UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA
DE LA MATEMÁTICA

SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES DE OBJETOS MATEMÁTICOS LIGADOS A LA APROXIMACIÓN FRECUENCIAL DE LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

TESIS DOCTORAL

LUIS SERRANO ROMERO

GRANADA 1996

Tesis doctoral dirigida por la Dra. Dª Carmen Batanero Bernabeu

Tribunal de la tesis:

Presidente: Dr. D. Ramón Guritérrez Jaimez
Universidad de Granada

Secretaria: Dra. Dª María Angustias Vallecillos Jiménez
Universidad de Granada

Vocales: Dr. D. Carlos Vasco Uribe
Universidad Nacional de Colombia
Dr. D. J. Mikel Shaughnessy
Universidad Portland State
Dr. D. Ángel Gutiérrez Rodríguez
Universidad de Valencia

Depósito Legal: B-24144/97
ISBN: 84-338-2323-X

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS

Expreso mi agradecimiento más sincero a la Directora de esta Tesis Dra. Dª Carmen Batanero Bernabeu por su contribución incansable en el diseño y realización de la investigación y su inestimable ayuda en mi formación como investigador.

A los Doctores Dª Angustias Vallecillos Jiménez, D. Juan Díaz Godino y D. Luis Rico Romero por sus valiosas y motivantes aportaciones.

A todos los compañeros del Departamento de Didáctica de la Matemática por sus sugerencias y apoyos en los seminarios de investigación.

Un agradecimiento particular merecen todos los profesores y alumnos de los centros de enseñanza de la ciudad de Melilla que han participado en la realización de entrevistas y cuestionarios, que constituyen una parte esencial de esta Tesis.

INTRODUCCIÓN

La teoría de la Probabilidad es, en la actualidad, una de las ramas más fecundas de las Matemáticas. Sus múltiples desarrollos teóricos y las aplicaciones prácticas a los campos más diversos están desbordando las expectativas más optimistas de los propios probabilistas. La explicación de este fenómeno es doble: por una parte necesitamos tomar a menudo decisiones que conllevan consecuencias inciertas; por otro lado disponemos de informaciones estadísticas sobre estas posibles consecuencias, gracias a las bases de datos recopiladas por diversas instituciones y a la difusión al gran público de los medios informáticos y de telecomunicación. Sin esta información sobre las frecuencias relativas esperadas de diferentes sucesos asociados a un experimento aleatorio de nuestro interés, los desarrollos teóricos de probabilidad serían de escasa utilidad, ya que no encontraríamos muchas aplicaciones, fuera del terreno de los juegos de azar, donde fuese razonable asumir el principio de indiferencia en la asignación inicial de probabilidades.

Esta disponibilidad de la información estadística y la importancia de la misma en la toma de decisiones plantea a la comunidad de educadores matemáticos el reto de la formación estocástica de los futuros ciudadanos (Hawkins *et al.* 1992). El razonamiento estocástico correcto, la comprensión adecuada de los modelos de probabilidad serán sin duda tan necesarios en el siglo que va a comenzar como lo eran hace unos años la capacidad aritmética o algebraica elementales.

El desafío se acentúa por el carácter contraintuitivo de algunos de los resultados más simples del Cálculo de Probabilidades, que se pone de manifiesto no solo en el aprendizaje, sino en el desarrollo histórico de la propia disciplina. Como explicación de las dificultades de aprendizaje se ha sugerido que la enseñanza del tema ha sido excesivamente formal y que la resolución de problemas ha estado excesivamente ligada al cálculo combinatorio (Ahlgren y Garfield, 1991). Pero el razonamiento combinatorio no se desarrolla, en general, hasta bien entrada la

adolescencia, lo cual ha sido también una barrera que ha retrasado el estudio de la probabilidad hasta los 14-15 años, cuando ya el alumno ha construido algunas de sus creencias erróneas sobre los fenómenos aleatorios.

Una reciente sugerencia para favorecer la enseñanza y el aprendizaje es iniciar a los alumnos más jóvenes en la experimentación con fenómenos estocásticos sencillos, como por ejemplo, juegos con monedas, dados o ruletas. La recogida de datos sobre los resultados de estos experimentos y el análisis de los resultados obtenidos podrían ayudar al alumno a construir algunas intuiciones correctas sobre los modelos estocásticos, que pudieran servir como base para una futura enseñanza formal del tema. Este enfoque es también el puente que permitiría integrar estadística y probabilidad y comprender sus mutuas relaciones, esto es, promover el razonamiento estocástico.

En este trabajo analizamos la problemática didáctica asociada a la "aproximación frecuencial" de la enseñanza, en la que una de las ventajas sobre la "aproximación clásica", es la ampliación del campo de aplicaciones de la probabilidad mostrado al alumno. Esta problemática ha sido tratada escasamente en las investigaciones en el campo de la Didáctica y se puede describir resumidamente en las siguientes preguntas:

* ¿Cuáles son los objetos matemáticos ligados al enfoque frecuencial de la enseñanza de la probabilidad? ¿Cuáles de ellos son asequibles a los alumnos de secundaria? ¿Cómo diseñar situaciones - didácticas adecuadas para este enfoque de la enseñanza?

* ¿Son asequibles a los alumnos las características básicas de los experimentos aleatorios que les proponemos en estas situaciones y de las secuencias de resultados aleatorios obtenidas en la experimentación? ¿Cuáles son las actuaciones de los alumnos en la resolución de los problemas propuestos? ¿Cuáles de estas actuaciones son concordantes con el significado de la aleatoriedad desde un punto de vista matemático y cuáles no? ¿Encontramos en los alumnos las mismas heurísticas y sesgos descritos en sujetos adultos?

* ¿Cuál es el grado de comprensión de los alumnos de la probabilidad en su acepción frecuencial? ¿Admiten los alumnos la posibilidad de estimar la probabilidad en base a los datos experimentales? ¿Entienden los alumnos el carácter aproximado de los valores de probabilidad que obtenemos?

La respuesta a estas preguntas requiere un estudio previo del significado de la aleatoriedad y de las secuencias aleatorias desde el punto de vista matemático, pues este estudio es la pauta de comparación con los significados personales de los alumnos. Este estudio se aborda en el primer capítulo de la Tesis y es completado con el análisis epistemológico y psicológico que nos permite comprender mejor las dificultades de los estudiantes. Todos estos antecedentes nos han servido también para la construcción de las situaciones didácticas y los instrumentos de recogida de datos utilizados en la fase experimental. Esta fase experimental está descrita en los dos capítulos restantes, donde abordamos una primera aproximación a las preguntas de investigación que nos hemos formulado.

En el capítulo segundo describimos unas secuencias didácticas orientadas a la introducción de conceptos probabilísticos a los alumnos con el nuevo enfoque y analizamos su proceso de resolución por una muestra de 20 alumnos. Los datos sobre estos procesos fueron obtenidos mediante la técnica de entrevista. Una primera conclusión es que las actividades experimentadas resultaron en general interesantes y asequibles para los alumnos. Estos mostraron no sólo ideas correctas sobre diferentes conceptos matemáticos, sino que desarrollaron estrategias adecuadas en la solución de bastantes de los apartados de estas situaciones. No obstante, se detectaron algunas dificultades generalizadas, empleo de heurísticas incorrectas y atribución de propiedades inadecuadas a las secuencias aleatorias.

Estas dificultades son estudiadas en el tercer capítulo, en una muestra más representativa mediante un cuestionario escrito, con objeto de determinar su extensión en la población de estudiantes. Este cuestionario evalúa tres componentes diferenciados del razonamiento estocástico, todos ellos fundamentales para el enfoque frecuencial en la enseñanza de la probabilidad. Estos componentes son las propiedades atribuidas por los alumnos a las secuencias de resultados aleatorios, la interpretación de enunciados de probabilidad frecuencial y el uso de heurísticas en la resolución de problemas probabilísticos sencillos. Cada uno de estos apartados es analizado con detalle, a partir de las respuestas y argumentos de los alumnos.

Como consecuencia de nuestro trabajo se describen categorías de prácticas o actuaciones realizadas por los alumnos en la resolución de problemas propuestos y se comparan con las que serían adecuadas desde un punto de vista matemático. Así mismo se estudia la relación de estas prácticas con diversas variables de tarea de los ítems, identificando factores diferenciados en cada uno de los componentes del cuestionario. La dualidad señalada por Hacking (1975), que ha sido asociada al término probabilidad desde sus orígenes, se ha manifestado también en nuestros resultados. En especial, la influencia del contexto y de los resultados de las simulaciones sobre las respuestas de los alumnos, muestran la tensión entre los aspectos objetivos y subjetivos de la probabilidad.

Estos resultados apuntan también a la diversidad de significados que a los mismos objetos matemáticos asignan los alumnos y avisan a los profesores de las posibles dificultades en el aprendizaje. También les proporcionan información sobre los puntos en que habrá que trabajar para lograr que estos alumnos construyan un significado más acorde con el correspondiente al punto de vista matemático, de modo que puedan conseguirse los objetivos señalados en los nuevos diseños curriculares.

Finalizamos el trabajo con el capítulo de conclusiones en el que revisamos nuestras hipótesis iniciales, así como las generadas a lo largo del estudio y se apuntan líneas de continuación de este trabajo. Los anexos incluyen datos sobre los resultados en una muestra piloto, así como los instrumentos empleados, los cuales pueden ser utilizados por los profesores en la evaluación del razonamiento estocástico de sus alumnos.

CAPÍTULO I FUNDAMENTOS Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. INTRODUCCIÓN

Este primer capítulo comienza con la descripción detallada del problema que hemos descrito resumidamente en la Introducción, así como de los objetivos concretos de nuestra investigación. El interés del problema se justifica a partir de dos puntos. El primero de ellos es la inclusión en los nuevos diseños curriculares para la enseñanza primaria y secundaria de contenidos probabilísticos. El segundo, los resultados de nuestra Memoria de Tercer Ciclo (Serrano, 1993), en la que se detectó la existencia de posibles dificultades sobre el aprendizaje de estos alumnos con el nuevo enfoque recomendado para la enseñanza. El marco teórico desarrollado por Godino y Batanero (1994; en prensa), que ha sido utilizado en este trabajo, se describe resumidamente en la sección 1.2.2.

El primer objetivo de la investigación es realizar un análisis teórico de las ideas de aleatoriedad, experimentos y secuencias aleatorias que se recoge en el resto de este primer capítulo. Empezamos con el análisis del concepto de aleatoriedad y, posteriormente, el estudio se concreta en tres tipos de modelos estocásticos que subyacen en los ítem de los instrumentos empleados en la fase experimental. Estos modelos son las sucesiones de ensayos de Bernoulli, los recorridos aleatorios y el proceso de Poisson en el plano.

El estudio teórico se lleva a cabo desde el punto de vista epistemológico y matemático ambos a nivel elemental pero suficiente para apoyar el estudio experimental. Completamos el capítulo con los antecedentes de nuestra investigación en Psicología y Educación Matemática clasificados con el mismo esquema.

Finalmente incluimos en este capítulo la descripción de la metodología empleada en la fase experimental de la Tesis, que combina elementos cuantitativos y cualitativos y en la que hacemos extenso uso de análisis de datos multivariantes, todo ello dentro de los presupuestos del marco teórico utilizado.

1.2. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y DEL MARCO TEÓRICO EN EL QUE SE INSCRIBE

1.2.1. INTRODUCCIÓN

Como se señala en el Decreto 105 / 1992 de Educación de la Junta de Andalucía (BOJA 20/5/92), por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria, la concepción sobre los conocimientos matemáticos, su enfoque educativo y la incidencia e importancia que se les atribuye va cambiando según las ideas y planteamientos educativos. Ello se nota especialmente en el campo de los fenómenos estocásticos, donde actualmente asistimos en España y otros países desarrollados a una propuesta de cambio curricular en todos los niveles educativos. Se sugiere esta enseñanza a una edad temprana e introducir la probabilidad en su acepción frecuencial (MEC, 1989, 1992; Junta de Andalucía, 1989, 1992; NCTM, 1989).

Así, en el Decreto de Educación Primaria de la Junta de Andalucía, se recomienda poner a los alumnos en situaciones de exploración y descubrimiento del carácter aleatorio de algunas experiencias y la comparación de probabilidades sencillas.

La metodología recomendada está basada en la experimentación y simulación de experimentos aleatorios, el registro de los resultados obtenidos y el estudio de las propiedades de las frecuencias relativas de los sucesos asociados a los experimentos reales o simulados. Se supone que esta metodología ayudará a superar las dificultades y obstáculos que, sobre el desarrollo de la intuición estocástica, han descrito distintos autores, como Fischbein y Gazit (1984), Fischbein *et al.* (1991), Kahneman *et al.* (1982).

Pero toda secuencia de resultados obtenidos en la repetición sucesiva de un mismo experimento un número dado de veces, que representa al fenómeno simulado, es en realidad una realización o trayectoria de un proceso estocástico en tiempo discreto. Estos procesos se caracterizan por dos aspectos: En primer lugar la variabilidad local e imprevisibilidad de su comportamiento, que debe hacerse en términos probabilísticos. En segundo lugar, la regularidad global manifestada por la convergencia o estabilidad de las frecuencias.

El segundo de estos aspectos se comprende intuitivamente, especialmente en aquellos casos en que las probabilidades teóricas pueden también ser calculadas mediante las propiedades de simetría de los sucesos elementales o mediante razonamientos de tipo geométrico. Esta regularidad global es reforzada habitualmente en la enseñanza elemental, especialmente la basada en la experimentación y simulación.

Sin embargo, la variabilidad de los procesos estocásticos produce resultados experimentales contraintuitivos, que podrían ser mostrados y dar lugar a la discusión de los mismos con ocasión de la realización de esas mismas experiencias. Pensamos que éste es un aspecto descuidado en la enseñanza de la probabilidad que plausiblemente tenga repercusión en la persistencia de sesgos en el razonamiento probabilístico, aún después de una instrucción sobre el tema, descrita por diferentes investigadores (Fischbein, 1975; Kahneman *et al*., 1982; Shaughnessy, 1992)

En nuestra Memoria de Tercer Ciclo (Serrano, 1993), sugerimos también que el nuevo enfoque de la enseñanza pudiera no ser tan sencillo como se ha supuesto. Hay al menos tres fuentes diferentes de posibles dificultades de aprendizaje, si la enseñanza se realiza según la metodología sugerida en estos diseños curriculares:

- El uso de heurísticas, como la *representatividad* y la existencia de sesgos en la asignación de probabilidades a los sucesos. De acuerdo con la representantividad los sujetos evalúan la probabilidad de un suceso tomando como referencia sólo el parecido con la población de la que proviene y olvidando la variabilidad de los procesos de muestreo (Kahneman *et al*., 1982; Pérez Echeverría, 1990; Serrano, 1993). Otro sesgo importante es la *equiprobabilidad* (Lecoutre y Durand, 1988; Lecoutre, 1992), por el cual los sujetos generalizan indebidamente la regla de Laplace, aplicándola en situaciones en las que no es pertinente.
- La falta de apreciación de características básicas de las secuencias aleatorias, como existencia de rachas, independencia de los ensayos, propiedad de pérdida de memoria, etc. (Green, 1988, 1989).
- La interpretación incorrecta de enunciados de probabilidad desde el punto de vista frecuencial, esto es el "outcome approach" (enfoque en el resultado) descrito por Konold (1989). Según este autor ciertos sujetos interpretan las afirmaciones probabilísticas como referidas a la predicción de un resultado en un solo experimento y no a la frecuencia de aparición de un resultado en una serie de ensayos. No consideran equivalentes las repeticiones del mismo experimento aleatorio.

A la vista de estas posibles fuentes de dificultades, creemos necesario estudiarlas con mayor profundidad y evaluar su incidencia en los estudiantes a los que van dirigidas las nuevas propuestas. También se deberá explorar su estructura de relaciones, así como su estabilidad, con el fin de proporcionar a los profesores información necesaria para detectar los posibles problemas en los estudiantes. Estos son los fines generales de nuestra investigación, cuya consecución se abordará en una doble vertiente teórica y práctica. Como resultado, esperamos también obtener instrumentos validados de evaluación de los significados personales que los alumnos de secundaria asignan intuitivamente a estas nociones, que podrían ser empleados con finalidad diagnóstica al iniciar la enseñanza de la probabilidad.

1.2.2. RESUMEN DEL MARCO TEÓRICO UTILIZADO

Esta tesis doctoral no ha sido realizada de forma aislada dentro de esta problemática, sino que forma parte del trabajo realizado dentro del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en dos líneas de investigación. La primera de ellas es la Didáctica de la Probabilidad y Estadística, en la que ya se han finalizado anteriormente las tesis doctorales de Estepa (1993), Vallecillos (1994) y Navarro-Pelayo (1994). Además de ello, se inscribe en la línea de investigación sobre Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática. Más particularmente, pretende contribuir a ejemplificar el análisis teórico sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su significado, que es uno de los Proyectos de investigación actualmente en curso dentro de esta línea de investigación.

En consecuencia, se ha empleado como principal marco teórico de nuestro estudio la teoría desarrollada en Godino y Batanero (1994), (en prensa), de la cual presentamos a continuación un resumen.

El punto de partida de dicho trabajo es considerar la Matemática desde un triple punto de vista:

a) como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida.

b) como lenguaje simbólico.

c) como sistema conceptual lógicamente organizado.

A partir de las ideas de *problema* y *campo de problemas*, se definen los conceptos teóricos de *práctica*, *objeto* (personal e institucional) y *significado* (personal e institucional), con el fin de tener en cuenta este triple carácter de la Matemática, así como la génesis personal e institucional del conocimiento matemático. Esta teoría está apoyada en los trabajos de Chevallard (1989, 1992) sobre *práctica, objeto y relación al objeto* y en las teorías pragmáticas del significado (Wittgenstein, 1953).

Generalmente los problemas no aparecen aislados, sino englobados en campos de problemas para los cuales puede ser válida la misma solución o soluciones parecidas. En particular, en esta investigación nos interesamos por el campo de problemas del que surgen las nociones de experimento, suceso y sucesión aleatoria. Uno de estos problemas es el siguiente, usado como ítem en nuestro cuestionario (Anexo 2):

Se pidió a cuatro niños lanzar una moneda 40 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Pusieron C para indicar una cara y X para indicar una cruz. Este es el resultado de Daniel:

C X C X X C C X C X C C X X C X X C C X X C X C C X X C X C X C X C X C X X C X

¿Hizo trampas Daniel? ¿Por qué?

Otros problemas semejantes se obtendrían cambiando las variables de tarea de este ítem, en particular el número de caras y cruces en la secuencia planteada, la longitud de la racha más larga o el número total de rachas. También podríamos considerar más de dos posibles resultados o analizar una distribución en el plano como las que se proponen a los alumnos en el ítem 4 del cuestionario.

Puesto que este campo es muy amplio, lo restringiremos a subconjuntos de problemas que se describirán con más detalle en los siguientes apartados, como por ejemplo, la generación de secuencias de resultados similares a los que se esperan obtener mediante una moneda equilibrada o el reconocimiento de secuencias de resultados obtenidos de una moneda equilibrada y su discriminación respecto a los que se obtendrían con una moneda sesgada, situaciones que se abordan en el capítulo 3.

Los autores citados llaman *práctica* a toda actuación o manifestación realizada para resolver problemas matemáticos. Como tales prácticas citamos: descripción de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones y procedimientos que son invariantes característicos del campo de problemas, argumentaciones, etc.

Una práctica es *significativa* (o tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas. Consideramos de interés esta definición para nuestra investigación, uno de cuyos objetivos será describir las prácticas de los alumnos en la resolución de las situaciones problemáticas propuestas. Así, para discriminar secuencias de resultados obtenidos usando una moneda sesgada, los alumnos de nuestra muestra han calculado la frecuencia de aparición de cada uno de los resultados posibles (cara y cruz) y lo han comparado con la proporción ½ que esperarían obtener con una moneda correcta. Cuando la diferencia entre esta frecuencia esperada y la observada en los problemas propuestos les ha parecido excesiva, han considerado que la secuencia no es aleatoria. Esta práctica lleva implícita el reconocimiento de ciertas características matemáticas de las secuencias de resultados aleatorios y es de una gran complejidad, ya que lleva el germen de varios de los componentes de un test de aleatoriedad.

En general, el estudio didáctico se interesa por los invariantes operatorios puestos de manifiesto por las personas en su actuación ante situaciones problemáticas, no por las muestras particulares de las mismas, es decir trata de caracterizar las *prácticas prototípicas*. Generalmente se utiliza más de una práctica diferente en relación a un campo de problemas, por lo que hablamos del *sistema de prácticas* asociadas a un campo de problemas. Otra práctica significativa para el alumno en los problemas propuestos ha sido identificar las rachas largas. Si encuentra una racha de cuatro o cinco caras o cruces seguidas, rechaza la sucesión como no aleatoria, pensando que se ha hecho trampas.

Debido al carácter subjetivo con que se dota esta definición, se diferencia entre *prácticas personales* y *prácticas institucionales* asociadas a un mismo campo de problemas. Las primeras pueden variar de un sujeto a otro y las segundas son compartidas socialmente en una misma institución.

Una *institución* está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. La institución matemática (M) es el conjunto de personas que en el seno de la sociedad están comprometidas en la resolución de problemas matemáticos. Pero también existen otras instituciones como las escolares o profesionales que podrían estar interesadas en un mismo campo de problemas, los cuales utilizan prácticas diferentes para resolverlos. Esta diferenciación nos parece interesante desde el punto de vista didáctico, porque permite recoger en un único marco tanto los procedimientos y soluciones a los problemas que la institución considera correctos como los que considera incorrectos, pero que para los alumnos constituirían buenas soluciones al problema planteado. El primer ejemplo de práctica que antes hemos citado es correcto desde el punto de vista de la institución matemática, pero en nuestra investigación los alumnos han utilizado otras prácticas, que serían consideradas incorrectas desde el punto de vista matemático, como la segunda práctica consistente en rechazar las rachas largas en las secuencias aleatorias.

A partir de la actividad de resolución de un campo de problemas y del sistema de prácticas asociadas a un campo de problemas, se produce en la institución la emergencia progresiva de ciertos objetos, productos globales de la actividad constituida por el sistema de prácticas. La emergencia del objeto es progresiva a lo largo de la historia: sucesivamente el objeto es nombrado, generalizado o modificado o bien se emplea para resolver otros campos de problemas. El sistema de prácticas institucionales asociado al objeto se define como *significado institucional del objeto*.

Hay que destacar que de un campo de problemas pueden emerger diversos objetos que, como consecuencia, están mutuamente relacionados. Así mismo, los objetos institucionalmente reconocidos son fuente de nuevos problemas y pueden ser usados como herramientas en la resolución de otros. Esta mutua implicación también se pone de manifiesto en nuestro estudio, donde los conceptos de aleatoriedad, suceso, frecuencia y probabilidad, entre otros, aparecen mutuamente relacionados. En el estudio teórico llevado a cabo en la sección 1.3 se pone de manifiesto la diversidad de objetos matemáticos relacionados con la problemática de discriminar (o definir) las secuencias aleatorias.

La noción de significado, elaborada por Godino y Batanero (1994), permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y dependencia institucional. El análisis semiótico de los objetos institucionales implica la consideración de las situaciones problemáticas y los objetos que intervienen en las actividades de resolución correspondientes.

Similarmente, el aprendizaje del sujeto se produce mediante la emergencia progresiva del *objeto personal* a partir del sistema de prácticas personales que manifiesta la persona para resolver el campo de problemas. Este sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas constituye el *significado personal del objeto*.

En consecuencia, de un mismo campo de problemas C que en una institución ha dado lugar a un objeto O_I con significado $S(O_I)$, en una persona puede dar lugar a un objeto O_p con significado personal $S(O_p)$. La intersección de estos dos sistemas de prácticas es lo que desde el punto de vista de la institución se consideran manifestaciones correctas, esto es, lo que la persona "conoce" o "comprende" del objeto O_I desde el punto de vista de I.

Con los constructos genéricos de *objetos* y *significados* (personales e institucionales) los autores persiguen básicamente dos objetivos:

- distinguir las entidades emergentes (objetos) del sistema de prácticas de donde provienen; este sistema de prácticas es nombrado como "significado del objeto" correspondiente.
- distinguir las entidades psicológicas (personales) de las entidades epistemológicas (institucionales), que tienen un carácter colectivo o sociocultural.

Estas diferenciaciones nos parecen esenciales para evitar un enfoque exclusivamente psicológico al estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos en las instituciones escolares.

La diferenciación entre el objeto (emergente inobservable de un sistema de prácticas) y el significado del mismo (sistema observable de prácticas), que hacen los autores, supone también el reconocimiento de la problemática de la evaluación de los conocimientos de los alumnos. Estos conocimientos tendrían un carácter inobservable, y su naturaleza se infiere de las prácticas explicitadas durante la resolución de los problemas propuestos. Estas prácticas serían los indicadores empíricos utilizables en la evaluación de dicho conocimiento.

1.2.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN E INTERÉS DE LOS MISMOS

El objetivo general del trabajo que presentamos ha sido realizar una descripción de la evolución del significado del objeto "aleatoriedad" en la institución matemática hasta llegar a su versión formalizada utilizada en la actualidad y compararlo con el significado que las muestras de alumnos participantes en la investigación asignan a dicho objeto. Esta comparación permitirá realizar también una interpretación de diferentes trabajos de investigación en el campo de la Didáctica de la Probabilidad, desde una perspectiva conjunta. Este objetivo general se puede descomponer en los siguientes objetivos parciales:

Objetivo 1: Analizar desde el punto de vista epistemológico los diversos significados asociados al término "aleatoriedad" en su emergencia histórica en la institución matemática, llegando a una descripción simplificada del significado actual del término.

Como resultado de este análisis, que se presenta en el apartado 1.3, llegaremos a mostrar la complejidad de este significado que conduce a una colección de modelos estocásticos implícitos en las secuencias aleatorias. Debido a la dificultad y amplitud del tema, nos hemos restringido a tipos muy simples de secuencias aleatorias, como la sucesión de ensayos de Bernoulli, el proceso puntual de Poisson en el plano y los recorridos aleatorios. Incluso para estos modelos sencillos, el análisis presentado no es completo, sino que se limita a sus propiedades más elementales. A pesar de ello, la complejidad del tema se hace patente, lo que puede dar una explicación de tipo epistemológico al gran número de sesgos descritos sobre el razonamiento estocástico en sujetos, incluso adultos.

Objetivo 2: Realizar un estudio teórico de las investigaciones previas sobre percepción subjetiva de la aleatoriedad y sobre heurísticas y sesgos en la asignación de probabilidades, usando los resultados del estudio del significado institucional de la aleatoriedad, para presentar una perspectiva de síntesis de las mismas.

La percepción subjetiva de la aleatoriedad, el empleo de heurísticas y la interpretación de enunciados frecuenciales de probabilidad han sido, hasta la fecha, estudiadas en forma aislada, aunque algunos autores como Green (1983 b, 1988) han incluido este tipo de cuestiones dentro de instrumentos más comprensivos sobre el razonamiento probabilístico. Deseamos hacer una síntesis de estas investigaciones, interpretándolas desde el punto de vista de nuestro marco teórico.

Por otro lado, las investigaciones sobre el reconocimiento y generación de sucesiones aleatorias han sido con frecuencia criticadas. Puesto que el significado del objeto "aleatoriedad" es complejo, es demasiado simple estudiar si un sujeto reconoce o no una sucesión como aleatoria. Mediante nuestro análisis, que se presenta en la sección 1.4, queremos mostrar que el objeto "aleatoriedad" está en realidad compuesto de una serie de modelos que el sujeto aplica para discriminar las situaciones y secuencias aleatorias. La falta de reconocimiento de estas secuencias y situaciones no es una cuestión simple, sino que será debida a la falta de aplicación de alguno de los modelos particulares, que variará en los distintos individuos y en función de las variables de tarea de los ítems propuestos. Muchos de estos modelos no son intuitivos, por lo que no debe esperarse que el sujeto los aplique antes de la instrucción.

Objetivo 3.- Preparar instrumentos que puedan ser empleados para evaluar sobre los mismos alumnos los tres aspectos señalados (percepción subjetiva de la aleatoriedad, uso de heurísticas e interpretación de la probabilidad frecuencial).

Usaremos dos tipos de instrumentos, que constituirán también un resultado de nuestra investigación, puesto que podrán ser empleados en la futura enseñanza del tema, para diagnosticar dificultades específicas de los estudiantes y evaluar la efectividad de propuestas de enseñanza. Estos instrumentos serán los siguientes:

a) Cuestionario de papel y lápiz, que puede proporcionar información sobre una muestra amplia de estudiantes.

b) Guiones de entrevista que se emplearán con un número restringido de participantes, con el fin de estudiar con mayor profundidad los aspectos de interés. En la entrevista, se usará la simulación de fenómenos aleatorios, para evaluar la estabilidad de los significados personales y el efecto de las simulaciones sobre las mismas.

Asimismo pretendemos incluir en el estudio un nuevo tipo de ítem no utilizado hasta la fecha, salvo en nuestra Memoria de Tercer Ciclo (Serrano, 1993). Se trata de cuestiones relativas a los recorridos aleatorios en el plano, en el contexto de juego de apuestas, que permite evaluar también el significado que los alumnos atribuyen a la noción de esperanza matemática.

Objetivo 4.- Realizar una descripción y análisis del significado que los estudiantes de secundaria atribuyen a las sucesiones aleatorias y otros objetos matemáticos involucrados en las mismas y estudiar la estructura de dichos significados personales.

Este objetivo se alcanzará mediante la obtención de datos, a partir de una muestra de estudiantes de secundaria con los instrumentos citados. La recogida de datos se llevará a cabo con estudiantes de 14 y 18 años, por lo que un resultado adicional será la comparación de las respuestas obtenidas en estos dos tipos de estudiantes. Ellos nos permitirán evaluar hasta qué punto los sesgos y dificultades de los estudiantes son estables o bien se produce una evolución favorable en los estudiantes con la edad y la enseñanza actual de la probabilidad en bachillerato.

Asimismo este estudio incluirá un análisis comparado de nuestros resultados con anteriores investigaciones, en particular las de Green (1983 b, 1988, 1991), Lecoutre y Durand (1988), Lecoutre (1990) y Konold (1989, 1991).

En la literatura de investigación en Didáctica de la Matemática se utilizan distintas expresiones como: concepciones, intuiciones, representaciones mentales, esquemas o marcos mentales, invariantes operatorios, etc, para referirse a la variedad de entidades psicológicas que surgen cuando se estudian los procesos de cognición humana. Cada expresión es usada dentro de diversas comunidades o paradigmas de investigación, con matices diferenciados más o menos nítidos y relevantes.

Todas estas expresiones designan abstracciones o generalidades emergentes de sistemas de prácticas que realizan los sujetos cuando se enfrentan a cierta clase de situaciones - problemas. Por tanto, y dentro del marco teórico elegido para nuestra investigación, estas expresiones serían asimilables a los "*objetos personales o mentales*". Remitimos al trabajo de Godino y Batanero (1994) donde se analizan las relaciones entre estos constructos.

En esta investigación empleamos, en ocasiones, algunas de las expresiones anteriores, en especial las de "concepciones" e "intuiciones". Estos términos son habitualmente utilizados en la literatura especializada del campo de la probabilidad con un sentido compatible al de "objeto personal" de nuestro marco teórico.

1.3. FUNDAMENTOS EPISTEMOLÓGICOS Y MATEMÁTICOS

1.3.1. INTRODUCCIÓN

Las cuestiones epistemológicas ocupan un lugar fundamental en la reflexión de las personas interesadas por el aprendizaje de las matemáticas. Ello es debido a que los obstáculos surgidos históricamente en la formación de los conceptos se reproducen, con cierta frecuencia, en los alumnos. Otras veces, los estudios de tipo epistemológico pueden ayudar a comprender las dificultades de los alumnos en el uso de los conceptos para la resolución de problemas.

El cálculo de probabilidades ocupa una situación muy particular a este respecto, ya que, a pesar de contar con una axiomática satisfactoria, prosiguen las controversias sobre la interpretación de conceptos básicos, como los de probabilidad o independencia. Estas controversias no son de tipo técnico, ya que el cálculo de probabilidades, como tal, no plantea contradicciones ni paradojas, como ocurriera en el caso de la teoría de conjuntos, ni se han propuesto otras axiomáticas que compitan con éxito con la de Kolmogorov. Los problemas que la axiomatización no ha resuelto se refieren a la naturaleza de los objetos que se analizan por medio de la probabilidad. Como indica Matalón (1979), "*de modo más o menos explícito, todos los teóricos admiten que el cálculo de probabilidades formaliza algo que, en cierto sentido "existe" en todas partes; las divergencias se refieren a la naturaleza de ese "algo", el cual estaría representado a través de la probabilidad del matemático"* (pág. 121).

En esta sección vamos a presentar un análisis epistemológico y matemático -desde una perspectiva didáctica- de los conceptos y modelos estocásticos sobre los que versa nuestra investigación. Comenzamos con el análisis de la noción de aleatoriedad, la cual, junto con la idea de probabilidad es el punto de partida del cálculo de probabilidades. El interés y necesidad de este estudio nos parece claro, ya que la mayor parte de los nuevos currículos de matemáticas de los niveles de enseñanza obligatoria proponen intensificar el estudio de los fenómenos aleatorios. Las expresiones "experimento aleatorio", "suceso aleatorio", incluso los sustantivos el "azar", lo "aleatorio", aparecen con frecuencia, tanto en el lenguaje cotidiano, como en los manuales escolares. Pero su significado, al referirse a una entidad abstracta, no queda unívoca y nítidamente determinado. Tanto en la vida ordinaria como en los textos escolares encontramos diferencias en las propiedades asignadas a los experimentos y sucesos aleatorios. (Ortiz de Haro, 1996), (Ortiz de Haro *et al*., 1995).

Como se afirma en Godino y Batanero (1994), el significado de los objetos matemáticos no puede reducirse a su mera definición matemática cuando nos interesamos por los procesos de enseñanza y aprendizaje de los mismos. Las diversas situaciones problemáticas y las prácticas que hacen las personas para resolverlos en distintas instituciones y momentos históricos aportan rasgos característicos de las nociones que en ellas intervienen, las cuales deben ser tenidas en cuenta en la enseñanza.

El análisis de los usos de este concepto ha llevado en el siglo XX a diferenciar el proceso (aleatorio) y su resultado, de modo que el interés se centra en la caracterización de las secuencias aleatorias, independientemente del proceso que las genera. La definición matemática de secuencia aleatoria lleva a la repetibilidad e independencia de ensayos, cuya versión más simple es la secuencia de ensayos de Bernoulli y una de sus generalizaciones -el recorrido aleatorio sobre los enteros- , al que dedicamos la segunda sección. Finalmente, analizamos brevemente el proceso de Poisson, que subyace en algunas de las situaciones experimentales que han sido empleadas en los antecedentes de nuestra investigación, así como en el presente trabajo.

1.3.2. ALEATORIEDAD, EXPERIMENTOS Y SECUENCIAS ALEATORIAS

En lo que respecta a la noción de aleatoriedad, veremos que en distintos momentos históricos se ha interpretado de forma diferente y que, incluso en la actualidad, se resiste a una definición sencilla que permita determinar con nitidez si un suceso o una secuencia de sucesos es o no aleatoria. Por este motivo presentaremos una discusión de estas cuestiones, a partir de las reflexiones realizadas por estadísticos, filósofos, psicólogos e investigadores en Didáctica de la Matemática preocupados por este problema. Tomaremos como base una versión previa de este trabajo, ya publicada (Batanero y Serrano, 1995).

Aleatoriedad y causalidad

Una primera acepción de lo aleatorio la podemos encontrar en el diccionario del uso del español de M. Moliner (1983), donde encontramos la siguiente definición: *"Incierto. Se dice de aquello que* *depende de la suerte o del azar", siendo el azar "la supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención humana ni divina*". En este sentido lo aleatorio sería contrapuesto a aquello de lo que se conocen sus causas y el "azar" estaría personificado como una supuesta causa de los fenómenos aleatorios. Correspondería a una primera fase histórica exploratoria en el desarrollo de la idea de aleatoriedad que se extendería, según Bennett (1993) desde la antigüedad hasta el comienzo de la Edad Media. En esta etapa los dispositivos aleatorios como dados o huesos de astrálago se usaron para adivinar el futuro, y tomar decisiones. También se empleaba en los juegos, cuando se quería impedir dar ventaja a alguna de las partes interesadas, puesto que se suponía que lo aleatorio no podía ser controlado humanamente.

Se atribuya o no a fuerzas sobrenaturales, el azar suprimía la posibilidad de que la voluntad, inteligencia o conocimiento humano influenciara en la decisión o en el destino. Poincaré (1936) indicó que los clásicos diferenciaban los fenómenos que parecían obedecer a leyes armónicas, establecidas de una vez para siempre y aquellos que se atribuían al azar, que no podían preverse porque se rebelaban ante toda ley. Según este autor, la aleatoriedad tenía, además, un sentido preciso, objetivo. Lo que era aleatorio lo era para cualquier persona.

Una variante de esta acepción es suponer que todo fenómeno tiene una causa. *"Nada sucede por azar sino que todo ocurre por una razón y por una necesidad*" (Leucippus, siglo V a.c., citado por Bennet). Es debido a nuestra ignorancia por lo que existe "el azar" para nosotros. Incluso lo que es aleatorio para una persona puede no serlo para otra, por lo que, en esta acepción, tendría un carácter subjetivo: *"El azar no es más que la medida de nuestra ignorancia. Los fenómenos fortuitos son, por definición aquellos cuyas leyes ignoramos".* (Poincaré, 1936, pág. 69 de la reproducción en el libro de Newman).

Poincaré encuentra que esta definición no es satisfactoria, ya que ciertos fenómenos cuyas leyes no conocemos son, sin embargo, considerados como deterministas. No sabemos con seguridad por qué, llegados a un punto de envejecimiento morimos, pero la muerte es considerada un hecho seguro, lo mismo que lo será la puesta del sol para un niño o una persona primitiva que desconociera el fenómeno de rotación de la tierra. Además, ciertas teorías físicas, como la teoría cinética de los gases, tienen causas conocidas que son explicadas precisamente mediante leyes probabilísticas. Las leyes que se utilizan para explicar estos fenómenos serían mucho más complicadas si, en lugar de emplear la hipótesis de que las partículas se mueven aleatoriamente, se supusiera que siguen una cierta ecuación de tipo determinista. Por ello, entre los fenómenos de los cuales ignoramos sus leyes, Poincaré diferencia los aleatorios o fortuitos, sobre los cuales el cálculo de probabilidades nos informará provisionalmente y los que no lo son, sobre los cuales no hay posibilidad de predicción hasta que hayamos encontrado las leyes que los rigen.

Para los primeros, incluso el día que encontremos sus reglas, el cálculo de probabilidades no perderá su validez. Así, el director de una compañía de seguros de vida ignora cuándo morirá un asegurado particular. Sin embargo, sus beneficios seguirán siendo los mismos, incluso cuando conociese el tiempo de vida que queda a cada uno de estos asegurados, porque la distribución estadística de esta población sería la misma, independientemente de este conocimiento; por tanto, estos beneficios no son fruto de su ignorancia. Como indica Ayer (1974) un fenómeno se considera aleatorio si se comporta de acuerdo al cálculo de probabilidades.

Una causa muy pequeña determina a veces un efecto considerable y decimos que el resultado es aleatorio, porque la predicción resulta imposible. Es el caso de la meteorología o del juego de la ruleta. En otros casos, como en la teoría cinética de los gases, al barajar las cartas o en la teoría de errores, es la complejidad o multitud de las causas lo que determina un resultado aleatorio.

