdot8 \\ 9\cdot4\cdot3\cdot8\cdot15 &= 9\cdot4\cdot2\cdot3\cdot8\cdot15; \end{aligned}$$

l. q. s. q. d. (lo que se quería demostrar).

42. *Prop.* 3.ª Teor.^as 1.° *El producto de dos sumas indicadas es igual á la suma de los productos de cada sumando del un factor por cada sumando del otro.* 2.° *El producto de dos ó más productos indicados es igual al producto de todos los factores de aquellos.*

1.° Sea$(a+b+c)\cdot(d+e)$. (*) Segun la proposicion 1.ª inmediata anterior, será

$$(a+b+c)(d+e)=a\,(d+e)+b\,(d+e)+c\,(d+e). \quad (A)$$

y segun la proposicion 2.ª y otra vez la 1.ª

$$\left\{\begin{aligned} a(d+e)&=(d+e)a \\ \text{«}\quad &=da+ea \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} b(d+e)&=(d+e)b \\ \text{«}\quad &=db+eb \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} c(d+e)&=(d+e)c \\ \text{«}\quad &=dc+ec \end{aligned}\right\}$$

luego, sustituyendo estos últimos resultados en el 2.° miem-

(*) Ya sabemos que la carencia de signo entre espresiones literales juntas, significa que están multiplicadas. Además, las letras que representen números, los significarán *enteros* en todo este primer libro.

bro de la igualdad (A), será ya evidente la siguiente fórmula, traduccion literal del Teor.ª 1.º

$$(a+b+c)(d+e)=ad+ae+bd+be+cd+ce.$$

2.º Sea (abcd)(egf). Desde luego, segun la definicion de multiplicar tres ó más números y el Esc.º (40), será (abcd)(egh)=abcd(egh). Ahora, segun la prop. 2.ª (41), abcd(egh)=(egh)abcd, y segun, otra vez, la def. gral. citada, (egh)abcd=eghabcd. *l. q. s. q. d.*

Para 3 ó más factores—productos no hay sino atender á la def. gral. (38).

Cor.s Como casos particulares: 1.º *para multiplicar por un entero el producto indicado de otros enteros, basta multiplicar uno cualquiera de los factores de este producto por aquel entero.*—Se sobreentiende que este nuevo y parcial producto se ha de multiplicar por los demás factores del producto indicado.

Es decir, que (abcde)m=ab(cm)de=(am)bcde=abcd(em) etc. pues cualquiera de esos productos indicados y de otros análogos equivale al producto único abcdem (41, 42 T.ª 2.º).

2.º *Para multiplicar un entero por el producto indicado de otros enteros es preciso multiplicar aquel por un factor de dicho producto, el resultado por otro factor y así sucesivamente por todos.*

Es decir que N(abcd)=Nabcd,—Esc.º (40) y Definicion general (38)—.

En efecto N(abcd)=(abcd)N (41),
y (abcd)N=abcdN=Nabcd —Esc.º (40) y (41).—

43. Prop. 4.ª Teor.as 1.º *Si uno solo de dos factores crece, el producto crece tambien, tanto cuanto valga el producto del aumento del factor variado por el otro factor.*

2.º *Si ambos factores crecen simultáneamente, el producto crecerá, lo que valga la suma de productos de cada factor por el aumento del otro y de los dos aumentos entre sí.*

3.º *Si uno ó más factores se multiplican por otros enteros, el producto de aquellos quedará multiplicado por el de los nuevos factores.*

Estos tres teoremas y más que pudieran enunciarse análogos, son corolarios de las tres proposiciones anteriores, y por tanto limitamos sus *demostraciones* á las fórmulas que *las expresan*, representando por letras mayusculas los factores y el producto primitivos y por minusculas los incrementos respectivos.

1.° $AB=P$, $\begin{cases}(A+m)B=AB+mB=P+mB; \ (40). \\ A(B+n)=AB+An=P+An. \ (41) \text{ y } (40).\end{cases}$

2.° $AB=P$, $(A+m)(B+n)=AB+An+mB+mn=P+An+mB+mn$.... (42. 1.°)

3.° $ABCD=N$, $A(Bm)C(Dn)=ABmCDn=ABCDmn=N(mn)$.... (42. 2.°)

Por razon natural, si se hicieren con los factores operaciones inversas á las que acabamos de indicar, los efectos en el producto serian análoga y respectivamente inversos, p. ej.°(inverso al 1.°): $(A-m)B=AB-mB=P-mB$.

Esc.° La fórmula anterior, espresada en forma de teorema, origina el siguiente, análogo al de la prop. 1.ª (40).

El producto de una diferencia indicada, por un entero, es igual al producto del minuendo, menos el producto del sustraendo, por dicho entero.

44. Siendo cada entero no elemental la suma de los números elementales, espresados por los valores relativos de sus cifras, el producto de dos enteros constará, en general, de la suma de productos binarios sucesivos de todos los números elementales de cada factor, por todos los del otro; y por tanto, la resolucion sintética del problema de la multiplicacion de dos enteros podria hacerse en dos casos: 1.° *Factores elementales* y 2.° *Factores cualesquiera*. Pero el metodo más sencillo y usado para resolver el caso 2.° exige la consideracion de otro intermedio, en que *uno de los factores sea elemental y el otro no*, pasando así el 2.° caso á ser 3.°

1.er caso. *Para multiplicar dos números elementales ó de una sola cifra significativa cada uno, se multiplican dichas cifras de memoria, ó por una tabla, ó por adicion, y al producto se le ponen tantos ceros cuantos tengan los dos factores dados.*

*Esc.*ª La tabla á que se refiere la *regla anterior* puede escribirse en varias formas; la mas sencilla es la siguiente—para el sistema décuplo—, llamada comunmente tabla pitagórica, y cuya construccion, no sabiendo multiplicar, se reduce á sumar cada número de la 1.ª línea consigo mismo y escribir las sumas respectivamente debajo, sumar cada número de esa 2.ª línea con el de encima y escribir la suma debajo, y así sucesivamente, sumando siempre cada número con el 1.º superior de su columna y escribiendo la suma debajo. De esta construccion resulta ya evidente la siguiente regla.

Para hallar en la tabla pitagórica el producto de dos cifras se busca uno de los factores en la 1.ª *línea superior y el otro en la* 1.ª *columna de la izquierda y el producto está en la casilla de encuentro de la columna que empieza en el* 1.º *con la línea que empieza en el* 2.º

Ej.os: 5· 8=40, 9 · 6=54, 7·8=56, etc.

TABLA PITAGÓRICA PARA MULTIPLICAR ENTEROS DE UNA CIFRA EN EL SISTEMA DE NUMERACION DÉCUPLO O DECIMAL.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Lema. Debemos además establecer que, segun las leyes de todo sistema regular de numeracion escrita, añadir á un entero cualquiera ceros á su derecha es multiplicarle por la unidad numerativa correspondiente —ó cuya espresion en guarismo tenga tantos ceros cuantos se han añadido á dicho entero.—

Esto supuesto, sea el producto 4000×300.

Como $4000 = 4 \cdot 1000$ y $300 = 3 \cdot 100$ (*lema anterior*), será $4000 \times 300 = 4 \cdot 1000 \cdot 3 \cdot 100 = 4 \cdot 3 \cdot 1000 \cdot 100$, (41), y pues $4 \cdot 3 = 12$, $4 \cdot 3 \cdot 1000 \cdot 100 = 12000 \cdot 100 = 1200000$.

Lo que demuestra la regla ántes enunciada para el 1.er caso de la multiplicacion de enteros.

45. 2.° caso. *Para multiplicar dos enteros, uno elemental y el otro no, se multiplican sucesiva y separadamente todas las cifras de éste por la de aquel (*1.er caso*) y se suman todos los productos, teniendo muy en cuenta sus valores relativos.*

En efecto, sea p. ej.° 48315×700.

Como $48315 = 40000 + 8000 + 300 + 10 + 5$,........... será
$$48315 \cdot 700 = 40000 \cdot 700 + 8000 \cdot 700 + 300 \cdot 700 + 10 \cdot 700 + 5 \cdot 700.$$

Ahora, estos productos parciales son del caso 1.° inmediato anterior,

luego, hallándolos serán........
$$\left\{\begin{array}{r} 40000 \cdot 700 = 28000000 \\ 8000 \cdot 700 = 5600000 \\ 300 \cdot 700 = 210000 \\ 10 \cdot 700 = 7000 \\ 5 \cdot 700 = 3500 \\ \hline 48315 \cdot 700 = 33820500 \end{array}\right.$$

Para abreviar y facilitar la operacion se siguen usualmente las siguientes reglas accidentales.

1.ª Se coloca el factor elemental bajo el otro, de modo que se correspondan las cifras de igual órden, y se traza una raya por debajo, para separar los factores, del producto.

2.ª Se multiplica primero la cifra de 1.er órden del factor compuesto por la única significativa del elemental, se escriben las unidades de 1.er órden de ese producto parcial debajo de dicha cifra significativa y se reservan las de 2.° para agregarlas á las inferiores del producto parcial siguiente, que es el de la cifra de 2.° orden del factor compuesto por la del otro, y así sucesivamente *se multiplican todas las cifras del factor compuesto, siguiendo el órden ascendente de sus valores relativos, por la cifra válida del factor elemental, no escribiendo de cada producto parcial sino su cifra de órden inferior, en su lugar correspondiente, y agregando la otra* (*) *al producto parcial siguiente hasta llegar al último, que se escribe íntegro; dando en seguida á todo el producto, así obtenido, un valor relativo igual al de la cifra significativa del factor elemental.*

Aplicando estas reglas al ejemplo anterior tendremos:

Disposicion.	Se dice..............	y se pone
	5 por 7, 35,	5 (bajo el 7)
48315	y van 3; 1 por 7, 7, y 3, 10,	0 (izq.ª del 5)
700	y va 1; 3 por 7, 21, y 1, 22,	2 (« 0)
	y van 2; 8 por 7, 56, y 2, 58,	8 (« 2)
33820500	y van 5; 4 por 7, 28, y 5.	33,33. (« 8)

Resulta 338205 como producto de 48315·7, mas como este 7 es—en el ejemplo puesto—de 3.er órden numerativo, de ese mismo órden hemos de hacer al producto 338205 para que sea el buscado, pues 700=7·100 y por tanto,—(42) y (44, lema),—

48315·700=48315·7·100=338205·100=33820500.

46. 3.er caso. 1.er modo ó usual. *Para multiplicar dos enteros no elementales, se multiplica sucesivamente uno de ellos por todas las cifras del otro, una á una,* (2.° caso) *y la suma de esos productos parciales, considerados con sus valores relativos, será el producto buscado.*

Esta regla es evidente, en virtud de las proposicio-

(*) Ninguno de esos productos parciales puede tener más de dos cifras (V. la tabla pitagórica).

nes 1.ª, 2.ª y 3.ª, puesto que cada entero es la suma de los valores relativos de sus cifras, y éstos son respectivamente iguales á los valores absolutos multiplicados por las unidades numerativas correspondientes. Ahora, para facilitar y abreviar ese 1.er modo de multiplicar dos enteros se siguen las reglas siguientes:

1.ª *Se colocan los dos factores uno bajo otro correspondiéndose las cifras de igual órden* (*) *y se separan aquellos, de los productos parciales, con una raya, y con otra éstos del producto total.*

2.ª *Se colocan tambien los productos parciales unos debajo de otros de modo que se correspondan sus cifras de igual órden, para lo cual basta poner la* 1.ª *cifra*—que resulte efectivamente de multiplicar—*de cada uno, debajo de la cifra que sirve de multiplicador para obtener aquel.*

Ejemplo.

$$\begin{array}{r l}
48315 & \\
\times 729 & \\
\hline
338205 & = 48315 \cdot 7 \\
196630 & = 48315 \cdot 2 \\
434835 & = 48315 \cdot 9 \\
\hline
35221635 &
\end{array}$$

Escolios. No detallamos la obtencion de cada producto parcial, porque ya lo hemos hecho en el 2.º caso, al cual corresponde aquella, y no ponemos los ceros que indiquen el valor relativo de dichos productos, porque no hacen falta para sumar éstos, ocupando, como ocupan sus primeras cifras de la derecha los lugares correlativos, es decir debajo de las cifras correspondientes del multiplicador. Esto último basta, como ya hemos indicado, para obtener el producto con brevedad y sencillez, siendo indiferente el órden en que se hallen los diversos productos parciales, aunque es natural hallarlos siguiendo el de las cifras del multiplicador, ya de izquierda á derecha, como lo hemos hecho aquí, ya de derecha á iz-

(*) Generalmente si uno ó los dos factores tienen ceros á la derecha, se prescinde de ellos para la colocacion y multiplicacion de las demás cifras, por la razon que veremos luego.

quierda, como se hace comunmente, resultando en el 1.er caso corrido cada producto parcial un lugar hacia la derecha respecto del anterior y en el 2.° un lugar hacia la izquierda.

2.° *modo de multiplicar dos enteros.* Considerando descompuestos simultáneamente los dos factores en sus números elementales, y teniendo en cuenta la prop. 3.ª Teor.ª 1.°, podremos formular esta nueva regla general para multiplicar dos enteros.

Se multiplica sucesiva y separadamente cada cifra de un factor por cada cifra del otro, y se suman todos esos productos parciales, considerados con sus valores relativos, los cuales dependen de los órdenes ó valores relativos de las cifras respectivas.

El modo mas breve y sencillo de practicar la regla anterior es el siguiente:

Colocados los dos factores uno debajo de otro, en perfecta correspondencia de sus cifras del mismo órden, se empieza multiplicando las dos de la derecha, una de cada factor, se escribe debajo de ellas *la cifra* de órden inferior de su producto, y se reservan *las demás* para agregarlas á los productos parciales inmediatos siguientes, que se obtienen multiplicando, priméro la 2.ª cifra de arriba por la 1.ª de abajo y en seguida la 1.ª de arriba por la 2.ª de abajo; sumados estos dos productos con las cifras que restan del 1.° se escribe la cifra de órden inferior de la suma, á la izquierda de la escrita anteriormente y se reservan las demás para seguir análogamente, es decir agregarlas (el número que forman) á la suma de productos parciales de la 3.ª cifra de arriba por la 1.ª de abajo, mas la 2.ª de arriba por la 2.ª de abajo, mas la 1.ª de arriba por la 3.ª de abajo y así sucesivamente, corriéndose un lugar hacia la izquierda en un solo factor al comenzar cada série de productos parciales del mismo órden y corriéndose un lugar hacia la derecha, arriba, y otro hacia la izquierda, abajo, para obtener todos los productos de cada série, á los cuales se agrega el número reservado de la série anterior, hasta que se llegue á multiplicar las dos cifras de la izquierda de ambos factores, cuyo producto se suma con el correspondiente n.° reservado de la serie anterior, escribiendo íntegra esa suma con lo cual se termina la multiplicacion y se tiene escrito el producto en perfecta correspondencia de cifras del mismo órden, con los dos factores.

Apliquemos esas reglas á la resolucion del mismo ejemplo resuelto ántes, del otro modo.

$$\begin{array}{r} 48315 \\ \times 729 \\ \hline 35221635 \end{array}$$

Diremos: 5 por 9, 45 (unidades de 1.er órden), 5, (que se ponen en el 1.er lugar de la derecha) y van 4; y 1 por 9...9, son 13, y 2 por 5...10, son 23, 3, (que se pone á la izquierda del 5) y van 2; y 3 por 9...27, son 29, y 1 por 2...2, son 31, y 5 por 7...35, son 66, 6 y van 6; y 8 por 9...72, son 78, y 3 por 2, 6, son 84, y 1 por 7...7, son 91, 1, y van 9; y 4 por 9...36, son 45, y 8 por 2...16, son 61, y 3 por 7...21, son 82, 2, y van 8; y 4 por 2...8, son 16, y 8 por 7...56, son 72, 2, y van 7; y 4 por 7...28, son 35 (que se escribe íntegro en su lugar correspondiente).

Esc.° Fácil es comprender que para que este 2.° modo de multiplicar dos enteros tenga ventajas sobre el otro, ó sea un método abreviado, como lo llaman algunos autores, es preciso saber sumar mentalmente enteros de á dos cifras y á veces de tres.

47. Teorema. *El producto de dos enteros tiene tantas cifras como los dos factores, ó una ménos.*

Supongamos, para fijar las ideas, que un factor tenga 6 cifras y el otro 4: el producto de tales factores será el mínimo, y por tanto tendrá el menor número posible de cifras, cuando aquellos sean las unidades numerativas correspondientes—100000 y 1000—es decir sean los menores números de á 6 y de á 4 cifras respectivamente, y el producto será el mayor posible cuando todas las cifras de los dos factores sean nueves.

En el 1.er caso, el producto se obtiene agregando á la derecha de un factor cuantos ceros tenga el otro, luego tiene *una cifra ménos que los dos factores*. En el 2.° caso el producto será menor que el de un factor por la unidad numerativa que sigue al otro, esta tendría, en el caso que consideramos, 4 ceros, p. ej.°., y el producto correspondiente 10 cifras, es decir tantas, *cuantas tienen los dos factores primitivos*.

Corol.° *El producto de tres ó más enteros tiene, á lo más, tantas cifras como todos los factores, y por lo ménos, tantas como valga la diferencia entre el número de cifras de los factores y el número de éstos ménos uno.*

Porque al hallar los productos binarios sucesivos que exige la multiplicacion de 3 ó más factores, ó bien cada producto tiene tantas cifras como sus dos factores, ó bien tiene una ménos. En el 1.er caso no se pierde cifra alguna (en n.°) y el producto final tendrá tantas como reunan todos los factores; en el 2.° se pierde una cifra á cada multiplicacion, y al llegar al producto final se habran perdido tantas cifras como multiplicaciones sucesivas se han hecho, es decir como factores hay ménos 1. Es claro que esos son los casos límites ó estremos y que el producto puede tener un n.° de cifras intermedio entre esos límites.

48. *Abreviaciones prales. de la multiplicacion de enteros.* En ciertos casos particulares puede hallarse el producto de dos enteros más breve y sencillamente que por las reglas generales dichas, siendo los principales los siguientes.

1.° *Si uno ó más factores terminan en ceros (á la derecha) se prescinde de éstos y despues se agregan al producto final, sin ellos obtenido.*

Pues cada factor terminado en ceros es igual al número de la izquierda de aquellos, multiplicado por la unidad numerativa del órden correspondiente, luego prescindir de los ceros, es prescindir de unidades—factores, por cuyo producto se multiplica luégo el obtenido directamente, agregando á éste los ceros que tienen aquellas (42).

2.° *Para multiplicar un entero cualquiera por otro cuyas cifras sean todas nueves, se resta aquél, del que resulte añadiéndole tantos ceros como nueves tenga el otro.*

Pues, p. e.j°:

57308×999=57308 (1000—1)=5730800—57308, (43).

3.° Cuando los dos factores tienen muchas cifras, y, sobre todo, cuando uno es comun á muchos productos que han de ser hallados sucesivamente, se abrevia indudablemente la operacion hallando y escribiendo aparte y ordenadameute los productos de uno cualquiera de los factores,—si solo hay una multiplicacion—y del multiplicando comun—si hay varias,—por todos los enteros de una cifra, pues hecho eso, al tratar de hallar, segun el 1.° de los métodos espuestos (46) los productos parciales sucesivos del multiplicando por las cifras aisladas del multiplicador se encontrarán ya todos hechos, quedando sólo ponerlos unos debajo de otros con la precisa correspondencia entre las cifras de igual orden.

Ejemplos.

```
         3815270496
         ×279845643
-------------------
        11445811488
       15261081984
      22891622976
     19076352480
    15261081984
   30522163968
  34337434464
 26706893472
 7630540992
-------------------
1067686825172048928
```

```
        3815270496
         ×57682140
------------------
      15261081984
      3815270496
     7630540992
   30522163968
  22891622976
 26706893472
19076352480
------------------
220072966888141440
```

Productos parciales.

3815270496	· 1=	3815270496
«	· 2=	7630540992
«	· 3=	11445811488
«	· 4=	15261081984
«	· 5=	19076352480
«	· 6=	22891622976
«	· 7=	26706893472
«	· 8=	30522163968
«	· 9=	34337434464

TABLA DE MULTIPLICAR EN EL SISTEMA DUODECIMAL.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	D	U
2	4	6	8	D	10	12	14	16	18	1D
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	D	13	18	21	26	2U	34	39	42	47
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	12	19	24	2U	36	41	48	53	5D	65
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
D	18	26	34	42	50	5D	68	76	84	92
U	1D	29	38	47	56	65	74	83	92	D1

Esc.° Omitimos el considerar como casos de abreviacion los en que el multiplicador tenga *ceros intermedios*, ó *unos*, porque la abreviacion ocurre inmediatamente, sabiendo que el producto de un n.° cualquiera por cero es cero,—y los ceros no se ponen como sumandos en parte alguna—y que el producto por 1 es el mismo multiplicando.

49. Para concluir la multiplicacion de enteros y afirmar la práctica de las reglas de los tres casos (44, 45, y 46), proponemos la resolucion del ejemplo siguiente, cuyos guarísmos suponemos escritos en el sistema duodecimal; previos el recuerdo de los valores D=*diez* y U=*once*, y el conocimiento de la tabla adjunta.

Ejemplo.

```
    3U05D
     9D7U
   ------
   371542
  23534D
 3324D4
2U3446
---------
329199222
```

50. *Definiciones.* Se llama en general, *múltiplo de un número,* su producto por un *entero* y en particular *duplo, triplo, cuádruplo, quíntuplo, séxtuplo, séptuplo, óctuplo, décuplo y céntuplo* los productos respectivos por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, diez y ciento.

Leccion 5.ª

DIVISION DE ENTEROS.-PRUEBAS DE LA MULTIPLICACION Y DE LA DIVISION.

Division; su definicion general; signos é indicacion; nombres de los datos y del resultado, (51). *Corolarios de esa definicion general, segun sea el dividendo...*1.° *mayor, igual, ó menor que el divisor;* 2.° *múltiplo, ó no del divisor,* (52). *Definiciones de division exacta é inexacta, de cocientes completo y entero y de residuo, relaciones entre estos números el dividendo y el divisor,* (53). *Modo primitivo ó vulgar de dividir dos enteros, sus inconvenientes; proposiciones fundamentales para la division científica:* 1.ª *Division de una suma por un entero,* (54); *corolarios para las divisiones exactas y para la descomposicion de un dividendo en sumandos á fin de dividirle* (55). 2.ª *Division de una diferencia por un entero,* (56). 3.ª *id. exacta de un producto ó por un producto,* (57). 4.ª *Alteraciones, por sumacion ó produccion, de dividendo y divisor* (*uno solo, ó ambos*) *y sus efectos en los cocientes completo, y entero y en el residuo,* (58). *Casos de la division de enteros;* 1.° *Divisor y cociente elementales ó de una sola cifra significativa cada uno; órden de esa cifra en el cociente,* (59). 2.° *Divisor de varias cifras y cociente de una sola, órden de esta,* (60); 3.° *Cociente de varias cifras; reglas esenciales y accesorias para hallarle,* (61). *Número de cifras del cociente de dos enteros,* (62). *Abreviaciones principales de la division de enteros,* (63). *Pruebas de la division,* (64).

51. En sentido general vulgar, *division,*—acto ú ope-

racion de *dividir* es la *particion*, ó acto de *partir* ó hacer *partes* un *todo;* pero en Algoritmia, segun ya se ha indicado (37), *la division* es la operacion inversa de la multiplicacion, es decir, de *hallar uno de dos factores dados el otro y el producto; éste toma el nombre de dividendo, el factor conocido el de divisor y el factor incógnito el de cociente.*

Los signos para indicar una division son los dos puntos ortográficos (:) colocados entre dividendo y divisor en el órden de lectura y en el que los acabamos de nombrar, ó bien una raya (—) encima de la cual se pone el dividendo y debajo el divisor. Ambos signos se leen *dividido por*, ó *dividido entre*, ó *dividido*, ó *entre*, p. ej.° $a : b$, $\frac{a}{b}$ se leen a dividido por b, ó a dividido entre b, ó a dividido b, ó a entre b; y significan que el n.° representado por a (dividendo) ha de ser dividido por el representado por b (divisor).

52. De la definicion general de dividir se deducen los siguientes *corolarios.*

1.° *El cociente será mayor, igual, ó menor que* 1, *segun el dividendo sea respectivamente mayor, igual ó menor que el divisor.* Pues considerando el cociente como multiplicador, lo que es siempre posible (en abstracto) en virtud de la proposicion 2.ª (41), el cociente (multiplicador) y la unidad han de tener la misma relacion de magnitud que el dividendo (producto) y el divisor (multiplicando), (38 y 39).

2.° *El cociente completo será un número entero si el dividendo es múltiplo del divisor y no lo será en caso contrario.*

53. En este último caso la division se llama inexacta y exacta en el primero citado.

En la division *exacta,* el cociente es el n.° de veces que el dividendo *contiene al divisor* ó *es mayor que el divisor*; en la *inexacta*, se llama *cociente entero* al mayor número de veces que el dividendo contiene al divisor, ó bien al cociente exacto del mayor múltiplo del divisor contenido en el dividendo, y *residuo* de la division al de restar dicho múltiplo, del dividendo. Por consiguiente, *en la division exacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, y en la inexacta el dividendo es igual al divisor multiplicado por el cociente entero mas el residuo.*

Esc.° A veces se toma por *cociente entero* el que escede en 1 al definido en el párrafo anterior, y que es indudablemente el n.° que, multiplicado por el divisor, produce el múltiplo de éste inmediato mayor que el dividendo; en ese caso, se dice que se hace la division por *esceso* (en el caso usual, *por defecto*) ó que se fuerza la unidad en el cociente, el *residuo*, que algunos llaman *complementario*, es la diferencia entre dicho múltiplo y el dividendo, éste es evidentemente igual al divisor por el cociente forzado ménos el residuo complementario, y éste á su vez es igual á la diferencia entre el divisor y el *residuo* de la division por defecto. Asi como el dividendo de toda division exacta se llama *múltiplo* del divisor, asi este se llama *parte alícuota*, *factor*, *submúltiplo*, ó *divisor*, por antonomasia, del dividendo.

54. Puesto que, segun acabamos de ver, el cociente de dos enteros es el n.° exacto ó aproximado de veces que el dividendo contiene al divisor y ésta es la nocion primitiva y vulgar de dividir dos números, el modo tambien primitivo de hacer esa operacion es restar el divisor del dividendo y de los restos sucesivos, cuantas veces se pueda y ese n.° de veces ó sea el de sustracciones verificadas es el cociente exacto, si el último resto es cero, y lo que hemos llamado *cociente entero*, en el caso contrario.

P. ej.° $24 : 6 = 4$ porque......
$24 - 6 = 18$ (1.ª sustraccion),
$18 - 6 = 12$ (2.ª sustraccion),
$12 - 6 = 6$ (3.ª sustraccion),
$6 - 6 = 0$ (4.ª sustraccion).

Pero ese modo de hallar el cociente de dos enteros,

—como su análogo de la multiplicacion—,sobre ser impracticable por lo prolíjo, á poco grande que haya de ser el cociente, no constituye una operacion aritmética nueva, y por tanto, precisa deducir otras proposiciones que sirvan de fundamento á la genuina y verdadera division de enteros.

Proposicion 1.ª—Teorema.—*En la division de una suma por un entero,....1.° El cociente completo es igual á la suma de los cocientes completos sucesivos de todos los sumandos por el entero. 2.° El cociente entero es igual á la suma de los cocientes enteros (por defecto) de todos los sumandos, mas el de la suma de los residuos correspondientes, y 3.° El residuo es igual al de la division de dicha suma de residuos de todos los sumandos, por el divisor único.*

Lo 1.° es corolario de la proposicion 1.ª (40) de la multiplicacion pues si representamos por A, B, C, D, p. ej.°, 4 sumandos á cuyos cocientes completos respectivos por un entero E llamamos a, b, c, d, tendremos

$$A:E=a,\ B:E=b,\ C:E=c,\ D:E=d,$$

ó bien $A=aE$, $B=bE$, $C=cE$, $D=dE$ (35)

luego $A+B+C+D=aE+bE+cE+dE=(a+b+c+d)\cdot E$

y por tanto $(A+B+C+D):E=a+b+c+d$, (def gral-51), l. q. s. q. d. Para demostrar lo 2.° llamemos q $q,'$ $q,''$ $q,'''$ á los cocientes enteros respectivos y r, $r,'$ $r,''$ $r,'''$ á los residuos correspondientes, es decir que

$A=Eq+r$, $B=Eq'+r'$, $C=Eq''+r''$, $D=Eq'''+r'''$ luego

$A+B+C+D=Eq+Eq'+Eq''+Eq'''+r+r'+''+r'''$

ó $A+B+C+D=E\,(q+q'+q''+q''')+(r+r'+r''+r''')$

Pero, segun lo acabado de demostrar (1.°), será

$(A+B+C+D):E=E(q+q'+q''+q'''):E+(r+r'+r'')+r'''):E$ «$=q+q'+q''+q'''+(r+r'+r''+r'''):E$ puesto que

$E(q+q'+q''+q'''):E=q+q'+q''+q'''$ (def. gral—51), luego el cociente entero de $A+B+C+D;E$ se compone de $q+q'+q''+q'''$ (suma de cocientes enteros de los sumandos A, B, C, D por el divisor E), mas el cociente entero de la division $(r+r'+r''+r'''):E$ l. q. s. q. d.

3.° Por último como la division $E(q+q'+q''+q''')$:E no deja residuo, es claro que el de la division $(A+B+C+D)$:E será únicamente el de $(r+r'+r''+r''')$:E lo que demuestra la 3.ª parte del Teor.ª

55. Corolarios. 1.° *Para dividir por un entero la suma de varios múltiplos de él, basta dividir separadamente por dicho entero todos los sumandos y sumar los cocientes respectivos.*

2.° *Para dividir por un entero otro cualquiera, se puede descomponer á éste en partes ó sumandos, dividir cada uno de estos por el divisor, (hallando todos los cocientes enteros, por defecto), y dividir despues la suma de los residuos anteriores; el residuo de esta última division parcial será el de la propuesta y la suma de todos los cocientes enteros obtenidos será el cociente entero de los dos núms dados.*

56. Prop. 2.ª Teorema. En la division de una diferencia por un entero: 1.° *El cociente completo es la diferencia de los de minuendo y sustraendo;* 2.° *El cociente entero es tambien la diferencia de los cocientes enteros de dichos dos números y* 3.° *el residuo es la diferencia de los residuos respectivos, si es mayor el del minuendo que el del sustraendo, y en el caso contrario, esa diferencia es el residuo complementario* (53).

1.° Conservando la notacion del Teor.ª anterior tendremos, puesto que $A=aE$, $B=bE$,...$A-B=aE-bE=(a-b)E$ luego $(A-B)$: $E=a-b$ es decir que el cociente de la diferencia $A-B$ por E es la diferencia $a-b$ de los cocientes a y b del minuendo A y el sustraendo B por el mismo divisor E.

2.° y 3.° $A=Eq+r$, $B=Eq'+r'$ luego $A-B=Eq+r-Eq'-r'$ porque es claro que restar una suma equivale á restar sucesivamente todos los sumandos. Pero $Eq-Eq'=E(q-q')$,(43, Esc.°) luego $A-B=E(q-q')+(r-r')$. Ahora, de estos dos sumandos el segundo $r-r'$ es menor que E, luego al dividirle por E da *cero* de cociente y $r-r'$ de residuo, luego el cociente entero de $(A-B)$: E es $q-q'$

y el residuo es $r-r'$; l. q. s. q. d.

57. Prop. 3.ª Teorema. 1.° *Para dividir un producto indicado por un divisor de alguno de sus factores, basta dividir ese factor y multiplicar el cociente por los demás factores.*

2.° *Para dividir por un producto un múltiplo suyo, basta dividir éste por un factor de aquél, el cociente por otro factor y así hasta llegar al último factor.*

1.° Sea p. ej.° el producto $7\times15\times6\times12$ digo que $(7\cdot15\cdot6\cdot12):5=7\cdot(15:5)\cdot6\cdot12=7\cdot3\cdot6\cdot12$. En efecto multiplicando este último producto por 5 para lo cual basta multiplicar un factor (42, cor.° 1.°) tendremos $(7\cdot3\cdot6\cdot12)\times5=7\cdot(3\cdot5)\cdot6\cdot12=7\cdot15\cdot6\cdot12$ y pues éste es el dividendo propuesto, aquel n.° $7\cdot3\cdot6\cdot12$ es el cociente, puesto que multiplicado por el divisor 5 produce el dividendo.

2.° Sea $360:(3\cdot5\cdot4)$. Dividiendo 360 por 3 resulta 120 de cociente exacto, dividiendo 120 por 5, 24 es el cociente, y dividiendo 24 por 4, 6 es el cociente de esta division y tambien de la propuesta, pues multiplicando 6 por el producto $3\cdot5\cdot4$ tendremos (42, corol.° 2.°)

$$6(3\cdot5\cdot4)=6\cdot3\cdot5\cdot4=6\cdot4\cdot5\cdot3, (41.)$$
$$\text{»} \quad =24\cdot5\cdot3=120\cdot3=360.$$

Queda pues demostrada la 2.ª parte del teorema, pues aunque parezca que referido como está el razonamiento anterior á números particulares es una mera comprobacion, obsérvese que es independiente de los valores de aquellos.

58. Prop. 4.ª Teorema. 1.° *Si el dividendo solo crece ó disminuye, el cociente completo varía en el mismo sentido; y en sentido contrario, si es el divisor solo el que varia por sumacion.* 2.° *Si el dividendo y el divisor se multiplican por un entero, ó se dividen por un factor comun á ambos, los cocientes completo y entero no varian, pero el residuo queda multiplicado ó dividido respectivamente por aquel número.*

1.° Porque siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, es claro que variando el producto y permaneciendo constante el un factor (divisor), el otro factor (cociente) ha de variar en el mismo sentido que el producto, pues si no variase, ó variase en sentido contrario, el producto no variaria, ó variaria en sentido contrario del supuesto (43); y si un factor (divisor) varia, no variando el producto (dividendo), el otro factor (cociente) variará necesariamente en sentido contrario.

3.° Siguiendo la notacion de los números anteriores y llamando n al factor ó divisor que modifica á los datos primitivos tendremos (53) $A=Ea=Eq+r$ luego (11,40—Teor.ª —,y 42,—cor.° 1.°) $An=En\cdot a=En\cdot q+rn$ donde se ve que multiplicados por n dividendo (A) y divisor (E) primitivos, los cocientes completo (a) y entero (q) no han variado, mas el residuo (r) ha quedado multiplicado por n.

Ahora es claro que si considerando An y En como datos primitivos los dividimos por n volveremos á los A y E y los cocientes serán los mismos pero el residuo rn se convertirá en r, es decir quedará tambien dividido por n, como el dividendo An y el divisor En.

59. Análogo razonamiento al que hicimos para la multiplicacion, ó mejor, el considerar que es inversa de aquella operacion la de dividir, conduce á distinguir tres casos en la resolucion sintética del problema gral. de dividir enteros, á saber: 1.ª *Divisor y cociente de una sola cifra significativa cada uno* (correspondiente al 1.er caso de la multiplicacion, como que solo han variado los nombres de los factores (14)). 2.° *Divisor de varias cifras y cociente de una sola* (correspondiente al 2.° de multiplicar n.° 45) y 3.° *Cociente de varias cifras* y por consiguiente divisor y dividendo tambien.

58. 1.er *caso.* Si recordamos el correlativo de la multiplicacion, reconoceremos que una division exacta estará en éste 1.er caso, cuando teniendo el divisor *una sola cifra significativa,* el dividendo tenga *una, ó dos formando un n.°, cuyo valor absoluto* sea menor que el producto de dicha cifra del divisor por la base numerativa

(*) y *cuyo valor relativo* sea de igual ó mayor órden que el de la cifra del divisor. Entónces el cociente completo será evidentemente, el de ese n.° de una ó dos cifras por la del divisor, con tantos ceros á la derecha como valga la diferencia entre los números de ceros del dividendo y del divisor.

Y como de no ser exacta la division, no es fácil conocer antes de hacerla, cuándo el cociente ha de tener una sola cifra significativa cual el divisor; y como, aun para las exactas del caso antedicho es preciso hacer la division por una cifra, del n.° de una ó de dos cuyo valor absoluto sea el citado, á este caso especial puede limitarse el 1.° de la division de enteros, que hemos, sin embargo, enunciado en toda su generalidad para conservar su correlacion con el caso 1.° de la multiplicacion.

Para dividir, pues, *dos enteros, el divisor de una sola cifra y el dividendo de una ó dos pero menor que el producto del divisor por la base numerativa, se buscará mentalmente, ó por la tabla* (44) *de multiplicar, ó por sustracciones sucesivas el entero que multiplicado por el divisor produce el dividendo ó el múltiplo del divisor mas próximo al dividendo y dicho número será el cociente exacto ó entero* (*por exceso ó defecto*) *segun el dividendo sea ó no múltiplo del divisor.*

Esc.° El método de las *sustracciones* sucesivas ya lo hemos dicho y aplicado (54).

El de la *tabla* (44) se reduce á buscar en la línea ó columna, encabezadas por el divisor, su múltiplo más próximo al dividendo—que puede ser éste ó mayor ó menor—y dirigiéndose desde él rectangularmente con la direccion primitiva, á buscar la cifra que encabeze la columna ó linea respectivamente cruzada, en dicho múltiplo, con la anteriormente seguida, esa cifra será el *cociente exacto*, si está el dividendo en la tabla; *entero por*

(*) Eso se conocerá en que añadiendo un cero á la derecha de la cifra significativa del divisor, el núm. que resulte será aún menor que el que forman la cifra ó dos cifras válidas del dividendo.

defecto, ó usual, si se halla el múltiplo inmediato menor que el dividendo y *entero por exceso*, ó forzado si fué el inmediato mayor que el dividendo, dicho múltiplo buscado.

Por último, se hallará mentalmente el cociente, sabiendose de memoria y recorriendo en ella, los múltiplos del divisor hasta encontrar el más próximo al dividendo, etc.

Ejemplos.

28000 : 700=40 pues 28 : 7=4, y *tres* ceros que tiene el dividendo menos *dos* del divisor, dan uno en el cociente exacto.

34 : 6=5 (aprox.ᵉ def.ᵒ) pues 30—múltiplo de 6 inmediato menor que 34—es el producto de 6 por 5, luego 5 es el cociente exacto de 30 entre 6 y el cociente entero usual de 34 entre 6.

2.° *caso*. Por razon análoga á la del caso anterior, no consideraremos este 2.° con toda la generalidad correspondiente al 2.° de la multiplicacion, sino cuando la division del *número* que forman las cifras significativas del dividendo, por todo el divisor, sea exacta, y áun entónces sólo se conocerá *á priori* que el cociente tendrá una sola cifra significativa, sabiendo que dicho *número* (formado por las cifras significativas del dividendo) es múltiplo del divisor por *alguno* de los enteros menores que la base numerativa *el cual*, con tantos ceros como tenga el dividendo, formará el cociente completo, porque es claro que al dividir exactamente millares—p. ej.°—el cociente ha de ser precisamente millares.

Mas, cuando *el cociente, exacto ó entero*, ha de tener una sola cifra—lo cual se conocerá en que añadiendo un cero al divisor resultará un n.° mayor que el dividendo—no es preciso que la division haya de ser exacta, para *hallarlo* por medio de la siguiente regla.

Se halla el cociente entero de la 1.ª *ó dos* 1.ᵃˢ *cifras* (*izq.*ª) *del dividendo por la* 1.ª *del divisor y ese* *cociente será el de la division propuesta ó mayor que él;* para averiguar si es lo uno ó lo otro, *se halla el resíduo de esa* 1.ª *division parcial, y si es igual ó mayor que su cociente respectivo éste es el buscado, pero si es menor, se coloca á su derecha* (mentalmente) *la cifra siguiente del dividendo, y se halla el cociente entero del n.° que resulte, por la* 2.ª *cifra del divisor, y si es el mismo que el de la division parcial anterior, siendo además el resíduo igual ó mayor, aquél será el cociente buscado, pero si el resíduo es menor, se le pone á la derecha la cifra siguiente del dividendo, y se halla el cociente entero del n.° que resulte, por la* 3.ª *cifra del divisor.......y así sucesivamente hasta obtener un resíduo, en esas divisiones parciales, igual ó mayor que su cociente respectivo el cual será el buscado, ó hasta hallar un cociente entero menor que el anterior, desechando éste entónces, y empezando de nuevo la serie de divisiones, tomando para* 1.er *cociente entero ese n.° menor y siguiendo como ántes hasta obtener dicho resíduo igual ó mayor que su cociente respectivo, ó llegar á las unidades de dividendo y divisor sin disminuir el cociente de ensayo.*

El cociente entero de la 1.ª division parcial puede ser igual ó mayor que el buscadc, porque siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente entero mas el resíduo (si le hay), el 1.er dividendo parcial contendrá (en general) no solo el producto de la cifra de órden superior del divisor por el cociente entero,—que es lo estrictamente preciso para que dividido por esa cifra, el cociente fuera el buscado,—sino además las unidades de ese órden que contengan el producto de las demas cifras del divisor por el cociente y el resíduo, el cual solo puede tener tantas unidades como dicha cifra del divisor, y por tanto, dicho dividendo parcial puede contener más veces á esa cifra que las que todo el dividendo contiene al divisor.

Ahora supongamos, para fijar las ideas, que sea el cociente de 35849: 4790 el buscado. Dirémos....35 entre 4, á 8 y sobran 3,(que con el 8 que sigue en el dividendo hace 38), 38 entre 7 no cabe á 8, luego esta cifra es mayor que el cociente buscado, porque el dividendo no contiene mas que 35 millares y 8 centenas, ó bien, 32 millares y 38 centenas y el producto del divisor por 8 tiene 32 millares y 56 centenas (producto de las 7 centenas del divisor por 8). Tomemos pues el 7 para segundo cociente supuesto, tendremos.... 4 por 7, 28, á 35, 7, que siendo igual al cociente que ensayamos, asegura que éste es el verdadero porque su producto por el divisor consta sólo de 28 millares y 49 centenas (productos respectivos de los millares y centenas del divisor por 7) y el dividendo contiene 28 millares y 78 centenas (los 7 millares del resíduo y las 8 centenas del dividendo). El mismo razonamiento se haria para todos los ejemplos análogos y probaria la legitimidad del procedimiento enunciado en la regla anterior.

Para hallar el resíduo, una vez comprobada la legitimidad de la cifra del cociente, se multiplicará éste por el divisor y se restará el producto del dividendo (53). Mas no hay necesidad de hallar y escribir el producto completo para hacer dicha sustraccion, sino que á medida que se van hallando los productos parciales de cada cifra del divisor por el cociente, se van restando de la cifra correspondiente del dividendo aumentada en el n.° suficiente de unidades del órden inmediato superior tomado de la cifra inmediata de la izquierda.

Así en el ejemplo anterior diremos....7 por 0 es 0 á 9, 9; 7 por 9....63, á 64, 1 y van 6; 7 por 7....49 y 6, 55, á 58, 3 y van 5; 7 por 4...28 y 5..33 á 35, 2.

(Dividendo) 35849	4790 (Divisor)	La disposicion usual de datos y resultados, para hacer la division es la del margen.
(Resíduo.) 3319	7 (Cociente).	

61. 3.er *caso.* Se reconocerá desde luego que una division indicada está en este 3.er caso, siempre que añadiendo un cero al guarismo—divisor resulte un n.° aún menor que el dividendo, pues eso prueba que éste es mayor que el producto del divisor por la base numera-

tiva ó lo que es igual que el cociente ha de tener más de una cifra.

Esto supuesto, observémos que *separando* (material ó mentalmente) *de la izquierda del dividendo, tantas cifras como tiene el divisor, ó una más, si tantas forman un n.º menor que aquél, el cociente de ese n.º separado, por el divisor, tendrá una sola cifra* (caso anterior) *que será justamente la cifra de órden superior del cociente buscado.*

Sea p. ej.º, el cociente 35849208 : 4790. Digo que 7 cociente (hallado en el caso y ej.º anterior) de 35849 : 4790 es la cifra 1.ª (de la izquierda) del cociente entero buscado. (*) Desde luego no puede ser menor, porque en los 35849 *millares* del dividendo estarán contenidos no sólo el producto del divisor por los millares del cocente, sino *los que refluyan* del producto del divisor por las otras cifras del cociente, y del resíduo, es decir que ese dividendo parcial es mayor en gral. que lo preciso para que dividido por todo el divisor dé por cociente entero la cifra de los millares del cociente total, y á mayor dividendo no ha de corresponder menor cociente, siendo el mismo el divisor. Tampoco dicho cociente parcial puede ser mayor que aquella cifra, porque, al fin, los millares no son sino una parte del dividendo, y por tanto su cociente por el mismo divisor no ha de tener más millares que el cociente total, pues si los tuviera, corresponderia á menor dividendo mayor cociente (**) siendo el mismo el divisor, lo que es absurdo. *Hallado el resíduo de esa 1.ª division parcial, se pone á su derecha* (*material ó mentalmente*) *la cifra siguiente del dividendo, y se toma el n.º que resulta por nuevo divideudo parcial, que dividido, lo mismo que ántes, por el divisor,*

(*) Es indudable que ese cociente parcial es millares, puesto que millares son los separados del dividendo, y el cociente ha de ser del mismo órden que el dividendo, por razon natural.

(**) Pues siendo mayor la cifra de las millares, es mayor forzosamente el núm. aunque no tenga centenas, decenas ni unidades.

dará la 2.ª cifra del cociente total; para probar lo cual basta recordar el cor.º 2.º (55) y hacer un razonamiento análogo al inmediato anterior. *Multiplicada esa 2.ª cifra por el divisor y restado el producto del 2.º dividendo parcial se pondrá á la derecha del resto la cifra siguiente del dividendo y se tendrá un 3.er dividendo parcial que servirá para hallar la 3.ª cifra del cociente por los mismos trámites que las dos 1.as y así sucesivamente hasta la última ó sea la de 1.er órden que será la correspondiente á la de 1.er órden del dividendo puesta á la derecha del resíduo parcial anterior, de cuyo último dividendo parcial restado el producto del divisor por la cifra de 1.er órden del cociente, dará el resíduo de la division total propuesta.*

Ejemplo.

Disposicion.	
35849'2'0'8	4790
23192	7484
040320	
020008	
00848	

Locucion usual.

35849 entre 4790...á 7 (caso y ej.º anterior); 7 por 0 es 0, á 9...9, 7 por 9...63, á 64...1, y van 6, 7 por 7..,49, y 6...55 á 58...3, y van 5, 7 por 4...28 y 5...33, á 35....2; bájo el 2 (á la dha. del resto 2319), 23192 entre 4790...á 4, 4 por 0 es 0 á 2...2, 4 por 9...36 á 39...3 y van 3, 4 por 7...28 y 3....31, á 31..0, y van 3, 4 por 4...16 y 3...19 á 23...4; bájo el 0, 40320 entre 4790...á 8, 8 por 0 es 0 á 0...0, 8 por 9 72 á 72...0, y van 7, 8 por 7...56 y 7 63, á 63...0 y van 6, 8 por 4...32 y 6...38 á 40...2; bajo el 8 (ult.ª cifra del dividendo), 20008 entre 4790, á 4, 4 por 0 es 0 á 8...8, 4 por 9...36 á 40...4 y van 4, 4 por 7...28 y 4...32 á 40..8.

Como es facil comprender, la disposicion de datos y resultados usada comunmente y manifiesta en el ejemplo anterior es *accesoria*, las reglas antes enunciadas en bastardilla son las esenciales para la division de enteros.

62. De esas reglas se deduce facilmente que el *número de cifras del cociente entero es la diferencia de las que tie-*

nen dividendo y divisor ó una más. Porque el primer dividendo parcial dá, como es sabido, la 1.ª cifra del cociente y á cada cifra restante del dividendo corresponde otra—significativa ó no—del cociente, luego éste tendrá tantas como unidades la diferencia de los números de cifras que tienen dividendo y divisor, si el dicho primer dividendo parcial tiene una cifra más que el divisor, y una cifra mas que unidades dicha diferencia tendrá el cociente, si el 1.er dividendo parcial tiene tantas cifras como el divisor.

63. Las principales abreviaciones de la division son las siguientes.

1.ª *Si el divisor es una unidad numerativa* (1 *con ceros) se hará la division, separando de la derecha del dividendo, tantas cifras como tenga el divisor, esas cifras separadas formarán el resíduo y las restantes de la izquierda el cociente entero* (por defecto).

Sea, p. ej.°, 38528 : 100 digo que 3854 es el cociente entero y 28 el resíduo. En efecto multiplicado 3854 por 100 (44, *Lema*) tendremos $3854\times100=385400$ y añadiendo 28, resulta el dividendo 385428, es decir que $385428=3854\times100+28$ l. q. s. q. d.

2.ª *Si el divisor termina en ceros, se suprimen y además otras tantas cifras de la derecha en el dividendo, se efectúa la division de los n.os resultantes y el cociente entero de ella es el buscado) pero al resíduo hay que agregarle á la derecha las cifras suprimidas en el dividendo.*

Sea p. ej.° 483624:3200.

Dividiendo 4836 por 32 el cociente entero es 151 y el resíduo 4, de modo que $4836=32\times151+4$, multiplicando por 100, será $483000=3200\times151+400$ (44—Lema, 40, y 42—cor.° 1.°) y añadiendo 24...$483624=3200\times151+424$ l, q. s. q. d.

3.ª *Si dividiendo y divisor terminan en ceros, se efectúa la division, suprimiendo en cada uno tantos ceros cuantos tenga el que ménos; el cociente entero que resulte será el buscado pero al resíduo hay que agregar-*

le tantos ceros como fueron los suprimidos en cada término.

Por que, al suprimir (material ó mentalmente) los ceros, se divide cada término de la division propuesta por la unidad numerativa correspondiente (63, 1.ª), luego el cociente entero no varia (57), pero el resíduo queda dividido por dicha unidad numerativa, hay pues que añadirle los ceros para tener el verdadero.

Ejemplos. 4870000 : 35000. Se dividirá 4870 entre 35, cuyo cociente entero 139 es el de 4870000 entre 35000 pero el resíduo de la division efectuada es 5 y el de la propuesta es 5000.

4.ª *Si el divisor tiene una sola cifra*, aun aplicando la regla gral. resulta una abreviacion natural pues todas las divisiones parciales estarán en el 1.er caso y se harán mentalmente y sin tanteos, pero á más *suele usarse otra abreviacion que consiste en no escribir el divisor ni los resíduos parciales sucesivos y sí sólo el cociente debajo del dividendo ó donde convenga,* como se vé en el siguiente

Ejemplo...38512 : 5

Disposicion.	Locucion usual.
38512 (Div.º)	La quinta (parte) de 38...7 y sobran 3
7702 (Coc.e)	« « de 35...7
2 (Res.º)	« « de 1...0 y va 1
	« « de 12...2 y van 2

Facil es comprender que esa abreviacion puede generalizarse á divisores de 2 ó mas cifras, si se sabe hacer mentalmente las divisiones, multiplicaciones y sustracciones parciales sucesivas.

5.ª *Si el divisor es un número elemental ó sea de una sola cifra significativa seguida de ceros, y el dividendo tiene tantos ó más ceros que el divisor, se combinan las dos abreviaciones anteriores pues suprimiendo los ceros del divisor y otros tantos en el dividendo, quedará reducida la division á el caso considerado en la* 3.ª *abrevia-*

cion, y el resíduo será el que se halle por ese caso, con los ceros que tenga el divisor.

6.ª Por último, *si el dividendo tiene muchas cifras ó hay que hacer varias divisiones por un mismo divisor, se forman y ordenan en un cuadro los productos sucesivos del divisor por todos los números de una cifra, y para hacer las divisiones parciales que nos han de dar las cifras sucesivas del cociente se buscan en dicha tabla los múltiplos del divisor más próximos (por defecto) á los dividendos parciales respectivos y tendremos, sin ensayos, las cifras correlativas del cociente*, y los resíduos, sin necesidad de multiplicar cada cifra del divisor por la respectiva del cociente etc, sinó restando íntegro el múltiplo correspondiente del divisor, del dividendo parcial correlativo.

Ejemplo=92872054361 : 3709.

Múltiplos del divisor.	
3709 · 1= 3709	
« · 2= 7418	
« · 3=11127	
« · 4=14836	
« · 5=18545	
« · 6=22254	
« · 7=25963	
« · 8=29672	
« · 9=33381	

92872054361	3709
18692	25039647
14705	
35784	
24033	
17796	
29601	
3638 (resíduo)	

Para más abreviacion suponemos hechas todas las sustracciones parciales sin colocar el sustraendo (múltiplo del divisor) bajo el minuendo, (dividendo parcial respectivo) sinó dejando ambos en sus sitios primitivos.

64. La prueba mas sencilla y natural de la division consiste en multiplicar el divisor por el cociente entero y sumar el producto con el resíduo. Es evidente que la suma debe ser el dividendo si las operaciones estan bien hechas.

Si el resíduo es menor que el cociente entero, puede tambien servir de prueba dividir el dividendo por el cociente entero, y ha de resultar de nuevo cociente el divisor anterior, y el mismo resíduo.

Pero si el resíduo es igual ó mayor que el cociente entero, facil es ver que si se toma éste por divisor el cociente entero nuevo será mayor que el divisor anterior y el resíduo distinto, siendo ya muy complicado hacer servir de *prueba* ese cambio, segun las condiciones generales de toda buena prueba (34).

65. Siguiendo la correlacion con las teorias anteriores proponemos como ejercicio de division en otro sistema numerativo que el usual, la prueba por division de la multiplicacion hecha en el n.° 39, es decir tomar por dividendo el producto 329199222, por divisor un factor cualquiera—p. ej.° el 9D7U—y ha de resultar de cociente exacto el otro factor 3U05D.

Para facilitar la division puede formarse previamente la tabla de los 1.os múltiplos del divisor, á tenor de lo indicado en la 6.ª abreviacion (64).

ARTICULO 3.°—3.er ALGORITMO=GRADUACION.

Leccion 6.ª

ELEVACION A POTENCIAS DE LOS ENTEROS.

3.er *Algoritmo—Graduacion—idea y nombres de sus ramas para los números enteros* (66). *Potencias y raices de grados enteros y de números cualesquiera; id. de números y grados cualesquiera* (67). *Indicacion de la elevacion á potencias; diferencia entre grado y esponente* (68). *Modo usual de formar las potencias de base y grado enteros, dificultad de un modo general y diverso de la multiplicacion* (69). *Cuadrado y cubo de la suma de dos enteros* (70). *Corolarios: Diferencia de los cuadrados y de los cubos de dos enteros consecutivos; composicion del cuadrado y cubo de un entero respecto á las unidades de*

1.° *y 2.° órden del mismo* (71). *Potencias* (*de grado entero*) *de productos, cocientes y potencias de números enteros* (72). *Cor.°: composicion de las potencias de cada grado, de un entero descompuesto en sus factores simples, y aplicacion á conocer si un entero dado es ó no potencia de un cierto grado de otro entero* (73).

66. La 3.ª forma elemental de combinaciones numéricas, ó el 3.er algoritmo elemental, llámase *graduacion* (24), y es casi imposible definir claramente cada una de sus ramas con toda generalidad. ó sea para números cualesquiera, como lo hemos podido hacer para los dos algoritmos anteriores, por su mayor sencillez.

Para los *números enteros*, es la 1.ª rama del 3.er algoritmo caso particular de la 1.ª del 2.°, como ésta, á su vez, lo es de la 1.ª del 1.°; pues así como el *producto* de dos enteros es una *suma* de tantos sumandos iguales á uno de los factores (multiplicando) como unidades tenga el otro (multiplicador) ,así el producto de dos ó más factores iguales es llamado *potencia* de ese factor repetido, que toma el nombre de *base ó raiz*, y el de *grado de la potencia ó de la raiz* el número de veces que ésta entra en el producto—*potencia*.

La 1.ª rama, pues, del 3.er algoritmo elemental, llamada *elevacion á potencias* ó sólo *elevacion* (*), es una operacion que tiene por objeto hallar la *potencia*, dados la *raiz* y el *grado*, y como, segun es fácil comprobar con cualquier ejemplo, esos dos números que engendran cada potencia no pueden permutar sus oficios, como los sumandos y los factores, resulta que *la elevacion* deberia tener dos operaciones inversas, (y no una, como la adicion y la sustraccion), la de hallar la *raiz*, dados el *grado* y la *potencia*, y la de hallar el *grado* dadas la *potencia* y la *raiz*. Mas esta última operacion no se considera como elemental, quedando así tambien reducida á dos, como en los otros algoritmos, las ramas ú ope-

(*) Aunque no sabemos que se haya usado, usaremos casi siempre el nombre solo de *elevacion* puesto que es inconfundible y se abrevia mucho la frase.

raciones de la *graduacion*, llamándose *extraccion de raices*, ó sólo *extraccion*, la operacion que tiene por objeto hallar las *raices* numéricas, dados los *grados* y potencias *respectivas* las cuales no es preciso que lo sean exactas de otros enteros, como no lo es que el dividendo sea múltiplo del divisor.

67. Es claro que teniendo ya la idea general de producto de cualesquiera *número y clase* de factores, cuyo *número* forzosamente ha de ser entero, podremos facilmente generalizar las definiciones del párrafo anterior á el caso en que la *raiz* sea un número cualquiera, conservándose aún entero el grado, siendo ya mas difícil hacerlo para grados cualesquiera. *Potencia de grado entero de un número cualquiera es el producto de tantos factores iguales á ese número como unidades tenga el grado*, el cual se suele nombrar con los números ordinales, diciendo primer grado, segundo grado, etc, diciendose por tanto elevar á la potencia de segundo, tercero, cuarto grado, etc, y tambien elevar á la segunda, tercera potencia, etc, y por último elevar á 2, á 3, á 4......

Esc.° Por razones relativas á la Geometría la 2.ª y 3.ª potencias se llaman respectivamente *cuadrado* y *cubo*, y las raices 2.ª y 3.ª *raiz cuadrada y raiz cúbica.*

La primera potencia de un número es el mismo *número*, aunque realmente no tenga sentido decir producto de un solo factor. Esta y otras anomalias nacidas de la falta de generalidad de las *definiciones* de potencia y raiz dadas en este n.° y el anterior, hace generalizarlas diciendo que: *Potencia de un grado cualquiera de un número abstracto, es otro número compuesto por produccion relativamente á la raiz, como el grado lo está por sumacion relativamente á la unidad.*

68. *La elevacion á potencias* no tiene signo especial como las demás operaciones numéricas, *se indica poniendo á la derecha y arriba del guarismo que esprese la base ó raiz el que esprese el grado*, en menor tamaño, y que así colocado toma el nombre de *esponente*. Si la base es un resultado por hallar de operaciones indicadas,

se encierran entre paréntesis los datos y signos que indiquen esas operaciones y se colocán el *esponente* en la parte eterna, superior y derecha del paréntesis cerrado.

Ejemplos.

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; y se lee: 3 elevado á la 4.ª potencia, ó 3 elevado á la potencia de 4.º grado, ó 3 elevado á 4.

$(6+7)^2 = (6+7) \times (6+7)$, y se enuncia: 6 mas 7 elevado á la 2.ª potencia, ó elevado al cuadrado, ó elevado á 2. etc.

Esc.º Todo número tiene por esponente implícito la unidad, ó 1, puesto que es la 1.ª potencia de si mismo (67).

69. De lo dicho se deduce, que el modo primitivo de elevar á potencias los enteros, (*) es hacer las multiplicaciones sucesivas que cada una de aquellas exija segun su grado, mas téngase en cuenta que es erróneo y vicioso decir, por eso, que *elevar* es multiplicar un número por sí mismo varias veces, siendo evidente que sólo se le multiplica por si mismo en la 1.ª multiplicacion ó sea al formar el cuadrado ó 2.ª potencia.

Por largo que sea el procedimiento de las multiplicaciones sucesivas como lo será, si es algo grande el grado de la potencia que se ha de formar, es lo cierto que no hay otro modo elemental directo de *elevar á potencias*, cuya operaeion puede decirse que no existe mas que de nombre ó en teoría. Únicamente para el *cuadrado y cubo* hay un modo de formacion *sencillo* fundado en las siguientes proposiciones que no son sino casos particulares de la enunciada para una potencia cualquiera por el insigne Newton, y cuya demostracion no nos atrevemos á dar en Aritmética por no romper la no muy fuerte valla entre la Aritmética y el Algebra.

Prop. 1.ª Teorema. *El cuadrado de un entero des-*

(*) En todo lo restante de este Art. sólo trataremos de potencias de grado y base enteros.

compuesto en dos sumandos es igual á la suma de los dos cuadrados y de el duplo del producto de dichos sumandos (*). Llamemos a y b á los dos sumandos, será $(a+b)^2=(a+b)\,(a+b)=aa+ab+ab+bb$, (42—Teor.ª 1.º) pero $aa=a^2$, $bb=b^2$, y $ab+ab=ab\cdot 2=2\,ab$,

luego......$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; l. q. s. q. d.

Prop. 2.ª Teor.ª *El cubo de un entero descompuesto en dos sumandos es igual á la suma de los dos cubos y de los triplos del cuadrado de cada uno por el otro de dichos sumandos* (**). Pues......

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$$
$$\text{«}\;=aa^2+2aba+ba^2+a^2b+2abb+b^2b, \text{ (42—Teor.ª 1.º)}$$
$$\text{«}\;=a^3+2a^2b+a^2b+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$\text{«}\;=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \ldots. l.\ q.\ s.\ q.\ d.$$

71. De los teoremas anteriores se deducen los siguientes

Corolarios. 1.º *La diferencia de los cuadrados de dos enteros consecutivos es igual al duplo del menor de éstos mas* 1.—2.º *El cuadrado de todo entero mayor que* 10 *consta de tres partes: cuadrado de todas las decenas, duplo del producto de las decenas por las unidades, y cuadrado de unidades* (***). 3.º *La diferencia de los cubos de dos enteros consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor de éstos, mas el triplo del mismo mas* 1. 4.º *El cubo de todo entero mayor que* 10 *cons-*

(*) Cuadrado del 1.º mas el duplo del 1.º por el 2.º mas el cuadrado del 2.º; es el modo usual de decirlo.

(**) Cubo del 1.º mas triplo del cuadrado del 1.º por el 2.º mas triplo del 1.º por el cuadrado del 2.º mas cubo del 2.º--es el enunciado usual--.

(***) Es claro que ese enunciado se refiere al sistema décuplo, para generalizarlo á otro cualquier sistema numerativo bastará decir unidades de 2.º y de primer órden en vez de decenas y unidades, respectivamente.

ta de cuatro partes: cubo de decenas, mas triplo del cuadrado de decenas por unidades, mas triplo de decenas por el cuadrado de unidades, mas cubo de unidades.

1.° Es claro que podremos representar por a y $a+1$ dos enteros consecutivos cualesquiera y que, segun el Teor.ª 1.° del n.° anterior, será $(a+1)^2=a^2+2a+1$, cuadrado que evidentemente escede al cuadrado de a en $2a+1$, l. q. s. q. d.

2. Si llamamos d á las decenas y u á las unidades de un entero mayor que 10, dicho entero estará representado por la suma $10d+u$ y por tanto, su cuadrado será (70 Teor.ª 1.°)

$(10\cdot d+u)^2=(10\cdot d)^2+2(10d)u+u^2$..(1) Mas $(10\cdot d)^2=100\cdot d^2$ porque terminando forzosamente en un cero, al menos, todo número justo de decenas, su cuadrado ha de terminar en dos ceros, luego teniendo en cuenta el valor relativo del *cuadrado* de las d decenas, que será *centenas*, y del producto *du* que será *decenas*, queda demostrado en la igualdad (1) el corolario 2.°

3.° Siguiendo con la misma notacion......

$(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$, cubo que escede al a^3, de a, en $3a^2+3a+1$, l. q. s. q. d.

4.° $(10\cdot d+u)^3=(10.d)^3+3(10\cdot d)^2\cdot u+3(10\cdot d)\cdot u^2+u^3$; $(10d)^3$ es el *cubo de las d decenas,* con su valor relativo correspondiente, que es *millares*, puesto que un producto de tres factores que acaban en un cero, cada uno, ha de acabar en tres ceros; $3(10d)^2u$ es el *triplo del cuadrado de decenas por unidades* y siendo ese cuadrado *centenas*, segun el corolario 2.°, dicho triplo—2.ª parte del cubo total—será tambien *centenas*; $3(10d)u^2$ es el *triplo de las d decenas* (con su valor relativo) *por el cuadrado de unidades*—3.ª parte del cubo total—que es un n.° justo de decenas; y por último u^3 es el *cubo de unidades*—

tambien unidades—.

72. Teor.ª 1.° *La potencia, de un grado entero cualquiera, de un producto de enteros es igual al producto de las potencias, del mismo grado, de todos los factores.*

Sea el producto $a\,b\,c\,d$ y 3.° p. ej., el grado de la potencia, será....

$(abcd)^3=(abcd)(abcd)(abcd)=abcdabcdabcd$ (42—T.ª 2.°—)

« $=aaa\,bbb\,ccc=a^3b^3c^3$ (41, y 67) l. q. s. q. d.

pués facil es generalizar para un esponente entero cualquiera el razonamiento anterior hecho para el esponente 3.

Teor.ª 2.° *La potencia de un cociente de dos enteros es igual al cociente de las potencias de igual grado de los dos enteros.*

Sea el cociente $a:b=q$; decimos que $q^4=(a:b)^4=a^4:b^4$

En efecto $a=bq$ (51), luego $a^4=b^4q^4$, (Teor.ª anterior) y por tanto $q^4=a^4:b^4$ l. q. s. q. d. pues lo mismo que al grado 4 se aplicaría el razonamiento á otro grado entero cualquiera.

Lema. *El producto de potencias de un mismo número es igual á la potencia de ese número, cuyo grado sea la suma de los grados de las potencias—factores.*

Sea el producto $a^2a^4a^3=aa\cdot aaaa\cdot aaa$, siendo evidente que el número total de factores *aes* de ese producto es $2+4+3$ es decir la suma de los números de factores que contenian las potencias—factores.

Teor.ª 3.° *La potencia de otra potencia* (de base y grado enteros) *es la potencia cuyo grado sea el producto de los grados de las propuestas.*

Pues, p. ej.°, $\left(a^4\right)^3=a^4.a^4.a^4=a^{4+4+4}=a^{4\cdot3}$ (Lema anterior).

73 Corolario. *La potencia de un entero descompuesto en sus factores simples es el producto de las potencias de esos mismos factores, cuyos grados sean los productos de los que tuvieren en el entero, por el de la poten-*

cia á que el mismo ha de elevarse.

Sea, p. ej.º $N = a^m b^n c^r$, siendo N un entero cualquiera cuyos factores simples (*) distintos son $a\ b\ c$, el a repetido m veces, el b...n veces, y el c... r veces, en el producto N. Segun los Teoremas 1.º y 3.º del párrafo anterior, una potencia de cualquier grado s del número N será

$$N^s = \left(a^m\right)^s \left(b^n\right)^s \left(c^r\right)^s = a^{ms}\, b^{ns}\, c^{rs}, \text{ l. q. s. q. d.}$$

En virtud de ese corolario se podrá conocer si un entero descompuesto en sus factores simples es ó no potencia exacta de otro entero, segun que *todos* los esponentes de esos factores sean ó no múltiplos del grado de la potencia.

Leccion 7.ª

—

EXTRACCION DE RAICES ENTERAS DE LOS ENTEROS.

Raiz en general; su definicion, signo é indicacion (74). *Raiz exacta é inexacta, raiz entera, resíduo* (75). *Raiz cuadrada, casos de su extraccion*: 1.º *Raiz de una sola cifra significativa, órden de ésta segun el de su potencia respectiva* (76); 2.º *Raiz de varias cifras; teoremas fundamentales para su extraccion* (77). *Reglas esenciales y accesorias para extraer la raiz cuadrada entera de un entero* (78). *Valor máximo de cada uno de los resíduos parciales y del total, en dicha extraccion* (79). *Raiz cúbica; casos de su extraccion:* 1.º *Raiz de una sola cifra significativa órden de ésta segun el de la potencia respectiva* (80); 2.º *Raiz de varias cifras, teoremas fundamentales para su extraccion* (81). *Reglas esenciales y accesorias para extraer la raiz cúbica entera de un entero* (82). *Valor máximo de cada uno de*

(*) Se llaman factores simples de un producto entero los que no son múltiplos de ningun otro entero.

los residuos parciales y del total en dicha extraccion (83). *Raices que se pueden extraer mediante las cuadrada y cubica* (84). *Pruebas de la elevacion y de la extraccion* (85).

74. Sabemos ya (66) que *raiz de un cierto grado de un número es otro número cuya potencia del mismo grado sea el número propuesto*, y que *extraccion de raices*, en general, *es la operacion de hallar la raiz dados la potencia y el grado*. Esta operacion se indica con el signo $\sqrt{}$ llamado radical, en cuya abertura se coloca el guarismo que indica el *grado* y que así colocado se llama *índice* de la raíz, poniéndose la potencia ó número cuya raiz se quiere indicar bajo la raya— del signo $\sqrt{}$ ó bien dentro de un paréntesis ante el cual se coloca el signo $\sqrt{}$. Cuando el grado de la raiz es 2 no se pone en el signo $\sqrt{}$.

Así $\sqrt{64}$ se lee *raiz 2.ª ó cuadrada* de 64 y vale 8, puesto que 8 elevado al cuadrado ó el cuadrado de 8 es 64; $\sqrt[3]{1000}$ se lee *raiz 3.ª ó cúbica* de 1000 y es 10 pues $10^3 = 1000$; $\sqrt[6]{64}$ se lee raiz 6.ª ó raiz de grado 6 de 64 y es 2 puesto que $2^6 = 64$; etc.

75. Desde luego se comprende que no todos los números enteros tienen raices exactas y enteras de cada grado, pues p. ej.º en los cien primeros solo hay diez que la tengan cuadrada, en los mil primeros sólo hay diez que la tengan cúbica, etc, segun expresa *el siguiente*

Cuadro de las potencias 2.ª y 3.ª de los 10 1.ºs enteros.

Números..	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Cuadrados.	1,	4,	9.	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100
Cubos....	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

Todos los enteros menores que 100 y no incluidos en la 2.ª línea del cuadro anterior no tienen raiz cuadrada exacta entera, y segun se demostrará mas adelante tampoco la tienen fraccionaria. Lo mismo sucede rsspecto á las raices cúbicas de los enteros menores que 1000 y no incluidos en la 3.ª línea del cuadro.

En general las raices inexactas de cualquier grado de los números enteros son números *inconmensurables* (6).

Se llama *raiz entera*, de cada grado, de un entero, la raiz exacta de la mayor potencia entera de ese grado, contenida en dicho entero. Así la raiz cuadrada entera de 54 es 7, porque 7 es la raiz cuadrada exacta de 49 el cual es el mayor cuadrado entero contenido en 54; la raiz cúbica entera de 36 es 3 porque 3 es la raiz cúbica exacta de 27 el cual es el mayor cubo entero contenido en 36; la raiz entera de 6.° grado de 78 es 2 porque 2 es la raiz sexta exacta de 64 que es la mayor potencia exacta de 6.° grado contenida en 78.

Resíduo de una raiz inexacta es la diferencia entre el número cuya es esa raiz y la mayor potencia entera, del mismo grado, contenida en dicho número. Así en los ejemplos anteriores: 5 es el resíduo de la raiz cuadrada de 54, porque 5 es la diferencia entre 54 y $49=7^2$; 9 es el resíduo de la raiz cúbica de 36 porque 9 es la diferencia entre 36 y $27=3^3$; 14 es el resíduo de la raiz sexta de 78 porque 14 es la diferencia entre 78 y $64=2^6$.

El procedimiento general para extraer una raiz cualquiera es complicadísimo, por lo cual no se trata en Aritmética mas que de la extraccion de las raices cuadrada y cúbica, en cada una de las cuales hay que considerar dos casos, á saber: 1.° que la raiz entera buscada tenga una sola cifra significativa; 2.° que la raiz entera tenga varias cifras.

76. *La raiz cuadrada entera de un número menor que* 100—*se hallará sabiendo los cuadrados menores que* 100 2.ª línea del cuadro anterior—*y sus raices respectivas;* ó buscando en dicho cuadro el mayor cuadrado contenido en el número dado y en la 1.ª línea la raiz correspondiente; ó finalmente formando los cuadrados sucesivos de los enteros de una cifra, si no se saben de memoria, ni se tienen ya

formados.

Sabida ya la raiz cuadrada exacta de un número menor que 100, la misma con uno, dos, etc, ceros á su derecha constituirá la raiz cuadrada del número que forme el primitivo menor que 100, con tantos pares de ceros á su derecha como ceros haya de tener la raiz, puesto que el cuadrado de todo entero acabado en ceros ha de tener doble número de ceros que su raiz cuadrada (72-1.°) y por tanto la raiz cuadrada de centenas es decenas, la de decenas de millar es centenas, la de millones es millares, etc.

77. La extraccion de la raiz entera de un entero mayor que 100 y cuya raiz, por consiguiente, ha de ser mayor que 10, se funda en la leccion anterior y en los siguientes

Teoremas. 1.° *La raiz cuadrada entera de todas las centenas de un número es el número de decenas de la raiz cuadrada de aquél.* 2.° *Si se resta de un entero mayor que* 100 *el cuadrado de las decenas de su raiz cuadrada y se dividen las decenas del resto por el duplo de las de la raiz, el cociente entero es igual ó mayor que las unidades de dicha raiz.*

1.° Desde luego (76), la raiz cuadrada entera de *centenas* es un número justo de *decenas,* y es claro que la raiz cuadrada entera de las centenas de un número, no puede ser *mayor* que el número de decenas de su raiz, pues si lo fuese (18), resultaría que la raiz de sólo las centenas, es decir de *una parte* del número dado sería mayor que la raiz de *todo él*; tampoco puede ser *menor*, pues siendo el cuadrado de decenas sólo *centenas*, en las del número propuesto estarán, por lo menos, las del cuadrado de las decenas de su raiz, y además, en general, las centenas que puede contener la suma de el duplo de decenas por unidades (71—2.°), el cuadrado de unidades, y el resíduo; y aunque esta suma no tuviese *centenas*, la raiz de las del número dado sería justamente las decenas de su raiz total, pero nunca menor, ni mayor segun se ha dicho ántes, luego siempre se verifica el Teorema 1.°

2.° Representando por u las unidades, por d todas las decenas de la raiz cuadrada de un entero N y por r el resíduo de esa raiz, será, como ya sabemos (71—2.°),

$$N=(10\cdot d+u)^2+r=100\cdot d^2+2\cdot 10\cdot d.u+u^2+r,\dots (1)$$

luego la diferencia entre el número N y el cuadrado $100\cdot d^2$ de las decenas de su raiz cuadrada, valdrá, segun manifiesta la igualdad (1),

$N-100\cdot d^2=2\cdot 10\cdot d\cdot u+u^2+r$. El cociente de las decenas de esa diferencia por el duplo $2d$ de las de la raiz podremos espresarlo por

$$\frac{(N-100.d^2):10}{2d}=\frac{(2\cdot 10\cdot d\cdot u):10}{2d}+\frac{(u^2+r):10}{2d}$$

(54—1,° 63—1°), « $=u+\frac{u^2+r}{2\cdot 10\cdot d}$, (57—1° y 2°). Si el cociente $\frac{u^2+r}{2\cdot 10.d}$ tiene parte entera, es claro que el de las decenas de la diferencia $N-100\ d^2$ por $2d$ será mayor que u, y si no tiene parte entera dicho cociente parcial, el de $N-100\ d^2$ por $2d$ será u es decir, las unidades de la raiz, l.q.s.q.d.

78. En virtud de esos dos teoremas, *para extraer la raiz entera de un número mayor que* 100, *se le divide en secciones de á dos cifras de derecha á izquierda, se extrae la raiz cuadrada entera de la* 1.ª *seccion de la izquierda (que tendrá una ó dos cifras) y esa raiz será la cifra de órden superior de la raiz buscada; el cuadrado de esa cifra se resta de dicha* 1.ª *seccion, á la derecha del resto se coloca la seccion siguiente y separando, del n.° asi formado, la cifra de la derecha, se divide el que formen las de la izquierda por el duplo de la* 1.ª *cifra, ya hallada, de la raiz; el cociente en-*

tero se coloca á la derecha de su divisor, se multiplica el n.° así formado, por el mismo cociente, y se resta el producto, del dividendo con la cifra que se separó á su derecha; si no es posible esa sustraccion por ser mayor el sustraendo que el minuendo, se rebaja el cociente anterior de unidad en unidad, hasta que dicha sustraccion sea posible; á la derecha del nuevo resto se coloca la seccion siguiente y separando la cifra de la derecha, se divide lo de la izquierda por el duplo de la parte hallada de la raiz y así sucesivamente, obteniendose cada cifra de la raiz desde la 2.ª inclusive, dividiendo las decenas del número que forma el resto anterior con la seccion siguiente á su derecha, por el duplo de la parte hallada, hasta entónces, de la raiz, colocando cada uno de esos cocientes al lado del divisor correspondiente, multiplicando el número así formado por el mismo cociente y restando el producto, del número cuyas decenas fueron el dividendo respectivo; etc.

Para demostrar esta regla observémos que al separar de la derecha la 1.ª seccion de 2 cifras, el número de la izquierda es las centenas del propuesto y por tanto (77—1.°) su raiz cuadrada entera es las decenas de la raiz total; si esa raiz parcial no se puede extraer por el 1.er caso, se separarán otras dos cifras, y así sucesivamente hasta obtener un n.°, con la 1.ª ó 2 1.as cifras de la izquierda del propuesto, cuya raiz entera tenga una sola cifra, que será la de las decenas de decenas etc, de la raiz total, pues que aquella última seccion expresa las centenas de centenas etc, del número dado. Ahora bien, considerando únicamente *el número* que forman las 2 1.as secciones de la izquierda en el que la 1.ª representa centenas, y por tanto su raiz decenas de la raiz de dicho número, es claro que restar de la 1.ª seccion el cuadrado de las decenas de su raiz entera, y colocar á la derecha del resto, la 2.ª seccion, es lo mismo que restar del número que forman las dos secciones, dicho cuadrado, pues que éste contiene sólo centenas y por tanto el resto ha de tener las mismas decenas y unidades que el minuendo; separar la cifra de la derecha de ese resto es quedarse con sus decenas, á la izquierda, y ya sabemos por el teorema 2.° (77) que el cociente entero de esas decenas, por el duplo de la cifra hallada de la raiz, es la cifra siguiente, ó de las unidades de la raiz del número que forman dichas dos secciones. etc.

Escolios. 1.° En el párrafo anterior hemos incluido todas las reglas usuales para la extraccion de la raiz cuadrada, pero es facil comprender que algunas son accesorias, p. ej.° el colocar cada cifra del cociente al lado de su divisor y en general todas aquellas que, facilitando la operacion, no sean esenciales á ella, como lo son las fundadas en los dos teoremas anteriores.

2.° Es claro que si alguno de los cocientes fuese 0, se pone en el sitio correspondiente de la raiz y se baja la seccion siguiente al lado de la cifra que se apartó para formar el dividendo anterior, el cual con dicha cifra y con la seccion bajada formará el número cuyas decenas serán el nuevo dividendo. Por el contrario, si alguno de los cocientes fuese mayor que 9 se empezará por 9 las comprobaciones pues que es una sola cifra lo que corresponde para la raiz.

3.° Siendo evidentemente igual el número de cifras de la raiz á el número de secciones de á 2 cifras—escepto la última que puede tener sólo una cifra—resulta que el *número de cifras de la raiz entera de un entero es la mitad del número de cifras ó del número de cifras mas una (segun sea par ó non) de dicho entero.*

79. Del corolario (71) se deduce que el valor máximo que puede tener el resíduo de una raiz cuadrada es el duplo de la raiz entera correspondiente, pués si tuviera una unidad más, tambien la tendria la raiz, y como eso es aplicable, evidentemente, á los números que van formando las secciones sucesivas desde la 1.ª de la izquierda inclusive, resulta que ningun resto, de los que vayan hallandose, en la extraccion de una raiz cuadrada, debe ser mayor que el duplo de la parte hallada de la raiz,

y si alguno lo fuere consistirá en que la última cifra hallada es menor que la verdadera, lo cual, no puede suceder, á no bajar de una vez dos ó mas unidades á un cociente, visto que es mayor que dicha cifra verdadera de la raiz.

Ejemplo.

Disposicion.

```
√32,68,94 = 571
 25       |
 ---      |
  76.8    | 10.7
  749     | ----
  ----    |   7
  0199.4  | -----
   1141   | 114.1
   ----   | ------
   0853   |   1
```

Locucion usual.

La raiz cuadrada de 32 es 5, 5 elevado al cuadrado...25, á 32....7; bájo la seccion siguiente 68, y separando el 8 queda...76 entre 10 (duplo de 5=parte ya hallada de la raiz) á 7 (este á la derecha del divisor 10 forma 107), 107 por 7...749, á 768...19; bájo la seccion siguiente 94, y separando el 4 resulta 199, entre 114 (duplo de 57=parte ya hallada de la raiz) á 1 (éste á la derecha del divisor 114 forma 1141), 1141 por 1....1141, á 1994....853 que es el resíduo de la raiz cuadrada de 326894, de modo que

$$326894=(571)^2+853$$

80. La extraccion de la raiz cúbica, debe tener análogos trámites que la de la raiz cuadrada, como es facil comprender. Así la raiz cúbica entera de un entero menor que 1000 se hallará: ó sabiendose de memoria los cubos de los 9 primeros números (75), ó buscándolos en el cuadro correspondiente, ó formándolos por multiplicacion, si no se saben ni se tienen puestos en cuadro.

Sabida ya la raiz cúbica *exacta* de un número menor que 1000, la misma con uno, dos, tres etc ceros á su derecha constituirá la raiz cúbica del número que forme el primitivo menor que 1000 con tantos ceros á su derecha como sea el triplo del número de ceros que haya de tener la raiz, puesto que el cubo de todo entero acabado en ceros ha de tener triplo número de ceros que dicho entero (72—1.°) y por tanto la raiz cúbica de millares es decenas, la de millones es centenas, etc.

81. La extraccion de la raiz cúbica de un número mayor que 1000 se funda en la leccion anterior y en los siguientes

Teoremas. 1.° *La raiz cúbica entera de todos los millares de un número es el número de decenas de la raiz cúbica de aquel.* 2.° *Si se resta de un entero mayor que* 1000 *el cubo de las decenas de su raiz cúbica y se dividen las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raiz, el cociente entero es igual ó mayor que las unidades de dicha raiz.*

1.° Desde luego, la raiz cúbica entera de *millares* es un número justo de *decenas* y es claro que la raiz cúbica entera de los millares de un número no será *mayor* que las decenas de su raiz cúbica, pues si lo fuese (18) resultaría que la raiz de sólo los millares, es decir de una parte del número, sería *mayor* que la raiz de todo él; tampoco puede ser *menor*, pues siendo el cubo de decenas, millares, en los del número propuesto estarán, por lo ménos, los del cubo de las decenas de su raiz cúbica y además, en general, los millares que puede contener la suma de el triplo de cuadrado de decenas por unidades, el triplo de decenas por el cuadrado de unidades, el cubo de unidades y el resíduo; y aunque esa suma no contuviese millares, la raiz de los del número propuesto sería justamente las decenas de su raiz cúbica, pero nunca ménos, ni más segun ya se ha dicho ántes, luego el Teorema 1.° se verifica en todos los casos.

2.° Representando por u las unidades simples, por d todas las decenas de la raiz cúbica de un número N y por r el resíduo, será, como es sabido:

$N=(10\cdot d+u)^3+r=1000\cdot d^3+3\cdot 100\cdot d^2u+3.10\cdot d\cdot u^2+u^3+r$ luego la diferencia entre el número N y el cubo $100\,d^3$ de las decenas de la raiz cúbica, valdrá $N—1000\cdot d^3=$ $3\cdot 100\cdot d^2u+3\cdot 10\cdot d\cdot u^2+u^3+r$ y el cociente de las centenas de esa diferencia, por el triplo del cuadrado de las decenas podremos, pues, expresarlo por

$$\frac{N-1000 \cdot d^3):100}{3d^2}=\frac{(3 \cdot 100 \cdot d^2 u):100}{3d^2}+\frac{(3 \cdot 10 \cdot d \cdot u^2+u^3+r):100}{3d^2}$$

$$« \quad =u+\frac{(3 \cdot 10 \cdot d \cdot u^2+u^3+r):100}{3d^2}$$

Si este último cociente indicado no contiene parte entera, el de las centenas del resto por el triplo del cuadrado de las decenas de la raiz será u (las unidades de ésta) y si dicho cociente parcial tiene parte entera el propuesto será mayor que u; l. q. s. q. d.

82. En virtud de esos dos teoremas resulta la siguiente regla.

Para extraer la raiz cúbica de un número mayor que 1000 *se le divide en secciones de á tres cifras, de derecha á izquierda, no importando que la última seccion tenga una ó dos cifras; se extrae la raiz cúbica entera de la primera seccion de la izquierda y esa raiz será la cifra de órden superior de la raiz total; el cubo de esa cifra se resta de dicha primera seccion, á la derecha del resto se baja la seccion siguiente y se dividen las centenas del número que resulte, por el triplo del cuadrado de la cifra hallada de la raiz; colocado el cociente á la derecha de dicha cifra, se eleva al cubo el número así formado y si ese cubo no es mayor que el número que forman las dos primeras secciones, se resta de él, y bajando á la derecha del resto la siguiente seccion, se dividen las centenas del número que se forme por el triplo del cuadrado de la parte ya hallada de la raiz y así sucesivamente, se irán obteniendo todas las cifras de la raiz, dividiendo por el triplo del cuadrado de la parte ya hallada, las centenas del número que forme el resto anterior con la seccion correspondiente á su derecha, y esos restos sucesivos se obtendrán restando, del número que forman las* N (*) 1.^{as} *secciones de la izquierda, el*

(*) N significa aquí un entero cualquiera 1, 2, 3, etc.

cubo del número que formen las N 1.as *cifras de la raiz, y si alguno de esos cubos fuese mayor que su minuendo respectivo, será porque la última cifra obtenida por cociente de la division inmediata anterior es mayor que la cifra correspondiente de la raiz, se rebajará pues de* 1 *en* 1 *dicho cociente hasta que sea posible la sustraccion correlativa.*

Siendo muy análoga la demostracion de esta regla á la de la extraccion de la raiz cuadrada, la omitimos, proponiendola como ejercicio, como tambien las reglas accesorias que suelen darse para formar los cubos sucesivos de las partes que se van hallando de la raiz.

83. Del corolario 3.° (71) se deduce que el valor máximo que puede tener el resíduo de una raiz cúbica es el triplo del cuadrado de la raiz entera mas el triplo de esa misma raiz, pues si el resíduo tuviera una unidad más, tambien la tendria la raiz entera, y como eso es aplicable á las raices parciales que se van obteniendo, resulta que ningun resto de los que se hallan sucesivamente, el extraer una raiz cúbica, puede ser mayor que el triplo del cuadrado, mas el triplo de la parte hallada de la raiz, y si lo fuere, consistirá en que la última cifra hallada por division, es menor que la correspondiente de la raiz, lo cuál no puede suceder sino por bajar de una vez dos ó mas unidades á un cociente, visto que es mayor que dicha cifra verdadera de la raiz.

Ejemplo.

Disposicion.

$$\sqrt[3]{18,792,455} = 265$$

8	
107,92	$12 = 3\cdot 2^2$
$17576 = 26^3$	6
012164,55	$2028 = 3\cdot 26^2$
18609625	5
00182830=(resíduo).	

Locucion usual.

La raiz cúbica de 18 es 2, $2^3=8$; de 8 á 18...10 (bájo la seccion siguiente 792 á la derecha del resto 10, y separando las dos cifras de la derecha del número 10792 que resulta) 107 entre 12 (triplo del cuadrado de la cifra 2 hallada ya) á 8, pero el cubo de 28 (número formado por la 1.ª cifra 2 y el cociente 8) y tambien el de 27 son mayores que 18792 (número que forman las dos secciones usadas) luego 6 es la cifra 2.ª de la raiz, $26^3=17576$ que restado de 18792 dá de resto 1216; bájo á la derecha la siguiente seccion 455 y separando las dos cifras 55 queda 12164, entre 2028 (triplo del cuadrado de 26) á 5; $265^3=18609625$ que restado del número propuesto dá 18283 por resíduo de la raiz buscada.

84. *Extrayendo sucesivamente raices cuadradas y cúbicas se podrá extraer una raiz cualquiera cuyo grado sea el producto de doses y treses como exclusivos factores,* pues segun el Teorema 3.° (72) tendremos, llamando r á la raiz sexta, p. ej.°, de un entero n, $n=r^6=\left(r^2\right)^3=\left(r^3\right)^2$ y por tanto $\sqrt[6]{n}=r=\sqrt[3]{\sqrt{n}}=\sqrt{\sqrt[3]{n}}$. Del mismo modo se demostraria que $\sqrt[4]{n}=\sqrt{\sqrt{n}}$, $\sqrt[9]{n}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{n}}$, $\sqrt[12]{n}=\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{n}}}$, etc.

85. La elevacion y la extraccion pueden comprobarse mutuamente, como todos los pares de operaciones inversas de cada algoritmo, mas siendo tan complicada la extraccion de raices es preferible comprobar una elevacion, repitiendo las multiplicaciones sucesivas.

La extraccion de una raiz se comprobará naturalmente elevando la raiz entera hallada á la potencia correlativa y añadiendo el residuo á esa potencia; la *suma* debe ser el número propuesto, si la operacion está bien hecha y la prueba tambien.

Escolio. Facil es generalizar para cualquier sistema numerativo las teorias de la elevacion á potencias y de la extraccion de raices que sólo hemos espuesto para el sistema décuplo, por la gran complicacion de esas operaciones.

CAPÍTULO 3.° PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Leccion 8.ª

PROPIEDADES NUMERATIVAS Y SUMATORIAS.

Clasificacion natural de las propiedades de los enteros (86). *Propiedades numerativas: Composicion y forma general de un entero relativamente á una base numerativa y á las cifras respectivas* (87). *Doble modo general de cambiar de sistema numerativo gráfico un entero dado; aplicacion á los casos particulares en que dicho entero se dé ó se pida en el sistema décuplo y uso de ese cambio particular para la resolucion mediante él del caso general* (88). *Ventajas de cada sistema* (89). *Propiedades sumatorias: Complemento de un número, regla usual para hallarlo* (90). *Transformaciones que, mediante los complementos, pueden esperimentar la adicion y la sustraccion de dos enteros cualesquiera ó del mismo número de cifras* (91). *Números negativos, su origen, representacion y significacion en abstracto; su interpretacion y uso en concreto, cuando procede* (92). *Indicacion y efectuacion de sumas y restas combinadas; escolio sobre el órden de las operaciones parciales* (93). *Valores de la suma y de la resta de la suma y diferencia de dos números* (94).

86. Las propiedades de los números no pueden evidentemente referirse, sino á sus combinaciones y relaciones mutuas, y por tanto, es natural clasificarlas relativamente á los algoritmos á que se refieren esclusiva, ó principalmente puesto que algunas se refieren á la vez á más de un algoritmo. Consiguientemente, consideramos este Capítulo dividido en 4 Artículos, que traten

respectivamente de las propiedades relativas á la Numeracion, á la Sumacion á la Produccion y á la Graduacion.

ART.° 1.° PROPIEDADES NUMERATIVAS DE LOS ENTEROS.

87. Segun las teorias generales de los sistemas verbal y escrito de numeracion de enteros y las notaciones ya sabidas de los algoritmos elementales, *si llamamos B á la base de un sistema numerativo y a,b,c,d,e, etc, á las cifras respectivas de 1,° 2.° 3.° 4.° 5.° órden, etc, de un entero, la espresion algorítmica del valor de dicho entero será....*

$$a+B.b+B.^2c+B.^3d+B.^4e+......(1)$$

En efecto, el principio convencional de la numeracion escrita (21) y el que relaciona los valores de las unidades numerativas de diversos órdenes (17), nos dicen que el valor *relativo* de cada *cifra* de un *guarismo*, es igual á su valor absoluto, multiplicado por la unidad numerativa, cuyo *órden* sea igual al del lugar que ocupa dicha *cifra* en el *guarismo*; y como la unidad numerativa de 2.° órden es la *base* del *sistema*, la de 3.er órden es el cuadrado de la base ó el producto de la *base* por sí misma, puesto que consta de tantas unidades de 2.° órden como unidades de 1.° tenga la *base*, la unidad de 4.° órden es la 3.ª potencia de la base, puesto que consta de tantas unidades de 3.° como valga la base etc, resulta que el número entero cuyas cifras sean las susodichas y que por tanto, escrito segun los convenios del sistema usual sería *edcba* tendrá efectivamente a unidades de 1.er órden, $b\times B$ unidades de 2.° órden, $c\times B^2$ unidades de 3.er órden, $d\times B^3$ unidades de 4.° órden, $e\times B^4$ unidades de 5.° órden y así sucesivamente, ó lo que es lo mismo, tendrá por números elementales respectivos de 1,° 2,° 3,° 4,° 5,° órden, etc, los espresados por a, $B.b$, $B.^2c$, $B.^3d$, $B.^4e$, etc y como evidentemente todo entero compuesto es la suma de sus números elementales de diversos órdenes, de ahi que la fórmula (1) sea la del número entero en cuestion (*).

Escolio. Si suponemos que las cifras del sistema usual ó decuplo, conservan sus valores absolutos. es evidente que una potencia cualquiera de la *base*, en cualquier sistema, se espresará por 1 seguido de tantos ceros como unidades tenga el grado de la potencia ó como unidades mas una tenga el órden de la unidad equivalente á dicha potencia. Por ejemplo, en el sistema

duodecimal. .	10--doce,	100--ciento cuarenta y cuatro,	1000--mil setecientos veintioch
en el binario .	10--dos,	100--cuatro..	1000--ocho,
en el quinario.	10--ciento	100--veinticinco, ...	1000--ciento veinticinco,

88. Problema. *Dado un guarismo en un sistema numerativo determinado pasarle á otro sistema;* es decir hallar el guarismo que expresa el mismo entero en ese otro sistema.

La fórmula (1) del n.° anterior nos indica un modo general de resolver el problema, *siempre que se conozca la expresion de la base primitiva B y de las cifras a, b, c, d,... en el nuevo sistema*, pues *haciendo en él las elevaciones, multiplicaciones y adiciones que indica dicha fórmula*, tendremos el guarismo buscado. Otra resolucion de el mismo problema se deduce naturalmente de la teoría general de los sistemas numerativos regulares, pues, segun ella, las cifras de 1.° 2.° 3.° 4.° órden, etc no son sino los resíduos respectivos y el último cociente, de *dividir, en el sistema antiguo, el guarismo dado y los cocientes sucesivos por la base nueva*, lo cual exije conocer ésta expresada en el sistema antiguo.

Escolio. Generalmente se prefiere hacer las operaciones para el cambio de sistema en el de base mayor, porque la base del menor, expresada en aquél, tendrá una sola cifra; ó bien hacerlas en el sistema décuplo al que se está ya acostumbrado, para lo cual se tomará el paso á ese sistema como intermedio y auxiliar, si es que el

---

(*) Se llama fórmula, en Matemáticas, á la expresion general ó con *letras* (11) de un algoritmo ó de una relacion cuantitativa.

entero dado no se dá ó se pide en él. Así p. ej.° para pasar del sistema duodecimal al quinario el guarismo $d874$ lo pasaremos priméro al décuplo, aplicando la fórmula (1) del n.° anterior que en este caso nos dará $\underbrace{d874}_{\text{duodecimal.}}=$

$$\underbrace{4+7\cdot12+8\cdot12^2+d\cdot12^3=4+84+1152+17280=18520}_{\text{décuplos.}}$$

Para pasar ahora al sistema quinario dividiremos, en el décuplo, por 5 el número 18520 y los cocientes sucesivos de esa division y de las que vayan haciéndose; el último cociente será la primera cifra de la izquierda y los resíduos de esas divisiones, tomados en órden inverso al de su obtencion, serán las cifras sucesivas del guarismo buscado. Tendremos pues $18520=5\times3704+0$, $3704=5\times740+4$, $740=5\times148+0$, $148=5\times29+3$, $29=5\times6+4$, $5=5\times1+0$ luego el guarismo quinario equivalente al decimal 18520, y por consiguiente al duodecimal $d\,874$, es 1043040 como se puede comprobar volviendo al sistema décuplo por la aplicacion de la fórmula (1) que dá $\underbrace{1043040}_{\text{quinario.}}=$

$$\underbrace{4\cdot5+3\cdot5^3+4\cdot5^4+1\cdot5^6=20+375+2500+15625=18520}_{\text{décuplos.}}$$

89. Necesitándose en cada sistema tantas cifras, como unidades tiene la base, y siendo las operaciones con guarismos de una cifra el caso fundamental, las ventajas de cada sistema dependerán del número de sus cifras ó sea del de unidades de la base. Si ese número es grande, con pocas cifras se podrán expresar enteros tambien grandes, pero en cambio, habrá que saber de memoria más resultados de operaciones con guarismos de una cifra, para realizar las de los casos generales. Si por el contrario la base es pequeña, se necesitarán muchas cifras para expresar enteros algo grandes, pero la práctica de las operaciones será mas sencilla, por necesitarse saber menos resultados de memoria.

ART.° 2.° PROPIEDADES SUMATORIAS DE LOS ENTEROS.

90. Se llama *complemento aritmético* ó sólo *complemento* de un número la diferencia entre él y la unidad numerativa inmediata superior. Así el complemento de 8 es 2 porque $10-8=2$, el complemento de 34 es 66 porque $100-34=66$. De la teoría de la sustraccion se deduce que *para hallar el complemento de un entero dado, basta restar su* 1.ª *cifra de la derecha de* 10 *y todas las demas, una á una de* 9.

91. El complemento se usa en ciertos casos, para cambiar una sustraccion en adicion, pues, p. ej.° $452-301=452+(1000-301)-1000=452+699-1000=151$ y como la sustraccion que exije el hallar el complemento se hace mental y sencillamente por la regla antedicha, y la sustraccion de la unidad numerativa se hace al sumar el complemento con el número, resulta mas breve, en muchos casos, ese procedimiento para hallar la diferencia de dos enteros que su sustraccion directa. Pero sobre todo cuando es ventajoso el uso de los complementos es cuando hay que hacer varias adiciones y sustracciones sucesivas para obtener un solo resultado final pues entónces, cambiando por los complementos las sustracciones en adiciones queda reducido á éstas el hallar dicho resultado, salvo el quitar de la suma al mismo tiempo de hallarla tantas unidades numerativas como complementos se hayan sumado, segun expresa la siguiente regla general.

Para hallar el resultado de varias adiciones y sustracciones combinadas, se suman los sumandos ó minuendos con los complementos de los sustraendos, y de la suma se quitan tantas unidades numerativas, como sustraendos haya, cada una del órden inmediato superior al de la 1.ª *cifra de la izquierda del sustraendo respectivo.*

Como caso particular.....*para restar dos enteros se* *suma el minuendo con el complemento del sustraendo y se quita de la suma una unidad del órden superior al de la cifra de la izquierda del sustraendo.*

Si los datos de una adicion ó de una sustraccion son dos enteros del mismo número de cifras se pueden hallar los resultados mediante los siguientes

Teoremas. 1.° *La suma de dos enteros del mismo número de cifras es igual al esceso del número que forma el menor con la unidad á su izquierda sobre el complemento del mayor.* 2.° *La diferencia de dos enteros del mismo número de cifras es igual al esceso del complemento del mayor sobre el del menor.*

1.° Sean p. ej.° los enteros 3408 y 2157; será evidentemente $3408+2157=10000+2157-(10000-3408)=12157-(10000-3408)$. Lo mismo pudiera demostrarse para otros dos cualesquiera.

2.° $5824-3114=(10000-3114)-(10000-5824)$.

92. Las demostraciones acabadas de dar y otras varias proposiciones anteriores nos indican que hay necesidad en muchas ocasiones de hacer operaciones aritméticas con resultados aún no hallados, de otras operaciones meramente indicadas; nada tiene eso de estraño mientras dichas operaciones indicadas sean posibles de efectuar, mas si no lo son ¿dejaremos por eso de seguir las reglas adoptadas para los casos en que conocidamente lo son? No porque muchas veces las operaciones ulteriores destruyen, por ser contrarias, la imposibilidad de las primeras, consistiendo sólo en el órden de las operaciones sucesivas el hallar resultados absurdos aparéntemente.

Supongamos, p. ej.°, que se trata de restar 8 de 5, ó en general, un número mayor de otro menor, como de 5 sólo se puede restar 5 se supondrá restado, y quedará por restar 3; ¿que inconveniente hay, pues, en indicar esa sustraccion por el momento imposible pero que quizá se haga posible si el resultado ó resta $5-8$ se ha de combinar despues con otros números? Podremos así establecer con plena verdad que

$$5-8=5-5-3=0-3=-3$$

y someter el resultado—3 á operaciones ulteriores como *un número que ha de ser restado donde quiera que aparezca en una cuestion numérica y que se llama número negativo.* En contraposicion se llama *número positivo* al que no precedido del signo y sí del signo+, ó sin signo alguno se supone que ha de ser añadido ó sumado realmente en toda combinacion numérica. En resumen

El origen de todo número negativo es una sustraccion cuyo minuendo es cero ó menor que el sustraendo, su representacion se hará anteponiendo el signo—á la diferencia tal como puede hallarse es decir restando el minuendo del sustraendo y su significacion, en abstracto, *es que se reste su valor absoluto en las combinaciones numéricas en que aparezca dicho número.*

En cuanto á la interpretacion concreta de los números negativos, sólo puede tener lugar con las cantidades que pueden ser medidas ó contadas en dos opuestos sentidos, como el *tiempo*—hacia el pasado ó el futuro—, las *distancias*, los *grados de temperatura*—bajo y sobre cero—, el *capital*—que se tiene ó debe—etc.

En esos casos, la naturaleza de cada cuestion indicará en que sentido se han de contar los valores absolutos ó *positivos*, y sabido eso, los *negativos*, se contarán en el sentido opuesto, no por puro convenio, como suele decirse, sino por ley algorítmica ineludible que aclarará el siguiente

Problema. *Expresar la distancia y posicion de un punto movil* M, *respecto á otro fijo* O, *sabiéndo: que primero se movió la distancia positiva* OA *y despues la distancia* AM *en sentido contrario al de su primer movimiento.*

D ___________ *M* ___________ O ___________ *A* ___________ C

Es evidente que la distancia al punto *O*—origen del movimiento—será siempre igual á la diferencia entre las recorridas en los opuestos sentidos en que aquél puede efectuarse así como será la suma de las que se recorran en el mismo sentido, si en éste sólo se efectuó el movimiento.

En el caso propuesto, la posicion y la distancia del punto *M* respecto al *O* estará perfectamente expresada por $OA—AM$ y como $AM > OA$ la diferencia $OA—AM$ será negativa y del valor absoluto $AM—OA=OM$ que natural, ineludiblemente se ha de contar desde el orígen *O* en sentido contrario al positivo *O A C* y así podrá expresarse en todo rigor lógico por $OA—AM=—OM$. Lo mismo se podrá comprobar la interpretacion concreta de las cantidades negativas, reducidas ó no á números, para el tiempo, ú otra especie cualquiera de cantidad susceptible de ser contada ó medida en dos sentidos mútuamente opuestos ó contrarios; y en cuanto á las que no tengan esa cualidad, los valores negativos no tienen mas interpretacion en ellas, que la imposibilidad de la operacion que los origina y lo absurdo de la cuestion propuesta, en concreto, cuya resolucion necesite de dicha operacion; como p. ej.° sí se pregunta *¿cuántas personas quedarán en una casa en que hay* 20 *y salen* 30*?* Respuesta: $20—30=—10$, resultado absurdo, como la cuestion propuesta, pues las personas no pueden contarse negativamente, ni pueden irse más de las que hay en parte alguna.

93. Es evidente por la teoría del algoritmo sumatorio y por las consideraciones del número anterior que

1.° *La suma de varias sumas indicadas es equivalente á la suma de todos los sumandos primitivos* Por ej.° $(5+7+10)+(9+13+6)+(4+7+3)=5+7+10+9+13+6+4+7+3$.

2.° *La diferencia entre dos sumas indicadas se hallará restando de la suma-minuendo y de los restos sucesivos todos los sumandos de la suma—sustraendo, uno á uno;* ó bien, restando de cada sumando del minuendo otro del sustraendo, siempre que sea posible, y sumando todos los restos, y además los sumandos no disminuidos si los hubiere Por ejemplo $(5+8+14)—(3+9+20)=5+8+14—3—9—20=(5—3)+(8—9)+(14—20)$.

Escolio. Aunque alguna de las sustracciones no sea posible, se halla el resto negativo correspondiente y se continuan las operaciones, teniendo en cuenta que los números negativos cambian la adicion en sustraccion y viceversa.

3.° *La diferencia entre un entero cualquiera y la resta indicada de otros dos se hallará restando de aquel el minuendo y añadiendo al residuo el sustraendo de la resta indicada.*

Escolio. Puede siempre invertirse el órden de las operaciones sucesivas de adicion y sustraccion combinadas aun cuando haya restos negativos, una vez comprendida la significacion de esos números en toda combinacion sumatoria Ejemplo. $14-(20-12)=14-20+12=-6+12=12-6=6$.

94. Teorema. *La suma de la suma y de la resta de dos números es igual al doble del mayor.*

Pues si representamos por a el mayor y por b el menor será $(a+b)+(a-b)=a+b+a-b=a+a=a\times 2=2a$

Teorema. *La diferencia entre la suma y la resta de dos números es igual al doble del menor.*

Pues con la misma notacion del Teorema anterior, será $(a+b)-(a-b)=a+b-a+b=b+b=b\times 2=2b$,

ART. 3.° PROPIEDADES DE LOS ENTEROS RELATIVAS Á LA PRODUCCION.

LECCION 9.ª

DIVISIBILIDAD Y SU CARENCIA EN ENTEROS AISLADOS.

Divisibilidad en general y en los números; objeto de su teria aritmética (95). *Números compuestos y primos necesaria descomposicion factorial de aquellos en éstos y condicion general subsiguiente de divisibilidad de un entero por otro, corolario—Dicha descomposicion factorial es única para cada entero* (96). *Condiciones generales y paticulares de divisibilidad por un entero dado, de sumas, diferencias, productos y potencias* (97). *Caracteres usuales de divisibilidad de un entero cualquiera*

1.° *por la base numerativa por sus factores y por las potencias de uno y otros* (98); 2.° *por la base mas ó menos uno y por los factores de ambos números* (99); 3.° *por un entero cualquiera* (100), *Aplicacion de esos caracteres al sistema décuplo* (101). *Criterio distintivo de los números primos y compuestos* (102). *Infinidad de los números primos y formacion de una tabla de todos los menores que un límite dado, por el método de Eratóstenes* (103). *Modos general y usual de hallar todos los factores simples y compuestos de un entero, número de ellos y corolario segun ese n.° sea par ó impar* (104). *Igualdad de los números de factores mayores y menores que la raiz cuadrada de un entero cuadrado y de los productos de cada dos factores equidistantes, en lugar, de los estremos, colocados todos por órden de magnitud* (105).

95. *Divisibilidad* en general es la propiedad de ser *divisible* ó de poder ser dividido, partido, hecho partes cualesquiera un ser, mas por *divisibilidad en los números ó de los números es* sólo *la propiedad de ser divisibles exactamente unos por otros* (53). El número *dividendo*, de las divisiones exactas, es al que se dice *divisible por* ó *múltiplo de* (50) *el otro* llamado, á su vez, *divisor, factor, submúltiplo ó parte alícuota* de aquél.

Así....24 es *divisible por* ó *múltiplo de* 2, de 3, de 4, de 6, etc, y el 2, el 3, el 4, el 6, etc, son *factores, divisores, submúltiplos* ó *partes alícuotas* de el 24.

Pues bien, la *Teoría aritmética de la divisibilidad* tiene por objeto principal deducir las condiciones necesarias y suficientes de divisibilidad y relativas ya al dividendo ya al divisor; estudiando despues los números no divisibles, y la divisibilidad en comun de varios dividendos y por varios divisores.

96. Es evidente que todo entero es divisible por sí mismo y por 1, pudiendo, ó no, serlo por otro ú otros enteros; en el primer caso será número *compuesto*; y en el segundo, *número primo ó factor simple*.

Teorema. *Todo número compuesto es un producto de dos ó más números primos, iguales ó desiguales.*

Con efecto, llamándose número compuesto al entero divisible por otro, y siendo en toda division exacta, el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, resulta que todo entero compuesto es el producto de dos factores (iguales ó desiguales, porque si el divisor es la raiz cuadrada exacta del dividendo el cociente es igual al divisor) si alguno de esos factores no es primo, será, por igual razon, el producto de otros dos enteros, y así sucesivamente se irán descomponiendo los factores compuestos en otros mas pequeños, y como por una parte el número total de factores ha de ser finito, y por otra mientras haya un factor compuesto se podrá descomponer en el producto de dos factores, síguese que han de terminar esas sucesivas descomposiciones en un producto cuyos factores sean todos simples ó primos. Si, p. ej.°, consideramos el número 360, desde luego por la teoría de la numeracion podemos igualarle al producto 36×10; á su vez $36 = 2 ; 18 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ y $10 = 2 \cdot 5$ luego $360 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \times 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ producto cuyos factores son todos *primos*.

De ese teorema, y de la teoría de la division se deduce el siguiente que encierra la condicion mas general de divisibilidad de un entero por otro.

Teorema. *Para que un entero sea divisible por otro es necesario y suficiente que descompuestos ambos, en factores simples, el dividendo tenga todos los del divisor —iguales y desiguales—*. Es necesario, porque habiendo de ser el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, claro es que ha de contener todos los factores simples de esos dos números. P. ej.° siendo $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, un múltiplo cualquiera de 20, $20 \times n$ será $20 \times n = 2 \cdot 2 \cdot 5 \times n$.

Es suficiente, porque entónces se podrá descomponer el dividendo en *dos factores* uno el producto de todos los factores del divisor, es decir, *el divisor*, *y* otro *el producto* de los demás factores que tenga el dividendo y no el divisor, y es claro que este producto será el cociente exacto del dividendo por el divisor. P. ej.° siendo, como hemos visto ha poco, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, 360 será divisible por cualquiera de los números que resulten de multiplicar esos seis factores, dos á dos, tres á tres, cuatro á cuatro, ó cinco á cinco; siendo el cociente de cada una de esas divisiones el producto de los factores—de esos 6—que no entren á componer el divisor.

Así $\frac{360}{2 \cdot 2} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, $\frac{360}{2 \cdot 2 \cdot 5} = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $\frac{360}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = 3 \cdot 3$, etc.

Corolario. *La descomposicion en factores simples es única para cada entero.*

Porque si un mismo entero admitiese dos descomposiciones diferentes en factores simples, ó lo que es lo mismo, si pudiesen ser iguales dos productos de factores primos distintos—todos ó sólo algunos—debería ser divisible cada uno de esos productos por todos los factores del otro, contra lo que acabamos de demostrar.

Pues, p. ej.° si representando por a, b, c, d, m, todos los factores primos distintos que resultasen de dos descomposiciones diferentes de un número entero N se verificase la igualdad

$$N = a\,a\,b\,c\,c\,c\,d = a\,a\,a\,b\,c\,d\,d\,m$$

N ó su igual $a\,a\,b\,c\,c\,c\,d$ seria divisible por m y por $d\,d$, y $a\,a\,a\,b\,c\,d\,d\,m$ sería divisible por $c\,c\,c$ todo lo cual contradice el teorema inmediato anterior.

97. Siendo todo número entero la suma de los valores relativos de las cifras que le expresan en cada sistema numerativo, y el valor relativo de cada cifra igual á su valor absoluto multiplicado por la potencia correspondiente de la base de numeracion, se sigue que, para deducir las condiciones ó carácteres de divisibilidad por un divisor dado será preciso estudiar priméro dichas condiciones en sumas, productos y potencias. Estas condiciones se expresan en las siguientes *proposiciones fundamentales de la divisibilidad.*

1.ª Teorema. *La condicion general necesaria y suficiente para que una suma sea divisible por un entero dado, es que lo sea la suma de los resíduos de dividir separadamente todos los sumandos por dicho entero.*

Pues, segun se demostró (54), el resíduo de la division de una suma por un entero es el mismo que el de la division de la suma de los resíduos de los sumandos divididos sucesivamente por dicho entero, luego si la suma de esos resíduos es divisible, tambien lo será la suma propuesta, y si la suma de esos resíduos no es divisible, tampoco lo será la suma dada, puesto que su division deja resíduo.

Corolarios. 1.° *Si todos los sumandos son divisibles por un divisor dado, la suma tambien lo será;* ó bien *si varios enteros son divisibles por otro, su suma lo será* y dará de cociente la suma de los cocientes etc. (54).

2.° *Si todos los sumandos menos uno son divisibles, la suma no lo será*, pues dejará de resíduo el de la division del sumando no divisible.

3.° *Si un entero es divisible por otro, lo será tambien por todos los factores de éste*; ó bien *si un número es factor de otro lo será de todo múltiplo de éste, y por tanto de toda potencia de él.* Porque un múltiplo es una suma de sumandos iguales y segun el corolario 1.°, todo factor de ese sumando repetido lo será de la suma, y una potencia es un múltiplo de factores iguales.

2.ª—Teorema. *La condicion general para que una diferencia sea divisible por un entero es que los resíduos de las divisiones de minuendo y sustraendo por dicho entero sean iguales.*

Pues siendo el resíduo de la division de una diferencia, la resta de los resíduos de minuendo y sustraendo, sólo siendo los dos resíduos iguales y por lo tanto su resta cero, será divisible dicha diferencia, ya que por ser cada resíduo menor que el divísor (como en toda division) con más razon será menor su resta ó diferencia.

Corolarios. 1.° *Si minuendo y sustraendo son divisibles por un entero la diferencia lo será*; ó bien *si dos números son divisibles por otro, su diferencia tambien lo será.*

Pues siendo cero cada resíduo de las dos divisiones parciales, tambien lo será la de la total—cero menos cero—.

2.° *Si uno de dos números es divisible, y el otro no, por un entero dado, no será divisible por éste la diferencia de aquellos.*

3.° *Si dos números son divisibles por otro, tambien lo será el resíduo de su division, si ésta fuese inexacta.*

Pues siendo el resíduo la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente entero, cuyo producto será divisible por todo factor del divisor, en virtud del corol.° 3.° del teorema anterior, tambien lo será dicho resíduo por el corolario 1.° inmediato anterior.

Esta proposicion suele tambien enunciarse así: *todo factor comun á dividendo y divisor de una division inexacta es factor del resíduo*; y tiene por recíproca, tambien verdadera, la siguiente: *todo factor comun al divisor y resíduo* (de una division inexacta) *es factor del dividendo.* Porque éste es la suma del resíduo y del producto del divisor por el cociente, cuyo producto tendrá todos los factores del divisor y por tanto dicha suma todos los de sus dos sumandos.

3.ª Escolio. *Siempre que un entero sea igual á la suma ó á la diferencia de otros dos, siendo uno de éstos divisible por un divisor dado, segun que el otro sea ó no divisible, el entero propuesto lo será ó no lo será, respectivamente.*

Esta proposicion es consecuencia de todas las de este número y principal fundamento inmediato de la mayoria de los siguientes

CARACTERES DE DIVISIBILIDAD POR ALGUNOS DIVISORES.

98. Teorema 1.° *Para que un entero sea divisible por una potencia cualquiera de la base del sistema numerativo en que está escrito, es necesario y suficiente que termine en tantos ceros como los que tenga el divisor, ó sea, como unidades tenga el grado de dicha potencia* (87 y 63—1.ª).

Teorema 2.° *Para que un entero sea divisible por una potencia cualquiera de cada factor de la base numerativa, es necesario y basta ó que termine en tantos* *ceros, ó que el número que expresan tantas cifras de la derecha, como unidades tenga el grado de la potencia, sea divisible por ella.*

Pues si termina en n ceros, p. ej.°, será divisible por 10^n (*), (T.ª anterior), y por tanto, por los factores de 10^n que serán las potencias sucesivas, hasta la de grado n inclusive, de los factores de 10 (72—1.° y 97—Cor.° 3.).

Si no termina en n ceros, será igual al número terminado en ellos, que componen las cifras á la izquierda de las n primeras, consideradas aquellas con sus valores relativos, *mas* el número que expresan dichas n cifras de la derecha; el primero de esos dos sumandos es divisible por las potencias, hasta la de grado n, de los factores de 10, segun acabamos de probar, luego segun que el 2.° sumando sea ó no divisible por esas potencias, el número propuesto lo será, ó no lo será, respectivamente (97—Escolio).

Corolario. *Para que un entero sea divisible por cada factor de la base numerativa, es necesario y basta que la* 1.ª *cifra de la derecha sea cero ó divisible por dicho factor.*

99. Téorema 1.° *Para que un entero sea divisible por la base menos uno, del sistema en que esté escrito, es necesario y basta que lo sea la suma de sus cifras.*

Para demostrar más facilmente este teorema, conviene probar ántes los dos siguientes

Lemas. 1.° *Toda unidad numerativa* (1 seguido de ceros) *es igual á un múltiplo de la base menos uno, mas uno.*

2.° *Todo número elemental* (una cifra seguida de ceros) *es igual á un múltiplo de la base menos uno, mas la cifra significativa de aquél.*

1.° Porque toda unidad numerativa vale *uno* más que el número compuesto sólo de la cifra que expresa la base menos *uno*, repetida esa cifra tantas veces como ceros tuviese dicha unidad—p. ej.° en el sistema usual,... $10000=9999+1$—. Ahora, es evidente, por las mismas reglas para dividir enteros, que todo número que conste de una sola cifra repetida es divisible por dicha ci-

(*) No se olvide que 10 expresa la base, en cualquier sistema numerativo.

fra, luego queda demostrado el lema 1.°

2.° Sea un número elemental cualquiera,—p. ej.°: 50000, será (*) $50000=10000 \cdot 5=(\dot{\overline{B-1}}+1) \cdot 5=\dot{\overline{B-1}}+5$ (l. q. s. q. d.)

Esto supuesto, sea un número entero cualquiera, representado en general (87) por $N=a+B \cdot b+B^2.c+B^3.d+B^4.e$. Segun el lema acabado de demostrar, tendremos las siguientes relaciones: $B \cdot b=\dot{\overline{B-1}}+b$, $B^2.c=\dot{\overline{B-1}}+c$, $B^3.d=\dot{\overline{B-1}}+d$, $B^4.e=\dot{\overline{B-1}}+e$, luego $N=a+\dot{\overline{B-1}}+b+\dot{\overline{B-1}}+c+\dot{\overline{B-1}}+d+\dot{\overline{B-1}}+e=\dot{\overline{B-1}}+(a+b+c+d+e)$.

Constando pues todo entero de dos partes, una *múltipla de* ó *divisible por* la base menos uno de su sistema numérativo escrito, y la otra la suma de sus cifras, segun que esta suma sea ó no divisible por la base menos uno, dicho entero lo será, ó no lo será, respectivamente (97—Esc.°)

Corolario. *Para que un entero sea divisible por cada factor de la base menos uno, es necesario y basta que la suma de sus cifras sea divisible por dicho factor.* (97—1.ª—Cor.° 3.°).

Teorema 2.° *Para que un entero sea divisible por la base mas uno, del sistema numerativo en que esté escrito, es necesario y suficiente que lo sea la diferencia entre la suma de las cifras de órden par y la suma de las cifras de órden impar, ó que sea cero dicha diferencia.*

Para demostrar este teorema antepondrémos los siguientes

Lemas. 1.° *Toda unidad numerativa de órden impar* (1 seguido de un número par de ceros, ó 1 solo) *es igual á un múltiplo de la base mas uno, mas uno; y toda unidad numerativa de órden par* (1 seguido de un número impar de ceros) *es igual á un múltiplo de la base mas uno, menos uno.*

2.° *Todo número elemental de órden impar* (una ci-

(*) Adoptamos la notacion de Leibnitz de expresar un múltiplo cualquiera de un número, con un punto encima de dicho número. Aquí es claro que B representa la base numerativa. Recuérdese ademas el corolario 3.° (97 Teorema 1.°)

fra sola ó seguida de un número par de ceros) *es igual á un múltiplo de la base mas uno, mas el valor absoluto de su cifra significativa; y todo número elemental de órden par* (una cifra seguida de un número impar de ceros) *es igual á un múltiplo de la base mas uno menos el valor absoluto de su cifra significativa.*

1.ª Toda unidad de órden impar es una potencia de grado par de la base numerativa (87) y por tanto ó es la 2.ª potencia ó una potencia de la 2.ª (72—3.°). Ahora bien $B^2-1=(B+1)\cdot(B-1)$, como se comprueba hacien do esa múltiplicacion indicada (40—1.ª, 41 y 43 Esc.ª), luego.

$B^2=(B+1)\ (B-1)+1=\dot{\overline{B+1}}+1$. Es decir que la 2.ª potencia de la base, ó sea la unidad numerativa de 3.er órden es igual á un múltiplo de la base mas uno, mas uno; luego cualquiera otra unidad numerativa de órden impar (que será una potencia de la 2.ª de la base, segun ya hemos dicho) será tambien igual á un múltiplo de la base mas uno, mas uno (97—Cor.° 3.°).

Ahora, toda unidad de órden par es una potencia de órden impar de la base, y por tanto, es igual al producto de la potencia inmediata anterior, de órden par, multiplicada por la misma base. P. ej.° $B^7=B^6.B$. Y como $B^6=\dot{\overline{B+1}}+1$ será $B^7=(\dot{\overline{B+1}}+1)\cdot B=\dot{\overline{B+1}}+B+1-1=$ $\dot{\overline{B+1}}-1$ (l. q. s. q. d).

2.° Sea un número elemental cualquiera, de órden impar, p. ej.° $B^4=e$. Como B^4 es, segun el lema anterior, múltiplo de $B+1$, *mas* 1, será

$B^4.\ e=(\dot{\overline{B+1}}+1).\ e=\dot{\overline{B+1}}+e$(40-1.ª y 97—1.ª Cor.° 3.°).

Sea por último un número elemental de órden par, p. ej°, (siendo h su cifra significativa)

$B^7.\ h=(\dot{\overline{B+1}}-1).\ h=\dot{\overline{B+1}}-h$ (*l. q. s. q. d*).

En virtud de estos dos lemas, es evidente que, siendo un entero cualquiera igual á la suma de los números elementales que representan los valores relativos de sus cifras, será igual tambien *á un múltiplo de la base menos uno, mas la suma de las cifras de orden impar y* *menos la suma de las cifras de órden par*, importando poco que esta última suma sea mayor que la de las cifras de órden impar, en virtud de los Escolios del n.º 93. Es decir que llamando I á la suma de las cifras de órden impar, P á la suma de las cifras de órden par, todo número entero $N=\dot{\overline{B+1}}+(I-P)$ ó $N=\dot{\overline{B+1}}-(P-I)$, y por tanto, cuando la diferencia $I-P$ ó $P-I$ sea cero ó divisible por $B+1$ el número N lo será, y en caso contrario no lo será el número (97—Escolio).

Corolario. *Para que un entero sea divisible por cada factor de la base mas uno, es necesario y basta que sea cero, ó bien, divisible por dicho factor, la diferencia entre la suma de las cifras de órden par y la de las cifras de órden impar* (97—1.ª *Cor.*º 3.º).

100. Para hallar el caracter de divisibilidad de un entero cualquiera por un divisor dado, no hay mas que hallar los residuos sucesivos de dividir, por dicho divisor, las unidades numerativas de diversos órdenes; como consecuencia, se conocerán en seguida, los residuos de la division por el mismo factor, de los números elementales de diversos órdenes del dividendo y así se podrá descomponer cada entero en un múltiplo del divisor considerado mas ó menos la suma de dichos residuos (segun sean por defecto ó por esceso) y segun que este último sumando ó sustraendo sea ó no divisible, el número dado lo será, ó no lo será, respectivamente. En la mayoria de los casos, fuera de los que ya hemos considerado especialmente, será preferible hacer la division para averiguar si es ó no divisible.

101. Aplicando la teoria general, espuesta en los 3 párrafos anteriores, al sistema usual ó décuplo de numeracion, resultarán los siguientes caracteres de divisibilidad en dicho sistema por los divisores considerados.

1.º *Para que un entero sea divisible por diez, ciento, mil. etc. es necesario y basta que termine (por la derecha) en uno, dos, tres ceros, etc, respectivamente* (98 1.º)

2.º *Para que un entero sea divisible por* 2, 4, 8 *etc.*

ó por 5, 25, 125, *etc. es necesario y basta ó que termine en uno, dos, tres ceros, etc. ó que el número que espresan la* 1.ª, *dos primeras, tres primeras cifras, etc. de la derecha, sea divisible por el divisor respectivo* (98—2.ª).

3.° *Para que un entero sea divisible por* 9, *ó por* 3, *es necesario y basta que lo sea la suma de sus cifras* (99—T.ª 1.° y su corolario).

4.° *Para que un entero sea divisible por* 11 *es necesario y suficiente que sea cero ó divisible por* 11 *la diferencia entre la suma de sus cifras de órden par y la suma de sus cifras de órden impar* (99—T.ª 2.°)

102. Con esos caracteres, y la condicion general (96) de divisibilidad de un entero por otro no primo, se puede, sin hacer las divisiones, examinar si un entero es ó no divisible por otros muchos y aplicar ese examen, á mas de las reglas de dividir, á la resolucion del siguiente

Problema. *Averiguar si un entero dado es primo ó no.* Segun el Teorema primero del n.° 96. un entero será primo si no es divisible por ningun otro primo; así pues, para resolver, en cada caso, el problema de que tratamos, examinarémos si el número dado es ó no divisible por los primos menores que él, y si no lo es (divisible) será primo. Mas no es preciso prolongar dicho examen á todos los primos menores que el número, pues evidentemente, como en toda division exacta el dividendo es divisible por el cociente, resulta que si empezando la resolucion del problema propuesto por los primos inferiores 2, 3, 5, 7, etc. *se llega, sin hallar cociente exacto á uno menor que el divisor* el número será primo, pues que los cocientes sucesivos serán cada vez menores y por tanto, ó serán primos y ya se habran ensayado, ó serán compuestos y tendrán factores primos mas pequeños aún y por lo tanto tambien ensayados.

Como evidentemente para que el cociente de un entero por otro sea menor que el divisor es necesario y basta que dicho divisor sea mayor que la raiz cuadrada del dividendo, podremos formular el siguiente criterio distintivo de todo número primo. *Un entero será primo si no es divisible por ningun primo menor que su raiz cuadrada.*

103. Teorema. *Hay infinitos números primos.*

Porque, sea P un número primo tan grande como *se quiera* suponer; es claro que si demostramos que hay otro aún mayor, quedará probado el teorema. Pues bien, el número $N=2.\ 3.\ 5.\ 7 \ldots.\ P+1$ (formado agregando 1 al producto de *todos* los números primos hasta P inclusive) será primo ó compuesto; si es primo, el Teorema está demostrado; si N no es primo será divisible por algun primo, y como no puede serlo por ninguno de los menores que P, ni por P mismo, puesto que de los dos sumandos de que consta N uno es divisible y el otro no por dichos primos, N será divisible por algun primo mayor que P, luego hay siempre un número primo mayor que P y por tanto son infinitos los números primos.

Para formar una tabla de números primos, hasta un limite dado, el metodo práctico mas breve y sencillo es el siguiente llamado de Erathostenes.

Se escriben, por su órden ascendente correlativo, todos los números impares, hasta el limite prefijado, y ademas el 2. Enseguida se borran ó tachan, á partir desde cada primo 3, 5, 7, etc, los números ya escritos que ocupen los lugares respectivos 3.° 5.° 7.° etc; contando como primer lugar el del número siguiente á cada primo, ó mejor, á su cuadrado, pues que el primer múltiplo de cada primo, que habrá necesidad de tachar será su cuadrado, ya que los múltiplos inferiores al cuadrado, se habrán ya tachado, como múltiplos de primos menores; y volviendo, por supuesto, á contar: primero, segundo. etc. despues de cada nuevo número tachado. Los números que resten sin tachar, cuando *el cuadrado* del primo, cuyos múltiplos se intente empezar á tachar, *sea ya mayor* que el limite de la tabla, son todos primos, en virtud de la regla criterio (102) y de que evidentemente los números tachados son los múltiplos sucesivos inferiores á dicho limite, de los primos cuyos cuadrados son tambien inferiores á él.

Hay tablas de números primos hasta el limite 3036000; la siguiente contiene todos los *primos menores que* 2000.

TABLA DE LOS NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE 2000.