En definitiva, la interpretación de lo aleatorio como contrapuesto a lo causado o como un tipo especial de causación no es, en general, adecuada. A este respecto Ayer (1974) diferencia cinco razones respecto a los cuales puede decirse que algunas cosas suceden por azar o que un suceso es aleatorio, que son las siguientes:

1) Un suceso se considera aleatorio si es miembro de alguna serie que se conforma de acuerdo con el cálculo de probabilidades. Esto no implica que el suceso no resulte causado. Una consecuencia del uso del término en este sentido es que cuando la frecuencia con la cual un cierto suceso ocurre, tiene una desviación significativa respecto al valor esperado, nuestra inclinación nos lleva a afirmar que esta desviación no puede ser atribuida al azar.

2) Existen casos en los cuales una de las razones para afirmar que un suceso ocurre por azar es precisamente que constituye una desviación con respecto a una frecuencia establecida. Este es el sentido, por ejemplo, con que hablamos del azar de las mutaciones en biología. Una acepción semejante ocurre en ciertos acontecimientos históricos, donde consideramos la causa inconmensurable con el efecto.

3) Cuando hablamos de sucesos causados por azar por seres humanos u otros agentes, significa que no estaba en la intención del agente este suceso. Por tanto azar aquí no sería sinónimo de falta de causa, sino de falta de intención o de resultado no previsto a partir de la causa.

4) Hablamos de coincidencias por azar de sucesos, cuando su concurrencia no es intencionada y, aunque podemos explicar cada uno de ellos por separado, no encontramos razón que los una entre sí. En general hablar de sucesos que aparecen juntos por azar no significa que no estén conectados en alguna forma o que no se descubrirá nunca alguna ley que los coordine. Implica que una ley de tal tipo no figura en nuestro sistema aceptado de credibilidad.

5) En el caso de generalizaciones estadísticas se puede decir cuáles, entre los individuos que se encuentran bajo tal generalización, poseen esta propiedad en cuestión, por ejemplo el sexo o un cierto oficio. Esta acepción del azar es la única en la cual está implícito el que los sucesos individuales mismos no han admitido una regulación mediante leyes causales.

Finalmente Ayer (1974) sugiere que existe aún otra razón importante por la cual se puede afirmar que el azar se introduce en el mundo. Aunque es un campo bien determinado por leyes causales, la imprecisión de los instrumentos de medida hace que las observaciones de los fenómenos contengan un "error aleatorio de medición".

Aleatoriedad y Probabilidad

Al surgir el cálculo de probabilidades, se relaciona la aleatoriedad con la equiprobabilidad, que se basa en el principio de indiferencia. Esto es debido a la relación de los primeros desarrollos teóricos con los juegos de azar, en los que el número de posibilidades era finito y el principio de indiferencia podía considerarse razonable. Esta interpretación se encuentra, por ejemplo, en el Liber de Ludo Aleae de Cardano. Bennett (1993) indica que, hacia el final del siglo XVIII y principios del XIX, hay un desplazamiento de las situaciones consideradas aleatorias, desde el mundo de los juegos de azar al de los fenómenos naturales. Paralelamente, se produce un cambio en el concepto de aleatoriedad, que se hace progresivamente más formalizado. Se introduce el concepto de "independencia", que se considera un requisito imprescindible para asegurar la aleatoriedad de un suceso en sucesivos experimentos repetidos. Sin embargo, el resultado de un experimento aleatorio es para estos autores determinado pero desconocido, dependiente de la ignorancia del hombre.

También, actualmente, la noción de aleatoriedad se explica, a veces, en términos de probabilidades y esta explicación dependerá de la concepción subyacente respecto a la probabilidad. En lo que sigue, nos referiremos a las concepciones clásica (o laplaciana), frecuencial y subjetiva que se describen con detalle en Borovcnik *et al.* (1991) y Godino *et al.* (1988). En un concepto clásico de probabilidad decimos que un objeto (o un suceso) es un miembro aleatorio de una cierta clase, si la probabilidad de este objeto es igual que la de cualquier otro miembro de su clase. Aunque esta definición, en principio, es suficiente para los juegos de azar basados en dados, monedas, cartas, extracción de bolas en urnas, etc., podemos aplicarle las mismas críticas que se atribuyen a la concepción laplaciana de la probabilidad. Es difícil, a partir de esta definición, discriminar un miembro aleatorio o no aleatorio en una clase dada. Por ejemplo, ¿cómo sabemos que una moneda dada o un dado, no están ligeramente sesgados?

Kyburg (1974) sugiere que este método de definir la aleatoriedad impone restricciones severas y no naturales a la aplicación de esta idea. Sólo podríamos decir que un objeto es un miembro aleatorio de una clase, si la clase es finita. Si fuese infinita, entonces la probabilidad de cada miembro de la clase siempre sería nula (por tanto idéntica), aunque el método de selección fuese sesgado. ¿Qué ocurriría, además, en el caso de sucesos elementales no equiprobables? Sin embargo, la idea de equiprobabilidad es muy atrayente para definir la aleatoriedad, como se ve, por ejemplo, al definir las muestras aleatorias -todos los elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos- o la asignación aleatoria de sujetos a los experimentos -cada sujeto tiene la misma probabilidad de ser asignado al grupo experimental o al control.

Cuando desplazamos la aplicación de la idea de probabilidad a situaciones del mundo físico o natural, como por ejemplo, el grupo sanguíneo de un recién nacido o cualquier otra característica hereditaria, nos encontramos con que no podemos aplicar el supuesto de equiprobabilidad. Podríamos decir, en estos casos, que un objeto es un miembro aleatorio de una clase si pudiéramos elegirlo mediante un método que proporcionase a cada miembro de la clase una cierta frecuencia relativa "a priori" a la larga . Usaríamos, en estos casos, la concepción frecuencial, que es especialmente adecuada cuando disponemos de estadísticas registradas sobre un gran número de casos, como en los ejemplos citados. Tendríamos, sin embargo, el problema teórico de decidir el número necesario de experimentos para considerar que, a partir de este número, habríamos probado suficientemente el carácter aleatorio del objeto.

En estas dos acepciones, la aleatoriedad es una propiedad "objetiva" que se asigna al suceso o elemento de una clase, como podría asignársele un color o un sexo, si se trata de una persona. Kyburg (1974) critica esta visión y propone una interpretación de la aleatoriedad compuesta de cuatro términos, que son los siguientes:

- el objeto que se supone es miembro aleatorio de una clase.
- el conjunto del cual el objeto es un miembro aleatorio (población o colectivo).
- la propiedad con respecto a la cual el objeto es un miembro aleatorio de la clase dada.
- el conocimiento de la persona que emite el juicio de aleatoriedad.

Si un objeto es o no considerado como miembro aleatorio de una clase, depende, en esta interpretación, de nuestro conocimiento sobre el mismo. Lo que puede ser aleatorio para una persona puede no serlo para otra. La aleatoriedad no es una propiedad física "objetiva", sino que tiene un carácter subjetivo. Reconocemos en esta definición el paralelismo con la concepción subjetiva de la probabilidad, por la que todas las probabilidades serían condicionales. Esta visión sería más adecuada en las situaciones en que poseemos cierta información, que puede cambiar nuestro juicio sobre la aleatoriedad o la probabilidad de un suceso.

Para Kyburg hay cierta clase de situaciones que todo el mundo consideraría aleatorias, y donde el uso de la idea de equiprobabilidad para definir un suceso aleatorio parece claro y no controvertido. Por ejemplo, en el caso de un dado equilibrado, cualquier lanzamiento es simplemente un ejemplo de cualquier otro posible lanzamiento. No hay nada nuevo que podamos conocer acerca del dado que nos permita predecir otra probabilidad diferente de 1/6 para un resultado particular del dado.

En otros casos la situación no es tan clara. Consideremos, por ejemplo, la probabilidad de que un individuo particular viva más de 35 años. Es verdad que poseemos información estadística sobre sus posibilidades de supervivencia a esta edad, pero hay muchas consideraciones que podrían influenciar un cambio en esta probabilidad, si tuviésemos que estimarla. Por ejemplo, el hecho de que el sujeto sufriera una cierta enfermedad como cáncer o sida o que fuese piloto de carreras.

En este ejemplo reconocemos la importancia de elegir la clase de referencia adecuada para juzgar la probabilidad de un cierto suceso. Asimismo podemos ver aquí la importancia del cuerpo de conocimientos, puesto que, si el sujeto en cuestión sufre una enfermedad muy grave y lo supieramos, nos llevaría a hacer una estimación diferente de su esperanza de vida.

Procesos y secuencias aleatorias

Para Zabell (1992) la idea de aleatoriedad contiene dos aspectos distintos que, a veces, pueden no coincidir, que son:

- el proceso de generación, que es lo que, matemáticamente, se conoce como experimento aleatorio;
- el patrón de la secuencia aleatoria producida como consecuencia del experimento.

Hasta ahora hemos considerado que estos dos aspectos están ligados entre sí, ya que esperamos que un proceso aleatorio proporcione un patrón de resultados aleatorios. Veremos que estos dos aspectos son separables.

En primer lugar, puede haber secuencias que, aparentemente, parezcan aleatorias, siendo producidas por un proceso completamente determinista. Consideremos, por ejemplo la secuencia 32823066470938446095. Por su aspecto, parece ser una secuencia aleatoria de números. Pero es, en realidad, la expresión de los dígitos decimales 111 al 130 del número B . Aunque el patrón que sigue esta secuencia parezca aleatorio, el proceso que la genera no lo es, porque siempre obtendremos la misma secuencia de cifras como resultado del "experimento".

Por otro lado, incluso una secuencia aparentemente regular y determinista, como 100100100, puede obtenerse como resultado de un experimento aleatorio. Esta secuencia particular es tan probable como cualquier otra secuencia de ceros y unos obtenida en 9 ensayos en que los valores 1 y 0 sean equiprobables. Su probabilidad será 2^{-9}. Si repetimos el experimento un número mayor que 2^{9} veces, cabe esperar que se obtenga alguna vez la sucesión dada por azar.

No fue hasta finales del siglo XIX cuando el empleo de la estadística en la investigación aplicada empezó a basarse en la elección de muestras aleatorias de datos, a partir de los trabajos de Edgeworth, Galton, Pearson, Fisher y sus colaboradores. Anteriormente, los estudios estadísticos estaban basados en la recogida de datos empíricos masivos, esto es, tenían un carácter descriptivo de poblaciones completas, más que un carácter inferencial. En los casos en que se utilizaban muestras, éstas no se elegían al azar, porque no se era consciente de la importancia de elegir muestras aleatorias para poder realizar inferencias válidas y precisas sobre la población. Cuando los desarrollos teóricos empiezan a mostrar la importancia de este punto, empieza el interés por encontrar modelos de procesos que aseguren la consecución de largas secuencias de dígitos aleatorios. Éstas serían utilizadas para elegir muestras aleatorias en las aplicaciones estadísticas.

Procesos que generan sucesiones aleatorias

Hay tres modelos básicos de procesos que se emplean para generar secuencias aleatorias: dispositivos físicos; las tablas de números aleatorios y los generadores de números pseudoaleatorios.

Ciertos procesos físicos pueden generar resultados aleatorios, como, por ejemplo, elegir a ciegas una bola de una urna llena de bolas de distinto color. Este tipo de dispositivos - dados; ruletas; bombos con fichas,...- es el sistema más antiguo, familiar y natural de obtener tales resultados aleatorios. Es el método que también empleamos en clase con nuestros alumnos, aprovechando el interés que muestran por los juegos de azar. Sin embargo, es muy difícil conseguir construir dispositivos que aseguren la aleatoriedad física perfecta, por ejemplo, asegurar que un dado asigne exactamente una probabilidad 1/6 a cada una de sus caras. Además, es un procedimiento lento si queremos obtener una serie larga de resultados aleatorios.

Debido a la dificultad de disponer con suficiente rapidez de secuencias aleatorias largas con dispositivos físicos, se crean las tablas de números aleatorios. Lord Kelvin y Tippet se encuentran entre los pioneros en la construcción de las mismas. Otras tablas notables son las de Fisher y Yates publicadas en 1938, o las de Kendall y Babbington- Smith en 1939, culminando en la publicación de la corporación RAND "Un millón de dígitos aleatorios" en 1955. Este tipo de tablas puede también ser usado en clase con los alumnos de educación secundaria.

El tercer método importante para generar números aleatorios consiste en el uso de una fórmula, es decir, mediante los llamados "números pseudoaleatorios". Con ayuda de un algoritmo de ordenador, se produce una secuencia numérica que puede ser empleada como aleatoria para los propósitos prácticos. La mayor parte de los ordenadores traen incorporadas este tipo de órdenes, con lo que podemos cómodamente obtener sucesiones aleatorias dentro de una magnitud numérica y longitud deseada. Asimismo, podemos obtener sucesiones aleatorias extraídas de distintos tipos de distribución teórica, como la distribución normal con una cierta media y varianza.

Formalización de la idea de aleatoriedad

Con las tablas de números aleatorios surgió la preocupación de asegurar la "calidad" de los mismos. Estas condiciones implican una serie de propiedades que cumplen las secuencias de resultados aleatorios. La obtención de números pseudo-aleatorios con ayuda de algoritmos deterministas sugirió también que debía examinarse la sucesión producida, independientemente del proceso por el cual había sido generada. En el siglo XX se llevan a cabo estas discusiones, que llevarían a la formalización del concepto.

Fine (1973) discute algunas de las aproximaciones que se han usado para definir lo que sería una sucesión aleatoria. La reflexión sobre este tema partió de la idea intuitiva de que una sucesión debería ser considerada como aleatoria si nos llevara al convencimiento de que es imposible inventar un método que nos permita ganar en un juego de azar cuyos resultados fuesen los de la sucesión dada; o bien de la visión de la sucesión aleatoria como altamente irregular o compleja. A continuación presentamos estos dos enfoques:

Enfoque de los algoritmos de selección

Von Mises introdujo la idea de colectivo, como fenómeno de masas, suceso repetitivo o larga serie de observaciones, para las cuales hay razones suficientes para creer en la hipótesis de que la frecuencia relativa de un suceso tiende a un límite fijo: "*Ahora debemos introducir un nuevo término que será muy útil en el curso futuro de nuestra argumentación. Esta palabra es "colectivo" y denota una serie de acontecimientos o proceso semejantes que difieren en ciertos atributos observables"..." El principio que se halla encerrado en esta forma de tratar la probabilidad es el de que un colectivo puede existir antes de que comencemos a hablar de probabilidad"* (Von Mises, 1946, pág. 29) "*En el futuro sólo consideraremos tales sucesiones de acontecimientos u observaciones que satisfacen la condición de ser reacias a toda ley o arbitrarias, y nos referiremos a ellas como a colectivos*" (pág. 45).

A partir de esta idea, definió la aleatoriedad en una secuencia de observaciones, empleando el término "azar" proponiendo una propiedad para todas sus posibles subsucesiones. Esta propiedad consiste en exigir que la frecuencia relativa de cada posible suceso en la sucesión aleatoria sea invariante en todas sus posibles subsucesiones: *"Un colectivo apropiado para la aplicación de la teoría de la probabilidad debe satisfacer dos condiciones. En primer lugar, la frecuencia relativa de los atributos debe poseer valor límite. En segundo, estos valores límite no deben alterarse en las sucesiones parciales que podamos seleccionar de la original*" (pág. 46).

Dicho de otra forma, en una secuencia aleatoria no se puede encontrar un algoritmo por el cual seleccionar una subsecuencia en la cual la frecuencia relativa de uno de los resultados se vea afectada. Supongamos, por ejemplo, que al elegir todos los elementos pares, o cada diez elementos, o todos los elementos primos en una sucesión de caras y cruces obtenidas al lanzar una moneda obtuviese una secuencia en la que la probabilidad de cara fuese 2/3. Consideraría, entonces, que la secuencia dada no era realmente aleatoria, ya que podría obtener ventaja en un juego de azar apostando a favor de la cara cada dos, diez jugadas o en las jugadas número primo.

Kolmogorov formalizó la idea de Von Mises, sugiriendo que, dada una sucesión binaria S_n formada por ceros y unos, de longitud mayor o igual que n , sería aleatoria (n,) con respecto a una familia finita Þ de algoritmos admisibles {Ý }, si existe algún p tal que las frecuencias relativas de unos en las subsucesiones S_n de longitud igual o mayor que n, generadas al aplicar {Ý} a S_n todas se aproximan a p en menos de . Es decir, la frecuencia relativa en esta sucesión finita es aproximadamente invariante respecto a cualquier método de selección de una subsucesión de longitud mínima n.

¿Cómo escoger la familia Þ? Esta familia es una familia de contrastes sobre las posibles regularidades de la sucesión; (propiedades que pudiesen emplearse para obtener ventajas por parte de un jugador en un juego de azar). Esta definición es intuitiva en el caso de sucesiones infinitas. El problema, cuando observamos una sucesión finita, es que si tomamos una colección Þ suficientemente amplia, uno de los algoritmos podría llevarnos a, razonablemente, rechazar S_n como no aleatoria. Por ejemplo, en una sucesión finita de longitud n formada por ceros y unos, sólo hay 2^n sucesiones binarias distintas, por lo que nunca obtendríamos una sucesión aleatoria finita no trivial de longitud dada.

Esta definición de aleatoriedad es, sin embargo, la base de los contrastes de aleatoriedad por los cuales se prueban las tablas de números aleatorios, antes de ponerlas en uso en la comunidad científica. Sin embargo, puesto que todo contraste de hipótesis siempre lleva asociado una posible probabilidad de error, nunca podríamos tener total seguridad de que una sucesión dada, a pesar de haber pasado todas las pruebas, tuviese algún tipo de patrón que nos hubiera pasado desapercibido y, por tanto, no fuese totalmente aleatoria.

Enfoque de la complejidad absoluta

Otro intento, debido a Kolmogorov, de definir la aleatoriedad de una sucesión, se basa en su complejidad computacional, que puede definirse a partir de la teoría de autómatas y computabilidad. Si una sucesión cumple la definición de aleatoriedad basada en la complejidad, cumplirá también la definición estadística de aleatoriedad. (Fine, 1973, pág 121).

La complejidad que presenta una sucesión de este tipo es la dificultad de describirla (o almacenarla en un ordenador) mediante un código que nos permita reconstruirla más tarde. El mínimo número de signos necesarios para codificar esta sucesión proporciona una escala para medir la dificultad de almacenarla, o, lo que es lo mismo, su complejidad. El procedimiento de cálculo de S puede ser visto como un algoritmo Ó que acepte como entrada un programa P y genere como salida S_n ; S_n=Ó(P).

En general, puede haber más de un programa que permita primero almacenar y luego recuperar la misma sucesión La complejidad debe ser juzgada a partir de la forma más simple de almacenar la sucesión. Por ejemplo, si comparamos las secuencias:

C C + + C + C C + +
C + C + C + C + C +

vemos que puedo codificar abreviadamente la segunda como 5C+, siguiendo lo sugerido en Konold y Falk (1992). Por el contrario, no puedo codificar la primera con menos de diez caracteres. Por lo tanto la primera sucesión es más compleja que la segunda, ya que precisa más signos para codificarse. Bajo este enfoque, una secuencia sería aleatoria si no se puede codificar en forma más abreviada, por lo que la ausencia de patrones periódicos sería su característica esencial. Es decir, una secuencia sería aleatoria si sólo podemos describirla listando uno tras otro todos sus componentes. Chaitin sugirió que esta definición establece una jerarquía en los grados de aleatoriedad de diferentes sucesiones y que la aleatoriedad perfecta sería vista como un concepto teórico o límite.

Como resumen, y siguiendo a Steinbring (1991), podríamos señalar que el concepto de aleatoriedad se refiere a dos dominios diferentes; formal e informal. Desde el punto de vista informal, hablamos del azar, como patrón que explica aquellos efectos para los que no conocemos la causa o que no son predecibles. Se ha usado para tratar relaciones causa-efecto que parecen demasiado complejas para ser analizadas o en las que no hay una relación determinista entre causa y efecto. Esta interpretación refleja muchos aspectos filosóficos, epistemológicos, sociales y personales y es una importante fuente de confrontación entre las probabilidades subjetivas y objetivas. Desde el punto de vista formal se concreta en la idea de sucesiones aleatorias cuya matematización se ha descrito resumidamente y se estudiará con detalle en la sección 1.3.3.

Implicaciones sobre la practica educativa

A pesar de las dificultades filosóficas y psicológicas descritas, las situaciones aleatorias revisten una gran importancia. El problema de asegurar que una sucesión sea aleatoria sigue teniendo una gran actualidad debido a sus aplicaciones. Los números aleatorios se necesitan hoy para organizar planes de muestreo en la industria y la experimentación médica, sociológica y demográfica. Gracias a los ordenadores, mediante los métodos de simulación, se resuelven problemas probabilísticos muy complejos en física, ecología, o gestión, que están basados en la obtención de largas secuencias de resultados aleatorios. De todo ello se deduce la importancia de desarrollar en los alumnos una comprensión adecuada de los rasgos de los fenómenos y secuencias aleatorias.

En los nuevos diseños curriculares se sugiere realizar experimentos de simulación, basados en la obtención de secuencias aleatorias. Por ejemplo, en el Diseño Curricular Base del Ministerio de Educación y Ciencia (M.E.C., 1989) para la enseñanza secundaria obligatoria, en el bloque 5, denominado "*Tratamiento del azar*"• encontramos, como concepto a presentar a los alumnos: "*Fenómenos aleatorios y terminología para describirlos*". Dentro de los procedimientos, se hace referencia a la "*utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar*" y a la "*confección de tablas de frecuencias y gráficas para representar el comportamiento de fenómenos aleatorios*". Entre los algoritmos y destrezas a desarrollar se sugieren la "*obtención de números aleatorios* *con diversas técnicas, tales como sorteos, tablas, calculadoras*" y la "*detección de los errores habituales en la interpretación del azar*". Como estrategias generales previstas encontramos el "*reconocimiento de fenómenos aleatorios en la vida cotidiana y en el conocimiento científico*", la "*formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos*" y la "*planificación y realización de experiencias sencillas para estudiar el comportamiento de fenómenos de azar*". Parecidos términos se emplean respecto a las actitudes que conviene fomentar en los alumnos. El currículo del MEC no es una excepción, ya que términos o expresiones similares encontramos en los diseños curriculares de las comunidades autónomas y en otros países, como Inglaterra o Estados Unidos, que han propuesto reformas recientes sobre el currículo de Matemáticas.

A la vista de la importancia y dificultad del tema, ¿cómo hacer asequible a los alumnos los rasgos característicos de estas situaciones? Desde nuestro punto de vista, ello pasa necesariamente por una aproximación gradual, como la que se sugiere en Godino *et al*. (1988), en la que se guíe a los alumnos, a partir de sus experiencias con juegos y simulación, hacia la formalización progresiva.

Comenzando con materiales manipulativos con propiedades de simetría, como dados o monedas, puede pasarse progresivamente al estudio de materiales que no tengan estas propiedades -ruletas con áreas desiguales; chinchetas; y, posteriormente, al de fenómenos demográficos o sociales. Al final de la enseñanza secundaria puede iniciarse el uso de tablas de números aleatorios para seleccionar muestras, incluso puede iniciarse el análisis de las propiedades de los números aleatorios generados mediante una calculadora u ordenador.

La experimentación, registro y análisis de las secuencias producidas en todas estas actividades permitirá integrar el estudio de la probabilidad con el de la estadística. La introducción gradual de los conceptos y notación probabilísticos servirá para explicar matemáticamente las regularidades observadas en los datos recogidos. Actividades similares se sugieren en Shaughnessy y Arcidiacono (1993) o en Shaughnessy y Batanero (1995). Esperamos que, a partir de estas experiencias, los alumnos reconozcan las siguientes características esenciales de los fenómenos aleatorios:

1. En condiciones fijadas de antemano hay más de un resultado posible.
2. Con los conocimientos que posee el sujeto que emite el juicio, el resultado concreto que ocurrirá es impredecible.
3. Hay posibilidad -al menos imaginada- de repetir indefinidamente la observación o producción del fenómeno.
4. Las secuencias de resultados obtenidas en esta repetición carecen de un patrón que el sujeto pueda controlar o predecir.
5. En este aparente desorden, pueden descubrirse una multitud de regularidades globales, comenzando por la estabilización de las frecuencias relativas de cada uno de los resultados posibles. Esta regularidad global es el fundamento que nos permite estudiar estos fenómenos aleatorios mediante el cálculo de probabilidades.

Como argumentan Konold *et al*. (1991 a), de hecho, es preferible ver el término "aleatoriedad" como una "etiqueta" a la que van asociados muchos conceptos, como los de experimento, suceso, espacio muestral, probabilidad, etc . En este sentido, la palabra aleatoriedad nos remite a una colección de conceptos y procedimientos matemáticos que podemos aplicar en muchas situaciones. Por ello, deberíamos pensar en una orientación que tomamos hacia el fenómeno que calificamos de "aleatorio" más que en una cualidad del mismo. Aplicamos un modelo matemático a la situación, porque nos resulta útil para describirla y comprenderla pero no creemos que la situación sea "idéntica" al modelo. Decidir cuándo el cálculo de probabilidades es más conveniente o adecuado a la situación que otros modelos matemáticos es una parte del trabajo de modelización que debiéramos fomentar en nuestros alumnos.

A continuación analizamos resumidamente los modelos matemáticos implícitos en las situaciones problemáticas empleadas en el cuestionario y en el guión de entrevista en la parte experimental de esta Tesis, extendiendo el análisis que hicimos en Serrano *et al*. (1991).

1.3.3. SUCESIONES DE ENSAYOS DE BERNOULLI

Dedicaremos esta sección a analizar el caso más simple, dentro de las secuencias aleatorias, constituido por los ensayos de Bernoulli. Consideramos solo dos resultados posibles. El conjunto de propiedades que descubrimos sobre estas secuencias forman parte de su significado en la Institución Matemática. Hemos utilizado situaciones problemáticas que se refieren a este tipo de ensayos, tanto en el guión de entrevista (capítulo 2) como en el cuestionario (capítulo 3). Las respuestas de los alumnos a las cuestiones planteadas nos permitirán descubrir el significado personal de las secuencias aleatorias para los alumnos de la muestra.

Sea una serie de experimentos que se realizan sucesivamente, de forma que las condiciones de cada uno de ellos pueden o no ser influidas por el resultado de los precedentes. Sean $(E_1, \mathcal{A}_1, P_1)$, ... $(E_n, \mathcal{A}_n, P_n)$ los espacios probabilísticos asociados a n experimentos. El espacio producto asociado al experimento compuesto es el $(E, \mathcal{A}, P)$, en el que E es el producto cartesiano $(E_1 \times ... \times E_n)$, $\mathcal{A}$ es el álgebra engendrada por los productos A_1 x...xA_n, donde A_1 A_1, ...A_n A_n y P es una medida de probabilidad sobre (E, *A*).

Los experimentos considerados son independientes si y sólo si para todo suceso A_1 x...x A_n, con A_i A_i se verifica:

$$P(A_1 \text{ x...x } A_n) = P_1(A_1)...P_n(A_n)$$

El ejemplo más importante de experimento compuesto por ensayos independientes es la repetición sucesiva del mismo experimento.

Este tipo de ensayos se denominan pruebas de Bernoulli, cuando sólo hay dos resultados posibles, tal como ocurre en el lanzamiento de una moneda, la determinación del sexo de un recién nacido, y, en general, cuando al extraer al azar un individuo de una población se desea saber si posee o no una característica. Estas experiencias pueden estudiarse de modo directo o simulado. Asociados a él pueden estudiarse diferentes modelos probabilísticos.

Distribución binomial

Consideremos un experimento aleatorio cualquiera, y en relación a él, estudiemos un suceso A, de probabilidad *p* y su contrario de probabilidad *q = 1-p*. El número de ocurrencias del suceso A en una serie de n repeticiones independientes de dicho experimento es una variable aleatoria, que sigue la distribución binomial de probabilidades:

$$P(\xi = r) = \binom{n}{r} p^r \, q^{n-r}$$

Esta distribución tiene por valor medio y varianza:

$$\mu = n.p \qquad \sigma^2 = n.p.q$$

Observemos que esta variable toma teóricamente todos los valores posibles entre 0 y n. Pero, mientras la media crece proporcionalmente al valor n, la desviación típica sólo lo hace proporcionalmente a la raíz cuadrada de n. Por ello, el intervalo de valores centrales con una probabilidad dada, también crece en función de la raíz de n. Los valores próximos a la media son más probables al aumentar n. A veces, sin embargo, debido a la heurística de la representatividad se espera una varianza menor que la teórica en esta distribución.

Otro dato de interés es la forma de la distribución y cómo varía en función de los parámetros. Aunque, para n pequeña y p próxima a 0 ó 1, la distribución es fuertemente asimétrica, esta asimetría se debilita al crecer n, debido a la aproximación normal (Kalbfleisch,1984).

Teorema de Bernoulli

Si, a partir de la variable aleatoria ξ_n con distribución binomial de parámetros *p* y n, consideramos el cociente $h_n = \frac{\xi_n}{n}$ obtenemos una nueva variable aleatoria que representa la frecuencia relativa de ocurrencia del suceso A en *n* experimentos, que tiene por media $\mu = p$; y por varianza: $\sigma^2 = \frac{p\,q}{n}$

Estas expresiones muestran que, aunque al aumentar n, la media de la variable aleatoria h_n permanece constante, la varianza disminuye en función inversa del tamaño de la muestra. Este hecho no es intuitivo, y prueba de ello es que uno de los sesgos sobre el razonamiento estocástico es la insensibilidad al tamaño de la muestra descrito por Kahneman *et al*. (1982). En mi Memoria de Tercer Ciclo (Serrano, 1993) encontramos también casos de alumnos que creían que la varianza aumenta con el tamaño de la muestra.

Aplicando el teorema de Tchebycheff a esta variable se obtiene, que, para todo k:

$$P\left(\left|h_n - p\right| \geq k\sqrt{\frac{p\,q}{n}}\right) \leq \frac{1}{k^2}$$

Si mantenemos constante *p* y hacemos tender n a infinito observamos que la probabilidad de que la diferencia en valor absoluto entre la frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad teórica sea menor que un número dado, puede hacerse tan próxima a uno como se desee, con tal de tomar un número n de experimentos suficientemente elevado. Este resultado viene a corroborar teóricamente la ley de estabilidad de las frecuencias y es el resultado del dato, ya señalado, de la variación de la desviación típica de la distribución binomial en función de n.

Sin embargo, hay que hacer notar que esta convergencia no tiene el mismo sentido que el atribuido ordinariamente a la palabra límite. Si tomamos un número suficientemente elevado de pruebas no podremos afirmar que el error cometido en la estimación de la probabilidad al usar la frecuencia relativa sea menor que un número dado. Sólo que es muy poco probable que sea mayor que tal número. De este modo, aunque se sigan produciendo oscilaciones de la frecuencia relativa, tanto fuertes como débiles, las oscilaciones fuertes son cada vez más raras.

En nuestro trabajo previo (Serrano, 1993) observamos que algunos alumnos no solo no advierten esta convergencia empírica sino que por el contrario esperan que la varianza de la frecuencia relativa aumente con el tamaño de la muestra. En este nuevo trabajo trataremos de confirmar esta creencia de los alumnos.

Distribución geométrica

Otro problema diferente es el estudio del número ξ de pruebas que son necesarias para que ocurra por primera vez el suceso S (Gutiérrez Jáimez *et al.* 1992). Este número, que es una variable aleatoria, sigue la distribución geométrica de probabilidades:

$$P(\chi = r) = q^{r-1}\, p$$

Su media y varianza vienen dadas por:

$$\mu = \frac{1}{p} \quad ; \quad \sigma^2 = \frac{q}{p^2}$$

Entre las propiedades de interés de esta distribución está la llamada "pérdida de memoria"

$$P(\chi = r \mid \chi \geq k) = P(\chi = r), \forall\ k < r$$

Esto quiere decir que el conocimiento de los resultados en los k ensayos primeros, no modifica la probabilidad de ocurrencia en el ensayo número r. Esta propiedad sólo la posee la distribución geométrica, en el caso discreto y la exponencial en el caso continuo.

Intuitivamente, sin embargo, se olvida esta propiedad, lo que se conoce como "*falacia del jugador*". Cuando en un juego de azar se espera la aparición de una cara o de un número cualquiera, tras una racha de no ocurrencias, se espera que salga antes que tras una racha de ocurrencias. En la vida real, esta propiedad basada en la independencia de los sucesos es, sin embargo, una modelización matemática que no siempre se cumple. Así puede ocurrir, por ejemplo, en los procesos de producción, en los que la probabilidad de un defecto puede variar con el tiempo. La adecuación del modelo a la realidad solo puede verificarse estadísticamente.

1.3.4. PROCESOS ESTOCÁSTICOS EN TIEMPO DISCRETO

Al considerar n ensayos sucesivos de un experimento, podemos representar sus resultados mediante un vector $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ en el que, para cada i, ξ_i es una variable aleatoria. Si en lugar de considerar n finito, estudiamos una sucesión de variables aleatorias (ξ_n), obtenemos un proceso estocástico en tiempo discreto (Resnick, 1992). Un ejemplo sería la sucesión de caras y cruces obtenidas al lanzar sucesivamente una moneda.

Supongamos que S es el conjunto donde toman todos su posibles valores las variables ξ_i (en el caso de la moneda S = {C, +}). Llamamos a S el espacio de estados del proceso (ξ_n).

De esta forma, un proceso estocástico en tiempo discreto puede ser visualizado como la sucesión de estados por los que pasa un "sistema" en unos instantes de tiempo n = 0, 1, 2,... , siendo ξ_i el estado del sistema en el instante i.

Supongamos que en los instantes 1, 2, .., k, el sistema ha pasado por los estados $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Llamaremos a $w_k=(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ una trayectoria o realización del proceso hasta el instante k.

Sea $\Omega = \{w_k\}$ el conjunto de todas las posibles trayectorias de este tipo. Si se conoce la distribución inicial de probabilidad de la variable ξ_i y todas las posibles probabilidades de transición $P_r(x_r \mid x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$ del sistema al estado x_r en el instante r, dado que ha pasado sucesivamente por los estados $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ podemos determinar unívocamente la probabilidad de todo suceso $w_k \in \{\Omega_k\}$.

Aunque en nuestro caso nos limitamos a un ejemplo muy sencillo, los procesos estocásticos discretos tienen gran importancia por sus aplicaciones, ya que una gran parte de los fenómenos aleatorios de interés práctico no ocurren una sola vez, sino que se repiten. De otro modo no sería posible aplicar la concepción frecuencial para aplicar la teoría de la probabilidad a estos fenómenos. Por otro lado, el estudio de muchas de sus propiedades elementales no precisa la consideración de un número infinito de ensayos, sino sólo considerar a n como un parámetro finito.

Para algunos de estos procesos, se pueden estudiar muchas de sus características a partir de un razonamiento combinatorio simple, por lo que pensamos sería abordable su estudio una vez que el alumno tuviese estos conocimientos, esto es, durante la enseñanza secundaria. Ya algunos autores como Engel

(1988) han sugerido experiencias en este sentido con alumnos de estas edades. Utilizaremos este enfoque en las situaciones problemáticas propuestas en el guión de entrevista que se describe en el capítulo 2.

La sucesión de pruebas de Bernoulli como proceso estocástico discreto

La condición de independencia de sucesos ocurre en particular en el caso de la sucesión de ensayos de Bernoulli, en la que la probabilidad de cada trayectoria viene dada por el producto de las probabilidades de cada uno de los estados que la constituyen, al ser cada uno de los ensayos independiente del anterior:

$$P(x_1, x_2, ..., x_k) = P(x_1)\, P(x_2)...P(x_k)$$

Así una sucesión obtenida al lanzar una moneda, por ejemplo:

CCC+C++CCC+C+++++C+C+CC+C++CCCC+++C++C++ ....

puede ser considerada como una realización, hasta un instante dado, de un proceso estocástico discreto. El enfoque tradicional con los alumnos, después de haber obtenido ésta u otra trayectoria es pedirles el recuento y registro gráfico de las frecuencias de caras y cruces. A continuación se discute la variabilidad de resultados obtenidos por cada alumno y por último se calcula la frecuencia relativa total de toda la clase.

Aunque este enfoque permite, por ejemplo, comparar el efecto sobre la estimación de la frecuencia del tamaño muestral, no está exento de inconvenientes. En primer lugar, ¿cómo estar realmente seguros de que todos los experimentos realizados por los diferentes alumnos son equivalentes?; ¿no es posible que alguna de las monedas, dados , ruletas, no esté muy equilibrada?

En segundo lugar, se reducen rápidamente las trayectorias obtenidas por los alumnos al total de caras y cruces. Se elimina el estudio de las fluctuaciones y del orden de aparición de los resultados, de los tiempos de espera, del número y longitud de las rachas, etc. De este modo no se concede la importancia que tiene el orden en que ocurren los sucesos, lo que puede ser causa de la posterior dificultad con razonamientos combinatorios en experimentos compuestos.

1.3.5. RECORRIDOS ALEATORIOS

Otro tipo de proceso importante es aquél en el que las probabilidades de transición sólo dependen del resultado de la última prueba, es decir:

$$P_r(x_r \mid x_1, x_2, ..., x_{r-1}) = P_r(x_r \mid x_{r-1})$$

en cuyo caso el proceso recibe el nombre de Cadena de Markov. La cadena de Markov es homogénea si las probabilidades de transición $P_r(x_j \mid x_i) = p_{ij}$ no dependen del instante r, sino sólo de los estados x_i y x_j .

Un ejemplo importante de cadena de Markov homogénea es el "recorrido aleatorio" sobre el conjunto de los enteros. Supongamos un móvil que en el instante inicial t=0 está colocada en el origen de coordenadas. A partir de la posición z_k en cada instante dado k, puede dar un salto a los enteros z_k+1 con probabilidad p o a z_k-1 con probabilidad $q=1-p$.

Podemos describir el estado z_k del móvil en el instante k como la suma: $z_k = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k$ donde cada una de las variables aleatorias ξ_j toma los valores 1 o -1 con probabilidades p y q respectivamente. Mediante este modelo, a cada sucesión de k realizaciones de una serie de pruebas de Bernoulli le podemos asociar una sucesión de estados o trayectoria del recorrido aleatorio. Recíprocamente, toda posible trayectoria del recorrido, hasta el instante k, determina una sucesión de posibles resultados en los ensayos, como se muestra en la figura 1.3.5.1.

Por ello, cada una de las propiedades del recorrido aleatorio se corresponde con otra de la sucesión de ensayos. A veces, sin embargo, una de las presentaciones tiene una mayor fuerza visual o intuitiva que la otra.

También podemos interpretar una trayectoria como la descripción del juego de un jugador ficticio que en cada ensayo gana o pierde una cantidad unitaria. La sucesión de estados representa las ganancias acumuladas en cada instante que, como expone Feller (1973), están sujetas a fluctuaciones del azar de carácter totalmente inesperado. Uno de los objetivos de las entrevistas efectuadas en la fase exploratoria de la investigación (capítulo 2) es analizar la posibilidad de usar estas situaciones en la enseñanza secundaria.

UNA TRAYECTORIA DEL RECORRIDO ALEATORIO SOBRE LOS ENTEROS

C	C	C	+	C	+	+	C	C	C	+	C	+	+	+	+	+	C	+	C	+
1	2	3	2	3	2	1	2	3	4	3	4	3	2	1	0	-1	0	-1	0	1

```
4                         *     *
3          *           *     *     *
2       *     *     *                 *
1    *           *                       *                 *
0    -  -  -  -  -  -  -  -  -  -  -  -  -  *  -  *  -  *  -
-1                                            *     *
-2
-3
-4
```

Figura 1.3.5.1

El modelo puede servir también como aproximación a muchos procesos acumulativos más complicados en física, economía y teoría del aprendizaje. A continuación describimos algunas de sus propiedades, que se estudian con detalle en el texto de Feller (1973).

Número de trayectorias

A veces, puede ser de interés el estudio del número de trayectorias que cumplen una cierta condición, para aplicar la regla de Laplace en el cálculo de algunas probabilidades de interés.

El número de trayectorias del origen a (k, z_k) es:

$$N_{k,z_k} = \binom{k}{\frac{k+z_k}{2}} = \binom{k}{\frac{k-z_k}{2}}$$

que corresponde al número de sucesiones de longitud k, formada por los valores 1 ó -1, cuya suma es z_k.