1	163	383	619	881	1151	1439	1699
2	167	389	631	883	1153	1447	1709
3	173	397	641	887	1163	1451	1721
5	179	401	643	907	1171	1453	1723
7	181	409	647	911	1181	1459	1733
11	191	419	653	919	1187	1471	1741
13	193	421	659	929	1193	1481	1747
17	197	431	661	937	1201	1483	1753
19	199	433	673	941	1213	1487	1759
23	211	439	677	947	1217	1489	1777
29	223	443	683	953	1223	1493	1783
31	227	449	691	967	1229	1499	1787
37	229	457	701	971	1231	1511	1789
41	233	461	709	977	1237	1523	1801
43	239	463	719	983	1249	1531	1811
47	241	467	727	991	1259	1543	1823
53	251	479	733	997	1277	1549	1831
59	257	487	739	1009	1279	1553	1847
61	263	491	743	1013	1283	1559	1861
67	269	499	751	1019	1289	1567	1867
71	271	503	757	1621	1291	1571	1871
73	277	509	761	1031	1297	1579	1873
79	281	521	769	1033	1301	1583	1877
83	283	523	773	1039	1303	1597	1879
89	293	541	787	1049	1307	1601	1889
97	307	547	797	1051	1319	1607	1901
101	311	557	809	1061	1321	1609	1907
103	313	563	811	1063	1327	1613	1913
107	317	569	821	1069	1361	1619	1931
109	331	571	823	1087	1367	1621	1933
113	337	577	827	1091	1373	1627	1949
127	347	587	829	1093	1381	1637	1951
131	349	593	839	1097	1399	1657	1973
137	353	599	853	1103	1409	1663	1979
139	359	601	857	1109	1423	1667	1987
149	367	607	859	1117	1427	1669	1993
151	373	613	863	1123	1429	1693	1997
157	379	617	877	1129	1433	1697	1999

104. Sabiendo ya los principales caracteres de divisibilidad, y el criterio distintivo de los números primos y compuestos, y teniendo una tabla de números primos, podremos resolver más facilmente el siguiente

Problema. *Hallar todos los divisores de un entero dado.*

De los teoremas (96) se deduce inmediatamente: que *para hallar todos los divisores de un número, se deberá, priméro, hallar todos sus factores primos, iguales y desiguales, y los productos binarios, ternarios, etc. es decir dos á dos, tres á tres, etc, de dichos factores primos, serán todos los factores ó divisores del número propuesto.* P. ej.° los divisores compuestos del número $360=1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$, cuyos factores primos hallamos (96), son los siguientes:

$2\cdot2=4$, $2\cdot3=6$, $2\cdot5=10$, $3\cdot3=9$, $3\cdot5=15$, (Productos binarios.)

$2\cdot2\cdot2=8$, $2\cdot2\cdot3=12$, $2\cdot2\cdot5=20$, $2\cdot3\cdot3=18$, $2\cdot3\cdot5=30$, $3\cdot3\cdot5=45$,(Productos ternarios.)

$2\cdot2\cdot2\cdot3=24$, $2\cdot2\cdot2\cdot5=40$, $2\cdot2\cdot3\cdot3=36$, $2\cdot2\cdot3\cdot5=60$, $2\cdot3\cdot3\cdot5=90$, (Productos cuaternarios.)

$2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3=72$, $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5=120$, $2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5=180$, (Prd.s Qui.s)

$2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5=360$.

Esta es la solucion general del problema, que se facilita por el siguiente método usual ó práctico. Sea p. ej.° el n.° 3960; se empieza escribiéndole á la izquierda de una raya, como se ve al márgen, y á la derecha, y en la misma linea, *su menor divisor primo*—áquí el 2—dividiéndole por él, escribiendo el cociente debajo del dividendo, y operando en seguida con dicho cociente y con los sucesivos, como con el número dado, hasta obtener el cociente 1.

3960	2
1980	2,4,
990	2,8,
495	3,6,12,24,
165	3,9,18,36,72,
55	5,10,15,20,40,30,60,120,45,90,180,360.
11	11 { 22,33,55,44,88,66,132,264.99,198,396,792,110,165
1	220,440,330,660,1320,2640,495,990,1980,3960.

Así se obtienen todos los factores primos ó simples del número dado, por su órden ascendente de magnitud ó de valor, pudiendo formularse el procedimiento indicado, en la siguiente

Regla para descomponer un entero en sus factores simples.=*Se divide dicho entero y cada cociente, de los sucesivos, por su menor factor simple distinto de* 1, *hasta llegar al cociente* 1.

Una vez asi formados en columna *todos* los factores primos de un entero, para hallar sus factores compuestos *se multiplica cada factor primo, y los productos que vayan resultando por cada primo de linea inferior, escribiendo todos los productos, respectivamente, en dicha linea inferior de uno de sus dos factores*, como en el cuadro anterior.

Ese es el procedimiento más sencillo y ménos espuesto á omisiones ó repeticiones, pero teniendo el inconveniente de la mala ó poco simétrica disposicion gráfica en que resultan los factores, se suele enunciar otro que es el siguiente: *Se escriben en una linea la unidad, y las potencias sucesivas del primer factor simple, y se multiplican esos números, y los productos que vayan resultando, que se colocan respectivamente debajo de aquellos, por las potencias* (*) *de los demas factores primos, una á una.*

P. ej.° para el número, ya descompuesto ántes, 360, resultaria el siguiente cuadro, que puede servir de modelo para todos los casos análogos.

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
5	10	20	40
15	30	60	120
45	90	180	360

De la condicion general (96) se deduce: que por cualquiera de los dos procedimientos acabados de indicar se hallan todos los factores simples y compuestos de un entero dado; y que *su número* es el que expresa el siguiente

Teorema. *El número total de factores distintos de un entero* (*inclusos él mismo y* 1) *es el producto de los números que resultan añadiendo* 1 *á cada esponente de to-*

(*) Inclusive la primera ó el mismo factor.

dos los factores primos distintos, de dicho entero.

En efecto, si suponemos un entero cualquiera p. ej. $N=a^m b^n c^r d^s$ cuyos factores primos distintos sean a, b, c, d, entrando el 1.° m veces, el 2.° n veces, el 3.° r veces, y el 4.° s veces en el producto N; tendremos, siguiendo el procedimieto ultimamente indicado, una primera fila de $m+1$ factores, formada por la unidad y las m potencias sucesivas del primer factor primo a; los productos de cada uno de esos por las n potencias del factor b constituirán, evidentemente, un número $(m+1)\times n$ de nuevos factores, y con ellos habrá ya $m+1+(m+1)n=(m+1)(n+1)$ factores; éstos multiplicados sucesivamente por las r potencias del factor c formarán $(m+1)(n+1)r$ factores nuevos y entre todos los dependientes de a, b, c, y el 1 serán $(m+1)(n+1)+(m+1)(n+1)r=(m+1)(n+1)(r+1)$ Por último, éstos multiplicados, uno á uno, por las s potencias del factor d darán $(m+1)(n+1)(r+1)s$ productos, factores nuevos del número dado N, el cual tendrá por tanto $(m+1)(n+1)(r+1)+(m+1)(n+1)(r+1)\times s=(m+1)(n+1)(r+1)(s+1)$ factores distintos, número de factores enunciado en el Teorema.

Corolario. *Si el número total de factores de un entero es impar, dicho entero será cuadrado de otro, ó tendrá raiz cuadrada exacta, y no la tendrá si su número de factores es par.*

Pues si el producto (Ej.° anterior) $(m+1)(n+1)(r+1)(s+1)$ es impar, todos sus factores $m+1$, $n+1$, $r+1$, $s+1$, serán impares porque si alguno de ellos fuese par, el producto lo sería (97-1.ª-Cor.° 3.°) luego los esponentes m, n, r, s, de los factores primos respectivos a, b, c, d, son todos pares y por tanto el número N tiene raiz cuadrada exacta (84).

Si, por el contrario, el producto $(m+1)(n+1)(r+1)(s+1)$ fuese par, alguno de sus factores tambien lo será —pues si todos fuesen impares, el producto sería impar, como se ve por la fórmula siguiente de dos factores impares, facilmente generalizable á más de dos: $(2t+1)(2u+1)=2t\cdot 2u+2t+2u+1=2(2tu+t+u)+1$,— y por tanto, alguno de los esponentes m, n, r, s, será impar, luego el número N no es cuadrado de otro entero (72—3.°).

Recíprocamente: 1.° *Si un entero es cuadrado de otro,* *ó tiene raiz cuadrada exacta, su número de factores distintos será impar; y 2.° si un entero no tiene raiz cuadrada exacta su número de factores distintos será par.*

Estas proposiciones recíprocas (IIV) como todas las análogas, ó en cuyas directas se hayan hecho todas las hipótesis posibles sobre el mismo sujeto y las conclusiones hayan sido diferentes, son verdaderas, y se demuestran *ad absurdum* (IX) como se vé á continuacion.

1.° Porqué, si el número de factores no es impar, será par y entónces, segun la 1.ª parte de la proposicion directa, el entero, cúyos son esos factores no será cuadrado de otro, cuando lo es, segun la hipótesis actual.

2.° Porqué si el número de factores no fuese par será impar y por tanto el número propuesto tendrá raiz cuadrada exacta, cuando no la tiene, por hipótesis.

Tambien se pueden demostrar *á priori*, estas dos proposiciones del modo siguiente:

A cada factor de un entero corresponde otro factor, porque todo producto consta de dos factores, por lo menos, ó porque si un número es divisible por otro, tambien lo es por el cociente correlativo; luego si un entero no es cuadrado de otro, todos sus *pares de factores-correlativos* constan de dos *factores distintos* y el número de *estos* es por lo tanto par. Pero si el número es cuadrado, el factor correlativo á su raiz cuadrada es ella misma y por tanto el número de factores *distintos* es impar.

105. Tenga ó no raiz cuadrada exacta un entero cualquiera, es evidente que *el número de factores mayores que dicha raiz es igual al número de factores menores que la misma,* puesto que á cada uno de *aquellos* corresponde uno de estos.

Además, es tambien visible que *si se suponen escritos, por órden ascendente ó descendente de sus magnitudes, todos los factores de un entero, el producto de cada dos equidistantes, en lugar, de los estremos,*—el número dado y 1—*será constante é igual al número dado.*

Leccion 10.

DIVISIBILIDAD Y SU FALTA PARA DOS Ó MÁS ENTEROS.

Definiciones y notaciones abreviadas de máximo comun divisor y mínimo comun múltiplo; definiciones de números primos entre sí, ó primos relativos y de primos relativos dos á dos (106). *Corolarios de las definiciones anteriores* (107). *Investigacion del m. c. d. de varios enteros: 1.° para todos á la vez, prévia su descomposicion en factores primos* (108); *2.° para cada dos, por divisiones sucesivas, prévias las proposiciones fundamentales convenientes* (109). *Posible abreviacion del método de las divisiones sucesivas, en algunos casos, y escolios sobre él* (110). *Máximo comun divisor de tres ó mas enteros mediante el de dos; proposiciones fundamentales, reglas, y escolios sobre éstas* (111). *Alteraciones del m. c. d. de varios enteros, si éstos se multiplican, ó dividen exactamente por otro, aplicacion y corolarios* (112). *Propiedad de todo divisor de un producto de dos factores y primo con uno de ellos; corolarios y escolio* (113). *Propiedad de todo primo divisor de un producto de dos ó mas enteros; corolarios* (114). *Propiedad de todo entero divisible, separadamente, por otros primos dos á dos* (115). *Investigacion del m. c. m. de varios enteros: 1.° para todos simultaneamente por su descomposicion en factores simples* (116); *2.° para cada dos, prévias las proposiciones convenientes* (117). *Alteraciones del m. c. m. de varios enteros, si éstos las sufren todos por multiplicacion ó division exacta* (118). *Cocientes por varios números de su m. c. m.* (119).

106. Estudiada en la leccion anterior la divisibilidad, y su falta ó carencia, para enteros aislados, toca ahora el estudio de esa propiedad en comun, ya sea respecto al dividendo ya respecto al divisor, pues es evidente que varios enteros pueden tener uno ó mas factores comunes, y tambien pueden no tener factor comun alguno, así co-

mo, que siempre tendrán infinidad de multiplos comunes.

Entre éstos habrá, siempre tambien, uno menor que los demas—*mínimo comun múltiplo*—y entre los factores comunes, cuando existan, habrá uno mayor que los otros —*máximo comun divisor*—; y es claro que por su singularidad—aparte de su utilidad, que á su tiempo verémos—, merecen estudio especial el máximo comun divisor y el mínimo comun múltiplo, como tambien lo merecen los números que no tienen factores comunes, ó *primos entre sí*.

Aunque su nombre es su mejor definicion, repetirémos que *máximo comun divisor de dos ó más números es el mayor de todos los divisores comunes á esos números;* su notacion abreviada se hace con las tres iniciales de su nombre *m. c. d.*

Mínimo comun múltiplo de varios números es el menor de los infinitos múltiplos comunes de dichos números, y se representa abreviadamente por sus iniciales *m. c. m.*

Números primos relativos, ó primos entre sí son dos ó mas números que no tienen mas factor comun á todos que la unidad (que lo es á todos los enteros). *Y números primos relativos dos á dos, ó primos entre sí dos á dos, ó primos dos á dos, son tres ó más números que no tienen factor alguno comun á dos cualesquiera de ellos.*

107. De las definiciones anteriores se deducen los siguientes

Corolarios. 1.° *El m. c. d. de varios números no puede ser mayor que el menor de ellos, y será éste si divide á los otros.*

2.° *Si varios números sólo tienen un factor comun, distinto de el* 1, *ese factor es el m. c. d. de esos números.*

3.° *Si varios números son primos relativos, su m. c. d. es* 1 *y recíprocamente.*

4.° *El m. c. m. de varios números no puede ser menor que el mayor de ellos, y será éste si es múltiplo de los otros.*

5.° *Tres ó mas números primos dos á dos son primos entre sí.*

6.° *Varios números primos son primos dos á dos y,* *por consiguiente, primos entre sí todos* (si son 3 ó mas).

7.° *Si un número primo no es factor de ninguno de otros enteros, todos esos números, el primo inclusive, son primos relativos.*

8.° *Dos enteros consecutivos son primos entre sí.* Pues si tuviesen algun factor comun, éste lo sería de su diferencia (97—2.°—Cor.° 1.°), la cual en el caso presente no tiene factor alguno, puesto que es la unidad. Generalizando este razonamiento á todos los casos análogos, podríamos formular la siguiente proposicion de la que es un caso particular el Cor.° 8.°

Dos números son primos relativos, si su suma ó su diferencia ó las de dos múltiplos de ellos es un número primo no factor de dichos dos números.

Es claro que las recíprocas, tanto de esta proposicion general, como del último corolario no son verdaderas.

Investigacion del m. c. d. de dos ó mas enteros.

108. Segun la definicion del *m. c. d.* de varios enteros, y en virtud de la condicion general de divisibilidad de un entero por otro (96), es evidente que *el m. c. d. de cualesquiera enteros es el producto de todos los factores primos—iguales y desiguales—comunes á dichos enteros;* pues *ese producto* es divisor de cada uno de los enteros dados y todo otro número, ó tendrá algun factor menos de los que *aquél* contiene, y será menor que él, por consiguiente; ó tendrá algun otro factor y no será, por tanto, divisor del número de los propuestos que no contenga á dicho factor. P. ej.°: sean los números $360=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$, $220=2\cdot2\cdot5\cdot11$, $2500=2\cdot2\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$, $1800=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5$; su m. c. d. es $2\cdot2\cdot5=20$, puesto que este número es divisor comun de los cuatro propuestos, y cualquier otro número ó ha de tener algun nuevo factor, además de esos tres, ó sin ellos, en cuyo caso no dividirá á aquél de los 4 dados, que no contenga ese factor nuevo, ó ha de tener alguno menos de los tres factores 2, 2, 5, en cuyo caso, si bien será factor comun de los 4 propuestos no será, su m. c. d.

Como el producto de los factores primos iguales ó repetidos es la potencia correspondiente del factor repetido, resulta justificado el siguiente usual enunciado del procedimiento que venimos esponiendo:

Para hallar el m. c. d. de varios enteros, se les descompone en sus factores simples, y el producto de las potencias de menor grado (de las que figuren en dichas descomposiciones), de los distintos factores primos comunes á todos los números dados, es el m. c. d. buscado.

Este método, aunque breve y sencillo, si los números propuestos *no son muy grandes,* se hace muy pesado cuando, *por serlo,* tienen muchos factores primos y de éstos algunos por los cuales no se conoce facilmente si hay ó no divisibilidad. En esos casos es preferible el otro método, llamado *de las divisiones sucesivas,*—porque hay que hacerlas para averiguar el *m. c. d.* de *dos* enteros por ese método,—habiendo de combinarlos de dos en dos para hallar el de *más,* como se verá á continuacion.

109. El método de las divisiones sucesivas tiene por fundamento inmediato las siguientes proposiciones:

1.ª—Teorema. *El m. c. d. de dos enteros es el mismo que el de el menor de ellos y el residuo de su division si le hay.* (*)

Pues, segun el Cor.° 3.° (97-2.ª), todo factor comun de dos números es tambien factor del resíduo de su division, si le hay; luego *todos los factores comunes* á dividendo y divisor, son tambien *factores comunes* á divisor y residuo, y por tanto el *m. c. d.* ha de ser necesariamente el mismo para dividendo y divisor que para divisor y residuo.

2.ª—Teorema. *El m. c. d. de dos números es el mismo que para cualquiera de ellos y su diferencia*

Pues, siendo todo factor comun á dos números, factor de su diferencia, ésta y cada uno de ellos tienen los mismos factores comunes que aquéllos; luego tambien el *m. c. d.* de dos números será el mismo que el de uno de ellos y la diferencia de ambos.

En la 1.ª de estas dos proposiciones se funda el procedimiento mas usado para hallar el *m. c. d.* de dos enteros y formulado en la siguiente regla:

(*) Claro es que si su division no deja residuo, el menor de los dos será el m. c. d. de ambos (107--Corolario 1.°)

Se divide el mayor por el menor, éste por el residuo, y así sucesivamente, se sigue dividiendo cada divisor anterior por el residuo respectivo, hasta llegar al residuo cero;—como se llegará indudablemente, pues siendo cada residuo menor que su divisor, éste va disminuyendo en las divisiones sucesivas, luego llegará á ser 1, si ántes no se llega á cociente exacto, ó residuo cero, y por 1 todo entero es divisible—; *el último divisor, ó el correspondiente al residuo cero, es el m. c. d. buscado.*

Pues, si se suponen escritos por su órden correlativo todos los dividendos y divisores sucesivos, resulta, segun la 1.ª proposicion, que el m. c. d. de los dos primeros (los números dados) es el mismo que el del 2.º y 3.º y por consiguiente que el del 3.º y 4.º y que....el de los dos últimos; ahora, siendo el último divisor m. c. d. de sí y del anterior, lo será tambien de los dos números dados.

La operacion se suele disponer como se ve á continuacion:

(Cocientes)=3		2	4	1	3	5	2
43446	12584	5694	1196	910	286	52	26=m. c. d.
5694	1196	910	286	52	26	0	(residuos.)

110. La 2.ª proposicion permite abreviar, en algunos casos, el procedimiento acabado de esponer, pues siempre que un residuo r sea mayor que la mitad del divisor respectivo d, como es claro que si, aplicando la regla dada, se toma en seguida r por divisor y d por dividendo, el cociente será 1 y el residuo d-r, se puede economizar esa division tomando, desde luego, por divisor d-r para el mismo dividendo d; pues en virtud de dicha 2.ª proposicion el m. c d. de r y d es el mismo que el de d-r y d y por tanto, no se altera, por esa variacion, el fundamento esencial del método de las divisiones sucesivas, que es evidentemente sustituir el par de números dados por otro par cuyo m. c. d. sea el mismo que el de aquél, y así sucesivamente hasta llegar á un último par en que el mayor número sea divisible por el menor y éste, por tanto, el m. c. d. buscado.

Lo mismo se consigue haciendo las divisiones por esceso, cuando el cociente por defecto fuere 1— que es el mismo caso considerado ántes—pues la proposicion 1.ª y el Cor.° (97-2.ª-3.°) en que se funda no exigen evidentemente que la division esté hecha por defecto, segun se confirma por las igualdades $D=d\cdot q+r$, $D=d(q+1)-(d-r)$; en que D representa el dividendo, d el divisor, q el cociente entero por defecto, r el resíduo *defectivo* correspondiente; y por tanto $q+1$ el cociente por exceso y $d-r$ el resíduo respectivo ó *complementario*.

En el método de las divisiones sucesivas para hallar el m. c. d. de dos enteros, conviene tener muy presentes los siguientes

Escolios.=1.° *Si se sabe el m. c. d. de cualquier resíduo y de su divisor respectivo, aquél será el buscado, y se acabará allí la operacion.*

Como caso particular

—2.° *Si un residuo cualquiera es primo con su divisor correspondiente, tambien los números dados serán primos relativos,* ó tendrán 1 por m. c. d. Esto se conocerá, p. ej.°, entre otros casos, si un residuo es primo y no divide á su divisor respectivo (107—Cor. 7.°).

111. El hallar el m. c. d. de tres ó mas enteros mediante el de dos se funda en las siguientes proposiciones:

1.ª—Teorema. *El m. c. d. de varios enteros es múltiplo de los otros divisores comunes de aquellos;* ó bien: *todo factor comun de varios números es factor de su m. c. d.*

2.ª—Teorema. Recíprocamente: *todo factor del m. c. d. de varios números es factor comun de todos ellos.*

3.ª—Teorema. *El m. c. d. de tres ó más números es el mismo que el del m. c. d. de dos cualesquiera de ellos y todos los otros.*

Las demostraciones mas sencillas de estos teoremas son las que se fundan en la composicion del m. c. d. de varios enteros, con los factores primos de ellos, ó sea, en el primer método espuesto para hallar el m. c. d. de enteros cualesquiera, pues debiendo contener el m. c. d. *todos los factores primos comunes* (108) á los números dados, y debiendo constar todo factor compuesto y comun á dichos números, únicamente de factores simples de los comunes á los mismos (96—Teor.ª 2.°) es evidente la verdad de las proposiciones 1.ª y 2ª últimamente dichas, de las cuales viene á ser un corolario la 3.ª pues es claro que teniendo el m. c. d. de *dos números* (*) por factores, todos los que tengan comunes esos dos números, y recíprocamente, *los mismos divisores comunes* tendrán todos los enteros dados que el m. c. d. de dos de ellos y todos los otros, luego el *m. c. d. de todos, será tambien el mismo que el del m. c. d. de dos cualesquiera de ellos, y todos los otros*, (l. q. s. q. d.).

He aquí, sin embargo para las 2—1.as proposiciones otras demostraciones *particulares* fundadas en el segundo método expuesto para la investigacion del m. c. d. *de dos enteros.*

1.ª Siendo todo factor comun de dos números, factor del resíduo de su division y siendo el m. c. d. el último resíduo de las divisiones sucesivas para hallar aquél, todos los factores comunes á los dos números serán tambien factores de dichos resíduos sucesivos, y por tanto del último que es el m. c. d.

2.ª Todo factor del último resíduo lo será del resíduo anterior, múltiplo de aquél (97—1.ª—3.°) y siéndolo del divisor y resíduo de esa última division, lo será del dividendo respectivo, y así retrocediendo, se ve que todo factor del último resíduo—m. c. d.—lo es tambien de los dos números dados.

En virtud de lo anterior es evidente que *se hallará el m. c. d. de tres ó mas enteros, hallando primero el de dos de ellos, despues el de ese m. c. d. hallado y el tercer número de los dados, y así sucesivamente hasta que se halle el m. c. d. del último número y el m. c. d. inmediato anterior;* ó bien: hallando el m. c. d. de dos de los números dados, aparte el de otros dos, y así sucesivamente, combinando luégo esos máximos comunes divisores entre sí y con el último número, si que-

(*) Siendo verdaderas las proposiciones 1. y 2. para cualesquiera enteros, con mas razon lo serán para dos.

dó alguno de non; etc.

P. ej.°: el m. c. d. de 416, 624, 962 y 975 es 13, pues el de 416 y 624 es 208; el de 208 y 962 es 26; y el de 26 y 975 es 13; ó bien: por que el de 416 y 624 es 208; el de 962 y 975 es 13; y por último el de 208 y 13 es 13.

Escolios.—1.° Si alguno de los números fuese múltiplo de otro se debe prescindir de aquél y operar con los demás, pues, empezando por esos dos, el menor será el m. c. d. de ambos.

—2.° Si dos de los números dados son primos relativos, ó alguno de los máximos comunes divisores auxiliares lo es con alguno de aquellos, éstos son tambien primos relativos, y la investigacion de su m. c. d. es inutil, omitiéndose en el 1.° de esos dos casos, y terminándose en el 2.°, al saberlos.

3.° Por último, es facil demostrar, fundándose en cualquiera de los métodos ántes expuestos, la verdad del siguiente:

Se divide cada número de los dados por el menor de ellos; se hace lo mismo con los resíduos de esas divisiones y con el divisor anterior, y así sucesivamente hasta que no quede resíduo; el último divisor es el m. c. d. buscado.

Propiedades principales relativas al m. c. d.

112.—Teorema. *Si varios enteros se multiplican por otro, ó se dividen por un divisor comun á todos, su m. c. d. quedará multiplicado ó dividido, respectivamente, por ese mismo factor ó divisor.*

Pues, al multiplicar ó dividir *por un entero cualquiera* otros varios, se les multiplica ó divide por los factores simples de que conste *aquél;* es decir, se les añade ó quita, como factores, todos los primos del nuevo multiplicador ó divisor comun, luego el *m. c. d.* quedará tambien con esos mismos factores de mas ó de menos, es decir, multiplicado ó dividido respectivamente por el producto de ellos (l. q. s. q. d.).

Esta propiedad puede *aplicarse* á simplificar la investigacion del m. c. d. por divisiones sucesivas, pues si desde el principio se reconoce algun factor comun en todos los números dados, se les dividirá por él, se hallará el *m. c. d.* de los cocientes—números mas pequeños—y *multiplicándole* por el factor suprimido, se tendrá el *m. c. d.* de los números propuestos. Tambien puede aplicarse á hallar el m. c. d. de varios números *equimúltiplos* (*) de otros por un número dado, hallando el de éstos, y multiplicándole por dicho número dado.

Corolario. *Los cocientes de varios números por su m. c. d. son primos entre sí, y recíprocamente.*

Pues, al dividir varios números por su m. c. d., éste quedará dividido por sí mismo, es decir: que el m. c. d. de los cocientes es 1 ó lo que es lo mismo son primos relativos esos cocientes. Análogamente se demostrará el recíproco=*Si los cocientes de dividir varios números por otro son primos entre sí, ese otro será el m. c. d. de aquéllos.*

113. Teorema. *Si un entero es divisor de un producto de dos factores y es primo con uno de ellos será divisor del otro.*

Sea p. ej.° el número entero D divisor del producto $A\ B$ y primo con A, D será divisor de B.

Siendo D y A primos relativos, su *m. c. d.* es 1, luego el de los productos DB y AB será B (112) y como D es factor comun, evidentemente, de AB y DB, será factor de su *m. c. d.* B (111—1.ª), (l. q. s. q. d.).

Corolario. 1.° *Si un entero es divisor de un producto cualquiera, y es primo con cada uno de los factores de aquél, menos con uno de ellos, será divisor de ese factor único.*

Sea el producto $ABCD$ y D un divisor suyo, primo con A, con B, y con C; D será divisor de E. Pues, considerando ese producto como de dos factores $A{\cdot}BCE$, D será divisor de BCE, puesto que es primo con A; por análoga razon ó por ser primo con B, en el producto $B{\cdot}CE$, será divisor de CE y por último de E por ser primo con C y divisor de CE. (l. q. s. q. d.).

Corolario 2.° *Si un número es primo con cada uno de los factores de un producto, no es divisor de ese producto.*

(*) Múltiplos por un mismo número.

Pues si fuera divisor del producto sería divisor de alguno de sus factores, por ser primo con cada uno de los demás.

Escolio. Este teorema y sus corolarios completan, digamoslo así, las condiciones de divisibilidad de un producto, pues si bien *es suficieute* para ella la de uno cualquiera de los factores (97—1.°—3.°), *no es necesario que algun factor sea divisible*, para que lo sea el producto, á menos que el divisor considerado y todos los factores menos uno, del producto, sean primos relativos dos á dos, segun el corolario 1.°

114. Teorema. *Todo número primo divisor de un producto es divisor, por lo menos, de uno de los factores de ese producto.*

Este teorema es consecuencia inmediata del Corolario 2.° anterior y del 7.° (107).

En efecto, si *P*—número primo—no dividiera á factor alguno del producto *ABCD*, segun el Cor.° 7.° (107), P sería primo con *A*, con *B*, con *C* y con *D*, y por tanto no dividiria al producto *ABCD*, segun el Cor.° 2.° inmediato anterior. Queda pues demostrado *ad adsurdum* el teorema propuesto.

Corolarios.—1.° *Si un número primo no es divisor de factor alguno de un producto, tampoco lo es del producto.*

—2.° *Si un número primo es divisor de un producto de factores primos, aquél será uno de éstos* (96-Cor.°).

—3.° *Todo número primo divisor de una potencia (de raiz y grado enteros) lo es necesariamente de la raiz correlativa.*

—4.° *Las potencias de números primos entre sí lo son tambien; por consiguente, lo son siempre las potencias de primos absolutos.*

—5.° *Si cada uno de los factores de un producto es primo con cada uno de los de otro, los dos productos serán primos relativos.*

6.° *Todo número primo con cada uno de los factores de un producto es primo con el producto y recíprocamente.*

115. Teorema. *Si un número es divisible por cada*

uno de otros dos primos relativos, será divisible por su producto.

Sea el número N divisible por a y por b—primos relativos—será $N=aQ$, p. ej.°, llamando q al cociente de $N:a$, como b divide á $N=aQ$ y es primo con el factor a dividirá al factor Q (113), llamando pues q al cociente $Q:b$ será $Q=bq$ y sustituyendo en la igualdad $N=aQ$, resulta $N=abq$, luego N es divisible por el producto ab y da de cociente q.

Corolario. *Todo número divisible por cada uno de otros varios primos dos á dos, es divisible por su producto.*

Pues, desde luego, será divisible por el producto de dos de ellos, y como este producto es primo con otro cualquiera de aquellos (Cor.° 6.°), el número dado será divisible por el producto de esos tres y así sucesivamente.

Este Corolario generaliza la condicion de divisibilidad (96), y permite hallar si un número es ó no divisible por otro *compuesto,* sin necesidad de descomponer este en sus factores primos absolutos, descomponíendole sí, en factores primos relativos (dos ó mas) dos á dos, por cada uno de los cuales se puede hallar la condicion de divisibilidad del número propuesto. Asi, p. ej.°, para que un entero sea divisible por $45=5.9$ es necesario y suficiente que siendo 0 ó 5 la cifra de las unidades, la suma de todas las cifras sea múltipla de 9 (101—2.° y 3.°).

Investigacion del mínimo comun múltiplo.

116—1.er *método.* El mismo teorema (96) que ha servido de base á la investigacion del m. c. d. por el 1.er método (108) sirve tambien para análoga resolucion del problema que ahora nos ocupa, pues evidentemente: *El m. c. m. de varios enteros es el producto de las mayores potencias* (que figuren en la composicion de aquellos) *de todos los factores primos de dichos enteros.*

P. ej.° el *m. c. m.* de los cuatro números 360, 220, 2500 y 1800, (108), es $2.^3\ 3.^2\ 5.^4\ 11=8{\cdot}9{\cdot}625{\cdot}11=495000.$ pues, desde luego, este número es *múltiplo de* ó *divisible por los* 4 dados, ningun número al cual falte *alguno* de esos factores primos, será divisible por el entero de aquéllos cuatro en cuya composicion entre la mayor potencia de ese factor que falta, y todos los que, además de esos factores, tengan algun otro, serán naturalmente mayores que 495000; luego éste es el m. c. m. de los cuatro números dados.

117.—2.° *método.* Para hallar el *m. c. m.* de varios enteros, sin descomponerlos en sus factores simples, hay que hallarlo para cada dos, fundándose en las proposiciones siguientes:

1.°—Teorema *Todo múltiplo comun de dos números es producto de tres factores, á saber: uno de los dos números, el cociente del otro por el m. c, d. de ambos y un entero, que puede ser el* 1.

Sea M un múltiplo comun de dos enteros A, y B, D. el *m. c. d.* de estos dos números, N y Q los cocientes respectivos de M por A y B, n y q los de A y B por D respectivamente; tendremos, desde luego, las siguientes igualdades:

(1)$M=\left\{\begin{matrix} A\,N \\ B\,Q \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} A=Dn \\ B=Dq \end{matrix}\right\}$; por consiguiente $M=\left\{\begin{matrix} DnN \\ DqQ \end{matrix}\right\}$ luego

$DnN=DqQ$, ó $nN=qQ$ de donde $nN:q=Q$ y $qQ:n=N$ es decir, que el producto nN es divisible por q, y como q es primo con n (112-Cor.°), será divisor de N (113-Teor.ª); por igual razon n será divisor de Q—por ser primo con q— luego llamando r y s á los cocientes respectivos de $N:q$ y de $Q:n$, será $N=qr$, $Q=ns$, y sustituyendo en las primeras igualdades (1), resulta

$M=\left\{\begin{matrix} A\,q\,r \\ B\,n\,s \end{matrix}\right\}$ lo que demuestra el teorema.

2.°—Teorema. *El m. c. m. de dos enteros equivale al producto de cada uno de ellos por el cociente del otro entre el m. c. d. de ambos.*

Pues siendo evidentemente invariables, (en las últimas igualdades) para todos los múltiplos de A y B, los factores A, B, q, n, resultará únicamente el *m. m. c.* cuando r ó s sean mínimos, es decir 1 que es el mínimo entero; queda pues reducida la espresion del *m. m. c.* de A y B á Aq ó Bn, (l. q. s. q. d.).

Como evidentemente $AB=ADq=BDn$, (multiplicando en cruz las 2.^{as} igualdades (1)), dividiendo por D será $AB:D=Aq=Bn=m.\ c.\ m.$ Es decir que tambien el *m. c. m. de dos enteros es igual al cociente de su producto por su m. c. d.*

Pcr último, de $A=Dn$, $B=Dq$ se deduce

$$m.\ c.\ m=\left\{\begin{matrix}Aq=Dnq\\ Bn=Dqn\end{matrix}\right\},$$ luego tambien:

El m. c. m. de dos números es el producto de su m. c. d. por los cocientes de dividir aquéllos por éste.

Resumiendo: *para hallar el m. c. m. de dos enteros se hallará su m. c. d., se dividirá por éste uno de aquellos, y el cociente se multiplicará por el otro*, pues éste es evidentemente el procedimiento práctico mas breve y sencillo de los tres últimamente indicados.

De cualquiera de los dos métodos espuestos para hallar el *m. c. m. de dos enteros*, resultan los siguientes corolarios.

Corolario 1.° *El m. c. m. de dos números primos relativos, ó en general, de varios números primos dos á dos, es su producto.* Pues, atendiendo al primer método, es claro que no teniendo cada número de los dados, factor comun alguno con otro de ellos, el *m. c. m.* contendrá *todos los factores primos* de los números dados, cada uno de esos factores con la única potencia que entra en la composicion de aquéllos, es decir, que será el producto de los números propuestos su *m. c. m.*

Como se ve, esta demostracion es general, para cualquier número de enteros; para dos solos, resulta tambien, como consecuencia del 2.° método, que siendo A y B primos relativos, su *m. c. d.* $D=1$, luego $A:D=n=A$, $B:D=q=B$, y por tanto

$$m.\ c.\ m.\ c=\left\{\begin{matrix}Aq=AB\\ Bn=AB\end{matrix}\right\},$$ (l. q. s. q. d.).

Ejemplo. El m. c. m. de 360 y 220 es 3960 porque su m. c. d. es 20, $360:20=18$, $220:20=11$, $360\times11=210\times18=(360\times220):20=20\times18\times11=3960$.

Corolario 2.° *El producto de dos números es igual* *al de su m. c. d. por su m. c. m.*

Porque (1.^{er} método), siendo el *m. c. d.* de dos enteros el producto de las menores potencias de los *factores primos comunes* de aquellos, y el *m. c. m.* el producto de las mayores potencias de *todos los factores primos* de los mismos enteros, es claro que el producto del *m. c. d.* por el *m. c. m.* contendrá todos los factores primos, de los dos números dados, con la mayor y con la menor potencia los factores comunes, y con la única los no comunes; dicho *m. m. c.* es pues el producto de *todos* los factores simples iguales y desiguales de que constan los dos números dados ó es el producto de éstos.

Lo mismo se demuestra, atendiendo al 2.° método de investigacion del m. c. m. pues es evidente (2.ª) que

$$\left.\begin{array}{l} Aq\times D=ADq=AB \\ Bn\times D=BDn=AB \end{array}\right\} \text{(l. q. s. q. d.).}$$

Corolario. 3.ª *Todo múltiplo comun de dos números es múltiplo del m. c. m. de dichos números.*

Esto resulta inmediatamente de los dos teoremas de este n.°, pues si, segun el 1.° (1.ª), todo múltiplo de A y B es el producto de los tres factores Aqr ó Bns (I), y, segun el 2.° (2.ª), Aq ó Bn es el *m. c. m.*, claro es que los demas múltiplos resultarán dando en cualquiera de las espresiones (I) á r ó á s, respectivamente, los valores sucesivos 2, 3, 4, 5, etc. de los diversos enteros, es decir que, llamando M al *m. c. m.*, todos los otros múltiplos comunes de A y B serán $2M$, $3M$, $4M$, $5M$, etc. (l. q. s. q. d.)

Esto supuesto, la determinacion del m. c. m. de tres ó más números, sin descomponerlos en sus factores simples, tiene por fundamento inmediato la siguiente proposicon.

3.ª Teorema. *El m. c. m. de tres ó más números es el mismo que el del m. c. m. de dos cualesquiera de ellos y de todos los otros.* Pues, segun el último Cor.°, todos los múltiplos comunes de dos números son múltiplos de su m. c. m., luego *los mismos múltiplos comunes* tendrán *tres ó mas números dados* que *el m. c. m. de dos de ellos y todos los demás,* luego el m. c. m. de aquéllos será el mismo que el de éstos (l. q. s. q. d.).

En virtud de este Teorema, es claro que: para hallar el *m. c, m* de mas de dos enteros, se podrá: *hallar el m. c. m. de dos de ellos, en seguida el m, c. m. de ése acabado de hallar y otro de los números dados, y así sucesivamente, hasta hallar el m. c. m.—que será el buscado—del último de los números propuestos y del m. c. m. inmediato anterior;* ó bien: hallar el m. c. m. de dos de los números dados, aparte el de otros dos, ó de uno de los 2—1.os y un 3.°, y así hasta que se hayan combinado á pares todos los números propuestos; hallando en seguida el m. c. m de los mínimos múltiplos comunes de aquellos pares, ese será el buscado.

118. Teorema. *Si se multiplica cada uno de varios enteros por otro, ó se divide por un factor comun á todos, su m. c. m. quedará multiplicado, ó dividido, respectivamente, por aquél otro.* Pues todos los factores primos cuyo producto sea el multiplicador ó divisor comun considerado, habrán de entrar de más ó de ménos en el mínimo múltiplo de los productos ó cocientes respectivos, con los que ya constituyeran el *m. c. m.* de los números dados; luego es claro que éste queda así multiplicado ó dividido respectivamente por todos aquellos factores primos, es decir por su producto (l. q. s. q. d.)

Escolio. Como el Teorema análogo relativo al m. c. d., el anterior permitirá, en algunos casos, simplificar la investigacion del m. c. m. pues si se conocen y suprimen facilmente factores comunes *á varios números dados*, y se halla el m. c. m. de los cocientes respectivos números mas pequeños—multiplicando ese m. c. m. por los factores suprimidos se tendrá el de los *números dados.*

Inversamente: si se conoce el *m. c. m.* de varios números, se tendrá el de otros equímultiplos de aquellos por un *entero dado*, multiplicando aquél por este.

Ejemplos. El m. c. m. de 360, 220, 2500 y 1800 es 495000 porque el de 360 y 220 es 3960; el de 3960 y 2500 es 495000 y el de este y 1800 es el mismo 495000; ó bien, porque el m. c. m. de 360 y 220 es 3960, el de 2500 y 1800 es 45000 y por último el de 45000 y 3960 es 495000.

Escolios.—1.° *Si alguno de los números dados es divisor de otro, se prescindirá de aquél,* pues, si se empieza á aplicar la regla anterior por esos dos, es claro que el mayor será el m. c. m. de ambos (107—4.°).

3.° *Si algunos de los números dados son primos absolutos ó sólo primos dos á dos, y con cada uno de los demás, se halla su producto y éste se multiplica por el m. c. m. de los demás.* Pues dicho producto es el m. c. m. de los primeros (117—Cor.° 1.°) y es primo con el m. c. m. de los segundos (puesto que éste solo ha de constar de factores primos distintos á los de aquél) y por tanto el producto de esos dos mínimos múltiplos es el buscado.

119. *Si se divide por cada uno de varios números su m. c. m. los cocientes son primos relativos.*

Pues, sean p. ej.° los cuatro números A, B, C, D y su $m.\ c.\ m. = M$,

hagamos $M:A=a$, $M:B=b$, $M:C=c$, $M:D=d$;

ó.......(I) $M=Aa$, $M=Bb$, $M=Cc$, $M=Dd$;

si a, b, c, d, no fuesen primos entre sí, tendrían algun factor comun m—p. ej.°—y haciendo

$$a:m=a', \ b:m=b', \ c:m=c', \ d:m=d'$$

de donde...$a=m\,a'$, $b=m\,b'$, $c=m\,c'$, $d=m\,d'$

y sustituyendo estas espresiones de a, b, c, d, en las ig.^s (I)

resulta............$M=Ama'$, $M=Bmb'$, $M=Cmc'$, $M=Dmd'$

ó, dividiendo por m,

$$M:m=Aa', M:m=Bb', M:m=Cc', Mm=Dd'$$

luego $M:m$ es múltiplo comun de los cuatro números A, B, C, D y como evidentemente $M:m < M$, no es M el m. m. c. de esos cuatro números, contra la hipótesis, luego no pueden tener a, b, c, d factor comun alguno, ó han de ser necesariamente primos entre sí.

Demás de esta demostracion *ad absurdum* se puede tambien dar otras dos directas y generales fundadas en cada uno de los dos métodos de investigacion del m. c. m. ántes expuestos.

120. Para terminar el estudio elemental de las propiedades relativas al 2.° algoritmo, y facilitar el estudio de las del 3.°, creemos conveniente demostrar el siguiente

Teorema. *Todo cociente completo de una division ine-*

xacta equivale al número fraccionario (6) *cuyo numerador* (*) *sea el dividendo y su denominador el divisor de dicho cociente.*

Porque, todo *cociente* es un número que multiplicado por el divisor produce el dividendo, y todo *quebrado* una suma de partes iguales de unidad; éste quedará pues multiplicado por un entero cualquiera (40—1.°) si se hace cada parte de unidad de las que consta, tantas veces mayor como unidades tenga dicho entero, y se *suman* esos *productos* parciales; luego si se hace á cada parte tantas veces mayor como partes integran la unidad, cada *parte* nueva será igual al *todo* ó unidad primitiva, y la *suma-producto* antedicha constará de tantas unidades como tenga el numerador, ó sea como partes de unidad tenía el número fraccionario supuesto. Esto se expresa abreviada y exactamente diciendo: *el producto de un quebrado por su denominador es igual al numerador,* y demuestra el teorema enunciado, ó sea las equivalencias respectivas de los términos *cociente y quebrado, dividendo y numerador, divisor y denominador.*

Corolario. *Una vez hallado el cociente entero de una division inexacta se hallará el cociente completo, añadiendo al cociente entero un quebrado cuyo numerador sea el resíduo y su denominador el divisor.*

Pues ésto no es mas que poner en forma de *número mixto el quebrado* á que se refiere el teorema anterior (6).

Leccion 11.

PROPIEDADES RELATÍVAS AL 3.er ALGORITMO Y CUESTÍONES VARIAS SOBRE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Inconmensurabilidad de las raices exactas no enteras de los enteros: Cor.s 1.° *desigual aproximacion á la raiz verdadera de las dos raices enteras por defecto y por esceso,* 2.° *límite del error de la mas aproximada de las dos*

(*) Numerador de un quebrado es el número de partes de unidad de que consta aquél y denominador el número de partes de aquellas que constituyen la unidad.

(121). *Modo de conocer cuál es la mas aproximada á la raiz verdadera, de las dos raices enteras cuadradas ó cúbicas, de un entero* (122). *Principales caracteres de inconmensurabilidad de las raices cuadrada y cúbica, sin extraerlas* (123). *Método abreviado para extraer las raices cuadrada y cúbica de los enteros* (124).

ART.º 4.º PROPIEDADES DE LOS ENTEROS RELATIVAS A LA GRADUACION.

121. Teorema. *Toda raiz de un entero, que no sea exactamente otro entero es inconmensurable* (6).

Bastará demostrar que no puede ser un *quebrado*, ya que todo número ha de ser necesariamente, ó *entero* ó *quebrado ó inconmensurable*, y la raiz en cuestion no es entera, segun la hipótesis.

En efecto, segun el Cor.º 4.º (114) si dos enteros son primos relativos, dos potencias cualesquiera de los mismos lo son tambien; si pues, un *quebrado ó cociente* cualquiera (120) p. ej.º $a:b$ pudiese ser la raiz de grado n de un entero E, es decir, $\sqrt[n]{E}=a:b$, será, segun la definicion de raiz, $(a:b)^n=E$, ó lo que es lo mismo (72—2.º), $a^n:b^n=E$. Ahora, si a y b son *primos relativos* tambien lo serán a^n y b^n; por tanto, el cociente $a^n:b^n$ *no puede ser un entero*, y como un cociente no varía, aun cuando se dividan sus dos términos por factores comunes á ambos, tampoco $a^n:b^n$ podrá ser un número entero aun cuando $a:b$ no sean primos relativos ni por consecuencia lo sean a^n y b^n. Es decir que *ninguna potencia de un quebrado puede ser un entero* ó sea que *ninguna raiz de un entero puede ser un quebrado*. (l. q. s. q. d.)

Corolarios.—1.º *Los dos enteros consecutivos entre los cuales está indudablemente comprendida toda raiz inconmensurable, se aproximan desigualmente á dicha raiz.*

Pues el *único número* igualmente aproximado á dos enteros consecutivos cualesquiera es, evidentemente, el menor mas media unidad, éste no es la raiz, puesto que es un número fraccionario y la raiz es inconmensurable; luego es verdadero el Cor.° 1.° y además es claro que: —2.° *El más aproximado de los dos enteros que comprenden á una raiz se diferencia de ella ménos de media unidad.*

El entero inmediato menor que una raiz suele llamarse *raiz entera por defecto*, ó sólo *raiz entera* (75); y el entero inmediato mayor se llama *raiz entera por exceso*, del número-potencia propuesto.

122. Teorema. *Si el resíduo de la raiz cuadrada* (75) *de un entero no es mayor que la raiz entera por defecto, ésta es la más aproximada; y lo es la por exceso, si el residuo es mayor que la raiz por defecto.*

Sea r la raiz cuadrada por defecto de un entero n, $r+1$ será la raiz por esceso correlativa; y es claro que será r mas aproximada que $r+1$ á la raiz verdadera ó exacta, si ésta es menor que $r+\frac{1}{2}$ y será $r+1$ más aproximada que r, si la raiz exacta es mayor que $r+\frac{1}{2}$.

Ahora bien (42—1.°):

$$\left(r+\tfrac{1}{2}\right)^2=\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\left(r+\tfrac{1}{2}\right)=rr+\tfrac{1}{2}r+\tfrac{1}{2}r+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}=r^2+r+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}$$

Como $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ no llega á valer 1 (39—1.°), ni siquiera $\frac{1}{2}$, es evidente que mientras el residuo—que es entero—no llegue á valer $r+1$, la raiz verdadera no será mayor que $r+\frac{1}{2}$; pero si el residuo vale $r+1$ ó más, la raiz exacta será mayor que $r+\frac{1}{2}$ lo que demuestra el Teorema.

Análogamente, ó formando por multiplicacion el cubo de $r+\frac{1}{2}$, se demostraría que

La raiz cúbica entera por defecto es la más aproximada á la raiz cubica exacta de un entero, si el residuo no es mayor que la mitad del triplo del cuadrado de aquella —r—mas la cuarta parte del triplo de la misma; y si el residuo es mayor que esa suma, será la más aproximada la raiz por exceso.

133. Se puede conocer *á priori*, en muchos casos, si un entero tiene su raiz cuadrada ó cúbica inconmensurable. Los principales de esos casos, ó los principales *caracteres de inconmensurabilidad de los enteros* son los siguientes:

1.° *Todo entero cuya cifra de las unidades* (*) *sea* 2, 3, 7 *ú* 8 *tiene su raiz cuadrada inconmensurable.* Pues siendo la cifra de 1.er orden de un producto, la análoga del producto de las cifras de 1.er órden de los factores, y no terminando en 2, 3, 7 ni 8, ninguno de los cuadrados de los 9—1.os números, es claro que ningun cuadrado de un entero podrá terminar en alguna de esas cifras; y por tanto, el entero que termine en alguna de ellas no tendrá por raiz cuadrada exacta otro entero, ó lo que es lo mismo la tendrá inconménsurable (121).

—2.° *Todo entero divisible por un número primo y no por su cuadrado, tiene su raiz cuadrada inconmensurable.* Pues segun el Cor.° (73) y el Teorema (96) cada factor primo de un entero entra en el cuadrado de ese entero, con doble esponente del que tuviere en la raiz, luego el entero que no tenga todos los esponentes de sus factores primos, múltiplos de dos, es decir elevados por lo menos á la 2.ª potencia todos sus factores primos distintos, no es cuadrado de otro entero, ó tiene su raíz cuadrada inconmensurable; (l. q. s. q. d.).

Como casos particulares: *son inconmensurables* las raices cuadradas de los enteros..............................
.........*pares y no divisibles por* 4 (101-2.°);
........*divisibles por* 5 *y no por* 25 (101—2.°);
........*cuyas cifras sumadas den un múltiplo de* 3 *y no de* 9 (101—3.°)

Escolio. No se olvide que estos caracteres sólo son de inconmensurabilidad ó negativos, es decir que no por verificarse lo contrario de lo que cada uno supone será conmensurable la raiz correspondiente, que en ese caso podrá serlo ó no serlo. P. ej.° bastando para que un número sea divisible por 25 que termine en 25, 50 ó 75,

(*) Estos caracteres se refieren sólo al sistema númerativo décuplo.

puede asegurarse que

3.° *Todo entero cuya cifra de las unidades sea* 5 *tendrá su raiz cuadrada inconmensurable, si la de las decenas no es* 2.

Pues no terminando en 5 mas cuadrado de los 9—1.os que $25=5^2$, se sigue que la raiz cuadrada de un entero cuadrado que termine en 5, terminará tambien en 5, luego dicha raíz valdrá, llamando d á la cifra de sus decenas, $10d+5$ y como $(10d+5)^2=100 \cdot d^2+100d+25$ (70—1.ª), y ese número evidentemente termina en 25, queda demostrado ese 3.er caracter de inconmensurabilidad.

El 1.° de los caractéres espuestos no tiene su análogo para la raiz cúbica porque los 10 primeros cubos terminan respectivamente en las 10 primeras cifras distintas.

El 2.° como derivado del Cor.° (73) tiene para la raiz cúbica el análogo siguiente:

4.° *Todo entero divisible por un número primo, y no por su cubo, no será cubo de otro entero, ó tendrá su raiz cúbica inconmensurable.*

Pues todo entero cubo de otro tiene los facteres primos de éste elevados á potencias de grados respectivamente triplos, y por tanto es divisible por los cubos de todos sus factores primos distintos (73).

Por último el caracter mas general y á la vez necesario y suficiente para afirmar ó negar la inconmensurabilidad de una raiz de grado dado de un entero tambien dado es la que resulta del Cor.° (73).

5.° *Para que un entero terminado en ceros tenga raiz exacta de grado n, es necesario y no suficiente que el número de sus ceros terminales sea múltiplo de n;* pues sinó no será divisible por 10^n (101—1.°), ó lo que es lo mismo alguno de los factores 2 ó 5 no tendrá su esponente múltiplo de n; mas aunque el número de ceros terminales sea múltiplo de n no se puede afirmar que el entero correspondiente tendrá raiz exacta de grado n pues aquello sólo significa que el número es divisible por 5^n y por 2^n, mas es preciso ademas que todos sus otros factores simples cumplan con la condicion que marca el caracter (73).

Como casos particulares:

1.º—*Ningun entero terminado en número impar de ceros tendrá raiz cuadrada conmensurable.*

2.º—*Ningun entero terminado en un número de ceros no divisible por 3 tendrá raiz cúbica conmensurable.*

124. La extraccion de una raiz cuadrada ó cúbica por los metodos espuestos en la leccion 7.ª es indudablemente la operacion aritmética más complicada y prolija pero puede abreviarse algo, en virtud del siguiente

Teorema. *Conociendo ya la mitad mas una de las cifras que ha de tener una raiz cuadrada ó cúbica*—si tiene un número par de cifras—, *ó la mitad del número de cifras mas* 1—si ha de téner un número impar de cifras—, *se hallarán de una vez todas las cifras restantes, dividiendo el resto* (*) *correspondiente, por el duplo de la parte hallada—, para la raiz cuadrada—; y por el triplo del cuadrado de la parte hallada—para la cúbica—.*

1.º Suponiendo que una raiz cuadrada entera consta de un número par $2n$ de cifras y llamando a al número que espresan las $n+1$ cifras primeras, consideradas solas, y x al que espresan las $n-1$ cifras restantes, la fórmula de la raiz entera en cuestion será $a\cdot 10^{n-1}+x$. Ahora bien (69-1.º y 72).
$(a\cdot 10^{n-1}+x)^2=a^2\cdot 10^{2n-2}+2ax\cdot 10^{n-1}+x^2$, y como se resta el cuadrado $a^2\cdot 10^{2n-2}$ el resto es evidentemente $2ax\cdot 10^{n-1}+x^2$, luego el cociente de ese resto por $2a\cdot 10^{n-1}$ será (54-1.ª y 57), $x+x^2:(2a\cdot 10^{n-1})$. Pero (18) $x<10^{n-1}$ y $a=ó>10^n$; luego (**) el valor máximo del cociente $x^2:(2a\cdot 10^{n-1})<10^{2n-2}:(2\cdot 10^{2n-1})=1:20$ por consiguiente x *es toda la parte entera* del cociente $x+x^2:(2a\cdot 10^{n-1})$ ó lo que es lo mismo ese cociente entero es todo lo que falta á la raiz entera buscada. Si esta hubiese de tener un numero impar $2n+1$ de cifras, a tendria $n+1$, y x n; la raiz estaría espre-

---

(*) Ese resto no es el que se obtendría por los métodos dichos (78) (82) sino el que resulte restando de todo el número dado, el cuadrado ó cubo, respectivamente, de la parte hallada de raiz cuadrada ó cúbica, y considerada aquella con su valor relativo.

(**) El valor máximo de un cociente, cuyos datos pueden variar, es claro que corresponde al valor máximo del dividendo y al mínimo del divisor (58-1.º).

sada por $a\cdot 10^n+x$, su cuadrado por $(a\cdot 10^n+x)^2=a^2\cdot 10^{2n}+2ax\cdot 10^n+x^2$, el resto por $2ax\cdot 10^n+x^2$ y el cociente completo de ese resto por $2a\cdot 10^n$ sería $x+x^2:(2a\cdot 10^n)$ cuyo valor máximo aún sería menor que $10^{2n}:(2\cdot 10^{2n})=\frac{1}{2}$, luego tambien en este caso x es toda la parte entera del cociente, etc. (l. q. s, q. d.).

—2.ª Con las mismas notaciones, tendremos, para la raiz cúbica, si su número de cifras es par—$2n$—, $(a\cdot 10^{n-1}+x)^3=a^3\cdot 10^{3n-3}+3a^2x\cdot 10^{2n-2}+3ax^2\cdot 10^{n-1}+x^3$; el resto $3a^2x\cdot 10^{2n-2}+3ax^2\cdot 10^{n-1}+x^3$ y el cociente de dividir ese resto por $3a^2\cdot 10^{2n-2}$ será $x+x^2:(a\cdot 10^{n-1})+x^3:(3a^2\cdot 10^{2n-2})$.

Ahora, el mínimo de a es 10^n y el máximo de x, $10^{n-1}-1$ luego el máximo de la suma de cocientes $x^2:(a10^{n-1})+x^3:(3a^2.10^{2n-2})$ es, por tanto, menor que $10^{2n-2}:10^{2n-1}+10^{3n-3}:(3\cdot 10^{4n-2})=1:10+1:(3\cdot 10^{n-1})<1$; por consiguiente el cociente entero del resto por $3a^2.10^{n-1}$ *es* x —parte que falta de la raiz entera buscada—.

Por último si a tiene $n+1$ cifras y x n,—la raiz $2n+1$,—se tendrá $(a\cdot 10^n+x)^3=a^3\cdot 10^{3n}+3a^2x\cdot 10^{2n}+3ax^2\cdot 10^n+x^3$, el resto será $3a^2x\cdot 10^{2n}+3ax^2 10^n+x^3$, y su cociente por $3a^2\cdot 10^{2n} x+x^2:(a\cdot 10^n)+x^3:(3a^2\cdot 10^{2n})$. El valor máximo de la suma de los dos últimos sumandos es evidentemente $(10^n-1)^2:10^{2n}+(10^n-1)^3:(3\cdot 10^{4n})$,

Ahora $(10^n-1)^2=(10^n-1)(10^n-1)<(10^n-1)10^n=10^{2n}-10^n$ y $(10^n-1)^3<10^{3n}$ luego dicho valor máximo es menor que
$10^{2n}:10^{2n}-10^n:10^{2n}+10^{3n}:(3\cdot 10^{4n})=1-1:10^n+1:(3\cdot 10^n)$ y como $1:10^n:<1:(3\cdot 10^n)$ será toda la suma anterior menor que 1 y por tanto x toda la parte entera del cociente en cuestion (l. q. s. q. d.).

CAPÍTULO FINAL--CUESTIONES SOBRE LOS NÚMEROS ENTEROS.

Llamando B á la base de un sistima de numeracion y n á un entero cualquiera:

1.ª Demostrar que hay en dicho sistema $(B-1\times B^{n-1}$ enteros de n cifras (87).

2.ª Aplicar la fórmula anterior á los valores sucesivos 2, 3, 4, etc. de B y de n, ó sea: averiguar cuántos enteros hay de una, de dos de tres cifras, etc, en los sistemas de numeracion binario, ternario, etc, y especialmente en el décuplo ó usual, formando una tabla pitagórica con las soluciones.

3. Hallar la fórmula que expresa el número de cifras de *todos* los enteros menores que B^n y aplicarla á los valores sucesivos de B y de n (*J*—12), (*)

4. Averiguar mediante el problema anterior cual será la cifra que ocupará un lugar dado en la serie indefinida de los números enteros escritos ordenadamente unos junto á otros.

5. ¿Cual es la base del sistema en que el guarismo 1313 equivale al decimal 500.? (*J*—38).

6. ¿Cual es el guarismo décuplo equivalente á los dos 30405 y 70700 respectivamente, en dos sistemas cuyas bases se diferencian en 1.?

7. El guarismo 49010 es la suma de los 1004003+2001002 escritos estos en un sistema cuya base es la mitad del de aquél. ¿Cuales son esas bases y cuales los tres números correspondientes en el sistema décuplo?

—8. Llamando s á la suma de dos enteros y d á su diferencia demostrar que el mayor vale $(s+d):2$ y el menor $(s-d):2$; traducir en regla esas fórmulas y aplicarlas á casos particulares.

—9. Un cuerpo al caer verticalmente, cerca de la superficie terráquea recorre próximamente 5 metros durante el primer segundo, 5×3 durante el segundo siguiente, 5×5 en el tercero y así sucesivamente, multiplicando los 5 metros primeros por los números impares sucesivos, ¿cuantos metros próximamente caerá un cuerpo en 10 segundos?

—10. ¿Cuantos caerá exactamente el cuerpo del caso anterior, sabiendo que en vez de 5 metros son 5 metros menos 1 decímetro lo que cae el 1.er segundo? (27—3.a).

—11. ¿Cuantos años hace del descubrimiento de Amé-

(*) Esa *J* se refiere á la obra de D. Eulogio Jimenez titulada-Ejercicios de Matemáticas-y el núm. 12 es el de la cuestion aquí, propuesta, en dicha obra. Sirva esta nota para todos los casos análogos.

rica verificando en 1492? ¿Cuantos hará dentro de 1000 años?

—12. Sabiendo que tarda en oirse todo ruido á razon de 300 varas próximamente, por cada pulsacion de una persona adulta y sana; ¿cuánto dista la nube donde ha dado un trueno que ha tardado en oirse 20 pulsaciones? (El trueno dá al mismo tiempo que el relampago solo que éste se ve en seguida).

—13. Resuelto el Problema anterior y sabiendo que de dos personas hay que contar 20 varas más para la una y 20 ménos para la otra por cada pulsacion; ¿á que distancia estará la nube respectiva: 1.° siendo el mismo el número de pulsaciones; 2.° siendo 5 más ó 5 ménos (43).

14. Demostrar la llamada *regla del perezoso* para multiplicar dos enteros de una cifra y mayores que 5, á saber: cerrar en cada mano, tantos dedos como falten respectivamente para 10 á cada factor, multiplicar los números de dedos cerrados y agregar al producto tantas decenas como dedos queden abiertos (*J*—13).

15. Al nacer un hijo tiene su padre 28 años; ¿á que edades de uno y de otro será la edad del padre dupla, tripla, cuadrupla, etc. de la del hijo?

16. ¿Cuantos minutos y segundos tiene un dia?

17. Demostrar que para dividir por 9 un múltiplo suyo se puede restar de 10 las unidades simples, del resto las decenas mas 1, de este resto las centenas y asi sucesivamente, añadiendo 10 á cada minuendo parcial menor que su sustraendo y 1 al sustraendo siguiente, en compensacion (*J*—14).

18. Resuelta ya la cuestion 9 y sabiendo que á doble distancia es cuatro veces menor la rapidez de la caida, á tripla distancia nueve veces menor aquella, y así, disminuye la rapidez como crecen los cuadrados de las distancias: ¿cuanto caería la Luna hacia la Tierra en los mismos 10 segundos, siendo 60 radios terrestres la distancia media de los dos astros? (54—1.ª). Nota. Reduzcanse los metros á milímetros para operar sólo con enteros, despreciando los resíduos de las divisiones.

19. ¿Cuantas cifras tendrán respectivamente los productos de las seis 1.as unidades numerativas y de los 5

enteros inmediatos menores? (47).

20. ¿Qué tiempo total ha regado al año cada uno de 6 labradores que se han dividido por igual el agua de una acequia, cuatro veces en aquel tiempo; la 1.ª vez durante 10 horas, la 2.ª—14, la 3.ª—18 y la 4.ª—9. Redúzcanse las horas á minutos para operar sólo con enteros, y no se sumen *todos* los minutos. (54—1.ª).

21. Ganando uno 36 reales diarios y gastando 24, hallar cuanto ahorrará al año, sin restar 24 y 36 (43—Esc.º).

Ganando al año 13140 y gastando 8760; hallar lo que ahorrará al dia; sin restar aquellos numeros (56).

22. ¿Resolver la cuestion 20 suponiendo que cada vez se ha regado 4 horas más ó 4 horas ménos; deduciendo estos resultados de aquél (58—1.º y 27—3.º).

23. Para multiplicar un entero por una potencia de 5 basta añadirle tantos ceros como unidades tenga el grado de aquella y dividir el resultado por la potencia de ese mismo grado de 2.

24. Demostrar que, siendo a, b, c, d cuatro enteros, será en general $(ac+bd)^2<(a^2+b^2)(c^2+d^2)$. ¿En qué caso el signo $<$ se cambiará en el $=$, en la relacion anterior? (*J.* 7—Cap.º 3.º).

25. La suma de los n 1.os números impares es n^2.

26. El cuadrado de todo número impar es un múltiplo de 8 mas 1.

27. Formar los cuadrados y cubos sucesivos de los 10 primos enteros, partiendo del 1 y fundandose en los Cor.s 1.º y 3.º—(71).

28. Generalizar el Teorema (69—1.ª) para cualquier número de sumandos, y aplicarlo á la composicion del cuadrado de un entero con respecto á todos sus números elementales.

29. Extraer del número 281474976710656 las raices de grados 2,º 3,º 4,º 6,º 8,º 12,º 16,º 24º y 48,º que son todas exactas (84).

30. Añadiendo 1 á cada raiz del problema anterior (ya resuelto), ¿cuánto habrá que añadir respectivamente al número dado para formar las potencias respectivas.?

31. Demostrar que el producto de n números enteros

consecutivos es siempre divisible por el producto $1\times 2\times 3\times 4\times \ldots\ldots \times n$ de los n primeros números enteros. (J-31.)

32. Demostrar que el producto de todos los enteros consecutivos desde 1 hasta $P-1$ es siempre divisible por P, si éste no es número primo, y nunca lo es cuando P sea primo.(J—32)

33. Demostrar que el m. c. d. de tres números se puede hallar determinando el de los dos primeros, luego el de los dos últimos, y despues el de los dos que se han determinado. (J-33.)

34. Demostrar que el m. c. d. de dos números A y B expresa el número de los múltiplos de A contenidos en la série siguiente $B, 2\times B, 3\times B, \ldots\ldots A\times B$. (J—34.)

35. Demostrar que el m. c. m. de tres números se puede hallar determinando el de los dos primeros, luego el de los dos últimos, y despues el de los dos que se han determinado. (J 35.)

36. Demostrar que todo divisor comun de 10^n y de otro entero de n cifras (si este tiene ménos cifras se completan con ceros á su izquierda) es divisor de los que resulten trasladando una ó mas cifras de la izquierda á la derecha en el segundo. Por ejemplo, 13 que es divisor de 10^6-1 y de 461539, es divisor tambien de 615394, 153946, 539461, 394615, 946153. (J—36.)

37. Hallar las condiciones de divisibilidad por 5 y por 7 en el sistema duodecimal. (J—37.)

38. Si A y B son dos números primos entre sí, los restos de dividir por B los $B-1$ menores múltiplos de A son todos mayores que cero y desiguales; y por consecuencia son los $B-1$ primeros enteros $1, 2, 3, \ldots (B-1)$, en un cierto órden.

39. *Teorema de Fermat.*—Si A es un entero no divisible por el número primo P, este será divisor de $A^{P-1}-1$.

40. *Teorema de Wilson.*—La suma de la unidad con el producto de los diversos enteros menores que un número primo cualquiera, es divisible por este número primo.

LIBRO SEGUNDO.—NÚMEROS FRACCIONARIOS.

CAPÍTULO 1.º—NUMERACIÓN Y TRANSFORMACIONES.

LECCIÓN 12.

Recuerdo del doble origen de los números fraccionarios; nombres de sus términos (126). *Unidades fraccionarias; su utilidad* (127). *Quebrados propios é impropios, ordinarios y básicos; quebrados aparentes; números mixtos* (128). *Nomenclatura de las varias especies de quebrados* (129). *Escritura de los quebrados ordinarios y básicos* (130). *Fracciones básicas periódicas, puras y mixtas* (131). *Reducción de un quebrado impropio á entero ó mixto y viceversa* (132). *Variaciones, por sumación, de numerador ó denominador; corolarios* (133). *Variaciones por producción de uno ó de los dos términos* (134). *Variación y supresión de la coma, y adición de ceros á un quebrado básico* (135). *Transformaciones de los quebrados; sus especies* (136). *Simplificación: reglas para efectuarla parcial y totalmente* (137). *Fracciones irreducibles: cómo son sus equivalentes; corolarios* (138). *Condición general para poder transformar un quebrado en otro* (139). *Reducción de quebrados á común denominador, cualquiera ó mínimo* (140). *Variación de un quebrado, á cuyos dos términos se añade ó resta un mismo número, primera idea de límite* (141). *Reducción de una fracción ordinaria á básica* (142). *Casos que pueden ocurrir en esa cuestión; origen de las fracciones básicas periódicas* (143). *Condiciones de la fracción generatriz para que la básica equivalente sea* *respectivamente limitada ó periódica* (144). *Reducción de una fracción básica á ordinaria en todos los casos* (145). *Casos en que será periódica pura ó periódica mixta la básica equivalente á una fracción ordinaria* (146).

ART.° 1.°—NUMERACIÓN Y PROPIEDADES PRINCIPALES.

126. Según la definición (6) y el Teorema (120), á todo *número quebrado ó fraccionario* puede suponérsele originado de dos modos: ó por la medición directa de una cantidad ó por la división de dos enteros. Es evidente que todo quebrado consta de dos *términos:* uno que *numera* ó cuenta las partes iguales de *unidad* que contiene la cantidad medida ó *cuántas* unidades tiene el dividendo; por eso es llamado *numerador;* y otro que, indicando en *cuántas* partes iguales se considera dividida la unidad ó las unidades que tiene el divisor, *denomina* ó da nombre á dichas partes; y por eso es llamada *denominador*. Si éste es *dos,* las partes se llaman *medios;* si *tres,* tercios; y con los nombres de los números ordinales (23) *cuartos*, *quintos,* etc., desde cuatro en adelante.

Para acabar de comprender esa duplicidad de origen de los números fraccionarios, no hay sinó recordar que, tanto en la medición de cantidades como en la división de enteros, se trata de saber las *veces* que una cantidad ó un número contiene á otra ú otro; si hay exactitud en esas veces, resultan de ambas operaciones números enteros, y si no la hay, puede en la medición contener la cantidad una ó varias partes iguales de unidad, sin residuo alguno, ó con resíduo siempre por pequeñas que aquellas sean; en el primero de estos dos casos resulta el número fraccionario, y en el segundo el incomensurable; pero en la división, siempre existe como medida común de dividendo y divisor la unidad á que ambos se refieren; por esto la división de enteros no puede originar números incomensurables, y sí sólo enteros ó fraccionarios, según sea exacta ó inexacta respectivamente.

127. Aunque no es necesario, conviene en ciertos casos considerar á los quebrados como enteros de *unida-*

des fraccionarias; entendiendo por *tales* las partes alícuotas de la unidad principal, cuyo número y nombre expresa el denominador. Viene á ser así dicha parte alícuota como una unidad auxiliar y provisional que facilita y abrevia muchas cuestiones de quebrados, considerándolos como enteros referidos á otra unidad. Eso es posible y aun legítimo, pues ya sabemos (12) que toda cantidad puede ser expresada por cualquier número, escogiendo la unidad conveniente.

128. Todo quebrado cuyo numerador es menor que su denominador, llámase *propio ó genuino,* y es claro que vale menos que 1, puesto que tiene menos partes alícuotas que la unidad.

Por el contrario, llamaremos *quebrado impropio ó espúreo* á todo aquel cuyo numerador sea mayor ó igual que su denominador, y que vale, por lo tanto, á lo menos 1. Entre los *quebrados impropios* llamaremos *aparentes* á los que tengan su numerador múltiplo de su denominador; porque es claro que equivalen á números enteros, y sólo aparentemente son quebrados.

Entre las infinitas divisiones en partes iguales que puede concebirse de cada unidad, merecen atención especial aquellas en que el número de partes es la base numerativa ó sus potencias sucesivas. Los quebrados que tengan tales denominadores,—10, 100, 1000, etc.,—llámanse *básicos,* en general, y *decimales* en el sistema usual de numeración; y á todos los demás se los llama quebrados ordinarios ó *fracciones ordinarias* ó comunes. *Mixtos* son los números que constan de entero y quebrado (6).

129. La nomenclatura ó *numeración verbal de los quebrados consta* naturalmente *de dos nombres: el del numerador, que se expresa el primero como número cardinal, y el del denominador, nombrado en seguida del numerador*, pero *como número ordinal* (según ya hemos indicado) si pasa de tres, y con los nombres *medios, tercios*, si es *dos* ó *tres* respectivamente.

Inútil parece decir que si el numerador es 1, el denominador se nombrará en singular, y en plural si aquél fuere mayor que 1.

Claro es que equivaliendo todo quebrado á un cociente, también se podrá nombrar como tal; y así debe hacerse, siempre que sus dos términos sean indeterminados de valor ó estén representados por letras; pues sinó resultarían nombres antigramaticales, como si dijéramos *a beavos,* en vez de *a* partido por *b,* ó *a* dividido *b.*

Los quebrados decimales se nombran sin más que cambiar la terminación avo en ésima. Así, en vez de *centavos, milavos*..., se dice *centésimas*, *milésimas*... En vez de *diezavos*... *décimas* ó *décimos.* Para el dinero, en vez de *centésimas, céntimos* ó *centavos.*

Los números mixtos se nombran: expresando primero el entero y en seguida el quebrado, interponiendo la conjunción *y.* Ej.s Dos y un medio, ó *dos y medio; cinco y dos tercios,* ocho y cinco séptimos, etc.

130. Respecto á la numeración escrita, se ha convenido en escribir los quebrados ordinarios: *poniendo el numerador encima de una raya y el denominador debajo;* como ya dijimos se podía expresar ó indicar un cociente, una división de enteros. Es claro que á un quebrado así escrito se le nombrará ó leerá por las reglas dichas há poco. Así $\frac{2}{5}$ = dos quintos, etc.

Los quebrados *básicos* pueden también ser escritos según la regla anterior; mas observando que para ellos la división de la unidad en partes alícuotas sigue la ley de las unidades numerativas (17), se ocurre la posibilidad de escribirlos sin denominador; *colocando las cifras respectivas de las décimas, centésimas, etc.*, *á la derecha de las unidades;* como las decenas, centenas, etc., á la izquierda. El lugar de la cifra de las unidades se marca con una coma ó vírgula á la derecha, aunque en rigor debería ser encima ó debajo, porque ese lugar es único ó del orden cero, puesto que desde él y con perfecta simetría se corresponden, respectivamente á izquierda y derecha, *decenas y décimas, centenas y centésimas, millares y milésimas*, etc., en los lugares primero, segundo, tercero, etc. de ambos lados. Con la notación usual resultan los órdenes de las unidades fraccionarias retrasados un lugar, respecto á sus análogas enteras. Décimas... 1.º á la derecha, decenas 2.º á la izquierda, etc.

Toda fracción decimal así escrita puede ser leída de tres modos: primero todas las unidades ó parte entera, que puede ser cero, y en seguida la fraccionaria como si tuviera el denominador manifiesto; p. ej.º: 25,834 = 25 unidades, 834 milésimas (éste es el modo más usual); ó después de la parte entera, las cifras fraccionarias una á una con su valor relativo; p. ej.º: 25 unidades, 8 décimas, 3 centésimas, 4 milésimas; ó todo junto, como si estuviera escrito en forma de quebrado ordinario:

$$25.834 \text{ milésimas} = \frac{25.834}{1.000}.$$

131. Las fracciones básicas tienen algunas veces formas especiales. Así las hay *limitadas*, é *ilimitadas* ó de un número infinito de cifras; es decir, que debe suponérselas indefinidas, para equivaler al número que representan, originado por alguna operación inexacta. Entre las indefinidas, unas nada tienen de particular en sus infinitas cifras, y esas equivalen como veremos pronto, á números incomensurables; pero hay otras cuyas cifras fraccionarias se repiten por grupos, y en el mismo orden, periódica é indefinidamente; éstas equivalen á números comensurables ó quebrados ordinarios; y á su vez pueden ser de dos especies: *periódicas puras* y *periódicas mixtas;* las *puras* tienen sus cifras repetidas desde las décimas, en nuestro sistema, y las *mixtas* tienen primero una ó más cifras no repetidas, al menos en el mismo orden y que forman la *parte no periódica*, y luego empiezan los *períodos* ó grupos de cifras repetidas en el mismo orden. Para expresar que una fracción básica es periódica, puesto que es imposible escribir sus infinitas cifras, se escribe hasta acabar el 2.º ó 3.er período, y después puntos suspensivos.

Ejemplos:

3,848484..... *periódica pura*, cuyo período es 84;

9,82125125..... *periódica mixta*, cuya parte no periódica es 82 y su período 125.

Las cifras de la parte entera no se cuentan jamás para los períodos ni partes no periódicas, porque si se contasen en los casos especialísimos en que realmente forman, á simple vista, parte del período, no se podrían demostrar ni enunciar, en general, las leyes respecto á los orígenes respectivos de las fracciones de cada especie.

132. *Para reducir un quebrado impropio al entero ó mixto equivalente* (6—128), *se divide el numerador por el denominador; si la división es exacta, el cociente será el entero buscado, que equivale al quebrado aparente dado; y si es inexacta, el residuo será el numerador, que con el mismo denominador que el dado, formará el quebrado propio del mixto, cuyo entero será el cociente entero de la división hecha* (120, corolario).

Ejemplos: $\frac{28}{7} = 4$ porque $28 : 7 = 4$ (división exacta).

$\frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$ pues $30 = 7 \times 4 + 2$ (división inexacta).

Recíprocamente: *para reducir un número entero á forma de quebrado ó á quebrado aparente, se le multiplica por el denominador dado ó elegido, y el producto será el numerador correspondiente; y para reducir un número mixto á quebrado (impropio), se multiplica el entero por el denominador del quebrado; al producto se añade el numerador respectivo, y la suma será el numerador del quebrado equivalente al mixto, con el mismo denominador que el del quebrado unido al entero.* Ejemplos:

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5} = \frac{24}{6} \text{ etc.,}$$

$$4\frac{2}{7} = \frac{4.7+2}{7} = \frac{28+2}{7} = \frac{30}{7}.$$

Porque si cada unidad tiene dos medios, tres tercios, etc., n unidades tendrán n veces dos medios, n veces tres tercios, etc...

133. *Si el numerador solo crece ó disminuye, el quebrado varía también en el mismo sentido, y si el denominador solo disminuye ó aumenta, el quebrado variará en sentido contrario.*

Pues, en el primer caso, varía el número de unidades fraccionarias, permaneciendo éstas de igual magnitud; y en el segundo, queda constante el número de aquéllas, pero son más pequeñas ó más grandes por estar la misma unidad dividida en más ó menos partes respectivamente.

Esa proposición puede también enunciarse así: *de dos quebrados que tienen iguales denominadores, es mayor el que tenga mayor numerador; y de dos quebrados que tienen iguales numeradores, es mayor el de menor denominador.* O, en general, el orden de magnitud de varios quebrados con iguales denominadores es el de sus numeradores; y el orden de magnitud de varios quebrados de iguales numeradores es inverso al orden de magnitud de sus denominadores.

$$\text{Ejemplos:} \begin{cases} \frac{5}{6} > \frac{4}{6} > \frac{3}{6} > \frac{2}{6} > \frac{1}{6} \\ \frac{3}{8} < \frac{3}{7} < \frac{3}{6} < \frac{3}{5} < \frac{3}{4} \end{cases}$$

Corolario: Si dos ó más quebrados son equivalentes y tienen iguales sus numeradores, también tendrán iguales sus denominadores; y si tienen iguales sus denominadores, también serán iguales sus numeradores; es decir, serán idénticos ó uno mismo repetido, ó no podrán ser equivalentes dos quebrados con iguales numeradores si no lo son también sus denominadores; ni con iguales denominadores, si no lo son también sus numeradores.

134. *Si el numerador solo se multiplica ó se divide exactamente por un entero, el quebrado quedará respectivamente multiplicado ó dividido por dicho entero, y si el denominador solo sufre esas variaciones por producción, el quebrado las sufrirá en sentido contrario y por el mismo número.*

Pues en el primer caso queda multiplicado ó dividido el número de unidades fraccionarias, siendo éstas de igual magnitud; y en el segundo queda invariable el número de aquéllas, haciéndose cada una tantas veces menor ó mayor respectivamente, como unidades tenga el número por el cual se multiplicó ó dividió el denominador.

Corolario: *Si numerador y denominador se multiplican ó dividen á la vez por un mismo entero, el quebrado no* *varía de valor,* ó se transforma en otro equivalente. Pues entonces, á la vez que se multiplica ó divide el número de unidades fraccionarias, se hace cada una de ellas respectivamente, el mismo número de veces menor ó mayor y se compensan exactamente ambas variaciones simultáneas.

Ejemplos: Si se multiplica por 3 el numerador 5 del quebrado $\frac{5}{8}$ resulta $\frac{15}{8} = \frac{5}{8} \times 3$; porque evidentemente 15 octavos = 3 veces 5 octavos.

Si se divide por 4 el denominador 8 de $\frac{5}{8}$ resulta $\frac{5}{2} = \frac{5}{8} \times 4$, porque evidentemente, siendo un medio cuatro veces un octavo, cinco medios serán cuatro veces cinco octavos... etc.

Si se multiplican por 2, 3, 4... n, los dos términos 5 y 8 será $\frac{5}{8} = \frac{10}{16} = \frac{15}{24} = \frac{20}{32} = \ldots \frac{5 \cdot n}{8 \cdot n}$.

135. *Si se varía de lugar la coma ó vírgula de un quebrado básico, éste quedará multiplicado, si la variación es hacia la derecha, y dividido, si la variación es hacia la izquierda, por la unidad seguida de tantos ceros como lugares haya variado la coma.*

Porque si se corre la coma hacia la derecha, cada cifra se hace tantas veces mayor como exprese la unidad seguida de tantos ceros como lugares se haya corrido aquélla; y si se corre hacia la izquierda, sucede exactamente lo contrario; todo según las leyes de la numeración escrita. También puede eso demostrarse como corolario del párrafo anterior; suponiendo escritos como ordinarios los quebrados básicos; pues entonces, correr la coma á la derecha equivale á dividir por la unidad seguida de ceros, el número de partes iguales en que se considera dividida la unidad, y correrla á la izquierda, multiplicar análogamente dicho número de partes, etc.; siendo todas esas partes en igual número.

Ejemplos: Si en la fracción 347,2859 corremos la coma tres lugares á la derecha, resultará 347285,9 número

1.000 veces mayor que el anterior, porque las unidades—7—se han hecho millares y así las demás cifras; y si la corremos dos lugares á la izquierda, la fracción resultante 3,472859 es cien veces menor que la propuesta, porque las unidades se han hecho centésimas, y así las demás cifras; ó de otro modo: en la 1.ª de esas tres fracciones las unidades inferiores son diez milésimas, en la 2.ª décimas, y en la 3.ª millonésimas; el número total de partes,—el numerador,—es el mismo en las tres fracciones, 3462859; pero las décimas son mil veces mayores que las diez milésimas; y las millonésimas son cien veces menores; luego la 2.ª fracción es mil veces mayor y la 3.ª cien veces menor que la 1.ª

Corolario: Si se suprime la coma, que es como correrla á la derecha de todas las cifras, quedará el número dado multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales había.

Si se añaden ceros á la derecha de una fracción básica, ésta no varía de valor, porque eso equivale á multiplicar numerador y denominador por la unidad seguida de los ceros añadidos; ó bien porque esos ceros, como los de la izquierda en los enteros, ni valen nada por sí, ni alteran los valores relativos de las otras cifras.

Ejemplo: $3,14 = 3,140 = 3,1400 = 3,14000$, etc., porque $3,14 = \frac{314}{100} = \frac{3140}{1000} = \frac{31400}{10000} = \frac{314000}{100000}$.

ART.° 2.°—TRANSFORMACIONES DE LOS QUEBRADOS.

136. Como la misma voz indica, *transformar un quebrado es cambiarle de forma, conservando el mismo valor, ó sea hallar otro equivalente, aunque de términos distintos.* Eso se conseguirá, en general, haciendo con los dos términos operaciones que se compensen mutuamente, como ya vimos se verificaba en algunos casos de los párrafos anteriores.

Cuatro son las transformaciones principales: simplificación, reducción á común denominador, conversión de fracciones ordinarias en básicas y viceversa. Á las dos primeras las llamaremos *generales* y á las dos últimas *especiales*.

§ 1.º TRANSFORMACIONES GENERALES.

137. *1.ª Simplificación.*

Simplificar un quebrado es transformarle en otro de términos respectivamente menores.

La simplificación puede ser parcial ó total. Ambas se verifican *dividiendo los dos términos de la fracción dada por sus factores comunes;* siendo, naturalmente, los cocientes los términos respectivos de la fracción equivalente y más sencilla.

Si esos nuevos términos son primos entre sí, ó lo que es igual, si se han suprimido todos los factores comunes á los dos términos de la fracción propuesta, la simplificación es total, y la fracción resultante se llama irreducible; y sinó la simplificación es parcial, y se puede continuar hasta hacerla total ó llegar á la fracción irreducible respectiva. Esta puede hallarse de una vez, *dividiendo por su máximo común divisor los dos términos de la propuesta.* (112, Cor.)

Ejemplos: $\frac{30}{24} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ (irreducible); $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$, porque 9 es el máximo común divisor de 18 y 27.

138. Teorema. *Toda fracción equivalente á una irreducible tiene sus dos términos equimúltiplos de los respectivos de ésta.*

Sea $\frac{a}{c} = \frac{5}{8}$. Multiplicando por c los dos términos 5 y 8 y por 8 los dos términos a y c, tendremos (134, Cor.) $\frac{8\,a}{8\,c} = \frac{a}{c}$, $\frac{5\,c}{8\,c} = \frac{5}{8}$; y por tanto, $\frac{8\,a}{8\,c} = \frac{5\,c}{8\,c}$, de donde (133, Cor.) : $8\,a = 5\,c$.

Ahora bien, si se dividen por 8 y por 5 alternativamente los dos miembros de la igualdad anterior, resultarán estas otras: $a = \frac{5\,c}{8}$, $\frac{8\,a}{5} = c$, y como a, c son enteros, esos cocientes $\frac{5\,c}{8}$, $\frac{8\,a}{5}$ son exactos, ó 5 c es múltiplo de 8, y 8 a es múltiplo de 5. Pero 5 y 8 son primos relativos, luego c es múltiplo de 8 y a es múltiplo de 5 (113). Supongamos, pues, $c = 8\,n$, siendo n un número entero; sustituyendo ese valor de c en la igualdad $5\,c = 8\,a$, se tendrá $5 \,.\, 8\,n = 8\,a$, y dividiendo por 8, $5\,n = a$. Vemos, pues, que a y c son respectivamente múltiplos de 5 y 8 por un mismo entero n, que es lo que queríamos demostrar.

Corolarios. 1.° *Si dos quebrados son á la vez irreducibles y equivalentes, serán idénticos ó el mismo repetido; pues los términos de cada uno sólo pueden ser múltiplos por 1 de los del otro.*

2.° *Ningún quebrado irreducible puede ser aparente ó equivaler á un entero; pues para esto ha de ser el numerador múltiplo del denominador y no primo con él* (128).

139. 2.ª *Reducción á común denominador.*

Como su mismo nombre indica, esta transformación *consiste en convertir varios quebrados en otros respectivamente equivalentes á ellos y que tengan todos* (los otros) *el mismo número por denominador.*

La posibilidad de tal transformación se justifica *á priori*, en virtud del siguiente

Teorema. *Para que un quebrado sea transformable en otro, es necesario y suficiente que el denominador mayor tenga todos los factores simples del menor que no tenga su numerador respectivo.* Sea $\frac{m}{n} = \frac{r}{s}$ siendo $s > n$. Multiplicando ambos miembros de esa igualdad por $n\,s$ (134), tendremos: $\frac{m\,n\,s}{n} = \frac{r\,n\,s}{s}$, y simplificando esos quebrados, $\frac{m\,s}{1} = \frac{r\,n}{1}$ ó $m\,s = r\,n$, y dividiendo por n, $\frac{m\,s}{n} = r$. Es decir, que el producto $m\,s$ ha de ser divisible por n, puesto que el cociente $\frac{m\,s}{n}$ es el entero r. Luego, según la condición general de divisibilidad de un entero por otro (96), $m\,s$ ha de contener todos los factores simples de n, iguales ó desiguales, por consiguiente, s ha de contener todos los factores simples de n que no contenga m. Esta condición necesaria es también suficiente, porque si se verifica, el nuevo denominador s será múltiplo del denominador del quebrado irreducible equivalente al propuesto $\frac{m}{n}$, y entonces será fácil obtener el nuevo quebrado $\frac{r}{s}$ multiplicando los dos términos de dicho irreducible por el entero conveniente (138).

De esa condición general se deduce, en particular, para los quebrados irreducibles la siguiente: Para que una fracción irreducible sea transformable en otra, es necesario y suficiente que el denominador de ésta sea múltiplo del de aquélla, que es lo mismo ya dicho (138).

140. En virtud del teorema anterior, para que varios quebrados sean transformables en otros de igual denominador, es necesario y basta que ese denominador sea múltiplo común de los denominadores de los quebrados irreducibles equivalentes á los propuestos; ó bien que contenga todos los factores simples de los denominadores primitivos que no estén en los numeradores respectivos. Por consiguiente: el mínimo denominador común á que pueden ser reducidos varios quebrados, es el mínimo múltiplo común de los denominadores de los irreducibles respectivamente equivalentes.

Por lo tanto, *para reducir quebrados á su mínimo denominador común, se simplificarán primero totalmente los que sean reducibles, se hallará el mínimo múltiplo común de los denominadores de los irreducibles respectivos, y ese es el denominador común pedido. Para hallar ahora cada nuevo numerador, se dividirá el denominador común por cada denominador,—de los quebrados irreducibles,—y se multiplicará el cociente por el numerador correlativo.* Las mismas operaciones, á partir de un múltiplo común cualquiera de dichos denominadores, reducirían los quebrados propuestos á otros de denominador común aunque no el mínimo.

Por último, aunque sólo sea cuestión curiosa y no usual, análogamente se podrían reducir á común numerador varios quebrados, hallando primero sus equivalentes irreducibles, luego el mínimo ú otro múltiplo común de los numeradores de esos irreducibles, el cual múltiplo será el numerador común, cuyos denominadores respectivos se hallarán dividiendo aquél por los numeradores de dichos irreducibles, sucesivamente, y multiplicando los cocientes por los denominadores respectivos.

Claro es que en todos esos casos, cada quebrado se convierte en otro equivalente, puesto que se multiplican sus dos términos (del irreducible) por un mismo entero.

Escolio. Sólo cuando los denominadores de los irreducibles, equivalentes á los quebrados dados, sean primos relativos dos á dos, será el mínimo denominador común el producto de estos denominadores (117, Cor. 1.°), y entonces habrá que multiplicar los dos términos de cada quebrado por los denominadores de los demás (regla usual en la escuela).

Ejemplo 1.° Sean las fracciones irreducibles: $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{3}$; el mínimo múltiplo común de los denominadores 8, 20, 9, 3 es 360. Ahora, $360 : 8 = 45$, $360 : 20 = 18$, $360 : 9 = 40$, $360 : 3 = 120$; luego multiplicando los dos términos del primer quebrado por 45, los del 2.° por 18, los del 3.° por 40 y los del 4.° por 120, tendremos:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 45}{8 \times 45} = \frac{225}{360}, \quad \frac{3}{20} = \frac{3 \times 18}{20 \times 18} = \frac{54}{360},$$

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \times 40}{9 \times 40} = \frac{80}{360}, \quad \frac{7}{3} = \frac{7 \times 120}{3 \times 120} = \frac{840}{360}.$$

Ejemplo 2.° $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{10}{7}$, $\frac{5}{2}$. Como los denominadores 3, 5, 7, 2 son primos relativos dos á dos, su m. m. c. es su producto 210, y éste es, por tanto, el mínimo denominador común á que pueden reducirse esos quebrados. Por consiguiente, la reducción se efectuará multiplicando los dos términos del primer quebrado por $5 \times 7 \times 2$, los del 2.° por $3 \times 7 \times 2$, los del 3.° por $3 \times 5 \times 2$ y los del 4.° por $3 \times 5 \times 7$. Haciendo esas multiplicaciones, resulta

$$\frac{2}{3} = \frac{140}{210}, \quad \frac{4}{5} = \frac{168}{210}, \quad \frac{10}{7} = \frac{300}{210}, \quad \frac{5}{2} = \frac{525}{210}.$$

141. La reducción de quebrados á común denominador es necesaria para sumarlos ó restarlos, y útil para compararlos. Como ejemplo de esto último, estudiemos las variaciones que puede experimentar una fracción á cuyos dos términos se añade ó resta un mismo número entero.

Sea la fracción $\frac{a}{c}$ y x el entero añadido ó restado á cada término. Suponiendo, primero, que se añade, tendremos $\frac{a+x}{c+x}$. Para comparar ambas fracciones redúzcanse á común denominador (140, Escol.°) y se tendrá:

$$\frac{a}{c}=\frac{a(c+x)}{c(c+x)}=\frac{ac+ax}{c(c+x)} \quad (1),$$

$$\frac{a+x}{c+x}=\frac{(a+x)c}{c(c+x)}=\frac{ac+cx}{c(c+x)} \quad (2).$$

Ahora bien, teniendo esas dos fracciones iguales denominadores, será mayor la de mayor numerador (133). Mas los numeradores, que tienen el sumando $a\,c$ común, dependen, en sus valores relativos, de los sumandos $a\,x$, $c\,x$; los que á su vez, teniendo el factor común x, dependen de a y c exclusivamente. Pues bien, si la fracción $\frac{a}{c}$ es propia ó $a < c$, será $a\,x < c\,x$, $a\,c + a\,x < a\,c + c\,x$, ó la fracción (1) menor que la (2); la fracción propia $\frac{a}{c}$, crece pues, cuando crecen á la vez y por igual sus dos términos. Lo contrario sucede, naturalmente, si la fracción $\frac{a}{c}$ es impropia, porque si $a > c$, $a\,x > c\,x$, $a\,c + a\,x > a\,c + c\,x$, etc. Es claro que si en vez de crecer disminuyen, ó en vez de sumar se resta el mismo número á los dos términos, la fracción variará en sentido contrario que cuando aquéllos crecen. Podráse, pues, formular en general el siguiente

Teorema. *Si los dos términos de una fracción varían á la par por sumación, en iguales valor y sentido, la fracción variará en el mismo sentido que sus términos, si es* *propia; y en sentido contrario que sus términos, si es impropia y mayor que 1;* y no variará, evidentemente, si es igual á 1 ó son iguales sus dos términos.

Escolio 1.º Bueno será advertir que no variando la diferencia entre *numerador y denominador* en esos casos (31—2.ª), y siendo cada vez menores las partes alícuotas de unidad, si crecen *aquéllos*, los quebrados cuyos dos términos crecen igualmente, van aproximándose á valer *1;* puesto que la diferencia entre la unidad y un quebrado propio ó impropio $\frac{m}{n}$ es necesariamente $\frac{m-n}{n}$ ó $\frac{n-m}{n}$.

Mas como nunca serán iguales los dos términos, si no lo eran, pues crecen á la par, nunca llegará á valer 1 un quebrado cuyos dos términos crezcan igual. Este es el primer caso que hallamos, en que una cantidad variable se puede aproximar cada vez más á una cantidad fija, sin llegar nunca á ésta, y sin cesar de aproximarse. En todos los casos como ese, la cantidad fija se llama *límite* de la *variable* respectiva; *límite superior,* si la variable es y permanece menor que su límite, y *límite inferior,* si es menor éste que su variable. Así, pues: *la unidad es límite superior de las fracciones propias, y límite inferior de las impropias, cuyos dos términos crecen simultánea, igual é indefinidamente.*

Esc.º 2.º Si sólo uno de los dos términos de un quebrado crece ó disminuye, ya sabemos (133) que el valor del quebrado varía en el mismo sentido que su numerador y en sentido contrario que su denominador; y eso sin límites, no como en el caso anterior, pues, si crece indefinidamente el numerador solo, el quebrado crecerá también infinitamente ó se hará *infinito,* lo que se expresa con el símbolo ∞; y si crece infinitamente el denominador solo, el quebrado disminuye también indefinidamente ó se hace infinitamente pequeño, ó se dice que tiene por límite cero, que es lo mismo que decir que no tiene límite en su disminución ó decrecimiento, así como decir que una cantidad variable cualquiera tiene por límite el ∞, es decir que puede crecer infinitamente ó sin límite.

No examinamos los casos en que el numerador ó denominador disminuyen indefinidamente, porque para eso tienen que dejar de ser enteros, y aquí sólo tratamos de las fracciones ordinarias ó de términos enteros.

§ 2.º—Transformaciones especiales.

1.ª *Conversión de fracciones ordinarias en básicas.*

142. *Para reducir una fracción ordinaria á básica (decimal en nuestro sistema), se divide el numerador por el denominador, y el cociente entero,—que será cero, si la cracción es propia,—será la parte entera ó anterior á la coma* (120); *á la derecha del resto se pone un cero y se continúa dividiendo y añadiendo ceros á los restos sutesivos hasta que resulte un resto cero ó se obtengan tanfas cifras como se quiera, después de la coma.*

Esos ceros reducen á las unidades inmediatas inferiores las de cada resto, lo cual no altera el valor y permite continuar las divisiones; pues ya sabemos, por la teoría de la división, que cada cifra de un cociente es del mismo orden que el dividendo parcial que la origina.

Ejemplos: $\frac{3}{8}=0{,}375$;
$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 0{,}375 \\ 40 & \\ 0 & \end{array} \qquad \frac{5}{3}=1{,}666...; \quad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 1{,}666... \\ 20 & \\ 20 & \end{array}$$

143. En esas reducciones pueden ocurrir dos casos, según los ejemplos anteriores atestiguan: ó que se llegue á un resto cero, ó que no se llegue jamás, por repetirse periódica é indefinidamente los mismos restos. Eso se formula en el siguiente

Teorema. *La fracción básica equivalente á una ordinaria cualquiera, es forzosamente limitada ó periódica* (nunca ilimitada no periódica).

Porque no pudiendo ser restos parciales más que los enteros menores que el divisor, sucederá que al cabo de tantas divisiones, á lo más, como unidades tenga el denominador dado, se repetirá alguno de los restos anteriores, y por tanto, el dividendo, cociente y resto subsiguientes;

y todos los sucesivos, en el mismo orden que antes salieron; y así infinitas veces. Sólo, pues, en el caso de que no se repita ningún resto, por acabarse antes las divisiones, ó llegar á un resto cero, tendrá fin la operación, y la fracción ordinaria dada será equivalente á una básica limitada; y en el caso contrario, á una periódica. Estas fracciones, cuya existencia ya anunciamos *á priori*, tienen, pues, su natural origen en las ordinarias equivalentes. Luego veremos que, recíprocamente, toda fracción básica periódica equivale ó tiene por generatriz á una ordinaria, y es, por tanto, un número comensurable, á diferencia de las indefinidas no periódicas, que equivalen á números incomensurables.

144. Falta averiguar en qué casos será respectivamente limitada ó periódica la fracción básica equivalente á una ordinaria dada.

Según la regla (142), para que resulte un resto cero ó se acaben las divisiones sucesivas, ó la básica sea limitada, será necesario y bastará que, multiplicado el numerador por la unidad seguida de ceros suficientes, sea divisible el producto por el denominador respectivo. Ahora bien, como con tal multiplicación no se introducen más factores simples en el producto que los de la base numerativa, será preciso (96) para la divisibilidad susodicha, que el numerador contenga todos los factores del denominador que no lo sean de la base; ó, si el quebrado es irreducible, que el denominador no contenga otros factores simples que los de la base numerativa. Esto mismo resulta, considerando esa reducción como caso particular de la explicada generalmente en el número 139; puesto que toda unidad numerativa no contiene más factores simples que los de la base (73). Es claro que el *número de cifras decimales después de la coma, en el caso de que la fracción básica sea limitada, será igual al mayor de los exponentes que tengan los factores 2 ó 5 en el denominador* (siendo 10 la base), pues por cada cero añadido al numerador (ó á los restos sucesivos, que es lo mismo), sólo se introduce una vez cada factor de la base, luego se necesitará añadir tantos ceros, sucesivamente, como veces esté repetido el que más de esos factores, y como cada cero añadido origina una cifra decimal, resultarán tantas de éstas como dichas veces ó como unidades tenga el exponente respectivo ($10^n = 2^n . 5^n$).

Pudiéramos ahora investigar cuándo será respectivamente pura ó mixta la fracción básica periódica (143) equivalente á una ordinaria dada; pero siendo mucho más fácil esa investigación después de saber la reducción inversa, estudiemos ésta antes.

2.ª *Reducción de fracciones básicas á ordinarias.*

145. Según ya hemos indicado (131, 143), tres son las especies de fracciones básicas transformables exactamente ordinarias, pues las ilimitadas no periódicas no pueden equivaler á fracciones ordinarias, aunque sí se podrá representarlas por éstas aproximadamente, despreciando las infinitas cifras que siguen á la del orden fijado como límite de error; pero eso corresponde á la teoría de números incomensurables.

1.° *Para transformar en ordinaria una fracción básica limitada, se pone por numerador el entero que resulta quitando la coma, y por denominador 1, con tantos ceros como cifras haya después de aquélla.*

Porque así se pone el denominador de manifiesto, como dicen AA. eminentes.

Ejemplos: $0,845 = \frac{845}{1000}$; $15,28 = \frac{1528}{100}$ etc.

2.° *Para transformar en ordinaria una fracción básica periódica pura, se pone por numerador la diferencia entre la parte entera y la misma seguida del período, y por denominador tantos nueves como cifras tenga aquél.*

Sea, p. ej., la fracción 12,454545...; cuyo período es 45. Llamemos x á la fracción ordinaria equivalente; es decir, $x = 12,454545...$ Si corremos la coma á la derecha del primer período, quedará la fracción multiplicada por 100 (135), y será... $100 . x = 1245,454545...$ Como el número de períodos es infinito, número inalterable por los finitos, son idénticas las partes después de la coma, en las dos fracciones anteriores; por lo tanto, restando ordenadamente esas dos igualdades, tendremos: $100 . x - x = 1245 - 12$, es decir, $99 x = 1245 - 12$, y por tanto, $x = \frac{1245-12}{99}$.

Esc.° Esos nueves serán la base menos 1, en cualquier sistema numerativo.

Corolario. *Si la fracción periódica pura no tiene parte entera, la ordinaria equivalente tendrá por numerador el período, y por denominador tantos nueves como cifras tiene dicho período.*

Ejemplo: $0{,}848484 = \frac{84}{99}$.

3.° *Para transformar en ordinaria una fracción básica periódica mixta, se pondrá por numerador la diferencia entre los enteros que resultan corriendo la coma á izquierda y á derecha del primer período, y por denominador tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras no periódicas haya.*

Sea la fracción $z = 5{,}64203203203...$ cuyo período es 203, y 64 la parte no periódica. Si corremos la coma á la izquierda del primer período, ó á la derecha de la parte no periódica, será

$100 z = 564{,}203203203...$

Y corriéndola otros tres lugares,

$100.000 z = 564203{,}203203203...$

Restando ordenadamente

$100000 z - 100 z = 564203 - 564$, ó $99900 z = 564203 - 564$.

Y por tanto, $z = \frac{564203-564}{99900}$ (l. q. q. d.)

Corolario. *Si no hubiere parte entera, claro es que el numerador será igual á la diferencia entre la parte no periódica, y la misma seguida del período.*

146. Puesto que la fracción generatriz de una decimal periódica pura tiene su denominador compuesto de nueves (145 - 2.°), y 9 es primo con 10 (107 - 8.°), claro es que ningún denominador de fracción irreducible equivalente á una periódica pura, puede tener entre sus factores al 2 ni al 5; luego ya podremos completar, según anunciamos (144), las condiciones para determinar la especie de fracción equivalente á una ordinaria dada.

Teorema. *Dada una fracción irreducible, la decimal equivalente será limitada, si el denominador sólo tiene por factores simples al 2 y al 5* (los de la base numerativa); *será periódica pura, si el denominador no contiene entre sus factores al 2 ni al 5* (ó es primo con la base numerativa); *y será periódica mixta, si el denominador contiene entre sus factores al 2 ó al 5* (los de la base), *y además otro ú otros.*

Los dos primeros casos son los demostrados respectivamente en los números 144 y 146, y el último es consecuencia de esos dos y del n.° 143, pues no pudiendo ser limitada ni periódica pura, la fracción decimal equivalente á la ordinaria que esté en ese 3.er caso, será necesariamente periódica mixta.

Si la fracción dada no fuese irreducible, se la simplificará totalmente, y se aplicará el teorema anterior á la irreducible que resulta, aunque fácil sería deducir de las condiciones antedichas las respectivas para las fracciones no irreducibles; así como generalizar toda esta teoría para cualquier sistema numerativo, ya que para mayor facilidad nos hemos referido principalmente al decimal.

CAPÍTULO 2.°—OPERACIONES CON LOS QUEBRADOS.

LECCIÓN 13.

Adición de quebrados ordinarios de iguales ó distintos denominadores (147). *Adición de enteros con quebrados y de números mixtos* (148). *Adición de quebrados decimales ó básicos entre sí, con enteros ó con ordinarios* (149). *Sustracción de quebrados ordinarios de iguales ó distintos denominadores* (150). *Sustracción de enteros, quebrados y mixtos en todos los casos* (151). *Sustracción de quebrados decimales ó básicos entre sí, con enteros y con quebrados ordinarios* (152). *Multiplicación de quebrado por entero y viceversa* (153). *Multiplicación de quebrados ordinarios entre sí, de mixtos por enteros, por quebrados y entre sí* (154). *Multiplicación de fracciones básicas entre sí, por enteros, por ordinarias y por mixtos* (155). *División de* *fracciones ordinarias por enteros y viceversa; de quebrados entre sí, y de mixtos entre sí, por enteros, por quebrados y viceversa* (156). *División de fracciones básicas entre sí, por enteros, por quebrados y viceversa* (157). *Elevación á potencias de los quebrados ordinarios y básicos* (158). *Potencias de los quebrados irreducibles* (159). *Extracción de raíces de los quebrados ordinarios y de los números mixtos* (160). *Extraccion de raíces de los quebrados decimales ó básicos* (161). *Condiciones para que una fracción ordinaria ó básica tenga raíz exacta de cada grado* (162).

ART.º 1.º—SUMACIÓN.

§ 1.º—Adición de quebrados.

147. Como sólo se puede sumar cantidades homogéneas, y el denominador es lo que indica la especie de partes de unidad que contiene cada quebrado, no se podrá sumar quebrados, si no tienen iguales denominadores. Cuando los tengan, *se suman los numeradores, y á esa suma, como numerador, se pone por denominador el de los sumandos*.

Ejemplo: $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{4+3+2}{5}=\frac{9}{5}$... Porque cuatro cosas, mas tres cosas, mas dos cosas, todas del mismo nombre, son nueve cosas $(4+3+2)$ del mismo nombre también. Y como lo mismo puede razonarse en todos los casos análogos, queda justificada plenamente la regla anterior.

Para sumar quebrados de distintos denominadores, se reducen á común denominador (140), *y queda este caso convertido en el anterior*.

$$\text{Ejemplo:}\left\{\begin{array}{l}\frac{3}{10}+\frac{4}{9}+\frac{8}{15}+\frac{1}{2}=\frac{27}{90}+\frac{40}{90}+\frac{48}{90}+\frac{45}{90}\\[1ex] =\frac{27+40+48+45}{90}=\frac{160}{90}=\frac{16}{9}.\end{array}\right.$$

Porque el m. c. m. de 10, 9, 15 y 2, es 90; por tanto, éste es el mínimo denominador común á que se puede reducir esos quebrados, puesto que son irreducibles. Y ya reducidos á noventavos, claro es que la suma es la efectuada.

148. *Para sumar enteros con quebrados ó mixtos, ó éstos entre sí, se pueden sumar separadamente los enteros entre sí, y los quebrados entre sí, y sumar luego esas dos sumas parciales;* ó bien, *reducir los mixtos y aun los enteros á quebrados* (132), *operando luego con quebrados solos, como hemos dicho* (147).

Ejemplo:

$$7+\frac{8}{9}+3\frac{1}{2}+4\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=7+3+4+\frac{8}{9}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$$

$$=14+\frac{26}{9}=14+2+\frac{8}{9}=16\frac{8}{9}.$$

Compruébese, hallando la suma por el otro método.

El usado, supone extensivo á los quebrados el axioma (27-1.ª) sobre el orden de sumandos, y que sin duda es tan evidente para enteros como para números cualesquiera, puesto que se funda en las ideas primitivas y generales de sumandos y sumas.

149. *Para sumar quebrados decimales, entre sí ó con enteros, se colocan los sumandos (si se puede) de modo que se correspondan las cifras de igual orden, para lo cual basta que se correspondan las vírgulas ó comas, y después se suman como si fuesen enteros, poniendo la coma á la suma bajo las de los sumandos.* Claro es que, si no se puede colocar los sumandos unos debajo de otros, se sumarán entre sí las cifras de igual orden, empezando por las del inferior, etc., poniendo la coma en el sitio correspondiente.

Ejemplos:

28,457	
9,0321	3,14159
0,27	0,8746
5	2,050
42,7591	6,06619

Por último, *para sumar quebrados ordinarios y básicos, ó en general números comensurables cualesquiera, se reducen á ordinarios ó á básicos todos los que no lo sean, y queda este caso general reducido á uno de los anteriores.*

Ejemplo:
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{5}{8}+0{,}9+2\frac{1}{2}+3=\frac{5}{8}+\frac{9}{10}+\frac{5}{2}+\frac{3}{1}= \\ \frac{25+36+100+120}{40}=\frac{281}{40}=\frac{281\times 25}{40\times 25}=\frac{7025}{1000} \end{array}\right.$$

ó bien, puesto que $\frac{5}{8}=0{,}625$, $2\frac{1}{2}=2{,}5$

$$\text{será } \frac{5}{8}+0{,}9+2\frac{1}{2}+3=\left\{\begin{array}{r} 0{,}625 \\ 0{,}9 \\ 2{,}5 \\ 3 \\ \hline 7{,}025 \end{array}\right.$$

§ 2.° — Sustracción de quebrados.

150. *Para restar quebrados que tengan iguales denominadores, se restan los numeradores, y á la resta como numerador se le pone por denominador el de los sumandos. Para restar quebrados de distintos denominadores, se les reduce á uno común, y queda este caso reducido al anterior.*

Ejemplos: $\frac{13}{4}-\frac{7}{4}=\frac{13-7}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$. Puesto que, evidentemente, trece cosas menos siete cosas, del mismo nombre, son seis cosas también de la misma denominación.

$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9-8}{12}=\frac{1}{12}$. Porque el mínimo denominador común, en este caso, es 12, etc.

151. *Para restar entero y quebrado, mixto y quebrado ó entero y mixto, se reducen los enteros y mixtos á quebrados,* y queda reducido siempre á restar dos quebrados.

Ejemplos:

$$3-\frac{2}{5}=\frac{3.5}{5}-\frac{2}{5}=\frac{15}{5}-\frac{2}{5}=\frac{13}{5}\text{ (quebrado, de entero);}$$

$$\frac{15}{2}-4=\frac{15}{2}-\frac{4.2}{2}=\frac{15}{2}-\frac{8}{2}=\frac{7}{2}\text{ (entero, de quebrado);}$$

$$2\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}=\frac{5}{2}-\frac{7}{4}=\frac{10}{4}-\frac{7}{4}=\frac{3}{4}\text{ (mixto, de mixto); etc.}$$

En los dos primeros casos se pueden dar las siguientes reglas: *Para restar un quebrado de un entero, se multiplica éste por el denominador de aquél, del producto se resta el numerador, y á la resta, como numerador, se le pone por denominador el del sustraendo.*

Para restar un entero de un quebrado, se resta del numerador el producto del entero por el denominador, y al resto, como numerador, se pone por denominador el del minuendo.

152. *Para restar fracciones decimales, se colocan* (si se puede) *de modo que se correspondan las comas ó vírgulas, y se restan como si fuesen enteros, poniendo á la resta la coma ó vírgula bajo las de los datos.*

Escolio. Puédanse ó no colocar los datos en columna, súplanse con ceros, material ó mentalmente, las cifras de la derecha del que tenga menos decimales.

Ejemplos: Restar 8,14159 de 12,126204: $\left\{\begin{array}{r}12{,}126204\\ 8{,}141590\\ \hline 3{,}984614\end{array}\right.$

Finalmente: *para restar quebrados en el caso en que uno de los datos sea básico ó decimal y el otro ordinario, se reducen ambos á ordinarios ó á básicos*, y queda la cuestión reducida á uno de los casos ya estudiados.

Ejemplos: $\left\{\begin{array}{l}3{,}14-\frac{11}{8}=\frac{3140}{1000}-\frac{1375}{1000}=\frac{1765}{1000}=\frac{353}{200}\\ \frac{15}{8}-0{,}72=1{,}875-0{,}72=1{,}155=\frac{231}{200}\end{array}\right.$

ART.° 2.°—PRODUCCIÓN.

§ 1.°—MULTIPLICACIÓN.

153. 1.° *Para multiplicar un quebrado por un entero,* según ya sabemos (134), *no hay más que multiplicar por dicho entero el numerador solo,* dejando el mismo denominador, *ó bien dividir el denominador, si es divisible,* dejando intacto el numerador.

Ejemplo: $\frac{2}{3}\times 4=\frac{2\times 4}{3}=\frac{8}{3}$, $\frac{5}{8}\times 4=\frac{5}{8:4}=\frac{5}{2}$.

2.° Lo mismo se puede multiplicar un entero por un quebrado, pues si por ejemplo fuere $4\times\frac{2}{3}$, diríamos: según la definición general de multiplicar dos números, este producto ha de ser dos tercios de 4, es decir, dos veces un tercio de 4, ó sea $\frac{4}{3}\times 2=\frac{4.2}{3}=\frac{8}{3}$. Y como análogo raciocinio puede hacerse siempre en tal caso, podrá generalizarse diciendo: *para multiplicar entero por quebrado, se multiplica el numerador ó se divide el denominador, si es divisible, por el entero, dejando intacto, y en su respectivo sitio, el otro término del quebrado.*

Esc.° Vese por tanto *á posteriori*, que también para el caso de entero y quebrado se verifica la propiedad conmutativa de la multiplicación, demostrada (41) para enteros, y que pronto generalizaremos.

Cor.° *El producto de un quebrado por su denominador* ó viceversa, *es igual al numerador.*

154. 1.° *Para multiplicar dos ó más fracciones ordinarias, se multiplican sus numeradores, y aparte sus denominadores; poniendo aquel producto por numerador, y éste por denominador.*

Sea $\frac{2}{5}\times\frac{3}{8}$. Según la definición general (38), este producto ha de ser $\frac{3}{8}$ de $\frac{2}{5}$, es decir tres veces un octavo de $\frac{2}{5}$, ó sea $(\frac{2}{5}:8)\times 3$. Ahora bien, para tomar $\frac{1}{8}$ de $\frac{2}{5}$ ó dividir $\frac{2}{5}$ por 8, se puede multiplicar el denominador 5 por el divisor 8, dejando el mismo numerador 2 (134). Es decir que $\frac{2}{5}:8=\frac{2}{5.8}$; luego (153)... $(\frac{2}{5}:8)\times 3=\frac{2}{5.8}\times 3$ $=\frac{2.3}{5.8}$ según la regla. Lo mismo se probaría para tres ó más factores, multiplicando los dos primeros, este producto por el tercero, etc. Amplíese á este caso el Teorema del orden de los factores.

2.° *Para multiplicar números mixtos entre sí, por enteros, ó por quebrados, y viceversa, se reducen los mixtos á quebrados* (132), y quedará reducida la cuestión á uno de los casos anteriores.

$$\text{Ejemplos:}\begin{cases} 2\frac{1}{2}\times 5\frac{2}{3}=\frac{5}{2}\times\frac{17}{3}=\frac{85}{6}=14\frac{1}{6} \\ 3\frac{1}{2}\times 5=\frac{7}{2}\times 5=\frac{35}{2}=17\frac{1}{2} \\ 4\frac{2}{5}\times\frac{9}{8}=\frac{22}{5}\times\frac{9}{8}=\frac{198}{40}=4\frac{19}{20} \end{cases}$$

155. *Para multiplicar fracciones decimales ó básicas, se prescinde de las comas, ó lo que es lo mismo, se multiplican como si fuesen enteros; separando luego, en el producto, tantas cifras decimales como tengan los dos factores*. Claro es que si uno de éstos es entero, sólo habrá que separar en el producto tantas cifras decimales como tenga el otro factor.

$$\text{Sea } 15{,}247\times 3{,}85\ldots\ldots\begin{cases}\begin{array}{r} 15{,}247 \\ \times\quad 3{,}85 \\ \hline 76235 \\ 121976 \\ 45741 \\ \hline 58{,}70095 \end{array}\end{cases}$$

Porque, al prescindir de las comas, queda multiplicado cada factor, por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene dicho factor; y por consiguiente, el producto queda multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tengan ambos factores (43—3.°), luego habrá que dividir por este último número ó separar como decimales las cifras que dice la regla, para restablecer el producto en su verdadera magnitud.

Para multiplicar fracciones básicas por ordinarias, ó por números mixtos, ó viceversa; y en general, *para hallar el producto de dos ó más factores comensurables cualesquiera, se reducen todos á la forma de quebrados ordinarios ó de fracciones básicas*, y después se multiplican por las reglas ya dadas.

Escolio. Adviértase que si se reducen los factores á fracciones básicas y alguna de éstas es periódica, no se podrá hallar el producto exacto, para lo cual habrá que reducir los factores á fracciones ordinarias.

§ 2.°—División.

156. 1.° *Para dividir un quebrado por un entero* (134), *se multiplica sólo el denominador, ó se divide sólo el numerador, si es divisible, por dicho entero.*

Ejemplo:

$$\frac{8}{3}:4=\frac{8}{3\times 4}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3};\quad \frac{8}{3}:4=\frac{8:4}{3}=\frac{2}{3}.$$

2.° *Para dividir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y al producto como numerador, se le pone por denominador el numerador del quebrado.*

Ejemplo:

$$5:\frac{7}{8}=\frac{5\times 8}{7};\text{ pues multiplicando }\frac{5\times 8}{7}\text{ por }\frac{7}{8}\text{ resulta } 5.$$

3.° *Para dividir dos quebrados se multiplican en cruz, es decir, el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el numerador del divisor por el denominador del dividendo, poniendo el primer producto por numerador y el segundo por denominador del cociente buscado.*

Pues, multiplicando el número así formado por el divisor, resulta indudablemente el dividendo

$$\left(\frac{ms}{nr}\times\frac{r}{s}=\frac{msr}{nrs}=\frac{m}{n},\text{ luego }\frac{m}{n}:\frac{r}{s}=\frac{ms}{nr}\right).$$

Cor.° *Para dividir dos quebrados de iguales denominadores, se dividen sus numeradores,*—el del dividendo por el del divisor,—*y para dividir quebrados de iguales numeradores, se dividen sus denominadores invertidos,*— el del divisor por el del dividendo—.

Pues, $\frac{m}{n} : \frac{r}{n} = \frac{mn}{nr} = \frac{m}{r}$ y $\frac{m}{n} : \frac{m}{s} = \frac{ms}{nm} = \frac{s}{n}$.

Esc.° Los quebrados hasta ahora considerados ó de términos enteros, suelen llamarse quebrados de unidad, á diferencia de los productos y cocientes de esos quebrados, que pueden considerarse como quebrados de quebrados ó como fracciones cuyos términos son á su vez otras fracciones, generalizándose así la idea primera de *número fraccionario*, que, como veremos, debe ser mirado siempre como el cociente indicado de su numerador por su denominador, sean estos números enteros, fraccionarios ó incomensurables.

Ejemplos:

$$\frac{2}{7} : \frac{5}{9} = \frac{2 \times 9}{5 \times 7}; \quad \frac{9}{8} : \frac{3}{8} = \frac{9}{3} = 3; \quad \frac{16}{15} : \frac{16}{3} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

4.° *Para dividir números mixtos, entre sí, por quebrados, por enteros,* ó viceversa, *se reducen los mixtos á quebrados,* y quedará el caso reducido á uno de los anteriores.

Ejemplos:

$$7\frac{1}{2} : \frac{4}{3} = \frac{15}{2} : \frac{4}{3} = \frac{15.3}{2.4}; \quad 6\frac{1}{4} : 3\frac{1}{2} = \frac{25}{4} : \frac{7}{2} = \frac{50}{28}.$$

157. *Para dividir fracciones decimales ó básicas, se prescinde de las comas, es decir, se dividen como enteros, después de haber igualado el número de sus cifras decimales*, añadiendo ceros al que tenga menos.

Ejemplo: 38,425 : 4,15 = 38425 : 4150 (58—2.°) y (153—Cor.°).

Para dividir un decimal por un entero, se prescinde de la coma, separando luego en el cociente tantas cifras decimales como tenga el dividendo; ó lo que es lo mismo, se coloca la coma en el cociente después de bajar la cifra de las unidades del dividendo y poner la cifra correlativa en el cociente.

Ejemplo: $\left\{\begin{array}{l|l} 48,265 & 4 \\ \hline 08 & 12,066... \\ \ \ 026 & \\ \ \ \ \ 25 & \\ \ \ \ \ \ \ 1 & \end{array}\right.$

Para dividir un entero por un decimal se prescinde de la coma, después de añadir al dividendo tantos ceros como cifras decimales tenga el divisor.

Ejemplo: $158 : 3,14 = 15800 : 314$.

Para dividir fracciones decimales por ordinarias, por números mixtos, ó viceversa, *se reducen dividendo y divisor á la misma especie, es decir á ordinarias ó á decimales,* y quedará ese caso convertido en uno de los anteriores.

Ejemplos:

$$3,14159 : \frac{8}{9} = \frac{314159}{100000} : \frac{8}{9} = \frac{314159 \times 9}{800000} = 3,53428...$$

ART.° 3.°—GRADUACIÓN.

§ 1.°—Elevación á potencias.

158. Según la definición aritmética de potencia (67) y la regla para multiplicar quebrados (154), *elevaremos un quebrado ordinario á una potencia de grado entero, elevando su numerador y su denominador á esa misma potencia y partiendo ambos resultados.*

Ejemplos:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}; \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{2.2.2.2.2}{3.3.3.3.3} = \frac{32}{243}.$$

Para elevar un número mixto se reduce á fraccionario, y queda este caso reducido al anterior.

Para elevar una fracción decimal, se multiplica por sí misma; y el resultado otra vez por la fracción, si se busca una potencia de mayor grado que el 2.°; y así sucesivamente.

Ejemplos: $(0,4)^3 = 0,064$; $(0,02)^5 = 0,0000000032$.

159. Teorema. *La potencia de cualquier grado* (entero) *de un quebrado irreducible es también irreducible* (114—Cor.° 4.°).

§ 2.º—Extracción de raíces.

160. *Para extraer la raíz de cualquier grado* (entero) *de una fracción cuyos dos términos sean potencias exactas de dicho grado, se extraen las raíces de ese mismo grado de dichos términos, y se dividen respectivamente una por otra.*

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{256}{121}}=\frac{\sqrt{256}}{\sqrt{121}}=\frac{16}{11};\quad \sqrt[3]{\frac{1728}{729}}=\frac{\sqrt[3]{1728}}{\sqrt[3]{729}}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}.$$

Si el denominador de una fracción dada no tiene raíz exacta del grado supuesto, se transforma esa fracción en otra cuyo denominador tenga raíz exacta de ese grado, se extrae la raíz aproximada en una unidad del nuevo numerador y dividiéndola por la raíz exacta del denominador respectivo, se tendrá la raíz de la fracción dada, aproximada con menos error que 1 partido por dicha raíz exacta del nuevo denominador. En efecto, sea $\sqrt[3]{\frac{12}{25}}$; como evidentemente basta multiplicar por 5 el denominador 25 para que resulte el cubo exacto de 5, multiplicaremos por 5 los dos términos de la fracción dada y será

$$\sqrt[3]{\frac{60}{125}}=\frac{\sqrt[3]{60}}{5}$$ y como $$\sqrt[3]{60} \begin{matrix} > 3 \\ < 4 \end{matrix},\quad \sqrt[3]{\frac{12}{25}} \begin{matrix} > \frac{3}{5} \\ < \frac{4}{5} \end{matrix},$$ y

cualquiera de los quebrados $\frac{3}{5}$ ó $\frac{4}{5}$ es la raíz cúbica aproximada de $\frac{12}{25}$ con menor error de $\frac{1}{5}$ que es la diferencia entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$.

Como el denominador es el término que indica la especie de partes alícuotas de unidad que contiene un quebrado, y las aproximaciones casi siempre se evalúan en partes alícuotas de la unidad, por eso es necesaria la transformación explicada; pues si transformásemos la fracción dada en otra cuyo numerador sólo tuviera raíz exacta, obtendríamos sí la del quebrado propuesto, con *cierta* aproximación, ó mejor dicho con *incierta*, pues no sabríamos cuál era esa aproximación sin nuevas transformaciones.

Para obtener el mínimo denominador posible en esa transformación, se descompondrá en sus factores primos el de la fracción dada, supuesta ó hecha irreducible; y se multiplicarán ambos términos de esa fracción irreducible, por los factores primos de su denominador, cuyas potencias no entran en la composición de aquél con grados multiplos del de la raíz buscada, hasta que todos tengan esa condición en la fracción ya transformada.

Ejemplos: $\sqrt[3]{\dfrac{20}{189}}=\sqrt[3]{\dfrac{20}{3^3.7}}=\dfrac{\sqrt[3]{20.7^2}}{\sqrt[3]{3^3.7^2.7}}=\dfrac{\sqrt[3]{20.7^2}}{\sqrt[3]{3^3.7^3}}=$

$$\frac{\sqrt[3]{20\times 49}}{3.7}=\frac{\sqrt[3]{980}}{21}\begin{matrix}>\frac{9}{21}\\ <\frac{10}{21}\end{matrix}.$$

$$\sqrt[4]{\frac{5}{2^3.3.^27}}=\sqrt[4]{\frac{5.2.3^2.7^3}{2^4.3^4.7^4}}=\frac{\sqrt[4]{5.2.3^2.7^3}}{2.3.7}=\frac{\sqrt[4]{5.2.3^2.7^3}}{42}.$$

Para extraer la raíz de cualquier grado de un número mixto, se le transforma en fracción ordinaria, y queda reducido este caso al anterior.

161. Para extraer la raíz de cualquier grado de una fracción decimal, se la añadirán los ceros suficientes para que el número total de cifras decimales sea múltiplo del grado de la raíz que buscamos, y extrayendo la raíz del número que así resulte, como si fuese entero, se tendrá la buscada, con tantas cifras decimales como unidades tenga el cociente del número de cifras decimales de la fracción ya transformada por el índice de la raíz.

Ejemplos: $\sqrt[5]{0,0000000032}=0,02;\ \sqrt[3]{85,184}=4,4.$

162. Claro está, según lo anterior, que *para que una*

fracción ordinaria tenga raíz exacta de un cierto grado, es necesario y suficiente que ambos términos la tengan; y para una fracción decimal, que la tenga el número entero que resulta quitando la coma, después de haber añadido los ceros que dice la regla, si fuese preciso.

Teor.ª *Las raíces inexactas, de fracciones ordinarias ó básicas, son números incomensurables.* Puesto que las potencias de los enteros son enteras, y las de los quebrados son también quebrados (159).

CAPÍTULO 3.º—CUESTIONES SOBRE NÚMEROS FRACCIONARIOS.

1.ª Demostrar *á priori* y *á posteriori* que las diversas fracciones ordinarias que pueden obtenerse de una misma decimal periódica pura, considerando dos ó tres períodos como uno, son equivalentes; es decir, que

$$0,abc\,abc\,abc\ldots = \frac{abc}{999} = \frac{abcabc}{999999} = \frac{abcabcabc}{999.999.999}, \text{ etc.}$$

2.ª Demostrar que la suma de dos quebrados irreducibles de distintos denominadores, no puede ser un entero.

3.ª Dadas varias fracciones, hallar otras respectivamente equivalentes, y tales que el numerador de cada una sea el denominador de la precedente.

4.ª Demostrar que si se ordena por orden de magnitud todas las fracciones propias irreducibles cuyos numeradores sean menores que un número dado, las equidistantes de los extremos son complementarias (su suma $=1$) y tienen igual denominador.

5.ª Demostrar que la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$ crece infinitamente si crece el número de sumandos.

6.ª Hallar cuánto azufre, carbón y nitro hay en 2.000 libras de pólvora, sabiendo que en 100 unidades hay 75 de nitro, y partes iguales de las otras dos sustancias.

7.ª Sabiendo que una disolución saturada contiene 0'27 de sal, ¿cuánta agua debe evaporarse en una disolución al 2 por 100 para que quede saturada?

8.ª Demostrar que la suma y la diferencia de dos fracciones periódicas, son también fracciones periódicas.

9.ª Siendo 0,37 de metro el diámetro de un duro, ¿cuántos duros caben en línea recta en un kilómetro?, ¿cuántos kilómetros ocupan 1.000.000.000 de duros?

10. Si de una cantidad se quita primero $\frac{1}{6}$ y luego $\frac{1}{10}$, ¿qué resta?

11. Demostrar que si se tienen varios quebrados desiguales, la suma de los numeradores partida por la de los denominadores, forma otro quebrado mayor que el menor y menor que el mayor de los propuestos. Caso en que éstos sean equivalentes.