El número de trayectorias de longitud k es 2^k, ya que hay 2^k posibles sucesiones formadas por los valores (1, -1). Uno de los objetivos de nuestras entrevistas será estudiar la capacidad de enumeración de trayectorias cortas por parte de los alumnos.

Probabilidades de transición

La probabilidad de una visita a r en el instante k es:

$$P_{k,r} = P(S_k = r) = \binom{k}{\frac{k+r}{2}} 2^{-k}$$

De este modo, por la propiedad de los coeficientes combinatorios, los términos centrales tienen una mayor probabilidad y los términos simétricos tienen probabilidades iguales. Sin embargo, los alumnos podrían aplicar incorrectamente la regla de Laplace suponiendo una distribución uniforme para las probabilidades de transición.

Distribución de probabilidades en el instante t

Como consecuencia, podemos deducir con facilidad que, en el instante t, hay t+1 estados posibles, que se disponen simétricamente respecto al eje de tiempos (números impares para t impar y pares para t par). La probabilidad de alcanzar estos distintos estados, en el instante t, viene dada por la distribución binomial B(t,p).

Retornos al origen

Ocurrirá un retorno al origen si $z_k = 0$, esto es, si se igualan las frecuencias de caras y cruces. Sucede esto si, en un momento dado, la frecuencia relativa es exactamente 1/2. Esta situación y las que siguen a continuación se visualizan mucho mejor empleando el recorrido o el gráfico del recorrido aleatorio de frecuencias relativas.

En lo que sigue, consideraremos la moneda equilibrada, esto es, $p = 1/2$. Como Feller (1973) expone, y de acuerdo a nuestra intuición, la llamada ley de los promedios debería garantizar que, en un juego largo de lanzamiento de monedas, cada jugador esté ganando aproximadamente la mitad del tiempo y que el liderato (llevar ventaja) pase frecuentemente de un jugador a otro.

Ultimo retorno al origen y número de cortes con el eje

Sin embargo, al considerar un número grande de ensayos 2n (lo consideramos par, puesto que el empate sólo puede ocurrir para un valor par del tiempo) y buscar el instante de tiempo 2k en que se produjo el anterior retorno al origen, se muestra que la distribución es simétrica. Esto quiere decir que es igual la probabilidad de que este valor fuese 2n-2k. La simetría de esta distribución se mostró empíricamente con auxilio de los ordenadores y sólo después se verificó teóricamente.

Esta simetría también implica que hay una probabilidad 1/2 de que no se produzca ningún empate (retorno al origen) en la segunda mitad de este juego (independientemente de n), es decir, que durante ese tiempo uno de los jugadores fuese siempre ganador. Además, las probabilidades cercanas a los puntos finales son las mayores, lo que quiere decir que lo más probable es, o bien un empate reciente, o bien que la mayor parte del tiempo uno de los jugadores haya llevado ventaja. Por el contrario, los sujetos esperan un tiempo corto de retorno al origen y una igualación de fortunas en la mayor parte del juego.

Por otro lado, el recorrido aleatorio comienza cada vez que el móvil regresa al origen. La época del r-ésimo retorno es, por tanto, la suma de r tiempos de espera, que se pueden interpretar como "mediciones de la misma cantidad física en condiciones idénticas". Se cree que, generalmente, el promedio t_r/r de esas observaciones convergerá obligadamente al "valor verdadero", esto es al tiempo de espera de un solo retorno t_1.

Pero la suma es, casi seguro, del orden de magnitud de r^2 con lo que el tiempo medio t_r/r crece aproximadamente en proporción a r. Un análisis más profundo revela que es probable que haya, entre los r tiempos de espera, uno del mismo orden que la magnitud de la suma total r^2 . Habitualmente esto se toma como "un error de medida". Estos tiempos de espera no son más que el número de ensayos entre sucesivos cortes con el eje. Como vemos, después de cada uno de los cortes con el eje, aumenta el tiempo de espera hasta el siguiente, resultado que también es contraintuitivo.

Tiempo de permanencia a un lado del eje

En contra de nuestra intuición, es bastante probable que, en un juego prolongado de lanzamiento de monedas, uno de los jugadores permanezca prácticamente la totalidad del tiempo en el lado ganador. Los valores cercanos a 1/2 de la proporción de tiempo que el recorrido permanece a uno de los lados del eje son los menos probables, y los extremos los más probables.

Otra paradoja es que el número de cambios de liderato se debiera incrementar en proporción a la duración del juego. Sin embargo, este número solo aumenta en la proporción n

Máximos

La probabilidad de que el máximo de una trayectoria de longitud k sea igual a r coincide con $p_{k,r}$ o $p_{k,r+1}$, es decir, con la probabilidad de una visita a r en los instantes k o k+1.

Tiempos de primer paso

$$\Phi_{k,r} = \frac{r}{k} \binom{k}{\frac{k+r}{2}} 2^{-k}$$

Igualmente observamos que el tiempo medio de espera del primer paso por r aumenta con el cuadrado de r, en contra de lo que intuitivamente se espera, esto es, que aumente con r. En un contexto de apuesta, esto significaría que para obtener una ganancia doble, por ejemplo, sería necesario un número de jugadas cuatro veces mayor.

En la exposición que acabamos de efectuar se pone de manifiesto el gran número de resultados inesperados y paradojas que acompañan al estudio de la variabilidad local de procesos estocásticos simples, asociados a la sucesión de pruebas de Bernoulli.

Puede parecer al lector, a la vista de lo expuesto, que la dificultad del tema lo hace desaconsejable para su tratamiento en la enseñanza no universitaria. No debemos olvidar, no obstante, que hay muchas posibilidades de acercamiento a un mismo concepto, como mostraremos en la parte experimental de este trabajo.

Numerosas investigaciones en Psicología atribuyen al empleo de heurísticas en la toma de decisiones la frecuencia con que cometemos errores sobre el comportamiento de los fenómenos estocásticos. Una explicación alternativa podría ser la falta de experiencia en la observación y análisis de la componente de variabilidad local de dichos fenómenos, así como la complejidad del significado de los conceptos implicados que hemos puesto de manifiesto en este estudio.

1.3.6. PROCESO DE POISSON Y SU GENERALIZACIÓN EN EL PLANO

La aproximación de Poisson a la distribución binomial

En muchas aplicaciones tratamos con ensayos de Bernoulli en los que el número n de ensayos es comparativamente grande y la probabilidad p de obtener éxito en cada uno de los ensayos es pequeña, mientras el producto np= tiene un tamaño moderado. En estos casos, el valor aproximado de la probabilidad de obtener k éxitos en los n ensayos puede aproximarse por el valor:

$$P_{\lambda}\ (x = k) = (\ e^{-\lambda}\ \lambda^{k})\ /\ k\ !$$

que es la distribución de Poisson, de parámetro . La media y la varianza de esta distribución son iguales y vienen dadas por el valor del parámetro. La aproximación es suficientemente precisa, en opinión de Ríos (1967), cuando $p<0.1$ y $np< 5$.

Una de las aplicaciones de la distribución de Poisson se obtiene en los procesos puntuales de Poisson, cuyo caso más simple es el lineal. Un mecanismo aleatorio que produzca un conjunto de puntos al azar, se denomina proceso estocástico puntual. El proceso de Poisson es un caso particular de cadena de Markov. (Engel, 1988). Es además un caso particular de proceso de Markov con un conjunto de estados discretos y tiempo continuo (Cox y Miller, 1965).

Consideremos un suceso E, que se repite a intervalos aleatorios de tiempo. Estudiemos el número total N(t) de tales sucesos ocurridos en un intervalo de tiempo (0,t), medido desde un cierto origen. Sea $p_n(t)$ la probabilidad de que la variable aleatoria N(t) tome el valor n.

La familia de variables aleatorias $\{N(t)\ ,\ t \geq 0\}$ es un proceso estocástico, que depende de un parámetro continuo t, que en este caso representa el tiempo transcurrido. Admitimos tres supuestos:

1.- Independencia: N(t) es independiente del número de ocurrencias del suceso E en cualquier intervalo anterior a (0 , t). En general, las ocurrencias de sucesos en intervalos de tiempo que no se solapan entre sí, son independientes.

2.- Homogeneidad en el tiempo: $p_n(t)$ depende únicamente de la longitud t y es independiente de la situación del intervalo, es decir, mediante $p_n(t)$ indicamos la probabilidad de n ocurrencias del suceso E en el intervalo $(t_1\ ,\ t + t_1)$, para todo t_1.

3.- Regularidad: En un intervalo de longitud infinitesimal h, la probabilidad de exactamente una ocurrencia es $\lambda h+o(h)$ y la probabilidad de más de una ocurrencia es o(h), siendo o(h) un infinitésimo respecto a h.

Bajo las hipótesis 1, 2, 3; N(t) tiene una distribución de Poisson con media λt. (Feller, 1973).

En particular, si un intervalo unitario lo dividimos en k partes, en cada una de las partes obtenemos una distribución de Poisson de media λ/k.

Una de las propiedades interesantes del proceso de Poisson es la de homogeneidad en el tiempo. Ello implica que si un intervalo unitario lo dividimos en k partes, la probabilidad de obtener un punto es la misma en cada una de los subintervalos. Recíprocamente puede definirse el proceso de Poisson de la siguiente manera:

"*Cuando en un intervalo (0 , t) se toman n puntos independientemente y cada uno de ellos se distribuye uniformemente en el intervalo, obtenemos el proceso de Poisson de parámetro* λn." (Doob, 1953).

En el caso de que t=1/k, esto es de que un intervalo unitario lo hayamos descompuesto en k partes, en cada una de ellas obtenemos una distribución de Poisson de parámetros n/k para el número de puntos en el subintervalo.

Imaginemos un intervalo unitario de tiempo partido en k subintervalos de longitud 1/k. Podemos considerar que una colección dada de un número finito de puntos en el intervalo es el resultado de un proceso estocástico, en el que cada uno de los puntos pudiera estar situado con igual probabilidad en cada uno de los subintervalos.

Una de las situaciones estocásticas cuya comprensión por parte de los niños ha sido estudiada por Piaget e Inhelder (1951) y Green (1983 b) entre otros, consiste en proponer a los sujetos la distribución aleatoria de n puntos en una cuadrícula bidimensional formada por kxk celdas. Siempre que la probabilidad de situar uno de los puntos sea menor que 0.1 (por ejemplo, para una cuadrícula de 4x4 celdas) podremos considerar que estamos ante un proceso estocástico de Poisson en el plano.

La distribución del número de puntos en cada una de las celdas viene dada por la distribución de Poisson de parámetro λ =np, siendo p= 1/(kxk). Puede verse en Doob (1953) la definición y propiedades de los procesos de Poisson espaciales.

En este tipo de proceso estocástico el interés se centra no en el orden en que se van colocando los puntos en la diferentes celdas, sino en el número de puntos en cada una de las celdas. Debido, además, a la disposición espacial, podremos también analizar otras propiedades, como:

Propiedad aditiva: La suma de dos procesos independientes de Poisson de parámetros α y β es un proceso de Poisson de parámetro $\alpha + \beta$ (Medhi, 1982).

Esto implicaría, por ejemplo, que al sumar el número de puntos en cuadrículas adyacentes en las tareas propuestas a los niños, por ejemplo de 2 en 2, de 3 en 3, etc., obtendríamos de nuevo distribuciones de Poisson aunque con parámetro modificado.

Evolución sin efectos posteriores. Un proceso puntual tiene esta propiedad si el número de puntos en el intervalo (0 , t) no afecta al número de puntos posterior a t y viceversa. (Snyder, 1975). En el proceso espacial esta propiedad se traducirá en el caso especial en que el número de puntos en una serie dada de cuadrículas no afecta a la probabilidad de obtener un punto en las cuadrículas adyacentes.

1.4. ANTECEDENTES DE NUESTRA INVESTIGACIÓN

1.4.1. INTRODUCCIÓN

Puesto que nos hemos centrado en la problemática didáctica de la enseñanza de la probabilidad, desde el punto de vista frecuencial y en el nivel de educación secundaria, hemos revisado las investigaciones sobre el tema. Además de los trabajos sobre desarrollo cognitivo de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975) los que revisten más importancia desde nuestro punto de vista son los relativos al estudio de sesgos, razonamientos incorrectos y estrategias incorrectas de decisión relativas al pensamiento estocástico, que han sido descritos a partir del trabajo de Kahneman *et al*. (1982).

Otros estados de la cuestión se presentan en Garfield y Ahlgren (1988), Shaughnessy (1992), Scholz (1983), (1987), (1991) y Batanero *et al*. (1994). Sólo haremos referencia a los conceptos que vamos a investigar en nuestro trabajo, que se refieren a la apreciación de la aleatoriedad de una secuencia, a las heurísticas y sesgos relativos a la asignación de probabilidades, así como a la dificultad de interpretación de los enunciados de probabilidad, desde el punto de vista frecuencial.

Pensamos que estos sesgos describen componentes del significado personal que difieren en puntos fundamentales del significado institucional de dichos conceptos y pueden servir de ejemplificación de la teoría propuesta por Godino y Batanero (1994; en prensa). Clasificamos el estudio de las investigaciones previas respecto a los diferentes conceptos investigados en nuestro trabajo. Finalmente trataremos de presentar una síntesis y una perspectiva integradora de estas diversas investigaciones desde el punto de vista de la mencionada teoría del significado.

1.4.2. SIGNIFICADOS PERSONALES DE LA ALEATORIEDAD

1.4.2.1. LA IDEA DE AZAR Y EL CONCEPTO DE EXPERIMENTO ALEATORIO

El punto de partida de nuestro trabajo es la idea de aleatoriedad y experimento aleatorio. Este es un concepto clave en probabilidad y estadística cuya complejidad, desde el punto de vista psicológico, es resaltado por Falk y Konold (1994). Comenzamos presentando la parte del trabajo de Piaget relacionada con ella.

El estudio de Piaget e Inhelder

Piaget e Inhelder (1951) vieron la comprensión del azar por parte del niño como complementaria a la de la relación causa-efecto. Para ellos, sin esta comprensión de la causación no hay un marco de referencia para identificar los fenómenos aleatorios. Desde el punto de vista físico, el azar se caracterizará por procesos de mezcla irreversible, mientras que la causalidad mecánica tendrá una reversibilidad intrínseca.

Puesto que, en el período preoperacional, el niño tiene un pensamiento irreversible, según Piaget no puede comprender la aleatoriedad, ya que no puede diferenciar entre acontecimientos reversibles y los fortuitos, originados por mezclas de causas irreversibles. En consecuencia, hasta la etapa de las operaciones concretas en la que hay cierta apreciación de los factores que caracterizan los fenómenos causados, el niño no puede adquirir la idea de aleatoriedad.

Según este autor, el azar es debido a la interferencia de una serie de causas independientes y la "no presencia" de todas las interferencias posibles, salvo en el caso en que hubiera un gran número de repeticiones del experimento. Habría que concebir el azar como el dominio complementario de la composición lógica, que no puede ser adquirido hasta que se constituyen las operaciones reversibles, por comparación con ellas. Las operaciones lógicas y aritméticas se pueden componer entre sí de modo riguroso y siempre reversible. Las transformaciones fortuitas no pueden componerse en forma rigurosa y son esencialmente irreversibles.

En su opinión, el niño, bien porque comprende la interferencia de las causas, sin reconocer su independencia, bien porque comprende la independencia y no la interferencia, no llega a construir la idea de azar. Los casos aislados son indeterminados o imprevisibles (Piaget e Inhelder, 1951, pg. 212) pero el conjunto de posibilidades puede determinarse mediante un razonamiento de tipo combinatorio, con lo que se vuelve previsible. Ésta es la vía por la que aparece la idea de probabilidad expresada por la razón entre las posibilidades de un caso y del conjunto de posibilidades. Por tanto, la idea de azar, para Piaget, lo mismo que la de probabilidad, no puede ser totalmente adquirida hasta que se desarrolle el razonamiento combinatorio, en la etapa de las operaciones formales.

Es natural que, antes de esta etapa, el niño no asimile esta noción, pues antes de captar la posibilidad de interferencia de las series causales o de la mezcla de objetos móviles, es preciso concebir el sistema de estas secuencias y la representación de sus posibles posiciones y desplazamientos. El pensamiento del niño, que es aún irreversible, permanece inaccesible a la idea de azar, porque le falta la organización mental capaz de distinguir lo racional reversible de los acontecimientos fortuitos, debidos a la mezcla y a las interferencias.

Para estudiar las creencias de los niños, estos autores utilizan un dispositivo consistente en una caja con bolas de dos colores, haciendo preguntas a los niños sobre las mezclas de la posición inicial de las bolas que se forman al balancear esta caja. En el estadio preoperacional los niños no comprenden la naturaleza de estas mezclas, creyendo que hay un desplazamiento global de las bolas (por ejemplo, que todas las bolas blancas se mueven simultáneamente), sin tener en cuenta la independencia del movimiento de cada una de las bolas y la interferencia de sus trayectorias, al chocar entre sí. El resultado después de una mezcla (permutación de las bolas) es para ellos un accidente momentáneo, por lo que esperan que en un nuevo balanceo de la caja las bolas vuelvan a su lugar. El niño no diferencia lo posible y lo necesario, o bien se niega la mezcla, porque piensa que se realiza de forma regular.

En la etapa de las operaciones concretas van construyendo progresivamente un esquema de las permutaciones, aunque no lo generalizan por completo. Son capaces de predecir las mezclas progresivas de las bolas, que ya no son aparentes y regresivas, aunque piensan que las bolas retornarán a un orden finalmente, a partir de una nueva mezcla y no de invertir una mezcla ya formada. Este período marca el primer desarrollo de la idea de azar. El descubrir la necesidad deductiva y operatoria, permite, por antítesis, concebir el carácter no deducible de las transformaciones fortuitas aisladas y diferenciar lo necesario de lo posible.

Sólo cuando aparecen las operaciones formales se comprende el proceso de aleatoriedad física y los hechos de las mezclas particulares formadas se asimilan dentro de un esquema de permutaciones. Los adolescentes comprenden que las posiciones finales de las bolas dependen de las interferencias de las mezclas en balanceos sucesivos de la caja. Hay una síntesis entre el azar y las operaciones, que permite estructurar el campo de las dispersiones fortuitas mediante un sistema de probabilidades. Ello es debido a la construcción de un esquema combinatorio que permite imaginar el conjunto de las permutaciones posibles. El pensamiento formal posibilita el descubrimiento de las proporciones y la ley de los grandes números aplica las razones de proporcionalidad a estas mismas operaciones combinatorias.

Otras investigaciones

Hoeman y Ross (1982) señalan que, en los tres estadios descritos por Piaget, ven una falta de diferenciación entre sucesos causados y aleatorios en las primeras etapas; la natural inclinación de la persona a buscar el orden y estructura, incluso donde no existe, puede explicar la incapacidad de los niños pequeños para comprender apropiadamente los sucesos aleatorios.

Algunos autores han documentado la inhabilidad de los niños para reconocer la no contingencia de aspectos que no están relacionados con un suceso aleatorio. A veces explican ganancias altas o bajas como el resultado de la habilidad o concentración en un juego de azar. Por ejemplo, Fischbein y Gazit (1984) estudiaron estas creencias que pueden afectar los juicios probabilísticos. En Fischbein *et al*. (1991) muestran que algunos estudiantes suponen posible controlar un experimento aleatorio si lo repiten varias veces.

Konold *et al* (1991 a) exploran las diferencias entre la concepción de experimento aleatorio en novicios y expertos. Reconocen que la investigación acerca de la aleatoriedad ha sido criticada desde diversos puntos de vista, incluyendo el argumento de que, ya que una sucesión aleatoria no puede definirse rigurosamente, tiene poco sentido hablar, en términos, absolutos de la incapacidad de la gente para generar una sucesión de este tipo.

Estos autores argumentan que, de hecho, el término "aleatoriedad" comprende una familia de conceptos. Así mismo es interesante la discusión de Green (1982 b) sobre los diferentes modelos subyacentes en una secuencia aleatoria. En este sentido, como ya hemos discutido, la aleatoriedad es una colección de modelos abstractos que pueden ser aplicados a varias situaciones.

Konold *et al*. (1991 a) caracterizan las concepciones de los sujetos sobre los fenómenos aleatorios en las siguientes categorías:

- Sujetos para los que un fenómeno es aleatorio sólo si los posibles resultados son igualmente probables;
- Sujetos para los que un fenómenos aleatorio es aquél con múltiples posibilidades;

- Aleatoriedad como falta de causalidad;
- Aleatoriedad como incertidumbre;
- Aleatoriedad como modelo para representar ciertos fenómenos.

Otro tema relacionado con la noción de aleatoriedad es la comprensión que tienen los niños de los generadores de resultados aleatorios, como, por ejemplo, un dado. Un problema planteado por Truran (1994) es si los niños consideran isomorfos, a efecto de la sucesión de resultados aleatorios que producen, los generadores aleatorios físicamente diferentes aunque matemáticamente isomorfos. Como resultados de sus experimentos con dados, bolas numeradas y ruletas, concluye que los niños predicen diferentes resultados dependiendo del tipo de generador aleatorio usado en un juego.

1.4.2.2. RECONOCIMIENTO Y GENERACIÓN DE SECUENCIAS DE ENSAYOS DE BERNOULLI

El estudio de Piaget e Inhelder

Estos autores analizan el sentido que dan los niños a la aleatoriedad en el juego de lanzar una moneda y obtener cara o cruz, frente al "milagro" que constituiría una sucesión compuesta sólo por caras o por cruces. Para ello, se comparan las reacciones de los niños respecto a dos tipos de resultados de lanzar 10 o 20 monedas correctas frente a otras 10 o 20 en que las dos caras son idénticas.

En el primer estadio el niño, aunque se sorprenda de obtener sólo cruces (o sólo caras) con la moneda trucada, no ve en ello una imposibilidad desde el punto de vista probabilístico. Incluso cuando se le enseña cómo se ha trucado la moneda, piensa que podría obtener el mismo resultado con la moneda correcta.

El segundo estadio se caracteriza por un sentido global de la probabilidad, pero la elección final entre las dos hipótesis no se debe a una cuantificación combinatoria. El niño está convencido de que no pueden obtenerse todos los resultados idénticos. Pero la probabilidad de obtener estos resultados idénticos no es función, para él, del número de ensayos. Por el contrario en el tercer estadio son conscientes de la disminución progresiva de esta probabilidad, que tendería hacia la imposibilidad.

El aprendizaje probabilístico de Fischbein

Fischbein concede una gran importancia a la intuición, como parte de la conducta inteligente. Para él, las intuiciones son adquisiciones cognitivas que tienen las características de inmediatez, globalidad, capacidad extrapolatoria, estructurabilidad y autoevidencia. Clasifica las intuiciones en primarias y secundarias. Las intuiciones primarias se derivan directamente de la experiencia del sujeto, mientras que las intuiciones secundarias se forman mediante la educación, especialmente en el contexto escolar.

Fischbein y sus colaboradores analizan las intuiciones de los niños, tratando de demostrar la existencia de intuiciones primarias sobre las secuencias aleatorias. Observan cómo los niños adaptan su conducta a las frecuencias con que se presentan los sucesos en una secuencia aleatoria (Fischbein, 1975). Enfrentan a los niños ante un dispositivo eléctrico en el que dos bombillas de diferente color se encienden aleatoriamente con ciertas frecuencias predeterminadas. El niño tiene que adivinar el color de la bombilla que se encenderá, para ganar un premio.

Como resultado de sus experiencias, observan la conducta de emparejamiento entre las probabilidades a priori de los diferentes colores de las bombillas y la frecuencia empírica de las respuestas de los sujetos a partir de los cinco años. Esta adaptación varía con la edad. Los niños pequeños suelen utilizar sólo el color que aparece con mayor frecuencia. A veces, sin embargo, se observa el efecto de "recencia positiva", que consiste en repetir la última respuesta que originó un acierto. Conforme crecen, los niños intentan deducir los patrones en las secuencia aleatorias que se les presentan, realizando hipótesis complejas sobre estos patrones, y adaptando sus respuestas a los patrones esperados.

Las investigaciones de Green y Toohey

Green (1991) describe un estudio longitudinal con escolares de 7 a 11 años en el que ha empleado cuestiones relativas a la noción de aleatoriedad, algunas de las cuales han sido adaptadas para ser utilizadas en nuestro trabajo.

La primera pregunta pide a los niños escribir una sucesión de caras y cruces que represente lo que ellos creen que se obtendría al lanzar 50 veces una moneda equilibrada. Identifica tres aspectos básicos en las sucesiones generadas: la frecuencia relativa de cada uno de los sucesos, la independencia de los elementos de la secuencia y la consistencia entre las dos mitades de la secuencia generada.

La investigación que realiza sobre la frecuencia relativa consiste en preguntarse si los alumnos, en promedio, producen aproximadamente el mismo número de caras que de cruces. El estudio probó que son muy exactos al reflejar la equiprobabilidad. Además producen sucesiones cuya primera y última mitad son altamente consistentes; quizás demasiado consistentes para reflejar la variabilidad aleatoria.

Para analizar la independencia, aquellos alumnos de la muestra cuyas secuencias eran anormales fueron clasificados en dos tipos: alternantes y replicantes. Green usó la racha de mayor longitud para identificarlos. Si la racha de mayor longitud es de longitud 1, el alumno es clasificado como alternante; si la longitud de la racha más larga es 25 o más signos iguales consecutivos, tenemos un replicante. Asimismo se basó en el número total de rachas en cada una de las sucesiones generadas por los alumnos (relacionado con el contraste anterior, aunque no idéntico).

Green observó que la longitud media de la racha más larga en su muestra era inferior al valor teórico, en niños de todas las capacidades y de todas las edades. No encontró mejora durante los cuatro años de seguimiento longitudinal. También comparó el número de rachas de las distribuciones teóricas y de las generadas por los alumnos, encontrando que, en general, los alumnos producen demasiadas rachas de longitud corta.

Las investigaciones de Green (1983 b) y Toohey (1995) incluyen una pregunta en la cual los niños deben diferenciar entre una sucesión generada por un mecanismo aleatorio y otra que no cumple esta condición. Las dos sucesiones propuestas simulan el resultado de lanzar 150 veces una moneda equilibrada. Como resultado, descubre que la mayor parte de los niños elige precisamente la secuencia no aleatoria y que no mejora la apreciación de la aleatoriedad con la edad. Entre las razones aducidas por los niños para justificar su decisión, encontró las siguientes:

a) Razones correctas

- El patrón de la sucesión es demasiado regular para ser aleatorio
- Demasiadas rachas o rachas demasiado cortas

b) Razones incorrectas:

- El patrón de la sucesión aleatoria es demasiado irregular; no se apreciaba suficientemente la irregularidad de una sucesión aleatoria;
- Se espera que la frecuencia relativa fuera exactamente el 50% de caras y cruces o un valor muy próximo; no se admiten fluctuaciones lógicas en esta proporción, es decir, se aplicaría la heurística de la representatividad (Kahneman *et al.* , 1982).
- La contraria de la anterior; parece que la proporción de caras o cruces es demasiado próxima al 50% para ser realmente aleatoria; a juicio de estos alumnos la fluctuación debía ser mayor, es decir, no se aprecia el fenómeno de la convergencia de la frecuencia a la probabilidad teórica o ley de los grandes números.
- Rachas demasiado largas; no se admite la posibilidad de este tipo de rachas en una sucesión aleatoria.

Posteriormente, Green (1991), construye una serie de tests para estudiar las concepciones de aleatoriedad de los niños, en los que incluye preguntas sobre secuencias de ensayos de Bernoulli. Incluye los siguientes tipos de tarea:

a) Generación de sucesiones aleatorias, simulando los resultados de lanzar una moneda equilibrada.

b) Reconocimiento de sucesiones aleatorias que simulan el lanzamiento de 40 monedas. Las variables de tarea consideradas en los distintos distractores fueron las siguientes:

- La frecuencia absoluta de caras y cruces (19/21 o 12/28)
- La distribución de la longitud de las rachas. Si mediante (a,b,c,d) indicamos que hubo a rachas de longitud 1, b rachas de longitud 2, etc.; podemos describir las distribuciones empleadas en los distractores en la forma siguiente, donde cada nombre corresponde a la sucesión supuestamente generada por el niño que tenía este nombre:

Mark (12,5,3,1,1); David (12,4,5,2); Diane (11,4,4,2);
Marie (12,5,2,1,1) Daniel (19,10,0,0,0) y Martin (14,4,1,1,1).

Combinando estas variables, Green comparó sucesiones con igual frecuencia de caras y cruces y diferente distribución de rachas y sucesiones con igual distribución de rachas y diferentes frecuencias de caras y cruces. Concluye que los alumnos reconocen y reproducen con facilidad las frecuencias relativas de los sucesos en las secuencias aleatorias. Por el contrario, la variabilidad puesta de manifiesto en el número de rachas y su longitud no es fácilmente reconocida ni reproducida.

Toohey (1995) realiza un estudio de la percepción de la aleatoriedad en 75 alumnos entre 12 y 16 años, empleando algunos ítems de Green (1983 b, 1991) y otros de Konold *et al.* (1991 a). Como consecuencia describe seis componentes en el razonamiento sobre la aleatoriedad de los adolescentes que son: orden, patrón, imprevisibilidad, múltiples posibilidades, esquema de selección y aproximación a un modelo estándar. Estos componentes recogen los argumentos descritos por Green.

Otras investigaciones.

La percepción subjetiva de la aleatoriedad es un tema que ha interesado a los psicólogos desde hace tiempo, Como muestra citamos a Bar Hillel y Wagenaar (1993), que realizaron un resumen de estas investigaciones, entre las que se encuentran Bakan (1960), Ross (1955) y Falk (1975).

La principal consecuencia obtenida de estas investigaciones es la tendencia a la generación de rachas cortas de dos o tres símbolos adyacentes en algún sentido, por ejemplo números consecutivos o letras sucesivas del alfabeto. También se encontró el sesgo de alternancia o "recencia negativa" que consiste en producir secuencias equilibradas en una racha corta.

En el caso de emplear experimentos con más de dos resultados, rara vez se obtiene una distribución uniforme. Por ejemplo, Triesman y Faulkner (1987) encontraron que, al pedir a los sujetos secuencias de dígitos aleatorios, éstos empleaban los dígitos 0 y 1 con menor frecuencia que el resto.

Falk (1975, 1981) encontró que las personas adultas no aprecian suficientemente ni construyen adecuadamente este tipo de sucesiones. En su estudio con alumnos de secundaria usó secuencias de 21 cartas verdes y amarillas, preguntándoles si eran o no aleatorias. Los estudiantes tendían a considerar aleatorias las secuencias con más alternancias entre los dos colores, aunque de hecho es más probable que una secuencia aleatoria contenga algunas rachas largas de un mismo color.

Obtuvo el mismo resultado al pedir a los estudiantes que escribiesen una secuencia aleatoria de longitud dada. Concluyó que tendemos a ver patrones en sucesos aleatorios en donde tales patrones no existen. También tendemos a inferir aleatoriedad en situaciones en la que no está presente.

Konold y Falk (1992) exponen que dos sucesiones aleatorias de igual longitud obtenidas a partir del mismo experimento, cuyos sucesos elementales son equiprobables, son también equiprobables. Sobre esta base, han de ser consideradas igualmente aleatorias.

Sin embargo, al considerar diferentes atributos de la sucesión. como, por ejemplo, el número de rachas, una de las sucesiones podría ser consideradas como más característica de un proceso estocástico que otra por los sujetos.

Consideremos las secuencias [1] y [2]:

[1] O X O X O X O X O O O X X X X O X O X O O

[2] O X O X X X X X O X O O O O X O O O X X O

Matemáticamente [1] y [2] tienen igual probabilidad $(½)^{21}$, como cualquier otra secuencia ordenada de la misma longitud aleatoriamente producida de lanzamientos de una moneda no sesgada. Sobre esta base, se las podrían juzgar igualmente aleatorias. Por otro lado, si consideramos algunos atributos específicos de las secuencias, hay un mayor número de posibles secuencias semejantes a [2] que semejantes a [1]. En este sentido, [2] se podría considerar más característica de un proceso aleatorio que [1].

Uno de estos atributos es la probabilidad de alternancia entre los dos tipos de sucesos simbolizados. Para cada secuencia binaria finita, podemos determinar las frecuencias relativas de los dos símbolos y la probabilidad condicional de cambio (o continuidad) después de cada carácter en la secuencia. Dada una secuencia de longitud n, hay n-1 posibilidades para un cambio de símbolos (todos salvo el primer carácter en una secuencia pueden ser distintos de un carácter precedente). La probabilidad de cambio en una secuencia particular P(A), se obtiene al dividir el número de cambios actuales del símbolo tipo por n-1. Los valores de P(A) de [1] y [2] están por encima de 0,7 y 0,5 respectivamente. Cuando las probabilidades de los dos símbolos son iguales, el valor de P(A) en muestras aleatorias tiende a 0,5.

Este resultado es consecuencia del principio de independencia; independientemente de lo que ya haya ocurrido en la secuencia, la probabilidad de que el carácter siguiente a uno dado sea diferente del anterior es 0,5. Las secuencias con valores de probabilidad distinta que 0,5 ocurren con menos frecuencia. Adicionalmente, las desviaciones de ese valor modal tienen igual probabilidad en las dos direcciones. De este modo, secuencias con P(A)= 0,7, que contienen más variaciones que las esperadas, tienen la misma probabilidad de suceder que secuencias con P(A)=0,3, en las que hay menos variaciones (series largas) de las esperadas.

También la secuencia [2] es considerada más aleatoria que la [1], desde la perspectiva de la teoría de la información. La aleatoriedad, en esta teoría, se define como una medida de complejidad (Fine 1973, Cap 5). La secuencia [1] podría codificarse como 4 OX 3 O 4 X 2 OX 2 O, dando una medida de complejidad 12/21 = 0,57. Esta medida es la razón del número de caracteres del código y el número de caracteres de la sucesión. Hay 18 caracteres en el código de [2], solo algo menos de los 21 caracteres originales; esta medida de complejidad 18/21 = 0,86 es muy cercana al valor máximo de 1. Usando este esquema de código, [2] es considerado más aleatorio que [1], porque comparado con [1], no se puede comprimir sustancialmente. Pese a las razones matemáticas para considerar [2] más aleatoria que [1], las investigaciones psicológicas han mostrado que la mayoría de los sujetos tienen una concepción opuesta de las secuencias aleatorias. Al seleccionar secuencias aleatorias, la gente prefiere secuencias que incluyan más alternancias de las que ocurren típicamente (Falk, 1975, 1981, 1991). La conocida falacia del jugador, según la cual las cruces son consideradas más probables que las caras después de una serie de caras consecutivas, puede estar basada en esta creencia.

Tversky y Kahneman (1982) explican estos resultados por su teoría de las heurísticas. Para ellos, el juicio de que [1] es más aleatorio que [2] se basa en una incorrecta creencia en que las pequeñas muestras deberían parecerse a la población de la que proceden (Tversky y Kahneman, 1971). [2] se juzga menos aleatorio porque tiene rachas largas (ejemplo XXXXX), lo que no representa una distribución equitativa de símbolos de la población. Las secuencias aleatorias también deberían evitar los modelos obvios. La perfecta alternancia es, por consiguiente, juzgada no aleatoria. Para considerar una secuencia con máxima aleatoriedad, debe haber un equilibrio entre evitar patrones simples de alternancia y mantener un número de símbolos tipos equitativo en cualquiera de sus segmentos.

En los trabajos de Kahneman y Tversky los juicios de aleatoriedad se basan en la noción de similaridad. Las características de una muestra se comparan con las correspondientes características de la población. La investigación de Konold y Falk (1992) sostiene una hipótesis alternativa. Que las percepciones de la aleatoriedad se basan en la valoración de la complejidad. La complejidad de una secuencia se valora midiendo la dificultad de codificarla. Nosotros frecuentemente necesitamos copiar o memorizar la información. Si esta información puede reorganizarse en trozos significativos, se puede memorizar o copiar más fácilmente.

Trocear una secuencia es obviamente un camino para comprender los datos. Por lo tanto, las valoraciones de la truncabilidad de una secuencia son también juicios sobre su dificultad de codificación. En consecuencia, estos autores sugieren que se hace uso de este tipo de juicios en la valoración de la aleatoriedad en una secuencia. En su informe, usan el tiempo requerido para memorizar una secuencia como medida de dificultad en la codificación. Comparan estos tiempos con anteriores resultados de investigaciones, en las que los sujetos tasan la aleatoriedad de secuencias similares. Si los juicios aleatorios están enraizados en valoraciones de complejidad, esperan que las secuencias que fueran más difíciles de memorizar serían consideradas como más aleatorias.

Sus conclusiones apoyan la hipótesis de que los juicios sobre aleatoriedad están mediatizados por valoraciones subjetivas de la complejidad. Consideran que ello puede tener importantes implicaciones en la instrucción. Creen que la introducción de la idea de aleatoriedad como el resultado de un proceso de muestreo, o a partir de la independencia estadística, puede dificultar la comprensión porque, los estudiantes carecen de una intuición anterior que pueda integrar esas ideas. Sugieren que una interpretación de la aleatoriedad como complejidad puede ser más intuitiva para el estudiante y por lo tanto proporcionaría la base en la que se podría construir una comprensión inicial del concepto.

1.4.2.3. RECONOCIMIENTO Y GENERACIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS PUNTUALES EN EL PLANO

La investigación de Piaget

Piaget e Inhelder (1951) investigaron la comprensión de los niños sobre lo que ellos llamaron "distribuciones uniformes", que en realidad eran distribuciones de Poisson en el plano. Estos autores piensan que es usual observar la distribución de las gotas de lluvia sobre un embaldosado. La técnica experimental es la siguiente: una hoja de papel blanco es dividida en cuadrados de 2 o 3 cm, y algunas fichas se lanzan sobre la hoja de papel al azar. Simulando gotas de lluvia, se pide al niño que prevea dónde caerán las gotas de lluvia sucesivas y cómo se efectuará la distribución, cuando aumentamos el número de gotas.

Los niños saben que, cuando cae la lluvia, habrá gotas por todas partes, aunque ello no implica que comprendan que la distribución es, a la vez, aleatoria y cada vez más regular. En el primer estadio, el niño está convencido de la distribución regular de la lluvia. Cuando trata de reproducirla, distribuye las gotas sistemáticamente, de modo que van rellenando uno a uno todos los cuadrados, antes de repetir uno de ellos.

Al preguntarles donde caería la siguiente gota de lluvia, los niños del estadio 1 (6 a 9 años) las distribuían aproximadamente en igual número sobre cada cuadro de la cuadrícula. Si la retícula tenía todos los cuadros con alguna gota, excepto un cuadro vacío, los niños colocaban la gota en el cuadro vacío, de modo que se lograse un patrón uniforme. El deseo de regularidad dominó las predicciones de los niños.

En el estadio 2 (9 a 12 años) se aceptaba la irregularidad de la distribución, aunque el cuadrado "seco" se veía todavía como el más probable para recibir la siguiente gota. Las reacciones del segundo estadio progresan, ya que la uniformidad de la distribución se comprende como, a la vez, creciente y debida al azar. Ya no se encuentran sujetos que repartan uniformemente las gotas en todos los cuadrados. Pero la comprensión de la ley de los grandes números es sólo intuitiva y empírica, faltándoles aún la idea de la proporcionalidad de las diferencias de las frecuencias entre las diferentes celdas respecto al número total de gotas distribuidas. El niño de 7 a 12 años no tiene la noción métrica de proporción, porque considera las frecuencias como absolutas y no como relativas. Sin embargo, los sujetos poseen una intuición cualitativa de la proporcionalidad. Entrevén la compensación creciente del número de gotas colocadas en cada una de las celdas, aunque no las puedan expresar como proporcionalidad cuantitativa.