12. Suponiendo que una bola elástica, cayendo por sólo su peso, bota á $\frac{2}{3}$ de su altura de caída, ¿de qué altura cayó la primera vez una bola que á la tercera rebotó á 40 centímetros?

13. Sabiendo que el radio medio terráqueo es 6.366 kilómetros, y que la diferencia entre el ecuatorial y el polar es $\frac{1}{300}$ del mayor, averiguar los kilómetros de esos dos radios. Se supone el radio medio igual á la semisuma de los otros dos.

14. Elevar á las 5 primeras potencias las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ y sus decimales equivalentes respectivas.

15. Sabiendo que los valores de las piedras finas varían como los cuadrados de sus pesos—á igualdad de todo lo demás—demostrar que si una piedra fina se parte disminuye de valor, aunque no se pierda peso, ni precio por la irregularidad de formas.

16. Extraer las raíces cuadrada y cúbica de las fracciones $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ y 3,14159, aproximadas hasta las milésimas.

LIBRO TERCERO.—NÚMEROS INCOMENSURABLES.

LECCIÓN 14.

Doble origen de los números incomensurables; imposibilidad de su numeración sistemática (163). *Dos formas del cálculo de números incomensurables; teorema y corolario fundamentales de ambas* (164). *Teoremas de los límites y de Arbogast* (165). *Idea precisa del cálculo con números incomensurables y con cantidades variables* (166). *Extensión de los teoremas relativos á propiedades numéricas* (167). *Definición de radicales numéricos y fundamentos de su cálculo* (168). *Simplificación de un radical* (169). *Reducción de radicales á índice común* (170). *Adición y sustracción de radicales; caso en que son semejantes* (171). *Multiplicación y división de radicales* (172). *Potencias y raíces de radicales* (173). *Límites de las potencias y raíces cuyos grados crecen ó disminuyen indefinidamente* (174).

CAPÍTULO 1.º—NUMERACIÓN Y PROPIEDADES.

163. Según la definición de números incomensurables (6) y los teoremas (121 y 162), dichos números pueden también provenir de dos orígenes: ó de la comparación directa de cantidades que no tengan medida finita común, ó de operaciones numéricas inexactas cuyos resultados completos no sean ni enteros ni fraccionarios. De las elementales sólo la extracción de raíces puede originar números incomensurables; pero más adelante veremos también originarlos á otras operaciones.

De todos modos, es forzoso corolario de la esencia de esos números y de las leyes numerativas de enteros y fraccionarios, que *los incomensurables carecen* necesariamente *de numeración regular, sistemática* ó *racional*, por lo cual son llamados también *irracionales*, aunque más bien este nombre indica que no tienen con la *unidad*, madre ó generatriz primitiva de todo número, *razón* ó relación expresable exactamente con sólo cifras, ó en guarismos de un número finito de aquéllas. Verdad es que esto último también sucede con las fracciones, ó cocientes de enteros, que engendran básicas periódicas; pero *los incomensurables*, caso de querer expresarlos en fracciones básicas, sólo engendran á las indefinidas no periódicas, y por tanto, sólo aproximadamente pueden ser expresados en esa ú otra especie de fracciones, y exactamente con los signos radicales ó los de las demás operaciones que los originan también.

164. El cálculo elemental de los números incomensurables sólo puede, por tanto, hacerse: ó aproximadamente por medio de los comensurables que se les acercan en forma de quebrados ordinarios ó básicos, ó exactamente bajo la forma de *radicales numéricos*, que así se llama á las raíces de los números enteros ó fraccionarios, bajo su forma primitiva ó de mera indicación.

El primero de esos modos de cálculo citados origina la teoría de los *números aproximados* y de los *errores absolutos* y *relativos*, y el segundo el *cálculo de los radicales numéricos*. Uno y otro cálculo tienen por común fundamento algunos principios, que por lo tanto vamos desde luego á formular.

Teorema. *Todo número incomensurable está comprendido entre dos comensurables, cuya diferencia puede ser tan pequeña como se quiera.*

En efecto, considerando la serie de fracciones cuyo denominador n sea tan grande como se quiera y el numerador crezca sin fin,

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \frac{5}{n}, \ldots\ldots \frac{r}{n}, \frac{r+1}{n}, \ldots\ldots$$

es claro que no siendo incomensurable ningún número de esa serie, cualquier número incomensurable dado estará comprendido entre dos consecutivos, cuya diferencia es $\frac{1}{n}$; pero esta diferencia disminuye indefinidamente, á medida que crece n (141, Escolio 2.°); luego está demostrado el teorema.

Escolio. Si suponemos que son $\frac{r}{n}$ y $\frac{r+1}{n}$ las dos fracciones que comprenden á un número incomensurable N, es decir, que $\frac{r}{n} < N < \frac{r+1}{n}$, como es evidente que la diferencia entre N y cada una de esas fracciones es menor que la de ellas entre sí, ó sea $\frac{1}{n}$, se dice que cualquiera de ellas representa al número N con la aproximación de $\frac{1}{n}$, ó con menos error de $\frac{1}{n}$, ó con error menor que $\frac{1}{n}$, ó que se aproximan á N en menos de $\frac{1}{n}$; la $\frac{r}{n}$ por defecto y la $\frac{r+1}{n}$ por exceso.

Recordando la definición de límite dada (141, Escolio 1.°), el teorema acabado de probar nos conduce al siguiente

Corolario. *Todo número incomensurable es límite inferior y superior de otros comensurables que se aproximan á aquél, unos por exceso y otros por defecto respectivamente.*

165. Llamando I al incomensurable, X, Z á los incomensurables variables que se le aproximan y α á la diferencia infinitamente pequeña, $I - X$ ó $Z - I$, es claro que será $I = X + \alpha = Z - \alpha$, igualdades que manifiestan puede sustituirse al número I sus iguales $X + \alpha$ ó $Z - \alpha$ según convenga, pero eso complicaría aún más los cálculos, puesto que α es necesariamente incomensurable también, aunque infinitamente pequeña. Lo que se hace es calcular únicamente con los comensurables X ó Z en vez de I, y tomar los resultados de las operaciones así efectuados, por los verdaderos, aunque procurando saber

la aproximación obtenida, entre ciertos límites. Eso es posible y lícito en virtud de los siguientes

Teoremas. 1.° *Si dos ó más cantidades variables son constantemente iguales en todos sus valores respectivos, sus límites son iguales.* (Teorema de los límites.)

2.° *Si dos cantidades constantes están comprendidas entre dos variables, cuya diferencia puede hacerse infinitamente pequeña, dichas constantes son iguales, ó la misma.* (Teorema de Arbogast.)

1.° Porque esas variables que varían simultánea é idénticamente, no constituyen en realidad sino una sola cuantitativamente, aunque quizá sean de distintos géneros, y es claro, por la definición (141), que una variable no puede tener diferentes límites (en el mismo sentido, que en general tendrá un límite inferior y otro superior).

2.° En efecto, sean A y B las constantes, V y V' las variables. Si llamamos α á la diferencia infinitamente pequeña $V - V'$, y pudiera ser, por ejemplo, $V > A > B > V'$, sería también $\alpha = V - V' > A - B$; pero por hipótesis, esa diferencia α puede ser infinitamente pequeña, ó tiene por límite cero, luego *a fortiori*, la diferencia $A - B$ es también cero, ó las dos constantes A y B son iguales, ó una misma.

166. En virtud de los teoremas precedentes, puédese precisar la idea del cálculo con incomensurables, diciendo:

Se entiende por *sumas, productos, potencias, etc. de números incomensurables, los límites de los resultados de esas operaciones hechas respectivamente con los números comensurables aproximados* á los datos tanto como se quiera. Y, en general, *el resultado de cualquier operación con los límites de cantidades variables, es el límite del resultado de la misma operación efectuada con esas variables* y viceversa.

167. Toda propiedad numérica que no se refiera especialmente á números enteros ó fraccionarios, será aplicable también á los incomensurables, por medio de la proposición últimamente citada y fundándose en los teoremas anteriores.

Así podremos fácilmente demostrar los signientes teoremas:

1.° El producto de dos sumas indicadas ó de una suma por otro número, es igual á la suma de los productos de cada sumando del de un factor, por cada sumando del otro.

2.° El orden de factores no altera el producto.

3.° El producto de varios productos indicados, es igual al producto de todos los factores de aquéllos.

4.° El producto de una diferencia por otro número es igual á la diferencia de los productos, de minuendo y sustraendo, por ese número.

5.° El cociente (completo) de una suma ó diferencia por otro número, es igual respectivamente á la suma ó á la diferencia de los cocientes de cada término por dicho número.

6.° El cuadrado de la suma ó de la diferencia de dos números es igual á la suma de los dos cuadrados, más ó menos respectivamente, el duplo del producto de los dos sumandos. Análoga regla para el cubo.

7.° La potencia de un producto es igual al producto de las potencias del mismo grado de todos los factores.

8.° La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias del mismo grado de dividendo y divisor.

9.° El producto de varias potencias de un número cualquiera, es la potencia de este número, cuyo grado sea la suma de los grados de las potencias-factores.

10. La potencia de otra potencia es igual á la potencia cuyo grado sea el producto de los grados de las dadas.

11. La raíz del producto ó del cociente de dos números es igual al producto ó al cociente, respectivamente, de las raíces del mismo grado de los dos números dados.

12. La raíz de una potencia es igual á la potencia de la raíz de los mismos grados respectivos.

13. La raíz de otra raíz es igual á la raíz cuyo grado es el producto de los grados de aquéllas.

Demostremos algunas de esas proposiciones, p. ej.: las 2.ª, 11, 12 y 13.

2.ª Sea el producto de varios factores incomensurables *a b c d e,* y supongamos que se cambia en el *e c d a b.* Desde luego, si *a', b', c', d', e'* son los números comensurables aproximados respectivamente á los *a, b, c, d, e,* ya sabemos que $a'\,b'\,c'\,d'\,e' = e'\,c'\,d'\,a'\,b'$. Pero en virtud de las definiciones del número 166 y de los teoremas del 165, es evidente que el límite del producto $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ es *a b c d e,* el del $e'\,c'\,d'\,a'\,b'$ es *e c d a b,* y siendo iguales ambos productos de esos factores variables, también lo serán sus límites respectivos, es decir, que $abcde = ecdab$.

Claro está que si alguno ó algunos de los factores son comensurables el teorema se verificará igualmente.

11.ª Para demostrar que $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}$ basta aplicar el teorema 7.°, generalización del 1.° (72), y tendremos

$$\left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^n\cdot\left(\sqrt[n]{c}\right)^n = a\,.\,b\,.\,c;$$

luego, en efecto, el producto $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[c]{c}$ es la raíz de grado *n* del producto *a b c.*

Análogamente se prueba que $\sqrt[n]{\dfrac{a}{c}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}$.

12.ª Vamos á demostrar que $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$.

En efecto, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}\ldots$ entrando $\sqrt[n]{a}$, *m* veces por factor; luego, según el teorema anterior,

$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}\ \cdots = \sqrt[n]{aaa\ \cdots} = \sqrt[n]{a^m}$ (l. q. q. d.)

13.ª Por último, el teorema 13.° es consecuencia del 10.°, y fácil por tanto de probar.

CAPÍTULO 2.°—CÁLCULO DE LOS RADICALES NUMÉRICOS.

168. Como ya hemos dicho (164), *se llama radical numérico á toda raíz indicada de un número cualquiera,* pueda ó no extraerse.

Si el número subradical es entero ó fraccionario y además potencia exacta del grado indicado, de otro número de su especie respectiva (entero ó fraccionario), el valor del radical será comensurable; é incomensurable si lo es el número subradical, ó no es potencia del mismo grado de otro de su especie.

Pero, sean cualesquiera sus valores, el cálculo de radicales se funda en los teoremas 11, 12 y 13 del número anterior y en el siguiente

Teorema. *El valor de un radical no varía multiplicando ó dividiendo por un mismo entero, el índice del radical y el exponente del número subradical* (este exponente es 1, si no está expreso). Es decir, $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nr]{a^{mr}}$... [1].

En efecto, llamando x al valor $\sqrt[n]{a^m}$ será $x^n = a^m$; elevando ahora á r (167, 10.°), $x^{nr} = a^{mr}$ y extrayendo la raíz del grado $n\,r$, $x = \sqrt[nr]{a^{mr}}$; y como hemos llamado x á $\sqrt[n]{a^m}$, resulta demostrada la igualdad [1], que expresa ambas partes del teorema, puesto que se pasa del primer miembro al segundo multiplicando, y viceversa dividiendo por el entero r, etc.

169. *Simplificación.* La segunda parte del teorema anterior permite simplificar un radical, siempre que su índice y los exponentes subradicales tengan algún factor común, suprimiendo el cual quedará el radical simplificado, totalmente si ese factor es el *m. c. d* de dichos números (índice y exponentes), y sólo parcialmente si los cocientes tienen aún otro ú otros factores comunes.

Ejemplos:

1.° $\sqrt[12]{a^6 b^{10} c^4} = \sqrt[6]{a^3 b^5 c^2}$ (simplificación total).

2.° $\sqrt[8]{a^6 b^4 c^{12}} = \sqrt[4]{a^3 b^2 c^6}$ (simplificación parcial).

170. *Reducción á índice común.* Para reducir varios radicales á otros del mismo índice, se simplificarán totalmente primero, se hallará el mínimo múltiplo común de

los nuevos índices, y se multiplicará cada uno de éstos y los exponentes subradicales respectivos, por el cociente de dicho m. m. c. por el índice correspondiente.

Ejemplo: $\sqrt[8]{a^6}$, $\sqrt[9]{8}$, $\sqrt[6]{c^4}$, $\sqrt[18]{12^6}$, $\sqrt[12]{m^3}$. Simplificándolos $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{c^2}$, $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt[4]{m}$.

El mínimo común múltiplo de los nuevos índices es 12, cuyos cocientes $12 : 4 = 3$ y $12 : 3 = 4$, de modo que no hay sino multiplicar por 3, en el primero y último, y por 4 en los tres intermedios, los índices y exponentes respectivos, para tener los radicales siguientes, todos del mismo índice, y cada uno equivalente á cada uno de los primeros, según expresan las igualdades

$$\sqrt[8]{a^6} = \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^9}, \quad \sqrt[9]{8} = \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{2^4},$$

$$\sqrt[6]{c^4} = \sqrt[3]{c^2} = \sqrt[12]{c^8},$$

$$\sqrt[18]{12^6} = \sqrt[3]{12} = \sqrt[12]{12^4}, \quad \sqrt[12]{m^3} = \sqrt[4]{m} = \sqrt[12]{m^3}.$$

En este último se ha reproducido el primitivo, como era de prever.

Escolio. Si los índices (de los radicales simplificados) son primos relativos dos á dos, su mínimo múltiplo común será su producto, y habrá que multiplicar cada uno por los demás, etc.

Adición y sustracción de radicales.

171. La adición y la sustracción de radicales no pueden sino indicarse, á no ser que sean *semejantes*, es decir, *que tengan el mismo índice y la misma cantidad subradical*; en cuyo caso se suman ó restan respectivamente los factores exteriores al radical común y se multiplica éste por dicha suma ó resta efectuada ó indicada.

Ejemplos:

$$5\sqrt{ab}+4\sqrt{ab}-7\sqrt{ab}=(5+4-7)\sqrt{ab}=2\sqrt{ab},$$

$$3\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a}+6\sqrt[4]{a}=8\sqrt[4]{a}.$$

Pues, 5 + 4 — 7 cosas del mismo nombre, son 2 cosas de ese nombre, etc.

Claro es que si los factores externos son letras, y no pueden ser realmente sumados ó restados, se dejará indicada la operación.

Ejemplo:

$$5a\sqrt[3]{b}-3c\sqrt[3]{b}+2m\sqrt[3]{b}=(5a-3c+2m)\times\sqrt[3]{b}.$$

Escolio. *Las sumas y diferencias de radicales incomensurables son,* evidentemente, *incomensurables también.*

Multiplicación y división de radicales.

172. *Para multiplicar radicales se reducen á común índice*, si no le tienen, *y se pone bajo un radical de ese mismo índice, el producto de las cantidades subradicales* (167 y 168).

Ejemplos: $\sqrt[3]{a^2b}\times\sqrt[3]{ab^2}\times\sqrt[3]{5cb}=$

$$\sqrt[3]{5a^2b.ab.^2cb}=\sqrt[3]{5a^3b^4c},$$

$$\sqrt{10}\times\sqrt[3]{12}\times\sqrt[6]{9}=\sqrt[6]{10^3}\times\sqrt[6]{12^2}\times\sqrt[6]{9}=$$

$$\sqrt[6]{10^3.12^2.9}\text{, etc.}$$

Escolio. El producto de radicales incomensurables, será comensurable siempre que reducidos ya á común índice y descompuestos en sus factores primos los números subradicales, las sumas de los exponentes de cada factor sean todas múltiplas de dicho índice común. Pues,

$$\sqrt[n]{a^{mn}.c^{rn}\ldots}=a^m.c^r\ldots\ (168).$$

Para *dividir dos radicales, se reducen al mismo índice, si no le tenían ya, y dividiendo las cantidades subradicales, se escribe ese cociente debajo de otro radical del mismo índice.*

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{\frac{120}{15}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Como este ejemplo atestigua, el cociente de dos radicales incomensurables, puede ser comensurable, y lo será siempre que el cociente de las cantidades subradicales (del mismo índice) tenga raíz exacta de dicho grado. Dedúzcase la condición análoga á la del producto, respecto á los factores primos.

Potencias y raíces de radicales.

173. *Para elevar un radical á una potencia, se eleva la cantidad subradical, y se escribe esa potencia bajo un radical del mismo índice que el dado*, ó bien se divide el índice del radical por el exponente de la potencia, si es divisible, dejando lo demás lo mismo.

Para extraer una raíz de un radical, se multiplican los índices de ambas raíces dejando la misma la cantidad subradical, ó bien se dividen los exponentes de ésta por el índice de la raíz pedida, si son divisibles, dejando lo mismo lo demás del radical primitivo (167 y 168).

Ejemplos:

$$\left(\sqrt{a}\right)^5 = \sqrt{a^3},\ \left(\sqrt[6]{a}\right)^2 = \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a} \ldots (169).$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a},\ \sqrt[4]{\sqrt{a}} = \sqrt[8]{a},\ \sqrt{\sqrt[3]{a^8}} = \sqrt[6]{a^8} = \sqrt[3]{a^4}\ (169).$$

Escolio. Admitiendo *exponentes fraccionarios*, para lo cual hay que generalizar los conceptos de potencias y raíces, se puede extender también las últimas reglas, á los casos en que no sea divisible el índice por el exponente ó viceversa, y decir que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

y $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^r}} = \sqrt[mn]{a^r} = \sqrt[m]{a^{\frac{r}{n}}} = \sqrt[n]{a^{\frac{r}{m}}} = a^{\frac{r}{mn}}$.

En virtud de este último caso, sólo hay necesidad de extraer raíces sucesivas cuyos índices sean números primos para extraer otra raíz de grado cualquiera (96); pero como en Aritmética sólo se aprende á extraer raíces cuadradas y cúbicas, únicamente se podrá extraer raíces cuyos índices no tengan entre sus factores primos más que á esos dos números 2 y 3.

Por último, debemos hacer notar una operación auxiliar que se verifica á veces con radicales, y cuya legitimidad es indudable en virtud de toda esta teoría. Consiste en *sacar* ó *introducir factores* en un radical, según conveniencias del cálculo.

Ejemplos:

$$\sqrt[3]{a^6 b^{12} c^7 d} = a^2 b^4 c^2 \sqrt[3]{c\,d}\ ,\ 2a\sqrt[3]{bc^2} = \sqrt[3]{8a^3bc^2}$$

Lo primero no es más que extraer las raíces posibles de los factores subradicales, y lo segundo todo lo contrario.

174. Según la definición aritmética de potencias y raíces (66).

1.° Las potencias de los números mayores que 1 crecen, si crece el exponente, no teniendo límites ambos crecimientos, ó teniendo ∞ por límite, según la frase usual.

En efecto, siendo $a > 1$, $a^2 > a$, $a^3 > a^2$, ... $a^n > a^{n-1}$, etc.

2.° Las potencias de los números menores que 1 disminuyen indefinidamente ó tienen cero por límite, si crece su grado hasta el ∞.

Puesto que si $a < 1$, $a^2 < a$, $a^3 < a^2$, ... $a^n < a^{n-1}$, etc.

3.° Las raíces de los números mayores que 1 disminuyen, y las de los menores que 1 crecen, si crece el grado ó índice de la raíz, pero tienen por límite común 1, ambas series de raíces, cuando su grado crece indefinidamente.

Si $a > 1$, y $x = \sqrt[n]{a}$, $z = \sqrt[n+1]{a}$,

será $x^n = a$, $z^{n+1} = a$;

dividiendo ordenadamente estas últimas igualdades resulta $\frac{x^n}{z^{n+1}} = 1$, y multiplicando ambos miembros por z

$\frac{x^n}{z^n} = z$ ó $z = \left(\frac{x}{z}\right)^n$, y elevando á $n+1$

$z^{n+1} = a = \left(\frac{x}{z}\right)^{n(n+1)}$; y como $\frac{x}{z} > 1$, puesto que $a > 1$, según el caso 1.°, $x > z$ ó $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n+1]{a}$.

Lo mismo se demostrará que si $a < 1$, $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n+1]{a}$.

Ahora, como ambas series de raíces, sin dejar su continuo decrecimiento ó crecimiento respectivamente, no pueden llegar á 1 sino siendo $n = \infty$, claro es que 1 es límite inferior de las raíces de los números mayores que 1, cuyo grado crece infinitamente, y límite superior de las raíces de los números menores que 1, cuyo índice crece también hasta ∞.

Si suponemos que los grados de *potencias* y *raíces* pueden ser fraccionarios (173, Escolio), podremos también suponer que dichos grados disminuyen indefinidamente y formular los últimos teoremas como sigue.

1.° Las potencias cuyos grados disminuyen indefinidamente, disminuyen también si la base es mayor que 1, y crecen si la base es menor que 1, teniendo á 1 por límite en ambos casos ($a^0 = 1$).

Porque representando por $\frac{1}{x}$ el grado, $a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a}$ (173), y por tanto, cuando $x = \infty$, $\frac{1}{x} = 0$; y viceversa, si $x = 0$, $\frac{1}{x} = \infty$ (141, Escolio 2.°).

LECCIÓN 15.

Necesidad del cálculo de números aproximados, y doble cuestión relativa á los límites de las aproximaciones (175). *Errores absolutos y relativos: sus relaciones mutuas* (176). *Adición de números aproximados: adición abreviada* (177). *Sustracción de números aproximados: sustracción abreviada* (178). *Multiplicación de números aproximados* (179). *Multiplicación abreviada: regla práctica* (180). *División con datos aproximados* (181). *División abreviada: regla práctica* (182). *Potencias de los números aproximados* (183). *Raíces de los números aproximados, y especialmente raíces cuadrada y cúbica* (184).

CAPÍTULO 3.°—CÁLCULO DE LOS NÚMEROS APROXIMADOS.

175. Según ya hemos indicado (164), los números *inconmensurables* han de ser calculados, en la mayoría de los casos, por medio de los *conmensurables* que se les aproximan, y aun *éstos* no se calculan á veces con toda exactitud, ya por abreviar los cálculos, ya por no ser aquella posible ni precisa para las aplicaciones. Pero, en todos los casos en que se opere con números aproximados, conviene sí saber hasta qué límite llega ó puede llegar la aproximación, para no perder tiempo con el cálculo de guarismos inútiles ó innecesarios, etc.

Es, pues, indispensable resolver para todas las operaciones aritméticas, con números aproximados, esta doble cuestión:

Conocidos los límites de las aproximaciones de los datos, hallar el límite de la aproximación del resultado.

Prefijado el límite de aproximación del resultado, hallar los límites de las aproximaciones que han de tener los datos.

Escolio. La voz *límite* no tiene aquí el sentido extricto con que la definimos (141), sino que expresa simplemente un número mayor que la aproximación, es decir, tiene el sentido que ya le dimos en el teorema (164) al expresar: si un número está comprendido entre otros dos que se diferencian entre sí en $\frac{1}{n}$, cualquiera de éstos representa á aquél *con un límite de error* igual (el límite) á $\frac{1}{n}$, ó con un error menor que $\frac{1}{n}$, etc.

Escolio 2.° Adviértase que generalmente no debe decirse: el error ó la aproximación de tal número es *igual á tanto,* sino es menor que tal límite, ó tiene por límite este otro número; pues *si se supiera exactamente el error ó la aproximación, no había necesidad del cálculo de números aproximados.*

176. Llámase *error absoluto* la diferencia entre el número exacto y el número aproximado, referidos á la misma cantidad, y *error relativo* el cociente del absoluto por el número exacto en cuestión. Ni uno ni otro de ambos errores serán cognoscibles exactamente en la mayoría de los casos, pero sí será posible, y útil casi siempre, saber sus límites en las dos clases de cuestiones, que según el número anterior, surgen al calcular números aproximados. Esos límites dependerán, naturalmente, de las operaciones efectuadas ó efectuandas con dichos números, pero existe en todos los casos una íntima y sencilla relación entre ambos errores, según expresan los siguientes

Teoremas. 1.° Si el error absoluto (de un número entero ó fraccionario básico) es menor que la unidad del orden m, á contar desde la primera cifra significativa de la izquierda considerada como de primer orden, el error relativo será menor que 1 dividido por dicha primera cifra seguida de $m - 1$ ceros.

2.° Si el error relativo es menor que la unidad u del orden m, y el número exacto es menor que $10^m \times u$, el absoluto será menor que la unidad del orden de la cifra que ocupe el lugar m, á partir de la primera significativa de la izquierda.

1.° Si a es un número aproximado al exacto A en menos de u, siendo $\alpha < u$ el error absoluto por exceso ó defecto, es decir $A = a + \alpha$, y u la unidad del orden m á contar de la primera cifra significativa de la izquierda K, será $A > K \times 10^{m-1} \times u$, y por consiguiente

$$\frac{\alpha}{A} < \frac{u}{K \times 10^{m-1} \times u} = \frac{1}{K \times 10^{m-1}} \text{ [1], según el enunciado.}$$

2.° Si $\frac{\alpha}{A} < \frac{1}{10^m}$ y $A < 10^m \times u$, será $\frac{\alpha}{10^m \times u} < \frac{1}{10^m}$, ó $\frac{\alpha}{u} < 1$, ó $\alpha < u$.

Corolario 1.° El error relativo de todo número que tenga m cifras exactas, es menor que $\frac{1}{10^{m-1}}$. Pues este es el valor del límite [1] para el *minimum* $K = 1$.

Cor.° 2.° Si además de ser exactas las m primeras cifras, la siguiente es menor que la primera de la izquierda, el error relativo es menor que $\frac{1}{10^m}$. Pues siendo $u < K$, $\alpha < u$ será $\alpha < K \times \frac{u}{10}$ y $\frac{\alpha}{A} < \frac{K \times \frac{u}{10}}{K \times 10^{m-1} \times u} = \frac{1}{10^m}$.

Ejemplos: 1.° Si tomamos el número 5460 como aproximado al exacto 5467,3, el error absoluto 7,3 es menor que 10, y como el número exacto es mayor que 5000, el error relativo $\frac{7{,}3}{5467{,}3}$ será, *á fortiori* (133), menor que $\frac{40}{5000} = \frac{1}{500} = \frac{1}{5 \times 100}$, según expresa el teorema 1.°

2.° Sea el número aproximado 3,14159, cuyo error absoluto, como en todo decimal que tiene más cifras que las tomadas, es menor que la unidad del último orden de éstas, aquí 0,00001; el error será menor que $\frac{0{,}00001}{3{,}14159} = \frac{1}{314159} < \frac{1}{300000}$.

Adición de números aproximados.

177. Teorema. *La suma de varios números aproximados tendrá un error absoluto, á lo más igual á la suma de los errores de los sumandos;* y en el mismo sentido que el de éstos, si todos se aproximan por defecto ó por exceso (27, 3.ª)

Recíproco. Para obtener la suma de números aproximados, con menos error que un límite dado α, bastará que cada sumando se aproxime á su valor exacto en menos de α dividido por el número de ellos. Así se hará *la adición abreviada,* si los datos tienen más cifras.

Corolario. Si los sumandos no son más de 10, y cada uno se aproxima en menos de $\frac{1}{10^n}$, la suma tendrá un error menor que $\frac{1}{10^{n-1}}$; si son más de 10 y menos de 100, el error de la suma será menor que $\frac{1}{10^{n-2}}$ y así sucesivamente.

Escolio 1.º Ya se sabe, por el número anterior, calcular un límite del error relativo, conociendo el del absoluto.

2.º Si unos sumandos están aproximados por defecto y otros por exceso, es claro que aún serán menores los errores absoluto y relativo de la suma, que estando todos aproximados en el mismo sentido, y aun pudiera ser exacta la suma, si los errores de los sumandos se compensaran mutua y exactamente.

3.º Si la primera cifra decimal que sigue á las tomadas es menor que 5, claro es que el error absoluto, por defecto, es menor que media unidad del último orden de aquéllas, y si dicha cifra es mayor que 4, dicho error es mayor que esa media unidad, pero añadiendo 1 á la última cifra de las tomadas, se tendrá una aproximación por exceso menor que dicha media unidad. Tomando siempre los sumandos con esa aproximación mínima de media unidad básica del orden *n,* se obtendrá la suma aproximada en menos de media unidad del orden $n-1$, si aquéllos no pasan de 10; en menos de la unidad de ese orden $n-1$, si pasan de 10 y no de 20, etc.

Ejemplo: Para obtener aproximadamente en menos de 0,001, una suma de diez ó menos sumandos, bastará que cada uno de éstos se aproxime en menos de 0,0001, ó que tenga exactas las 4 cifras después de la coma, etc.

Sustracción de números aproximados.

178. Teorema. *El error absoluto de la diferencia de dos números aproximados en el mismo sentido, es igual á la diferencia de los errores de los datos.*

Pues si $A = a + \alpha$, $B = b + \beta$, siendo α y β los errores, será (93, 2.º) $A - B = a - b + \alpha - \beta$, [1].

Si es $\alpha > \beta$, el error $\alpha - \beta$ de la diferencia $a - b$ es por defecto, como los de los datos; pero si

$$\alpha < \beta,\ \alpha - \beta = -(\beta - \alpha),\ (92)$$
$$\text{y } A - B = a - b - (\beta - \alpha),\ [2],$$

ó el error $\beta - \alpha$ es por exceso. En ambos casos es verdadero el teorema, según las igualdades [1] y [2].

Análogamente se demostraría si $A = a - \alpha$, $B = b - \beta$ ó los datos a, b fuesen aproximados por exceso.

Corolario. El error de la diferencia será menor que el mayor de los errores de los datos; y por tanto, para obtener una diferencia con una aproximación decimal dada, bastará que los datos tengan exactas las cifras hasta la del orden de la unidad prefijada como límite de la aproximación; efectuándose así una *sustracción abreviada,* si los datos tienen más cifras.

Ejemplo: Hallar en menos de un milímetro la diferencia entre la vara y el estadal, sabiendo que 1 $^{\text{var.}}$ = 0,83591 de metro y 1.$^{\text{est.}}$ 3,3436 metros. Despreciando las cifras que siguen á las milésimas será $3343 - 835 = 2508$ milímetros.

Multiplicación de números aproximados.

179. Teorema. *El error absoluto del producto de dos números aproximados por defecto es igual á la suma de productos de cada factor por el error del otro, y de*

los dos errores entre sí, y es del mismo sentido que éstos.

Pues si

$A = a + \alpha,\ B = b + \beta,\ AB = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta (42).$

Con lo cual, siendo a, b los factores aproximados y α, β sus errores absolutos respectivos, queda demostrado el teorema.

Corolario 1.° El error relativo del producto es menor que la suma de los errores relativos de ambos factores (en las condiciones dichas).

Pues el error relativo

$$\frac{a\beta + b\alpha + \alpha\beta}{AB} = \frac{a\beta + (b + \beta)\alpha}{AB} = \frac{a\beta + B\alpha}{AB} = r,$$

y sustituyendo a por A que es mayor, será

$$r < \frac{A\beta + B\alpha}{AB} = \frac{\beta}{B} + \frac{\alpha}{A},$$ según el enunciado.

Análogamente se hallarán los límites de los errores absolutos y relativos en los casos en que ambos factores se aproximen ambos por exceso, ó uno por defecto y otro por exceso.

$(A = a - \alpha,\ B = b - \beta;\ A = a + \alpha,\ B = b - \beta.)$

Cor.° 2.° Como el producto de los errores de ambos factores es generalmente muy pequeño, suele despreciarse, y tomar como límites: del error absoluto del producto, la suma de los dos productos $a\beta + b\alpha$, y del error relativo la suma ó diferencia $\dfrac{\alpha}{A} \pm \dfrac{\beta}{B}$ de los errores relativos de los datos, según éstos se aproximen en el mismo ó en contrario sentido. En este supuesto, podremos afirmar que

3.° En general, el error relativo de un producto de varios factores aproximados, es menor que la suma de los errores relativos de los factores aproximados por defecto, menos la suma de los errores relativos de los otros factores aproximados por exceso, y con mayor razón, menor que la suma de los errores relativos por defecto.

180. *Multiplicación abreviada.* Siendo el producto de dos números, enteros ó fraccionarios básicos, la suma de los productos parciales de uno de aquéllos por las cifras

del otro, el error absoluto del producto total será la suma de los errores de dichos productos parciales, y en el mismo sentido que los de los datos, supuestos aproximados ambos por defecto ó exceso. Pero, como cada producto parcial expresa unidades de distinto orden, según la cifra del multiplicador, será conveniente cuando no se opere con todas las cifras de ambos factores, por innecesarias para alcanzar un límite prefijado del error del producto total, tomar en cada nuevo producto parcial una cifra más en el multiplicando, suponiendo que se avanza en el multiplicador de derecha á izquierda, según lo más usual. De esta manera todos los productos parciales representan unidades del *mismo orden* (46, 2.° modo), y será más fácil fijar el límite del error del producto, menor en ese caso que tantas unidades de ese orden común como unidades simples tenga la suma de los valores absolutos de las cifras usadas del multiplicador (177).

Si esa suma no pasa de 10, bastará tomar en el multiplicando una cifra más que la del orden prefijado como límite del error, al multiplicarle por las unidades simples del multiplicador; si pasa de 10 y no 100 dicha suma, se tomarán dos cifras más en el multiplicando al multiplicarle por las unidades simples del multiplicador, etc., siguiendo luego las multiplicaciones según lo ya indicado, tomando una cifra más á la derecha en el multiplicando, por cada lugar que se avanza á la izquierda en el multiplicador; para facilitar lo cual se acostumbra invertir las cifras del multiplicador según la siguiente

Regla práctica. *Para la multiplicación abreviada de dos enteros ó decimales, con menos error que la unidad de un cierto orden* (mayor naturalmente que las inferiores de los datos), *se coloca el multiplicador invertido debajo del multiplicando, de modo que sus unidades simples estén bajo la cifra de orden inferior en un lugar ó dos* (*) *á la unidad límite del error; se efectúan todos los productos parciales empezando cada uno en la cifra del multipli-*

(*) Como es raro que la suma de las cifras del multiplicador pase de 100, no creemos necesario considerar ese caso excepcional.

cando que esté sobre la respectiva del multiplicador, se suman todos esos productos (que son de ese orden inferior al fijado), *y despreciando una ó dos cifras á la derecha en la suma, se tendrá el producto con la aproximación pedida.*

Ejemplo. Hallar el producto $6366 \times 3{,}141592$ con menos error que 0,001. Tomemos por multiplicador, como se hace casi siempre, el factor de menos cifras 6366. Escribiéndole invertido bajo el multiplicando, de modo que las unidades simples 6 estén bajo las cienmilésimas 9, resultará, despreciando las dos últimas cifras y forzando la unidad en la última restante, que el producto buscado es 19999,375.

$$\begin{array}{r} 3{,}14159200 \\ \times \quad 6366 \\ \hline 1884955200 \\ 94247760 \\ 18849552 \\ 1884954 \\ \hline 19999{,}37466 \end{array}$$

Escolio. Como es natural, se suplen con ceros los lugares de las cifras que falten para poder aplicar la regla. Tal sucede en el ejemplo anterior.

División con datos aproximados.

181. Teorema 1.° *El error absoluto del cociente de un número aproximado por otro exacto, es igual al cociente del error del dividendo por el divisor, y en el mismo sentido que aquél.*

Pues si el dividendo es $A = a + \alpha$ y el divisor B, es claro que $(a + \alpha) : B = a : B + \alpha : B$, donde se ve que el error $\alpha : B$ del cociente, es el enunciado en el teorema.

Corolario. El error relativo en este caso será

$$\frac{\alpha : \mathrm{B}}{\mathrm{A} : \mathrm{B}} = \frac{\alpha}{\mathrm{A}}$$ igual al error relativo del dividendo.

Teorema 2.° *El error relativo del cociente de dos números aproximados es menor, en todos los casos, que la suma de los errores relativos de los datos.*

Pues, siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, el error relativo del dividendo será (180, 3.°)

menor que la suma de los errores relativos del divisor y del cociente, y con mayor razón el error relativo del cociente será el enunciado en el teorema.

Corolario. Para obtener con m cifras exactas, el cociente de dos números aproximados, basta que cada uno de ellos tenga $m+2$ cifras exactas, y á veces $m+1$.

Pues esto equivale á que su error relativo sea menor que $\frac{1}{10^{m+1}}$, y con más razón menor que $\frac{1}{2\times 10^m}$, y por lo tanto el error relativo del cociente será menor que

$$\frac{2\times 1}{2\times 10^m}=\frac{1}{10^m}.$$

Escolio. Considérense los casos particulares en que uno ú otro de los datos sea exacto.

182. *División abreviada.* Como en todos los casos se puede reducir á la de enteros la división de fracciones decimales ó básicas (157), bastará saber hallar *abreviadamente* el cociente entero de dos números de esta especie, sean exactos ó aproximados.

Regla práctica. *Para hallar abreviadamente el cociente entero de dos números de esta especie, se marcan á la izquierda del divisor las cifras suficientes para que el número que expresen sea igual ó mayor que el de cifras del cociente multiplicado por 9; esas cifras marcadas formarán el último divisor parcial, y de las que les siguen se contará una menos que las del cociente, tachando ó suprimiendo las restantes; todas las no tachadas compondrán el primer divisor ó divisor de entrada.*

Suprímanse ó táchense también á la derecha del dividendo tantas cifras como quedaron en el divisor completo á la derecha de las marcadas; las que resten formarán el primer dividendo.

Divídase ese primer dividendo por el primer divisor y se tendrá la primera cifra del cociente; multiplíquese ésta por su divisor, y restando el producto del dividendo respectivo, el resto será el segundo dividendo parcial, el cual se dividirá por el número que quede quitando al primer *divisor su cifra de la derecha; y análogamente se continuará hasta obtener la última cifra ó sea la de las unidades del cociente total.*

Sean, p. ej., los números 19999,37466 y 3,141592 cuyo cociente queremos hallar con menos error de una unidad simple.

Añadiendo un cero al dividendo y quitando las comas, queda reducida la cuestión á buscar el cociente entero de 19999374660 : 3141592 cuyo cociente ha de constar, sin duda, de 4 cifras (62). Como $4 \times 9 = 36$, márquense (con puntos) las tres primeras cifras de la izquierda en el divisor, que componen el entero 314 mayor que 36; y contando luego otras tres (una menos que las que ha de tener el cociente), prescíndase de la restante 2. Prescíndase también en el dividendo de las 4 cifras de la derecha, pues 4 fueron las que quedaron en el divisor después de las marcadas, y dividiendo el número 1999937 por el 314159 se tendrá la primera cifra 6 del cociente; la cual, multiplicada por su divisor y restado el producto de su dividendo, da el resto 114983. Dividido este número por 31415, resulta 3 para segunda cifra del cociente; la cual, por trámites análogos, da el resto 20738, que dividido por 3141 da 6 para tercera cifra del cociente; y por último, el resto correspondiente 1892, dividido por 314, da la última cifra 6 del cociente pedido.

Escolio. Siendo estos números los mismos del ejemplo (180), quedan mutuamente comprobadas ambas operaciones.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l}
1999937\overline{4660} & \dot{3}\dot{1}\dot{4}159\overline{2} \\
\cline{2-2}
114983 & 6366 \\
20738 & \\
1892 & \\
0008 &
\end{array}$$

Para demostrar esa regla enunciada, y ya aplicada al anterior ejemplo, observemos que al restar, no los productos del divisor por cada cifra del cociente, sino otros números menores, el exceso del dividendo sobre la suma de los productos restados es evidentemente 84660,—número formado poniendo á la derecha del último resto las cifras suprimidas en el dividendo.—El cociente hallado es, pues, el exacto del dividendo menos ese resto 84660 y más los productos despreciados, por el divisor dado. Si cada uno de esos dos números (resto y suma de productos despreciados) es menor que el divisor, es claro que el cociente entero hallado no podrá diferir en una unidad del verdadero. Desde luego el resto lo es (menor que el divisor), pues siendo el mismo el número de cifras suprimidas, en dividendo y divisor, y siendo el último resto parcial menor necesariamente que el último divisor, también será el resto completo menor que el divisor completo ($8 < 314$, $84660 < 3141592$ en el ejemplo puesto). En cuanto á los productos despreciados, ó sea los de cada cifra del cociente hallado, por las del divisor total que están sucesivamente á la derecha de cada divisor parcial, son indudablemente los que se hubieran despreciado en la multiplicación abreviada (180) del divisor por el cociente, colocando este invertido de modo que sus unidades 6 estuvieran bajo la última cifra 4 del último divisor. Como esta cifra representa tantas decenas de millar como unidades hay en la suma de las cifras del cociente, siendo 4 el número de esas cifras, claro es que dicha suma de productos es menor que 4×9 decenas de millar. Pero el último divisor es igual ó mayor que 4×9, luego la suma de los productos despreciados es menor que este último divisor, considerado con su valor relativo 3140000, y con más razón menor que el divisor total 3141592.

Corolarios. 1.° Si alguna de las divisiones parciales es exacta, se añadirán á las cifras halladas del cociente tantos ceros como cifras le faltaren; pues esas serían las que resultarían siguiendo la regla.

2.° Si algún dividendo parcial contiene 10 veces á su respectivo divisor, se completará el cociente con tantos nueves como cifras faltaren por hallar. Pues aquello indica que al dividendo anterior le faltaban menos de 10 unidades para dar cociente exacto, teniendo una unidad más el cociente parcial respectivo; luego según el corolario anterior, éste es también verdadero, siendo el cociente que debe ser el así completado.

Escolios. 1.° Si el divisor no tiene bastantes cifras para formar el divisor de entrada, se puede añadirle ceros, y otros tantos al dividendo, pero eso equivale, sin duda, á comenzar la división por el método general (61), hasta que las cifras que falten del cociente permitan usar el abreviado.

2.° Si se quiere un cociente aproximado hasta una unidad decimal dada, se añadirán al dividendo tantos ceros como cifras decimales se quieran, separando luego éstas; supuestos enteros, mientras se opera, dividendo, divisor y cociente.

Potencias y raíces de números aproximados.

183. Teorema. *El error relativo de cada potencia, de grado entero, de un número aproximado por defecto es: 1.°, mayor que el error relativo de ese número, y 2.°, menor que el producto del grado de la potencia por dicho error relativo de la raíz.*

Lo 1.° es consecuencia del número 179, teorema, no siendo una potencia de grado entero más que un producto de factores iguales.

Lo 2.° si $A = a + \alpha$, siendo $\frac{\alpha}{A}$ el error relativo de a como $a^n = a \times a \times a \dots$ (n factores a), el error relativo de a^n será menor que $\frac{\alpha}{A} + \frac{\alpha}{A} + \frac{\alpha}{A} \dots$ (n veces), es decir, menor que $\frac{\alpha}{A} \times n$, según el enunciado.

Corolarios. 1.° El error relativo del cuadrado de un número aproximado por defecto, es menor que el duplo del de ese número; y el del cubo, menor que el triplo del respectivo error de la raíz, etc.

2.° Para obtener con m cifras exactas, después de la coma, el cuadrado ó el cubo de una fracción básica, es suficiente que ésta tenga exactas las $m + 1$ cifras fraccionarias, si la primera de la izquierda no es menor que 2 ó 3 respectivamente; y si lo es, será preciso que tenga $m + 2$ cifras decimales exactas el número, para que tengan m respectivamente su cuadrado ó su cubo.

Ejemplo. Para hallar el cuadrado y el cubo de 3,14159265... con 4 cifras decimales exactas, bastará tomar 3,14159 para el cuadrado y 3,141592 para el cubo.

184. *El error relativo de una raíz aproximada por defecto, es menor que el de la potencia respectiva, pero mayor que éste dividido por el índice.*

Pues, si α es el error absoluto de la raíz de grado n, y β el de la potencia de dicha raíz A, sabemos por el númeanterior que

1.° $\frac{\beta}{A^n} > \frac{\alpha}{A}$, ó lo que es igual $\frac{\alpha}{A} < \frac{\beta}{A^n}$.

2.° $\frac{\beta}{A^n} < \frac{\alpha}{A} \times n$; y por tanto, dividiendo por n,

$$\frac{\alpha}{A} > \frac{\beta}{A^n} : n.$$

Corolario. Para obtener una raíz cuyo índice sea menor que 10, con m cifras decimales exactas, basta que el número cuya raíz se extrae tenga $m + 1$ cifras exactas.

Ejemplos. 1.° Calcular $\sqrt{3,141592}$ con 3 decimales exactas.

2.° Calcular la raíz cúbica de ese mismo número con igual aproximación.

Escolio. Para extraer *abreviadamente* raíces cuadradas y cúbicas, ya dimos en el número 124 los procedimientos más usuales.

Cuestiones sobre números incomensurables y aproximados.

1.ª Demostrar que

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2-\sqrt{3}} = 1.$$

2.ª Comprobar que

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}.$$

3.ª Demostrar que

$$\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3-\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{3+\sqrt{3}}.$$

4.ª Demostrar que todo número impar que no sea un múltiplo de 4 más 1, tiene su raíz cuadrada irracional.

5.ª Demostrar que todo entero que tenga 5 por cifra de las unidades, y la de las decenas no sea 2, no es cuadrado perfecto.

6.ª Extraer las raíces cuadrada y cúbica del número 3240 descomponiéndole en sus factores primos. Id. del quebrado $\frac{3240}{1288651}$ que deben ser $\frac{18}{10829} \times \sqrt{910}$ y $\frac{6}{1547} \times \sqrt[3]{27795}$ respectivamente.

7.ª Ningún número par no divisible por 8 puede ser cubo perfecto.

8.ª Ningún número impar que no sea igual á un múltiplo de 8 más ó menos 1 ó 27, puede ser cubo perfecto.

9.ª Un número terminado en 5, no puede ser cubo si la cifra de las decenas no es 2 ó 7.

10. Calcular $\sqrt{5} + \sqrt{11}$ en menos de 0,001.

11. Id. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ con 4 decimales exactas.

12. Sabiendo que el año tiene 365 días y 0,2564, calcular con tres decimales los días que tiene un siglo.

13. Calcular en menos de un kilómetro y *abreviadamente* la distancia del Sol á la Tierra, sabiendo que la luz de aquel astro tarda en llegarnos 498 segundos, con la velocidad de 308000 kilómetros por segundo.

14. Comprobar por división abreviada el cálculo anterior.

15. Multiplicar abreviadamente la distancia hallada en la cuestión 13, por el número 6,283184, para obtener también en kilómetros la longitud de la órbita terrestre supuesta circular.

16. Calcular en menor de 0,01 el producto

$$3141{,}592 \times \left(\sqrt{5} - 1\right).$$

17. Hallar en menos de un kilómetro la distancia de Granada al Ecuador, sabiendo que su latitud geográfica es 37° 11′, y que cada grado equivale á $\frac{40000}{360}$ kilómetros.

18. Hallar con 4 cifras decimales exactas las raíces cuadrada y cúbica del n.º incomensurable 2,718281828...

19. Demostrar que

$$1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots n)^2.$$

20. Calcular $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ en menos de 0,0001.

LIBRO CUARTO.—COMPARACION ARITMÉTICA.

CAPÍTULO 1.°—COMPARACIÓN POR DIFERENCIA.

Lección 16.

Razón por diferencia ó aritmética: sus antecedente y consecuente (185). *Equidiferencia: sus antecedentes, consecuentes, medios y extremos; equidiferencias continuas* (186). *Propiedad fundamental de toda equidiferencia; íd. de las continuas; recíprocos* (187). *Modo de hallar un término incógnito en una equidiferencia general ó continua* (188). *Cuarto y tercero diferencial á dos números dados; medio diferencial ó aritmético entre dos ó más números: su uso* (189). *Formas varias de una misma equidiferencia* (190). *Progresión aritmética ó por diferencia: progresión creciente y decreciente, limitada é indefinida* (191). *Fórmulas del término general ó último, y de la suma de todos; cuestiones que pueden resolverse mediante esas fórmulas* (192). *Interpolación de medios diferenciales entre dos números dados* (193). *Interpolación del mismo número de medios entre cada dos términos de una progresión por diferencia* (194).

ART.° 1.°—EQUIDIFERENCIAS.

185. Se llama *razón por diferencia* ó *razón aritmética*, de dos números cualesquiera, su *diferencia* ó resta, cuando no tanto se trata de hallarla, cuanto de compararla (generalmente por igualdad) con otra ú otras razones de esa misma especie. En esos casos el minuendo toma el nombre de *antecedente*, y el sustraendo el de *consecuente:*

y es claro que el antecedente será igual al consecuente más la razón, y el consecuente es igual al antecedente menos la razon.

186. Se llama *equidiferencia*, y también,—aunque ya es poco usado,—proporción aritmética ó por diferencia, á la igualdad de dos diferencias indicadas, ó de dos razones aritméticas. Su fórmula general será, pues,

$$a - b = c - d, [1].$$

Antiguamente se escribía $a \,.\, b : c \,.\, d$, y se leía a es aritméticamente á b, como c es á d. Mas, como el punto y los dos puntos tienen otros significados aritméticos, no deben escribirse las equidiferencias sino en la forma [1], aunque pueden leerse de ambos modos indistintamente.

Toda equidiferencia general tiene, pues, dos antecedentes a, c (en la [1]), dos consecuentes b, d; dos extremos a, d y dos medios b, c.

Si los términos medios son iguales, ó no hay más que un medio repetido, la *equidiferencia* se llama *continua;* su fórmula es por tanto, $a - b = b - c$.

Ejemplos: $\begin{cases} \text{De equidiferencia general, } 10 - 8 = 5 - 3. \\ \text{De equidiferencia continua, } 15 - 10 = 10 - 5. \end{cases}$

187. La propiedad fundamental de toda equidiferencia es que *la suma de los extremos es igual á la de los medios, y por tanto, al duplo del término medio en las continuas.*

En efecto, si añadimos los consecuentes á los dos miembros de la igualdad $a - b = c - d$, [1], resultará esta otra $a - b + b + d = c - d + b + d$, [2], y como $- b + b = 0$, $- d + d = 0$, se reduce la igualdad [2] á la siguiente $a + d = b + c$, según la 1.ª parte del enunciado.

Para la 2.ª deduciremos por idénticas operaciones, ó aplicando la 1.ª, que si

$$a - b = b - c \text{ será } a + c = b + b = 2\,b.$$

Recíprocamente: *si la suma de dos números es igual á la de otros dos, ó al duplo de un tercero, se podrá formar con esos números una equidiferencia que será continua en el segundo de esos casos.*

Pues si $a + d = b + c$, restando $b + d$ de ambos miembros será $a + d - b - d = b + c - b - d$, y reduciendo ó simplificando, $a - b = c - d$ (1.ª parte).

Y si

$a + c = 2b$, restando $b + c$, $a + c - b - c = 2b - b - c$ y reduciendo $a - b = b - c$ (2.ª parte).

188. De la propiedad fundamental se deduce que si se desconoce un término de una equidiferencia, se puede hallar: sumando los de distinta posición y restando de la suma el análogo al incógnito, ó dividiéndola por 2, si no tiene aquél análogo.

Es decir: que *un extremo es igual á la suma de los medios, ó al duplo del medio en las continuas, menos el otro extremo, y un medio es igual á la suma de los extremos, menos el otro medio; ó á la semisuma de los extremos, cuando es único el medio incógnito.*

Todo lo cual se deduce de las definiciones de restar y dividir dos números, y de las propiedades que expresan las igualdades

$a + d = b + c$ de donde	$a + c = 2b$ de donde
$a = b + c - d$	$a = 2b - c$
$d = b + c - a$	$c = 2b - a$
$b = a + d - c$	$b = \dfrac{a + c}{2}$
$c = a + d - b$	

189. *El número que puede ser extremo de una equidiferencia, cuyos otros tres términos son dados, se llama cuarto diferencial á esos tres números.* Si estos son a, b, c el cuarto será $x = b + c - a$, suponiendo que se dicen en el orden que han de guardar, es decir que $a - b = c - x$.

Tercero diferencial á dos números es otro que puede ser el último de la equidiferencia continua cuyos dos primeros sean aquéllos. Es decir, que si éstos son a, b, su tercero diferencial será $x = 2b - a$, pues esto resulta de

$$a - b = b - x.$$

Por último, *medio diferencial entre dos números es su semisuma,* pues efectivamente ésta es el valor del medio x entre aquellos a, c; $a - x = x - c$, $x = \dfrac{a + c}{2}$.

En general, *medio aritmético ó diferencial entre varios números, es el cociente de su suma por el número de sumandos*... $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots a_n}{n}$.

Los medios diferenciales son muy usados para sustituir á los números que resultan de medir varias veces una misma cantidad; pues no habiendo generalmente razón para preferir uno á otro de esos números, casi siempre distintos, se toma en vez de cualquiera de ellos su medio aritmético ó diferencial.

190. De las proposiciones recíprocas de la fundamental se deduce: que se pueden cambiar entre sí de 7 maneras los términos de una equidiferencia dada, ó que con 4 números tales que la suma de dos sea igual á la de los otros dos, se puede formar la equidiferencia ya sabida de 8 distintos modos; á saber, si $a + d = b + c$ será

$$a-b=c-d,\ b-a=d-c,\ c-a=d-b,\ d-b=c-a$$
$$a-c=b-d,\ b-d=a-c,\ c-d=a-b,\ d-c=b-a.$$

Pues, no hay más que empezar por uno cualquiera de los 4 números, y acabar por el sumando compañero.

Y si se parte de una de las 8 formas, no hay más que permutar entre sí los medios ó los extremos, ó invertir las diferencias ó los miembros de la igualdad, para pasar á otra forma cualquiera.

ART.° 2.°—PROGRESIONES POR DIFERENCIA.

191. *Se llama progresión aritmética ó por diferencia á una serie de números tales, que la diferencia entre dos consecutivos cualesquiera es constante ó la misma;* de modo que cuatro sucesivos forman una equidiferencia, y tres consecutivos la forman continua.

Por ejemplo: ÷ 5 . 8 . 11 . 14 . 17... es una progresión aritmética cuya *razón* ó diferencia es 3.

La progresión es llamada creciente cuando cada término es mayor que el anterior, y decreciente en el caso contrario, y unas y otras pueden suponerse limitadas ó indefinidas, según convenga.

Además, para simplificar y generalizar el estudio de sus propiedades, se supone siempre restado cada término del siguiente, de modo que si éste es menor, ó decreciente la progresión, la diferencia ó razón se supone negativa.

192. Esto supuesto, si llamamos a al primer término y d á la razón, el 2.º será $a+d$, el 3.º $a+d+d=a+2d$, el 4.º $a+d+d+d=a+3d$; y es evidente que el término que ocupe el lugar n, y que supondremos el último u si la progresión es limitada, será [3]... $u=a+(n-1)d$; fórmula que traducida al lenguaje vulgar da las siguientes reglas: *En toda progresión por diferencia, un término cualquiera es igual al primero más tantas veces la diferencia ó razón como términos anteceden á aquél;* y el último término es igual al primero más tantas veces la razón como términos menos uno tenga la progresión. Esta podrá pues formularse en general

$$\div\, a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots a+(n-1)d=u.$$

También se puede expresar todos los términos en función del último, pues evidentemente si $u=a+(n-1)d$, el sumando a será igual á la suma u, menos el otro sumando $(n-1)d$, es decir que $a=u-(n-1)d$, y dando á n los valores sucesivos 1, 2, 3, etc., resultará la misma progresión escrita al revés

$$\div\, u, u-d, u-2d, u-3d, \ldots u-(n-1)d.$$

Ahora bien, si sumamos todos los términos de las dos progresiones inversas anteriores y llamamos $2s$ á la suma, será $2s=(a+u)+(a+u)+(a+u)\ldots$.; ($n$ veces).

Pues $+d-d=o$, $+2d-2d=o$, $+3d-3d=o$, $+(n-1)d-(n-1)d=o$, ó lo que es lo mismo, $2s=(a+u).n$ y por tanto $s=\frac{(a+u)n}{2}=(a+u)\frac{n}{2}$, fórmula que se traduce en la regla siguiente: *La suma de los términos de una progresión por diferencia es igual á la suma de los extremos multiplicada por la mitad del número de términos.*

Aplicando esa regla y fórmula á la progresión de los números impares

$$\div\, 1, 3, 5, 7\ldots, 1+2(n-1)=1+2n-2=2n-1,$$

será $s = \frac{(1+2n-1)n}{2} = \frac{2n.n}{2} = n^2$; luego la suma de los n primeros números impares, es igual al cuadrado de n. Así $1+3=4=2^2$, $1+3+5=9=3^2$, $1+3+5+7=16=4^2$, $1+3+5+7+9=5^2$, etc.

De esas fórmulas que nos sirven directamente para calcular un *término* cualquiera, ó la *suma* de todos los de una progresión aritmética, dados el *primero*, la *razón* y el *número* de términos, se puede deducir otras que permitan hallar dos cualesquiera de esos 5 números a, d, n, u, s dados los otros tres, pero el estudio completo de esas cuestiones corresponde al Álgebra.

193. *Interpolar entre dos números dados* varios medios diferenciales, es formar la progresión por diferencia cuyos términos extremos sean esos dos números, y los intermedios sean los interpolados. Para eso hay que hallar la razón ó diferencia de la progresión, que según se deduce de la fórmula [3] es $d = \frac{u-a}{n-1}$, pues el sumando $(n-1)d$ será igual á la suma u menos el otro sumando a, y el factor d del producto $(n-1)d$ será igual al producto $u-a$ partido por el factor $n-1$. Además, como ahí n significa el número total de términos, y en el problema actual ese número n es igual al de términos interpolandos m, $+2$ podemos sustituir n por $m+2$, en cuyo caso

$$d = \frac{u-a}{m+2-1} = \frac{u-a}{m+1},$$ fórmula que traducida en regla nos dice que la *razón de interpolación es igual á la diferencia entre los números dados, dividida por el número de medios interpolandos más uno.*

Ejemplo: Interpolar entre 10 y 100, 8 medios diferenciales. Aquí será $a=10$, $u=100$, $m=8$; por tanto $d = \frac{100-10}{8+1} = \frac{90}{9}$ y la progresión pedida

$\div$ 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.

194. *Corolario.* Si se interpola entre cada dos térmi-

nos de una progresión aritmética dada, el *mismo número* de medios, se formará otra progresión, cuya razón será la de la primitiva, dividida por la de interpolación. Pues, si la primitiva es $\div\, a, b, c, d, e, \ldots$ y m el número de medios entre a, b; entre b, c, etc., será

$$\frac{b-a}{m+1}=\frac{c-b}{m+1}=\frac{d-c}{m+1}=\ldots=\text{razón de interpola-}$$

ción, igual para todas las progresiones parciales, que además tendrán por último término de cada una el primero de la siguiente, y por tanto formarán una sola progresión, más espesa, por decirlo así, que la primera.

CAPÍTULO 2.º—COMPARACIÓN POR COCIENTE.

LECCIÓN 17.

Razón geométrica ó por cociente: su sinonimia y de sus términos (195). *Proporción ó igualdad fraccionaria: sus notaciones; sus antecedentes, consecuentes, medios y extremos; proporción continua* (196). *Propiedad fundamental de toda proporción; íd. de las continuas; recíprocos* (197). *Modo de hallar un término incógnito en una proporción general ó continua* (198). *Cuarto y tercero proporcional á dos números dados; medio factorial, proporcional ó geométrico entre dos ó más números; comparación de los medios aritmético y geométrico entre los mismos números* (199). *Diversas formas de una misma proporción* (200). *Proporciones que se deducen de otra ú otras* (201). *Series de razones iguales ó desiguales* (202). *Progresión geométrica ó por cociente: sus variedades* (203). *Fórmulas del término general ó último, y de la suma de todos; cuestiones que pueden resolverse mediante esas fórmulas* (204). *Interpolación de medios proporcionales entre dos números dados* (205). *Interpolación del mismo número de medios entre cada dos términos de una progresión dada* (206).

ART.° 1.°—RAZONES Y PROPORCIONES.

195. Llámase *razón geométrica ó por cociente*, ó simplemente *razón de dos números,* al cociente de esos números, cuando no tanto se trata de hallarle cuanto de compararle con otro ú otros. Y como todo cociente equivale á un quebrado, resulta en el fondo eterno é invariable de los conceptos matemáticos la sinonimia siguiente:

cociente = *quebrado* = *razón* (geométrica),
dividendo = *numerador* = *antecedente,*
divisor = *denominador* = *consecuente.*

Advirtiendo, que aquí tienen todos esos nombres sus más latas acepciones, puesto que los números respectivos pueden ser enteros, fraccionarios ó incomensurables, y aun como veremos en la 2.ª parte de la Aritmética, puédense referir tales nombres á cantidades concretas, aunque supuestas medidas con sus respectivas unidades; de modo que toda *razón* es esencialmente *un número abstracto*, como indicando el *multiplicador*, por el cual hay que multíplicar el *consecuente*, para obtener de producto el *antecedente*.

Las notaciones usuales de estas razones, son las ya sabidas $a : b$ ó $\frac{a}{b}$, siendo a el antecedente y b el consecuente; y además de la lectura ó espresiones verbales que conocemos, considerada como cociente ó quebrado, se puede leer como *razón* diciendo, *a es geométricamente* á *b*, ó simplemente *a* es á *b;* pero escríbase ó léase como quiera, representa siempre el mismo número si tiene los mismos términos.

196. *Proporción geométrica ó por cociente,* ó *igualdad fraccionaria* ó simplemente *proporción* es la igualdad de dos razones geométricas, que según los signos ya conocidos, ó según el uso antiguo, puede escribirse de cualquiera de estos tres modos que importa conocer y manejar igualmente para las conveniencias de la práctica:

$$a : b = c : d,\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d},\ a : b :: c : d.$$

Las dos primeras formas ya sabemos cómo se leen; la última, y claro es que también las otras, una vez convenido en ello, se lee a es á b como c es á d. De cualquier modo que se escriba y lea la proporción anterior (una en esencia aunque trina en la forma), tiene por antecedentes, a, c; por consecuentes, b, d; por medios, b, c, y por extremos, a, d.

Proporción continua es la que tiene iguales los medios; por ejemplo: $m : n :: n : r$ que se escribe también $\div m : n : r$ y se lee como m es á n, n es á r.

197. La propiedad fundamental de toda proporción es que *el producto de los extremos es igual al de los medios; ó al cuadrado del término medio, en la continua.*

En efecto, de la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se deduce, multiplicando ambos miembros por $b \,.\, d$,—los consecuentes,— esta otra, $\frac{a\,b\,d}{b} = \frac{c\,b\,d}{d}$, ó lo que es lo mismo, simplificando esos quebrados, $\frac{a\,d}{1} = \frac{b\,c}{1}$, ó por último $a\,d = b\,c$, que es lo que se quería demostrar, y que aplicado á la continua $m : n :: n : r$, da $mr = n \,.\, n$ ó $mr = n^2$.

Recíprocamente: *si el producto de dos números es igual al de otros dos, ó al cuadrado de otro, se podrá formar con los 4 una proporción general; ó con los 3 una continua,* respectivamente.

Pues, si $a\,d = b\,c$... dividiendo los dos miembros de esa igualdad por $b \,.\, d$ resulta $\frac{a\,d}{b\,d} = \frac{b\,c}{b\,d}$; y simplificando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Y si $mr = n^2$, será $\frac{mr}{nr} = \frac{n^2}{nr}$ ó $\frac{m}{n} = \frac{n}{r}$.

198. De esa propiedad fundamental se deduce la resolución del siguiente

Problema. Dados tres términos de una proporción general ó dos de una continua, hallar el otro. Este se hallará, según su posición, por las reglas siguientes:

1.ª *Un extremo es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo, y un medio es igual al producto de los extremos, partido por el otro medio.*

2.ª *En toda proporción continua un extremo es igual al cuadrado del término medio, partido,—dicho cuadrado,—por el otro extremo; y el término medio es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos.*

1.ª Pues de $a\,d = b\,c$ resulta, dividiendo respectivamente ambos miembros por el factor compañero del que se busca, $a = \frac{b\,c}{d}$, $d = \frac{b\,c}{a}$, $b = \frac{a\,d}{c}$, $c = \frac{a\,d}{b}$.

2.ª De $mr = n^2$ resulta $m = \frac{n^2}{r}$, $r = \frac{n^2}{m}$, $n = \sqrt{m\,r}$.

199. Llámanse, respectivamente, *cuartas* y *terceras* proporcionales á tres ó á dos cantidades dadas las que pueden formar con éstas proporción general ó continua, ó lo que es lo mismo, las que pueden expresarse por los quebrados $\frac{b\,c}{a}$, $\frac{n^2}{m}$; el primero representa la cantidad 4.ª proporcional á las a, b, c, y el 2.º la 3.ª proporcional á las m y n.

Llámase *media proporcional entre dos cantidades, á la raíz cuadrada del producto de éstas;* pues efectivamente puede ser el término medio de una proporción continua cuyos extremos sean las dos dadas. Por ejemplo: $\sqrt{m\,r}$ es la media proporcional entre m y r.

En general: se llama media geométrica, ó media proporcional, ó media factorial entre varias cantidades, cuyo número sea n, á la raíz de grado n del producto de todas ellas; es decir, $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}$.

Teorema. La media diferencial ó aritmética entre dos números m, r, es mayor que la media factorial ó geométrica respectiva.

Pues, siendo $d = r - m$ ó $r = m + d$,

será $\frac{m+r}{2} = \frac{m+m+d}{2} = \frac{2m+d}{2} = m + \frac{d}{2}$. Análogamente $\sqrt{m\,r} = \sqrt{m(m+d)} = \sqrt{m^2 + m\,d}$.

Elevando al cuadrado ambas medias

$$\left(m + \frac{d}{2}\right)^2 = m^2 + m\,d + \frac{d^2}{4} \text{ y } \left(\sqrt{m\,r}\right)^2 = m^2 + m\,d.$$

Luego, puesto que el cuadrado de la media aritmética excede al de la geométrica en $\frac{d^2}{4}$, aquélla es mayor que ésta.

200. De los recíprocos del teorema fundamental (197) se deduce que se pueden cambiar entre sí de 7 modos, los términos de una proporción dada, ó que se puede escribir de 8 maneras la proporción deducible de la igualdad de dos productos, pues, si ésta es $a\,d = b\,c$, será

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},\ \frac{b}{a} = \frac{d}{c},\ \frac{c}{a} = \frac{d}{b},\ \frac{d}{b} = \frac{c}{a},$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d},\ \frac{b}{d} = \frac{a}{c},\ \frac{c}{d} = \frac{a}{b},\ \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Pues, no hay más que empezar por uno cualquiera de los 4 números, y acabar por su compañero del *mismo* producto, ó bien partiendo de una de las 8 formas, permutar entre sí los medios ó los extremos, ó invertir las dos razones, ó los dos miembros de la igualdad, para pasar á las otras 7.

201. Además de esas transformaciones de una misma proporción, pueden también deducirse otras proporciones de una dada, en virtud de los siguientes

Teoremas:

1.° *La suma ó diferencia de los* $\left\{\begin{array}{l}\textit{antecedentes}\\ \textit{dos 1.}^{\textit{os}}\textit{ términos}\end{array}\right.$ *es á la suma ó diferencia de los* $\left\{\begin{array}{l}\textit{consecuentes}\\ \textit{dos últimos}\end{array}\right.$ *como* $\left\{\begin{array}{l}\textit{un antecedente es á su consecuente}\\ \textit{el 1.° es al 3.°, ó como el 2.° es al 4.°}\end{array}\right.$

$$\text{Pues, si}\left\{\begin{array}{l} 1.^{a}\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\\ \quad\text{ó}\\ 2.^{a}\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\end{array}\right\} \begin{array}{l} 1+\frac{a}{c}=1+\frac{b}{d},\ \frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d},\ \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\\ \\ \frac{a}{c}-1=\frac{b}{d}-1,\ \frac{a-c}{c}=\frac{b-d}{d},\ \frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\end{array}$$

Estas igualdades últimas, según se refieran á la 1.ª ó á la 2.ª, traducen las primeras ó las segundas líneas del Teorema 1.°; y comparadas originan el

2.° *La suma de los* $\left\{\begin{array}{l}\textit{antecedentes}\\ \textit{dos 1.}^{\textit{os}}\textit{ términos}\end{array}\right\}$ *es á su diferencia, como la suma de los* $\left\{\begin{array}{l}\textit{consecuentes}\\ \textit{dos últimos}\end{array}\right\}$ *es á su diferencia.* $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$ ó $\dfrac{a+c}{a-c}=\dfrac{b+d}{b-d}$.

3.° *Los productos ordenados de los términos de varias proporciones forman otra proporción.*

Pues, si $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d},\ \dfrac{a'}{b'}=\dfrac{c'}{d'},\ \dfrac{a''}{b''}=\dfrac{c''}{d''}$, etc., será evidentemente $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a'}{b'}\times\dfrac{a''}{b''}=\dfrac{c}{d}\times\dfrac{c'}{d'}\times\dfrac{c''}{d''}\ldots$ ó sea $\dfrac{a\,.\,a'\,.\,a''}{b\,.\,b'\,.\,b''}=\dfrac{c\,.\,c'\,.\,c''}{d\,.\,d'\,.\,d''}$.

4.° *Los cocientes ordenados de los términos de dos proporciones forman también proporción.*

Pues, si $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d},\ \dfrac{a'}{b'}=\dfrac{c'}{d'}$, claro que $\dfrac{a:a'}{b:b'}=\dfrac{c:c'}{d:d'}$ ó $\dfrac{a\,b'}{b\,a'}=\dfrac{c\,d'}{d\,c'}$. (Multiplíquense las razones de la 1.ª proporción por las de la 2.ª invertidas).

5.° *Las potencias y las raíces del mismo grado de los términos de una proporción, forman otras proporciones.*

Pues, $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$ puede considerarse como resultante de multiplicar n veces por sí mismos los términos de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, y ésta á su vez como resultado de extraer las raíces de grado n de los términos de aquélla.

Problema. Hallar dos números, dada su razón por cociente, y su suma ó su diferencia. Si llamamos x, y á esos dos números incógnitos, x el mayor, $\frac{a}{b}$ á su razón, s á su suma y d á su diferencia, tendremos $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$.

Pero, como según los párrafos anteriores,

$\frac{x \pm y}{x} = \frac{a \pm b}{a}$, $\frac{x \pm y}{y} = \frac{a \pm b}{b}$; será, si se conoce

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{la suma} & x + y = s, \frac{s}{x} = \frac{a+b}{a}, x = \frac{a\,s}{a+b}; \frac{s}{y} = \frac{a+b}{b}, y = \frac{b\,s}{a+b} \\ \text{la difer.}^{\text{a}} & x - y = d, \frac{d}{x} = \frac{a-b}{a}, x = \frac{a\,d}{a-b}; \frac{d}{y} = \frac{a-b}{b}, y = \frac{b\,d}{a-b} \end{array}\right\}.$$

202. *Serie de razones iguales,* como su mismo nombre indica, es el conjunto de tres ó más cocientes ó razones iguales.

Su fórmula es, pues, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

La propiedad fundamental de tales series es: que la suma de varios antecedentes es á la de los respectivos consecuentes como un antecedente cualquiera es á su consecuente.

Esta propiedad es consecuencia de la primera del número anterior, pues en la proporción que forman las dos primeras razones se tiene $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} =$ etc.

De aquí se deduce, á su vez, $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3} = \frac{a_3}{b_3}$ y así sucesivamente.

Por último, si se tienen varios quebrados ó razones desiguales, la suma de los numeradores, partida por la de los denominadores, es mayor que el menor y menor que el mayor de aquéllos. Sean éstos, por orden de magnitud,

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \frac{a_3}{b_3} < \ldots < \frac{a_n}{b_n}.$$

Llamando m al menor, ó $\frac{a_1}{b_1} = m$, será evidentemte

$a_1 = m\,b_1$, $a_2 > m\,b_2$, $a_3 > m\,b_3$, ... $a_n > m\,b_n$.

Sumando ordenadamente

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n > m(b_1 + b_2 + b_3 + b_n)$,

y dividiendo por $b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n$,

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots b_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots b_n} > m.$$

Análogamente, y llamando M al mayor $\frac{a_n}{b_n}$ se probará que $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} < M.$

ART. 2.°—PROGRESIONES POR COCIENTE.

203. Llámase *progresión geométrica ó por cociente toda serie de números en que cada uno es igual al anterior, multiplicado por un factor constante, que es la razón de la progresión.*

Por ejemplo: $\div\!\div$ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96.... etc, es una progresión por cociente, cuya razón es 2. La progresión será creciente siempre que la razón sea mayor que 1, y decreciente en el caso contrario.

204. La fórmula general de una progresión por cociente, será, llamando a al primer término y q á la razón,

$$\div\!\div\, a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots\ldots : aq^{n-1} = u, \quad [1].$$

Es decir, que *un término cualquiera es igual al primero, multiplicado por la potencia de la razón, cuyo grado sea el número de términos anteriores;* el último término es igual al primero, multiplicado por la potencia de la razón, cuyo grado sea el número de términos menos 1.

Para hallar la suma de todos los términos, llamémosla $S = a + aq + aq^2 + \ldots\ldots + (aq^{n-1} = u)$, de consiguiente, $Sq = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots (aq^n = uq)$; restando esas dos igualdades, $Sq - S = uq - a$, pues los demás términos se destruyen, ó bien, $S(q-1) = uq - a$, y $S = \frac{uq - a}{q - 1}$ [2], es decir, que la suma de todos los términos de una progresión geométrica limitada es igual al último, multiplicado por la razón, menos el 1.°, y dividida esa diferencia por la razón menos 1.

Ejemplo: Dicen que preguntado Sesa (inventor del ajedrez) por su Rey, qué recompensa quería, dijo que un grano de trigo en la 1.ª casilla, 2 en la segunda, 4 en la 3.ª, y así doblando, hasta llegar á la 64ª casilla. De modo, que los granos de trigo que pidió fueron los que vale la suma de los 64 términos de la progresión....

$\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : \ldots\ldots : 1 \times 2^{63}$, que son

$$S = \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 = [2^{16\times 4} = (65536)^4 = (4294967296)^2] - 1.$$

Si una progresión es creciente, claro es que la suma de sus n primeros términos crecerá con n, y que por tanto, no hay tal suma, ó, como se dice, es infinita cuando la progresión sea indefinida. Pero si es decreciente no sucede eso, pues, como evidentemente en la fórmula $S = \frac{uq - a}{q - 1}$, u vale cero cuando sea el último término de una progresión decreciente indefinida, queda $S = \frac{-a}{q-1} = \frac{a}{1-q}$, de modo, que la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente indefinida, es igual al 1.º, dividido por la diferencia entre 1 y la razón.

Las fórmulas [1] y [2], como *sus análogas* las de las progresiones por diferencia, sirven para resolver, convenientemente transformadas, todas las cuestiones en que, dadas tres de las cinco cantidades a, q, n, u, S, se pidan las otras dos. Y con más razón que *en aquéllas*, la resolución de esas cuestiones corresponde al Álgebra.

205. Interpolar medios proporcionales entre dos números dados, es formar la progresión geométrica cuyos extremos sean dichos números.

Para eso hay que hallar la *razón* de la progresión pedida, en la fórmula [1]... $u = aq^{n-1}$. Dividiendo por a, é invirtiendo ambos miembros... $q^{n-1} = \frac{u}{a}$, y extrayendo la raíz de grado $n-1$, $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Si llamamos m al número de términos interpolandos, $n = m + 2$, ó $n - 1 = m + 1$, y la fórmula de interpolación será $q = \sqrt[m+1]{u : a}$, es decir que la *razón de interpolación es igual á la raíz del cociente de los dos números dados, cuyo grado sea el número de términos interpolandos, más 1.*

Ejemplo: Interpolar entre 4 y 1024, siete medios proporcionales. Será $q = \sqrt[8]{1024 : 4} = \sqrt[8]{256} = 2$, y la progresión pedida $\div 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024$.

206. Si se interpola el mismo número de medios proporcionales entre cada dos términos de una progresión geométrica dada, se formará otra progresión cuya razón será la raíz de la razón de aquélla, cuyo grado será el número de términos interpolados, mas 1.

Pues siendo constante el cociente de cada dos términos seguidos, de la progresión dada, y el mismo el índice de la raíz que hay que extraer de ese, para todas esas interpolaciones, la misma será la razón de interpolación para todas las progresiones parciales, que serán, además, continuación cada una de la anterior, pues el último término de la una es el primero de la siguiente.

CAPÍTULO 3.º—LOGARITMOS.

Lección 18.

Concepto histórico ó aritmético de los logaritmos (207). *Infinidad de éstos para cada número y viceversa; sistema, base* (208). *Identidad del logaritmo del mismo número en cada sistema, y recíprocamente* (209). *Concepto lógico ó algebraico de los logaritmos* (210). *Acuerdo de ambos conceptos* (211). *Propiedades generales de los logaritmos, en cualquier sistema; diferencia entre los de base mayor y menor que 1* (212). *Razón de los logaritmos de dos números en cualquier sistema, y de los de un mismo número en dos sistemas; módulos relativos* (213). *Módulo según Neper, en general, y de su sistema: base de éste* (214). *Sistema vulgar ó de Briggs y sus propiedades principales; características, mantisas* (215). *Método de Long para hallar el logaritmo de un número entero ó decimal* (216).

ART.º 1.º—TEORÍA DE LOGARITMOS.

207 De la evidente analogía que hay entre las propiedades de las progresiones por diferencia y por cociente, dedujo el escocés Juan Neper la teoría de los *logaritmos*, números que abrevian muchísimo los cálculos complicados, y que tienen, como veremos pronto, otro origen más científico, aunque no tan sencillo y elemental como el ideado por Neper, al que suele llamarse origen histórico ó aritmético, á diferencia del otro, llamado origen lógico ó algebraico. Para poder armonizar ambos conceptos y utilizar los logaritmos, precisa suponer que las progresiones comparadas cuentan entre sus términos correspondientes al *cero* la aritmética y al *uno* la geométrica.

Partiendo de esa hipótesis fundamental, y siguiendo las notaciones ya adoptadas en los capítulos anteriores, podremos representar ambos progresiones indefinidas en ambos sentidos, por

$$\div \ldots\ldots -nd, \ldots\ldots -3d. -2d. -d. \quad 0. \quad d. \quad 2d. \quad 3d. \ldots\ldots nd \ldots$$

$$\div\div \ldots\ldots \frac{1}{q^n} : \ldots\ldots : \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots\ldots q^n \ldots$$

Los términos de la primera de estas progresiones son los logaritmos de los correlativos ó correspondientes de la segunda, es decir, que según su concepto ú origen histórico...

Logaritmos son los términos de una progresión por diferencia que tiene entre ellos al cero, y que corresponden ordenadamente á los de una progresión por cociente que cuenta entre sus términos al 1. Esa correspondencia empieza por la de *0* y *1*, y continúa en ambos sentidos, de modo, que cada término de la primera progresión es logaritmo del número correlativo de la segunda.

208. De esta definición se deduce que, si para unas mismas progresiones cada número sólo tiene un logaritmo, y recíprocamente á cada logaritmo corresponde un solo número; en cambio, como se puede variar hasta el infinito ambas progresiones, cada número tiene ó puede tener infinitos logaritmos, y cada logaritmo infinitos números correspondientes, bastando fijar aquéllas para que éstos queden determinados.

Llámase, pues, sistema de logaritmos, al conjunto de todos los números y sus logaritmos deducidos de las mismas progresiones primitivas; pues, sean esas cuales fueren, es preciso suponerlas luego más espesas, interpolando otros términos, para que todo número tenga su logaritmo, y recíprocamente.

Esas interpolaciones se supondrán hechas en cada progresión, según las condiciones dichas (194 y 206), siendo, además, idénticos los números de términos interpolados en una y otra, y bastante grandes dichos números ó pequeña la razón respectiva, para que, si un logaritmo ó un número determinado no está exacto en la progresión correspondiente, esté, sí, entre dos términos cuya diferencia sea menor que el límite del error prefijado para los cálculos. Con todas esas condiciones, claro es que siempre puede suponerse á cualquier número dado como formando parte exacta ó aproximadamente de la progresión por cociente, y teniendo su correlativo en la por diferencia; y recíprocamente á cualquier logaritmo dado, como incluído exacta ó aproximadamente en la progresión aritmética, y teniendo su número correspondiente en la geométrica; ó en otros términos, y recordando los teoremas (164 y 166) de la Teoría de los límites, todo número tiene su logaritmo y todo logaritmo su número correspondiente en cada sistema, por lo cual puede caracterizarse cada uno de éstos por el número correspondiente á un logaritmo dado, ó viceversa; y de ahí que, refiriéndose á la unidad, se suponga determinado cada sistema por su *base,* que *es el número cuyo logaritmo es igual á 1*.

209. Mas, para que esa definición esté justificada, es necesario demostrar que, *si un número puede ser incluído de varios modos,* ó sea por distintas interpolaciones, *en la progresión respectiva, tendrá siempre el mismo logaritmo*, ó el mismo término correlativo en la otra progresión, y recíprocamente. Por supuesto, partiendo de las mismas progresiones primitivas.

Supongamos que dicho número resulte igualmente de interpolar m ó m' medios entre cada dos términos de la progresión primitiva, cuya razón sea q. La razón de interpolación será respectivamente (205) $\sqrt[m+1]{q}$ ó $\sqrt[m'+1]{q}$ y si n, n' son los grados de las potencias respectivas, será $\sqrt[m+1]{q^n} = \sqrt[m'+1]{q^{n'}}$. Elevando á $(m+1)\,(m'+1)$, resulta (173) $q^{n\,(m'+1)} = q^{n'\,(m+1)}$, por consiguiente $n\,(m'+1) = n'\,(m+1)$, y multiplicando por $\dfrac{d}{(m+1)\,(m'+1)}$, será $\dfrac{dn}{m+1} = \dfrac{dn'}{m'+1}$.

Pero $\dfrac{d}{m+1}$ y $\dfrac{d}{m'+1}$ son las razones para interpolar entre cada dos términos de la progresión aritmética, cuya razón es d, m ó m' medios, y n, n' son los factores precisos para que los términos interpolados en esa progresión $\frac{dn}{m+1}$ ó $\frac{dn'}{m'+1}$... ocupen los lugares correspondientes á los... $\sqrt[m+1]{q^n}$ ó $\sqrt[m'+1]{q^{n'}}$ interpolados en la progresión por cociente, que es lo que debíamos demostrar.

Análogamente, invirtiendo cálculo y razonamiento, se demostraría el recíproco.

210. La *base* de cada sistema de logaritmos, á cuyo concepto hemos llegado partiendo de la definición histórica ó neperiana de esos números, es á su vez el punto de partida de la definición científica ó algebraica, según la cual, *logaritmo de un número en el sistema de base b es el exponente de la potencia á que ha de elevarse dicha base, para que esa potencia sea aquel número.* Es decir, que si $b^x = n$, x es el logaritmo del número n, en el sistema de base b. En este concepto, la operación de hallar logaritmos viene á ser una segunda rama inversa del algoritmo *graduación*, cuya rama directa es la elevación á potencias, y la primera rama inversa la extracción de raíces. La existencia, y aun la necesidad de esa segunda rama, se debe prever desde el momento en que se sabe que, á diferencia de los *sumandos* en la *suma*, y los *factores* en el *producto*, el *grado* y la *raíz* de una *potencia* no pueden ser permutados sin variar el resultado, y por tanto, es muy distinto buscar la raíz, dados la potencia y el grado (extracción de raíces), que buscar el grado ó exponente (el logaritmo), dadas la potencia, y su raíz ó base correspondiente.

211. El acuerdo de ambas definiciones es fácilmente demostrable, pues si en la expresión b^x damos á x valores variables en progresión aritmética d, $2d$, $3d$,... nd, resultarán las potencias respectivas... b^d, b^{2d}, b^{3d}... b^{nd}, que están en progresión geométrica. Y recíprocamente: si suponemos que q^n es el término de la progresión geométrica, cuyo correspondiente en la aritmética es 1, es de-

cir, que $q^n = b$ (base según su primera definición) y $nd = 1$, ó $n = \frac{1}{d}$ será $q^n = q^{\frac{1}{d}} = b$, y elevando á la potencia de grado d (173) $q = b^d$; luego los términos de la progresión por cociente pueden expresarse así:

$$\div\!\div \ldots\ldots : \frac{1}{b^{nd}} : \frac{b}{b^{2d}} : \frac{1}{b^d} : 1 : b^d : b^{2d} : \ldots\ldots : b^{nd} :$$

Donde se ve que, en efecto, los logaritmos de los términos mayores que 1 son los exponentes de las respectivas potencias de b; y en cuanto á los menores que 1, también tienen esa propiedad, puesto que en general, $\frac{1}{b^x} = b^{-x}$, aunque no es fácilmente demostrable esta última igualdad hasta la completa generalización de las ideas de potencia y de exponente, que corresponde al Álgebra, y por eso se llama algebraico ese concepto exponencial de los logaritmos.

212. De ambos conceptos se deducen fácilmente las siguientes propiedades, sea cual fuere el sistema:

1.ª *El logaritmo de 1 es 0, y el de la base es 1* (según las definiciones).

2.ª *Ésta* (la base) *debe ser un número positivo diferente de 1.* Pues todas las potencias de 1 son también iguales á 1, y las de los números negativos son discontinuas, aunque el *grado* varíe continuamente ó por intervalos infinitamente pequeños.

Cor.° Los números negativos no tienen logaritmos.

3.ª *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

Pues $b^n \times b^{n'} \times b^{n''} = b^{n+n'+n''\cdots}$ (167-9.°)

4.ª *El logaritmo de un cociente es igual á la diferencia de los logaritmos del dividendo* (minuendo) *y del divisor* (sustraendo). Pues siendo $\frac{m}{n} = q$ ó $m = n \times q$, será $\log m = \log n + \log q$, y por tanto, $\log q = \log m - \log n$.

5.ª *El logaritmo de una potencia es el producto de su*

30

exponente por el logaritmo de la raíz correlativa. Porque $(b^n)^m = b^{m \cdot n}$ (167-10).

6.ª *El logaritmo de una raíz es el cociente del de la potencia correlativa, por el índice.* Pues siendo $\log a^m = m \times \log a$, será $\log a = \dfrac{\log a^m}{m}$, y como $a = \sqrt[m]{a^m}$, queda demostrada esta 6.ª propiedad general.

7.ª *Si la base es mayor que 1,* ó ambas progresiones van en el mismo sentido, *los números mayores que 1 tienen sus logaritmos positivos, y los números menores que 1 logaritmos negativos, á mayor número corresponde mayor logaritmo, ó viceversa, y por tanto,* $\log \infty = \infty$, $\log 0 = -\infty$ (174-1.º)

8.ª *Si la base es menor que 1,* ó las progresiones correspondientes van en sentido contrario, *los números mayores que 1 tienen sus logaritmos negativos, los menores que 1, logaritmos positivos, á mayor número menor logaritmo ó viceversa, y por tanto* $\log 0 = \infty$, $\log \infty = -\infty$. (174, 2.º)

213. *La razón de los logaritmos de dos números dados es constante, ó la misma en todos los sistemas.*

Pues, si M, N son dos números, b, b' las bases de dos sistemas y m, m'; n, n' los logaritmos respectivos, es decir, que [1]... $M = b^m = b'^{m'}$, $N = b^n = b'^{n'}$: tomando logaritmos en cualquier sistema, pero el mismo, de las igualdades [1], según la proposición 5.ª, será:

$$\log M = m \log b = m' \log b', \log N = n \log b = n' \log b',$$

y dividiendo ordenadamente $\dfrac{m \log b}{n \log b} = \dfrac{m' \log b'}{n' \log b'}$, y simplificando, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$, [2].

Permutando los medios en la proporción [2], resulta esta otra $\dfrac{m}{m'} = \dfrac{n}{n'} = K$, es decir que también es constante la razón de los logaritmos de un mismo número en dos sistemas distintos. Esta razón se llama *módulo de trans-*

formación, porque sirve para pasar de un sistema á otro, puesto que de la igualdad [3] $\frac{n}{n'} = K$ resulta [4] $n = Kn'$, es decir que el nuevo logaritmo n (base b), es igual al primitivo n' (base b'), multiplicado por el *módulo K;* el cual *es el logaritmo de la primera base b' en el sistema nuevo;* pues, verificándose la igualdad [3] para cualesquiera logaritmos, será, aplicándola á la base b'

$$\frac{\log_b b'}{\log_{b'} b'} = K, \text{ ó, puesto que } \log_{b'} b' = 1, K = \log_b b',$$

según lo dicho. Para determinar ese logaritmo K, no hay más que hacer $n = 1$ en la igualdad [4], ó lo que es lo mismo, suponer que el logaritmo n es el de la nueva base b (en su sistema), en cuyo caso resulta, sustituyendo valores, $1 = \log_b b' \times \log_{b'} b$, ó $\log_b b' = \frac{1}{\log_{b'} b}$, es decir que *el logaritmo de la base antigua en el sistema nuevo es igual á 1 partido por el logaritmo de la base nueva en el sistema antiguo*, ó que los módulos para pasar mutuamente de un sistema á otro son también números *inversos ó recíprocos;* que así son llamados dos números cuyo producto es igual á 1.

214. Además de esa acepción de la voz *módulo*, en el sentido que pudiera llamarse relativo, puesto que sirve para relacionar un sistema con otro, hay la que dió Neper á esa palabra. Suponiendo, como ya hemos dicho, que las progresiones que constituyen cada sistema tienen sus términos (de cada una) tan próximos uno á otro, en valor numérico, como se quiera, lo cual exige que la razón β de la progresión por diferencia sea poco diferente de cero, y la de la progresión por cociente sea muy próxima á 1, $(1 + \alpha)$, Neper llamó *módulo* de cada *sistema* de logaritmos al límite del cociente $\frac{\beta}{\alpha}$ cuando α y β tienden hacia cero ó son infinitamente pequeños; y adoptó para su sis-

tema el módulo 1, ó aquel en que $\beta = \alpha$. De esto se deduce que la base Neperiana es el límite de la potencia $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ cuando $\alpha = 0$; pues, las dos progresiones de ese sistema serán:

$$\div -n\alpha \;\ldots\; -2\alpha \,.\, -\alpha \,.\, 0 \,.\, \alpha \,.\, 2\alpha \;\ldots\; n\alpha$$

$$\div\div \frac{1}{(1+\alpha)^n} : \ldots : \frac{1}{(1+\alpha)^2} : \frac{1}{1+\alpha} 1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : \ldots (1+\alpha)^n$$

luego, si suponemos que $n\,\alpha = 1$, ó que $(1 + \alpha)^n = e$ (base) será $n = \frac{1}{\alpha}$, y por tanto $e = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, cuando $\alpha = 0$.

215. Pero, si ésta es la base *natural*, ó más sencilla bajo el punto de vista teórico, no así para la práctica ó aplicación de los logaritmos á la abreviación de cálculos; en que por razones análogas á las que hacen preferible el sistema decimal de pesas y medidas, conviene también que la base logarítmica sea la misma base numerativa ó 10. Estos son los logaritmos vulgares ó Briggianos, pues ya los usó Briggs, discípulo de Neper. Las progresiones primitivas del sistema vulgar, son, pues:

$$\div \ldots - n \ldots \quad -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots \quad n \ldots$$

$$\div\div \ldots 10^{-n} : \ldots : 10^{-3} : 10^{-2} : 10^{-1} : 1 : 10 : 10^2 : 10^3 : \ldots 10^n : \ldots$$

y las propiedades principales de los logaritmos vulgares, además de las generales (209 y 210), son las siguientes:

1.ª *El logaritmo de un número entero ó fraccionario básico, consta de una parte entera llamada característica*, positiva, negativa ó cero; *y de una parte decimal llamada mantisa*, que puede ser también positiva, cero (para las potencias de grado entero de 10) ó negativa; pero que por conveniencia práctica se supone ó hace siempre positiva.

Esta propiedad es evidente consecuencia de todo lo antedicho.

2.ª La *característica* del logaritmo de un número entero ó decimal *tiene tantas unidades* (supuesta positiva la mantisa) *como lugares diste del de primer orden la primera cifra significativa de la izquierda del número dado*, cuyas unidades serán positivas si el número es mayor que

10 ó dichos lugares se cuentan hacia la izquierda, y serán negativas si el número es menor que 1, ó esos lugares se cuentan hacia la derecha, siendo cero naturalmente la característica cuando el número es mayor que 1 y menor que 10.

Para las potencias de grado entero positivo ó negativo de 10, es evidente esta 2.ª propiedad, con sólo inspeccionar las dos progresiones, que forman el sistema vulgar.

Sea ahora un número cualquiera mayor que 10, por ejemplo: 587,34.... Estando este número comprendido entre las dos potencias de 10, $100 = 10^2$ y $1000 = 10^3$. su logaritmo estará comprendido entre 2 y 3, es decir, tendrá 2 de característica, que son los lugares que dista de la cifra 7 de primer orden la 1.ª de la izquierda 5. Lo mismo se podría demostrar para otro caso análogo.

Para todo número comprendido entre 1 y 10, su logaritmo lo estará entre 0 y 1, es decir, tendrá 0 de característica.

Sea, por último, un número menor que 1, por ejemplo:

$$0{,}000\,489 = N;$$

si quitamos la coma, resultará el entero 489, igual al producto del número N por 1000000 (135, Cor.), luego (209, 4.ª) el $\log N = \log 489 - \log 1000000 = \log 489 - 6$. Como el log 489 sólo tiene 2 de característica, según ya hemos demostrado, el log 0,000489 tendrá $-4 = 2 - 6$ de característica, con la misma mantisa que el log 489; sólo que, llamando x á esa mantisa, serán $\log 489 = 2 + 0{,}x$ y $\log 0{,}000489 = -4 + 0{,}x$.

Esto se expresa poniendo el signo — *sobre* la característica, y no antes, pues así significaría que todo el logaritmo era negativo.

El verdadero $\log 0{,}000489 = \overline{4}{,}689309 = -4 + 0{,}689309$.

3.ª *La mantisa es la misma para los logaritmos de todos los números que constan de las mismas cifras colocadas en igual orden,* ó que sólo difieren en el orden numerativo de las unidades que cada cifra representa.

Pues dos números tales, por ejemplo, los mismos de antes, 489 y 0,000489 resultan de multiplicar el menor, ó dividir el mayor por una potencia de 10; sus logaritmos diferirán, pues, en las unidades que tenga el grado de esa potencia, pero la parte decimal no variará, puesto que si $\log N = u{,}x = u + 0{,}x$ será $\log (N \times 10^n) = \log N + \log 10^n = u + 0{,}x + n = (u + n) + 0{,}x$.

4.ª *Un logaritmo totalmente negativo corresponde á una fracción cuyo numerador es 1 y su denominador el número cuyo logaritmo positivo sea el dado* (salvo el signo).

Pues, como ya digimos, al explicar el origen de los números negativos, éstos pueden considerarse como sustraendos cuyo minuendo es cero, y como la diferencia de logaritmos es el logaritmo del cociente de los números respectivos, siendo $0 = \log 1$, será $-\log n = 0 - \log n = \log \frac{1}{n}$.

5.ª *Un logaritmo totalmente negativo se transforma en otro de característica negativa y mantisa positiva, hallando* (90) *su complemento aritmético* (salvo el signo), *y restando luego de la característica positiva que así resulte, la unidad numerativa que hizo de minuendo.*

Pues, por ejemplo:

$$-3{,}458670 = 10 - 3{,}458670 - 10 = 6{,}541330 - 10 = \overline{4}{,}541330$$

Escolio. Como bastaría restar de 4, en este caso, y en general del número entero superior en una unidad á la característica del logaritmo dado, restando luego ese número entero de la nueva característica *cero*, se suele dar la regla abreviada de añadir una unidad al valor absoluto de la característica negativa dada, y poner por mantisa positiva el complemento aritmético de la dada (supuesta positiva).

Aunque el cambio inverso no tenga casi aplicación, claro es que para transformar un logaritmo *mixto* ó de característica negativa y mantisa positiva, en su equivalente negativo, basta efectuar la sustracción implícita entre la característica y la mantisa, poniendo el signo *menos* á la resta.

Pues $\overline{4}{,}541330 = 0{,}541330 - 4 = -(4 - 0{,}541330) = -3{,}458670$... (92).

Bajo esa forma mixta, un logaritmo negativo parcialmente suele llamarse *cologaritmo* ó complemento logarítmico del que resulta quitando el signo *menos* al logaritmo negativo equivalente. Es decir, que en el ejemplo anterior, $\bar{4},541330$ es el *cologaritmo* ó complemento logarítmico de 3,458670, y por eso donde quiera que haya que restar un logaritmo positivo, ó sumar un logaritmo negativo, lo que se debe hacer es sumar el complemento logarítmico, tal como lo hemos definido. Esto se expresa así... $-\log n = + \text{C.}^{\circ} \log n$.

216. Aunque, según hemos indicado (208), la interpolación de un gran número de *medios* entre cada dos términos de las progresiones primitivas, es el método más elemental para calcular logaritmos, con la aproximación prefijada; se ocurre, desde luego, la inutilidad de muchísimos términos de las progresiones que se formarían efectuando realmente dicha interpolación completa; pues, en primer lugar sólo se necesitan inmediatamente los logaritmos de los números enteros; y aun de éstos... como los logaritmos de los números compuestos son las sumas respectivas de los de sus factores simples (212, 3.ª), claro es que bastará calcular directamente los logaritmos de los números primos para tener muy fácilmente los de cualesquiera enteros, y por tanto los de fracciones decimales propias ó impropias (215), ó viceversa: *calculando el logaritmo de un número decimal comprendido entre 1 y 10, se tendrá* (sin más que cambiar la característica) *el de cualquiera otro número múltiplo ó submúltiplo de aquél por una potencia de 10* (215, 3.ª)

Sea, pues, un número con esas condiciones, por ejemplo: 7,2000.

Siempre podremos considerar ese ú otro número > 1 y < 10 como producto exacto ó aproximado de varios factores, raíces de índice 2^n de 10; y como esos factores tienen *sus logaritmos* inmediatamente conocidos, sumándolos... se tendrá el buscado.

Este método, llamado de Long, y que no es otro que el de interpolación modificado ó simplificado, se practica así:

Extrayendo la raíz cuadrada de 10, y luego la de esa y de las demás raíces cuadradas sucesivas, hasta una que sólo difiera de la unidad en una fracción muy pequeña (174, 3.ª), se tendrá una serie de estas raíces, cuyos logaritmos serán indudablemente... la mitad, la 4.ª, la 8.ª parte, etc. de 1, puesto que ambas series de números formarán las potencias y sus exponentes respectivos de la base 10, según el siguiente cuadro (173 y 210):

Potencias ó números.	Exponentes ó logaritmos.
$10^{1} = 10,00000$	1
$\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} = 3,16228$	$\frac{1}{2} = 0,50000$
$\sqrt[4]{10} = 10^{\frac{1}{4}} = 1,77828$	$\frac{1}{4} = 0,25000$
$\sqrt[8]{10} = 10^{\frac{1}{8}} = 1,33352$	$\frac{1}{8} = 0,12500$
$\sqrt[16]{10} = 10^{\frac{1}{16}} = 1,15478$	$\frac{1}{16} = 0,06250$
$\sqrt[32]{10} = 10^{\frac{1}{32}} = 1,07461$	$\frac{1}{32} = 0,03125$
$\sqrt[64]{10} = 10^{\frac{1}{64}} = 1,03663$	$\frac{1}{64} = 0,01562$
$\sqrt[128]{10} = 10^{\frac{1}{128}} = 1,01815$	$\frac{1}{128} = 0,00781$
$\sqrt[256]{10} = 10^{\frac{1}{256}} = 1,00904$	$\frac{1}{256} = 0,00391$
$\sqrt[512]{10} = 10^{\frac{1}{512}} = 1,00451$	$\frac{1}{512} = 0,00195$
$\sqrt[1024]{10} = 10^{\frac{1}{1024}} = 1,00225$	$\frac{1}{1024} = 0,00098$
$\sqrt[2048]{10} = 10^{\frac{1}{2048}} = 1,00112$	$\frac{1}{2048} = 0,00049$
$\sqrt[4096]{10} = 10^{\frac{1}{4096}} = 1,00056$	$\frac{1}{4096} = 0,00024$

Ahora bien, dividiendo el número dado 7,2 (ó el que sea) por el inferior inmediato de la 1.ª de las columnas anteriores, que es 3,16228, el cociente resultante 2,27684... por el inmediato inferior de dicha columna 1,77828; este segundo cociente 1,28036, por el tercer divisor 1,15478, y así sucesivamente hasta llegar al divisor tan poco diferente de 1 como exija el límite del error prefijado, se tendrá $7,2 = 3,16228 \times 1,77828 \times 1,15478 \times ...$, y por tanto $\log 7,2 = \log 3,16228 + \log 1,77828 + \log 1,15878 + ...$, y como los logaritmos sumandos están en la 2.ª columna, enfrente de sus respectivos números de la 1.ª, queda resuelta la cuestión propuesta.

Además de este método elemental ó aritmético hay otros superiores ó algebraicos fundados en las teorías de fracciones continuas, de series, y de ecuaciones transcendentes, todos los cuales naturalmente no son ahora explicables.

Lección 19.

Necesidad de las tablas logarítmicas: sus diferencias y clasificación (217). *Idea de la construcción elemental de unas tablas logarítmicas* (218). *Disposición general de las tablas de simple y de doble entrada* (219). *Modo de hallar el logaritmo de un número entero ó decimal, que esté ó no en las tablas* (220). *Modo de hallar el número ó antilogaritmo correspondiente á un logaritmo dado* (221). *Cálculo logarítmico de productos, cocientes, potencias, raíces, exponentes, índices, y combinaciones de esos resultados* (222). *Cálculo de sumas y de diferencias, mediante los logaritmos de Gauss* (223).

ART. 2.º—APLICACIÓN DE LOS LOGARITMOS.

§ 1.º—Tablas logarítmicas.

217. Para poder aplicar los logaritmos á la abreviación de los cálculos numéricos, precisa tener unas *listas* ó *tablas*, en que fácil y prontamente se hallen los logaritmos, dados sus respectivos números; y recíprocamente se encuentren los números correspondientes á logaritmos

conocidos, sin interpolaciones ni otras operaciones, más que algunas muy sencillas, en determinados casos. Con tales *tablas*, llamadas *logarítmicas* ó de *logaritmos,* se reducen generalmente las operaciones de los dos últimos algoritmos, *producción* y *graduación,* á las correlativas de los dos primeros, *sumación* y *producción*, en virtud de las propiedades generales (212).

Muchas son las tablas ya construídas, diferentes unas de otras... por su extensión, número ó límite á que alcanzan, por el número de cifras decimales que en ellas tiene cada logaritmo, y por su extructura ó disposición, con respecto á la cual se clasifican de *simple entrada* y *de doble entrada,* según pronto especificaremos.

218. La construcción de una tabla de logaritmos, sean cuales fueren su extensión y su estructura, se reduce á buscar directamente los logaritmos de los números primos, y sumándolos convenientemente (212–3.ª), los de los números compuestos (previa su descomposición en sus factores primos), hasta el límite á que ha de llegar la tabla, la cual nunca contiene más que logaritmos de números enteros, puesto que de ellos se deducen fácilmente los demás (215).

La investigación de los logaritmos de los números primos, se hace, en realidad, por los métodos algebraicos ó superiores que ya indicamos (216), por ser los más rápidos para obtener el número prefijado de cifras decimales, mas también puede hacerse por los métodos aritméticos ó elementales de la interpolación (208) y de Long (216).

Mediante la teoría de aproximaciones (175 á 183), se sabrá, en cada caso, con cuántas cifras decimales deberán tomarse los datos en todos esos cálculos, para que el logaritmo buscado tenga exactas las cifras prefijadas.

219. Las tablas de simple entrada se reducen á una serie de pares de columnas, en la primera de las cuales están los números enteros, y en la segunda los logaritmos correspondientes ó correlativos, estando, naturalmente, cada número y su logaritmo en la misma línea de sus respectivas columnas.

Puede haber también una tercera columna con las diferencias ya halladas entre cada dos logaritmos consecutivos, los cuales habrá que restar, si no existe esa tercera columna, cuando hagan falta estas diferencias.

Las de doble entrada constan, por lo menos, de once columnas en cada página (ó doble página, que sirve como una sola cuando el tamaño es pequeño); en la primera están los números enteros hasta la décima parte del mayor de las tablas, y en las otras diez columnas principales, los logaritmos correspondientes á dichos números, y á los que resultan de añadirles á su derecha una cifra más; por eso son diez esas columnas, tantas como cifras del sistema numerativo.

El fundamento de esta disposición es la propiedad (215, 3.ª) de los logaritmos vulgares, de la que se deduce fácilmente que, si los logaritmos de dos números que sólo difieren en la cifra de su derecha, no tienen la misma mantisa, tampoco diferirán sus mantisas respectivas, sino en las últimas decimales, y siéndoles comunes las primeras, bastará poner éstas al principio de cada línea, ó sea en la primera columna de logaritmos, y sucesivamente las últimas bajo la última cifra del número, en las otras nueve columnas. Así se ahorra repetir las primeras cifras en esas nueve columnas y se gana espacio, pudiéndose extender tales tablas más que las de simple entrada, con menos volumen.

Tienen también muchas de ellas otras diez columnitas auxiliares con las diferencias logarítmicas ya citadas, y que sólo constan, á lo más, de dos ó tres decimales de los últimos órdenes. Esas diferencias suelen estar, además, fuera de columnas, y bajo cada una sus productos por 0,1... 0,2..., hasta 0,9; supuesto que la diferencia total corresponde á la unidad en que difieren los números respectivos. Todo lo cual facilita la resolución de los dos problemas generales (dado un número, hallar su logaritmo y viceversa), de que vamos á tratar en los dos párrafos siguientes, y para su mejor inteligencia, reproducimos una página doble de las tablas del Sr. Vázquez Queipo, que son las españolas más usadas.

N.	Log. 0	dif.	1	dif.	2	dif.	3	dif.	4	dif.
1850	26 7172	23	7195	24	7219	23	7242	24	7266	23
51	7406	24	7430	23	7453	24	7477	23	7500	24
52	7641	23	7664	24	7688	23	7711	24	7735	23
53	7875	24	7899	23	7922	24	7946	23	7969	24
54	8110	23	8133	24	8157	23	8180	23	8203	24
55	8344	23	8367	24	8391	23	8414	24	8438	23
56	8578	23	8601	24	8625	23	8648	24	8672	23
57	8812	23	8835	24	8859	23	8882	23	8905	24
58	9046	23	9069	23	9092	24	9116	23	9139	24
59	9279	24	9303	23	9326	23	9349	24	9373	23
1860	26 9513	23	9536	24	9560	23	9583	23	9606	24
61	9746	24	9770	23	9793	23	9816	24	9840	23
62	9980	23	*0003	23	*0026	24	*0050	23	*0073	23
63	27 0213	23	0236	23	0259	24	0283	23	0306	23
64	0446	23	0469	24	0493	23	0516	23	0539	23
65	0679	23	0702	23	0725	24	0749	23	0772	23
66	0912	23	0935	23	0958	23	0981	24	1005	23
67	1144	24	1168	23	1191	23	1214	23	1237	24
68	1377	23	1400	23	1423	24	1447	23	1470	23
69	1609	24	1633	23	1656	23	1679	23	1702	23
1870	27 1842	23	1865	23	1888	23	1911	23	1934	24
71	2074	23	2097	23	2120	23	2143	24	2167	23
72	2306	23	2329	23	2352	23	2375	24	2399	23
73	2538	23	2561	23	2584	23	2607	24	2631	23
74	2770	23	2793	23	2816	23	2839	23	2862	23
75	3001	23	3024	24	3048	23	3071	23	3094	23
76	3233	23	3256	23	3279	23	3302	23	3325	24
77	3464	23	3487	24	3511	23	3534	23	3557	23
78	3696	23	3719	23	3742	23	3765	23	3788	23
79	3927	23	3950	23	3973	23	3996	23	4019	23
1880	27 4158	23	4181	23	4204	23	4227	23	4250	23
81	4389	23	4412	23	4435	23	4458	23	4481	23
82	4620	23	4643	23	4666	23	4689	23	4712	23
83	4850	23	4873	23	4896	24	4920	23	4943	23
84	5081	23	5104	23	5127	23	5150	23	5173	23
85	5311	23	5334	23	5357	23	5380	24	5404	23
86	5542	23	5565	23	5588	23	5611	23	5634	23
87	5772	23	5795	23	5818	23	5841	23	5864	23
88	6002	23	6025	23	6048	23	6071	23	6094	23
89	6232	23	6255	23	6278	23	6301	23	6324	23
1890	27 6462	23	6485	23	6508	33	6531	23	6554	23
91	6692	22	6714	23	6737	23	6760	23	6783	23
92	6921	23	6944	23	6967	23	6990	23	7013	23
93	7151	23	7174	22	7196	23	7219	23	7242	23
94	7380	23	7403	23	7426	23	7449	23	7472	23
95	7609	23	7632	23	7655	23	7678	23	7701	23
96	7838	23	7861	23	7884	23	7907	23	7930	23
97	8067	23	8090	23	8113	23	8136	23	8159	23
98	8296	23	8319	23	8342	23	8365	23	8388	23
99	8525	23	8548	23	8571	23	8594	22	8616	23
N.	Log. 0	dif.	1	dif.	2	dif.	3	dif.	4	dif.

	24
1	2.4
2	4.8
3	7.2
4	9.6
5	12.0
6	14.4
7	16.8
8	19.2
9	21.6

N.	Log. **5**	dif.	**6**	dif.	**7**	dif.	**8**	dif.	**9**	dif.
1850	26 7289	24	7313	23	7336	23	7359	24	7383	23
51	7524	23	7547	24	7571	23	7594	24	7618	23
52	7758	24	7782	23	7805	24	7829	23	7852	23
53	7993	23	8016	23	8039	24	8063	23	8286	24
54	8227	23	8250	24	8274	23	8297	24	8321	23
55	8461	23	8484	24	8508	23	8531	24	8555	23
56	8695	23	8718	24	8742	23	8765	24	8789	23
57	8929	23	8952	24	8976	23	8999	23	9022	24
58	9163	23	9186	23	9209	24	9233	23	9256	23
59	9396	24	9420	23	9443	23	9466	24	9490	23
1860	26 9630	23	9653	23	9676	24	9700	23	9723	23
61	9863	23	9886	24	9910	23	9933	23	9956	24
62	27 0096	24	0120	23	0143	23	0166	24	0190	23
63	0329	24	0353	23	0376	23	0399	24	0423	23
64	0562	24	0586	23	0609	23	0632	24	0656	23
65	0795	24	0819	23	0842	23	0865	23	0888	24
66	1028	23	1051	24	1075	23	1098	23	1121	23
67	1261	23	1284	23	1307	23	1330	24	1354	23
68	1493	23	1516	24	1540	23	1563	23	1586	23
69	1725	24	1749	23	1772	23	1795	23	1818	24
1870	27 1958	23	1981	23	2004	23	2027	24	2051	23
71	2190	23	2213	24	2236	23	2259	24	2283	23
72	2422	23	2445	28	2468	23	2491	24	2515	23
73	2654	23	2677	24	2700	23	2723	23	2746	24
74	2885	24	2909	23	2932	23	2955	23	2978	23
75	3117	23	3140	23	3163	24	3187	23	3210	23
76	3349	23	3372	23	3395	23	3418	23	3441	23
77	3580	23	3603	23	3626	23	3649	23	3672	24
78	3811	23	3834	23	3857	24	3881	23	3904	23
79	4042	23	4065	24	4089	23	4112	23	4135	23
1880	27 4273	23	4296	24	4320	23	4343	23	4366	23
81	4504	23	4527	23	4550	23	4573	24	4597	23
82	4735	23	4758	23	4781	23	4804	23	3827	23
83	4966	23	4989	23	5012	23	5035	23	5058	23
84	5196	23	5219	23	5242	23	5265	23	5288	23
85	5427	23	5450	23	5473	23	5496	23	5519	23
86	5657	23	5680	23	5703	23	5726	23	5749	23
87	5887	23	5910	23	5933	23	5956	23	5979	23
88	6117	23	6140	23	6163	23	6186	23	6209	23
89	6347	23	6370	23	6393	23	6416	23	6439	23
1890	27 6577	23	6600	23	6623	23	6646	23	6669	23
91	6806	23	6829	23	6852	23	6875	23	6898	23
92	7036	23	7059	23	7082	23	7105	23	7128	23
93	7265	23	7288	23	7311	23	7334	23	7357	23
94	7495	23	7518	22	7540	23	7563	23	7586	23
95	7724	23	7747	23	7770	23	7793	22	7815	23
96	7953	23	7976	23	7999	23	8022	22	8044	23
97	8182	23	8205	23	8228	22	8250	23	8273	23
98	8411	22	8433	22	8456	23	8479	23	8502	23
99	8639	23	8662	23	8685	23	8708	23	8731	23
N.	Log. **5**	dif.	**6**	dif.	**7**	dif.	**8**	dif.	**9**	dif.

	23
1	2.3
2	4.6
3	6.9
4	9.2
5	11.5
6	13.8
7	16.1
8	18.4
9	20.7

El uso inmediato de las tablas logarítmicas se reduce, como ya hemos indicado, á resolver estas dos cuestiones:

1.ª *Dado un núm.º entero ó decimal, hallar su log.º*

2.ª *Dado un log.º, hallar su número correspondiente.*

Para ambas, deben tenerse en cuenta las siguientes generalidades:

Como, según las propiedades (215—2.ª, 3.ª) del sistema vulgar, la característica de un logaritmo se sabe al mismo tiempo que el número dado, y la mantisa es la misma, sea el número entero ó decimal, siempre que conste de iguales cifras y en el mismo orden; por eso, ni la mayoría de las tablas suelen tener expresas las características, ni sus mantisas se refieren más que á números enteros, quedando á cargo de quien las usa dar á las cifras del número su valor relativo, según la característica dada (segunda cuestión), ó tomar la característica debida, según el valor relativo de la primera cifra significativa de la izquierda del número dado (primera cuestión).

Lo primero, pues, que habrá de hacerse en la cuestión primera, es prescindir de la coma, si el número es decimal; y en la segunda, prescindir de la característica; sin perjuicio de hacer uso de lo prescindido al acabar de resolver, en cada caso, la cuestión propuesta.

220. *Cuestión 1.ª* Pueden suceder dos casos: ó el número dado, considerado como entero, aunque no lo sea, está en las tablas, ó no lo está, por ser mayor que el límite de aquéllas.

Primer caso. Búsquese dicho número en la columna respectiva: se le encontrará íntegro en las de simple entrada, y en las de doble, si es menor que la décima parte del límite, y su logaritmo, ó por lo menos, la mantisa, estará en la misma línea y columna inmediata que el número dado.

Si el número fuere mayor que la décima parte del límite de las tablas de doble entrada, se buscará su primera cifra de la derecha en la parte superior ó inferior de la columna respectiva (después de buscar las demás en la primera columna); bajo y sobre aquella cifra, y frente á las otras, estarán las últimas cifras de la mantisa, y las primeras en la columna bajo el 0, en la misma ó superior línea, á no ser que las últimas cifras tengan un asterisco (*) indicando que las primeras cifras de la mantisa están en la línea inferior.

Ejemplo 1.º Supongamos que se pide el logaritmo de cualquiera de los números desde 1850 á 1899, comprendidos en la primera columna de la página copiada; v. g. de 1892, ú otro que conste de esas cifras en ese orden, aunque no sea entero. Estos logaritmos tendrán por mantisa común 0,276921... con 3 de característica para el número 1892 (215—2.ª); con 2 para el número 189,2; con 1 para el número 19,82; con 0 para el número 1,892; con $\bar{1}$ para el número 0,1892, y así sucesivamente.

Ejemplo 2.º Sea el número 189,24, cuyo logaritmo se busca. Prescindiendo de la coma, y buscando las cuatro primeras cifras, como en el ejemplo anterior, y la última, ó primera de la derecha, arriba ó abajo en la columna encabezada y terminada por 4, bajo esta cifra, y en la línea de las primeras... 1892, están las cuatro últimas cifras de la mantisa, 7013; las dos primeras son, como antes, 27; y como la característica ha ser 2, resulta

$$\log 189{,}24 = 2{,}277013...$$

Ejemplo 3.º Sea, por último, log 18623 el pedido.

Frente á 1862, y bajo la última cifra 3, están... 0050, últimas cifras de la mantisa, y como éstas tienen asterisco, las dos primeras no son las 26 de las líneas superiores, sino las 27 de la inferior, luego

$$\log 18623 = 4{,}270050.$$

Segundo caso. Si el número dado, considerado como entero, es mayor que el límite de las tablas, se buscan sus primeras cifras—de la izquierda—hasta donde sea posible, y la mantisa que las corresponde; hallando también la diferencia entre esa mantisa y la inmediata superior, si ya no está hallada en las tablas, como en las que transcribimos. En seguida, considerando como entero al número buscado, y como fracción decimal sobrante á las cifras que quedaron á su derecha, se forma la siguiente proporción:

$$\frac{1 \text{ (dif.}^{a} \text{ de dos enteros consecut.}^{s})}{0,f \text{ (fracción decimal sobrante).}} = \frac{d \text{ (dif.}^{a} \text{ de los dos log.}^{s} \text{ consecut.}^{s})}{x \text{ (dif.}^{a} \text{ entre los log.}^{s} \text{ hall.}^{o} \text{ y ped.}^{o})}$$

Calculado el valor de x, y añadido al log. buscado en las tablas, se tendrá el del número dado.

Esto supone que las diferencias numéricas son proporcionales á las logarítmicas respectivas; proporción inexacta, pero cuyos errores subsiguientes no influyen en las cifras decimales que se toman para los logaritmos usados, en la mayoría de los casos, según se demuestra en el Algebra.

En las tablas de Vázquez Queipo, y en algunas otras, no hay necesidad de tal proporción, pues, como ya digimos, y está á la vista en la página transcripta, fuera de las columnas están los productos de cada diferencia entre dos logaritmos consecutivos, por 0,1, por 0,2... hasta por 0,9, y es claro que *esos mismos productos,* corridos uno ó más lugares hacia la derecha, *lo serán de la propia diferencia* por 0,01... 0,02... 0.09, ó por 0,001... 0,002... 0,009, etc., quedando así reducido el añadir al logaritmo hallado la parte proporcional que le falte, á sumar unas pocas cifras decimales de los últimos órdenes, pues á éstos se refieren, naturalmente, las diferencias tabulares y sus productos susodichos.

Ejemplo 1.° Sea log 186425 el pedido.

El de 18642, número que forman las primeras cifras del dado, comprendidas en las tablas citadas, es...

$$\log 18642 = 4{,}270493.$$

La diferencia tabular correspondiente es 23, y su producto por 0,5 (cifra que sigue al 2) es 11,5, según está allí expreso bajo el 23, á la derecha y parte exterior de la página; luego

$$\begin{aligned} \log 186420 &= 5{,}270493 \\ \text{por } 0{,}5 &= \ldots\ldots\ldots 11 \\ \hline \log 186425 &= 5{,}270504 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.º Sea el núm. 18997,543, cuyo log. se pide.

$$\textit{Cálculo.}\left\{\begin{array}{lrl} \log & 18997 = & 4{,}278685 \\ \text{por} & 0{,}5 = & \ldots\ 115 \\ « & 0{,}04 = & \ldots\ \ \ 92 \\ « & 0{,}003 = & \ldots\ \ \ 69 \end{array}\right.$$

$$\text{Log. } 18997{,}543 = 4{,}278697\ldots$$

Claro es que, con la práctica, esas sumas se hacen mentalmente.

Ejemplo 3.º Log. $0{,}001870459 = \overline{3}{,}271948$.

Desde luego, la característica es $\overline{3}$ (con mantisa positiva).

$$\left.\begin{array}{lrl} \text{Además, log.} & 18704 = & \ldots{,}271934 \\ \text{por} & 0{,}5 = & \ldots\ldots\ 12 \\ « & 0{,}09 = & \ldots\ldots\ 21 \end{array}\right\}\ldots.\ 271948.$$

221. *Cuestión 2.ª* También pueden ocurrir dos casos, según que la mantisa del logaritmo dado esté ó no exacta en las tablas, siendo evidente que en el caso segundo estará entre dos consecutivas.

Primer caso. Búsquese la mantisa del log. dado, en la parte más avanzada posible de las tablas (casi siempre después del número 1000, y si es posible, del 10000), y enfrente se tendrán las cifras sucesivas del número correlativo, cuyos órdenes numerativos serán los que indique la característica del logaritmo dado (215-2.ª)

Por ejemplo: $3{,}269420 = \log.\ 1859{,}6$

Segundo caso. Cuando la mantisa del logaritmo dado esté entre dos consecutivas de las tablas, se busca la menor, su número correspondiente y las diferencias... entre dichas consecutivas, si no la dan las tablas, y entre la dada y la menor buscada. Fórmase en seguida, —si hace falta,—la proporción logarítmica invertida....

$$\frac{d\ (\text{dif.}^{\text{a}}\ \text{tabular entre los dos log.}^{\text{s}}\ \text{consecut.}^{\text{s}})}{d'\ (\text{dif.}^{\text{a}}\ \text{entre las mantisas dada y buscada})} = \frac{1\ (\text{dif.}^{\text{a}}\ \text{de los núm.}^{\text{os}}\ \text{consecut.}^{\text{s}})}{x}$$

El valor de x es indudablemente la parte decimal que hay que añadir al número entero que corresponde al logaritmo buscado. Luego se restablecerán los valores relativos de todas las cifras del número así hallado, en virtud de la característica de su logaritmo.

Ejemplo 1.° Sea 4,269480 el logaritmo dado.

La mantisa inferior más próxima es..., 269466 cuyas diferencias con la inmediata es 0,000024, y con la dada 0,000014. La proporción será aquí, pues,

$$24 : 14 :: 1 : x = \frac{14}{24}$$

En vez de hacer la división, ó reducción de ese quebrado común á decimal, las mismas tablas nos dan bajo el 24 exterior (margen izquierda), y frente al 14 el número 6 que es la cifra siguiente á las del número 18598, cuyo logaritmo es el buscado. Y como por ser 4 la característica dada, el número ha de tener 5 cifras enteras, resulta verdaderamente $4{,}269480 = \log 18598{,}6$.

Ejemplo 2.° Sea $\overline{2}{,}270090 = \log N$.

Desde luego, el número N ha de ser decimal y tener la primera cifra izquierda en el lugar de las centésimas. Busquemos, pues, todas sus cifras. La mantisa inmediata inferior 0,270073 difiere de su consecutiva 0,000023, y de la dada 0,000017. Bajo el 23 marginal y frente al 7 se halla 16,8 que es indudablemente muy próxima á 17. Podemos, pues, tomar esa cifra 7 como la última y siendo las primeras, ó correspondientes á la mantisa hallada, 18624, claro es que el número $N = 0{,}0186247$.

Si el logaritmo dado fuere enteramente negativo, ya sabemos (215, 4.ª) á qué número corresponde; aunque casi nunca ocurre este caso en la buena práctica (215, 5.ª).

§ 2.° Cálculo logarítmico.

222. Las operaciones aritméticas, con el auxilio de las tablas logarítmicas, ó, como se dice, *el cálculo logarítmico* se reduce, en general, á buscar primero, si ya no se conocen, los logaritmos de los datos ó de algunos de ellos, operar con esos logaritmos, en virtud de las propiedades generales (212) y según las operaciones aritméticas de que se trate, hasta obtener el logaritmo del resultado; buscando éste, por último, mediante su precitado

logaritmo. Y como toda operación complicada se reduce á combinar unas con otras las operaciones elementales, estudiemos primero el modo de hacer éstas por logaritmos.

Si el resultado ó algún dato fuere negativo, se prescinde del signo para aplicar los logaritmos, teniéndole en cuenta al final del cálculo.

Las sumas y restas no parece puedan verificarse logarítmicamente (puesto que no hemos dicho qué relación puede tener el logaritmo del resultado con los de los datos), y así es en efecto, con las tablas más usuales; pero con tablas auxiliares, de los llamados logaritmos de Gauss, también se pueden calcular dichos resultados mediante los logaritmos de los datos, como veremos en el número siguiente; procediendo en éste, sólo al cálculo de productos, cocientes, potencias y raíces, etc.

1.° *Para buscar por logaritmos un producto, se buscarán los logaritmos de todos los factores, se sumarán esos logaritmos, y siendo la suma el logaritmo del producto, éste será el número correspondiente á dicho logaritmo-suma.*

Como suponemos las mantisas todas positivas, nada hay que advertir respecto á ellas, pero las características... se sumarán entre sí todas las positivas, más las unidades que provengan de la suma de las mantisas; se sumarán aparte las características negativas, y se restarán las dos sumas, poniendo al resultado el signo — si fuere mayor la suma negativa.

Ejemplo 1.° Sea el producto de $45 \times 76 \times 0,87 = p$.

$$\begin{aligned} \log 45 &= 1,653213 \\ \log 76 &= 1,880814 \\ \log 0,87 &= \bar{1},939519 \end{aligned}$$

$$\log(45 \times 76 \times 0,87) = \log p = 3,473546 = \log 2975,4.$$

Ejemplo 2.° $0,123 \times 0,456 \times 0,789 = 0,044254$.

$$\begin{aligned} \log 0,123 &= \bar{1},089905 \\ \log 0,456 &= \bar{1},658965 \\ \log 0,789 &= \bar{1},897077 \end{aligned}$$

$$\log 0,123 \times 0,456 \times 0,789 = \bar{2},645947 = \log 0,044254.$$

2.° *Para obtener por logaritmos, y en forma entera ó decimal, un cociente ó quebrado ordinario, se restará del logaritmo del dividendo ó numerador, el logaritmo del divisor ó denominador; ó mejor se sumará con aquel primer logaritmo el complemento ó cologaritmo del segundo, y el resultado será el logaritmo del cociente ó quebrado.*

Ejemplo 1.°

Sea el quebrado ó cociente 7170 : 295 = 24,305.

$$\begin{array}{r} \log 7170 = 3{,}855519 \\ \text{C.}^{\circ} \log\ 295 = \overline{3}{,}530178 \\ \hline \log (7170 : 295) = 1{,}385697 = \log 24{,}305. \end{array}$$

Ejemplo 2.° $\frac{41}{79} = 0{,}518987.$

$$\begin{array}{r} \log 41 = 1{,}612784 \\ \text{C.}^{\circ} \log 79 = \overline{2}{,}102373 \\ \hline \log \frac{41}{79} = \overline{1}{,}715157 = \log 0{,}518987. \end{array}$$

3.° *Para hallar logarítmicamente una potencia, se multiplica su exponente por el logaritmo de la raíz ó número que ha de elevarse, y se busca el número correspondiente á ese logaritmo-producto.*

Si la característica del logaritmo factor es negativa, y positivo el exponente, el producto parcial de esos dos números es negativo, deberá, pues restarse de las unidades que provengan del producto de la mantisa por el exponente, ambos positivos. Si el exponente fuere negativo, también lo será todo el logaritmo producto, en el caso que el logaritmo factor sea positivo; pero ya sabemos transformarle en otro de característica sola negativa. Y si siendo el exponente negativo, también lo fuere la característica, este producto parcial será positivo, y negativo el de la mantisa (positiva) por dicho exponente negativo. Habrá, pues, que restar esa mantisa-producto, salvo el signo de aquella característica, etc.