Con el estadio 3, por el contrario, la distribución uniformemente progresiva se atribuye por fin a las diferencias decrecientemente proporcionales no absolutas, sino relativas. Comprenden finalmente el mecanismo de la compensación progresiva. En función del número cada vez mayor de gotas, la diferencia entre las baldosas cada vez disminuye más, no en forma absoluta, sino en forma relativa. La ley de los grandes números se comprende por su doble aspecto combinatorio y proporcional. En este estadio (12 años o más) aparece el razonamiento proporcional y Piaget e Inhelder creen que los niños comprenden la ley de los grandes números, que establece que, con número creciente de gotas, la regularidad se incrementa en términos proporcionales.

Las investigaciones de Green y Toohey

Green (1989) realiza una investigación sobre este tipo de tarea. En una muestra restringida pidió a los niños que rellenasen una cuadrícula con gotas de lluvia, en la forma que piensan que ocurriría en la realidad. Clasificó las distribuciones obtenidas en los tipos siguientes:

a) Una gota en cada cuadrado de la retícula.
b) Distribución de las gotas por los bordes de la retícula, dejando vacío el interior.
c) Distribución aleatoria.

Utilizó este tipo de respuestas como opciones en una pregunta similar con formato de opciones múltiples, con 320 niños de 11 a 16 años. Quedó sorprendido al ver un mejor comportamiento en los más jóvenes, de los que casi la mitad seleccionó el patrón aleatorio. En general encontró que los niños más inteligentes seleccionaban con mayor frecuencia que sus compañeros el patrón regular. Estos dos hechos le plantearon serias dudas sobre la relevancia de los estadios de desarrollo cognitivo sugeridos por la teoría de Piaget.

Una variación de este ítem se incorporó en un estudio longitudinal con 2930 escolares. (Green, 1983 b). Con sorpresa observó que el porcentaje de niños que seleccionaba la distribución aleatoria o semialeatoria descendía al aumentar la edad. Al no encontrar explicación a este hecho, intentó refinar el ítem utilizado y preparó una nueva prueba con 1600 niños de 7 a 11 años (Green, 1988).

Aunque descendía, al aumentar la edad, el porcentaje de los alumnos que elegían el patrón regular, no encontró un aumento apreciable de elección del patrón aleatorio o semialeatorio después de los 8 años. (No encontró diferencias significativas respecto al sexo, pero sí respecto a la habilidad general de razonamiento, evaluada subjetivamente por el profesor del niño). Ello le llevó a preguntarse si éste ítem, tomado de las investigaciones de Piaget, medía realmente la concepción sobre la aleatoriedad, la comprensión de la ley de los grandes números o el conocimiento del fenómeno físico de la lluvia.

Con el fin de evitar la interferencia con este último aspecto, ideó una variante del ítem consistente en numerar los cuadros de la cuadrícula y rellenarlos con una x, en función de la extracción de una serie de bolas numeradas de una urna. El ítem, en formato de opciones múltiples, mostraba ocho patrones diferentes, que se suponía habían sido rellenados por niños que jugaron este juego, preguntando cuál de los niños hizo trampas.

La mayoría de los niños rechazaban los patrones extremadamente regulares, aunque a veces no reconocían la posible irregularidad de patrones aleatorios, la posibilidad de ocurrencia de cuadros vacíos o con múltiples resultados, etc. Observó que muchos niños se concentraban más en el patrón visual general que en las frecuencias de la celdas individuales.

Posteriormente, construyó una serie de tests para medir la concepciones de los niños sobre las sucesiones aleatorias lineales y distribuciones aleatorias de puntos en el plano. Respecto a estas últimas, utiliza los siguientes tipos de tarea:

a) Reconocimiento de distribuciones puntuales aleatorias en el plano:

a1) Simulando la caída de lluvia o nieve sobre un pavimento, con formato de opciones múltiples. Las opciones a elegir incluían distribuciones aleatorias, regurales, semialeatorias.

a2) Simulando la extracción de bolas numeradas de una urna y rellenando una cuadrícula numerada, de acuerdo con el resultado de la extracción. Se presenta al niño varios resultados posibles obtenidos por diferentes niños que han jugado a este juego y se le pregunta cuál o cuáles hacen trampas.

Entre las variables de tarea consideradas, se encuentran el número de cuadros vacíos en la cuadrícula, la colocación de los puntos dentro del cuadro (centrada o irregular) y la distribución del número de puntos por cuadro.

b) Generación de distribuciones aleatorias de puntos en el plano:

b1) Simulando la extracción de bolas numeradas de una urna y rellenando una cuadrícula numerada, de acuerdo con el resultado de la extracción. Se pide al niño rellenar diferentes números de sucesos (12, 16 y 30 en un ítem) para estudiar la consistencia de su comportamiento.

b2) Simulando el fallo de dispositivos eléctricos. Dado un dibujo de seis lámparas, cada una con 6 bombillas, en las que se supone que se han fundido un cierto número de bombillas, se pide que dibujen la posición en que esperarían estuviesen las bombillas fundidas. Se varía el número de bombillas fundidas (6 y 12).

b3) Simulando la colocación de chicos y chicas en una clase (10 chicas y 25 chicos). Las supuestas mesas están colocadas en forma de cuadrícula.

b4) Simulando la colocación de los chicos/as con zapatos negros en una clase (10 de 25). Las supuestas mesas están colocadas en forma de cuadrícula.

Los resultados obtenidos confirman sus investigaciones anteriores.

En su investigación, Toohey incluye alguno de los ítems de Green (1983 b, 1988), describiendo, a partir de sus resultados, dos perspectivas de la aleatoriedad; una local y otra global. La perspectiva local implica un mayor énfasis en la disposición de los puntos en cada cuadrado, mientras que la global se concentra en las frecuencias más que en la disposición física de los puntos. La segunda perspectiva supone un nivel superior de razonamiento, ya que requiere tener en cuenta todo el enrejado y no sólo los cuadros aislados.

1.4.3. HEURÍSTICAS Y SESGOS EN EL RAZONAMIENTO ESTOCÁSTICO

1.4.3.1. INVESTIGACIONES SOBRE HEURÍSTICAS EN PSICOLOGÍA

La investigación de los errores y conductas atípicas en la elaboración de juicios y tomas de decisiones ante situaciones probabilísticas se incluye entre los estudios sobre la racionalidad humana (Jungerman, 1983). Este no es un término genuino de la psicología científica, sino que ha sido tomado de la filosofía y economía. La definición más común de racionalidad, según este autor, consiste en decir que una acción es racional si está de acuerdo con los valores y creencias del individuo implicado o, con más precisión, si es lógica o consistente, según establece un conjunto de axiomas. En la psicología de la decisión, los modelos normativos han desempeñado un papel muy importante. La investigación se ha centrado en la descripción y explicación de las discrepancias entre las predicciones derivadas de los modelos normativos y los juicios y decisiones tomadas.

En estos estudios, la concepción antropológica de hombre racional sufre un brusco giro y se pasa a concebir el razonamiento como un hecho no basado estrictamente en unas normas lógicas. Es sobre la década de los años setenta cuando se ve un cambio en la forma de concebir el razonamiento no determinista. Trabajos de autores como Kahneman y Tversky contribuyen a este cambio en la concepción del razonamiento probabilístico, que aporta gran información a diversos campos en los que la toma de decisiones es fundamental.

Pueden distinguirse dos líneas en este debate: los investigadores "pesimistas" defienden que las decisiones y juicios bajo incertidumbre muestran a menudo errores serios y sistemáticos, debido a las características intrínsecas al sistema cognitivo humano. Los ataques más fuertes desde que Simon (1955) propuso el concepto de "racionalidad limitada" han venido de las investigaciones de Tversky y Kahneman (1982) y Nisbett y Ross (1980). Hay tres variantes en la explicación de estas violaciones: los sesgos en los juicios, explicados en el caso de la probabilidad por las heurísticas descritas en los trabajos de Kahneman *et al.* (1982); los errores representacionales, resultantes de la aplicación de mecanismos ligados a ilusiones perceptuales, que causan una deficiente percepción de los problemas de decisión y las deficiencias de tipo motivacional en la búsqueda y selección de la información.

Los investigadores "optimistas", por su lado, defienden que los juicios y decisiones son altamente eficientes y funcionales, incluso en situaciones complejas. Entre otros, se ha aplicado el argumento de metarracionalidad, que, en esencia, postula que el comportamiento de decisión que viola los principios de racionalidad aparentemente, puede ser perfectamente racional, si se tiene en cuenta el coste cognitivo de la toma racional de decisiones, frente a los posibles beneficios obtenidos en la aplicación de dichas estrategias. Por otro lado, otras explicaciones se basan en el comportamiento racional, dado que el individuo hace una interpretación del problema no acorde con la supuesta por el investigador.

Dentro de las anteriores corrientes, la que más implicaciones ha tenido en el campo de la investigación educativa es la referida al empleo de heurísticas, de acuerdo con los trabajos de Kahneman *et al.* (1982), por las posibles implicaciones que esta teoría puede tener sobre la enseñanza. Desde nuestro punto de vista, otra interpretación muy diferente de algunos de los errores y sesgos asociados a la resolución de problemas probabilísticos, es en términos de obstáculos epistemológicos o didácticos en el aprendizaje (Brousseau, 1983). A continuación exponemos un breve resumen de la primera de estas teorías siguiendo a Pérez Echeverría (1990).

Esta autora indica que los trabajos recientes sobre las tomas de decisiones se han basado en las teorías cognitivas y del procesamiento de la información. La utilización de heurísticas es característica de este modelo y se describen éstas como *"mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos con la complejidad de estímulos ambientales"* (pág. 51). Es decir, son principios generales que reducen tareas complejas a simples juicios. En el análisis del razonamiento probabilístico, un juicio de este tipo (heurística) sería un procedimiento que nos llevaría en forma inmediata a la solución del problema. Se diferencian de los algoritmos en que son generalmente automáticas y se aplican de forma no reflexiva sin considerar su adecuación al juicio a realizar, contrariamente al algoritmo que propone criterios concretos para su uso.

Sería necesario recordar aquí la gran diversidad de estudios hechos sobre el término "heurística/o". Como señalan Groner *et al.* (1983) hay una tendencia a emplear los términos heurística/o como etiqueta de moda para un gran número de significados diferentes que van desde "método imperfecto de solución" hasta "logro creativo". Estos autores analizan el uso de este término en Matemáticas, Psicología, Inteligencia Artificial y Toma de Decisiones. En Matemáticas lo hacen partiendo de los comentarios a la obra de Euclides por Pappus de Alejandría y citando entre otros a diversos autores que trabajaron sobre el tema, como Descartes, Leibnitz, Bolzano, etc. Modernamente Polya (1982) trata el término de heurística y en él se refiere a la comprensión del método que conduce a la solución de problemas y más concretamente a las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. Añade que la heurística se construye sobre una experiencia resultante, al mismo tiempo, de la solución de problemas y de la observación de los métodos del prójimo.

Aunque la heurística tiende a la generalidad, al estudio de métodos independientes de la cuestión tratada, y se aplique a problemas de todo tipo, Tversky y Kahneman hicieron uso del enfoque heurístico para el análisis de razonamientos probabilísticos, estudiando y analizando errores y sesgos típicos en estos razonamientos. Para estos autores las heurísticas son procesos mentales que restringen la complejidad de un problema, de modo que sea accesible al resolutor. No garantizan automáticamente la resolución del problema, al contrario del algoritmo que es un procedimiento paso a paso que produce la solución para cualquier problema, dentro de una clase dada.

En cuanto a la clasificación del tipo de heurística, ésta se hace atendiendo a la forma de acceso a la información o al proceso cognitivo empleado. Kahneman Slovic y Tversky clasifican las heurísticas utilizadas en los juicios probabilísticos en tres: representatividad, disponibilidad y ajuste y anclaje.

1.4.3.2. LA HEURÍSTICA DE LA REPRESENTATIVIDAD

La heurística de representatividad, descrita por Kahneman *et al.* (1982); Benzt, (1982); Benzt y Borovcnik, (1982 a) consiste en calcular la probabilidad de un suceso en base a la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene. En primer lugar, se prescinde del tamaño de la muestra, y con ello del estudio de la variabilidad del muestreo, produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras. En segundo, se supone que cada repetición del experimento, aunque sea limitada, ha de reproducir todas las características de la población. Por ejemplo, se espera que la frecuencia de una característica en la muestra coincida con la proporción de la misma en la población; por ello, tras una racha larga de aparición de un suceso se espera intuitivamente la aparición del suceso contrario, olvidando la independencia de los ensayos repetidos.

Mediante esta heurística, se resuelven juicios probabilísticos reduciéndolos a situaciones en las que se han dado ciertas características análogas a la presente y se establecen ciertas comparaciones con ellos. Podría decirse que con esta heurística se establece cierta relación entre un suceso probabilístico previo y algún acontecimiento asociado posterior, sirviendo el primero como modelo comparativo.

Kahneman *et al.* (1982) distinguen cuatro casos diferentes en los que se puede emplear la heurística de la representatividad, partiendo de un modelo M y un suceso X asociado a él:

a) En el caso de que M sea una clase y X un valor de una variable aleatoria definida sobre esta clase (el sueldo de un profesor o la edad de un matrimonio). Aquí los valores más representativos son los que se acercan a las medidas de tendencia central (mediana, moda, media,...). La relación de representatividad depende del conocimiento que se tenga de la distribución de probabilidad que la variable X tenga en la clase M.

b) En el caso en el que el valor que se estudia X sea un ejemplo de la clase M, como en el problema clásico en que se pregunta por la probabilidad de que una persona con unas ciertas características tenga una profesión dada. Se reconoce mejor a ejemplos más representativos que a otros menos representativos pero más frecuentes en una misma clase. Luego esta representatividad puede sesgar el reconocimiento de determinadas características.

c) Cuando el valor a estudiar X es un subconjunto de M. En este caso el subconjunto representará no sólo los valores típicos, sino la variabilidad de la población o clase. Según ésto, se puede decir que es más representativo que en cincuenta lanzamientos de monedas haya, por ejemplo 28 caras y 22 cruces a que haya 25 caras y 25 cruces.

d) En el caso en que M sea un sistema causal y X sea una posible consecuencia del mismo. Por ejemplo, M puede ser la economía y X la tasa de inflación. La posible consecuencia será representativa del sistema causal M, debido a que, normalmente, esté asociada a ella o a que la gente crea correcta o incorrectamente que M causa X.

En estas cuatro clasificaciones, el grado de representatividad de M respecto a X es diferente. En el caso a) la representatividad está determinada por la percepción de la frecuencia relativa (probabilidad), en b) y c) por la similaridad entre la clase y el ejemplo o subconjunto, y por fin en la d) por la creencia que se tenga.

La evaluación de la probabilidad de un suceso incierto es un proceso complejo que comprende la interpretación del problema, la búsqueda de la información relevante y la elección de una respuesta adecuada. La representatividad se suele usar para predecir sucesos, ya que, normalmente, los acontecimientos más probables son más representativos que los menos probables, o bien se sobreestima la correlación entre una causa y su efecto (Kahneman *et al.* 1982). Pero su uso inapropiado da lugar a diferentes sesgos en los juicios probabilísticos. Estos sesgos no son debidos a la no comprensión de las normas probabilistas o estadísticas, sino a la facilidad que tiene el uso de la representatividad por su bajo coste de razonamiento frente al uso de cálculos normativos. Estos errores no son sólo típicos en estudiantes, sino que expertos en el tema llegan a cometerlos. Tversky y Kahneman (1982) muestran los sesgos más comunes que surgen de la utilización de esta heurística y que son:

i - Insensibilidad al tamaño de la muestra.
ii - Insensibilidad a las probabilidades a priori
iii- Concepción errónea de las secuencias aleatorias.
iv - Intuiciones erróneas sobre las probabilidades de experimentos compuestos.

- <u>Insensibilidad al tamaño de la muestra.</u>

El valor esperado del estadístico de la muestra es el del parámetro en la población y no depende del tamaño de la muestra, aunque la varianza de la muestra cambia proporcionalmente a su tamaño, cambiando entonces las probabilidades de los sucesos.

Según indican Tversky y Kahneman (1971) se hace una extensión indebida de la ley de los grandes números, creyendo en la existencia de una "Ley de los pequeños números", por la que pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden. Este error se ha encontrado en individuos de niveles formativos diferentes; así Fischbein (1975) los describe en niños en etapas de formación de aprendizaje de la probabilidad y Tversky y Kahneman (1971) los describen en psicólogos con suficiente experiencia. Este error puede tener importantes consecuencias de cara a la investigación experimental, ya que los científicos que creen en la "ley de los pequeños números" sobreestiman la potencia de sus métodos estadísticos, estiman a la baja la amplitud de sus intervalos de confianza y tienen unas expectativas injustificadas en la replicabilidad de experimentos realizados con pequeñas muestras.

- <u>Concepciones erróneas de las secuencias aleatorias.</u>

En un proceso aleatorio, se espera que una parte de la trayectoria represente fielmente el proceso. Por ello, secuencias relativamente ordenadas no parecen el resultado de un proceso aleatorio. Un evidente ejemplo se da entre los jugadores de la Loto, que mayoritariamente creen que los números han de salir sin un orden, error que también ha sido descrito en investigaciones con escolares (Fischbein y Gazit 1984). En este sentido, un error típico es la llamada falacia del jugador.

-<u>Intuiciones erróneas sobre las probabilidades de experimentos compuestos.</u>

Otro error típico de esta heurística se suele dar en el cálculo de la probabilidad de un suceso en un espacio muestral producto. Se puede llegar a creer que es más probable la intersección de dos sucesos que su unión. Así, suele pensarse que es más probable encontrar un loco asesino a encontrar un hombre que solamente sea loco o que solamente sea asesino.

En sus últimos trabajos, Kahneman y Tversky mantienen que los juicios sobre probabilidad pueden estar influenciados por la representatividad, pero no dependen únicamente de ella. En cambio, si se tiene en cuenta esta heurística, aparecerán sesgos en el juicio probabilístico. Esta heurística es, de las estudiadas por Kahneman, Slovic y Tversky, la que más críticas ha sufrido. Anotemos aquí las de Wallsten (1983):

* La representatividad no se ha definido nunca a priori como uno de los rasgos específicos del suceso estudiado. Sin embargo, es fácil diferenciar a posteriori los juicios basados en razonamientos

probabilísticos y los basados en la representatividad, ya que las predicciones de esta heurística se basan en rasgos que no influyen en la probabilidad de un suceso.

* Casi todos los estudios sobre esta heurística se han hecho mediante problemas verbales con protocolos escritos y no se han tenido en cuenta las influencias que pueden tener las variables de tarea (Kilpatrick, 1978) en los procesos de resolución de dichos problemas. En Castro (1991) y Puig y Cerdán (1988) se describen diversas clasificaciones de las variables de tarea de problemas aritméticos y se reseñan investigaciones que prueban que estas variables pueden influir en el procedimiento de resolución de los problemas.

Otros autores como Bar-Hillel (1983) presentan los siguientes puntos de discrepancia:

* Según la forma de presentar las tareas, los sujetos responden a rasgos concretos, en lugar de a representaciones abstractas de la tarea. Los sujetos responden en Kahneman, Slovic y Tversky a características superficiales de la tareas en lugar de tener en cuenta datos relevantes subyacentes en esas características.

* Califican esta teoría como teoría descriptiva, al no predecir la actuación de los sujetos ni evaluar todas las variables a usar en un razonamiento probabilístico, así como tampoco busca el origen de los principios heurísticos.

* La falta de análisis estadístico de las pruebas realizadas, la ausencia del método experimental empleado y el no indicar todas las características de los sujetos usados para las pruebas.

Respecto a los trabajos de apoyo a los de Kahneman, Slovic y Tversky, se ha obtenido evidencia empírica de que el conocimiento previo de las probabilidades a priori lo utilizan los sujetos por lo menos en tres situaciones:

1) Si se tiene experiencia previa en el problema que se está estudiando (Wallsten, 1981), como en el caso del diagnóstico médico.

2) Si los sujetos no perciben las probabilidades a priori como importantes, no las tienen en cuenta en la resolución del problema.

Cuanto más pequeñas sean las muestras, más relevantes consideraran la probabilidad a priori. Bar- Hillel (1983) llega a sugerir que la falta de empleo de las probabilidades a priori se debe a la dificultad de conversión de las probabilidades previas en términos de individuos concretos, debido a fallos en los cálculos matemáticos. Con ello se ve que la facilidad del manejo del cálculo matemático y lo específico que resulte la información, pueden influir en el uso del conocimiento de las probabilidades a priori.

3) La relevancia de la información influye en la utilización de las probabilidades a priori. Si la información es concreta y comprensible, su uso será más seguro y más eficaz.

De todo este análisis podremos deducir que la heurística de la representatividad está determinada por las circunstancias, que pueden ser muy variadas, tal y como se aprecia de todas las investigaciones que se han realizado y que conllevan estudios de aspectos muy diversos. El estudio de esta heurística no está aún finalizado y consideramos de gran importancia el abordar este estudio desde una perspectiva didáctica, en la que se tenga en cuenta la estabilidad de dicha heurística frente a situaciones de aprendizaje, así como en relación con el reconocimiento o no reconocimiento de sucesiones aleatorias y sus características.

1.4.3.3. LA HEURÍSTICA DE LA DISPONIBILIDAD

Otra de las heurísticas usadas en el razonamiento probabilístico es la disponibilidad, por la que se juzgan más probables los sucesos más fáciles de recordar. Igual que con la representatividad, la presencia de errores derivados del uso de esta heurística se evalúa después de su utilización y no hay intento de predecir a priori bajo qué condiciones van a aparecer.

Como señalan Sherman y Corty (1984), esta heurística se apoya en el concepto de muestra, que es también uno de los conceptos claves en estadística. Al evaluar las probabilidades de un suceso, generalmente se usan muestras de datos para su estudio. Con ello corremos el riesgo de que la muestra no sea representativa de la población a estudiar o esté sesgada, cometiendo los consiguientes errores sistemáticos. Por nuestra parte relacionamos, al igual que Navarro- Pelayo (1991), esta heurística con una falta de adecuada capacidad de razonamiento combinatorio.

Tversky y Kahneman asocian a esta heurística dos fenómenos característicos como la "correlación ilusoria" y la construcción de escenarios. El primero de ellos es el fenómeno que se atribuye a aquellos estudios en los que se pretende establecer una correlación entre variables que parecen estar relacionadas en sentido semántico, sin estarlo en sentido estadístico, juzgando la correlación sólo a partir de los casos en que los dos caracteres están presentes y no en aquellos en que los dos están ausentes.

Respecto al segundo, se ha llegado a considerar por Kahneman, Slovic y Tversky, como una heurística per se, llamándole estos autores heurística de simulación. Así esta heurística parte de la facilidad con que se pueden construir ejemplos o "escenarios" en la valoración de probabilidades y asignaciones de causas, frente a la heurística de disponibilidad que se basa en la facilidad para encontrar ejemplos.

Pérez Echeverría (1990) indica que existen cinco casos en los que puede actuar esta heurística de simulación:

a)Valoración de la situación que ocurrirá en un futuro acontecimiento.
b)Valoración de la probabilidad de un posible suceso.
c)Valoración de las probabilidades condicionales.
d)Valoración de hechos en los que no hubiese sucedido alguno de los sucesos previos.
e)Valoración de la atribución de la causalidad.

Esta heurística da lugar a sesgos o errores que fácilmente se pueden creer generados por las heurísticas de disponibilidad o de representatividad, ya que por ejemplo la facilidad para construir un ejemplo, se puede atribuir a que acuden con rapidez a nuestra mente acontecimientos análogos o que podemos extraer de nuestra memoria los sucesos más representativos de una clase semejante.

1.4.3.4. OTRAS HEURÍSTICAS Y SESGOS EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO

El sesgo de equiprobabilidad

En los experimentos de Lecoutre (1985, 1992), Lecoutre y Durand (1988), Lecoutre y Cordier (1990), se describe la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio. Como ejemplo, usan un problema en el que se pregunta si al lanzar dos dados hay la misma probabilidad de obtener un 5 y un 6 que la de obtener dos veces un 5.

A pesar de variar el contexto y el formato de la pregunta, los resultados siempre coinciden y demuestran la estabilidad de la creencia en que los dos resultados son equiprobables. Lecoutre y sus colaboradores defienden que ello no es debido a la falta de razonamiento combinatorio, sino a que los modelos combinatorios no se asocian fácilmente con las situaciones en que interviene "el azar". Los alumnos a los que se les pasó la prueba consideran que el resultado del experimento "depende del azar" y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables.

Ajuste y anclaje

Con esta heurística se suelen utilizar estimaciones parciales iniciales no bien ajustadas, en el cálculo de una probabilidad compleja. Según Tversky y Kahneman (1974) se suelen hacer estimaciones según un valor inicial que se utiliza para tener la respuesta final. El punto de partida para este cálculo puede ser la formulación de un problema o el resultado de un caso parcial, donde los ajustes no son adecuados. Partiendo desde puntos distintos se producen estimaciones diferentes y sesgadas hacia los valores iniciales. Supongamos, por ejemplo, que queremos calcular el número de permutaciones de cinco objetos, que es 5! = 5x4x3x2x1 = 120. Podemos hacer una estimación sabiendo que las permutaciones de 4 objetos son 24 y calcular como permutaciones de 5 objetos un número algo mayor, por ejemplo 30 ó 40. Podemos también partir del cálculo 5x4 = 20 y estimar un número alrededor de este valor. A este fenómeno le denominan anclaje.

Hay diferencia de opinión respecto a esta heurística, ya que autores como Vega (1984) lo consideran un caso especial de la heurística de disponibilidad, y creen que ciertos errores que se cometen en las estimaciones pueden estar motivados por los cálculos incompletos que se reflejan en la información del problema. También se puede considerar esta heurística al interpretar erróneamente la probabilidad de acontecimientos compuestos por la intersección de sucesos (Sherman y Corty, 1984), originando errores de sobreestimación de la probabilidad de la intersección, cuando la probabilidad de los primeros sucesos que se observan es muy alta y no se hace un adecuado ajuste de los siguientes sucesos.

Análogamente, en acontecimientos varios donde debe ocurrir al menos uno de ellos (sucesos disjuntos), la probabilidad de cada uno es muy pequeña, aunque no lo sea la de su unión. Pero por el anclaje que puede existir, la probabilidad final se puede subestimar. También y debido a un insuficiente ajuste, la información recibida en primer lugar puede llevar a inferir estimaciones erróneas de posibles exploraciones posteriores.

Errores sobre la probabilidad condicional

Diversos autores como Falk (1986 a, 1986 b), Bar-Hillel (1983); Borovcnik (1988) han estudiado las dificultades de los alumnos con la probabilidad condicional; además del error señalado por Steinbring (1986) respecto a la falta de apreciación de la independencia de ensayos sucesivos, les resulta difícil comprender que la probabilidad de un suceso pueda condicionarse por otro que ocurra después que él. Estos sujetos encontrarían sin sentido una pregunta sobre la probabilidad de que la madre de una persona de ojos azules tenga ojos azules. Falk sugiere que esto puede ser debido a una confusión entre condicionamiento y causación. También se confunden con frecuencia las probabilidades $P(B|A)$ y $P(A|B)$. En particular esto ocurre en la interpretación dada por los estudiantes universitarios al nivel de significación en un contraste de hipótesis (Falk, 1986 a), (Vallecillos, 1992, 1994). Este concepto se define usando una probabilidad condicional como "la probabilidad de rechazar una hipótesis nula cierta" y es interpretado por algunos sujetos como "la probabilidad de que sea cierta una hipótesis nula rechazada".

1.4.3.5. EFECTO DE LA INSTRUCCIÓN SOBRE LAS HEURÍSTICAS Y SESGOS

En las entrevistas realizadas en la primera parte de nuestro trabajo exploramos el posible efecto de algunos experimentos simples de enseñanza basados en la simulación, sobre el empleo de heurísticas y sobre los sesgos manifestados por los alumnos. En esta sección recogemos los resultados de otros experimentos de enseñanza sobre las heurísticas y sesgos en el razonamiento estocástico.

Shaughnessy (1992) indica que, en los últimos años, los educadores matemáticos han puesto mucho interés en la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos estocásticos. Estas investigaciones pueden clasificarse en tres tipos:

- Estudios de la viabilidad de la enseñanza de ciertos temas de probabilidad y estadística para alumnos de enseñanza primaria y secundaria.
- Investigaciones sobre el efecto de la enseñanza de la probabilidad en otras variables como las actitudes, la simbolización, o el cálculo.
- Estudios que compararon los efectos de algunas aproximaciones para enseñar una unidad de probabilidad.

La mayor parte de estas investigaciones indican que los alumnos de últimos cursos de primaria y de enseñanza media ya poseen alguna idea de probabilidad antes de su instrucción, y que es posible enseñarles conceptos estocásticos. También se ha encontrado relación entre diferentes pruebas de inteligencia general y el éxito en los tests de probabilidad.

En su capítulo, Shaughnessy considera que la combinatoria debe ser considerada aparte de los conceptos estocásticos. Es verdad que la combinatoria puede ser útil para calcular probabilidades. Sin embargo, los conceptos fundamentales de aleatoriedad, independencia, distribución y parámetro, no tienen ninguna relación conceptual con la combinatoria. Nosotros no entraremos aquí en el análisis de las investigaciones sobre combinatoria, aunque, como excepción señalaremos la investigación de Navarro-Pelayo (1994), ya que ha sido realizada dentro de nuestro equipo de investigación. En esta tesis se mostró que la enseñanza mejora la capacidad general de resolución de problemas combinatorios de los alumnos de Bachillerato. Sin embargo, esta mejora no fue homogénea, habiendo algunos tipos de problemas sobre los cuales la enseñanza no pareció tener resultados significativos.

Fischbein y sus colaboradores se cuentan entre los pioneros en el estudio de los cambios en las intuiciones de la probabilidad a lo largo de la instrucción. Cuando los niños, incluso los de preescolar, recibieron instrucción sobre las tareas de probabilidad similares a las propuestas por Piaget, mejoraron en sus pronósticos de los resultados (Fischbein *et al*. 1970a). Esta mejora fue más destacada entre los niños que tenían entre 9 y 10 años, lo que para Fischbein contradice la teoría de etapas de Piaget. Lo mismo ocurrió cuando se proporcionó instrucción en combinatoria (Fischbein y col. 1970b). Desgraciadamente, ninguno de estos estudios parece haber evaluado totalmente la comprensión de los niños antes de la instrucción, ni se dispuso de un grupo de control para su comparación.

En un estudio posterior, Fischbein y Gazit (1984) examinaron los efectos de la enseñanza de los conceptos de probabilidad y de frecuencia relativa, sobre las intuiciones de los niños. Cuando compararon los grupos experimental y de control, encontraron resultados diversos, en cuanto a la mejora de las intuiciones erróneas sobre la probabilidad. También parecía haber un efecto negativo de la instrucción en las tareas de comparación de Piaget; sin embargo este estudio tampoco evaluó las intuiciones de los estudiantes antes de la instrucción, por lo que no se pudo llegar a una conclusión sobre este punto. Está claro que Fischbein cree que la instrucción puede mejorar las ideas intuitivas sobre la probabilidad de los estudiantes.

En una tentativa de examinar los efectos de la instrucción sobre el uso de las heurísticas Shaughnessy realizó un experimento de enseñanza (Shaughnessy, 1977). Evaluó los conocimientos de los estudiantes y el uso que hacían de las heurísticas, por medio de cuestionarios escritos y entrevistas antes y después de la instrucción. Unas tareas parecidas a las de Kahneman y Tversky fueron utilizadas para evaluar el empleo de las heurísticas, y los estudiantes se vieron animados a explicar por escrito o verbalmente sus respuestas. Se encontraron al final de la instrucción diferencias importantes entre las dos clases de control y las dos clases experimentales, con un uso sumamente reducido de las heurísticas en los grupos experimentales.

El curso experimental fue muy intensivo, con cinco clases a la semana. Los estudiantes realizaron muchos experimentos y simulaciones, trabajando siempre en pequeños grupos. El investigador observó y registró los cambios en sus concepciones, como por ejemplo el día en que se dieron cuenta de que hay 64 posibilidades diferentes cuando se lanzan seis monedas a cara o cruz, o el día que experimentaron con chinchetas y comprendieron que no todos los experimentos aleatorios tienen resultados equiprobables. Los estudiantes mantuvieron un diario de todos sus experimentos en la clase y de todos los problemas planteados, con sus comentarios personales sobre lo que habían aprendido.

Aunque el curso tuvo mucho éxito, algunos estudiantes no cambiaron sus creencias. Shaughnessy deduce que resulta muy difícil sustituir las concepciones erróneas por una concepción normativa, una intuición primaria por una intuición secundaria, o bien el empleo de una heurística por el de un procedimiento matemático.

Atribuyó su éxito al modelo de enseñanza que había utilizado. En este modelo, los estudiantes tenían que interesarse en la tarea, adivinando el resultado del experimento. Después tenían que recoger y organizar datos para contestar una serie de preguntas. Comparaban sus resultados experimentales con sus predicciones iniciales, lo que permitía confrontar las concepciones erróneas con la evidencia experimental. Finalmente se construía un modelo de probabilidad teórica para explicar los resultados experimentales.

El potencial que tiene este tipo de enseñanza fue notado por Del Mas y Bart (1989). Estos investigadores idearon una tarea en la que los estudiantes compararon sus predicciones sobre las secuencias aleatorias obtenidas al lanzar sucesivamente una moneda, con los resultados producidos experimentalmente.

La experiencia demostró un aumento apreciable en el uso de una explicación normativa entre los estudiantes del grupo experimental, junto con una disminución de explicaciones normativas en el grupo de control. Del Mas y Bart concluyen que obligar a los estudiantes a comparar explícitamente sus predicciones con los resultados empíricos, les ayuda a emplear el modelo probabilístico normativo. Por el contrario, sus resultados también sugieren que los estudiantes que no tienen la oportunidad de confrontar sus conceptos estocásticos erróneos, acabarán fiándose aún mucho más de las heurísticas después de la instrucción.

Durante bastante tiempo los investigadores de probabilidad y estadística han insistido en que la instrucción en probabilidad no es suficiente para superar los conceptos e intuiciones erróneas. Del Mas y Bart muestran que no sólo es insuficiente la instrucción tradicional, sino que puede tener efectos negativos en la comprensión de los sucesos estocásticos en los estudiantes. Se necesita una mayor investigación de este tipo para confirmar los resultados de Del Mas y Bart, pero las implicaciones de su estudio plantean un desafío enorme a los educadores de matemáticas y estadística.

Garfield y Del Mas (1989) utilizaron un programa de ordenador, llamado "Coin Toss", para examinar los efectos de su uso en la enseñanza sobre las concepciones erróneas en probabilidad. El software mostraba la variabilidad de muestras y el efecto del tamaño de la muestra. Sus resultados fueron positivos, pero gran número de estudiantes persistieron en sus errores después de la experiencia.

En Garfield y Del Mas (1991) informan de un nuevo estudio extenso sobre la estabilidad de las concepciones probabilísticas de los alumnos. Sobre una muestra de 78 alumnos realizan una prueba pretest-postest, explorando la consistencia de los estudiantes respecto a la respuesta en los diferentes ítems. En contraste con la literatura de investigación, encuentran que los alumnos no parecen emplear una estrategia consistente para resolver los problemas probabilísticos. En lugar de ello, las estrategias parecen variar ítem a ítem. Sugieren que el contexto del problema puede oscurecer los detalles matemáticos relevantes. No obtienen conclusiones generales sobre la utilidad del logicial respecto a la mejora sistemática del razonamiento de los alumnos. Aunque los alumnos empleaban, al menos parcialmente, una estrategia correcta en el pretest, parecen mejorar con la instrucción. Sin embargo, muchos estudiantes también pasaron de una estrategia incorrecta a otra incorrecta o de una correcta a otra incorrecta.

Konold (1989) describe un experimento de enseñanza con ordenador. Encontró que algunos estudiantes cambiaron sus interpretaciones de las tareas de la probabilidad después de la instrucción, mientras que otros también persistieron en mantener interpretaciones no normativas de las tareas. Konold interpreta en la forma siguiente sus resultados. Mucho antes de su instrucción formal en probabilidad, los estudiantes han tratado numerosas situaciones que implicaban incertidumbre y han aprendido a utilizar palabras como probable, casual, independencia, suerte, azar, justo e improbable. Tienen una comprensión intuitiva que les permite elaborar frases con estas palabras, comprensibles para los demás en situaciones cotidianas. Es en esta red de significados en la que los estudiantes intentan integrar y utilizar correctamente su experiencia en el aula. La teoría de Konold es que algunas de estas intuiciones previas de los estudiantes sobre la probabilidad no pueden llegar a ser suficientemente comprobadas o refutadas en el aula.

Konold sugiere la siguiente técnica de enseñanza para confrontar y superar estas concepciones erróneas. Consiste en animar a los estudiantes a:

1. Investigar si sus creencias coinciden con las de otros.
2. Investigar si sus creencias son compatibles con sus propias creencias sobre otras cosas afines.

3. Investigar si sus creencias están confirmadas por la evidencia empírica.

Cox y Mow (1992) realizan una experiencia clínica con estudiantes universitarios en la que confrontan a los sujetos con sus razonamiento probabilísticos incorrectos. No obtienen un efecto apreciable de la experiencia sobre la superación de los sesgos manifestados por los estudiantes. Finalizan sugiriendo la necesidad de posterior investigación sobre el diseño y explotación de unidades didácticas destinadas a mejorar la capacidad de razonamiento probabilístico de los alumnos.

1.4.4. COMPRENSIÓN DE LA PROBABILIDAD DESDE EL PUNTO DE VISTA FRECUENCIAL

La interpretación frecuencial de la probabilidad o "probabilidad empírica" se restringe a fenómenos en los cuales es posible repetir indefinidamente ensayos "idénticos". Puesto que la probabilidad se define como la frecuencia en una serie larga de experimentos, no tiene sentido en esta perspectiva hablar de la probabilidad de que ocurra un suceso en un experimento del que sólo hay un ensayo aislado y único, a menos de que imaginariamente pueda repetirse el experimento. Aunque esta interpretación se considera dentro de las corrientes objetivas, no significa que esté libre de consideraciones de tipo subjetivo. Por el contrario, esta interpretación requiere que un sujeto considere que los resultados de una larga serie de experimentos puedan ser considerados idénticos, a fines de calcular la frecuencia de aparición de cada suceso particular. Por ejemplo, el hecho de que todos los lanzamientos que hacemos con una misma moneda puedan ser considerados idénticos, es, hasta cierto punto, subjetivo, ya que la persona que las lanza puede introducir sesgos en algunos de los lanzamientos.

La investigación de Konold (1989) sugiere que es frecuente la dificultad de interpretar la repetición de un experimento aleatorio como parte de una trayectoria o porción de proceso estocástico (el constituido por la realización de los n ensayos del experimento). Los sujetos que muestran esta dificultad, consideran que cada una de las repeticiones del experimento está aislada; no tiene por qué guardar relación con las anteriores o posteriores; estos sujetos tendrían dificultad en comprender un enfoque frecuencial de la probabilidad, puesto que consideran cada ensayo como un experimento aleatorio diferente del resto y no como la repetición del mismo.

Konold (1991) indica que el carácter dual del término "probabilidad" desde su nacimiento -como grado de creencia y como límite de las frecuencias relativas de una sucesión de ensayos- puede explicar esta confusión. En el "enfoque en el resultado aislado" los estudiantes hacen una interpretación errónea de las preguntas sobre probabilidad. Para estos alumnos, el fin principal de las situaciones de incertidumbre no es llegar a la probabilidad de ocurrencia, sino predecir con éxito el resultado de un ensayo simple.

Konold (1991) estudió un patrón de errores que considera más fundamental que las heurísticas descritas por Kahneman y sus colaboradores. En lugar de explorar cómo los sujetos realizan los juicios de probabilidad, se interesó por cómo interpretan las preguntas sobre la probabilidad o el valor de una probabilidad. Como resultado de sus entrevistas a estudiantes universitarios llegó a la conclusión de que éstos interpretaban una pregunta sobre la probabilidad de forma no probabilística.