Ejemplo 1.° $(714)^4 = 259891000000$ (aproximadam.^{te})

$$\begin{array}{r} \log 714 = 2{,}853698 \\ \times\ 4 \\ \hline 11{,}414792 = \log 259891000000. \end{array}$$

Ejemplo 2.° $(0{,}975)^7 = 0{,}8376$ (en menos de 0,0001.)

$$\begin{array}{r} \log 0{,}975 = \bar{1}{,}989005 = (0{,}989005 - 1) \\ \times\ 7 \\ \hline \end{array}$$

$$(0{,}989005 - 1) \times 7 = 6{,}923035 - 7 = \bar{1}{,}923035 = \log 0{,}8376$$

Ejemplo 3.° $(625)^{-2} = 0{,}00000256$ (exactamente).

$$\begin{array}{r} \log 625 = 2{,}795880 \\ \times -2 \\ \hline -5{,}591760 = \bar{6}{,}408240 = \log 0{,}00000256 \end{array}$$

Ejemplo 4.° $(0{,}0512)^{-3} = 7450{,}6$ (aproximadamente).

$$\begin{array}{r} \log 0{,}0512 = \bar{2}{,}709270 = (0{,}709270 - 2). \\ \times \quad -3 \\ \hline 6 - 2{,}127810 = 3{,}872190 = \log 7450{,}6. \end{array}$$

4.° *Para extraer una raíz por logaritmos, se divide el del número subradical por el índice de aquélla, y se busca el número que corresponde al logaritmo-cociente.*

Si la característica del logaritmo-dividendo fuere negativa y no divisible por el índice, se añadirán á aquélla las unidades negativas precisas para formar un múltiplo de dicho índice, añadiendo en compensación á la mantisa (positiva) otras tantas unidades positivas.

Si el índice fuere negativo, se tendrán presentes las mismas advertencias que hemos hecho para cuando sea negativo el exponente de una potencia.

Ejemplo 1.° $\sqrt[5]{1{,}234} = 1{,}04295.$

$$\begin{array}{r} \log 1{,}234 = 0{,}091315 \\ :\ 5 \\ \hline 0{,}018263 = \log 1{,}04295. \end{array}$$

Ejemplo 2.° $\sqrt[7]{0,68274} = 0,94697$

$$\begin{array}{r} \log 0,68274 = \bar{1},834256 = \bar{7} + 6,834256 \\ :7 \\ \hline \bar{1},976322 = \log 0,94694 \end{array}$$

5.° *Para buscar por logaritmos un exponente ó índice, se dividen los logaritmos de la potencia y de la raíz dadas, tomando aquel por dividendo y éste por divisor, si se busca un exponente; y viceversa si se pide el índice de un radical.*

Tal resulta tomando logaritmos en las fórmulas...

$$a^x = b, \ x \log a = \log b, \ x = \frac{\log b}{\log a}$$

$$\sqrt[x]{a} = b, \ \frac{\log a}{x} = \log b, \ x = \frac{\log a}{\log b}$$

Ejemplo. Hallar el valor de x de la siguiente igualdad $\left(\frac{603}{602}\right)^x = \frac{3}{2}$. Tomando log.s... $x \times \log \frac{603}{602} = \log \frac{3}{2}$

$$ó \ x \times (\log 603 - \log 602) = \log 3 - \log 2,$$

$$x = \frac{\log 3 - \log 2}{\log 603 - \log 602}$$

$\log 3 = 0,477121$	$\log 603 = 2,780317$
C.° $\log 2 = \bar{1},698970$	$\log 602 = 2,779596$
$\log 3 - \log 2 = 0,176091$	$\log 603 - \log 602 = 0,000721$

$$\log x = \log 0,176091 - \log 0,010721$$

$$\begin{array}{rl} \log 0,176091 &= \bar{1},245737 \\ \log 0,000721 &= \bar{4},857935 \\ \hline \log x &= 2,387802 \\ x &= 244,32 \end{array}$$

6.° Comprobar por logaritmos que $\sqrt[3]{\frac{13572^2}{121}} = 115,036.$

223. Como ya hemos indicado, se pueden hallar sumas y diferencias mediante los logaritmos vulgares de sus términos, y las tablas de los logaritmos de Gauss. Estos se dividen en *aditivos* y *sustractivos*, ó de *adiciones* y de *sustracciones* respectivamente. El uso de ambas especies está fundado en las siguientes indubitables fórmulas: $(x > y)$...

$$\log(x+y) = \log\left[x\left(1+\frac{y}{x}\right)\right] = \log x + \log\left(1+\frac{y}{x}\right) \ldots [1].$$

$$\log(x-y) = \log\left[x\left(1-\frac{y}{x}\right)\right] = \log x + \log\left(1-\frac{y}{x}\right) = \log x - \log\frac{1}{1-\frac{y}{x}} \quad [2]$$

Ahora bien, las tablas de Gauss dan los valores de $\log\left(1+\frac{y}{x}\right)$ ó de los log.^{s} de adiciones y de $\log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$ ó de los log.^{s} sustractivos, para cada valor (positivo) de $\log\frac{x}{y}$, ó sea de $\log x - \log y$; de modo que *para obtener el log de la suma* (x + y) *de dos números dados, se restan sus logaritmos vulgares, el menor del mayor, se busca el log (de Gauss) aditivo correspondiente á dicha resta, se suma ese log aditivo log* $\left(1+\frac{y}{x}\right)$ *con el mayor log* x, *y se tendrá log* (x + y), en virtud de la fórmula [1].

Para calcular una diferencia (x — y), *se restarán también los logaritmos vulgares de minuendo y sustraendo (el menor del mayor), se buscará* en las tablas de Gauss, *el logaritmo sustractivo* $\log\frac{1}{1-\frac{y}{x}}$, *el cual restado del log* x *(del minuendo), nos dará el logaritmo de la diferencia* (x — y); según la fórmula [2].

Ejemplo. Sean... $\log x = \overline{1},3177$, $\log y = \overline{1},1732$.

Serán $\log x - \log y = 0,1445$ $\begin{cases} \text{log adit.}^\circ\ 0,144 = 0,2350 \\ \text{log sustr.}^\circ\ 0,144 = 0,5494 \end{cases}$

luego $\begin{cases} \log(x+y) = \overline{1},3177 + 0,2350 = \overline{1},5527 = \log 0,357 \\ \log(x-y) = \overline{1},3177 - 0,5594 = \overline{2},7683 = \log 0,0587 \end{cases}$

Nota. Tablas de logaritmos de Gauss, se encuentran agregadas á la traducción del Algebra de Baltzer, por los Sres. Jiménez y Merelo, y también en las notables Tablas logarítmicas há poco publicadas por nuestro compañero D. Luís Gonzaga Gascó.

Cuestiones sobre el Libro cuarto.

1. ¿Cuántos metros andará un jardinero para regar 20 árboles, que están en línea recta á 10^{m} de distancia cada cual de los inmediatos, echando á cada uno una regadera, y distando el pilón donde la llena 30^{m} del más próximo, también en la misma recta, suponiendo que al empezar está el jardinero en el pilón, y que los riega por su orden correlativo?

2. ¿Cuál será la velocidad de un cuerpo á los 10 segundos de su caída, sabiendo que es de $9^{m},8$ al fin del 1.º y que crece (la velocidad) como los tiempos mismos 1, 2, 3,... 10?

3. Dividir un número dado en dos partes cuya razón sea dada.

4. Hallar la fracción generatriz de una decimal periódica pura, considerándola como suma de los infinitos términos de una progresión geométrica decreciente.

$$0{,}abcabcabc... = \frac{abc}{1000} + \frac{abc}{1000^2} + \frac{abc}{1000^3} + ...$$

5. ¿Cuánto ha perdido un jugador en 12 puestas seguidas, sabiendo que en la 1.ª perdió una peseta, y fué doblando y perdiendo hasta la 12.ª?

6. ¿Cuál es el precio de un caballo que tiene 20 clavos en las herraduras, ajustado á razón de un céntimo por el primer duro, y doble por cada uno que por el anterior?

7. ¿Cuánto tardará en duplicarse la población de un país que aumenta 0,01 cada año?

8. Calcular por logaritmos $\sqrt[5]{\dfrac{0{,}5142}{375}}$

9. ¿Cuál es la base logarítmica del sistema en que 6 es el logaritmo de 729?

PARTE 2.ª

ARITMÉTICA CONCRETA.

LIBRO QUINTO.—CÁLCULO DE NÚMEROS CONCRETOS.

CAPÍTULO 1.°—NUMERACIÓN Y TRANSFORMACIONES.

LECCIÓN 20.

División razonada de la Aritmética concreta (224). *Conveniencia de varias unidades concretas homogéneas* (225). *Principales géneros de cantidades y de unidades concretas; sistemas de pesas, medidas y monedas; sistema legal* (226). *Unidades principales del sistema métrico decimal; formación y nombres de las múltiplas y submúltiplas de cada unidad principal* (227). *Cuadros de todas las unidades métrico decimales y sus relaciones* (228). *Sistema antiguo de pesas, medidas y monedas de Castilla* (229). *Equivalencias principales entre las unidades homogéneas de ambos sistemas* (230). *Números incomplejos y complejos: reducción de unos á otros* (231). *Reducción de pesas y medidas del sistema antiguo al decimal y viceversa* (232).

ARTÍCULO 1.°—NUMERACIÓN DE CONCRETOS.

224. El estudio aritmético de los números concretos debe constar, como el de los abstractos, de dos secciones: su *cálculo*, ó formación de unos por otros; y su *compara-*

ción, ó relaciones elementales entre ellos. La primera sección constituirá el Libro quinto de estas Lecciones, y se subdividirá en Capítulos, Artículos, etc., análogamente á los tres Libros primeros; pues, como en los números enteros, fraccionarios é incomensurables, cabe estudiar en los concretos: su numeración, transformaciones y operaciones. La segunda sección formará el Libro 6.° y último, análogo al cuarto de los números abstractos, y se subdividirá, naturalmente, según los principales géneros de cuestiones comparativo-numéricas más usuales, aunque casi todas reducidas á las tres especies posibles de proporcionalidad entre cantidades concretas; pues las relaciones numéricas que no puedan reducirse á una ó varias proporciones, no son elementales, y por tanto no son propias de la Aritmética sino del Algebra, ó ciencia de las relaciones generales entre cantidades matemáticas cualesquiera.

225. Según digimos (4), la medición de las cantidades de un mismo género exije tomar una de ellas por unidad, es decir, por patrón ó tipo de la comparación que supone toda medida; y en rigor matemático bastaría una sola unidad para cada género de cantidades, mas *para facilitar las mediciones, y evitar además*, en lo posible, *números muy grandes y muy pequeños* (12, Post.s), *conviene adoptar varias unidades homogéneas, sirviendo* naturalmente *las mayores para medir cantidades grandes, las menores para las pequeñas, etc.*

226. Los géneros de cantidades concretas son realmente muchísimos, pero hay unos pocos que por referirse á objetos de los más necesarios para la vida social, son los únicos cuyas unidades y números respectivos se estudian en Aritmética, constituyendo el conjunto de esas unidades usuales, en cada país, el *sistema de pesas, medidas y monedas* del país; pues, esos géneros de cantidades y unidades concretas, más usuales, son *de peso, de longitud, de superficie, de volumen ó capacidad, de tiempo y de dinero ó numerario,* llamándose comunmente á las unidades de peso, *pesas;* á las de dinero, *monedas,* y á todas las demás *medidas*.

Aunque esos sistemas varían realmente no sólo de una á otra nación, sino de una á otra comarca, hay en todo país civilizado, un *sistema legal de pesas, medidas y monedas,* único permitido en los documentos oficiales ó públicos, y obligatorio también privadamente, aunque no siempre se cumplan esa ni otras obligaciones.

En España, Francia y otras naciones, el *sistema* legal es el llamado *metrico-decimal;* métrico, porque su unidad fundamental es el *metro* = diez millonésima parte de la longitud del cuadrante del meridiano terráqueo, salvo el error inevitable en toda medición, y *decimal*, porque las distintas unidades de cada género son múltiplas ó submúltiplas unas de otras, por 10, 100, 1000, 10000, etc., como las unidades numerativas de los enteros en el único sistema usual de numeración, siendo esa la principal ventaja del sistema métrico decimal sobre todos los demás de pesas y medidas.

El sistema legal español, anterior al actual, y que todavía se usa demasiado en las transacciones privadas, es el llamado de Castilla, que expondremos después que el métrico decimal.

227. Este tiene para cada género *una unidad principal, y otras varias múltiplas y submúltiplas de aquélla por 10, 100, 1000*, etc., *cuyos nombres se forman anteponiendo al de la principal las voces griegas deca = 10, hecto = 100, kilo = 1000, miria = 10000, para las mayores ó múltiplas;* y las *latinas deci = 0,1, centi = 0,01, mili = 0,001, para las submúltiplas ó menores.* El tiempo no sigue en sus unidades la ley decimal; el dinero la sigue en la escritura, mas no en la nomenclatura; como tampoco la siguen algunas otras unidades que hay además de las formadas por la ley precitada en los mismos géneros más usuales, ni en otros menos usados.

228. En virtud de lo antedicho, la mayoría de las unidades métrico-decimales son las siguientes:

UNIDADES...

DE	MÚLTIPLAS POR...				PRINCIPALES	SUBMÚLTIPLAS POR...		
	10000	1000	100	10		0,1	0,01	0,001
Longitud.	Miriámetro.	Kilómetro.	Hectómetro.	Decámetro.	Metro.	Decímetro.	Centímetro.	Milímetro.
Superficie.			Hectárea.		Área.		Centiárea.	
Capacidad.	Miriálitro.	Kilólitro.	Hectólitro.	Decálitro.	Litro.	Decilitro.	Centilitro.	Mililitro.
Peso.	Miriágramo.	Kilógramo.	Hectógramo.	Decágramo.	Gramo.	Decígramo.	Centígramo.	Milígramo.
Dinero.			100 pesetas.	10 pesetas.	Peseta.	10 céntimos.	Céntimo.	

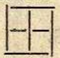
Además se usan para cantidades grandes ó pequeñas respectivamente las siguientes

UNIDADES...

Superficiales.. Miriám.° cuad.°, kilóm.° cuad.°, decim.° cuad.°, centím.° cuad.°, milím.° cuad.°

De volumen. . Miriám.° cúb.°, kilóm.° cúb.°, hectóm.° cúb.°, decám.° cúb.°, milím.° cúb.°

De peso.......
- Tonelada métrica = 10 quintales métr.^{s} = 100 miriágr.^{s} = 1000 kilógr.^{s}
- Quintal métrico = 10 miriágramos = 100 kilógramos.
- Décimas y vigésimas (0,05) de milígramo para los análisis químicos.

Para entender, en el cuadro anterior, las unidades de superficie así como las de capacidad ó volumen, precisa saber, por la Geometría, que las unidades adoptadas para medir superficies son *cuadrados*, es decir, cuadriláteros de lados y ángulos iguales, como las baldosas y baldosines  ; y para los volúmenes son *cubos*, es decir, capacidades de seis caras cuadradas iguales, como los dados, teniendo esos cuadrados y cubos por lados respectivos las unidades lineales, y de ahí los nombres de *metro cuadrado*, *metro cúbico*, etc. Cada unidad superior contiene tantas inferiores, cuadradas ó cúbicas, como unidades lineales correspondientes tengan los cuadrados y cubos numéricos respectivos. Por ejemplo: un decámetro cuadrado $= 10^2 = 100$ metros cuadrados; un decámetro cúbico $= 10^3 = 1000$ metros cúbicos. De ahí el llamar cuadrados y cubos á las segundas y terceras potencias numéricas. Algunas unidades tienen nombres distintos, sin que por eso dejen de poderse llamar según las reglas geométricas dichas. Así: el *área* es el decámetro cuadrado, y por tanto la *hectárea* el hectómetro cuadrado, y la *centiárea* el metro cuadrado; el *litro* es un decímetro cúbico, y por tanto el *kilólitro* es el metro cúbico y el *mililitro* el centímetro cúbico. Las otras medidas derivadas del litro no pueden tener forma cúbica, como no es preciso la tengan las que pueden tenerla, pues la capacidad de una vasija es independiente de su forma.

El *gramo* es el peso de un centímetro cúbico de agua destilada á 4 grados de temperatura; y por tanto, el kilógramo el peso de un decímetro cúbico de agua, en esas condiciones, y la tonelada el peso de un metro cúbico, etc.

Las monedas son de oro, plata y cobre ó más bien de aleaciones ó mezclas de esos metales con otros, para que sean más duras y se desgasten menos. Las cantidades respectivas de unos y otros metales, constituyen la ley de la moneda, que es en España la siguiente:

Para las de oro y las de plata de 5 pesetas... 0,900 de fino y 0,100 de cobre.

Para las demás de plata, 0,835 de plata y 0,165 de cobre.

Para las de cobre ó bronce... 0, 950 cobre, 0,040 estaño y 0,010 zinc.

Las monedas que debe haber, aunque no todas se han acuñado, son las siguientes:

De oro de.....	100. 50. 25. 20. 10. 5	pesetas.
De plata de..	5. 2. 1. 0,50. 0,20	
De bronce de	0,10. 0,5. 0,2. 0,1	

Los pesos, diámetros, permiso en más ó en menos respecto al peso y á ley, etc., están consignados en el Decreto Ley de 19 de Octubre de 1868, y Real orden de 21 de Marzo de 1871.

En adelante usaremos las siguientes abreviaturas: D = deca, H = hecto, K = kilo, M = miria, Q = quintal métrico, T = tonelada de peso, d = deci, c = centi, m = mili ó metro, a = área, l = litro, g = gramo, p = peseta.

La unión de dos de esas iniciales significará la unidad correspondiente, por ejemplo: Km = kilómetro, Hl = hectólitro, mg = milígramo, etc. Las unidades cuadradas y cúbicas se expresarán con las iniciales y los exponentes respectivos, verbi gracia: m^2 = metro cuadrado, cm^3 = centímetro cúbico, etc.

Las unidades de tiempo, comunes á casi todos los países, son:

Siglo........ = 100 años.	Año común... = 365 días.	
Decenio..... = 10 años.	Año bisiesto.. = 366 días.	Día ... = 24 horas.
Lustro ó quinquenio.... = 5 años.	Año comercial = 360 días.	Hora.. = 60 minutos.
Trienio...... = 3 años.	Mes comercial = 30 días.	Minuto = 60 segundos.
Bienio....... = 2 años.	Década....... = 10 días.	Los segundos se dividen en décimas y centésimas.
	Semana ...... = 7 días.	

229. El sistema antiguo de pesas, medidas y monedas de Castilla, que fué legal en toda España hasta 1849, en que se adoptó el métrico decimal, consta de las siguientes

UNIDADES...

DE LONGITUD Ó LINEALES.	DE SUPERFICIE Ó AGRARIAS.
Legua.......... $= 6666\frac{2}{3}$ varas = 20000 pies.	Las lineales cuadradas y además...
Milla............ $= \frac{1}{3}$ legua = 1111 brazas.	Fanega superficial=576 ests.^{2}=12 cel.^{s}
Estadal......... = 4 varas = 2 brazas = 12 pies.	Aranzada .... =400 estd.^{2}
Vara............. = 3 pies = 4 palmos = 36 pulg.^{as}	Celemín superf.^{al}.= 48 estads.^{2}
Pie............... = 12 pulgadas = 16 dedos.	**DE VOLÚMENES.**
Palmo........... = 9 pulgadas = 12 dedos.	Las lineales cúbicas y la tonelada de arqueo = 8 codos cúbicos de ribera, que se usa en la marina (*).
Pulgada .... = 12 líneas = 144 puntos.	
Línea............ = 12 puntos.	
Codo de ribera = 2 piés y 9 líneas.	

DE CAPACIDAD.

PARA ÁRIDOS.	PARA VINOS Y LICORES.	PARA ACEITES.
Cáhiz... = 12 fanegas.	Moyo ....= 16 cántaras ó arrobas.	
Fanega. = 12 celemines	Cántara ó arroba= 8 azumbres=4 cuart.^{as}	Arroba = 25 libras.
Celemín = 4 cuartillos.	Azumbre. ....= 4 cuartillos.	Libra.. = 4 panillas.
	Cuartillo.........= 4 copas.	

(*) La tonelada de arqueo moderna es el metro cúbico.

UNIDADES DE PESO.

Tonelada = 20 quintales = 80 arrobas = 2000 libras, etc.
Quintal = 4 arrobas = 100 libras = 1600 onzas.
Arroba = 25 libras = 400 onzas.
Libra = 16 onzas.
Libra medicinal = 12 onzas = $\frac{3}{4}$ libra común.
Onza = 8 dracmas = 24 escrúpulos = 16 adarmes.
Dracma = 3 escrúpulos = 6 tomines = 72 granos.
Adarme = 3 tomines = 36 granos.
Escrúpulo = 2 tomines = 24 granos.
Tomín = 12 granos.
Para las piedras preciosas, el quilate = 4 granos.

MONEDAS.

DE ORO.	DE PLATA.
Onza......... =16 duros.	Peso duro.......... =5 ps.=20 r.s
Media onza.. =8 duros.	Escudo ó $\frac{1}{2}$ duro. =10 reales.
Centén....... =5 duros.	Peseta columnaria=5 reales.
Ochentín .... =4 duros.	Peseta............. =4 r.s vón.
Escudo de oro=2 duros.	$\frac{1}{2}$ peseta......... =2 reales.
Escudito..... =1 duro.	Real de vellón=34 maravedises.
Escud.° antig.°=21$\frac{1}{4}$ rs.	

No hay ya monedas de cobre del sistema antiguo.

230. Las equivalencias aproximadas entre las unidades homogéneas de ambos sistemas expuestos, de pesas y medidas, son las siguientes:

1 legua................	=	5,572 kilómetros.
1 vara	=	0,836 metros.
1 pie...................	=	2,786 decímetros.
1 estadal²............	=	0,112 área.
1 fanega superficial	=	0,644 hectárea.
1 cuartillo (vino)...	=	0,504 litro.
1 libra de aceite....	=	0,502 litro.
1 fanega (grano)....	=	0,555 hectólitro.
1 onza..................	=	28,756 gramos.
1 libra.................	=	460 gramos.
1 arroba...............	=	11,502 kilógramos.

1 kilómetro...........	=	0,179 legua.
1 metro................	=	1,196 vara.
1 decímetro...........	=	0,359 pie.
1 área..................	=	8,944 estadales[2].
1 hectárea.............	=	1,553 fanega superficial.
1 litro (vino)..........	=	1,984 cuartillo.
1 litro (aceite)........	=	1,990 libra.
1 hectólitro...........	=	1,802 fanega.
1 gramo = 20 granos	=	0,035 onza.
1 kilógramo...........	=	2,173 libras.
1 tonelada métrica...	=	86,941 arrobas.

ART.° 2.°—TRANSFORMACIONES DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

231. Llámase número *incomplejo, al concreto de una sola especie,* por ejemplo: 5 arrobas, 15 varas, 3 fanegas, son tres incomplejos.

Por el contrario, número *complejo es el concreto compuesto de varios incomplejos del mismo género aunque de distintas especies;* por ejemplo: 2 arrobas, 9 libras y 7 onzas; 6 fanegas y 10 celemines, son dos números complejos; el primero de peso y el segundo de capacidad.

Para reducir un número incomplejo á otro de especie inferior, se multiplica el número dado por el de unidades inferiores de la especie buscada, que contenga la unidad superior de aquél.

Por ejemplo: para reducir 15 varas á pulgadas, se multiplica 15 por 36 que son las pulgadas que tiene una vara, y el producto $15 \times 36 = 540$ serán las pulgadas que tienen 15 varas.

Para reducir un incomplejo á otro de especie superior, se divide el número dado por el de unidades de su especie que contiene cada unidad superior de las buscadas, y el cociente exacto (entero ó fraccionario) es el número buscado.

Por ejemplo: para reducir 24 libras á quintales, basta expresar el cociente $\frac{24}{100}$ de quintal $= 0,24$; porque cada libra es una centésima de quintal, por tanto, 24 libras serán 24 centésimas. Claro es que ese cociente, y la mayoría de los análogos, son inexactos en números enteros.

Para reducir un complejo á incomplejo de especie inferior, se reduce primero el incomplejo superior de los que componen el complejo dado á la especie inferior inmediata, añadiendo las unidades que haya de ésta, reduciendo la suma á la especie inferior siguiente, añadiendo las que haya de ésta y así hasta llegar á la especie buscada.

Ejemplo. Reducir 6 quintales, 2 arrobas y 10 libras á onzas.

1.º 6 quintales $= 6 \times 4 = 24$ arrobas, y 2 que hay son 26 arrobas.

2.º 26 arrobas $= 26 \times 25 = 650$ libras, y 10 que hay son 660 libras.

3.º 660 libras $= 660 \times 16 = 10560$ onzas.

Para reducir un número complejo á incomplejo de especie cualquiera (no inferior), *se le reduce primero á la inferior de las que contenga, y luego este incomplejo se reduce al de la otra especie* por la regla ya dada.

Por ejemplo: las 10560 onzas del ejemplo anterior, son $\frac{10560}{16}$ de libra $= \frac{10560}{400}$ de arroba $= \frac{10560}{1600}$ de quintal, etc.

Por último, *para reducir á complejo un incomplejo, se le divide por el número de unidades de su especie que contiene la inmediata superior, y lo mismo se hace con los cocientes sucesivos,* los cuales serán los números de unidades superiores y los residuos los de las inferiores inmediatas respectivas. Por ejemplo: dividiendo 10560 por 16 (onzas que tiene una libra), resulta $10560 = 16 \times 660$, es decir 10560 onzas = 660 libras. Dividiendo 660 por 25 (libras que tiene una arroba), resulta $660 = 25 \times 26 + 10$; es decir, que 660 libras = 26 arrobas y 10 libras.

Dividiendo 26 por 4 (arrobas que tiene un quintal), resulta $26 = 4 \times 6 + 2$, es decir, que 26 arrobas = 6 quintales y 2 arrobas.

Luego 10560 onzas = 6 quintales, 2 arrobas y 10 libras.

Con los números concretos del sistema métrico decimal, casi no hay necesidad de resolver los problemas últimamente dichos, porque como las divisiones y subdivisiones siguen la ley de las unidades numerativas, se reducen fácilmente á incomplejos, si se dan como complejos, y viceversa.

Por ejemplo:

2 kilógramos, 6 hectógramos y 1 gramo = 2601 gramos.

10 hectólitros, 1 decálitro y 6 litros = 1016 litros.

232. Para reducir números concretos del sistema antiguo al decimal ó recíprocamente, se multiplica el número de unidades dadas de cada especie por lo que valga cada unidad de esas en el otro sistema, y se suman los resultados, ó mejor se reduce primero á incomplejo el número dado, y así bastará una multiplicación.

Si se trata de medidas superficiales ó de volumen, y sólo se conoce la equivalencia de las unidades lineales respectivas, habrá que multiplicar el número dado por el cuadrado ó el cubo de la equivalencia lineal correlativa; por ejemplo: para reducir varas cuadradas á metros cuadrados hay que multiplicar el número de aquéllas por $0{,}836^2$; para reducir metros cúbicos á varas cúbicas se multiplicará el número de aquéllos por $1{,}196^3$, etc.

Ejemplos:

1.° Reducir el complejo 6 quintales, 2 arrobas y 10 libras al sistema decimal.

Como 6 quintales, 2 arrobas, 10 libras = 660 libras; y 1 libra = 460 gramos, multiplicando 660 por 460, se tendrá reducido á gramos el complejo dado.

$$660 \times 460 = 303600,$$

luego 660 libras = 303600 gramos = 303,600 kilógramos.

2.° Convertir en decimal el complejo 4 leguas y 305 varas = x.

Como 1 legua = $5572{,}7^{m}$, y 1 vara = $0{,}836^{m}$... será

$$\begin{array}{rr|r}
 & 5572{,}7 & 0{,}836 \\
 & \times\, 4 & \times\, 305 \\
\hline
4 \text{ leguas} = & 22290{,}8^{m} & 4180 \\
305 \text{ varas} = & 254{,}98 & 2508 \\
\hline
 & & 254{,}980
\end{array}$$

$$x = 22545{,}78^{m} = 22{,}54578 \text{ kilómetros.}$$

Lección 21.

CAPÍTULO 2.º—OPERACIONES CON NÚMEROS CONCRETOS.

Escolio general sobre la sumación de concretos, y casos que pueden ocurrir (233). *Adición de incomplejos de iguales ó distintas especies* (234). *Adición de complejos* (235). *Adición de concretos métrico decimales* (236). *Sustracción de incomplejos de iguales ó distintas especies* (237). *Sustracción de complejos* (238). *Sustracción de concretos métrico decimales* (239). *Multiplicación de concretos: escolio sobre los géneros del producto y de los factores* (240). *Cuestiones más usuales de multiplicar concretos: excepciones* (241). *Reglas para multiplicar incomplejos, complejo por incomplejo y viceversa* (242). *Multiplicación de complejos por el método de las partes alícuotas* (243). *Multiplicación de concretos métrico decimales* (244). *División de concretos: especie del cociente según los datos sean homogéneos ó heterogéneos; cuestiones más usuales de dividir concretos* (245). *División de incomplejos, de complejo por incomplejo y viceversa* (246). *División de concretos métrico decimales* (247).

ART.º 1.º—SUMACIÓN DE CONCRETOS.

§ 1.º Adición.

233. Para que varios números concretos puedan ser sumados ó restados es necesario que sean homogéneos ó del mismo género, es decir, todos de peso ó todos de longitud, etc. Es claro que los casos distintos que pueden ocurrir en la sumación, como en las otras operaciones con números concretos, son: que los datos sean incomplejos (el caso más sencillo), y que sean complejos todos ó sólo algunos.

234. Para sumar concretos incomplejos de la misma especie se suman como abstractos, dando á la suma la especie ó denominación de los sumandos.

Ejemplos:

1.º $15\,\text{ar.}^{\text{s}} + 10\,\text{ar.}^{\text{s}} + 7\,\text{ar.}^{\text{s}} = (15 + 10 + 7 = 32)\,\text{ar.}^{\text{s}}$

2.º $30\text{ m} + 6\text{ m} + 12\text{ m} = 48\text{ m}.$

Para sumar incomplejos de distintas especies, aunque del mismo género, se forma el complejo correspondiente, que será la suma, la cual se podrá reducir á incompleja, ó á compleja de otra forma, según las reglas del capítulo anterior.

Ejemplo:

10 v.^{s} + 2 p.^{s} + 3 pulg.^{s} = 10 v.^{s}, 2 p.^{s} y 3 pulg.^{s}

235 Para sumar números complejos, se suman entre sí los incomplejos de iguales especies de que aquéllos constan, y el complejo que formen todas esas sumas parciales será la total.

Conviene empezar á sumar por las especies inferiores, á fin de llevar ó incorporar á las superiores inmediatas las unidades que pueden resultar de aquéllas, como se hace con las cifras de diversos órdenes en la adición de enteros abstractos.

Ejemplo:

	15	arrobas	20	libras y	7	onzas			
	+ 9	»	12	»	12	»	3	adarmes	
	+ 20	»	7	»	9	»	7	»	
Suma.	44	»	39	»	28	»	10	»	
	ó 45	»	15	»	12	»	10	»	

porque 28 onzas = 1 libra + 12 onzas, 1 libra + 39 libras = 40 libras = 1 arroba + 15 libras, y por último 44 arrobas y 1 arroba = 45 arrobas.

236. Para sumar números métrico decimales se les coloca de modo que se correspondan las cifras de igual orden ó de la misma especie, y la suma será de la especie de la cifra á cuya derecha se coloque la coma, ó de la primera cifra derecha si es entera la suma.

Ejemplos:

1034,2 litros	7,246 kilógramos
+ 98,07 hectólitros	+ 2943 decágramos
+ 9 decílitros	+ 2271 decígramos
10842,1 litros	36903,1 gramos

§ 2.º Sustracción.

237. Para restar incomplejos de la misma especie se restan como abstractos, dando luego á la resta la especie ó nombre correspondiente.

Ejemplo: 7 pesetas — 3 pesetas = 4 pesetas.

Para restar un incomplejo de otro de especie superior se reducen ambos á la misma especie y queda este caso reducido al anterior. También puede tomarse del minuendo las unidades suficientes para restar de ellas el sustraendo, pero entonces la resta será un número complejo.

Ejemplo:

30 arrobas — 8 libras = 30 arrobas — $\frac{8}{25}$ arrobas = (30 × 25) libras — 8 libras, ó bien 30 = 29 + 1, 1 arroba — 8 libras = 25 libras — 8 libras = 17 libras, luego 30 arrobas — 8 libras = 29 arrobas y 17 libras.

238. Para restar complejos, ó se reducen minuendo y sustraendo á la misma especie y se restan ya como incomplejos, ó se resta de cada especie del minuendo la análoga del sustraendo, y la suma de esas restas parciales, es decir, el complejo que forman será la resta buscada. Se empieza por las unidades inferiores con el fin de poder tomar de las superiores las unidades suficientes, si hacen falta, y reducirlas á las inferiores, para efectuar todas las restas, como se hace en los enteros abstractos.

Ejemplo:

15 v.s	1 p.s	8 pulg.s	Como 8 < 10, se reduce á pulgadas 1 pie y serán 12+8=20, menos 10 = 10 pulgadas.
— 9 »	2 »	10 »	
5 »	1 »	10 »	

De igual modo se reduce á pies una vara de las 15, que son 3 pies, y de 2 á 3 va un pie (porque el 1 pie que había en el minuendo se redujo ya á pulgadas y no quedó pie alguno); y 14 varas — 9 varas = 5 varas.

Para restar un incomplejo de un complejo, se resta aquél del de su especie en el complejo, tomando, si es preciso, unidades superiores, para reducirlas á las de la especie del sustraendo.

Ejemplo:	1883 años, 2 meses, 18 días
	— 40 »
	1843 » 2 » 18 »

Por último, para restar un complejo de un incomplejo, se toman de éste las unidades suficientes para que reducidas á las del sustraendo pueda hacerse la sustracción.

Ejemplo: 1889 años —(1491 años, 9 meses y 12 días). Reduciendo á meses un año, y á días un mes de esos, la cuestión es restar los dos complejos...

1888 años,	11 meses,	31 días	
— 1491 »	9	12 »	
397 »	2	19 »	

Este problema puede proponerse así: ¿Cuánto tiempo hizo del *descubrimiento* de América, el último día del año 1889, sabiendo que *aquél* tuvo lugar el 12 de Octubre de 1492?

239. Para restar concretos métrico decimales, se restan las cifras ó unidades de igual orden, para lo cual conviene ponerlas en columna.

Ejemplos:

38,526 hectólitros	243,87 kilógramos
— 256 litros	— 10230 gramos
35,966 hectólitros	233,640 kilógramos

ART.° 2.°—PRODUCCIÓN DE CONCRETOS.

§ 1.° MULTIPLICACIÓN.

240. Según la definición general de la multiplicación (38), en la de concretos será necesariamente multiplicando el factor de cuyo género haya de ser el producto, lo cual se conocerá por el texto de la cuestión en cada caso. Además, el multiplicador debe ser considerado como abstracto, aunque se dé como concreto, porque expresa, si es entero, las *veces* que el multiplicando se ha de repetir como sumando. La permutación de factores (41) no será aquí posible sino en cuanto al valor, no al género de aquéllos.

241. Las cuestiones más usuales de multiplicar concretos son las que tienen por objeto hallar el valor de un número, conociendo el valor de la unidad correspondiente. Ese valor no siempre será dinero, aunque sí es lo más frecuente; y sea lo que fuere, sólo procederá multiplicar cuando los valores de las cantidades en cuestión varíen en el mismo sentido, y en la misma razón que dichas cantidades; ó como diremos más adelante, cuando sean aquéllos y éstas directamente proporcionales. En todos los demás casos no será una simple multiplicación, sino otra operación más complicada, la que se necesite para hallar el valor de varias unidades conociendo el de una. Por ej.º: para hallar el valor de un cristal y de una piedra preciosa no basta multiplicar el precio de la unidad de tamaño ó peso por el número de unidades, sino que es preciso elevar al cuadrado ese número de unidades, y después multiplicar ese cuadrado por el valor de la unidad, y eso cuando no es muy grande el tamaño.

242. Para multiplicar dos incomplejos se multiplican como abstractos, dando al producto la especie del multiplicando.

Ejemplo 1.º 30 metros de tela á 6 pesetas el metro, $30 \times 6 = 180$ pesetas.

Ejemplo 2.º La circunferencia del Ecuador terráqueo tiene 360º de á 20 leguas cada grado, ¿cuántas leguas tiene dicha circunferencia?. $360 \times 20 = 7200$ leguas.

Para multiplicar complejo por incomplejo se multiplica cada especie de aquél por éste, y el complejo que resulte será el producto buscado.

Por ejemplo: 15 arrobas á 3 duros y 6 reales arroba.

3 duros	6 reales.	
$\times$ 15	»	
45 duros	90 reales	
49 »	10 »	

¿Cuántos días, horas y minutos tiene un siglo, sabiendo que un año tiene 365 días, 5 horas y 50 minutos (próximamente)?

$$\left.\begin{array}{rrr} 365 \text{ d.}^s & 5 \text{ h.}^s & 50 \text{ m.}^s \\ & \times & 100 \\ \hline 36500 \text{ »} & 500 \text{ »} & 5000 \text{ »} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Pero } 5000 \text{ m.}^s = 5000 : 60 \text{ h.}^s \\ = 83 \text{ h.}^s + 20 \text{ m.}^s;\ 583 \text{ h.}^s = \\ 583 : 24 \text{ d.}^s = 24 \text{ d.}^s + 7 \text{ h.}^s \end{array}$$

Por tanto, 100 años = 36524 días, 7 horas, 20 minutos.

Para multiplicar complejos, ó incomplejo por complejo, se reducen á incomplejos, ó al menos el multiplicador á la especie (precisamente) cuya unidad sea el tipo del valor ó de precio, y se está en caso ya dicho.

Ejemplo: ¿Cuánto valen 10 quintales, 3 arrobas y 8 libras, á 6 duros y 9 reales la arroba?

Como la unidad tipo de valor ó de precio es la arroba, reduzcamos el multiplicador á incomplejo de arrobas y será 10 quint.^{s}, 3 ar.^{s}, 8 lib.^{s} $= 43\frac{8}{25} = 43{,}32$ ar.^{s}

Multiplicando ahora por este número el precio de la arroba ($6 \times 43{,}32 = 259{,}92$ duros) + ($9 \times 43{,}32 = 389{,}88$ r.^{s}) (redúzcase á incomplejo ese complejo).

243. Para multiplicar complejos por el método de las partes alícuotas, se considera descompuesto el multiplicador en un múltiplo de la unidad cuyo valor es el multiplicando, y en varias partes alícuotas de esa misma unidad, se halla sucesivamente el valor de cada parte del multiplicador y de su múltiplo, y se suman todos esos productos. Ejemplo: (el anterior)..... El multiplicador 43 arrobas y 8 libras $= (43 + \frac{1}{5} + \frac{3}{25})$ arrobas. Ahora....

$$\left.\begin{array}{rcrr} (6 \text{ d.}^s + 9 \text{ r.}^s) \times 43 = & 258 \text{ d.}^s + & 387 & \text{r.}^s \\ \times \frac{1}{5} = & 1 \text{ »} & 5{,}8 & \text{»} \\ \times \frac{3}{25} = & 0 \text{ »} & 15{,}5 & \text{»} \\ \hline & 259 \text{ »} & 408{,}3 & \text{»} \\ \text{ó...} & 279 \text{ »} & 8{,}3 & \text{»} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{3}{25} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \text{ por} \\ \text{tanto la última} \\ \text{línea es } \frac{3}{5} \text{ de la} \\ \text{anterior.} \end{array}$$

244. Para multiplicar concretos métrico decimales, se multiplican como enteros ó decimales abstractos, dando luego al producto la especie correspondiente, según las condiciones de la cuestión.

Ejemplo 1.º ¿Cuánto valen 275 litros de vino á 5,55 pesetas el decálitro?

Reduciendo el multiplicador á decálitros y multiplicando, resulta $27,5 \times 5,55 = 152,625$ pesetas.

Lo mismo resultaría multiplicando el entero 275 litros por 0,555 pesetas, que es el precio del litro, según se deduce fácilmente.

Ejemplo 2.° ¿Cuántos kilómetros tiene la circunferencia del Ecuador terrestre, cuya longitud en leguas, según há poco hallamos, es 7200, sabiendo que...

1 legua = 5,572 kilómetros?

$$\begin{array}{r} 5,572 \\ \times \quad 7200 \\ \hline 15544 \\ 39004 \\ \hline 40558,400 \text{ kilómetros.} \end{array}$$

§ 2.° División.

245. Cuando dividendo y divisor son homogéneos, el cociente es abstracto (ó del género que indique la cuestión), porque expresa las veces que el dividendo contiene al divisor.

Si dividendo y divisor son de distinto género, el cociente será del mismo que el dividendo.

Generalmente, el primero de esos dos casos corresponde al problema de hallar las unidades que valen el dividendo, siendo el divisor lo que vale cada una; y el segundo al de hallar el valor de cada unidad, siendo el divisor el número de ellas, y el dividendo lo que valen todas las que expresa el divisor. Pero aquí, como en la multiplicación, hay que advertir que sólo cuando los valores son directamente proporcionales á las cantidades valoradas, los problemas antedichos se resolverán por simples divisiones de los concretos que se den; cuando no, serán necesarias otras operaciones, con ó sin divisiones.

246. Para dividir números incomplejos, se les divide como abstractos, y el cociente será de la especie que indique cada cuestión.

Ejemplo. ¿Cuántas unidades valen 3000 pesetas, valiendo 15 cada una? $\frac{3000}{15} = 200$.

¿Cuántas pesetas vale cada unidad de 200 que valen 3000 pesetas? $3000 : 200 = 15$ pesetas.

Para dividir un complejo por un incomplejo, se divide por éste cada especie del dividendo, agregando, á las inferiores, antes de tomarlas por dividendos, los restos de las superiores reducidos á las especies inferiores respectivas.

También se puede transformar el dividendo en incomplejo y queda reducida la cuestión á dividir dos incomplejos.

Ejemplo: ¿Cuánto vale cada unidad de 30 que valen 59 duros y 13 reales? *1.ª Solución...* $\frac{59}{30} = 1\frac{29}{30}$ duros, 29 duros $= 580$ reales que con los 13 hacen 593 reales; $593 : 30 = 19\frac{23}{30}$ reales, 23 reales $= 782$ maravedises $\frac{782}{30} = 26$ maravedises; luego cada unidad vale 1 duro, 19 reales y 26 maravedises $= 39$ reales 26 maravedises que se hallarán también reduciendo primero á reales el dividendo *(2.ª Solución)*, y luego á maravedises el resto.

Para dividir complejos, ó incomplejo por complejo, se transforma á lo menos el divisor en incomplejo de la especie que indique la cuestión, ó cualquiera, si es indiferente la especie, y queda este caso reducido á uno de los anteriores.

Ejemplo 1.º ¿Cuánto atrasa por día un reloj que en 4 días 10 horas se ha atrasado 7 minutos 40 segundos?

Habiendo de dividirse el atraso total, por el tiempo respectivo, reduzcamos éste á incomplejo de día, que es la unidad á que se refiere el valor en atraso de la unidad de tiempo. 4 días $+$ 10 horas $= \frac{106}{24}$ día.

Reduciendo también el dividendo á incomplejo (segundos) 7 minutos $+$ 40 segundos $= 460$ segundos.

Dividiendo $460 : \frac{106}{24} = \frac{460.24}{106} = \frac{11030}{106} = 104{,}1$ seg.^{s}

El atraso diario ha sido, pues, 1 minuto 44,1 segundos.

Ejemplo 2.º ¿Cuántas unidades se comprarán con 56 duros 15 reales á 24 reales cada una?

56 duros + 15 reales = 1135 reales; 1135 : 24 = 47,29...

247. Para dividir concretos métrico decimales, se dividen como enteros ó decimales abstractos, dando luego al cociente la especie que convenga ó exija la cuestión.

Ejemplos. 1.º ¿Cuánto tiempo podrá funcionar una máquina de vapor que consume 645 kilógramos de hulla por día, con 17 toneladas y 8 quintales de ese combustible?

Convirtiendo en kilógramos el dividendo, son 17800 kilógramos, y la cuestión queda reducida á dividir dos números enteros... 17800 : 645 = 27,597.

Podrá funcionar 27 días, 597 milésimas. Para reducir éstas á horas hay que multiplicar 0,597 por 24. Resultan 14,328 horas. Redúzcase á minutos la fracción 0,328 día, etc.

2.º ¿A cómo sale el litro de un vino del que han costado 1941,75 pesetas, 8,63 hectólitros?

Dividiendo esos dos números resultará el precio del hectólitro, y separando dos decimales, el coste del litro.

1941,75 : 8,63 = 225 pesetas el hectólitro, ó sea 2,25 pesetas el litro.

Cuestiones sobre el Libro quinto.

1. Reducir á incomplejo de su inferior especie 43 miriámetros, 6 decámetros, 8 metros.
2. Reducir á complejo el número 53125 onzas de peso.
3. Hallar el peso en oro de 17000000 rs. (en onzas).
4. Hallar el peso en plata de ese dinero (en duros, que pesan 25 gramos cada una).
5. Convertir en medidas modernas las antiguas siguientes: 20 arrobas y 10 libras; 30 leguas, 165 varas y 10 pulgadas; 25 fanegas y 7 celemines superficiales; 15 fanegas y 10 celemines de trigo; 110 cántaras y 5 azumbres de vino; 40 arrobas y 35 panillas de aceite.
6. Comprobar los resultados del ejercicio anterior, haciendo las conversiones inversas.
7. Hallar lo que valen 3 coches que han costado 50

duros y 11 reales el primero, 2000 pesetas el segundo y 14 onzas de oro el tercero.

8. Hallada la suma anterior en pesetas, averiguar, por sustracción, cuánto valen los dos primeros coches.

9. ¿Cuál es la diferencia de nivel entre los montes Mulhacén y Everest (Himalaya), siendo sus altitudes 3480 y 8840 metros?

10. ¿Cuánto valen 19 libras de una mercancía, valiendo á 47 duros y 7 reales quintal.

11. Hallar, por el método de las partes alícuotas, cuánto andará en 5 horas, 36 minutos y 18,5 segundos, un móvil que anda 103 varas y 20 pulgadas por hora.

12. ¿Cuánto se tardará en hacer el pie de un encaje del que se han hecho 7 varas, 2 pies y 9 pulgadas, en 10 meses, 18 días y 3 horas?

13. ¿Cuánto vale la fanega superficial de un terreno que ha costado 4238 duros y 17 reales, midiendo 35 fanegas, 6 celemines y 23 estadales[2]?

14. ¿Cuánto tardaría en recorrer el Ecuador terrestre un tren que anduviera sin detenerse, á razón de 80 kilómetros por hora? (suponiendo posible la vía).

15. Resueltas las cuestiones 3 y 4, hallar el peso del oro, de la plata y del cobre puros, que entran en dicho dinero, acuñado de ambos modos á la ley actual (en centenes, en duros ó en monedas pequeñas de plata).

16. ¿Cuántos metros de una tapia podrán hacerse con 13 onzas, 15 reales y 28 maravedises, costando el metro á 3 duros, 16 reales y 7 maravedises.

17. Miss Nellie Bly ha dado recientemente la vuelta al mundo en 72 días, y 6 horas; suponiendo que haya recorrido 40000 kilómetros, ¿cuánto camino corresponde – término medio— á cada día y hora?

LIBRO SEXTO.—COMPARACIÓN DE NÚMEROS CONCRETOS.

CAPÍTULO 1.º—PROPORCIONALIDAD EN GENERAL.

Lección 22.

Cantidades correlativas: funciones matemáticas y sus variables (248). *Cantidades proporcionales directa, inversa ó recíprocamente* (249). *Criterios para afirmar ó negar la proporcionalidad de cantidades dadas, y la especie de esa relación si existe* (250). *Teoría de la proporcionalidad compuesta* (251). *Reparticiones proporcionales ó á prorrata* (252). *Proporcionalidad armónica* (253).

248. Las cantidades matemáticas concretas que figuran en las cuestiones científicas, industriales, comerciales, etc. del mismo género, suelen tener entre sí relaciones numéricas tales, que á determinados valores de las unas corresponden valores también determinados de las otras. Esas *cantidades* así relacionadas llámanse en general *correspondientes* ó *correlativas;* y en particular, aquéllas cuyos valores en cada cuestión dependen de los de las otras, son llamadas variables dependientes ó *funciones matemáticas* de esas otras, que á su vez son las *variables independientes* de aquéllas; aunque la verdad es que cuando las relaciones cuantitativas son generales, constituyendo las leyes naturales ó convencionales de todas las cuestiones análogas, son mutuamente permutables las funciones y sus variables, en cuanto al orden sucesivo de sus valores correspondientes; es decir, que si una cantidad es función de otra (suponemos sólo dos para fijar las ideas),

ésta es también función de aquélla, aunque sea de otro modo; llamándose funciones *inversas* una de otra las dos así originadas. Tales son, por ejemplo,... en abstracto, la potencia y la raíz de un mismo grado; puesto que si $z = x^n$, $x = \sqrt[n]{z}$, es decir, que las cantidades representadas por z y x son funciones inversas cada una de la otra. Los precios de las mercancías son funciones del peso ó de la medida de éstas (á igual calidad); é inversamente: la cantidad adquirible de una mercancía es función del dinero disponible, etc.

249. Las funciones más sencillas y usuales—únicas que en Aritmética se estudian—son las que dependen de sus variables por una ó más proporciones: es decir, aquéllos géneros de cantidades cuyos valores correspondientes—dos de la función y dos de la variable—forman una proporción. Pero eso puede suceder de tres modos distintos, en los diversos géneros de cantidades proporcionales; aunque sólo es posible de un modo en cada caso, ó en cada par de géneros relacionados proporcionalmente.

1.° Se dice que *dos cantidades,* mejor dos géneros de cantidades, *son directamente proporcionales ó están en razón directa, si dos valores cualesquiera de la una y los correspondientes de la otra forman proporción, contando en el mismo orden ambos pares de valores.*

Si llamamos A, B á las dos cantidades; a', a'', a''',... á los valores sucesivos de la A; b', b'', b''',... á los valores correspondientes de la B; serán directamente proporcionales esas cantidades, si $\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''}$, $\frac{a'}{a'''} = \frac{b'}{b'''}$, $\frac{a''}{a'''} = \frac{b''}{b'''}$, etc.; ó permutando los medios...

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \ldots = \text{constante}.$$

Esta última forma conviene mejor cuando se quiere comparar tres ó más pares de valores de ambas cantidades, y se expresa diciendo: que la razón de dos valores correspondientes cualesquiera es constante, ó la misma.

2.° *Son inversamente proporcionales ó están en razón inversa dos géneros de cantidades, si dos valores de la una y sus correspondientes de la otra forman proporción, pero contando los unos en orden contrario á los otros.*

Con la misma notación anterior habrá proporcionalidad inversa entre A y B, si

$$\frac{a'}{a''} = \frac{b''}{b'},\ \frac{a'}{a'''} = \frac{b'''}{b'},\ \frac{a''}{a'''} = \frac{b'''}{b''},\ \text{etc.}$$

3.° *Son recíprocamente proporcionales ó están en razón recíproca dos cantidades, si dos valores de la una pueden ser extremos y los correspondientes de la otra medios de una proporción.*

La proporcionalidad recíproca entre las cantidades A, B, existirá, pues, si $\frac{a'}{b'} = \frac{b''}{a''},\ \frac{a''}{b''} = \frac{b'''}{a'''}$, etc.

Es fácil demostrar que no puede haber más que esas tres especies de proporcionalidad; pues, combinando *de todos los modos posibles* los 4 valores a', a''; b', b'' supuestos proporcionales, aunque sin fijar cómo, resultan las 24 igualdades siguientes, de las cuales las 8 primeras —distintas formas de una misma proporción (200)— expresan la proporcionalidad directa; las 8 segundas la proporcionalidad inversa y las 8 últimas la proporcionalidad recíproca entre las cantidades A, B, cuyos son esos valores.

$$1.^{as}\left\{\begin{array}{l} \frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''},\ \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''},\ \frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'},\ \frac{a''}{b''} = \frac{a'}{b'}, \\[2ex] \frac{b'}{b''} = \frac{a'}{a''},\ \frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''},\ \frac{b''}{b'} = \frac{a''}{a'},\ \frac{b''}{a''} = \frac{b'}{a'}, \end{array}\right.$$

$$2.^{as}\left\{\begin{array}{l} \frac{a'}{a''} = \frac{b''}{b'},\ \frac{a'}{b''} = \frac{a''}{b'},\ \frac{a''}{a'} = \frac{b'}{b''},\ \frac{a''}{b'} = \frac{a'}{b''}, \\[2ex] \frac{b'}{b''} = \frac{a''}{a'},\ \frac{b'}{a''} = \frac{b''}{a'},\ \frac{b''}{b'} = \frac{a'}{a''},\ \frac{b''}{a'} = \frac{b'}{a''}, \end{array}\right.$$

$$3.^{as}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{a'}{b'}=\dfrac{b''}{a''},\ \dfrac{a'}{b''}=\dfrac{b'}{a''},\ \dfrac{a''}{b''}=\dfrac{b'}{a'},\ \dfrac{a''}{b'}=\dfrac{b''}{a'}, \\ \dfrac{b'}{a'}=\dfrac{a''}{b''},\ \dfrac{b'}{a''}=\dfrac{a'}{b''},\ \dfrac{b''}{a'}=\dfrac{a''}{b'},\ \dfrac{b''}{a''}=\dfrac{a'}{b'}, \end{array}\right.$$

Como se puede comprobar también, las 8 primeras corresponden á la igualdad de productos $a'\,b''=a''\,b'$, las 8 segundas á la $a'\,b'=a''\,b''$ y las 8 terceras á la $a'a''=b'b''$; y como evidentemente, caso de ser iguales los productos binarios de esos 4 números, lo han de ser de uno de esos tres modos necesariamente, no hay más igualdades de productos, posibles, ni más proporciones por lo tanto.

Escolio. Las proporcionalidades directa é inversa pueden existir entre valores todos homogéneos, ó sólo dos á dos, puesto que los productos de extremos y medios tendrán las especies de los multiplicandos respectivos, de los cuales entra uno de cada género en cada producto. Pero la proporcionalidad recíproca no existe, por regla general, sino entre valores todos homogéneos, pues siendo extremos los de una cantidad y medios los de la otra, no habría igualdad cualitativa en los respectivos productos, siendo de géneros distintos ambas cantidades; por eso tal proporcionalidad se usa poco en Aritmética y algo más en Geometría, entre valores lineales correlativos. Esa homogeneidad de los cuatro valores, permite, por excepción, cambiar la proporcionalidad recíproca en inversa, y al revés; pues si a', a'' son recíprocamente proporcionales á b', b'',... $\left(\dfrac{a'}{b'}=\dfrac{b''}{a''}\right)$, también a', b' son inversamente proporcionales con a'', b''. Eso equivale á cambiar la correlación ó correspondencia de valores, sin lo cual evidentemente no es posible cambiar una en otra, ninguna de las tres distintas especies de proporcionalidad.

250. Veamos ahora qué criterios nos guiarán para afirmar ó negar la proporcionalidad de cantidades dadas (de nombre ó género).

Desde luego, no compete á la Aritmética estudiar la ley de correlación numérica entre cantidades concretas; sino á la ciencia, industria, etc., á que correspondan las cuestiones en que esas cantidades figuren; pero, supuesta ya sabida, ó convencionalmente establecida dicha ley, y por ella determinables valores correlativos de las cantidades dadas, he aquí los criterios para decidir si son ó no proporcionales, y de cuál de los tres modos, si lo son.

Teorema 1.° *La condición necesaria y suficiente para afirmar que dos cantidades son directamente proporcionales, es que al multiplicar cada valor de la una por un número cualquiera, el valor correspondiente de la otra resulte necesariamente multiplicado por ese mismo número* (en virtud de la ley de correlación).

1.° Siguiendo las notaciones anteriores, es claro que si $\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''}$, y p. ej.°: $a' = na''$, también $b' = nb''$, etc.

2.° Recíprocamente si... á la vez que $a' = na''$, también $b' = nb''$ será, dividiendo ordenadamente y simplificando, $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$ ó bien $\frac{a'}{a''} = \frac{b'}{b''}$.

Corolario. Si se divide uno de los valores por un número, quedará igualmente dividido el valor correlativo.

Escolio 1.° Como lo mismo resultaría para otros pares de valores, se verificará...

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{a'''}{b'''} = \ldots = \textit{constante},$$

como ya digimos. Es decir, que la razón de cada dos valores correlativos de cantidades directamente proporcionales es constante, ó la misma cualesquiera que sean dichos valores; y recíprocamente: si esa razón es constante, las cantidades en cuestión son directamente proporcionales.

Escolio 2.° Para la aplicación de esa regla ó criterio de proporcionalidad, basta operar con números enteros, pues si con éstos se verifica la condición fundamental, también se verificará con fraccionarios é incomensurables.

En efecto, sea $\frac{m}{n}$ una fracción ordinaria por la que multiplicado el valor a'', resulta el a' de la cantidad A.

Como m y n son enteros, al valor $m\,a''$ de A corresponderá en B... el valor $m\,b''$, y al valor $\frac{a''}{n}$ el $\frac{b''}{n}$, y por tanto, al $a' = \frac{m}{n}a'' = \frac{ma''}{n}$ corresponderá $\frac{mb''}{n} = \frac{m}{n}b'' = b'$.

Por último, si suponemos incomensurable el multiplicador r, siendo $a' = r\,a''$ sabemos (164) que r estará comprendido entre dos fracciones $\frac{m}{n}$ y $\frac{m+1}{n}$, tan próximas entre sí como se quiera, y pues que para éstas se verificará la condición de proporcionalidad directa, si se verifica para enteros; en virtud de los teoremas de los límites (165), también se verificará para incomensurables.

Teorema 2.° *Dos cantidades correlativas son directamente proporcionales, si á valores iguales de la una corresponden valores iguales de la otra, y á la suma de valores cualesquiera de la una corresponde, en la otra, la suma de los valores correlativos de aquéllos.*

Desde luego, si esta última condición se verifica para cada dos sumandos, se verificará para tres ó más; puesto que si $a' + a''$ se corresponde con $b' + b''$, también $a' + a'' + a'''$ se corresponderá con $b' + b'' + b'''$; ya que estas últimas sumas se pueden considerar compuestas sólo de los dos sumandos, $(a' + a'') + a'''$ la una, y $(b' + b'') + b'''$ la otra; y lo mismo se podría decir de las sumas de cuatro valores, etc.

Esto sentado, es claro que si suponemos iguales entre sí los valores $a' = a'' = a'''$, etc.; según la primera parte de la hipótesis, también serán iguales los valores correlativos $b' = b'' = b'''$, etc.; y según la segunda parte, se corresponderán las dos sumas $a' + a' + a' + ... = n\,a'$ (suponiendo n el número de sumandos iguales), y $b' + b' + b' + ... = n\,b'$. Se verifica, pues, en ese caso, el teorema 1.° para los multiplicadores enteros, y por tanto, según el Escolio 2.°, para números cualesquiera; y puede afirmarse que las cantidades en cuestión son directamente proporcionales.

Teorema 3.º *Para que dos cantidades correlativas sean inversamente proporcionales, es necesario y suficiente que al multiplicar cada valor de la una por un número cualquiera, quede partido por ese mismo número el valor correspondiente de la otra.*

1.º Pues si $\frac{a'}{a''} = \frac{b''}{b'}$ y $a' = na''$ será también $b'' = nb'$ ó $b' = \frac{b''}{n}$.

2.º Si á la vez que $a' = n\,a''$... $b' = \frac{b''}{n}$, serán $\frac{a'}{a''} = n$, $\frac{b''}{b'} = n$; y por tanto, $\frac{a'}{a''} = \frac{b''}{b'}$; ó los valores a', a'' inversamente proporcionales á los b', b''.

Escolio 1.º Como lo mismo sucedería con otros pares de valores correlativos, podremos establecer las igualdades

$$a'\,b' = a''\,b'' = a'''\,b''' = \ldots \textit{ constante.}$$

Es, pues, otro criterio de la proporcionalidad inversa que el producto de cada dos valores correspondientes, de las cantidades en cuestión, sea constante.

Escolio 2.º Por un razonamiento análogo al usado anteriormente, se probará, que si las condiciones del Teorema 3.º se verifican para valores enteros de n, también se verificarán para números cualesquiera; y por tanto, basta aplicar dicho criterio con números enteros, para poder afirmar ó negar lógicamente la proporcionalidad inversa.

Teorema 4.º *Para que dos cantidades homogéneas y correlativas sean recíprocamente proporcionales, es necesario y suficiente que el producto de dos valores cualesquiera de la una sea igual al producto de los dos valores correspondientes de la otra.*

Puesto que los dos valores de la una han de ser los extremos, y los correspondientes de la otra los medios de la proporción (197).

Escolio general. Es claro que, si aplicando los teoremas anteriores á los valores correspondientes de cantidades correlativas determinadas, no resultan éstas proporcionales de ninguno de los tres modos posibles, puede afirmarse que esas cantidades no están ligadas por esa sencilla ley de correspondencia, ó que su ley de correlación es más complicada.

251. Lo que sí sucede con frecuencia es que los valores de una cantidad sean proporcionales, directa ó inversamente, á las potencias y raíces de los de otra; y también que sean aquéllos separada y simultáneamente proporcionales á los de otras varias cantidades correlativas con la primera. Entonces existe lo que se llama *proporcionalidad compuesta,* cuya teoría es la siguiente:

Supongamos que la cantidad A sea directamente proporcional á las B, C, é inversamente á las D, E; es decir, que siguiendo las notaciones anteriores, y sus análogas para las nuevas cantidades, ó llamando á los valores correspondientes de las cantidades...

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{Valores...} \\ \\ \\ \end{array}\left\{\begin{array}{ccccc} \underline{A}, & \underline{B}, & \underline{C}, & \underline{D}, & \underline{E} \\ a' & b' & c' & d' & e' \\ a_1 & b'' & c' & d' & e' \\ a_2 & b'' & c'' & d' & e' \\ a_3 & b'' & c'' & d'' & e' \\ a'' & b'' & c'' & d'' & e'' \end{array}\right\}$$ Estos valores formarán, según la hipótesis, las proporciones...

$$\frac{a'}{a_1}=\frac{b'}{b''},\quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{c'}{c''},\quad \frac{a_2}{a_3}=\frac{d''}{d'},\quad \frac{a_3}{a''}=\frac{e''}{e'},$$

que multiplicadas ordenadamente, y simplificando el primer miembro ó suprimiendo los valores auxiliares a_1, a_2, a_3, factores comunes, resulta...

$$\frac{a'}{a''}=\frac{b'\,c'\,d''\,e''}{b''\,c''\,d'\,e'}=\frac{b'}{b''}\cdot\frac{c'}{c''}\cdot\frac{d''}{d'}\cdot\frac{e''}{e'}.$$

Es decir, que *si una cantidad es simultáneamente proporcional con otras varias; directamente con unas, é inversamente con otras, la razón de dos valores cualesquiera de aquélla, es el producto de las razones de los valores* *correspondientes de las otras; entrando esas razones-factores directa ó inversamente, según pertenezcan sus términos á las cantidades directa ó inversamente proporcionales con la primera.*

252. Para terminar lo que sobre la proporcionalidad en general conviene saber, vamos á exponer la teoría del *prorrateo,* ó repartición de un número dado en varias partes directamente proporcionales con otros números dados; es decir, que si éstos son a, b, c,...; N el número dado, y llamamos x, y, z,... á las partes incógnitas, la cuestión queda planteada en las fórmulas

$$N = x + y + z + \ldots, \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots$$

Ahora bien, según la teoría de razones iguales (202), de las igualdades anteriores se deducen las siguientes:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \ldots = \frac{x+y+z+\ldots}{a+b+c+\ldots} = \frac{N}{a+b+c+\ldots}$$

Y de las proporciones que forman cada una de las razones primeras y la última, resulta

$$x = \frac{Na}{a+b+c+\ldots},\ y = \frac{Nb}{a+b+c+\ldots},\ z = \frac{Nc}{a+b+c+\ldots},\ \text{etc.}$$

Como en todos esos valores existe el factor común $\dfrac{N}{a+b+c+\ldots}$, se puede traducir en la siguiente regla la solución del problema.

Para repartir un número dado en partes proporcionales á otros, se divide aquél por la suma de éstos, y el cociente multiplicado sucesiva y separadamente por cada uno de esos sumandos, dará las partes pedidas.

Ejemplo: Dividir el número 360 en tres partes proporcionales á 3, 4 y 5. $\dfrac{360}{3+4+5} = 30$

$$x = 30 \times 3 = 90,\ y = 30 \times 4 = 120,\ z = 30 \times 5 = 150.$$

Comprobación... $90 + 120 + 150 = 360$.