Por ello, una pregunta en la que se pide explícitamente la probabilidad de un suceso se interpreta como tener que predecir si el suceso en cuestión ocurrirá o no en el siguiente experimento. Al interpretar una predicción meteorológica en la que se dan unas probabilidades de lluvia de un 70%, muchos sujetos indican que lloverá el día en cuestión. Si el día en cuestión no llueve, pensarán que el meteorólogo se equivocó en sus predicciones. Esta conducta es razonablemente consistente con la primitiva acepción de la palabra probable (Hacking, 1975), en la que un acontecimiento es probable si es verosímil que suceda. Si llueve un 70% de días para los que se pronosticó un 70% de probabilidades de lluvia, pensarán que el meteorólogo es poco fiable.

Las probabilidades, en este tipo de sujetos, se evalúan comparándolas con los valores 0%, 50% y 100%. Si una probabilidad se acerca a los extremos 0% o 100%, el suceso se considerará como imposible o seguro, respectivamente. Sólo si se acerca al 50% se considerará verdaderamente aleatorio. Los estudiantes que muestran este tipo de comportamiento, tiende a buscar explicaciones causales en lugar de aleatorias a la ocurrencia de resultados inesperados y a la variabilidad de los fenómenos aleatorios. Por ejemplo, la frase "70% de posibilidades de lluvia" se interpreta como "70% de superficie cubierta por las nubes" o "70% de humedad relativa". Asimismo se ignora la información de tipo frecuencial, prefiriendo basar los juicios en consideraciones subjetivas sobre el fenómeno en cuestión.

1.4.5. INTERPRETACIÓN ALTERNATIVA DE ALGUNOS SESGOS SOBRE PROBABILIDAD

En anteriores secciones se ha efectuado un resumen de los principales resultados obtenidos en investigaciones psicológicas referidas a estrategias incorrectas y sesgos en el razonamiento probabilístico.

En esta sección tratamos de realizar una síntesis e interpretación personal de ellos, utilizando el marco teórico sobre el significado de los objetos matemáticos descrito en Godino y Batanero (1994, en prensa).

En dicho marco teórico, que se describió en la sección 1.2 de este primer capítulo, se define el significado personal e institucional de los objetos matemáticos como el sistema de prácticas empleadas por los sujetos o instituciones para resolver los problemas de donde emergen los objetos matemáticos, validar esta solución o comunicársela a otra persona o institución.

Entre las diferentes instituciones cobra especial relevancia la institución matemática, así como las diferentes instituciones escolares. Respecto a la noción de aleatoriedad, en la sección 1.2 hemos analizado algunos componentes del significado matemático de la misma, que comprende una variedad de modelos probabilísticos, incluyendo la definición de objetos matemáticos, el estudio de sus propiedades, así como diversos procedimientos de resolución de problemas. En particular, hemos estudiado algunos de los problemas y modelos asociados a la sucesión de ensayos de Bernoulli y otros procesos estocásticos relacionados con ella.

Los resultados de diferentes investigaciones descritos en la sección 1.4 señalan todos ellos diferentes tipos de prácticas que, desde el punto de vista de la institución matemática, se consideran erróneas o no normativas y que los sujetos emplean para resolver problemas probabilísticos. Las diversas corrientes dentro de la investigación atribuyen estos errores a heurísticas en la resolución de problemas, a interpretación incorrecta de enunciados de probabilidad o a la falta de capacidad para percibir la aleatoriedad de una sucesión.

Por nuestra parte, creemos que todas estas manifestaciones de los sujetos indican que el significado personal respecto a las sucesiones de resultados aleatorios y a los modelos matemáticos que se deducen de ellas contienen elementos que se diferencian del correspondiente significado en la institución matemática. Estas diferencias de significado son posibles en los sujetos que no han recibido enseñanza de la probabilidad. Aunque en la vida ordinaria nos enfrentamos con multitud de problemas probabilísticos y toma de decisiones en ambiente de incertidumbre, estos problemas no abarcan la variedad de matices del campo de problemas asociados a las sucesiones aleatorias, que se han descrito brevemente en la sección 1.2. En consecuencia, puesto que parte del significado de los objetos matemáticos está ligado a las situaciones problemáticas y a convenios culturalmente asumidos, los sujetos que no han recibido enseñanza de la probabilidad construyen en ocasiones conjuntos de prácticas incorrectas para la solución de otros problemas más complejos, que son nuevos para ellos.

Más aún, incluso después de la enseñanza pueden persistir estas prácticas incorrectas, debido a que se ha presentado a los alumnos una muestra no representativa del campo de problemas ligado a las sucesiones aleatorias y de las prácticas matemáticas convenidas. Nuestro interés en estos errores o prácticas incorrectas es que pensamos pueden estar ligados a un excesivo énfasis, o a una aplicación incorrecta o incompleta, de una aproximación frecuencial en la enseñanza de la Probabilidad. Además creemos que podría ser posible, aprovechando las experiencias aleatorias recomendadas en este enfoque, una mejora en este tipo de prácticas incorrectas. Gradualmente, sería posible acercar el significado personal que los alumnos construyen sobre los experimentos y secuencias aleatorias al correspondiente significado matemático.

Como indica Shaughnessy (1992) el fenómeno de los errores en el razonamiento estocástico sigue siendo de interés tanto para los psicólogos como en el campo educativo. Para este autor el fin de la investigación en ambos campos es diferente y debe ser complementado. Mientras que el psicólogo es principalmente un observador y un descriptor, el educador ha de ser un interviniente en el proceso. Puesto que nuestro fin es la mejora del conocimiento estadístico por los alumnos, debemos tratar de provocar y estudiar los cambios en las prácticas incorrectas de los alumnos al resolver problemas sobre probabilidad y estadística. Como indica Scholz (1991) mientras que el interés del psicólogo se centra en el estudio aislado y estático de las concepciones, para la educación el enfoque sistémico y dinámico es el adecuado.

En esta sección abordamos esta interpretación de los resultados descritos de la investigación en los apartados anteriores. Todos ellos podrían ser debidos a que los sujetos han estado más enfrentados a problemas probabilísticos referidos a la regularidad de los procesos estocásticos que intervienen en la repetición de un ensayo y por el contrario, no han sido enfrentados al estudio de la variabilidad local. A continuación analizamos estos resultados desde la óptica señalada.

"Enfoque en el resultado aislado"

La dificultad descrita por Konold (1989) se refiere a la interpretación de la repetición de un experimento aleatorio como parte de una trayectoria o porción de proceso estocástico (el constituido por la realización de los n ensayos del experimento). Estos sujetos consideran que cada una de las repeticiones del experimento está aislada; no tiene por qué guardar relación con las anteriores o posteriores. También tendrían dificultad en comprender un enfoque frecuencial de la probabilidad, puesto que consideran cada ensayo como un experimento aleatorio diferente del resto y no como la repetición del mismo.

Estos estudiantes se centran en la predicción de sucesos individuales y no en el cálculo de la frecuencia de sucesos en una muestra de experimentos. Asimismo, tienden a atribuir explicaciones causales frente a las aleatorias, ignorando los datos referidos a las frecuencias. Se confunde la evaluación frecuencial de la probabilidad, como referida a cada suceso simple y no a un proceso estocástico del que dicho suceso forma parte. Dichos sujetos darían una estimación subjetiva de la probabilidad de un suceso, sin tener en cuenta las frecuencias de aparición de los mismos.

Estos sujetos podrían tener dificultad en la identificación de un fenómeno de masas como equivalente a las distintas repeticiones de un mismo experimento. Es la misma dificultad que hemos señalado podrían tener algunos niños para admitir que los experimentos realizados individualmente en clase pudiesen considerarse como idénticos. Pensamos que ello podría ser debido a que existen pocas situaciones problemáticas en la vida diaria que requieren la recogida de datos frecuenciales sobre fenómenos aleatorios y su utilización para hacer predicciones sobre su comportamiento futuro. Asimismo, en la enseñanza son mucho más frecuentes los problemas sobre probabilidades de tipo laplaciano que sobre probabilidades de tipo frecuencial. Posiblemente, el nuevo enfoque recomendado de la enseñanza pudiera contribuir a mejorar este tipo de error en la interpretación de la probabilidades frecuenciales, siempre que se enfatice el estudio del proceso estocástico frente a los sucesos aislados.

"Recencia positiva y negativa"

La "recencia negativa" (negative recency) consiste en la tendencia que presentan ciertos sujetos a creer, por ejemplo, que después de una racha de caras, las cruces tendrían una mayor posibilidad de aparición.

Es uno de los sesgos que se supone explicado por la heurística de la representatividad. Sin embargo, podría también ser explicado por el hecho de que los problemas probabilísticos de la vida diaria, así como los escolares, se centran en la tendencia de los fenómenos aleatorios, más que en el estudio de su variabilidad. Si el sujeto llega a comprender la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad, sin apreciar la variabilidad de esta convergencia y su carácter estocástico, es lógico suponer que al aumentar el número de lanzamientos, deban equilibrarse los resultados para obtener una frecuencia cada vez más cercana a la probabilidad teórica.

El caso de "recencia" positiva consiste en creer que después de una racha, por ejemplo de caras, sería más probable que apareciese otra cara de nuevo. Tiene una interpretación análoga, al poder suponerse que se está trabajando con un dispositivo sesgado, ya que no se encuentra la convergencia a la probabilidad tan pronto como se esperaba.

Insensibilidad al tamaño muestral

Algunos sujetos no toman en cuenta el efecto del tamaño muestral sobre la variabilidad de los estadísticos. Como ejemplo podemos citar las respuestas dadas al "problema del hospital" descrito en Kahneman y Tversky.

Estos sujetos, según nuestra interpretación, podrían creer que la regularidad del proceso estocástico debiera presentarse localmente, al reducir el proceso a su tendencia. Como hemos señalado, la frecuencia tiende a la probabilidad, confirmando nuestra intuición, pero sólo en grandes muestras. Otros fenómenos del proceso estocástico, como el número de cortes de la trayectoria con el eje, no se estabilizan, sin embargo, con el tiempo. Podría darse el caso de que individuos que sí son sensibles al tamaño muestral, generalizasen la ley de los grandes números en otra forma indebida: la de suponer que todas las características estocásticas se estabilizan con el tiempo.

Otros hechos atribuidos a la representatividad

En ensayos repetidos, se considera, por ejemplo, menos probable la secuencia CCCCCC que la secuencia CCXXCX. Se reduce el proceso a la proporción, teniendo en cuenta sólo la regularidad, por lo que no se considera necesario distinguir el orden de ocurrencia. Realmente, la proporción 1 es menos probable que la 1/2. Puede ser difícil para el alumno visualizar los múltiple espacios muestrales presentes en un proceso estocástico: E, ExE, ExExE,...

Falk (1981) mostró que al preguntar cuál de dos secuencias de caras y cruces es aleatoria, los estudiantes tienden a elegir la que más cambios presente de patrón (o menos rachas). Lo mismo ocurre si se les pide que escriban una secuencia aleatoria, o bien si predicen los resultados esperados en un proceso bidimensional. Esto puede ser debido a la creencia de que el tiempo de permanencia en cada estado debe igualarse, y el número de cambios de estado debe ser frecuente.

Análogamente otras prácticas incorrectas descritas en la investigación de Green sobre producción por parte de los niños de secuencias aleatorias o distribución aleatoria de puntos en el plano indican un significado personal de los sujetos no acorde con el significado matemático. Entre estas prácticas destacamos:

- La falta de producción de rachas de un mismo resultado al escribir una secuencia "aleatoria".

- La reproducción demasiado exacta de la frecuencia relativa de cada posible resultado, no admitiendo ligeras desviaciones.
- Repartir demasiado uniformemente los puntos en una cuadrícula, no dejando ningún cuadro vacío o bien no admitiendo ningún cuadro con varios puntos en el mismo cuadro.

En consecuencia, podemos considerar que todas las investigaciones anteriormente descritas investigan diversos puntos en que se producen las diferencias entre el significado personal e institucional de los objetos matemáticos ligados a las sucesiones aleatorias. Puesto que estas diferencias han sido investigadas aisladamente en sujetos de diversa edad y formación, no poseemos información de la posible existencia de estas diversas prácticas incorrectas en alumnos de secundaria. En consecuencia, la parte experimental de la Tesis trata de completar la descripción de los significados personales que los alumnos de secundaria han construido respecto a las sucesiones aleatorias y los objetos matemáticos con ellas relacionados. Además tratamos de analizar la estabilidad de algunas de ellas a lo largo de secuencias instruccionales basadas en la simulación de experimentos aleatorios.

1.5. ENFOQUE METODOLÓGICO

1.5.1. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA METODOLOGÍA EMPLEADA

En la fase empírica del trabajo hemos realizado una evaluación de los significados personales que los alumnos de la muestra asignan a situaciones y conceptos probabilísticos. En esta sección describimos el modo en que hemos abordado los aspectos metodológicos en esta parte de la investigación, entendiendo la metodología en el sentido de Taylor y Bogdan (1986), como modo de enfocar el problema de investigación y buscar sus soluciones.

En primer lugar explicitamos nuestra posición respecto al problema de la evaluación de conocimientos matemáticos de los sujetos, que son esenciales para la investigación y la práctica en la educación matemática, como puede apreciarse en el "ICMI Study" dedicado al tema (Niss, 1993).

Entendemos la evaluación en el sentido de Romberg *et a*l. (1991): "*La intención es evaluar la creación de conocimientos y los procesos implicados, más bien que medir el grado en que los estudiantes han adquirido una parcela del campo de las matemáticas; se precisa una variedad más amplia de medidas, muchas de ellas cualitativas*" (p. 35). Por consiguiente, frente a una única medida de los conocimientos de los alumnos hemos preferido fuentes múltiples de datos y variables de tipo diverso.

Nuestra investigación combina elementos cuantitativos y cualitativos, por lo que nos encontramos en un punto intermedio entre ambos paradigmas de investigación (Shulman, 1989). Por un lado, las principales variables de interés son de tipo cualitativo, ya que el fin principal de la investigación es interpretativo (Kirk y Miller, 1986), (Denzin y Lincoln, 1994). Nos interesamos más por los componentes cualitativos de los significados personales que los alumnos de la muestra asignan a las situaciones estocásticas planteadas, y a los objetos matemáticos que derivan de ella, que en los porcentajes de respuestas correctas o incorrectas a estas actividades. Se han utilizado entrevistas en profundidad, como método de recogida de datos, así como análisis de los argumentos de los alumnos. Asimismo, para la interpretación de las respuestas de los alumnos, nos apoyamos en el estudio previo, matemático, filosófico y psicológico que se ha presentado en este primer capítulo y es de tipo cualitativo.

Por otro lado, se han recogido datos de una muestra de estudiantes de tamaño moderado, empleando un cuestionario y se han obtenido indicadores cuantitativos de las respuestas de los alumnos. En esta faceta del trabajo, concebimos el objeto de estudio de un modo externo y hemos intentado lograr la mayor objetividad posible. Aunque nos interesamos por la variabilidad de los casos particulares, aspiramos a que nuestras conclusiones describan tendencias aplicables a un grupo más amplio que el que ha sido estudiado. Pese a que la finalidad del estudio no es confirmatoria, utilizamos métodos estadísticos, incluso el contraste de hipótesis, aunque con filosofía exploratoria. La investigación contaba con hipótesis iniciales, que se refinaron en la segunda fase, aunque, como hemos dicho, el contraste de estas hipótesis se realiza de modo informal.

En la clasificación que hace Bisquerra (1989) de tipos de investigación en Educación, consideraríamos nuestro trabajo como investigación fundamental y básica, aunque no exenta de la preocupación por las aplicaciones de la misma. Nuestro fin principal es proporcionar nuevo conocimiento teórico sobre el campo de la enseñanza de la probabilidad, más que la solución de un problema práctico inmediato. Enfatizamos el aspecto nomotético, nos hemos orientado a la obtención de conclusiones y no a la toma de decisiones, nuestro objetivo es predictivo. Nuestra investigación es descriptiva, por su temporalización transversal y por su enfoque correlacional.

Respecto a la manipulación de las variables, caería más bien en un estudio de tipo cuasiexperimental, ya que las muestras han sido tomadas intencionalmente. Aunque no se han manipulado las variables del sujeto, hemos considerado como variable explicativa el curso al que pertenece el alumno y, además, hemos manipulado ciertas variables de tarea en el cuestionario.

Respecto a las dimensiones señaladas por Goetz y Lecompte (1988), nuestra investigación se encuentra en un punto intermedio entre el polo deductivo-inductivo, generativo-verificativo y constructivo-enumerativo. Está más inclinada hacia el aspecto objetivo, aunque también tiene en cuenta la dimensión sujetiva. Nuestras preguntas de investigación han estado guiadas por la teoría previa, especialmente el marco teórico que se describe en la sección 1.2 y las investigaciones que se describen en la sección 1.4. Sin embargo, hemos estado abiertos a nuevas ideas teóricas surgidas de la misma investigación. Las categorías de análisis han sido fijadas, en una gran parte, antes de la toma de datos, aunque hemos refinado esta categorización como consecuencia de nuestros resultados. El enfoque predominantemente objetivo lo marca el tomar como pauta de análisis de los significados personales de los estudiantes el significado institucional analizado en la sección 1.4.

Nos situamos también en una perspectiva estructuralista (Herman, 1990), ya que nos interesa no sólo la descripción de los elementos del significado personal, sino la estructura de dicho sistema. El término estructura lo tomamos del análisis de sistemas, como unidad global organizada de interrelaciones entre elementos, acciones o individuos (Morín, 1986). La modelización como sistema de los procesos didácticos nos parece útil para enfatizar un punto de vista holístico en el estudio de estos procesos y resaltar su estructura relacional.

En el proceso de análisis estructural, Herman distingue varias fases, que tendremos en cuenta en nuestra investigación:

- La reducción de la variabilidad de lo cualitativo a la noción de conjunto o universo de objetos que se diferencian entre sí desde un determinado punto de vista; esto es, la determinación de las unidades de análisis y variables.
- La clasificación y categorización de las diferentes variables.
- El establecimiento de un sistema de relaciones entre variables o entre categorías de la misma o diferentes variables, que ha sido llevado a cabo mediante el análisis de correspondencias.

Fases de la Investigación

La parte experimental de la Tesis ha estado dividida en dos fases con distinta temporalización, muestras e instrumentos de recogida de datos.

La primera fase consistió en una serie de entrevistas clínicas a un grupo reducido de alumnos y fue llevada a cabo durante el curso 1990-91. Estas entrevistas tuvieron como objetivo experimentar la viabilidad de situaciones didácticas diseñadas para llevar a cabo una enseñanza de la probabilidad en la que se introdujeran de modo intuitivo diversas nociones relativas a la componente de variabilidad de un proceso estocástico. Asimismo pretendíamos explorar las concepciones intuitivas de los alumnos participantes sobre ciertos conceptos probabilísticos implícitos en las situaciones.

El enfoque de esta primera fase fue predominantemente cualitativo, ya que se basó en la entrevista y observación de alumnos, interaccionando con ellos en su propio lenguaje. Su fin fue exploratorio. Unos primeros resultados de esta fase fueron publicados en nuestra Memoria de Tercer Ciclo (Serrano, 1993), así como en Serrano *et al.* (1992) y Serrano *et al.* (1994). En el Capítulo 2 incluimos estos resultados que han sido revisados y extendidos bajo la óptica del marco teórico en que apoyamos nuestro trabajo.

Como resultado de esta primera fase de estudio de casos (Yin, 1994), se vio la necesidad de realizar un estudio de algunos de los resultados obtenidos en una muestra mayor de estudiantes para ampliar la validez externa. Ello llevó a tomar una nueva muestra de la que se recogieron datos mediante un cuestionario escrito. Esta segunda fase de la investigación tiene un enfoque más cuantitativo, teniendo un fin más predictivo y explicativo que la fase anterior. Sus resultados se recogen en el capítulo 3.

1.5.2. POBLACIONES Y MUESTRAS

Poblaciones y muestras

En el estudio del conocimiento de los alumnos hay diferentes procesos de inferencia implicados. El interés de la psicometría está en la inferencia para cada uno de los sujetos particulares que han realizado la prueba. Sin embargo, en la investigación didáctica se trata de generalizar tanto respecto a otras tareas como respecto a otros sujetos (Cuadras, 1991). Respecto a los sujetos, la población objetivo es la de estudiantes de secundaria comprendidos entre 14 y 18 años de edad. Esta población objetivo es el ideal al que pretenderíamos, en un principio, extender nuestras conclusiones. Las posibilidades limitadas de llevar a cabo nuestro trabajo nos ha hecho fijarnos en una población más restringida.

En primer lugar, hemos limitado el tramo de edad a alumnos de 14 y 18 años, por lo que las edades interiores a este intervalo no han sido consideradas en nuestro estudio, quedando para una posterior investigación.

Además, las muestra han sido tomadas de forma intencional, dentro de los estudiantes de la ciudad de Melilla. Según Azorín y Sánchez Crespo (1986) el muestreo intencional puede estar indicado en los estudios exploratorios, para reducir costes y para obtener un mayor control del proceso, lo que se aplicaría a la fase de entrevistas. Otra justificación, que consideramos válida para la fase del cuestionario es cuando es difícil llevar a cabo un muestreo probabilístico con suficientes garantías y la característica estudiada se espera tenga una homogeneidad suficiente para poder obtener conclusiones fiables con una muestra intencional. (Ghiglione y Matalon, 1989).

Hemos incluido en la muestra un número similar de varones y hembras. Se han aproximado los tamaños de muestras de alumnos de 14 y 18 años. En cada una de la muestras se han incluido alumnos de distinto estrato social, de varios centros de Bachillerato y con un nivel variado de rendimiento en matemáticas, dado por su calificación media en los cursos anteriores en esta materia. La muestra utilizada en la fase de entrevistas ha estado limitada a 10 alumnos de cada uno de los grupos y se describe con mayor detalle en el capítulo 2. La muestra de alumnos que cumplimentó el cuestionario estuvo formada por un total de 277 alumnos y se describe con mayor detalle en el capítulo 3.

1.5.3. VARIABLES E HIPÓTESIS

a) Variables respuesta o dependientes

Siguiendo la terminología de Fox (1981), consideramos variables dependientes aquellas que se evalúan en la investigación. Estas variables son denominadas por Moore (1995) variables respuesta.

De un modo global, nuestras variables dependientes son los posibles indicadores empíricos de los cuales podemos inferir los significados que los alumnos asignan a conceptos probabilísticos. En la elección de estos indicadores somos conscientes de que, como describe Webb (1992), en la evaluación hay que tener en cuenta "*las situaciones de evaluación, las respuestas, el análisis e interpretación, así como el conocimiento que se evalúa, las características del individuo o grupo que tiene que responder y el propósito de la evaluación*" (p. 668). En consecuencia, cada uno de estos aspectos ha sido fijado en cierto modo, y estas restricciones constituyen los límites asumidos de nuestro estudio.

Dentro de las respuestas obtenidas de los alumnos, hemos utilizado variables de tipo cuantitativo y cualitativo.

Entre las variables de tipo cualitativo hemos analizado las siguientes:

- Opciones elegidas por los alumnos en cada uno de los ítems propuestos, tanto en la fase de entrevista, como en la de cuestionario.
- Argumentos de los alumnos, en cada uno de los ítems propuestos, tanto en la fase de entrevista, como en la fase de cuestionario. Entre estos argumentos, destacamos:
- Argumentos en los que los alumnos apoyan su consideración de una secuencia de resultados o una distribución de puntos como aleatoria o no aleatoria.
- Argumentos empleados en la asignación de probabilidades en experimentos compuestos.
- Interpretaciones dadas por los alumnos a expresiones de probabilidad, en su acepción frecuencial.
- Estrategias seguidas en la construcción de secuencias aleatorias lineales y en la distribución aleatoria de puntos en una cuadrícula.

Como variables cuantitativas consideramos:

- Número de secuencias construidas en algunos ítems de la entrevista.
- Valor estimado del número de cortes con el eje y del número de jugadas entre dos cortes sucesivos con el eje, en un recorrido aleatorio, durante la entrevista.
- Valor esperado de la ganancia en un juego en la fase de entrevista.
- Número de caras en las secuencias generadas por los alumnos, así como en cada una de las dos partes de la misma, en el cuestionario.
- Longitud de la racha más larga y número de rachas en las secuencias generadas por los alumnos en el cuestionario.
- Número de cuadros con 0, 1, 2 y 3 ó más puntos en las distribuciones aleatorias producidas por los alumnos en el ítem 3 del cuestionario.

b) Variables explicativas

Nuestra investigación trata de relacionar las variables respuesta de nuestro estudio, en función de otras variables didácticas que pueden influir en las anteriores. Preferimos designar a estas variables con el calificativo de "explicativas", que en la terminología de Moore (1995) es más adecuado que el de independiente, ya que no hemos tenido un control de tipo experimental puro.

Hemos considerado como variable explicativa el *grupo* del alumno (Primer Curso de Bachillerato o Primer Curso de Magisterio en la fase de entrevistas; Primer Curso de Bachillerato y COU en la fase de cuestionario). Somos conscientes de que en esta variable se encuentran, en realidad, dos variables confundidas, que son la diferencia de edad de los alumnos y el haber recibido o no enseñanza en probabilidad. Por ello, de nuestro estudio no puede deducirse si las diferencias encontradas son atribuibles a una u otra variable. Este es un posible problema abierto para continuar nuestro trabajo, aunque consideramos que las conclusiones obtenidas sobre las diferencias son ya una aportación importante, aún cuando no se hallen suficientemente explicadas.

Otras variables explicativas consideradas en la fase de cuestionario son las siguientes:

- Opción correcta o incorrecta para el análisis de los argumentos en los ítems 5, 6, 7, 8 y 9.2 del cuestionario.
- Respuesta "hizo trampas" o "no hizo trampas" para el análisis de los argumentos en cada uno de los apartados de los ítems 3 y 4, y en el análisis de correspondencia conjunto de estos argumentos.
- Características del ítem (distribución lineal o plana; homogeneidad o variabilidad) en el análisis de correspondencia de los argumentos de los alumnos en los ítems 3 y 4.

c) Variables extrañas controladas

Además de las variables explicativas consideradas en nuestro estudio, son muchas las posibles variables que pudieran influir en las respuestas de los alumnos. El control que hemos hecho sobre ellas es el siguiente:

Las calificaciones previas de los alumnos, sexo y clase social se han descrito para que otros investigadores puedan juzgar la comparabilidad de sus estudios con el que ahora presentamos.

Respecto a las tareas propuestas, el resto de variables no descritas como explicativas se han mantenido fijas o bien se han variado sistemáticamente, constituyendo también posibles variables cuyo efecto podría analizarse en estudios posteriores.

HIPÓTESIS

Una vez descritas nuestras principales variables, conviene presentar resumidamente las expectativas sobre los posibles resultados que han ido guiando la investigación en sus diferentes fases. Es en este sentido en el que entendemos el término hipótesis, y no como hipótesis estadísticas nula o de no efecto, puesto que el enfoque de nuestro trabajo no es de tipo confirmatorio.

Como indica Fox (1981) la formulación de estas hipótesis ayuda a estructurar la selección del método y técnica de recogida de datos, así como su análisis estadístico. En segundo lugar permiten comprender al lector del informe de investigación lo que el investigador espera obtener de su estudio.

Hipótesis iniciales

Puesto que las dos fases de nuestra investigación han tenido un enfoque diferente, también ha sido distinto el papel jugado por las hipótesis en cada una de ellas. La primera fase, correspondiente a las entrevistas, tuvo un carácter exploratorio y descriptivo. En algunas de las preguntas y situaciones planteadas (como los recorridos aleatorios) no disponíamos de datos previos de investigación. Por ello, no disponíamos de base suficiente para poder predecir algunos de nuestros resultados, característica que Fox (1981) señala es común en las investigaciones descriptivas.

Como hemos indicado, para la realización de esta fase se diseñaron tres situaciones didácticas a partir de las cuales queríamos plantear a los alumnos preguntas relativas a sus intuiciones sobre los procesos estocásticos subyacentes (sucesión de ensayos de Bernoulli y caminata aleatoria), así como sobre la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad. Nuestras expectativas sobre estas experiencias se pueden resumir en la forma siguiente:

H1: *Las actividades didácticas diseñadas para el estudio resultan asequibles a los alumnos que no han tenido enseñanza reglada. Por medio de ellas es posible plantearles preguntas de su interés respecto a la componente de variabilidad de los procesos estocásticos subyacentes.*

H2: *Los alumnos de la muestra aprecian la estabilización de las frecuencias relativas a largo plazo, esto es, aprecian la tendencia en el fenómeno de la convergencia estocástica.*

H3: *Los alumnos de la muestra no aprecian suficientemente la variabilidad aleatoria de los procesos estocásticos. En particular, los alumnos tienen dificultad con la idea de independencia estocástica.*

Estas hipótesis se estudiarán a partir de las opciones, argumentos, estrategias y variables cuantitativas analizadas en la fase de entrevista.

Una vez finalizada la fase de entrevistas, estas hipótesis iniciales enunciadas en forma tan amplia se vieron reforzadas. Además, los datos experimentales nos proporcionaron un apoyo para reformular las hipótesis iniciales y hacerlas más concretas. Por otro lado, tanto la obtención de algunos resultados inesperados, como la nueva revisión bibliográfica, nos permitió completar nuestras hipótesis iniciales con las que enunciamos a continuación.

Estas hipótesis se diferencian en función de los distintos apartados de nuestro cuestionario. En primer lugar hemos estado interesados por los significados que los alumnos asignan a las secuencias de ensayos de Bernoulli. Tanto nuestras entrevistas, como los resultados obtenidos en las investigaciones de otros autores, especialmente de Green, indican que los alumnos son muy exactos al reflejar las frecuencias relativas de los diferentes sucesos, pero no así la variabilidad aleatoria de las secuencias. Ello nos lleva a las hipótesis H4 y H5.

H4: *Esperamos que las respuestas de los alumnos de la muestra reflejen con notable precisión las frecuencias relativas de caras y cruces en las secuencias generadas. Asimismo esperamos que los alumnos asignen un carácter no aleatorio a las secuencias en que las frecuencias observadas difieran bastante de las esperadas.*

H5: *Suponemos que los alumnos manifestarán un sesgo de representatividad local. Es decir, producirán demasiadas rachas en las secuencias generadas y rechazarán como aleatorias aquellas secuencias con rachas largas.*

Para el estudio es estas hipótesis, utilizaremos las opciones y argumentos de los alumnos en el ítem 3 y las variables cuantitativas analizadas en el ítem 1.

Otro segundo grupo de actividades se refiere a las distribuciones aleatorias de puntos en el plano. En consistencia con las investigaciones previas, elaboramos la hipótesis H6.

H6: *Esperamos que los alumnos de la muestra distribuyan los puntos en la cuadrícula en forma que todos los resultados posibles estén representados, pero con alguna variabilidad en las frecuencias de los distintos resultados. Esta variabilidad será menor que la teórica.*

Para el estudio es esta hipótesis, utilizaremos las opciones y argumentos de los alumnos en el ítem 4 y las variables cuantitativas analizadas en el ítem 2.

La segunda parte del cuestionario evalúa el empleo por los alumnos de diversos sesgos y heurísticas en la asignación de probabilidades en experimentos compuestos. Respecto a esta parte del cuestionario hemos elaborado las hipótesis H7 y H8.

H7: *Sólo una pequeña proporción de alumnos será capaz de proporcionar respuestas correctas al total de ítems en esta parte de la prueba.*

H8: *Los principales tipos de razonamientos incorrectos que esperamos encontrar son la expectativa de una representatividad local de los procesos estocásticos, el "enfoque en el resultado aislado" y el sesgo de equiprobabilidad.*

Para el estudio es estas hipótesis, utilizaremos las opciones y argumentos de los alumnos en los ítems 5 a 8.

Por último, hemos incluido unos ítems sobre interpretación de enunciados de probabilidad en su acepción frecuencial. Sobre esta parte hemos elaborado la hipótesis H9.

H9: *Los alumnos de la muestra tienen dificultades en interpretar los enunciados propuestos desde un punto de vista probabilístico, centrándose en la predicción de un resultado. Esta dificultad, sin embargo, disminuye cuando el problema se les presenta en un contexto más familiar.*

Para el estudio es esta hipótesis, utilizaremos las opciones y argumentos de los alumnos en los ítems 9 y 10.

Todas estas hipótesis nos han sido sugeridas en gran parte por las investigaciones previas. Para completar dichas investigaciones, se ha incluido el análisis de la consistencia entre los argumentos de los alumnos y las opciones elegidas en los ítems, el estudio de las diferencias de opciones elegidas y argumentos entre los dos grupos, así como en el análisis de correspondencias entre diferentes ítems. Nuestras hipótesis sobre estos puntos son las H10 a H13.

H10: *Esperamos obtener una consistencia de los alumnos entre las opciones elegidas en los ítems y los argumentos en que se apoyan. Es decir, esperamos una correspondencia entre argumentos correctos (incorrectos) y opciones correctas (incorrectas).*

H11: *Esperamos que los argumentos de los alumnos nos permitan descubrir que algunas respuestas atribuidas en investigaciones previas a un cierto tipo de heurística (sesgo) tengan una explicación alternativa.*

H12: *Esperamos una mayor proporción de respuestas y argumentos correctos en el grupo de alumnos de 18 años. Es decir, esperamos un mejor razonamiento probabilístico en estos alumnos, respecto a sus compañeros de menor edad.*

H13: *Esperamos obtener una estructura multifactorial en cada uno de los análisis de correspondencias realizados. Ello es consecuencia de nuestros presupuestos epistemológicos sobre la naturaleza sistémica y componencial de los significados personales sobre un objeto matemático, en general, y sobre los conceptos probabilísticos en particular.*

1.5.4. TÉCNICAS DE RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS

Instrumentos de recogida de datos

En la primera fase del estudio hemos empleado una entrevista semiestructurada (Fox, 1981) para recoger datos sobre las concepciones de los alumnos participantes y sus estrategias en la resolución de las situaciones problemáticas propuestas. Como indica Gutiérrez (1991), en ocasiones se requiere un seguimiento continuo, completo y detallado de los estudiantes durante su actividad, siendo en este caso insuficiente un cuestionario para la toma de datos.

De acuerdo con lo expuesto en Sierra (1985), consideramos en esta entrevista tres elementos: a) la situación experimental en la que tratábamos de evaluar las concepciones de los alumnos sobre conceptos probabilísticos; b) el instrumento de observación, que fue un cuestionario preparado al efecto, que se presenta en el Anexo uno y c) el modo en que se realiza, que fue la interacción personal.

La entrevista fue semiestructurada, porque, aunque se tenía un guión de preguntas, éstas se variaron o completaron a juicio del investigador. Se realizó individualmente a cada uno de los alumnos participantes y el entrevistador tuvo libertad para pedir aclaraciones a los alumnos sobre el sentido de sus respuestas. Tanto las actividades como el guión de entrevista fueron cuidadosamente planeados de acuerdo con los objetivos perseguidos, teniéndose en cuenta las recomendaciones de Novak y Gowin (1988). En particular, se escogió un tema en el cual el investigador estaba ampliamente familiarizado, se procuró escuchar al alumno, tener paciencia, lograr un ambiente relajado y emplear el mismo lenguaje que el estudiante.

En la segunda fase se empleó un cuestionario que se describe en el capítulo 3. El cuestionario es indicado para ser aplicado y valorado de forma uniforme en los distintos sujetos, incluso, cuando se pase en días diferentes (Sachs, 1983), estando englobado dentro de las técnicas objetivas de recogida de datos (Scott, 1988; Thorndike, 1989).

La construcción de un cuestionario es una tarea compleja, especialmente la redacción de los ítems de prueba. Por ello en nuestro caso la mayor parte de los ítems han sido tomados de investigaciones previas, con lo que estaban suficientemente validados. Sin embargo, se han completado pidiendo a los alumnos que expliquen el por qué de la opción elegida. El tipo de pregunta fue variado, incluyendo ítems de opciones múltiples; pregunta de verdadero o falso, ambas completadas con una opción de respuesta abierta y tareas a realizar por el alumno.

Puesto que la finalidad es obtener datos a nivel profundo de los conocimientos de los alumnos, como método de recogida de datos se engloba en la medida. En ella planteamos a los sujetos unas tareas a nivel consciente para generar una medida de su conocimiento o destreza (Audrey, 1989; Dane, 1990).

Técnicas de análisis de datos

Hemos empleado diversas técnicas de análisis de datos, según la fase de la investigación.

En el análisis de las entrevistas, el primer paso ha sido la transcripción de las mismas. El análisis de contenido (Weber, 1986; Bardin, 1986) de estas transcripciones y de los cuestionarios completados por los alumnos, proporcionó una serie de categorías de respuestas en las variables consideradas en cada uno de los diferentes apartados de los ítems utilizados: estrategia seguida, argumento dado por el alumno, solución aportada, etc.

Las categorías se han obtenido mediante un proceso cíclico de comparación de respuestas similares y de agrupación o división de categorías cuando se ha considerado conveniente, según se recomienda en Miles y Huberman (1984), Huberman y Miles (1994).

Como indica Gil (1994), los datos aislados no son significativos, por lo que, una vez codificados los datos, se elaboraron tablas de frecuencias para las diferentes variables. Estas tablas se han cruzado con el grupo de alumnos, por lo que se presentan como tablas de contingencia.

Asimismo se analizaron los patrones de respuestas de los alumnos en la parte final de la entrevista, para estudiar con mayor profundidad la consistencia de estos alumnos en el empleo de la heurística de la representatividad.

En cuanto a los datos obtenidos del cuestionario, estos son de dos tipos. Por un lado, la opción elegida en cada ítem. Por otro, el argumento en que se apoya la respuesta. Para esta parte cualitativa se ha seguido el mismo proceso de categorización descrito para la fase de entrevistas.

Una vez codificados los datos, y puesto que el mayor tamaño de muestra nos lo permite, se ha procedido a un estudio de tipo inferencial para efectuar diversos tipos de comparaciones:

a) Comparación de respuestas y argumentos en los dos grupos de alumnos para comprobar la hipótesis de igualdad de distribución de respuestas (o de argumentos).

b) Comparación de argumentos según opción correcta/incorrecta al ítem, para descartar la posibilidad de que los alumnos elijan al azar una de las opciones del ítem y para comprobar su comprensión de la opción elegida.

Ambos tipos de contrastes se han hecho empleando el estadístico Chi cuadrado.

Además, en cada una de las tres partes de la prueba se ha llevado a cabo un estudio multivariante para analizar las interrelaciones entre respuestas a los diferentes ítems.

Como afirma Cornejo (1988), "*El mayor problema que se ha planteado hasta fechas muy recientes al estudio simultáneo de un gran número de variables ha sido la enorme dificultad de captar el conjunto sin perder la red fina de interrelaciones específicas*" (pg. 6). La solución viene dada hoy día por las técnicas multivariantes de análisis de los datos. Según Gras (1992) constituyen una ruptura epistemológica con la estadística clásica respecto a los objetivos, los datos tratados, el proceso, los métodos matemáticos empleados y los conceptos implícitos en los mismos. Este análisis multivariante ha sido de dos tipos diferentes:

En la primera parte de la prueba, referente a sucesiones aleatorias y distribuciones aleatorias de puntos en el plano, se han analizado las interrelaciones entre las razones dadas por los alumnos para considerar o no aleatoria la situación descrita. En total se han considerado ocho situaciones correspondientes a los cuatro apartados de los ítems 3 y 4 del cuestionario. Cada una de estas ocho situaciones se ha cruzado con las categorías comunes de argumentos de los alumnos y con la respuesta positiva o negativa al ítem, obteniendo una clasificación cruzada de tres variables a la que se ha aplicado un análisis de correspondencias simple.

El análisis de correspondencias simple permite el trabajo con variables cualitativas, y sus propiedades de equivalencia distribucional y representación dual lo hacen un instrumento especialmente valioso. Utiliza una descomposición de la ^{2} y el estudio se realiza mediante una representación gráfica conjunta de filas y columnas, que tienen aquí un papel intercambiable. Una propiedad importante de la distancia ^{2} es lo que se denomina la equivalencia distribucional: puesto que en esta distancia no intervienen los valores de la variable, sino su distribución de frecuencias, la distancia entre dos filas o columnas es independiente del código que hayamos asignado a cada categoría. Evita así la arbitrariedad de la codificación o particionamiento de la realidad (Cornejo, 1988).

El análisis de correspondencias puede entenderse también como la búsqueda de la representación dual óptima en la que filas y columnas de una tabla de contingencia juegan un papel simétrico. Por último, existe la posibilidad de representación, sobre los ejes obtenidos, de filas y columnas suplementarias, que no han intervenido en la formación de estos ejes. Esta posibilidad es considerada como un nuevo enfoque de la regresión y permite, no sólo ver en perspectiva cualquier otra variable de interés, sino posicionar "perfiles ideales" propuestos por la teoría, cuya posición privilegiada en el plano de proyección tiene siempre un carácter de "prueba" (Escofier y Pagés, 1988).

En cada uno de los otros dos apartados (uso de heurísticas e interpretación de los enunciados frecuenciales de probabilidad) se ha realizado un análisis de correspondencias múltiples de las respuestas correctas o incorrectas en cada apartado de los ítems que la componen. El análisis de correspondencias múltiple es una extensión al caso de una población clasificada por tres o más variables cualitativas y puede considerarse semejante al análisis de componentes principales para variables cuantitativas.

Las cuestiones de validez y generalizabilidad

Las fuentes de error en la investigación se derivan de los procesos de muestreo implícitos y pueden tener un carácter aleatorio o sistemático. La validez está relacionada con la falta de sesgos sistemáticos, mientras que la fiabilidad se refiere al control de los errores aleatorios, que son, hasta cierto punto inevitables, pero que podemos reducirr aumentando el tamaño de la muestra (Messick, 1991).

"*La fiabilidad concierne a la extensión por la cual un experimento, test u otro procedimiento de medida proporciona los mismos resultados en pruebas repetidas*" (Carmines y Zeller, 1979, pg. 11). "*La validez es la extensión por la que proporciona una respuesta correcta*" (Kirk y Miller, 1986, pg. 19).

Respecto a la validez, Cook y Campbell (1979) diferencian cuatro tipos: interna, externa, estadística y de constructo. Cada una de ellas debe ser juzgada en la medida en que la investigación controla los diferentes tipos de sesgos implicados y no es nunca una cuestión de existencia o no existencia, sino de grado.

En esta investigación la validez estadística se ha controlado mediante un uso adecuado de los procedimientos estadísticos empleados, que han sido escogidos entre técnicas aplicables a variables estadísticas cualitativas. Los requisitos de aplicabilidad de las pruebas chi- cuadrado, en cuanto al tamaño de las frecuencias esperadas, han sido tenidos en cuenta, reagrupando categorías semejantes cuando ha sido necesario. Por otro lado, las técnicas estadísticas han sido aplicadas con una filosofía de análisis inicial de datos (Cabriá, 1994), puesto que no hemos pretendido realizar contrastes de hipótesis formales.

El grado de validez externa viene dado por el tamaño de muestra empleado y su representatividad con respecto a otros alumnos similares. Puesto que no hacemos contrastes formales de hipótesis respecto a las variables explicativas, las cuestiones de validez interna no son pertinentes en esta investigación. Finalmente la validez de constructo viene dada por el grado en el cual los ítems empleados en los instrumentos permiten obtener indicadores empíricos de las variables respuesta de interés.

Según nuestros presupuestos teóricos, las posibles tareas relativas a los conceptos analizados constituyen una población de la cual los ítems seleccionados son una muestra. Hemos tratado de aumentar la validez de constructo mediante un análisis a priori del campo de problemas de interés, descrito en la sección 1.3 y la selección de una muestra representativa de situaciones de este campo de problemas.

Somos conscientes de que el tamaño limitado de la muestra de preguntas empleadas no permite abarcar toda la riqueza de dicho campo de problemas. No obstante, hemos tomado la opción de incluir una muestra más variada de problemas, con objeto de conseguir una mayor representatividad, frente a la opción de restringirnos a un único tipo de problema en el cual se controlasen todas las posibles variables. Esta segunda opción, a nuestro juicio, aumentaría la precisión de nuestros resultados, aunque limitaría la validez de construcción del mismo.

Puesto que consideramos que las variables objeto de nuestro estudio tienen un caracter multidimensional, hemos preferido el marco de la teoría de la generalizabilidad (Brennan, 1983), frente al cálculo de un índice clásico de fiabilidad. Los índices obtenidos se incluyen en la sección 3.3.

CAPÍTULO II ESTUDIO EXPLORATORIO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PROBABILÍSTICOS EN SITUACIÓN DE SIMULACIÓN

2.1. INTRODUCCIÓN

Al considerar la posibilidad de utilizar un enfoque frecuencial en la enseñanza de la probabilidad, basado en la realización de experiencias aleatorias, reales o simuladas, hemos analizado en la sección 1.3 cómo la sucesión de experimentos aleatorios da lugar a la noción matemática de proceso estocástico en tiempo discreto. Incluso el lanzamiento de una moneda es un modelo matemáticamente muy rico, a partir del cual se pueden plantear diversos problemas de los que emergen las principales distribuciones de probabilidad y puede ser asociado con otros procesos estocásticos; por ejemplo, los recorridos aleatorios. En estos procesos estocásticos podemos distinguir dos partes: la tendencia, representada por la regularidad global, especialmente por la frecuencia relativa de los sucesos del experimento simple en el total de ensayos, y la variabilidad local, que es mucho más rica.

Aunque son muchas las propuestas curriculares basadas en la experimentación o simulación, como en Schools Council Project (1980), Glayman y Varga (1975), Shulte y Smart (1981), Godino et al. (1988), Shaughnessy y Arcidiacono (1993), generalmente el interés se centra en el estudio de la regularidad global. Se estudian las frecuencias relativas de sucesos asociados al experimento simple o compuesto de 2 o 3 experimentos simples, y se olvida el estudio de la variabilidad del proceso. Este tema sólo es objeto de estudio en cursos especializados de algunas licenciaturas y siempre desde el punto de vista formal.

Sin embargo, con estas actividades se presenta la oportunidad de plantear problemas de los que surjan, de modo intuitivo, algunas nociones relativas a procesos estocásticos, como ya se señala en trabajos de Engel (1988), Glayman y Varga (1975) y otros autores. Entre estas nociones estarían las rachas, máximos y mínimos, tiempos de espera de un cierto suceso, probabilidades de transición, etc. No queremos sugerir un estudio formal de estos conceptos, sino plantear situaciones en que se presenten de forma implícita, de modo que el alumno pueda observar sus propiedades.

Como hemos señalado, pensamos que los errores descritos relativos a la probabilidad condicional, la falta de apreciación de un ensayo como parte de un proceso estocástico y la confianza indebida en las pequeñas muestras pudieran ser debidas a un énfasis excesivo o a un enfoque incompleto en la aproximación frecuencial de la probabilidad. De este modo, la adquisición de un significado personal incompleto sobre la probabilidad pudiera constituirse en obstáculo (Brousseau, 1983) para la comprensión posterior de otros conceptos, especialmente la probabilidad condicional y la independencia.

Por el contrario, un enfoque frecuencial en el que se estudiasen algunas propiedades sencillas, aunque fuese a nivel intuitivo, del proceso estocástico subyacente en la realización de las experiencias, puede ser un modo adecuado para la superación de las dificultades descritas. Este enfoque supondría presentar al alumno una muestra representativa de los problemas que dan origen al concepto de probabilidad, desde el punto de vista frecuencial.

En esta primera fase de la parte experimental de la tesis hemos iniciado una investigación sobre la posibilidad de efectuar esa aproximación en la enseñanza de la probabilidad con alumnos de secundaria. Como el tema es bastante complejo, se han diseñado y llevado a cabo experiencias muy controladas con un número reducido de alumnos, para estudiar el significado que los alumnos atribuyen a los objetos matemáticos que intervienen en dichas experiencias. Las preguntas que nos hemos planteado son las siguientes:

a) ¿ Cuáles son las prácticas intuitivas que realizan los alumnos al comenzar su aprendizaje de la probabilidad para resolver algunos problemas sencillos sobre una sucesión de ensayos, como, por ejemplo: Describir una trayectoria, calcular la probabilidad de transición, estimar el tiempo de espera o el tiempo medio, identificar la propiedad de pérdida de memoria, etc.?

b) ¿Cuáles de estas prácticas son incorrectas y en qué sentido? ¿Se pueden clasificar o encontrar patrones en las respuestas de los alumnos?

c) ¿Son capaces los alumnos de cambiar el modo de representación de una sucesión de ensayos a otro proceso como el recorrido aleatorio y viceversa? ¿Cuál de estos tipos de representación les resulta más intuitivo? ¿Con cuál de ellos resuelven mejor los problemas planteados?

d) ¿Son capaces los alumnos de resolver los problemas que les planteamos en las situaciones didácticas, relativos a las sucesiones de ensayos? ¿Cuáles son las dificultades que encontramos?

e) ¿Se ha producido cambio en las prácticas empleadas por los alumnos, después de la realización de las experiencias? ¿Qué tipo de cambio?

Los resultados obtenidos sobre estas preguntas se describen en el resto de este capítulo.

2.2. DESCRIPCIÓN DEL GUIÓN DE ENTREVISTA Y DE LA MUESTRA DE ALUMNOS

La prueba utilizada en esta primera fase del trabajo experimental se incluye en el Anexo 1 y consta de diecisiete preguntas/actividades divididas en cuatro apartados, en los que se han tratado los siguientes conceptos: experimentos aleatorios, sucesiones de

Bernoulli, recorridos aleatorios y esperanza matemática, representatividad, frecuencias relativas y su representación. Aunque se ha preparado un guión de entrevista compuesto de las referidas preguntas para su realización, está pensada para ser propuesta individualmente a cada uno de los alumnos, y combina la respuesta a las preguntas, con la realización de experimentos aleatorios (o su simulación) y el registro gráfico de sus resultados.

Las entrevistas estaban dirigidas a alumnos que acababan de terminar el C.O.U. y a otros que acababan de terminar la E.G.B., de un nivel socio-cultural medio y homogéneo de la ciudad de Melilla. Al elegir estas dos clases de alumnos el fin pretendido fue estudiar las diferencias en las concepciones de estos dos grupos de alumnos, ya que los primeros tienen una mayor edad y han recibido instrucción en probabilidad durante el bachillerato. Puesto que la muestra es reducida e intencional, la intención del estudio es exploratoria y no se pretende la generalización de los resultados.

La muestra estaba formada por diez alumnos de primer curso de bachillerato y otros diez de primer curso de magisterio, siendo la edad de los alumnos de bachillerato entre catorce y quince años y en los alumnos de magisterio entre diecisiete y diecinueve años. El motivo por el que se eligió estos alumnos de magisterio fue la facilidad de acceso a los mismo y el hecho de que, al realizar las entrevistas durante los primeros días del curso académico, podemos considerarlos similares a otros alumnos que acaban de finalizar el bachillerato. No obstante somos conscientes de las limitaciones en las posibilidades de generalización de nuestro estudio, al tratarse de una muestra restringida. Esta muestra, que se obtuvo de forma aleatoria, entre un número aproximado de 40 alumnos de los citados cursos, contaba con una distribución de cuatro mujeres en el grupo de bachillerato y de seis en el segundo grupo, magisterio. En cuanto a sus calificaciones, el rango de calificaciones ha variado desde sobresaliente en las calificaciones previas, hasta aprobado, siendo sus notas medias en la asignatura de matemáticas de notable alto en los alumnos de bachillerato y de bien en el grupo de magisterio.

La prueba se pasó individualmente a cada sujeto, utilizando para ello una bolsa con dos bolas de dos colores diferentes (verde, rojo), dos fichas del mismo color y material, pero con una inscripción que las diferenciara (femenino, masculino), magnetofón en el que se grabaran los comentarios en las realizaciones de la prueba, guión de la prueba para cada alumno y un guión de dirección para el investigador. Se ha puesto el mayor cuidado en no influir sobre la respuesta de los alumnos, así como en darles el suficiente tiempo de reflexión en sus respuestas. Al disponerse del registro de la entrevista en magnetofón, además del formulario cumplimentado, se podía interpretar cualquier duda en el proceso de codificación, así como verificar la fiabilidad de este proceso. Puesto que el estudio es cualitativo y exploratorio, no considero adecuado el cálculo de un índice cuantitativo de fiabilidad, como por ejemplo el de Cronbach. Sin embargo, la categorización fue revisada por otro investigador del Departamento. A continuación se describe el contenido del cuestionario.

PRIMER APARTADO : Percepción subjetiva de la aleatoriedad

Este apartado consta de dos ítems: 1.1 y 1.2. En él proponemos dos situaciones diferentes para estudiar cómo los sujetos perciben las características de la aleatoriedad en sucesos de este tipo.

Ítem 1.1.- Juan lanza una moneda diez veces y su compañero Pedro va anotando los resultados obtenidos. Después Pedro muestra a Juan tres listas de resultados de las que Juan elegirá la verdadera. ¿Cuál crees tú que sería la verdadera de las tres siguientes?:

a) C,C,C,C,C,X,X,X,X,X

b) C,X,C,X,C,X,C,X,C,X

c) C,X,C,C,C,X,X,C,X,C

¿Por qué?

Este ítem presenta al alumno tres sucesiones de caras y cruces de longitud 10, pidiéndole nos dé su opinión sobre cuál de estas sucesiones considera que es aleatoria. Para resolver este problema, el alumno debe explicitar las propiedades que atribuye a dichas sucesiones.

No es nuevo este ítem en la literatura de investigación sobre probabilidad. Como ejemplo, Green (1982 b) utiliza un ítem de este tipo en su test sobre intuiciones probabilísticas, presentando al alumno dos sucesiones de caras y cruces en el contexto de que una de estas sucesiones ha sido obtenida a partir de una moneda y la otra es trucada. Asimismo, el paquete de programas GASP (Fisch y Griffeath, 1988) presenta una actividad consistente en pedir al alumno que adivine cuáles, entre una serie de sucesiones de caras y cruces, proceden de un experimento aleatorio. También en la sección 1.4.2 describimos otras investigaciones similares.

El objetivo perseguido es averiguar si el alumno es consciente de dos características fundamentales de los procesos estocásticos: la regularidad global, representada por la convergencia de la frecuencia relativa de los sucesos elementales a las probabilidades teóricas y la variabilidad local, consistente en los diferentes patrones aleatorios de las muestras pequeñas de resultados de los experimentos aleatorios. Estos dos objetivos son los perseguidos en nuestro caso con este ítem.

Hemos presentado al alumno tres sucesiones diferentes de ensayos, que en realidad son equiprobables, ya que aplicando la regla de Laplace, cada una de ellas tiene una probabilidad $1/2^{10}$

Sin embargo, investigaciones sobre la percepción subjetiva del azar como las de Green (1988) y de Konold *et al.* (1991) muestran que los sujetos no las perciben como igualmente aleatorias. En las sucesiones a) y b) se presenta exactamente la misma frecuencia de caras y cruces, y en la c) una frecuencia aproximadamente igual. Además, en la segunda se presenta una alternancia y una estabilidad de la frecuencia en el proceso, incluso a corto plazo. En la a) se presenta un suceso que, en la heurística de la representatividad (Kahnemann *et al.* 1982) es considerado como muy improbable, siendo realmente tan probable como los otros dos. Finalmente la c) presenta una sucesión en que se manifiestan tanto la regularidad global como la variabilidad local. El número de ensayos se ha limitado conscientemente a 10, para que la estructura global sea fácilmente asequible a los alumnos.

Ítem 1.2 ¿Crees que se puede predecir con seguridad el próximo resultado al lanzar de nuevo la moneda? Explica tu respuesta.

Tiene como propósito el averiguar si alguno de los alumnos tiene la creencia en su capacidad de predicción de un suceso aleatorio particular, o por el contrario sabe que la única predicción posible sobre tal tipo de sucesos puede hacerse en términos de probabilidades.

En el caso de suponer que puede predecir el resultado, podrían darse tres posibilidades:

- El alumno utiliza la heurística de la representatividad y basa su predicción en la "recencia positiva" o "negativa" (Piaget e Inhelder, 1951).

- El alumno no comprende el término seguro. Según las recientes investigaciones de Fischbein et al. (1991) hay una mayor dificultad en la comprensión de este concepto frente a la idea de posible.

- El alumno piensa que puede influenciar el azar, por ejemplo, controlando la fuerza con que lanza la moneda y su posición inicial. Esta creencia de ciertos alumnos es también descrita en el trabajo de Fischbein et al. (1991).

SEGUNDO APARTADO: Experimentos compuestos, sucesiones de Bernoulli y capacidad combinatoria

En este apartado se estudian las concepciones de los alumnos sobre las sucesiones de Bernoulli (Feller, 1973; Engel, 1988), comenzando con la idea de sucesión limitada de ensayos (o experimento compuesto de n ensayos simples) que, progresivamente, se va ampliando. Debido a la relación fundamental del experimento compuesto con las operaciones combinatorias (Heitele, 1975) hemos aprovechado también esta parte de la prueba para estudiar la capacidad combinatoria de los alumnos.

Aquí se pasaron siete preguntas con diferentes apartados y con ello se pretende obtener la idea que los alumnos tienen de los siguiente conceptos:

A. Operaciones combinatorias y capacidad de enumeración sistemática. Diferentes investigaciones como las de Fischbein y Gazit (1988), Lecoutre (1985), Maury y Fayol (1986), Batanero *et al.* (en prensa) muestran la relación entre razonamiento combinatorio y probabilístico y las dificultades de los estudiantes respecto al razonamiento combinatorio. Una síntesis de estas investigaciones puede verse en Navarro-Pelayo (1991) y (1994).

B. Independencia de sucesos. Una característica de gran importancia en la definición de las pruebas de Bernoulli es la hipótesis asumida de independencia de los sucesivos experimentos que componen la sucesión de ensayos.

C. Experimento compuesto, espacio muestral del experimento compuesto y también se pretende ver si utilizan la estrategia de representatividad y si presentan el sesgo de "recencia positiva o negativa".

Ítem 2.1 Saca una bola de las dos que hay en la bolsa, anota si es roja o verde y devuélvela a la bolsa. Haz lo mismo otras dos veces.

Este ítem es realmente una actividad en la que el alumno realiza una experiencia aleatoria por tres veces seguidas y anota sus resultados. Nos hallamos, en consecuencia, ante una breve sucesión de pruebas de Bernoulli, o repetición sucesiva de un mismo experimento aleatorio. Aunque en la práctica escolar lo ordinario es considerar exclusivamente el experimento en forma aislada y centrar el interés sobre la frecuencia relativa de aparición de cada suceso, en esta parte de la prueba el fin perseguido es diferente.

Conscientemente vamos a considerar desde el principio el experimento compuesto de los tres ensayos. El interés se centrará en el espacio muestral producto, en lugar de considerar los sucesos de un solo experimento. Además, rápidamente se pasará a considerar la continuación de la prueba efectuando nuevas extracciones. Por tanto, más que estar interesados en un espacio producto particular E_1, E_2, etc., se trata de estudiar las concepciones de los alumnos sobre la estructura del espacio de probabilidad E_n , donde n se puede ir aumentando a voluntad, esto es en el estudio del comportamiento de una sucesión de ensayos.

Ítem 2.2 ¿Crees que esta forma es la única o podría haber salido de otra forma?

Si crees que hay otras posibles secuencias en la extracción de las bolas, escribe algunos de los resultados que podrían haber salido.

El primer apartado de este ítem trata de hacer reflexionar al alumno sobre el suceso concreto que se ha obtenido en el experimento compuesto por las tres extracciones y su carácter aleatorio.

En el segundo apartado se le pide que escriba otras posibles secuencias que podrían obtenerse como resultados de dicho experimento. Conscientemente empleamos la palabra secuencia, para sugerir la sucesión de ensayos, que no ha de estar limitada a los tres ensayos, sino que puede ser continuada (incluso indefinidamente). Pretendemos ver si el alumno ha comprendido cuáles son los posibles sucesos elementales de este experimento (que están formados por una terna cualquiera de sucesos elementales del experimento simple). También se pretende ver su capacidad combinatoria, estudiando los procedimientos que siguen los alumnos para escribir alguna de estas posibles ternas. En una primera fase, tan sólo se les pide algún ejemplo, sin buscar la exhaustividad.

Ítem 2.3 De los últimos resultados que tú has escrito, ¿te parece más probable alguno de ellos?

¿Cuál?

¿Por qué?

Al escribir varios ejemplos diferentes de sucesiones es fácil que el número de bolas rojas y verdes sea diferente en alguno de ellos. Se pretende en este ítem averiguar si el alumno es capaz de aplicar la regla de Laplace a los sucesos elementales del espacio producto, puesto que en este caso pueden aplicarse los criterios de simetría y de razón insuficiente o, por el contrario, supone alguna causa para asignar mayor probabilidad a unos sucesos que a otros. En este caso, es probable que el alumno aplique la heurística de la representatividad.

Ítem 2.4 ¿Serías capaz de escribir todos los posibles resultados que podemos obtener al sacar tres veces una bola de la bolsa, si cada vez devolvemos la bola a la bolsa?

El objetivo de este ítem es ver la capacidad combinatoria de los sujetos, ya que se les pide la enumeración sistemática del espacio muestral producto en un experimento compuesto.

Sobre esta capacidad combinatoria, nos interesa averiguar los puntos siguientes:

- Si el alumno es consciente de la necesidad de tomar en consideración el orden en este experimento, o bien si confunde las variaciones con repetición con las combinaciones con repetición, para este caso. La dificultad de tener en cuenta el orden de los sucesos, cuando los experimentos se plantean con objetos indistinguibles, ha sido estudiada por autores como Lecoutre (1985, 1992), Lecoutre y Durand (1988) y Fischbein *et al.* (1991).

- Si el alumno, teniendo el orden en cuenta o no teniéndolo, emplea un procedimiento de enumeración sistemático o por el contrario emplea un procedimiento de ensayo y error. En ambos casos, si el procedimiento empleado le lleva o no a completar satisfactoriamente el espacio muestral producto.

Ítem 2.5 Haz otras diez extracciones y anota el resultado.

El ítem 2.5 es una continuación en la realización de ensayos, con otras diez extracciones y el registro de sus resultados. De este modo se introduce al alumno la idea de posible continuación de la sucesión de ensayos por un número cualquiera de ensayos y se le hace reflexionar sobre las características que ha presentado hasta ahora el proceso desde su comienzo.

Ítem 2.6 Viendo los resultados que has obtenido hasta ahora en el anterior ejercicio, ¿es más probable que la próxima bola sea roja o que sea verde?

¿Por qué?

Insistimos de nuevo en la posibilidad de predicción de resultados individuales del proceso. De este modo tratamos de estudiar la posible resistencia de las concepciones iniciales del sujeto, así como el posible proceso de aprendizaje que, sin duda, se está realizando en el alumno como consecuencia de la realización de esta experiencia que combina experimentación, registro y reflexión sobre los resultados, metodología recomendada para la enseñanza de la probabilidad por diferentes autores, como Bruni y Silverman (1986), Godino *et al.* (1988), Shaughnessy (1992), entre otros.

Aunque el propósito de la experiencia no es la enseñanza, sino el estudio de las concepciones de los alumnos, es imposible eludir el componente de aprendizaje. Esta característica no es exclusiva de nuestro experimento, sino que creemos es inherente a toda forma de evaluación de concepciones.

Ítem 2.7 Si en el lanzamiento de una moneda se ha obtenido cara, ¿es más probable que en el próximo lanzamiento sea cara o es más probable que sea cruz?

¿Por qué?

Nuevamente se hace la pregunta de predicción, aunque se cambia el contexto. Al dar por supuesto que se conoce el resultado inmediatamente anterior, se quiere evaluar si el alumno supone o no la independencia en las pruebas repetidas.

TERCER APARTADO : Recorridos aleatorios y esperanza matemática

Este apartado consiste en proponer al alumno la simulación de un juego de apuesta a partir de la cual se le plantean diferentes preguntas.

Como recurso didáctico para la enseñanza de la probabilidad, la simulación presenta posibilidades que han sido señaladas, entre otros por Badrikian (1982), Engel (1988), Gnanadesikan *et al.*(1987) y Knowler y Knowler (1981). Estas posibilidades se han visto incrementadas por el ordenador, como se pone de manifiesto en Biehler (1991, 1993), Bland (1985) y Collis (1982). No obstante, esta actividad no se debe presentar sola, sino integrada en una enseñanza que contemple los necesarios aspectos de formulación, validación e institucionalización (Brousseau, 1986). Para esta experiencia hemos preferido, sin embargo, realizar una simulación sin ordenador. La finalidad de la misma, por otro lado, no es de enseñanza; es de evaluación, aunque ya hemos indicado la posibilidad de que se produzca un efecto de aprendizaje.

En el contexto de estudiar la evolución de la fortuna de un jugador a lo largo de las diferentes partidas, se introduce la representación gráfica de un recorrido aleatorio, que servirá para plantear al alumno diversas cuestiones sobre algunos conceptos relacionados con este proceso estocástico.

Los recorridos aleatorios constituyen una clase de proceso estocástico abordable en forma intuitiva desde una edad temprana y su estudio es fundamental en el cálculo de Probabilidades. Como ejemplo, citaremos la exposición de este tema en el libro de Feller (1973), en el que obtiene una gran cantidad de resultados teóricos, simplemente a base de razonamientos combinatorios y en el que muestra la gran cantidad de fenómenos a los que puede aplicarse este modelo. Sin llegar a la profundidad de esta exposición, sin duda adecuada para alumnos de últimos años de bachillerato o primeros cursos de universidad, sí creemos que pueden tratarse de modo intuitivo algunos aspectos de esta clase de procesos estocásticos, relacionados con las sucesiones de Bernoulli, en cuanto que se puede generar una recorrido aleatorio a partir de una sucesión de Bernoulli y recíprocamente.

Entre los diferentes aspectos que se querían tratar en este apartado destacamos:

Recorrido aleatorio.

Registro y representación gráfica de datos.

Trayectorias y trayectorias alternativas.

Estados y transición entre estados.

Sesgo de representatividad local.

Independencia de sucesos.

Propiedad de Markov.

El ejemplo elegido, basado en el clásico problema de la ruina de un jugador, nos parece doblemente instructivo: por la importancia que este problema ha tenido en el cálculo de probabilidades (véase, por ej. Zaki y Pluvinage, 1991) y por el atractivo que los juegos de apuesta tienen para los alumnos. La importancia de los juegos como recurso didáctico en la enseñanza de la probabilidad es puesta de manifiesto en los trabajos de Bright y Harvey (1986), Bright *et al.* (1981, 1982).

Ítem 3.1 Supongamos que un jugador juega a sacar una bola de una bolsa en la que hay dos bolas, una roja y otra verde, apostando siempre a que sale bola roja. En cada prueba se juega una moneda. Si sale bola roja gana una moneda y si es verde pierde una moneda. Al principio del juego tenía 50 monedas.

- Haz esta prueba diez veces, como si fueses el jugador y anota los resultados.

- Según lo que has obtenido en tus extracciones, ¿cuántas monedas tendrías ahora?

- **Representa en el gráfico la secuencia y el número de monedas que tiene el jugador después de cada una de las jugadas. (véase el gráfico en el anexo I)**

Se introduce al alumno en la situación del juego de apuesta, pidiéndole que simule una serie de 10 jugadas, preguntándole por la fortuna final del jugador tras este experimento.

Esta situación didáctica sirve para introducir al alumno en la representación gráfica de la fortuna del jugador en cada partida del juego. Se utilizan unos ejes, representando en el eje de las X el número de la partida y en el eje de las Y la fortuna del jugador. El origen de este último eje es puesto inicialmente en el valor 50, que es el valor inicial.

De este modo, se obtiene la representación gráfica de una trayectoria del recorrido aleatorio asociada con este experimento, para los 10 primeros ensayos. En el mismo gráfico se registra la sucesión de bolas verdes y rojas obtenidas, con lo que es posible apreciar la correspondencia biunívoca entre esta sucesión, el recorrido aleatorio y la sucesión de valores de la fortuna del jugador. Estos tres procesos estocásticos no son, sin embargo, totalmente equivalentes, ya que el conjunto de estados de uno es el conjunto de los enteros, e incluso podemos llegar a definir estados absorbentes, si se supone que al llegar a cero el jugador se arruina y el juego finaliza. En la sucesión de bolas, el conjunto de estados sólo tiene dos valores (V R), no habiendo estados estacionarios. Por otro lado, con el recorrido aleatorio podemos definir conceptos, como el de corte con el eje, que no tienen sentido en la sucesión de ensayos.

Este experimento se repite tres veces, con objeto de obtener tres trayectorias diferentes para el proceso estocástico dado y poder comparar sus semejanzas y diferencias.

Ítem 3.2 Después de las cinco primeras jugadas nuestro jugador tenía 51 monedas. Ha pasado de 50 monedas a 51 siguiendo la trayectoria que se te indica:

R V R R V.

¿Hay otras trayectorias posibles para pasar de 50 a 51 monedas?

Si tu respuesta es que sí, dibuja en el gráfico alguna de las trayectorias que tu propones.

¿Podrías haber conseguido exactamente la misma ganancia con otros resultados de rojas y verdes en las cinco jugadas?

Da un ejemplo, escribiendo la secuencia de rojas y verdes necesarias para obtener dicho camino.

Se pone al alumno un ejemplo de posible trayectoria en cinco partidas, que conduce del estado inicial (50 monedas) a un estado final dado (51 monedas), dándole la sucesión de bolas rojas y verdes de estos cinco ensayos y dibujándole la trayectoria asociada. Se le pide que dibuje otras posibles trayectorias que conduzcan desde el estado inicial al mismo estado final. También se le piden otras secuencias de bolas rojas y verdes que conduzcan al mismo resultado.

Por un lado se pretende ver si el alumno ha comprendido la idea de trayectoria y observa la correspondencia entre trayectorias y sucesión de ensayos. Por otro, se desea estudiar de nuevo la capacidad combinatoria del alumno, tanto para enumerar elementos del espacio producto formado por cinco resultados de bolas verdes y rojas, como para la construcción de trayectorias, con la limitación dada de un punto inicial y otro final.

Ítem 3.3 ¿Cuál es la ganancia máxima que podrías haber obtenido en las diez jugadas?

¿Crees que esto es poco probable o muy probable?

¿Por qué?

Se introduce la idea de máximo en una parte de la trayectoria. También se pide una estimación de la probabilidad de ocurrencia de un máximo, para lo cual el alumno ha de asociar al estado dado la posible (sólo hay una) trayectoria que conduce a este estado desde el estado inicial, así como hacer una estimación del número total de trayectorias en diez partidas.

Ítem 3.4 Como puedes ver en el primer juego que hicimos, después de 10 jugadas, el jugador ha estado por encima del eje (ganando) durante ____ jugadas, y por debajo (perdiendo) durante ____ jugadas. Ha habido ____ cortes con el eje, al pasar de un lado al otro del eje.

¿Piensas que ha tenido mucha o poca suerte en este juego?

¿Te parecen normales los resultados?

¿Por qué?

¿Cuántas veces te parece que sería lo más probable que se cruzara de un lado al otro del eje en diez lanzamientos?

¿Por qué?

¿Cada cuántas jugadas piensas que sería más probable que la trayectoria cambiase del lado del eje?

Realiza otra simulación para comprobar tus conjeturas y anota la trayectoria en un gráfico.

En este ítem se hace reflexionar al alumno sobre el número de jugadas, que en la trayectoria obtenida se ha estado por encima o debajo del eje determinado por la puesta inicial de 50 monedas y sobre el número de cortes con el eje.

Se quiere comprobar sus intuiciones sobre el número de cortes con el eje en una longitud dada de la trayectoria, así como sobre el tiempo necesario para un retorno al origen. Como se indica en Feller (1973), pag. 91, la distribución de estos tiempos es contraintuitiva, ya que son más probables, tanto los intervalos cortos de tiempo, como los largos, siendo poco probables los valores intermedios. Esta distribución es simétrica, teniendo forma de U su distribución de probabilidades. Esta característica contraintuitiva es frecuente en muchos fenómenos estocásticos.

Ítem 3.5 Si este jugador, durante 50 días seguidos jugase cada día sacando 10 bolas de la caja y comenzando cada día con 50 monedas:

¿Cuántos días piensas que acabaría el juego con más de 50 monedas?

¿Por qué?

¿Cuánto dinero crees que habría ganado en total en los 50 días?

¿Por qué?

Ahora se le plantea al alumno una pregunta sobre el número de trayectorias esperado que finaliza, tras 50 jugadas, a un lado u otro del eje, o lo que es lo mismo, sobre el número de días en que el juego simulado es de esperar que acabe con una ganancia o pérdida para el jugador, que ha de ser aproximadamente la mitad de ellos.

También se pregunta al alumno sobre la ganancia total esperada en los 50 días, por lo que debe "movilizar" la idea de esperanza matemática, junto con la previsión de probabilidades de ganancia o pérdida.

Aunque cada uno de los juegos que constan de 50 jugadas puede finalizar con una ganancia (pérdida), que oscila entre -50 (si el jugador pierde todas las jugadas) y +50 (si el jugador las gana todas), la distribución del número de monedas ganada o perdidas en 50 jugadas sigue una distribución binomial de media cero. Puesto que la distribución binomial es simétrica, es de esperar que la mitad de los días la ganancia sea positiva y la mitad negativa. Este ítem pretende estudiar las intuiciones de los alumnos sobre estas propiedades.

Ítem 3.6 El jugador tiene ahora 52 monedas y va a realizar dos jugadas más. ¿Es más probable que después de estas jugadas tenga otra vez 52 monedas, que tenga dos más o dos menos que antes?

¿Por qué?

Finalmente, para acabar la parte correspondiente al estudio de este juego y de los recorridos aleatorios, se estudian las intuiciones sobre las probabilidades de transición desde un estado inicial dado a los posibles estados finales, en dos pasos. La posibilidad de transición en dos pasos desde un estado se restringe al estado inicial o a dos monedas más (si gana dos veces consecutivas) o dos monedas menos (si pierde por dos veces seguidas). Estas tres posibilidades no son sin embargo equiprobables, puesto que hay dos trayectorias (RV y VR) que conducen al estado inicial y sólo una para cada uno de los otros dos estados. Pretendemos ver si el alumno asocia las posibles trayectorias que conducen desde un estado dado a los posibles tras dos pasos o bien si considera todos los casos como equiprobables, haciendo una generalización indebida de la regla de Laplace.

CUARTO APARTADO: Frecuencias relativas y convergencia estocástica. Heurística de la representatividad en una situación de simulación

Consta de tres ítems y pretende estudiar el significado que los alumnos atribuyen a la convergencia estocástica, esto es a la convergencia de la frecuencia relativa de un suceso a la probabilidad teórica del mismo.

Los conceptos y propiedades principales tratados en este apartado son:

A) Efecto del tamaño muestral sobre el estadístico.

B) Probabilidad en experimentos compuestos.

C) Frecuencia relativa.

D) Estabilidad y oscilación de las frecuencias relativas.

Ítem 4.1. En la maternidad de la ciudad X están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa según el sexo del recién nacido. Por este motivo han ideado el siguiente sistema de registro (ver anexo 1):

¿Cuál de estos casos te parece más probable?:

A) Que entre los próximos 10 nacimientos, 8 sean varones.

B) Que entre los próximos 100 nacimientos, 80 sean varones.

C) Las dos cosas anteriores son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

El primero de los ítems de este apartado es el ítem clásico utilizado en diversas investigaciones que se describieron en la sección 1.4.3, como la de Green (1982 a), a partir de los trabajos de Kahneman *et al.* (1982). Este ítem ha sido utilizado por estos investigadores para comprobar si los sujetos siguen la heurística de la representatividad, esto es, si juzgan la probabilidad de un suceso de acuerdo con su parecido respecto al experimento que lo ha generado. Puesto que la probabilidad de nacer varón o hembra es aproximadamente la misma, los sujetos que siguen esta heurística juzgan igual de probables cualquier serie de repeticiones de este experimento, si la proporción de varones y hembras obtenida es la misma. Es decir, no tienen en cuenta la mayor variabilidad de la distribución de la proporción muestral en las muestras grandes que en las pequeñas.

Puesto que el número de varones en una muestra de n sujetos sigue una distribución binomial de media n/2 y de varianza n/4, la proporción de varones sigue la distribución con media 1/2 y varianza 1/(4n), por lo que aunque la media de todas las variables aleatorias que forman esta sucesión de variables es constante, la varianza es función inversa del tamaño muestral.

En términos de características de la ley de los grandes números o convergencia estocástica de las frecuencias relativas a la probabilidad, con este ítem pretendemos estudiar las intuiciones de los alumnos sobre la mayor oscilación de la frecuencia relativa a corto plazo, respecto de la oscilación a largo plazo. Para realizar esta tarea los niños fueron enseñados sobre la forma de completar el gráfico.

Ítem 4.2 ¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos?:

A) La fracción de chicos será mayor o igual a 7/10.

B) La fracción de chicos será menor o igual a 3/10.

C) La fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10.

Escribe lo que crees más probable.

Como hemos indicado, la proporción de varones en 10 nacimientos sigue una distribución de media 5 y varianza 10/4, es decir el número de varones entre diez nacidos sigue la distribución binomial para n=10 y p=1/2. Aunque en esta distribución pueden ocurrir todos los valores comprendidos entre 0 y 10, no todos son equiprobables. La distribución de valores es simétrica, teniendo forma acampanada, de modo que la mayor frecuencia corresponde a los valores centrales, siendo la moda 5. Estas consideraciones se deducen fácilmente por razonamiento combinatorio.

Al considerar la convergencia de la frecuencia relativa en una serie corta de ensayos se presentar oscilaciones. Pero, puesto que las probabilidades con que aparecen las posibles frecuencias relativas siguen la distribución binomial, no todos los valores posibles de la frecuencia relativa en diez ensayos tienen las mismas probabilidades. Intentamos en este ítem estudiar las intuiciones de los alumnos al respecto.

También se pide al alumno realizar una simulación, para que, si así lo desea, modifique sus previsiones de acuerdo con los resultados. En el siguiente ítem estudiaremos también la posible influencia de esta experiencia de simulación concreta sobre sus respuestas en la predicción de la convergencia estocástica. El gráfico empleado ha sido tomado del cuaderno "shaking a six" del School Councils Project on Statistical Education (1980) y en él aparecen tanto el valor del número de éxitos en n ensayos, como de la proporción de éxitos o su expresión decimal.

Ítem 4.3 Fíjate en el gráfico, que representa la variación de varones conforme aumente el número de nacimientos. ¿En qué parte de este gráfico crees que será más probable que la proporción de varones esté más próxima a 0,5 ?

A) En los 10 primeros nacimientos.

B) Entre los nacimientos 11 y 25.

C) Entre los nacimientos 26 y 40.

D) En todas partes igual.

Indica tu respuesta y explica el por qué.

En este ítem se quiere estudiar si el alumno es consciente de la aproximación gradual de la frecuencia relativa a la probabilidad a medida que aumenta el número de ensayos, a pesar de sus oscilaciones. Es decir, aunque no sabemos con seguridad la magnitud de la diferencia entre la frecuencia relativa en n ensayos y la probabilidad teórica, la probabilidad de que esta diferencia sea menor que un número dado aumenta con el número de ensayos.

2.3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Realizadas las entrevistas se procedió a analizar los protocolos completados por los alumnos así como la transcripción de sus respuestas a las preguntas del investigador.

En esta sección describimos y analizamos las respuestas obtenidas de los alumnos participantes. A lo largo del capítulo se usará el término bachillerato para designar a los alumnos de Bachillerato y el término magisterio para designar a los alumnos del grupo de magisterio, así como en cada caso sus respuestas y datos relacionados con esos grupos.