253. La comparación inmediata de las razones por cociente de cantidades dadas, no puede originar más que las tres clases de proporcionalidad ya estudiadas, pero hay

otra forma mediata de relación proporcional, que, por tener aplicación en Geometría y en Física, conviene, desde luego, conocer. Es la llamada *proporcionalidad armónica.*

Se dice que *son armónicamente proporcionales, ó que están en proporción armónica tres ó cuatro números, cuando la razón del mayor al menor es igual á la razón de las diferencias entre esos dos y el ó los intermedios.*

Es decir, que si son tres...

$a > b > c$ se verifica $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a-b}{b-c}$; y si son cuatro..

$a > b > c > d$ se verifica $\dfrac{a}{d} = \dfrac{a-b}{c-d}$.

En el primer caso la proporción armónica se llama continua, y el número intermedio b, *medio armónico entre los otros dos.* Formando los productos de medios y de extremos resulta $ab - ac = ac - bc$, de donde $ab + bc = 2ac$ ó $(a+c)\,b = 2ac$, ó $b = \dfrac{2\,a\,c}{a+c}$ expresión del medio armónico entre a y c. Partiendo la unidad por ambos miembros de esa igualdad es $\dfrac{1}{b} = \dfrac{a+c}{2\,a\,c} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}\right)$, y como esta última fórmula expresa el medio aritmético ó diferencial entre $\dfrac{1}{a}$ y $\dfrac{1}{c}$, defínese también el *medio armónico* como *el número* (x) *cuyo recíproco* $\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *es medio diferencial entre lós recíprocos de los otros dos números.* Claro es que pudiéndose formar en ese caso la equidiferencia continua $\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}$, puede también decirse que 3 números están en proporción armónica cuando sus recíprocos forman una equidiferencia continua.

Análogamente se podrían definir y expresar terceros y cuartos proporcionales armónicos á dos ó á tres números dados, como también generalizar las definiciones anteriores, llamando medio armónico entre varios números aquél cuyo recíproco es el medio diferencial entre los recíprocos de éstos, y serie ó progresión armónica á la formada por varios números cuyos recíprocos forman progresión aritmética. La más sencilla serie armónica es la formada por los recíprocos de los números enteros sucesivos; es decir, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, etc.; así como la más notable proporción armónica (origen de este nombre), la que forman los *sonidos del acorde múltiplo,* cuyos números de vibraciones están en razón directa de los números 4, 5, 6 y 8, que satisfacen á la primitiva definición de proporción armónica, pues, en efecto, $4:8::5-4:8-6$.

CAPÍTULO 2.º—REGLAS DE TRES, DE COMPAÑÍA Y ANÁLOGAS.

Lección 23.

Cuestiones de regla de tres simple: su resolución directa y por reducción á la unidad (254). *Regla de tres compuesta: resolución de sus cuestiones por ambos métodos* (255). *Principios convencionales de la regla de compañía* (256). *Aplicación de esos principios á los tres casos correspondientes* (257). *Inversión de esos casos para buscar tiempos ó capitales dadas las ganancias, etc.* (258). *Principales problemas de reparticiones proporcionales, además de los dichos* (259).

§ 1.º Reglas de tres, simple y compuesta.

254. Bajo el nombre general de cuestiones de *regla de tres* suelen comprenderse todos los problemas numéricos que pueden ser resueltos por una ó más proporciones; porque en cada una de éstas se dan ó suponen conocidos tres de sus términos, y se trata de buscar el cuarto como incógnita auxiliar ó principal.

Si la cuestión se resuelve por una proporción, se llama de *regla de tres simple;* y si necesita de dos ó más proporciones, de *regla de tres compuesta.*

Para decidir si una cuestión es ó no de regla de tres, se aplican, á las cantidades de que se trate, los criterios de proporcionalidad; y si procede, se establecen las proporciones adecuadas, cuidando comunmente, aunque no es preciso, que la cantidad incógnita ó el número buscado sea el último término de la proporción única ó final.

Para eso bastará empezar dicha proporción por el valor correspondiente al buscado, si la proporcionalidad fuere inversa; por el correspondiente al valor conocido de la misma especie que el buscado, si la proporcionalidad fuere directa, y por el homogéneo con el buscado si la proporcionalidad fuere recíproca.

Ejemplos. 1.° *30 unidades de una mercancía han costado 54 pesetas, ¿cuánto costarán 25 unidades de la misma especie?*

Los precios de las mercancías son directamente proporcionales á los pesos ó medidas de éstas, salvas cortas excepciones de que ahora no se trata; y es fácil reconocerlo por ambos criterios (250—Teoremas 1.° y 2.°), puesto que multiplicando por un número la cantidad comprada, hay que multiplicar el precio por ese mismo número (doble cantidad cuesta doble, etc.); y á iguales cantidades de mercancía iguales precios, así como á la suma de dos ó más cantidades de aquélla corresponde la suma de sus respectivos precios. Por consiguiente, en el caso actual, llamando x al número ó precio buscado, se tendrá la proporción... $30:25::54:x$, de donde $x=\frac{54\times25}{30}=45$ pesetas.

2.° *20 hombres han hecho una obra en 15 días, ¿cuántos hombres se necesitan para hacerla en 10 días?;* suponiendo iguales todas las demás condiciones del trabajo.

El tiempo y el número de hombres necesarios para una obra son inversamente proporcionales, porque multiplicando los hombres por 2, 3, etc., el tiempo correlativo queda dividido por ese mismo número (250—Teorema 3.°) Por tanto, la proporción aquí conveniente es, llamando x á los hombres buscados,

$$10 : 15 :: 20 : x,\ x = \frac{15 \times 20}{10} = 30 \text{ hombres.}$$

3.° Suponiendo, según sucede en algunas figuras geométricas, que cuatro longitudes ó distancias sean recíprocamente proporcionales, y que dos de las correspondientes sean 10 metros y 8 metros, ¿cuál será la correspondiente á 16 metros? La proporción (250—Teorema 4.°)

$$16 : 10 :: 8 : x \text{ nos da } x = \frac{10 \times 8}{16} = 5 \text{ metros.}$$

Además del *método directo*, bien fácil y breve cuando se sabe lo bastante acerca de las cantidades en cuestión, hay otro, llamado *método de reducción á la unidad*. Consiste, como indica su nombre, en hallar el valor de la especie buscada que corresponde á la unidad de la otra especie, y es claro que multiplicando ó dividiendo ese valor —según la proporcionalidad sea directa ó inversa— por su correspondiente de la otra especie, se tendrá el número pedido.

Así, en el ejemplo 1.° diríamos: si 30 unidades cuestan 54 pesetas, la unidad costará $\frac{54}{30}$ pesetas; y por tanto, 25 unidades costarán $\frac{54}{30} \times 25 = 45$ pesetas (como ya habíamos hallado).

En el ejemplo 2.°... Si 20 hombres han tardado 15 días, para hacer esa obra, en 1 día serían precisos 20×15 hombres, y en 10 días... $\frac{20 \times 15}{10} = 30$ hombres.

255. La regla de tres compuesta se reduce á la aplicación de la teoría general de la proporcionalidad compuesta (251), previos el estudio y la determinación de los varios modos de proporcionalidad entre la cantidad de cuya especie es el número buscado, y cada una de las demás cantidades que en la cuestión figuren. Estas serán las que allí representamos por B, C, D, E, etc.; la especie buscada la A, de la cual supondremos conocido el valor a' y desconocido el a'' que ahora llamaremos x. Y

finalmente, los valores auxiliares a_1, a_2, a_3, a_4, que llamaremos aquí x_1, x_2, x_3, x_4, etc., serán los sucesivos de la cantidad A, correspondientes á los variados también sucesivamente, de una, dos, tres, etc. de las otras cantidades.

Ejemplo. 35 hombres, trabajando 12 horas diarias, han tardado 8 días en hacer una tapia de 15 metros de larga, 4,5 metros de alta y 0,75 metros de gruesa, ¿cuántos días tardarán 42 hombres en hacer otra tapia de 19 metros de larga, 3 metros de alta y 1,2 metros de gruesa, trabajando 9 horas diarias?

Llamemos x á los días buscados, x_1, x_2, x_3, etc., á los respectivos que correspondan á las variaciones sucesivas de una, dos, etc. de las otras cantidades, tendremos, teniendo en cuenta que los días han de ser directamente proporcionales al largo, alto y grueso de la tapia, é inversamente proporcionales á los hombres y á las horas diarias de trabajo, las siguientes proporciones que plantean el problema, previo el cuadro de correspondencia ó correlación de valores...

Largo.	Alto.	Grueso.	Hombres.	Horas.	Días.
15	4,5	0,75	35	12	8
19	4,5	0,75	35	12	x_1
19	3	0,75	35	12	x_2
19	3	1,2	35	12	x_3
19	3	1,2	42	12	x_4
19	3	1,2	42	9	x

Proporciones simples.

$$15 : 19 :: 8 : x_1$$
$$4,5 : 3 :: x_1 : x_2$$
$$0,75 : 1,2 :: x_2 : x_2$$
$$42 : 35 :: x_3 : x_4$$
$$9 : 12 :: x_4 : x$$

Proporción compuesta.

$$\frac{15 \times 4,5 \times 0,75 \times 42 \times 9}{19 \times 3 \times 1,2 \times 35 \times 12} = \frac{8\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4}{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x} = \frac{8}{x}$$

$$x = \frac{8.\ 19.\ 3.\ 1,2.\ 35.\ 12}{15.\ 4,5.\ 0,75.\ 42.\ 9} = 12 \text{ días (próx.}^{\text{te}}\text{)}$$

Lo mismo, naturalmente, resultaría por el método de reducción á la unidad, aplicado sucesivamente para hallar x_1, x_2, x_3, x_4 x. Compruébese por ese método.

Escolio. Aunque, según lo dicho, son realmente cuestiones de regla de tres *todas las de proporcionalidad*, algunas reciben además nombres especiales, por el género de la cantidad buscada ó por alguna otra circunstancia.

Las más sencillas, quizá, son las tratadas en el siguiente

§ 2.º Regla de compañía.

256. Bajo el nombre de *regla de compañía ó de sociedad*, se conocen las cuestiones relativas á las relaciones entre los capitales impuestos por varios socios, los tiempos de las respectivas imposiciones y las ganancias ó pérdidas correspondientes. Dichas relaciones se deducen de los tres siguientes

Principios fundamentales. 1.º *Las ganancias ó pérdidas, en el mismo tiempo, son directamente proporcionales á los respectivos capitales.* Es decir, llamando á éstos c', c'', c''', ... y á sus respect.s ganan.s (igual sería pérd.s) g', g'', g''', etc.

$$\frac{c'}{g'}=\frac{c''}{g''}=\frac{c'''}{g'''}\ldots \text{ etc.}$$

Este principio es evidente.

2.º *Las ganancias ó pérdidas del mismo capital ó de capitales iguales, son directamente proporcionales á los tiempos que éstos forman parte del capital social;* ó que están en la compañía los capitalistas respectivos.

Llamando t', t'', t''', etc., los tiempos del mismo capital, y....... g', g'', g''' las ganancias respectivas en esos tiempos, será..... $\dfrac{g'}{t'}=\dfrac{g''}{t''}=\dfrac{g'''}{t'''}$ ..... etc.

Este principio no es de rigorosa equidad, pero admitido convencionalmente, hay que atenerse á él para los casos prácticos.

3.º *Las ganancias ó pérdidas de capitales que han* *estado distintos tiempos en la sociedad, son directamente proporcionales á los productos de dichos capitales por sus tiempos respectivos.* Es decir, que con las mismas notaciones anteriores...

$$\frac{g'}{c't'} = \frac{g''}{c''t''} = \frac{g'''}{c'''t'''} \ldots\ldots \text{ etc.}$$

Este principio es consecuencia de los dos anteriores, y de la teoría general de las razones compuestas.

257. Para aplicar esos *tres principios* á los problemas de sociedad, claro es que habrá que considerar los *tres casos* correspondientes á cada uno de *aquéllos*. Pero en los tres casos, si se trata, como es lo más frecuente, de hallar las pérdidas ó ganancias de cada socio, dados los capitales y tiempos de todos, así como la ganancia ó pérdida total, el problema consiste en repartir ésta proporcionalmente á números dados, y entra, por tanto, en el caso general (252).

1.° Para repartir la ganancia total, G, entre varios socios cuyos capitales c', c'', c''',... han estado el mismo tiempo en la sociedad, deduciremos de las razones iguales $\frac{g'}{c'} = \frac{g''}{c''} = \frac{g'''}{c'''} \ldots = \frac{g' + g'' + g''' + \ldots}{c' + c'' + c''' + \ldots}$ (202).

$$\text{Pero } g' + g'' + g''' + \ldots = G,$$

$$c' + c'' + c''' + \ldots = C \text{ (capital social).}$$

Luego... $\frac{g'}{c'} = \frac{g''}{c''} = \frac{g'''}{c'''} \ldots = \frac{G}{C}$; y de las proporciones que forman con la última razón, cada una de las primeras, resulta $g' = c' \times \frac{G}{C}$, $g'' = c'' \times \frac{G}{C}$, $g''' = c''' \times \frac{G}{C}$ etc; es decir, que: *para hallar,* en este caso, *la ganancia de cada socio, no hay más que multiplicar su capital por la razón de la ganancia total al capital social.*

Ejemplo: Tres socios han puesto 1000, 3000 y 5000 pesetas, respectivamente, en una empresa; se han ganado 6000, ¿cuánto le toca á cada uno? La razón de la ganancia total al capital social es $\frac{6000}{9000} = \frac{6}{9}$.

Al 1.° le corresponden $1000 \times \frac{6}{9} = \frac{6000}{9} = 666{,}66$ pts.

Al 2.° . . . . $3000 \times \frac{6}{9} = \frac{18000}{9} = 2000{,}00$ pts.

Al 3.° . . . . $5000 \times \frac{6}{9} = \frac{30000}{9} = 3333{,}33$ pts.

2.° *Para repartir á prorrata entre socios que han puesto el mismo capital, por tiempos diferentes, no hay más que multiplicar el tiempo correspondiente á cada uno, por la razón de la ganancia total á la suma de esos tiempos diferentes.* Tal se deduce de las siguientes igualdades $\frac{g'}{t'} = \frac{g''}{t''} = \frac{g'''}{t'''} \ldots = \frac{g' + g'' + g''' + \ldots}{t' + t'' + t''' + \ldots} = \frac{G}{t' + t'' + t'''}$ de donde

$$g' = t' \times \frac{G}{t' + t'' + t''' + \ldots},\ g'' = t'' \times \frac{G}{t' + t'' + t''' + \ldots},$$

$$g''' = t''' \times \frac{G}{t' + t'' + t''' + \ldots} \ldots$$

Ejemplo: Dos socios ponen cada uno la mitad del capital social, pero el 1.° retira su parte á los tres años, y el otro sigue otros dos años. Hecha la liquidación á los 5 años, y ganadas 24000 pesetas, ¿cuántas corresponden á cada uno?

Al 1.° . . . . $3 \times \frac{24000}{8} = 3 \times 3000 = 9000$ pesetas.

Al 2.° . . . . $5 \times \frac{24000}{8} = 2 \times 3000 = 15000$ pesetas.

3.° Por último, cuando son distintos los capitales y tiempos respectivos, para los diversos socios, el tercer principio nos da

$$\frac{g'}{c'\,t'} = \frac{g''}{c''\,t''} = \frac{g'''}{c'''\,t'''} \ldots = \frac{G}{c'\,t' + c''\,t'' + c'''\,t''' + \ldots}$$

$$y\ g' = c'\ t' \times \frac{G}{c'\ t' + c''\ t'' + \ldots},\ g'' = c''\ t'' \times \frac{G}{c't' + c''t'' + \ldots},$$

$$g''' = c'''\ t''' \times \frac{G}{c'\ t' + c''\ t'' + \ldots}\ldots$$

es decir: que *para hallar la ganancia ó pérdida de cada socio, hay que multiplicar su capital por el tiempo que estuvo en la sociedad, y después multiplicar ese producto por la razón de la ganancia ó pérdida total á la suma de productos de cada capital, por su tiempo respectivo.*

Ejemplo: $G = 80000$ pts.; $c' = 2000$, $t' = 4$; $c'' = 3000$, $t'' = 8$; $c''' = 4000$, $t''' = 7$; $c'\ t' = 8000$, $c''\ t'' = 24000$, $c'''\ t''' = 28000$, $c'\ t' + c''\ t'' + c'''\ t''' = 60000$,

$$\frac{G}{c'\ t + c''\ t'' + c'''\ t'''} = \frac{80000}{60000} = \frac{8}{6},$$ luego corresponden

$$\text{Al } 1.^{\circ} \ldots\ldots\ 8000 \times \frac{8}{6} = \frac{64000}{6} = 10666{,}66 \text{ pts.}$$

$$\text{Al } 2.^{\circ} \ldots\ldots\ 24000 \times \frac{8}{6} = \frac{192000}{6} = 32000{,}00 \text{ pts.}$$

$$\text{Al } 3.^{\circ} \ldots\ldots\ 28000 \times \frac{8}{6} = \frac{224000}{6} = 37333{,}33 \text{ pts.}$$

258. Aunque los casos antedichos son los más frecuentes en la práctica, se puede también proponer los inversos, es decir, hallar los capitales ó los tiempos ó ambas cantidades, dadas las ganancias, etc.

Estos problemas serán determinados y posibles siempre que en cada proporción, de las ya usadas, no haya que buscar más que un término; así que en los inversos de los dos casos primeros, bastará dar la ganancia de cada socio y el capital social (en el 1.°) ó el tiempo correspondiente á cada ganancia (en el 2.°), para buscar el capital respectivo, ó viceversa; pero en los inversos del caso tercero sólo se podrá hallar el producto de cada capital por su tiempo, y no los factores, dadas las demás cantidades; á no darse además otras condiciones que permitan hallar los factores de cada producto.

§ 3.°

Otras cuestiones de repartimientos proporcionales

259 Hay otras muchas cuestiones de repartimientos proporcionales, para cuya resolución no hay más que acudir á la teoría general (252), después de saber á qué números han de ser proporcionales las partes buscadas, y cuál es el total á repartir.

Contribuciones. Para repartir éstas por provincias, y después por municipios, se atiende á la riqueza ó capital en fincas, de cada una de esas entidades administrativas; es decir, que primero se reparte el total proporcionalmente á los respectivos capitales de las provincias; luego lo que corresponda á cada una, proporcionalmente á los capitales de sus municipios, etc.

Quintas. El contingente de soldados para cada año, se reparte también por provincias, zonas y municipios, proporcionalmente á los números de mozos sorteados aquel año. Cuando resultan décimas, al llegar á las últimas subdiviones, se sortean aquéllas entre dos ó tres pueblos próximos, cuyas décimas compongan una unidad (un soldado), introduciendo en una urna tantas bolas por cada pueblo como décimas le tocaron, y sacando una bola, el pueblo á que corresponde (por el nombre, color, etc.) da el soldado, suma de las décimas.

Socorros mutuos, montes píos. Fórmanse sociedades entre los individuos de una clase ó todos los que quieran, á fin de indemnizar á cada socio ó á su familia, en caso de incendio, muerte, etc., y si así se conviene (que luego veremos hay otros modos de indemnizar), las indemnizaciones se reparten entre los indemnizadores, proporcionalmente á sus capitales, sueldos, etc.

Testamentarías. Es frecuente tener que repartir una herencia proporcionalmente á números dados por el testador.

Claro es que ese es uno de los más sencillos casos de reparticiones proporcionales.

Ejemplo: Repartir 30000 ptas. entre 4 herederos de 5, 20, 35 y 40 años, y en razón inversa de sus edades.

CAPÍTULO 3.º—REGLAS DE INTERÉS, DESCUENTO Y ANÁLOGAS.

LECCIÓN 24.

Interés simple y compuesto: cantidades que intervienen (260). *Principios y fórmulas para resolver todas las cuestiones de interés simple* (261). *Fórmula del interés compuesto, y resolución de las principales cuestiones de ese género* (262). *Rentas perpetuas, temporales y vitalicias* (263). *Reglas de descuento comercial y matemático* (264). *Principales cuestiones de percentaje, además de las dichas* (265).

§ 1.º REGLAS DE INTERÉS.

260. Se llama *intereses, ó réditos,* lo que produce un *capital* prestado, ó impuesto en un negocio. Si los réditos se cobran al fin de cada año, ú otra unidad de tiempo, se dice que el capital está impuesto ó prestado á *interés simple;* y si, al contrario, se suman ó acumulan los intereses al capital, produciendo á su vez *interés,* éste se llama *compuesto,* ó se dice que el préstamo ó la imposición es á *interés compuesto.*

En ambos casos, las cantidades que suelen intervenir, y entre las cuales vamos á hallar las relaciones numéricas que existen, son:

1.º El capital prestado ó impuesto c, (unidades monetarias, enteras ó fraccionarias).

2.º El interés ó rédito de la unidad, ó de 100 unidades del capital, durante la unidad de tiempo (todo convencional), al cual rédito se llama *tanto por 1,* ó *tanto por 100,* respectivamente; se indica... tanto p. 1, p. $^0/_0$, y le representaremos por r (tanto p. 1), y por i (tanto p. $^0/_0$).

3.º El tiempo que, en cada cuestión, hay que considerar $= t$ (unidades de las que sirven para regular el tanto p. 1, ó p. $^0/_0$).

4.º Los intereses ó réditos del capital c, durante el tiempo t, al tanto p. 1, ó p. $^0/_0$ en la unidad de t, y que designaremos por I.

5.º El capital total $C = c + I$.

261. Los principios convencionales, que sirven de

fundamento para resolver todas las cuestiones de *interés simple,* son:

1.° *En el mismo tiempo, los intereses son proporcionales á los capitales.* Por tanto, comparando el capital 100 con el c y sus respectivos intereses, llamando I_1 al del capital en la unidad de tiempo, tendremos la proporción... $100 : c :: i : I_1$, que nos permitirá buscar cada una de las tres cantidades c, i, I_1, dadas las otras dos.

$$\text{Así...}\ I_1 = \frac{ci}{100},\quad i = \frac{100\, I_1}{c},\quad c = \frac{100\, I_1}{i}.$$

Tradúzcanse esas tres fórmulas en reglas, y aplíquense á ejemplos.

2.° *Los intereses (simples) del mismo capital en tiempos sucesivos, son proporcionales á esos tiempos.* Así: comparando el tiempo 1 con el t y los réditos correspondientes, será $1 : t :: I_1 : I$, de donde es fácil deducir cada una de las tres cantidades t, I_1, I, dadas las otras dos; pero usándose muy poco ese caso, pasemos al 3.°, que es la combinación de los dos anteriores.

3.° Multiplicando ordenadamente las proporciones anteriores, resulta $100.1 : c\,t :: i\,I_1 : I_1\,I$, y simplificando ó dividiendo por I_1 los dos términos últimos,...

$$100 : c\,t :: i : I, \text{ de donde}$$

$$I = \frac{c\,t\,i}{100},\quad i = \frac{100\,I}{c\,t},\quad c = \frac{100\,I}{i\,t},\quad t = \frac{100\,I}{i\,c}.$$

Estas cuatro fórmulas resuelven los cuatro problemas principales sobre el interés simple, como es evidente y vamos á ejemplificar.

EJEMPLOS.

1.° ¿Cuánto producen 8500 pts., en 7 años, al 6 p. °/₀ anual?

$$c = 8500,\ t = 7,\ i = 6;\ I = \frac{8500 \times 7 \times 6}{100} = 85 \times 42 = 3570 \text{ pts.}$$

2.° ¿Al cuánto p. °/₀ producirán, en 7 años, 8500 pesetas, 3570 de réditos?

$$i = \frac{100 \times 3570}{8500 \times 7} = \frac{3570}{85 \times 7} = \frac{3570}{595} = 6 \text{ p. °/₀ anual.}$$

3.° ¿Qué capital producirá 3570 pts., en 7 años, al 6 p. °/₀ anual?

$$c = \frac{100 \times 3570}{6 \times 7} = \frac{357000}{42} = 8500 \text{ pts.}$$

4.° ¿En cuánto tiempo producirán 8500 pts., 3570 de réditos, al 6 p. °/₀ anual?

$$t = \frac{100 \times 3570}{6 \times 8500} = \frac{3570}{6 \times 85} = \frac{3570}{510} = 7 \text{ años.}$$

Claro es que, si en vez de los intereses se pide el total, no hay más que sumar

$$c + I = c + \frac{c\,t\,i}{100} = \frac{100\,c + c\,t\,i}{100} = \frac{(100 + t\,i)c}{100} = C\;[\alpha]$$

En el ejemplo anterior.....

$$C = 8500 + 3570 = 12070; \text{ ó bien.....}$$

$$C = \frac{(100 + 42) \times 8500}{100} = 142 \times 85 = 12070 \text{ pts.}$$

Pueden también proponerse los problemas inversos de este último, es decir: Dado el capital final C y dos de las otras tres cantidades... c, t, i, hallar la restante. De la fórmula [α] se deduce

$$c = \frac{100\,C}{100 + t\,i}, \quad t = \frac{100\,(C - c)}{c\,i}, \quad i = \frac{100\,(C - c)}{c\,t}$$

fórmulas, que resuelven los tres nuevos problemas.

262. Para resolver cuestiones de *interés compuesto* observemos que: una vez convenida la *unidad de tiempo*, al fin de cada cual se han de acumular los intereses al capital, y supuesto r el tanto p. 1, durante *aquélla*, es evidente que cada unidad de capital vale, al fin de dicha unidad de tiempo, $1 + r$, y c unidades valdrán.... $c + c\,r = c\,(1 + r)$, al fin del primero de esos tiempos ó principio del segundo.

Por la misma razón, este nuevo capital $c\,(1 + r)$, con que principia la segunda unidad de tiempo, se convertirá al finar ésta en $c\,(1 + r)\,(1 + r) = c\,(1 + r)^2$; y así sucesivamente, el capital total C, al fin del tiempo t, será, previos los convenios dichos,

$$C = c(1 + r)^t \ldots\ldots [\beta]$$

En esta fórmula, t representa, como ya hemos dicho, y se conviene universalmente, un número entero de unidades de tiempo, años generalmente, aunque á veces son trimestres ó meses, y deberían ser, en rigor matemático, *instantes;* puesto que, admitida la acumulación de los intereses al capital, no hay razón lógica para que esa acumulación no se haga á cada momento. Pero, como eso traería mucha complicación, lo que se hace realmente es lo indicado, y si la última unidad de tiempo no se completa, se calculan los intereses simples del capital que había al principiar aquélla, durante la fracción de la misma, que ha durado aún el contrato, etc.

Lo mismo que en el interés simple, en el compuesto hay cuatro cuestiones principales que proponer y resolver, según los casos.

La fórmula [β] resuelve la de hallar el capital final C, dados el primitivo c, el tanto p. 1... r, y el tiempo t. Los otros tres, fáciles de enunciar, se resuelven por las siguientes fórmulas, deducibles también de la anterior.....

$$c = \frac{C}{(1 + r)^t}, \quad r = \sqrt[t]{\frac{C}{c}} - 1, \quad t = \frac{\log C - \log c}{\log (1 + r)}$$

En esta última, para deducir la cual hay que tomar *logaritmos* en la [β]..... [$\log C = \log c + t \times \log (1 + r)$ ó $\log C - \log c = t \log (1 + r)$], son indispensables dichos *números auxiliares,* y muy convenientes en todas las anteriores (del interés compuesto), pues sin ellos será generalmente difícil hallar la potencia ó la raíz de grado t, á pocas unidades que tenga este grado.

Ejemplos.

Con los mismos datos que en los dos primeros ejemplos del interés simple (261), resolver los problemas análogos á interés compuesto.

Empezemos por calcular el tanto p. $1 = r$, *que siempre* *será la centésima parte* del tanto p. %. Éste era *6*, en dicho caso, luego $r=0{,}06$, $1+r=1{,}06$; y por tanto, las fórmulas del interés compuesto, dan

1.° $C=8500\times 1{,}06^{7}$, $\log C=\log 8500+7\log 1{,}06$
$=3{,}929419+7\times 0{,}025306,=3{,}929419+0{,}177142$
$=4{,}106561=\log(12781=C)$.

Restando $C-c=4281$, resultan los intereses compuestos, durante los 7 años, mayores, naturalmente, que los intereses simples.

2.° $\log c=\log C+C.^{\circ}\log(1+r)^{t}$
$=4{,}160551+\bar{1}{,}822858=3{,}929419=\log 8500.$

Análogamente se resolverían los otros dos problemas.

263 Las cuestiones tratadas en los dos números anteriores, son las principales y más sencillas, pero no las únicas, que respecto á capitales y sus réditos pueden ocurrir. Sin contar las que serán objeto de los dos párrafos siguientes de este capítulo, hay algunas cuya resolución se reduce á las anteriores modificadas. Tales son las relativas á las rentas perpetuas y temporales, incluyendo en éstas las vitalicias.

Renta perpetua es la que produce en un año ú otra unidad de tiempo, á interés simple, un capital c, impuesto donde puedan cobrarse indefinidamente los intereses, como en los Bancos nacionales, empréstitos, etc.

Esta renta no es, pues, más que el valor de I_1 en las fórmulas del caso primero del interés simple, y los mismos problemas que allí consideramos, serán pertinentes en el caso actual.

EJEMPLOS.

1.° ¿Qué renta perpetua producirán 60000 pesetas al 5 p. % anual?

Resp.ª $I_1=\dfrac{60000\times 5}{100}=600\times 5=3000$ ptas.

2.° ¿Á qué tanto p. % producirán 3000 pesetas de renta perpetua anual, 60000 de capital?

Resp.ª $i=\dfrac{100\times 3000}{60000}=\dfrac{10\times 3}{6}=\dfrac{30}{6}=5$ (p. %.

3.° ¿Qué capital produce 3000 pesetas de renta perpetua al 5 p. °/₀ anual?

Resp.ª $c = \frac{100 \times 3000}{5} = 20 \times 3000 = 60000$ pts.

Se llama renta temporal ó anualidad, lo que hay que dar cada año: 1.° para reintegrar, por partes iguales y en un número dado de ellos, un capital y sus réditos á interés compuesto; ó 2.° para formar un capital con la suma de anualidades é intereses compuestos.

Primer caso. Si llamamos c al capital impuesto ó prestado, n al número de años, al fin de los cuales ha de reintegrarse dicho capital y sus intereses compuestos, y a el valor de cada anualidad, según la fórmula [β], del interés compuesto, ese capital vale, á los n años, $c(1+r)^n$.

Por otra parte, la primera anualidad a, valdría á los $(n-1)$ años restantes $a(1+r)^{n-1}$, la segunda $a(1+r)^{n-2}$, y así sucesivamente, luego existe la igualdad

$$a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-3} \ldots$$
$$+ a(1+r) + a = c(1+r)^n,$$

El primer miembro forma una progresión por cociente cuya razón es $(1+r)$ (considerándola al revés).

La suma ó el valor de esa progresión es (204)

$$\frac{a(1+r)^{n-1} - a}{1+r-1} = a\,\frac{(1+r)^{n-1} - 1}{r}$$

es decir, que $a\,\frac{(1+r)^{n-1} - 1}{r} = c(1+r)^n$, fórmula que, expresando la relación general entre las cuatro cantidades a, r, c, n, sirve para buscar una de ellas, dadas las otras tres. Resolvamos esos problemas.

1.° ¿Qué anualidad hay que dar para extinguir en n años el capital c, y sus intereses compuestos al r por 1?

$$a = \frac{c\,r\,(1+r)^n}{(1+r)^{n-1} - 1} \ldots [1]$$

2.° ¿Qué capital c hay que imponer, para que su reintegro y el de sus intereses compuestos al r p. 1, dando a cada año, dure n años?

$$c = a\,\frac{(1+r)^{n-1}-1}{r\,(1+r)^n}\quad [2].$$

Para resolver los otros dos, hay que recurrir al Álgebra.

Segundo caso. También puede proponerse no extinguir sino, al contrario, formar un capital C al fin de n años, por medio de n anualidades a, y sus intereses compuestos al r por 1. La diferencia esencial con el caso anterior es que, en éste, el tiempo empieza á contarse desde que se da la primera anualidad, la cual estará redituando los n años, al fin de los cuales valdrá $a\,(1+r)^n$.

Por la misma razón, la segunda valdrá $a\,(1+r)^{n-1}$, al fin de los $(n-1)$ años que estará impuesta, y el capital C será la suma de los términos de la progresión

$$a\,(1+r)^n + a\,(1+r)^{n-1} + \ldots\ldots + a\,(1+r)$$

$$= \frac{a(1+r)\,[(1+r)^{n-1}-1]}{r} = C,$$ fórmula que resuelve los problemas de este 2.º caso.

Por último, rentas *vitalicias* son las *anualidades* que las compañías de seguros, ú otras sociedades análogas, se comprometen á pagar á una ó varias personas, previa la imposición por éstas ú otras de un capital c, y calculando el tiempo n que les queda probablemente de vida. Se llama *vida probable* el tiempo al fin del cual el número de personas de cada edad, que había al principiar dicho tiempo, se reduce á la mitad, según la estadística de cada país. Porque es claro que en todo ese tiempo hay la misma probabilidad para que viva ó para que se muera cada persona de aquéllas.

En España, la probabilidad de la vida, según el Instituto geográfico, es la expresada en la siguiente tabla, de cuyos números no difieren mucho los que se obtienen aplicando la siguiente fórmula, propuesta por el Sr. Gascó, para las edades desde 5 á 65 años:

$$\text{Vida probable} = 58 \text{ años} - \text{Edad} \times 0{,}8.$$

Años de edad.	Vida probable. —		Años de edad.	Vida probable. —		Años de edad.	Vida probable. —	
	Años.	Meses.		Años.	Meses.		Años.	Meses.
0	10	9	32	32	3	64	8	8
1	42		33	31	5	65	8	
2	49		34	30	7	66	7	5
3	51	5	35	29	9	67	6	11
4	52	5	36	29		68	6	5
5	52	9	37	28	3	69	6	
6	52	8	38	27	5	70	5	7
7	52	4	39	26	7	71	5	2
8	51	9	40	25	9	72	4	10
9	51	1	41	25		73	4	7
10	50	4	42	24	2	74	4	4
11	49	7	43	23	5	75	4	1
12	48	9	44	22	7	76	3	10
13	47	11	45	21	10	77	3	8
14	47	1	46	21	1	78	3	6
15	46	2	47	20	4	79	3	3
16	45	4	48	19	7	80	2	10
17	44	6	49	18	10	81	2	8
18	43	8	50	18	1	82	2	8
19	42	10	51	17	5	83	2	8
20	42		52	16	7	84	2	3
21	41	1	53	15	11	85	2	
22	40	4	54	15	3	86	2	
23	39	6	55	14	7	87	2	
24	38	8	56	13	10	88	2	
25	37	11	57	13	2	89	1	9
26	37	1	58	12	5	90	1	9
27	36	4	59	11	9	91	1	8
28	35	6	60	11	1	92	1	7
29	34	8	61	10	5	93	1	6
30	33	11	62	9	10	94	1	
31	33	1	63	9	3	95	1	

1.º Para saber la renta vitalicia correspondiente *á una persona* por el capital c impuesto al r por 1 anual, no hay más que buscar en la tabla anterior (ó en la análoga del país respectivo), la edad de esa persona al hacer la imposición, y su *vida probable* correlativa.

Sustituyendo por n el número de años de esa vida probable, en la fórmula [1] de las anualidades, así como por c y r sus valores, se tendrá el correspondiente de a.

Si el valor de n fuera fraccionario, no sabemos, en realidad, si dicha fórmula, sólo calculada para un número entero de años, podrá ser aplicada; pero se aplica, en efecto, pues no es difícil demostrar su exactitud, también, para ese caso.

Si, viceversa, se quiere averiguar el capital c necesario para constituir la renta anual vitalicia a, etc., no habrá más que sustituir los valores respectivos de a, r y n (vida probable), en la fórm.ª [2] de las anualidades.

EJEMPLO.

Sean $c = 50000$ pesetas, $r = 0{,}05$, $n = 26$ (vida probable á los 40 años, según la fórmula Gascó).

Sustituyendo, $a = \dfrac{50000 \times 0{,}05 \times 1{,}05^{26}}{1{,}05^{26}-1}$,

$$\log 50000 = 4{,}698970,\ \log 0{,}05 = \bar{2}{,}698970,$$

$$\log 1{,}05^{26} = 26\,[\log 1{,}05 = 0{,}021189] = 0{,}550914 = \log 3{,}5556$$

$$\log\,(1{,}05^{26} - 1 = 2{,}5556) = 0{,}407493$$

$$\log a = \log 50000 + \log 0{,}05 + \log 1{,}05^{26} + \text{C.}^{\circ}\log 2{,}5556$$

$$\begin{aligned} \log 50000 &= 4{,}698970 \\ \log 0{,}05 &= \bar{2}{,}698970 \\ \log 1{,}05^{26} &= 0{,}550914 \\ \text{C.}^{\circ} \log (1{,}05^{26}-1) &= \bar{1}{,}592507 \\ \hline \log a &= 3{,}541361 \\ a &= 3478{,}25 \text{ pesetas.} \end{aligned}$$

Una persona de 40 años que imponga 50000 pesetas al 5 por %, para formarse una renta vitalicia debe cobrar 3478,25 pesetas anuales.

NOTA. Para más detalles sobre las cuestiones de intereses y rentas, véanse las Tablas Logarítmicas del Sr. Sánchez Ramos, las cuales contienen además tablas especiales para el cálculo de esas cantidades.

2.° Para calcular la renta vitalicia correspondiente *á varias personas*, mientras viva una siquiera de ellas, se procede del modo siguiente: Sean v, v', v'',... las vidas probables de esas personas, al hacer la imposición del capital c; y e, e', e'',... sus edades respectivas; si v_n es la menor de esas vidas probables, claro es que añadiendo v_n á dichas edades, es probable que los otros socios (menos el de vida v_n) pasen de las edades respectivas...

$$e + v_n = e_1,\ e' + v_n = e_1',\ e'' + v_n = e_1'',\dots$$

Buscando de nuevo las vidas probables correspondientes á estas edades, y suponiendo sean v_1, v_1', v_1'',... y $v_{n'}$ la menor, los que la tengan mayor que $v_{n'}$ llegarán generalmente á las edades

$$e + v_n + v_{n'},\ e' + v_n + v_{n'},\ e'' + v_n + v_{n'},\dots$$

Así se continuará hasta obtener para vida probable del último socio sobreviviente

$$v_n + v_{n'} + v_{n''} + \dots = n \text{ (de la fórmula [1]).}$$

Ejemplo.

$c = 100000$ pts; $r = 0{,}05$; $e = 24$, $e' = 30$, $e'' = 40$, $e''' = 44$.

Según la tabla, las vidas probables respectivas á esas edades son $v = 39$, $v' = 34$, $v'' = 26$, $v''' = 23$, tomando para abreviar los enteros más próximos (años).

Añadiendo la menor 23 á las 3 primeras edades, resultan $e_1 = 62$, $e_1' = 57$, $e_1'' = 49$ cuyas vidas probables son $v_1 = 10$, $v_1' = 13$, $v_1'' = 19$. Agregando la menor 10 á las otras ed.^{s}, $e_2' = 67$, $e_2'' = 59$, cuyas vidas probables... $v_2' = 7$, $v_2'' = 12$ dan para el último superviviente... $e_3'' = 66$, $v_3'' = 7$.

Luego, $n = 23 + 10 + 7 + 7 = 47$.

Sustituyendo este valor de n resulta

$$a = \frac{100000 \times 0{,}05 \times 1{,}05^{47}}{1{,}05^{47} - 1}.$$

Haciendo por logaritmos este cálculo, como el anterior, resulta $log\ a = 3{,}745187$, $a = 5561{,}43$ pesetas.

§ 2.° REGLAS DE DESCUENTO.

264. Llámase *descuento* lo que se resta del valor nominal de una letra de cambio, ú otro documento mercantil pagadero en un plazo fijo, para pagarlo al contado. El *descuento* no es otra cosa que el interés simple del valor del documento, al tanto por ciento convenido entre el *tenedor* (el que cobra) y su *tomador* (el que paga). Ese tanto por ciento puede ser anual, ó por el plazo que falte para el *vencimiento*. Además el descuento puede calcularse como interés del *valor nominal*, ó del *valor actual* que añadido á sus intereses suma el nominal. Este último modo es el *racional* ó *matemático*, y el otro el *usual* ó *comercial* de descontar.

1.° *Descuento racional.* Si el tanto por ciento convenido no es por todo el tiempo que falte para el vencimiento de la letra, y sí anual, se empezará calculando *aquél*, por el segundo caso del interés simple, ó bien por la proporción $360 : t :: i : i'$; en que 360 son los días del año comercial, que también pueden ser 365 ó 366 si se conviene, t el tiempo en días que falte para el vencimiento, i el tanto por ciento anual é $i' = \frac{it}{360}$ el tanto por ciento correspondiente al plazo susodicho. Después se calculará el descuento ó mejor el valor actual x del documento por la proporción $100 + i' : 100 :: n : x$ fácil de justificar, pues, siendo i' el interés de 100 unidades, éstas valdrán $100 + i'$ cuando x valga n, etc. De ahí... $x = \frac{100\,n}{100 + i'}$, fórmula, que como su análoga del interés simple, servirá también para hallar n ó i' si se da x y la otra cantidad, pero estos casos son muy raros. Si en esa fórmula sustituímos el valor de i', hallado por la anterior, resulta la...

$$x = \frac{100\,n}{100 + \frac{it}{360}} = \frac{n}{1 + \frac{it}{36000}},$$

que da directamente el valor actual x en función del nominal n, del tanto por ciento *anual* i, y del número t de días que falten para el vencimiento; días que se cuentan según los que tienen los meses respectivos, por lo cual es también justo contar los 365 ó 366 del año, ó tomar 36500 ó 36600 para denominador de la fracción parcial últimamente expresa.

2.° *Descuento comercial.* Este se reduce al interés del valor nominal n, de modo que se calculará sustituyendo n en vez de c, d en vez de I en las fórmulas del interés simple. Así se halla $d = \frac{n.i}{100} = \frac{n\,i\,t}{36000}$.

Restando este valor del de n se sabrá lo que hay que pagar y cobrar respectivamente.

Como se concibe *á priori,* y es fácil comprobar, el descuento comercial es mayor que el racional, y su diferencia es el interés del racional en el tiempo que falta para el vencimiento. No por eso debe juzgarse totalmente injusto el descuento usual, pues como es un puro convenio, exigiría el tomador mayor tanto por ciento si se le obligara al descuento racional, y saldría la misma ó peor cuenta al tenedor de la letra.

Más injusto es calcular el descuento como interés simple, si el plazo del vencimiento es diferente de un año, pues, como demuestra el Sr. Cortazar en su *Memoria sobre el cálculo del interés,* éste es realmente menor que el calculado, si el plazo es menor de un año; y mayor en el caso contrario; por consiguiente, el descuento comercial perjudica al tomador en el primero de esos casos y le favorece en el segundo; sucediendo también lo contrario respectivamente en el descuento racional ó matemático, el cual no merece, por tanto, estos nombres sino para el plazo de un año, suponiendo que á esta unidad de tiempo se refiere el tanto por ciento.

Ejemplo.

Aplicar ambas reglas de descuento á una letra de 20000 pesetas que vence dentro de 8 meses, siendo 6 el tanto por ciento anual $= i$.

1.° Es evidente que, según la costumbre, del 6 por ciento anual corresponde á los 8 meses, $i' = 4$ por $^0/_0$; luego $x = \dfrac{100 \times 20000}{104} = 19230,08$ pesetas.

2.° $d = \dfrac{20000 \times 4}{100} = 200 \times 4 = 800; n - d = 19200.$

Las 30,08 pesetas de diferencia son los intereses de las 769,92 del primer descuento.

§ 3.° Otras cuestiones de percentaje.

265. Además de las ya tratadas hay otras cuestiones cuantitativas en que interviene un *tanto* regulador, que siempre se puede reducir á tanto por ciento aunque no se dé así primitivamente. Por eso todas las cuestiones de tal especie, inclusas las de los dos párrafos anteriores, se llaman *cuestiones de percentaje.*

Fondos públicos. Los documentos en que el Estado reconoce sus deudas, y que se llaman *papel del Estado,* las acciones de los Bancos ó Sociedades mercantiles, etc., constituyen los *fondos públicos,* y sobre ellos ocurren diariamente en la Bolsa ó Mercado de esos valores cuestiones de percentaje. Las principales, fundadas en la *cotización* de cada día, consisten en saber: cuánto dinero se necesita para pagar un valor nominal dado de cierto papel; ó viceversa, cuánto valor nominal se puede comprar con uua cantidad dada de dinero. Los números que figuran en la cotización, enfrente del nombre del papel respectivo, son precisamente el valor efectivo, aquel día, de 100 unidades del valor nominal. Por consiguiente, llamando á éste n, c al precio de cotización y C al valor efectivo del nominal n, la proporción siguiente plantea ambas cuestiones enunciadas, y también la de hallar la cotización dadas las otras dos cantidades... $100 : c :: n : C$, de donde $C = \dfrac{cn}{100}$, $n = \dfrac{100\,C}{c}$, $c = \dfrac{100\,C}{n}$.

Ejemplo 1.° Según la cotización del día 7 de Marzo corriente, el 4 por 100 interior (una clase de papel del Estado) estuvo á 75,70 (por 100), ¿cuánto importarían

500000 pesetas nominales de ese papel?, y viceversa (para comprobar esa cuestión 1.ª)

$$1.^{a}\quad C=\frac{75,70\times 500000}{100}=75,70\times 5000=378500 \text{ pts.}$$

$$2.^{a}\quad n=\frac{100\times 378500}{75,70}=\frac{37850000}{75,7}=500000 \text{ pts.}$$

$$3.^{a}\quad c=\frac{37850000}{500000}=75,7 \text{ por } 100.$$

Ejemplo 2.º Hállese cuánto valió ese día cada acción del Banco español, cuyo valor nominal son 500 pesetas, siendo 396 su cotización. Valió 1980 pesetas.

Otra cuestión sobre fondos públicos es averiguar la renta anual que produce el capital C empleado en tal ó cual papel. Para eso se halla por las fórmulas anteriores, cuánto valor nominal se puede comprar, con el efectivo C, y ya es una cuestión de interés simple lo restante. En el ejemplo anterior diríamos: las 500000 pesetas nominales producen al 4 por 100... $500000\times 0,04=20000$ pesetas de renta anual. Si ahora se quiere saber el tanto por ciento efectivo de las 378500 pesetas que costaron las 500000, no habría más que sustituir estos valores de c y de I en las fórmulas del interés simple, y tendríamos

$$378500 : 20000 :: 100 : i=\frac{20000}{3785}=5,28 \text{ por } {}^{\circ}\!/_{\circ}.$$

Por último, el Agente de Bolsa que ha de intervenir en la compraventa de los fondos públicos, cobra un tanto que no es más que un caso de todos los que son llamados...

Comisiones y corretajes. Son los intereses que cobran los intermediarios, entre comprador y vendedor, en los negocios mercantiles. Esos intereses se regulan á tanto por ciento ó por 1, y también á 1 por tantos, como en los negocios de Bolsa que suele ser el 1 por 1000 ó sea 0,1 por 100. Como se comprende, todas estas cuestiones son de percentaje, y se resuelven por la regla de tres.

Los *seguros* sobre incendios ú otros siniestros, los *derechos de habilitación*, los *cambios* de billetes por metálico, ó de moneda de un país por la de otro, y otras muchas cuestiones de que se ocupa detalladamente la Aritmética mercantil, son igualmente de percentaje, ó á éstas reducibles.

CAPÍTULO 3.º—REGLAS DE ALIGACIÓN Y CONJUNTA.

LECCIÓN 25.

Diversas cuestiones aritméticas relativas á las mezclas ó aligaciones (266). *Principios fundamentales para la resolución de esas cuestiones* (267). *Regla de aligación directa* (268). *Cuestión principal de la regla de aligación inversa* (269). *Regla conjunta* (270).

§ 1.º REGLAS DE ALIGACIÓN.

266. *Aligación*, mezcla ó aleación (si son metales), es la unión de varias cantidades homogéneas ó heterogéneas. Cuando á esas cantidades corresponden otras de una sola especie, precios, pesos, ley metálica (228), etc., ocurre tener que resolver varias cuestiones, cuyos tipos generales son éstos:

1.ª Dadas las cantidades mezcladas de cada especie, y las correspondientes de la otra á cada unidad de aquéllas, hallar la cantidad de esta otra que corresponde á la unidad de la mezcla.

2.ª Dadas las cantidades de la especie común, que corresponden á la unidad de la mezcla, y de cada especie de las mezcladas, hallar las cantidades relativas de éstas.

3.ª Dada la cantidad común correspondiente á la unidad de mezcla, y las cantidades de especies mezcladas, hallar las correspondientes de la especie común á cada unidad de las mezcladas.

Como esta última cuestión es muy poco usada, nos limitaremos á exponer las otras dos, de las cuales la primera se llama directa y la segunda inversa.

267. La resolución de todas las cuestiones de aligación se funda en los siguientes

Principios fundamentales. 1.º La cantidad de la mezcla es la suma de las cantidades mezcladas.

2.º La cantidad común correspondiente á toda la mezcla es la suma de las cantidades correspondientes á las mezcladas.

3.° El producto de la cantidad de mezcla por la correspondiente á su unidad, es igual á la suma de productos de cada cantidad mezclada por la correspondiente á su respectiva unidad.

4.° Cada dos cantidades mezcladas son inversamente proporcionales á las diferencias entre las cantidades correspondientes á sus respectivas unidades y la correspondiente á la unidad de la mezcla.

En la mayoría de los casos, la cantidad común por su especie, y correspondiente á las mezcladas y á su mezcla, es el precio ó valor monetario de las unas y de la otra; por lo cual suelen enunciarse así los principios anteriores:

2.° *El valor total de la mezcla es la suma de los valores de las cantidades mezcladas.*

3.° *El producto de la cantidad de mezcla (número de unidades) por el precio de la unidad, es la suma de productos de cada cantidad mezclada por el respectivo precio de su unidad.*

4.° *Cada dos cantidades mezcladas son inversamente proporcionales á las diferencias respectivas entre sus precios (de su unidad) y el de la mezcla.*

Aplicados los mismos principios á las alcaciones metálicas, y recordando que se llama ley de la aleación la cantidad del metal fino que entra en cada unidad de aquélla, ó sea la razón del peso del metal principal al peso total $l = \frac{p}{P}$, podrá también decirse...

1.° *La ley de una aleación, mezcla de otras, es la suma de produetos de los pesos mezclados, por sus correspondientes leyes, dividida por la suma de esos pesos.*

La ley del metal fino ó principal puro se considera igual á 1, y las de los otros cero.

2.° *Los pesos de cada dos metales mezclados son inversamente proporcionales á las diferencias entre sus leyes respectivas y la ley de la mezcla.*

Apliquemos ya esos principios á los dos casos principales.

268. *Regla de aligación directa.* Representando por c, c', c'',... las cantidades mezcladas, por p, p', p'',... los precios ó valores respectivos (de sus unidades), y por p_m el precio ó valor de la unidad de la mezcla, tendremos, en virtud de los tres primeros principios,

$$p_m \times (c + c' + c'' + \ldots) = cp + c'p' + c''p'' + \ldots$$

de donde $p_m = \dfrac{cp + c'p' + c''p'' + \ldots}{c + c' + c'' + \ldots}$

Ejemplo 1.º Se mezclan tres clases de café en las siguientes proporciones: 36 kilógramos de á 2,18 pesetas el kilógramo, 21 kilógramos de á 2,85 pesetas y 48 kilógramos de á 3,76 pesetas, ¿á cómo ha de venderse el kilógramo de la mezcla? La fórmula última da

$$p_m = \frac{36 \times 2{,}18 + 21 \times 2{,}85 + 48 \times 3{,}76}{36 + 21 + 48} = \frac{318{,}81}{105} = 3{,}04 \text{ pts.}$$

Ejemplo 2.º Se mezclan 6 kilógramos de plata de 0,950 de ley, con 2 kilógramos de ley 0,780, ¿á qué ley resulta la mezcla? $l = \dfrac{6 \times 0{,}950 + 2 \times 0{,}780}{6 + 2} = 0{,}9075.$

269. *Regla de aligación inversa.* El cuarto principio que, según las notaciones adoptadas, y suponiendo $p' > p$, se formula así... $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{p' - p_m}{p_m - p}$... $[\alpha]$, puede ser demostrado de dos modos:

1.º Puesto que, según el tercer principio...
$p_m(c + c') = cp + c'p'$, será $cp_m + c'p_m = cp + c'p'$ ó $c(p_m - p) = c'(p' - p_m)$ de donde la $[\alpha]$.

2.º Cada unidad del precio mayor p', vendida al medio p_m produce la pérdida $p' - p_m$, y las c' unidades la pérdida $c'(p' - m)$. Por el contrario, cada unidad del precio menor p, vendida al medio p_m, da de ganancia $p_m - p$, y c unidades darán de ganancia $c(p_m - p$. Igualando esta expresión con la de la pérdida, se verificará el segundo principio, y la proporción $[\alpha]$.

Por tanto, para resolver las cuestiones de aligación inversa, se formarán tantas proporciones como pares de cantidades haya, cuyos valores comprendan al precio de la mezcla, que por eso se llama precio medio, y mediante esas proporciones se hallarán las cantidades relativas que se pueden mezclar; siendo la cuestión indeterminada á no fijar alguna de esas cantidades, ó la total de mezcla.

Naturalmente, si una especie de cantidad es común á dos ó más proporciones, el total de la misma que ha de entrar en la mezcla, es la suma de las cantidades que de cada proporción de aquéllas resulte.

Ejemplo 1.° ¿Qué cantidades se podrán mezclar de vino de 1,25 pesetas litro, de 0,94, de 0,80 y de 0,43, para vender á 0,92 el litro de la mezcla?

Llamemos c, c', c'', c''' las cantidades buscadas, por su orden de mayor á menor precio. Según el cuarto principio tendremos las proporciones

$$\frac{c}{c''} = \frac{0{,}92-0{,}80}{0{,}25-0{,}92} = \frac{12}{33}, \quad \frac{c'}{c'''} = \frac{0{,}92-0{,}43}{0{,}94-0{,}92} = \frac{49}{2}.$$

Podrá, pues, hacerse la mezcla con 12 litros de á 1,25 pesetas, 33 litros de á 0,80, 49 litros de á 0,94 y 2 litros de á 0,43, ó con otras 4 cantidades de vino que sean proporcionales directamente á 12, 49, 33 y 2 (por orden de mayor á menor precio). Comprobemos la 1.ª solución, según el tercer principio:

$$1{,}25 \times 12 + 0{,}94 \times 49 + 0{,}80 \times 33 + 0{,}43 \times 2 = 0{,}92 \times (12 + 49 + 33 + 2) = 88{,}32 \text{ pesetas.}$$

Ejemplo 2.° ¿En qué proporciones deberá mezclarse la plata ó el oro de dos barras, la una de 0,950 de ley y la otra de 0,885, para que resulte la aleación á la ley de 0,900?

Siendo las diferencias de la ley media á las extremas $0{,}950 - 900 = 0{,}050$, $0{,}900 - 0{,}885 = 0{,}015$ bastará tomar 15 partes en peso de la primera barra y 50 de la segunda, ú otras dos cantidades proporcionales á 15 y 50 (de la mayor á la menor ley).

Claro es que si se fija la cantidad total de mezcla, la cuestión, ya determinada, se reduce á dividir ese total, en partes proporcionales á los números hallados por las proporciones antedichas; y si se fija una de las cantidades que se han de mezclar, habrá que determinar las otras hallando cuartas proporcionales sucesivas.

Por último, es evidente que si se supone á la unidad de mezcla un valor que no sea intermedio entre los valores extremos de las unidades que se han de mezclar, el problema es imposible matemáticamente; aunque así lo resuelven para su provecho muchos comerciantes.

§ 2.° Regla conjunta.

270. *Llámase regla conjunta la que se emplea para averiguar la equivalencia numérica entre dos cantidades, por el intermedio de otras relacionadas*, á su vez, *con aquéllas y entre sí.* Se funda en el siguiente

Principio fundamental. Los productos ordenados de varias equivalencias—ó igualdades de valor entre cantidades concretas—que tengan homogéneos el segundo miembro de cada una con el primero de la siguiente, forman otra equivalencia cuyo primer miembro es de la primera especie, y el segundo de la última.

Sean, primero, las dos equivalencias $4a = 5b$, $3b = 4c$; multiplicando la primera por 3 y la segunda por 5, resultan estas otras... $(4 \times 3)a = (5 \times 3)b$, $(3 \times 5)b = (4 \times 5)c$ de las que inmediatamente se deduce $(4 \times 3)a = (4 \times 5)c$.

Sean ahora tres ó más; por ejemplo: las cinco
$8\,a = 5\,b,\ 4\,b = 9\,c,\ 3\,c = 2\,d,\ 1\,d = 8\,e,\ 6\,e = 7\,m.$

Multiplicando las dos primeras resulta, según el caso anterior, $(8 \times 4)\,a = (5 \times 9)\,c$. Multiplicando ésta por la tercera $(8 \times 4 \times 3)\,a = (5 \times 9 \times 2)\,d$, y así sucesivamente hasta $(8 \times 4 \times 3 \times 1 \times 6)\,a = (5 \times 9 \times 2 \times 8 \times 7)\,m$.

A veces conviene que la primera y última especie sean una misma, cuando es incógnito uno de los factores de esos productos.

Ejemplo 1.° ¿Cuántas pesetas valen 5,07 metros de una tela, sabiendo que 2 metros equivalen á 7 litros de vino, 1 litro de éste á 4 gramos de plata y 2 gramos de ésta á 0,40 pesetas?

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ pts.} = 5{,}07 \text{ ms.} \\ 2 \text{ ms.} = 7 \text{ litros.} \\ 1 \text{ litro} = 4 \text{ gms.} \\ 2 \text{ gms.} = 0{,}40 \text{ pts.} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (x \times 2 \times 1 \times 2)\,\text{p} = (5{,}07 \times 7 \times 4 \times 0{,}40)\text{p} \\ x = \dfrac{5{,}07 \times 7 \times 4 \times 0{,}40}{2 \times 1 \times 2} \\ = 5{,}07 \times 7 \times 0{,}40 = 14{,}196. \end{array}$$

Ejemplo 2.º Hallar la relación aproximada entre el metro y la legua, sabiendo que (también aproximadamente)

$$\left.\begin{array}{r} 5 \text{ metros} = 6 \text{ varas} \\ 4 \text{ varas} = 2 \text{ brazas} \\ 1111 \text{ brazas} = 1 \text{ milla} \\ 3 \text{ millas} = 1 \text{ legua} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (5 \times 4 \times 1111 \times 3)\,\text{met.} = (6 \times 2 \times 1 \times 1)\,\text{leg.} \\ 1 \text{ legua} = \dfrac{5 \times 4 \times 1111 \times 3}{6 \times 2} \\ = 5 \times 1111 = 5555 \text{ metros.} \end{array}$$

Cuestiones sobre el Libro sexto.

1. Sabiendo que una luz alumbra á doble distancia 4 veces menos, á triple distancia 9 veces menos, y en general á distancia n veces mayor, n^2 veces menos, ¿en qué proporción están las intensidades de una luz con sus distancias al objeto alumbrado?

2. El tiempo que tarda un péndulo en cada oscilación está en razon directa de la raíz cuadrada de su longitud (para el mismo sitio geográfico), ¿cuánto tardaría en cada oscilación un péndulo cuya longitud fuese de 300 metros, sabiendo que tarda un segundo el que tiene 3,564 pies (en Madrid)?

3. Una guarnición de 1800 soldados tiene víveres para 3 meses, comiendo á 5 hectógramos diarios; aumentada en 300 soldados, ¿cuánto debe comer cada uno (de los 2100) diariamente para que los mismos víveres duren 4 meses?

4. Hay que repartir 2205 pesetas entre 4 personas, de modo que por cada 2 á la primera, se den 3 á la segunda; por cada 4 á la segunda, 5 á la tercera, y por cada 6 á la tercera, se den 7 á la cuarta, ¿cuántas pesetas corresponden á cada una de las 4?

5. Entre dos socios pusieron 1000 pesetas para un negocio, el uno retiró su capital á los dos meses, y el otro

le tuvo un mes más; tocaron á 900 pesetas cada uno de ganancia, ¿cuánto puso cada uno de capital?

6. Un capital de 60000 duros ha producido 2500, estando impuesta una parte al 4,5 y la otra al 3,5 por 100, ¿cuánto importa cada parte?

7. Un capital de 3750 pesetas ha redituado 719,25, en $2\frac{1}{2}$ años, á interés simple, ¿cuánto era el tanto por 100?

8. Un capital de 48000 pesetas ha producido 10320 de intereses, al 6 por 100 anual de interés simple; ¿cuánto tiempo ha estado?

9. Una letra de 750 pesetas que vence el 10 de Diciembre, se cobra el 24 de Septiembre con un descuento de 6 por 100 anual, ¿cuánto se cobra, de uno y otro modo de descontar?

10. Un pagaré de 11891,41 pesetas que vencía á los 41 meses, se cobró al contado, con 9000 pesetas, ¿á qué tanto por ciento se descontó?

12. ¿Qué anualidad se debe cobrar por un capital de 30000 duros impuestos: 1.°, á renta perpetua; 2.°, á renta vitalicia de una persona que tiene 20 años, y al 6 por 100 anual?

13. La aleación de imprenta consta de 5 partes de cobre, 20 de antimonio y 80 de plomo. Suponiendo que valen: el cobre á 9,6 reales kilógramo, el antimonio á 5,8 y el plomo á 1,9, ¿cuánto vale el kilógramo de la aleación de imprenta?

14. Sabiendo que las distancias medias de los principales planetas al Sol, son (tomando por unidad la de la Tierra) Mercurio, 0,387; Venus, 0,723; Marte, 1,524; Júpiter, 5,203; Saturno, 9,539; Urano, 19,183; Neptuno, 30,036, y que los cubos de esas distancias son directamente proporcionales á los cuadrados de los tiempos de las revoluciones al rededor del Sol, de los astros respectivos, hallar estos tiempos en función del terrestre = 365,256 días.

FIN DE LA ARITMÉTICA.

le tuvo un mes más, tocaron á 900 pesetas cada uno de ganancia, ¿cuánto puso cada uno de capital?

6. Un capital de 60000 duros ha producido 2500, estando impuesta una parte al 4,5 y la otra al 3,5 por 100, ¿cuánto importa cada parte?

7. Un capital de 3750 pesetas ha redituado 719,25, en 2 [illegible] años, á interés simple, ¿cuánto era el tanto por 100?

8. Un capital de 18000 pesetas ha producido 10890 de intereses, al 6 por 100 anual de interés simple; ¿cuánto tiempo ha estado?

9. Una letra de 750 pesetas que vence el 10 de Diciembre, se cobra el 24 de Septiembre con un descuento de 6 por 100 anual, ¿cuánto asciende, de uno y otro modo de descontar?

10. Un pagaré de [illegible],41 pesetas que vencía á los 11 meses, se pagó al contado con 2900 pesetas: ¿á qué tanto por ciento se descontó?

12. ¿Qué anualidad se debe cobrar por un capital de 30000 duros impuestos: 1.º, á renta perpetua; 2.º, á renta vitalicia de una persona que tiene 20 años, y al 6 por 100 anual?

13. La aleación de imprenta consta de 8 partes de cobre, 21 de antimonio y 80 de plomo. Suponiendo que valen: el cobre á 9,5 reales kilógramo, el antimonio á 3,5 y el plomo á 1,2, ¿cuánto vale el kilógramo de la aleación de imprenta?

14. Sabiendo que las distancias medias de los principales planetas al Sol son (tomando por unidad la de la Tierra) Mercurio, 0,387; Venus, 0,723; Marte, 1,524; Júpiter, 5,203; Saturno, 9,539; Urano, 19,183; Neptuno, 30,036; y que los cubos de estas distancias son directamente proporcionales á los cuadrados de los tiempos de las revoluciones al rededor del Sol, de los astros respectivos, hallar estos tiempos en función del terrestre = 365,256 días.

FIN DE LA ARITMÉTICA

ÍNDICE.

AUTORES CONSULTADOS.

Aritméticas de Baltzer, Bertrand, Bezout, Cirodde, Cortázar, Delille, Fernández Parreño, Francœur, García Galdeano, Giménez de Castro, Gómez de Cádiz, Jiménez Rueda, Lacroix, Moya, Paque, Ritt, Salinas y Benitez, Sánchez Vidal, Serret, Tuero, Vallejo y Vallin.

Jiménez (Eulogio), *Ejercicios de Aritmética, La Historia por la Aritmética, Teoría de los números.*

Tablas logarítmicas de Callet, Gascó, Sánchez Ramos y Vázquez Queipo.