Para analizar las respuestas obtenidas de estos alumnos, y con objeto de reservar su anonimato, hemos designado figuradamente con códigos a los alumnos en el texto del trabajo, para referirnos a ellos, siendo la letra P el indicativo de alumnos de primer curso de bachillerato y M el indicativo de alumnos de magisterio, y la numeración de uno a veinte para indicar el orden en que se les pasó la prueba a cada alumno.

2.3.1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Ítem 1.1

Juan lanza una moneda diez veces y su compañero Pedro va anotando los resultados obtenidos. Después Pedro muestra a Juan tres listas de resultados de las que Juan elegirá la verdadera. ¿Cuál crees tu que sería la verdadera de las tres siguientes?:

A) C,C,C,C,C,X,X,X,X,X

B) C,X,C,X,C,X,C,X,C,X

C) C,X,C,C,C,X,X,C,X,C

¿Por qué?

En las respuestas de los entrevistados, se observa que todos los alumnos de bachillerato así como 8 de magisterio han elegido la opción C. La elección ha sido motivada principalmente por creer que las otras dos secuencias son demasiado regulares, pese a que no se produce una frecuencia exacta de la mitad de caras y de cruces como sucede en las otras dos. De esta forma, parece que se asocie la variabilidad con el azar y el alumno tiene una apreciación, tanto de la regularidad, como de la variabilidad de un proceso estocástico.

Dos de los alumnos de magisterio han elegido la opción B, debido a que se han fijado más en la estabilidad de la frecuencia, dando una respuesta típica del sesgo de la representatividad (Kahneman *et al.* 1982), al creer que, incluso en una pequeña muestra, tenga que conservarse la misma proporción de casos que en la población de la que proviene la muestra.

Al ordenar las tres sucesiones por la tasa subjetiva de aleatoriedad (Konold y Falk, 1992), o preferencia mostrada por los alumnos, obtenemos que C > B > A, indicando la relación > esta preferencia. En el trabajo citado, Konold y Falk comparan esta tasa subjetiva de aleatoriedad con dos medidas objetivas de la misma: la probabilidad de obtener un número dado de cambios de signos en la sucesión y la tasa de complejidad, que vamos a describir a continuación. Sus resultados sugieren que esta última es mejor predictor de la tasa subjetiva de aleatoriedad que dan los alumnos, que la probabilidad a la que nos hemos referido.

En nuestro caso, si calculamos la probabilidad de los cambios de signo presentados en cada sucesión, que viene dada por P(k) = k/n-1, en donde k es el número de cambios de signo y n la longitud de la sucesión, obtenemos:

P(A) = 1/9, P(B) = 9/9 = 1, P(C) = 6/9 = 2/3 , por lo que, al comparar estas probabilidades con el valor teórico esperado ½, observamos que los alumnos han considerado más aleatoria aquella sucesión cuya probabilidad se acerca más al valor esperado, aunque luego han invertido el orden de preferencia entre A y B.

La tasa de complejidad para una sucesión aleatoria (Fine, 1973) expresa si la misma puede o no ser acortada mediante un sistema de codificación apropiado y se calcula como la razón entre el número de caracteres del nuevo código dividido por la longitud de la secuencia (Konold, 1991). Al codificar en forma resumida nuestras tres sucesiones y obtener dicha tasa, resulta la tabla 2.3.1.1.

De este modo, podemos ordenar las secuencias según su complejidad C > A > B. Al comparar esta ordenación con las preferencias de los alumnos obtenemos que éstos han identificado como más aleatoria la sucesión más compleja. El orden esperado de preferencia entre las otras dos según Konold y Falk se ha invertido. Puesto que, tanto en la investigación del citado autor como en la nuestra, la muestra ha sido pequeña, consideramos que este punto merece una investigación más detallada.

Tabla 2.3.1.1. Tasa de complejidad para las sucesiones del ítem 1.

OPCIONES	SUCESION	NUEVO CODIGO	TASA DE COMPLEJIDAD
A	CCCCCXXXXX	5C5X	4/10
B	CXCXCXCXCX	5CX	3/10
C	CXCCCXXCXC	CX3CX2CX	8/10

En cuanto a los argumentos más empleados para justificar sus respuestas vemos que seis de los alumnos de bachillerato y ocho de los de magisterio han hecho referencia al orden: *"Porque los resultados están distribuidos con demasiado orden"* (P3). La idea que tienen estos alumnos es que las dos primeras sucesiones son demasiado ordenadas para ser aleatorias. Asocian la idea de aleatoriedad con la de conjunto de resultados no ordenado. A este respecto Pérez Echeverría (1990) indica que las personas esperan que una secuencia producida por un proceso aleatorio represente fielmente las características de este proceso, incluso cuando la secuencia sea muy corta. Así las secuencias aparentemente no ordenadas no parecen resultado del azar, sino, al revés, parecen fruto de la acción de una mano invisible (Tversky y Kahneman, 1971).

Cuatro alumnos de bachillerato piensan que es más difícil obtener una de las dos sucesiones A o B ya que hay poca variabilidad: "*Porque hay más variedad en los resultados"* (P2). No son conscientes de que cualquiera de estas sucesiones tiene la misma probabilidad. Por último, un alumno de magisterio y hace referencia a la igualdad de probabilidades de caras y cruces: "*Por que hay las mismas posibilidades de salir caras que cruces*" (M8).

Ítem 1.2. ¿Crees que se puede predecir con seguridad el próximo resultado al lanzar de nuevo la moneda? Explica tu respuesta.

En este ítem se pregunta al alumno por la posibilidad de predicción del resultado de un experimento aleatorio.

Solo un alumno (de bachillerato) piensa que puede predecir el resultado. Fischbein *et al.* (1991) indican como consecuencia de sus experimentos, que algunos alumnos piensan que cuando se repite un experimento consecutivamente pueden llegar a controlarlo y predecir el resultado.

Los argumentos más utilizados para justificar las respuestas se resumen en los siguientes:

Cinco alumnos de bachillerato y cinco de magisterio dicen que no se puede predecir el resultado, ya que depende del azar: '*No se puede saber, ya que depende del azar*" (P2). Hacen referencia al carácter aleatorio del experimento, coincidiendo con la visión de Steinbring (1991) sobre el estatuto epistemológico dado en las situaciones escolares a la idea de azar, como sinónimo de imprevisibilidad y justificativo de la no posibilidad de predicción.

Un alumno de bachillerato y dos de magisterio mencionan la igualdad de posibilidades de caras y cruces: '*No, hay un 50 % de posibilidades para cada una de las dos posibilidades*" (M 14). Aquí encontramos un matiz diferente, ya que se toma la probabilidad ½ como punto de comparación para la no posibilidad de predicción. A este respecto Konold (1991) indica que ciertos sujetos utilizan como base para sus predicciones probabilísticas las probabilidades 0, ½ y 1, considerando los sucesos cuya probabilidad se acerca a 0 como imposibles, aquellos cuya probabilidad se acerca a 1 como seguros y los que se aproximan a ½ como impredecibles.

Dos alumnos de bachillerato y uno de magisterio contestan que no hay seguridad del resultado, por lo que, aunque se pueden englobar en el primer apartado, utilizan la palabra "seguro", manifestando un conocimiento de este concepto, que en términos de Fischbein *et al.* (1991) es más difícil que la idea de probable: '*No se tiene la seguridad de lo que va a salir*" (P 6).

El alumno de bachillerato que decía que podía predecir el resultado da como razón su preferencia por ese resultado, confirmando así nuestra hipótesis sobre su creencia en la posibilidad de control de los resultados del experimento aleatorio, que es también señalada por Fischbein y Gazit (1984), quien incluye en su investigación algunos ítems relacionados con la creencia en la "suerte" o capacidad de influencia en los procesos aleatorios. Por último un alumno de cada grupo no contesta.

Como resumen de este apartado podemos decir que los alumnos de la muestra manifiestan a primera vista una comprensión de las características de los experimentos aleatorios: imprevisibilidad del resultado de un experimento aleatorio dado, regularidad en la frecuencia de posibles resultados y variabilidad en la sucesión de resultados obtenidos en una serie de ensayos. Señalamos, aunque en número escaso, la falta de apreciación de algunas de estas características en los estudiantes de magisterio, a pesar de su mayor edad y de haber recibido algún tipo de formación estadística durante la enseñanza secundaria.

2.3.2. EXPERIMENTOS COMPUESTOS Y CAPACIDAD COMBINATORIA

Ítem 2.2. ¿Crees que esta forma es la única o podría haber salido de otra forma?

Si crees que hay otras posibles secuenciasen la extracción de las bolas, escribe algunos de los resultados que podrían haber salido.

Se trata de la formación de sucesos elementales en un experimento compuesto a partir de la repetición de un experimento simple con dos posibilidades equiprobables. El número de secuencias escritas por los alumnos varía desde dos hasta ocho, siendo la secuencia tres la que presenta más frecuencia tanto para los alumnos de bachillerato como para los de magisterio.

Todos los alumnos estuvieron de acuerdo con que se pueden extraer las bolas de la bolsa con otras combinaciones distintas a la que han sacado en cada caso y han escrito correctamente algunas de ellas. No ha habido dificultad en identificar los sucesos elementales del espacio producto E_3 como elementos constituidos por una terna de sucesos elementales del espacio muestral de partida.

Todos los alumnos han escrito espontáneamente dos o más de tales ternas, siendo mayor el número en los estudiantes de magisterio. Uno de ellos ha llegado a completar espontáneamente el espacio muestral producto.

Ítem 2.3.- De los últimos resultados que tú has escrito, ¿te parece más probable alguno de ellos?

¿Cuál? ¿Por qué?

En este ítem se pregunta al alumno sobre la equiprobabilidad de los distintos sucesos elementales del espacio producto que acaban de escribir. El objetivo perseguido es ver si aparece el sesgo de representatividad.

Cinco alumnos de bachillerato y cuatro de magisterio dicen que si les parece más probable alguno de los resultados obtenidos cuando en realidad todos son equiprobables.

Cinco y cuatro respectivamente piensan que todos los resultados son equiprobables. Han sido capaces de aplicar con éxito la regla de Laplace a los sucesos elementales del espacio producto. Por último, los otros dos de magisterio no saben. Tanto el primer grupo como el tercero tiene dificultad con el espacio muestral producto y la idea de independencia.

Los argumentos dados en este caso principalmente son:

Tres alumnos de bachillerato y cinco de magisterio dan como razón para considerar todos los sucesos equiprobables el carácter aleatorio del experimento, por el cual cualquier resultado podría suceder: "*porque depende del azar*" (P2). Esto no es, en general, suficiente para asegurar la posible aplicación de la regla de Laplace, sino que ha de utilizarse el hecho de la simetría de los posibles resultados o bien el principio de razón insuficiente.

Cinco alumnos de bachillerato y cuatro de magisterio piensan que es menos probable la combinación VVV RRR que por ejemplo VVR o RVR, manifestando el sesgo de la representatividad descrito por Kahneman *et al.* (1982): "*Salen dos bolas del mismo color y otra distinta, así hay más posibilidades que de repetir las tres*". El resto, dos de bachillerato y uno de magisterio, no saben dar un argumento a su respuestas.

Ítem 2.4. ¿Serías capaz de escribir todos los posibles resultados que podemos obtener al sacar tres veces una bola de la bolsa, si cada vez devolvemos la bola a la bolsa?

En este ítem se pide al alumno completar el espacio muestral producto, para estudiar su capacidad combinatoria en el aspecto de enumeración, que, como indica Navarro-Pelayo (1994), no suele ser objetivo particular en la enseñanza del tema. La capacidad combinatoria es uno de los componentes fundamentales del razonamiento probabilístico, como se muestra, entre otros, en los trabajos de Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975).

Siete alumnos de bachillerato y nueve de magisterio han completado todas las variaciones con repetición pedidas en este ítem. Con ello se ve la capacidad en razonamiento combinatorio de los alumnos. Tres alumnos de bachillerato y uno de magisterio no han sido capaces de completar el espacio producto.

Ítem 2.6. Viendo los resultados que has obtenido hasta ahora en el anterior ejercicio, ¿es más probable que la próxima bola sea roja o que sea verde? ¿Por qué?

Este ítem estudia la idea de independencia de resultados en una sucesión de ensayos de Bernoulli. Como señala Steinbring (1986) la idea de independencia tiene un carácter esencialmente teórico y ha sido necesaria y fundamental en el desarrollo del Cálculo de Probabilidades y de la Estadística, por ejemplo, en los teoremas de límite y en todo el desarrollo de la inferencia. No obstante, es difícil decidir en una situación concreta si realmente existe una independencia física de los resultados.

Preguntados sobre si es más probable que la próxima bola sea roja o verde y teniendo en cuenta los anteriores resultados, tres alumnos de bachillerato y tres de magisterio han contestado que sí tienen las mismas probabilidades, por lo que estos alumnos aprecian la independencia de los sucesivos ensayos: "*Si hubiese en la bolsa dos verdes y una roja habría más posibilidades de que saliese verde, pero como sólo hay una de cada color, la posibilidad es la misma*" (P 5).

Sin embargo, seis alumnos de bachillerato y siete de magisterio dicen que no son iguales las probabilidades. Es de suponer que estos alumnos no tengan clara la idea de independencia o que en este contexto no la saben aplicar. Como vemos, la mayor parte de los alumnos de nuestro estudio han demostrado dificultad con la idea de independencia. Comparando con las respuestas al ítem de 2.3, vemos que un mayor número de alumnos dan una respuesta equivocada en esta ocasión, influenciados por los resultados de las simulaciones obtenidas en los primeros pocos ensayos. Hay un alumno de bachillerato que no está seguro de su respuesta.

Los argumentos dados a las respuestas son

Un alumno de bachillerato y dos de magisterio han manifestado una "recencia negativa", es decir, después de una racha de rojas esperan una verde o después de una racha de verdes esperan una roja: "*Como hasta ahora ha salido más veces roja, ahora puede haber más posibilidades de que salga verde*"(P 3). En cambio la recencia positiva la aceptan cuatro y seis respectivamente de cada uno de los grupos: "*Como han salido muchas verdes, creo que la siguiente también será verde*" (P 6). Cuatro estudiantes de bachillerato y uno de magisterio aceptan la independencia y por tanto piensan que hay igual posibilidades de rojas y verdes. Dos alumnos, uno de cada grupo no saben razonar la respuesta.

Ítem 2.7. Si en el lanzamiento de una moneda se ha obtenido cara, ¿es más probable que en el próximo lanzamiento sea cara o es más probable que sea cruz? ¿Por qué?

En este ítem se pregunta al alumno sobre una probabilidad condicional: obtener cara después de haber obtenido otra cara, en un caso en que los sucesos son independientes.

Un alumno de cada grupo manifiesta que después de haber salido cara, saldrá otra vez cara y por tanto presenta sesgo de "recencia positiva". Tres alumnos de bachillerato y uno de magisterio piensan que después de cara es más probable cruz, manifestando sesgo de "recencia negativa".

Cuatro y siete dicen que cualquiera de las dos posibilidades pueden salir. Por último dos y uno no saben. Observamos que disminuye el número de alumnos que manifiestan dificultad con la idea de independencia en esta pregunta, cuyo contexto es de carácter teórico al igual que la pregunta 2.3 con respecto a la 2.6. De este modo hay un número relativamente mayor de alumnos que comprenden la idea de independencia desde un punto de vista teórico que los que son capaces de aplicarla en una situación experimental de simulación. En esta pregunta, los primeros resultados han influido, de acuerdo con lo expuesto por Heitele (1975), en la dificultad que muestraron algunos alumnos al aplicar la idea de independencia. Esto también confirma en parte nuestra hipótesis de que si una aproximación frecuencial de la enseñanza no se acompaña de situaciones adecuadas de formulación, validación e institucionalización (Brousseau 1986), puede originar nuevas dificultades con la idea de independencia. Los argumentos a todas estas respuestas se presentan en la tabla 2.3.2.8.

Cuantificando las justificaciones más usadas vemos que:

Cinco alumnos de bachillerato y seis de magisterio dan como argumento, para decir que puede salir cualquiera de los dos resultados, la equiprobabilidad de ambos sucesos, tomando como punto de comparación para la imprevisibilidad la probabilidad ½, como señala Konold (1991): "*tiene la misma posibilidad*" (M 14).

Un alumno de bachillerato y uno de magisterio opina que saldrá el suceso contrario al que ha ocurrido y por tanto tiene un sesgo de "recencia negativa": "*saldrá lo contrario*", (P 14).

Tres alumnos de bachillerato y uno de magisterio piensan que debe salir el mismo suceso que ha salido anteriormente: "*creo que cara, porque creo que volverá a repetirse*" (P 12) y por último los restantes alumnos no saben dar un argumento.

Como conclusión de esta parte de la prueba observamos que no ha habido grandes diferencias entre ambos grupos de alumnos. Estos han identificado con facilidad los sucesos simples en el espacio muestral producto y manifiestan en su mayor parte un razonamiento combinatorio, llegando a completar satisfactoriamente todos los casos posibles, especialmente los alumnos de magisterio.

Los alumnos de magisterio no llegan, sin embargo, a aplicar correctamente la regla de Laplace, que habrán estudiado en cursos anteriores, por no considerar equiprobables los sucesos elementales del espacio producto. Ello es debido a la dificultad de interpretar la idea de independencia en el contexto que se les ha dado, manifestándose claramente los fenómenos de "recencia positiva" y "negativa" en algunos de los alumnos. También se observa una mayor dificultad en la aplicación de la independencia en un contexto práctico de simulación que cuando se les formula un problema teórico.

2.3.3. RECORRIDOS ALEATORIOS Y ESPERANZA MATEMÁTICA

En este apartado se trata de estudiar algunas concepciones de los alumnos sobre las trayectorias de un recorrido aleatorio y la esperanza matemática. El contexto empleado se refiere a un juego de apuesta y se utiliza una simulación y representación gráfica, con objeto de que el alumno comprenda correctamente la situación planteada.

Ítem 3.1.- Supongamos que un jugador juega a sacar una bola de una bolsa, en la que hay dos bolas, una roja y otra verde, apostando siempre a que sale bola roja. En cada prueba se juega una moneda. Si sale bola roja gana una moneda y si es verde pierde una moneda. Al principio del juego tenía 50 monedas.

Haz esta prueba diez veces, como si fueses el jugador y anota los resultados.

Según lo que has obtenido en tus extracciones, ¿cuántas monedas tendrías ahora?

Representa en el gráfico la secuencia y el número de monedas que tienes después de cada una de las jugadas.

El ítem inicial trata de familiarizar al alumno con la situación simulada y ver si la comprende. Con este motivo se le pregunta por el número final de monedas obtenidas (estado final del proceso) en función de la trayectoria de dicho proceso que viene determinada por los resultados de las jugadas sucesivas.

En este ítem nueve de los alumnos de bachillerato y ocho de magisterio han sabido calcular correctamente el número de monedas que tendrá el jugador después de la extracción de diez bolas. El resto no contesta bien a esta pregunta, debido a no comprender bien la situación en esta primera experiencia.

Referente a la representación gráfica de la trayectoria, a partir de los resultados obtenidos en los sucesivos lanzamientos de la moneda, todos los alumnos excepto uno de los alumnos de bachillerato han realizado la gráfica sin dificultad. Por ello pensamos que esta actividad es asequible a todo tipo de alumnos y han identificado fácilmente la correspondencia biunívoca entre sucesión de ensayos y trayectoria.

Ítem 3.2.- Después de las cinco primeras jugadas nuestro jugador tenía 51 monedas. Ha pasado de 50 monedas a 51 siguiendo la trayectoria que se te indica:

R V R R V.

¿Hay otras trayectorias posibles para pasar de 50 a 51 monedas?

Si tu respuesta es que sí, dibuja en el gráfico alguna de las trayectorias que tú propones.

¿Podrías haber conseguido exactamente la misma ganancia o pérdida con otros resultados de rojas y verdes en las cinco jugadas?

Da un ejemplo, escribiendo la secuencia de rojas y verdes necesarias para obtener dicho camino.

Todos los alumnos fueron capaces de dar una trayectoria alternativa para pasar de un número de monedas inicial a uno final. De este modo, parece que se comprende fácilmente que a un estado inicial y final dado no corresponde una única trayectoria, sino varias posibles. También es necesario en esta actividad deducir la propiedad común de todas estas trayectorias, que es la de corresponder a una sucesión de rojas y verdes con una diferencia constante entre el número de rojas y el número de verdes.

Las estrategias empleadas por los alumnos para la representación gráfica de la trayectoria son:

Siete alumnos de bachillerato y nueve de magisterio escriben primero la secuencia de rojas y verdes y después a partir de ella hacen la representación gráfica de la trayectoria. Siguen así el procedimiento enseñado inicialmente para realizar el gráfico, aunque reflexionan individualmente sobre la cantidad de rojas y verdes precisas para llegar a la ganancia pedida.

Un alumno de cada grupo pasa directamente a dibujar la trayectoria y después, a partir de ella, escribe la secuencia de rojas y verdes isomorfas a ese camino, realizando justamente un procedimiento inverso al que se les mostró en el ejemplo previo. Dos alumnos de bachillerato no han seguido un procedimiento preciso por lo que clasificamos su estrategia como no sistemática.

A la pregunta de si es posible obtener el mismo número de monedas con otros resultados diferentes en cinco jugadas, todos han contestado afirmativamente. Esto es lógico, debido a que también han respondido afirmativamente sobre si hay diferentes trayectorias que conduzcan desde el estado inicial dado al final. Sin embargo con estapregunta queríamos averiguar si asocian la ganancia (pérdida) con la diferencia entre rojas y verdes, cosa que hemos confirmado.

En este ítem se pregunta a los alumnos por otra secuencia de rojas y verdes que conduzca a la misma ganancia. Dos alumnos de bachillerato y cuatro de magisterio han dado una secuencia incorrecta. Parece ser más difícil imaginarse el paso de un estado a otro del proceso estocástico a partir de una sucesión de ensayos que mediante una trayectoria, a pesar de que existe un isomorfismo entre lo mismo. Sin embargo, son dos tipos de procesos estocásticos diferentes, ya que cambia el conjunto de estados. De todas las posibilidades, todos los alumnos restantes, menos uno de magisterio, han sido capaces de dar más de un ejemplo, a pesar de insistirles en que pensaran en otros posibles.

Ítem 3.3.- ¿Cuál es la ganancia máxima que podrías haber obtenido en las diez jugadas?

¿Crees que esto es poco probable o muy probable?

¿Por qué?

Todos contestan correctamente sobre la ganancia máxima que se puede obtener en diez jugadas, entendiendo todos que la ganancia es el máximo de monedas al que llegan y no la diferencia entre éstas y las monedas de partida que inicialmente tenían.

Preguntados sobre la probabilidad de este suceso (ganar todas), todos excepto un alumno de bachillerato dicen que es poco probable, indicando éste que es regular de probable.

Los argumentos dados para esta estimación se recogen a continuación:

Dos alumnos de bachillerato y uno de magisterio dicen que lo saben por experiencia, por lo que no dan un razonamiento de tipo probabilístico: "*Lo sé por experiencia"* (P 1). También un alumno de magisterio indica que sabe por intuición. En estos alumnos se observa claramente la existencia de unas creencias arraigadas respecto a la poca probabilidad de tal suceso que manifiestan las características definidas por Fischbein (1975) para las intuiciones: autoevidencia, globalidad, inmediatez. Estos alumnos no precisan un razonamiento para estar convencidos de la realidad de este hecho. Resaltamos aquí estos argumentos, por tratarse en este caso de una intuición correcta y por la importancia dada por Fischbein a las intuiciones en el terreno de la probabilidad.

Ocho y seis sujetos consideran difícil que salgan todas iguales: "*Hay que tener mucha suerte para obtener 10 bolas rojas*" (P 4). Aunque cada uno de los sucesos elementales del espacio producto es equiprobable, sin embargo, al considerar el suceso "10 caras" respecto a otro como "8, 7, 6 caras" vemos que, en realidad, hemos cambiado de experimento aleatorio. Se trata ahora de considerar la distribución de probabilidades binomial que tiene como media 5 y en la cual el valor 10 es efectivamente muy poco probable. Por último, dos estudiantes de magisterio dan un razonamiento basado en la equiprobabilidad de rojas y verdes: "*Porque hay la misma probabilidad de que salga una u otra*" (M 14).

Ítem 3.4.- Como puedes ver, después de 10 jugadas el jugador ha estado por encima del eje (ganando) durante ____ jugadas, y por debajo (perdiendo) durante ____ jugadas. Ha habido ____ cortes con el eje, al pasar de un lado al otro del eje.

¿Piensas que ha tenido mucha o poca suerte en este juego?

¿Te parecen normales los resultados?

¿Por qué?

¿Cuántas veces te parece que sería lo más probable que se cruzara de un lado al otro del eje en diez lanzamientos?

¿Por qué?

¿Cada cuántas jugadas piensas que sería más probable que la trayectoria cambiase del lado del eje?

Realiza otra simulación para comprobar tus conjeturas y anota la trayectoria en un gráfico.

En este ítem se hace reflexionar al alumno sobre el número de cortes que, durante la simulación, se han producido con el eje. Hasta llegar a este punto, cada una de las propiedades del recorrido aleatorio se ha traducido de una forma bastante intuitiva en otras correspondientes a la sucesión de ensayos de Bernoulli. Este es el primer ejemplo de un concepto "corte con el eje" cuya traducción puede resultar más contraintuitiva.

Por las frecuencias de respuestas se puede observar que: seis estudiantes de bachillerato y siete de magisterio consideran que los resultados no difieren mucho de lo esperado: "*Porque es un juego casi normal, pierdes un poco o ganas un poco. He ido ganando y perdiendo de una forma normal y me he mantenido casi igual que al principio*" (P 5). Tres de cada grupo no esperan los resultados obtenidos, con lo que el gráfico obtenido les resulta contraintuitivo: "*No siempre se va a ganar tanto como aquí*" (P 6). Un alumno de bachillerato dice que los resultados no manifiestan mucha ni poca suerte, no sabiendo si puede ser o no característico en este tipo de situaciones.

Mostramos los argumentos correspondientes a las respuestas en esta pregunta, siendo los siguientes con cuantificación por sujetos en cada caso:

Tres alumnos de cada grupo indican que el número de cortes con el eje depende de la sucesión de la jugada obtenida, pareciendo comprender la correspondencia biunívoca entre trayectoria y sucesión de ensayos: "*Depende de la jugada que me salga*" (P10).

Un alumno de bachillerato cree que no se puede estimar el número de cortes con el eje: "*Porque depende del azar*" (P 4). No es consciente de que puede establecerse una correspondencia entre el número de cortes y un subconjunto de las posibles trayectorias y entre éste y un subconjunto de las posibles secuencias. Un alumno de magisterio justifica su respuesta por la equiprobabilidad de obtener rojas y verdes: "*Porque salen igual número de rojas que de verdes*" (P 2). Uno de cada grupo indica simplemente que eso es lo que ha salido en esta prueba concreta: "*En todas las gráficas que he hecho me ha salido así*" (M 7). El resto, cinco de cada grupo (la mayoría) no saben dar una razón a su respuesta.

En general, observamos la falta de un razonamiento combinatorio sobre las trayectorias, ya que hay muchas más trayectorias que están la mayor parte a un lado del eje respecto a las que cortan el eje con mayor frecuencia.

En cuanto a la frecuencia del número de cortes con el eje se observa que los alumnos de bachillerato dicen que lo más corriente es que haya dos o tres cortes con el eje, con un número medio de 2.4 cortes, aunque hay un alumno que opina que debe haber cinco cortes y otro que no debe haber ninguno. Sin embargo los alumnos de magisterio dicen que lo más frecuente es que haya dos cortes, con un valor medio de 2.7 cortes, aunque hay dos alumnos que opinan que puede haber cinco.

Puede deducirse, a partir de lo expuesto en Feller (1973), que la probabilidad de que en 11 jugadas se hayan producido exactamente r cortes con el eje viene dada por la expresión siguiente:

$$P(\text{Nº de cortes en 11 jugadas sea igual a } r) = 2^{-10}\binom{11}{r+6}$$

y, por tanto, se obtendría la tabla de valores 2.3.3.1.

Según esto, podemos deducir, en contra de nuestra intuición, que lo más probable es que no haya cortes con el eje o muy pocos en 11 jugadas. Los alumnos han atribuido a esta distribución un carácter de simetría del que carece.

Tabla 2.3.3.1. Distribución del número de cortes con el eje.

Nº de cortes en once jugadas	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	462/1024	330/1024	165/1024	55/1024	11/1024	1/1024

Los argumentos que dan a sus respuestas agrupados según sus frecuencias son:

Tres alumnos de cada grupo dicen que los cortes dependen de la sucesión de jugadas obtenidas. Un alumno de cada grupo piensa que no puede saberse el número más probable de cortes, de lo que se deduce, como ya habíamos señalado, una falta de razonamiento combinatorio y falta de apreciación de la nueva variable aleatoria considerada y su espacio muestral de referencia. Cinco alumnos de bachillerato y cuatro de magisterio basan su razonamiento en la igualdad de posibilidades de obtener rojas y verdes. El resto de alumnos no es capaz de dar un argumento.

Una cuestión relacionada con la anterior es el número esperado de jugadas entre dos cortes con el eje, esto es, la esperanza matemática de la distribución del tiempo de retorno al origen. En los alumnos de bachillerato la distribución empírica del número de jugadas presenta un valor de la variable alto, oscilando el número entre cero y cinco, siendo la media 2,9. En los alumnos de magisterio la respuesta más frecuente es tres y oscila entre dos y cuatro, con una media de tres. Esta intuición es contraria a lo que en la realidad sucede, como se indica en Feller (1973). Los retornos al origen solo ocurren en instantes pares de tiempo y además la distribución es simétrica, siendo más probables los intervalos o muy cortos o bien muy largos.

Ítem 3.5.- Si este jugador, durante 50 días seguidos jugase cada día sacando 10 bolas de la caja y comenzando cada día con 50 monedas:

¿Cuántos días piensas que acabaría el juego con más de 50 monedas? ¿Por qué?

¿Cuánto dinero crees que habría ganado en total en los 50 días? ¿Por qué?

A la pregunta de cuántos días esperan ganar, de un total de 50, hay dos alumnos de bachillerato que dicen puede ser cualquier cantidad de días. Estos alumnos dan como respuesta una referida al valor de la variable aleatoria considerada, que, en efecto, puede ser cualquiera.

Cinco del mismo grupo y siete de magisterio dan la respuesta correcta (25 días), con lo que tienen una estimación subjetiva correcta de la idea de valor esperado. El resto de los alumnos tiene un optimismo exagerado en las posibilidades de ganar, oscilando el número de días entre 30 y 50. Piensan que puede influir la suerte, de acuerdo con lo expuesto en los trabajos de Fischbein y Gazit (1984) y (1991), por lo que no aplican la teoría de la probabilidad.

Los argumentos más usados por los alumnos son: "que se debe al azar", "que hay la misma probabilidad", "que depende de la racha", según esto obtenemos que tres alumnos de bachillerato y dos de magisterio justifican su razonamiento con la idea de azar. Tres de bachillerato y seis de magisterio se basan en la igualdad de probabilidades entre obtener rojas y verdes. Uno de cada grupo piensa que depende de la racha concreta obtenida, no hace juicio probabilístico. Otros no saben dar la razón adecuada a su respuesta.

Para estudiar las respuestas a la última pregunta de este ítem, sobre los resultados de las ganancias esperadas en 50 días, establecemos las siguientes categorías: Cualquiera, ninguna, de 10 a 20, de 20 a 30, de 50 a 70 y más de 90. Según esta agrupación observamos que dos alumnos de bachillerato creen que pueden ganar cualquier cantidad, esto es, continúan basándose en la pregunta en términos de valor de la variable aleatoria y no en términos de esperanza matemática de la misma. Tres de bachillerato y dos de magisterio piensan que acabarán con la misma cantidad inicial, teniendo una intuición correcta de la esperanza matemática.

El resto es optimista y piensa finalizar con más dinero que al principio: cuatro piensan ganar entre 10 y 20, uno de 20 a 30 dos de 50 a 70 y seis más de 90 monedas. Esta intuición incorrecta puede estar influenciada por la costumbre social de practicar juegos de azar. Se suele dar gran importancia a la ganancia millonaria de una sola persona, olvidando los miles de personas que pierden dinero, y también manifiesta la creencia en poder controlar el azar más fácilmente en una sucesión de ensayos que en un ensayo único o incluso en un ensayo múltiple realizado simultáneamente, como indican Fischbein *et al.* (1991).

En la justificación de sus respuestas sólo cuatro alumnos del primer grupo y tres del segundo dan el razonamiento correcto de que hay igual probabilidad de ganar que de perder. El resto sigue siendo optimista pensando en ganar cada día una cantidad que puede ser pequeña o grande: "*He calculado que, de los 35 días, unos días puedo ganar de 4 monedas para abajo y, por término medio, unas dos monedas diarias*" (M 15).

Ítem 3.6.- El jugador tiene ahora 52 monedas y va a realizar dos jugadas más. ¿Es más probable que después de estas jugadas tenga otra vez 52 monedas, que tenga dos más o dos menos que antes? ¿Por qué?

Dado un estado del juego se le pregunta por la probabilidad de transición en dos pasos. A ello responden cinco alumnos de bachillerato y siete de magisterio que es igual de probable al cabo de las dos jugadas tener dos monedas más, dos menos o el mismo número de monedas. Están haciendo una aplicación incorrecta de la regla de Laplace, otorgando igual probabilidad a cada uno de los sucesos, cuando en realidad uno de ellos tiene doble probabilidad que los otros dos.

Un alumno de cada grupo da mayor probabilidad a tener dos monedas más o dos menos después de dos jugadas, otorgando mayor probabilidad a los sucesos que tienen menos, lo que concuerda con la esperanza de ganar la mayor parte de los días que se puso de manifiesto en una pregunta anterior. El resto de alumnos no contesta.

Esta pregunta, aunque aparentemente parece fácil, ha resultado difícil, pese a que los alumnos están acostumbrados al juego de apuestas. Probablemente influye en ello la dificultad que en el contexto de muestreo con reemplazamiento tiene la idea de orden, especialmente cuando se manejan objetos indistinguibles, como es puesto de manifiesto en las investigaciones de Lecoutre (1985, 1992).

Al estudiar las frecuencias de argumentos del ítem 3.6. observamos que cinco alumnos de bachillerato y tres de magisterio no saben dar argumento. Tres de cada grupo indican que es poco probable sacar dos bolas iguales, aunque esperan obtener mayor ganancia tras las dos jugadas. Por ello, el problema parece ser la no identificación de la trayectoria con la sucesión obtenida.

Un alumno de bachillerato hace de nuevo referencia a la intuición. Uno de bachillerato y dos de magisterio encuentran probable hallar dos resultados iguales: "*Dos menos porque es más probable*" (P 11), y el resto se basan en las mismas posibilidades de rojas y verdes: "*Creo que es la misma probabilidad en todos los casos y no se sabe si va a ganar o a perder*" (M 18).

Como resumen de esta parte de la prueba, que ha sido bastante rica en cuanto a variación de las intuiciones de los alumnos y a resultados no esperados, obtenemos las siguientes consideraciones:

i.- En general los alumnos han aceptado sin dificultad la idea de recorrido aleatorio y han tenido una buena comprensión de la situación simulada del juego de apuesta. Tampoco ha aparecido dificultad en cuanto a la representación gráfica y a la interpretación de los gráficos durante la experiencia.

ii.- Por el contrario, hemos observado un gran número de intuiciones erróneas referidas a las trayectorias de los recorridos aleatorios y a la idea de esperanza matemática, entre las que destacamos las siguientes:

- Se espera un cambio de signo frecuente en un recorrido aleatorio asociado a una prueba de Bernoulli, cuando los sucesos elementales son equiprobables.

- Se espera un gran número de cortes con el eje y un tiempo medio de retorno al origen pequeño. La distribución de los tiempos al origen se espera que sea simétrica, respecto al tiempo medio esperado.

- Existe una gran dificultad de enumeración de un conjunto especificado de trayectorias, aun cuando la longitud de las mismas sea pequeña, incluso en alumnos que son capaces de enumerar satisfactoriamente el subconjunto del espacio muestral producto correspondiente a la sucesión de ensayos.

- Existe una dificultad en algunos de los alumnos para dar un valor estimado para la esperanza matemática, centrándose en la consideración de valores aislados de la distribución de la variable aleatoria correspondiente.

- Se estima un valor esperado positivo, en lugar de una esperanza cero en juegos que, sin embargo, son considerados equitativos.

2.3.4. HEURÍSTICA DE LA REPRESENTATIVIDAD EN UNA SITUACIÓN DE SIMULACIÓN Y CONVERGENCIA ESTOCÁSTICA

Ítem 4.1.- En la maternidad de la ciudad X están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa según el sexo del recién nacido. Por este motivo han ideado el siguiente sistema de registro (ver anexo 1)

¿Cuál de estos casos te parece más probable?:

A) Que entre los próximos 10 nacimientos, 8 sean varones.

B) Que entre los próximos 100 nacimientos, 80 sean varones.

C) Las dos cosas anteriores son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

En esta pregunta se plantea al alumno una variante del clásico problema del hospital de Kahneman *et al.* (1982), con objeto de estudiar el empleo que efectúa de la heurística de la representatividad y el efecto de la actividad de simulación sobre dicha heurística. Las repuestas dadas sobre cuál de las dos muestras tiene mayor probabilidad de registrar más de un 80 por ciento de nacimientos de varones son las siguientes:

Tres estudiantes de bachillerato han mostrando una apreciación del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la proporción muestral. Uno de cada grupo indica, sorprendentemente, que es más seguro el apartado B (80 de 100). Uno no contesta y el resto manifiesta el sesgo de la representatividad al creer que es igual una cosa que otra. Es curiosa la mayor proporción de alumnos que emplean la representatividad tras la instrucción, confirmando nuestra hipótesis de que tal sesgo puede ser agravado por una enseñanza en la que no se contempla el estudio de la variabilidad asociada a los procesos estocásticos.

Mostramos a continuación los argumentos en que apoyan sus respuestas.

Un alumno de cada grupo encuentra más segura una muestra de 8 que la de 80. Estos alumnos muestran una falta de apreciación de la estabilidad de la frecuencia relativa, es decir de la convergencia estocástica. Para ellos, debido al carácter desordenado y variable de los sucesos aleatorios, al aumentar el número de ensayos, no haremos más que aumentar la imprevisibilidad y desorden global.

Un alumno de bachillerato dice que por intuición, con la tendencia ya repetidamente señalada de convicción profunda en su razonamiento y falta de justificación del mismo. Cinco alumnos de bachillerato y siete de magisterio se basan en que en ambas muestras la proporción de casos es la misma, es decir, al menos aparentemente, están empleando el argumento típico que se justifica por la heurística de la representatividad: "*Aunque sean distintos números, son las mismas razones, 8/10 y 80/100 son iguales*" (P 12).

Un alumno de bachillerato encuentra que es más probable que la proporción mayor esté en la muestra más grande, haciendo una aplicación diferente de la representatividad, al comparar no las proporciones en ambas muestras, sino dos parámetros diferentes: la proporción y el tamaño de la muestra que, según él, deben guardar relación: "*Al ser mayor la muestra, habrá más posibilidad de que salgan más razones*" (M 15). Un alumno de magisterio se basa en la igualdad de posibilidades de ser varón o hembra y otro de bachillerato no contesta.

Ítem 4.2.- ¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos?:

A) La fracción de chicos será mayor o igual a 7/10.

B) La fracción de chicos será menor o igual a 3/10.

C) La fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10.

Razona tu respuesta.

Realiza una simulación, rellena el gráfico y compara con las previsiones.

A la pregunta sobre la proporción de varones que esperan nazcan, en los próximos 10 nacimientos, en el hospital dado en el apartado anterior, hemos registrado las siguientes respuestas:

Dos alumnos de magisterio opinan que la proporción de varones será mayor de 7/10, mostrando un sesgo de "recencia positiva", ya que esperan la continuación de la tendencia de nacimientos en el resto de la trayectoria.

Uno de bachillerato y dos de magisterio piensan que será menor que 3/10, mostrando, en consecuencia un sesgo de "recencia negativa". Ocho de bachillerato seis de magisterio dan la respuesta correcta que la fracción estará entre 4/10 y 6/10. El restante alumno considera igual de probable las alternativas.

Ítem 4.3.- Fíjate en el gráfico, que representa la variación de varones conforme aumente el número de nacimientos. ¿En qué parte de este gráfico crees que será más probable que la proporción de varones esté más próxima a 0,5 ?

A) En los 10 primeros nacimientos.

B) Entre los nacimientos 11 y 25.

C) Entre los nacimientos 26 y 40.

D) En todas partes igual.

Razona tu respuesta.

Una vez realizada la simulación y, comprobada o no sus conjeturas sobre la misma, se pide a los alumnos su opinión sobre las oscilaciones de la frecuencia relativa en distintos puntos de la trayectoria, preguntándoles en cuál de los puntos esta frecuencia estará más próxima a la probabilidad teórica ½, siendo sus respuestas las siguientes:

Tres alumnos de bachillerato y tres de magisterio consideran más probable que la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad 0,5 se presente en los diez primeros casos, por lo que generalizan indebidamente la ley de los grandes números (creencia en la "ley de los pequeños números").

Un alumno de bachillerato piensa que es más probable entre 11 y 25. Es menos exagerada la creencia que en el caso anterior. Cinco alumnos de bachillerato y 4 de magisterio dan la respuesta correcta. El resto consideran la equiprobabilidad en todos los tramos.

Los argumentos a sus respuestas son:

Cuatro alumnos de bachillerato y una de magisterio dan como argumento la igualdad de probabilidades: "*Es más probable la igualdad de hombres y de mujeres*" (P 13); 4 de bachillerato y 6 de magisterio dan la estabilidad de la frecuencia a largo plazo: "*Cuantos más nacimientos, mayor seguridad habrá de estar cercano a la mitad*" (M 7); uno de cada grupo piensan que con mayor número de ensayos hay menos certeza en la probabilidad, es decir que con un número mayor de ensayos se tiene menor seguridad en la predicción: "*Al haber mayor número de nacimientos es más difícil obtener una cantidad más acertada de probabilidad de varones*" (M 7). Uno indica que estuvo influenciado por la experiencia realizada y el resto no dan argumentos.

En resumen, en este apartado destacamos como hechos más notables el gran número de argumentos basados, aparentemente(*), en la heurística de la representatividad, la manifestación de la "recencia positiva" y "negativa" y la influencia sobre la predicción de una parte futura de la trayectoria de un proceso estocástico de los resultados obtenidos en los primeros ensayos. De este modo, parece que se asocia a la sucesión de Bernoulli un carácter no markoviano, aunque, para estudiar con más detalle estas concepciones, en el siguiente apartado haremos un estudio de los patrones de respuestas seguidos en los tres ítems 4.1 a 4.3 por cada uno de los alumnos y la influencia sobre la respuesta al último ítem del resultado de la simulación.

(*) Usamos "aparentemente" porque, como se muestra en 2.3.5, muchos alumnos que eligen en los ítems opciones que en otras investigaciones se atribuían a la representatividad, tienen en realidad otros tipos de razonamientos.

2.3.5. ANÁLISIS DE PATRONES DE RESPUESTAS

Al estudiar las respuestas conjuntas a los tres ítems de esta parte de la prueba, se han obtenido diferentes patrones de respuesta que se representan esquemáticamente en la tabla 2.3.5.1. Esta técnica del estudio de los patrones de respuesta a preguntas relacionadas, es propuesta por Gardfield y Del Mas (1989) y Del Mas y Gardfield (1991) como medio de profundizar en las concepciones de los estudiantes. Los resultados de este estudio han sido publicados en Serrano *et al.* (1992, 1994).

Tabla 2.3.5.1. Clasificación de los alumnos según patrones de respuestas a los ítems.

Respuestas a los ítems			Número de casos	Alumnos con esta respuesta
1º	2º	3º		
A	C	A	1	P11
A	C	B	1	P2
A	D	C	1	P1
B	B	C	1	M15
B	C	A	1	P10
C	A	A	1	M19
C	A	C	1	M16
C	B	C	1	P12
C	B	D	1	M18
C	C	A	3	P6; M17; M9
C	C	C	5	P3; P4; P5; P13; M17
C	C	D	2	M8; M20
D	C	C	1	M14

Puede observarse que la respuesta mayoritaria en el primer ítem ha sido la C (14 de entre los 20 alumnos), por lo que, de haber estudiado aisladamente esta pregunta, se obtendría la impresión de una utilización mayoritaria de la heurística de la representatividad y una gran uniformidad de concepciones. Sin embargo, en la discusión que sigue, y considerando los diferentes patrones seguidos en las otras dos preguntas, observaremos una gran variabilidad de razonamientos en los alumnos que han contestado de igual manera en este primer ítem.

<u>Patrón de respuesta CC en los dos primeros ítems</u> (10 casos) Estos alumnos han contestado correctamente al segundo ítem, teniendo en el primero un sesgo de no apreciación del tamaño de la muestra, que en la teoría de Kahneman y Tversky se explica por la utilización de la heurística de la representatividad. También dicha teoría concordaría con su repuesta en el segundo ítem, pues en una serie de 10 nacimientos lo más representativo es que el número de varones esté comprendido entre 4 y 6. Por ello, es imposible sólo con la elección que han hecho en este segundo ítem, separar las respuestas correctas de las debidas a la utilización de esta heurística.

Por este motivo se pidió en todos los ítems a los alumnos que razonaran su respuesta. De estos argumentos puede comprobarse que los alumnos han elegido la opción C por la similaridad entre la proporción en la muestra y la de la población de referencia, como se ve en los siguientes argumentos: *"hay igual posibilidades en ambos sexos"* (P4), *"no he tenido mucha suerte, ya que me han salido muchas hembras en la simulación y el gráfico se ha desviado hacia los 3/10" (P5).*

Dentro de este patrón podemos distinguir tres casos según la respuesta dada a la tercera pregunta, una vez efectuada la simulación.

<u>Alumnos que eligen la respuesta C en el tercer ítem</u> (5 casos, con respuestas CCC respectivamente en los ítems 1, 2 y 3). Estos alumnos dan una respuesta contradictoria con las dos anteriores, ya que esperan una mayor convergencia en el último tramo del gráfico, esto es, manifiestan una apreciación del tamaño de la muestra. Es notable que en todos ellos la simulación no resultó conforme a lo previsto en la segunda respuesta, es

decir se obtuvo un número de varones no incluido en el intervalo (4,6), lo que motivó la reflexión sobre la mayor estabilidad de la frecuencia a largo plazo, como se manifiesta en los siguientes ejemplos:

> *"No siempre saldría así y si hubiese muchos más nacimientos no se desplazaría hacia los lados, sino que se quedaría próximo a la mitad"* (P3). *"Puede que hubiese una racha al principio, pero esto se recuperaría o estabilizaría después"* (M 17).

<u>Alumnos que eligen la opción A en el tercer ítem</u> (3 casos con patrón de respuesta CCA). Estos sujetos han aplicado las tres veces la heurística de la representatividad, pues esperan la convergencia, ya en los 10 primeros ensayos. En todos estos casos los alumnos han obtenido en la simulación un resultado que corresponde con lo previsto en el ítem 2. Cabe destacar el argumento del sujeto M7 a la tercera pregunta, ya que, *"al haber mayor número de nacimientos es más difícil obtener una cantidad más acertada de la probabilidad de varones".* Este argumento ha sido hallado en otros dos alumnos quienes piensan que las muestras mayores son menos fiables, no siendo conscientes del fenómeno de la convergencia. El resto de los alumnos dan como argumento *"la igualdad de probabilidades".*

<u>Alumnos que eligen la opción D en el tercer ítem</u> (2 casos con patrón de respuesta CCD). Consideramos este caso semejante al anterior, diferenciándose únicamente en el mayor énfasis en la representatividad, ya que esperan la convergencia por igual en toda la trayectoria del proceso, independientemente del tamaño de la muestra. También el alumno M8 obtiene lo esperado en la simulación.

<u>Patrón de respuesta CA en los dos primeros ítems</u> (dos casos). Son los alumnos que, habiendo utilizado la heurística de la representatividad en la primera pregunta, esperan en la segunda que continúe la tendencia que aparece en el enunciado del primer problema, habiendo asociado las dos situaciones entre sí. Manifiestan, en consecuencia, un sesgo de "recencia positiva". De ellos, el alumno M16 obtiene en el experimento de simulación un valor acorde con lo esperado y elige la respuesta C al tercer ítem, consistente con las dos primeras respuestas pues *"creo que se debe compensar esta tendencia a largo plazo".* El alumno M19 habiendo previsto una continuación de la tendencia en la simulación, obtiene al realizarla un número de varones comprendido entre 4 y 6. Por ello, acaba eligiendo la respuesta A en el tercer ítem indicando *"puede que al principio haya el mismo número de niños y niñas y después aumente y puede haber una desproporción"*, manifestando como otros compañeros una mayor confianza en la muestra grande y también un cambio de respuesta en el ítem 3 respecto a las dadas en los otros dos.

<u>Patrón de respuesta CB en los dos primeros ítems.</u> Son dos casos de alumnos que, habiendo manifestado el empleo de la heurística de la representatividad en el primer ítem, esperan menos de tres varones en los próximos 10 nacimientos, manifestando un sesgo de "recencia negativa". De ellos, el alumno P2 ha elegido la respuesta C en el

tercer ítem, es decir, espera que, tras aparecer una racha de sentido contrario a corto plazo, la frecuencia relativa se estabilice a largo plazo, respondiendo consistentemente a las tres preguntas. En este alumno la opción del segundo ítem no se confirmó en el experimento de simulación.

Por otro lado, el alumno M18 obtiene en la simulación un resultado diferente al esperado (entre 4 y 6 varones) por lo que acaba pensando que *"la convergencia se realiza en todas partes por igual"* eligiendo la opción D en el tercer ítem.

Elección de la respuesta B en el primer ítem. Sólo han sido dos casos, pero conviene destacar que se considera que *"al ser mayor la muestra habría más posibilidad de que salgan más varones"* (alumno M15, con patrón BBC), aplicando la representatividad no en función del parecido de la proporción muestral con la existente en la población, sino entre la magnitud relativa de esta proporción y la del tamaño de la muestra. Este alumno, tras manifestar su falta de confianza en las muestras grandes, espera una compensación de la tendencia a corto plazo. La simulación, sin embargo, no sale conforme a sus expectativas, por lo que finalmente elige la opción C en el tercer ítem, modificando su opinión *"es más probable que se igualen el número de niños y niñas al final de toda la "estadística" que en cualquier otro punto"* (alumno M15).

El alumno P10, que también cree más fiables las muestras pequeñas, con patrón de respuesta BCA obtiene lo esperado en la simulación, por lo que termina eligiendo la opción A en tercer ítem manifestando que *"es más probable que salgan 5 y 5 en 10 nacimientos que en muestras mayores, salgan, por ejemplo 20 y 20"*.

Respuestas correctas en el primer ítem. Hay cuatro casos: el alumno P1 tiene un patrón de respuesta ADC, responde correcta y consistentemente a los ítems 1 y 3, aunque aplica incorrectamente la regla de Laplace en el segundo, argumentando que *"hay tres posibilidades y las tres son igualmente probables"*.

El alumno P2 tiene un patrón de respuesta ACB; responde correcta y consistentemente en los dos primeros ítems, aunque espera una convergencia ya en el segundo tramo del gráfico.

El sujeto P11 tiene un patrón de respuesta ACA; responde correcta y consistentemente a los dos primeros ítems y, aunque la simulación no sale según lo esperado su respuesta incorrecta en el tercer ítem es debida a la no comprensión correcta de la pregunta. Por último, el alumno M14 responde correctamente a los tres ítems.

Influencia del resultado en la simulación sobre la modificación de la estrategia en el tercer ítem

Como resumen de lo expuesto, presentamos en la tabla 2.3.5.2 un esquema, en el que se estudia la consistencia de la respuesta en el tercer ítem, para los alumnos que manifestaron sesgo de representatividad en el primer ítem, en función del resultado obtenido en el experimento de simulación.

Biehler (1991) sugiere que la simulación podría constituir, especialmente cuando se emplea el ordenador, un medio de proporcionar experiencia estocástica, cuya falta es señalada por autores como Fischbein (1975) como una de las causas por las que las intuiciones estocásticas no llegan a desarrollarse adecuadamente. Sin embargo, como señala Freudenthal (1972), las experiencias de simulación realizadas con fines didácticos no siempre convergen a las probabilidades teóricas con la rapidez que sería deseable. Por ello avisa del posible peligro que pueden tener estas situaciones, lo que concuerda con los resultados experimentales de nuestro estudio, ya que algunos de los alumnos han visto reforzadas sus ideas incorrectas, influenciados posiblemente por el resultado obtenido en la simulación. Este efecto podría ser también una posible explicación de los resultados contradictorios obtenidos por Del Mas y Garfield (1991) en su experiencia de enseñanza.

Tabla 2.3.5.2. Resultado de la simulación y estrategia en el ítem 4.3

	ÍTEM 3 CONCUERDA CON LOS ÍTEMS 1 Y 2		ÍTEM 3 NO CONCUERDA CON LOS ÍTEMS 1 Y 2	
		Alumnos		Alumnos
Resultado de simulación esperado	CCA CCD CAC BCA	P6; M7; M9 M8 M16 P10	CCD CBC	M20 P12
Resultado de simulación no esperado	CCC	M17	CCC CAA CBD BBC	P3; P4; P5; P13 M19 M18 M15

2.4. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

En este capítulo hemos presentado un análisis de los resultados de un estudio exploratorio sobre prácticas de los estudiantes al resolver problemas referidos a algunos conceptos elementales asociados a la idea de proceso estocástico en tiempo discreto. Se ha empleado el método de entrevista individual a 10 estudiantes de primer curso de bachillerato y a otros 10 estudiantes de primer curso de magisterio. Esta entrevista individual estaba combinada con la realización de experiencias individuales de simulación. Debido al carácter restringido e intencional de la muestra, el enfoque del estudio es exploratorio. Las principales conclusiones obtenidas son las siguientes:

Entre las prácticas correctas de los alumnos de la muestra, encontramos en la primera parte de la prueba una comprensión de las características generales de imprevisibilidad de los fenómenos aleatorios y regularidad en la frecuencia de posibles resultados. La mayor parte tiene un razonamiento combinatorio correcto sobre la secuencia de resultados e identifica correctamente los sucesos elementales del espacio muestral producto.

También aceptan y comprenden rápidamente la idea de recorrido aleatorio y conceptos asociados, tales como trayectoria, corte con el eje, máximos, mínimos, tiempo de espera, etc.

La traducción de un sistema de representación a otro ha sido fácil, tanto al pasar de la secuencia de ensayos al recorrido aleatorio como el recíproco. Igualmente ha ocurrido en la representación de las frecuencias relativas.

Por otro lado estos alumnos han mostrado las siguientes prácticas incorrectas sobre los procesos estocásticos empleados:

* Fallo por algunos estudiantes en la aplicación de la regla de Laplace estudiada en cursos anteriores, que sin embargo muestran capacidad combinatoria e identifican el espacio muestral producto. El fallo es debido en consecuencia, no a la falta de razonamiento combinatorio, sino a la dificultad de aplicación de la idea de independencia de ensayos en un contexto práctico. También se muestra la mayor dificultad de aplicación de la idea de independencia en un contexto práctico que en uno teórico.

* Se ha observado un gran número de estimaciones incorrectas de parámetros de las trayectorias en los recorridos aleatorios: número de cambios de signo, tiempo de permanencia a un lado del eje, etc. También se ha observado una gran dificultad de enumeración de posibles trayectorias, incluso cuando observan correspondencia biunívoca entre trayectoria y sucesión de estados. Estos hechos están posiblemente conectados y pueden influir en las intuiciones incorrectas manifestadas por estos alumnos respecto a la esperanza matemática en un contexto de juego de apuesta.

Hemos presentado también un análisis del patrón de respuestas seguido en tres ítems referidos al empleo de la heurística de la representatividad, combinado con una experiencia de simulación de la situación presentada en los ítems. Del análisis de estos patrones obtenemos las siguientes conclusiones:

- Aunque la mayor parte de los alumnos ha respondido al problema clásico del hospital de Kahneman y Tversky empleando aparentemente la heurística de la representatividad, hemos hallado una gran variedad de matices de aplicación de la misma.

- comparación de porcentajes sin tener en cuenta el tamaño de la muestra.

- comparación de la magnitud relativa de la proporción con el tamaño muestral.

- confianza en una continuación (en otros casos de una compensación) de la tendencia.

- estabilización rápida sin tener en cuenta la tendencia anterior o, por el contrario, estabilización a largo plazo.

- Presencia en ciertos alumnos de una creencia en la mayor fiabilidad de las muestras pequeñas frente a las grandes, concibiendo el azar como un proceso que genera desorden y no confiando en la estabilización de las frecuencias.

- Influencia notable del resultado obtenido en la simulación sobre la respuesta al último ítem. Como consecuencia, este resultado plantea de nuevo la necesidad de una mayor investigación sobre las implicaciones didácticas de la simulación para la enseñanza de la probabilidad.

CAPÍTULO III SIGNIFICADOS DE LAS SECUENCIAS ALEATORIAS PARA ESTUDIANTES DE SECUNDARIA. HEURÍSTICAS Y SESGOS EN EL RAZONAMIENTO ESTOCÁSTICO

3.1. INTRODUCCIÓN

Al finalizar la primera fase del estudio empírico, descrita en el capítulo 2, llegamos a la conclusión de que las situaciones didácticas experimentadas resultaban asequibles para los alumnos de secundaria. No obstante, también se identificaron una serie de heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos, así como dificultades de comprensión de algunos conceptos implicados en las actividades propuestas. Todas estas limitaciones han de tomarse en cuenta en la organización de la enseñanza, ya que los alumnos no construyen su conocimiento probabilístico sobre el vacío, sino a partir de la confrontación y revisión de las ideas previas que traen consigo al comenzar su aprendizaje.

Estas conclusiones fueron obtenidas a partir de una muestra muy reducida de alumnos, lo que nos llevó a plantearnos la pregunta de hasta qué punto nuestros resultados serían generalizables a otros alumnos del mismo nivel educativo. Con objeto de aumentar la evidencia empírica de las conclusiones sobre las dificultades y errores de los estudiantes, obtenidas en la fase de entrevista, nos decidimos a llevar a cabo una evaluación de las mismas en una nueva muestra de estudiantes.

Dicho estudio se presenta en este capítulo, que comienza con la descripción del cuestionario utilizado en la recogida de datos y sus resultados en una muestra piloto. Una vez depuradas las preguntas del cuestionario, se obtuvieron datos de un total de 277 alumnos de dos grupos diferentes: Primer Curso de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria. Debido a la conveniencia de limitar el tamaño del cuestionario, nos hemos centrado en el estudio de los siguientes puntos, que hemos considerado esenciales para el enfoque frecuencial de la enseñanza de la probabilidad:

a) Las propiedades que los alumnos asignan a las secuencias aleatorias. Este punto es fundamental para la comprensión de las actividades propuestas y de los conceptos implicados en las mismas y completa las conclusiones obtenidas en el primer apartado de las entrevistas.

b) El uso de heurísticas y sesgos en la evaluación de probabilidades en experimentos compuestos, de los que hemos observado un gran número en las entrevistas, incluso en alumnos con un buen razonamiento combinatorio.

c) Finalmente, hemos añadido una pregunta sobre interpretación de enunciados de probabilidad en su acepción frecuencial, puesto que algunos resultados de las entrevistas nos sugieren que una porción importante de alumnos podrían ser encuadrados en el "enfoque en el resultado" descrito por Konold.

Las cuestiones de investigación que, nos hemos planteado sobre cada uno de estos apartados son las siguientes:

- ¿Cuál es la extensión real de las dificultades encontradas en la fase de entrevista en una muestra de estudiantes más representativa de los alumnos de secundaria? ¿Coinciden las proporciones de alumnos con dificultades encontradas en nuestros estudiantes con las descritas en otras investigaciones previas? ¿Son los alumnos consistentes (respecto a los errores y dificultades) en los argumentos que apoyan las opciones elegidas en los ítems del cuestionario? ¿Emplean los alumnos un mismo tipo de argumento para una clase dada de situaciones (por ejemplo, en el reconocimiento de secuencias aleatorias) o, por el contrario, existen variables de tarea de estas situaciones que afectan a su respuesta? ¿Existen asociaciones entre los diferentes errores, o son estos errores independientes unos de otros? ¿Podemos describir el razonamiento de los alumnos en el tipo de problemas propuestos mediante una escala lineal, o, por el contrario, es posible identificar una estructura multifactorial en el mismo? ¿Existe alguna evolución en alguno de los aspectos anteriores (respuestas, argumentos, estructura global de las respuestas), como consecuencia de la mayor edad e instrucción?

Los resultados obtenidos se describen de acuerdo con las tres partes diferenciadas en las que se ha dividido el cuestionario. Para cada una de ellas se analizan las respuestas y los argumentos de los alumnos, comparando entre sí los dos grupos y estudiando la consistencia entre respuestas y argumentos. Asimismo, describimos las principales diferencias y semejanzas halladas, respecto a otras investigaciones previas. El análisis de correspondencias permite identificar la estructura de relaciones entre respuestas a diferentes ítems, así como el efecto del grupo y de las variables de tarea sobre las mismas.

3.2. ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO PILOTO: TIPOS DE ÍTEMS Y VARIABLES DE TAREA

El instrumento utilizado en la recogida de datos en esta segunda fase es un cuestionario para ser completado por escrito por los estudiantes. Está formado por tareas de diferente tipo, tomadas en su mayor parte de investigaciones previas, pues se trataba de evaluar sesgos y heurísticas específicas con ítems de fiabilidad probada.

Como hemos indicado, uno de los fines que pretendemos es la comparación de nuestros resultados con los de otros autores. No obstante, no sólo aspiramos a este punto, pues completamos este trabajo con el análisis de las diferencias en los dos grupos y el estudio de asociaciones entre diversas heurísticas y sesgos, que constituye una aportación original de nuestra tesis.

El cuestionario consta de diez ítems agrupados en tres partes que evalúan aspectos diferentes del razonamiento de los alumnos:

- La primera parte consta de 4 ítems y trata de determinar el significado que, para los alumnos, tienen las secuencias de resultados aleatorios.
- La segunda se compone de ítems utilizados en investigaciones sobre diversas heurísticas y sesgos, evaluando el uso que hacen de ellos los alumnos.
- La tercera parte se refiere a la interpretación de enunciados de probabilidad, dados en términos frecuenciales.

A continuación analizamos cada uno de los ítems de estos tres apartados.

Descripción de la Parte 1:

Con esta primera parte del cuestionario queremos evaluar las propiedades que los alumnos asignan a las secuencias de resultados aleatorios, no sólo a nivel declaratorio (reconocimiento) sino las que se presentan en las secuencias construidas por los alumnos.

Los cuatro ítems que forman esta parte del cuestionario han sido tomados del cuestionario "Random One", usado por Green (1988, 1991) en su estudio longitudinal sobre 1.820 escolares ingleses de 7 a 14 años. Por este motivo, podremos comparar nuestros resultados con los de este autor, para los alumnos de edad similar, y extender sus resultados a alumnos de 18 años.

En esta parte de la prueba hemos utilizado todos los tipos de tareas propuestos por Green en la investigación citada, aunque se han suprimido algunos de los distractores o algunos ítems similares a los que proponemos, con objeto de que el instrumento global no fuese demasiado largo.

Los tipos de ítems incluidos son dos: generación de sucesiones o distribuciones aleatorias y reconocimiento de sucesiones o distribuciones aleatorias. En cada uno de los dos tipos hemos considerado distribuciones aleatorias lineales y planas.

En las tareas de reconocimiento se presenta al alumno una serie de secuencias o distribuciones aleatorias y se le pide un juicio subjetivo sobre la aleatoriedad de las mismas. En concreto, se le pide que indique cuáles de ellas cree que pueden haber sido generadas por un experimento aleatorio.

En las tareas de generación de distribuciones aleatorias se pide al alumno que escriba una sucesión aleatoria compuesta por un número dado de sucesos o una distribución de puntos aleatorios en una cuadrícula. Se le pide que lo haga como crea que debiera haberse obtenido si hubiese utilizado un cierto generador aleatorio, como, por ejemplo, una moneda o un dado. Es una tarea inversa a la anterior y además, no queda restringida por las sucesiones que a priori elige el investigador. De este modo, esperamos poder deducir las características que los alumnos atribuyen a estas sucesiones.

A continuación analizamos con detalle cada uno de los ítems que componen esta parte de la prueba.

Ítem 1:
Supón que estás lanzando una moneda 50 veces, sin hacer trampas. Pon C o X en cada cuadro (C quiere decir que obtienes una cara y X que obtienes una cruz).

Se trata de generar una secuencia simulando los resultados obtenidos consecutivamente al repetir un número dado de veces un experimento aleatorio simple. El experimento considerado consiste en lanzar una moneda no sesgada. El espacio muestral de cada experimento simple (lanzar una vez la moneda) consta, por tanto, de dos sucesos elementales equiprobables y la longitud de la secuencia es 50.

Analizaremos los aspectos que Green estudió sobre las sucesiones generadas por los escolares que se describieron en la sección 1.4..2.2, en particular las frecuencias relativas de caras y cruces, la longitud y número de rachas y la consistencia entre las dos partes de la secuencia.

Ítem 2:

Pablo, usando 16 fichas numeradas 1,2,3,4,....16, juega de la siguiente forma: pone todas las fichas en una caja vacía y mueve con fuerza la caja. Raquel cierra los ojos y coge una ficha. Es la ficha número 7.

Pablo pone una cruz en la casilla número 7. La ficha 7 se pone otra vez en la caja, se vuelve a mover la caja y otro niño toma una ficha y repite lo que hizo Raquel .

1	2	3	4
5	6	7 x	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2.1. Imagínate que estás jugando a este juego y sacas treinta veces una ficha como arriba se dice. Pon 30 cruces en los lugares que creas según las fichas que saques.

2.2 Enséñanos ahora cómo quedarían las siguientes casillas si juegas este juego 16 veces. Pon 16 cruces.

En esta pregunta se ha tomado de los ítems 4, 5 y 6 del test "Random one" de Green, adaptándolos para hacer un sólo ítem. Aunque ahora también se trata de simular el resultado de una sucesión de experimentos aleatorios, la disposición espacial introduce nuevos elementos conceptuales que no están presentes en la tarea anterior. En primer lugar, el conjunto de resultados posibles es mucho mayor, ya que se trata de cada una de las celdas en que se ha dividido la cuadrícula (16 resultados).

El modelo que mejor aproxima la situación experimental es la distribución de Poisson en el plano. Por ello, además de tenerse en cuenta la frecuencia relativa con que aparece cada resultado, aparecen nuevas variables aleatorias, como el número de celdas con frecuencia 0, 1, 2, ... etc.

No tiene sentido ahora hablar de longitud de rachas, ya que el orden en que aparecen los diferentes resultados es irrelevante. Como variable de tarea se tiene en cuenta el número de sucesos, ya que se pide generar una secuencia aleatoria con 16 sucesos y otra con 30. En el primer caso, el número de sucesos a generar coincide con el número de sucesos posibles en el espacio muestral correspondiente al experimento simple (colocar una cruz). El alumno que espere una correspondencia exacta de las características de la población y la muestra tenderá a colocar un punto en cada una de las casillas.

En el segundo caso, necesariamente debe haber resultados repetidos. Se desea saber si el alumno realiza una distribución determinista de los resultados entre el conjunto posible de sucesos del espacio muestral o si es consciente de la alta probabilidad de que haya sucesos que no se presenten (cuadros vacíos) y de la variabilidad aleatoria.

La distribución empírica producida por el alumno puede compararse con la distribución teórica esperada, para ver hasta qué punto el modelo de distribución en el plano del alumno se conforma a esta distribución teórica. En particular, resultan de interés:

a) La frecuencia relativa de cuadros vacíos.

b) La existencia de cuadros con dos o más resultados.

c) El número máximo de resultados en un cuadro.

Ítem 3:

Se pidió a cuatro niños lanzar una moneda 40 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Ellos pusieron C para indicar una cara y X para indicar una cruz. Estos son sus resultados:

Daniel:
C X C X X C C X C X C C X X C X X C C X X C X C C X X C X C X C X C X C X X C X
Martín:
C X X X C X X C C C X C X X X X X C X C X C C X C X X C C C C X X X C X X C C C
Diana:
C X X X C X X C X C X X X C X X X X C C X X X C X X C X X C X X X X C X X X C X
María:
X X X C X C C X X X C X C C C C C X C X C X X C X C C X X X X C C C X C C X C C

3.1. ¿Hizo trampas Daniel? ¿Por qué?
3.2. ¿Hizo trampas Martín? ¿Por qué?
3.3. ¿Hizo trampas Diana? ¿Por qué?
3.4. ¿Hizo trampas María? ¿Por qué?

Se trata de dar un juicio subjetivo sobre la aleatoriedad de ciertas secuencias. Es la inversa de la tarea propuesta en el ítem 1, en el sentido de que el experimento aleatorio considerado es el mismo: lanzamiento de una moneda no sesgada. El espacio muestral de cada experimento simple es, por tanto, compuesto de dos resultados equiprobables.

De este modo podremos estudiar la consistencia entre las propiedades que los alumnos atribuyen a las secuencias aleatorias a nivel de reconocimiento (declarativo) y las que usan para generar una secuencia aleatoria (nivel actuativo).

Ha sido tomado de los ítems 3 y 8 del test "Random one" de Green, que se han adaptado para hacer un sólo ítem con varios apartados. Las secuencias incluidas tienen las siguientes características:

Daniel:

Frecuencia de caras: 19.
Número de rachas: 30.
Longitud de la racha más larga: 2.
Distribución de la longitud de las rachas (20, 10).

Martín:

Frecuencia de caras: 20.
Número de rachas: 21.
Longitud de la racha más larga: 5.
Distribución de la longitud de las rachas (11,4,4,1,1).

Diana:

Frecuencia de caras: 12.
Número de rachas: 22.
Longitud de la racha más larga: 4.
Distribución de la longitud de las rachas (12,4,4,2).

María:

Frecuencia de caras: 22.

Número de rachas: 22.

Longitud de la racha más larga: 5.

Distribución de la longitud de las rachas (12,5,3,1,1).

En este ítem se pide al alumno razonar sus respuestas, por lo que podremos comparar con las razones dadas por los estudiantes en la prueba usada por Green o bien refinar la clasificación de respuestas producidas por Green que se describieron en la sección 1.4.2.2.

Ítem 4:

Al juego que inventó Pablo han jugado cuatro niños y sus resultados son los que mostramos a continuación. ¿Crees que hay alguno de ellos que ha hecho trampas en el juego? Explica por qué lo crees así y señala si hizo o no trampas en cada uno de los casos.

X	X	X	X
x	X	X	X
X	X	X	X
X	x	X	x

Luis

4.1. ¿Ha hecho trampa Luis? ____

X x	xX		
		X x	X X
	x X		x X
	X x		X x

Jesús

4.3. ¿Ha hecho trampa Jesús? ___

XX X		X	
	X	X X	X XX
X	x		X X
	X x		

Jaime

4.2. ¿Ha hecho trampa Jaime? ___

		X	X X
		XXX	X X
X	X x		
x	XxXX		

María

4.3. ¿Ha hecho trampa María? ___

Explica tus respuestas.

Tomado del ítem 9 del test "Random one" de Green (1988, 1991), suprimiendo algunos distractores que resultaron demasiado fáciles en la investigación del citado autor. Se trata de dar un juicio sobre la aleatoriedad de una distribución de puntos en una cuadrícula. La situación es similar a la presentada en el ítem 2, lo que permitirá comparar la consistencia de los alumnos en estos dos tipos de tarea. Los distractores considerados son los siguientes:

Luis:

Los puntos se han distribuido uno en cada celda, por lo que no aparecen celdas vacías o con dos o más cruces. Sin embargo, al estar colocados los puntos al azar dentro de cada cuadrícula, este patrón se conoce como "disposición semialeatoria".

Jesús:

La distribución del número de cruces por celda es (8, 0, 8). Aunque aparecen celdas vacías, y celdas con dos cruces, no aparece ninguna celda con una sóla cruz.

Jaime:

La distribución del número de cruces por celda es (7, 4, 3, 2).

María:

La distribución del número de cruces por celda es (8, 3, 3, 1,1). Aunque esta distribución es relativamente probable, sin embargo la disposición espacial de las cruces concentradas en dos de las diagonales del cuadrado es muy improbable.

Este ítem ha sido también utilizado por Toohey (1995). Ni este autor ni Green, en su investigación, estudiaron los argumentos de los alumnos, por lo que nosotros pensamos completar este aspecto en nuestro trabajo, con objeto de analizar las propiedades que los alumnos atribuyen a las distribuciones aleatorias de puntos en el plano. Una de las aportaciones de esta tesis es presentar una clasificación común para los argumentos de los alumnos en los ítems 1 y 2. Esta clasificación describe las propiedades (correctas e incorrectas) asociadas por los alumnos a las secuencias de resultados aleatorios.

Descripción de la Parte 2:

Esta parte de cuestionario se orienta a evaluar si los alumnos hacen uso de diversas heurísticas y sesgos, en especial la representatividad, por la que los juicios de probabilidad se realizan en base al parecido entre muestra y población, prescindiendo del tamaño de la muestra. Ha sido construido básicamente con ítems del test "Intuitive reasoning" de Konold y Garfield (1993), aunque los ítems han sido usados por diversos autores.

Ítem 5:

5.1.-¿ Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- C C C X X
b.- X C C X C
c.- X C X X X
d.- C X C X C
e.- Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

5.2.- Abajo listamos las mismas sucesiones de caras y cruces. ¿Cuál de las sucesiones es menos probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- C C C X X
b.- X C C X C
c.- X C X X X
d.- C X C X C
e.- Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

En este ítem, empleado también por Kahneman y Tversky (1982) y Konold *et al.* (1993), se usa de nuevo el contexto de monedas. En lugar de preguntar si se considera o no aleatoria la secuencia, se pide al alumno una estimación de la probabilidad de la misma. Ello requiere que el alumno compare mentalmente las secuencias dadas entre sí y con otras posibles secuencias producidas en la serie de ensayos dada. Es decir, se requeriría la identificación de los elementos de un espacio muestral producto. Aunque no es preciso enumerar todo estos elementos, debe comprenderse el tipo de configuración combinatoria que se produce como resultado del experimento producto.

Se trata de comprobar si la estimación de la probabilidad de una secuencia corta de caras y cruces se hace en base a su representatividad. Este ítem ha sido obtenido como síntesis de los ítems 3, 4, 5 del test de Konold y Garfield. Konold *et al.* (1993) emplearon este ítem para estudiar si los alumnos razonaban en base al "enfoque en el resultado aislado". También es similar al ítem 1 que empleamos en la fase de entrevistas. Por comparación con las tareas anteriores, las secuencias son mucho más cortas, para que el alumno ponga en juego su razonamiento combinatorio.

Ítem 6:

Una ruleta se divide en 5 áreas de igual tamaño, como se muestra debajo (véase anexo 2).

Se da un fuerte impulso a la flecha de la ruleta. ¿Cuál de los siguientes resultados es más verosímil que resulte al girar la ruleta tres veces?:

a.- 215, en este orden exacto

b.- Obtener los números 2, 1, 5, en cualquier orden.

c.- Obtener los números 1, 1, 5 en cualquier orden.

d.- Las opciones a y b son igualmente verosímiles.

e.- Las opciones a, b, y c son igualmente verosímiles.

En este ítem, tomado de Konold y Garfield (1993), se trata de comprobar si los alumnos estiman la probabilidad de una secuencia de resultados en base a su representatividad o, si por el contrario, hacen uso del razonamiento de tipo combinatorio. El espacio muestral del experimento simple tiene 5 resultados posibles, en un contexto de ruletas. El distractor a) se incluye para ver si los alumnos hacen uso de la idea de orden.

Ítem 7:

En la maternidad de la ciudad X están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa, según el sexo del recién nacido.

7.1. ¿Cuál de estos casos te parece más probable?:

a.- Que entre los próximos 10 nacimientos 8 o más sean varones.

b.- Que entre los próximos 100 nacimientos 80 o más sean varones.

c.- Las dos cosas anteriores son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

7.2. ¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos?:

a.- La fracción de chicos será mayor o igual a 7/10.

b.- La fracción de chicos será menor o igual a 3/10.

c.- La fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10.

d.- Las tres cosas son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué

Es una versión modificada del ítem 4 empleado en la fase de entrevistas y consta de dos partes. Aunque el espacio muestral asociado al experimento simple tiene sólo dos resultados posibles, como en el ítem 1, el concepto de probabilidad que se aplicaría mejor a este ítem sería el frecuencial. Además no se proporciona la secuencia de resultados, sino sólo la frecuencia de ocurrencia de uno de los resultados.

En la parte 1 de este ítem, se trata de ver si los alumnos aprecian el efecto del tamaño muestral sobre la fluctuación del proceso de muestreo. En la parte 2 se trata de ver si los alumnos perciben la mayor probabilidad de los valores centrales de la distribución. Es decir, mientras que la parte 1 evalúa la percepción de la variabilidad de las secuencias aleatorias y del efecto del número de experimentos sobre esta fluctuación, la parte 2 evalúa la percepción de la tendencia del proceso.

Ítem 8:

8.1. Cuando lanzamos dos dados simultáneamente:

a.-Hay las mismas posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.

b.-Hay más posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.

c.-Hay menos posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.

d.-Es imposible saberlo.

Elige la opción que crees más adecuada y razona tu respuesta.

8.2. Cuando lanzamos tres dados simultáneamente, ¿cuál de estos resultados es más fácil que ocurra?:

a.- Obtener un 5, un 3 y un 6.

b.- Obtener dos veces el 5 y una vez el 3.

c.- Obtener tres veces el número 5.

c.- Todos estos resultados son igualmente probables.

Escribe la opción que has elegido

8.3. ¿Es alguno de estos resultados menos probable que los otros dos?

Este es un ítem tomado de Lecoutre y Durand (1988) y Lecoutre y Cordier (1990), quienes lo ha empleado extensamente en sus investigaciones. Sin embargo, también puede servir para evaluar la representatividad en contexto de dados y evaluación del razonamiento combinatorio. Se pide considerar un experimento doble y triple.

Descripción de la Parte 3:

Esta parte del cuestionario evalúa la interpretación que hacen los alumnos de los enunciados frecuenciales de probabilidad. Nos hemos basado en las investigaciones de Konold (1989, 1991) y consta de dos ítems.

Ítem 9:

9.1. El Centro Meteorológico de Springfields quiso determinar la precisión de su meteorólogo. Buscaron sus registros de aquellos días en los que el meteorólogo había informado que había un 70 por ciento de posibilidades de lluvia. Compararon estas predicciones con los registros que indicaban si llovió o no en esos días en particular.

La predicción del 70 por ciento de posibilidades de lluvia puede considerarse muy precisa, si llovió:

a.- Entre el 95 por ciento y el 100 por ciento de esos días.

b.- Entre el 85 por ciento y el 94 por ciento de esos días.

c.- Entre el 75 por ciento y el 84 por ciento de esos días.

d.- Entre el 65 por ciento y el 74 por ciento de esos días.

e.- Entre el 55 por ciento y el 64 por ciento de esos días.

Elige la opción que crees es la más apropiada.

9.2. Supongamos que este hombre del tiempo dice que mañana hay un 70 por ciento de posibilidades de lluvia y mañana no llueve. ¿Qué conclusión sacarías sobre su predicción de que había un 70 por ciento de probabilidades de lluvia?

Ha sido tomado del test de Konold y Garfield (1993) , quien lo construyó a partir de los trabajos de Konold (1989), (1991). Se trata de ver si los alumnos interpretan correctamente un enunciado frecuencial de probabilidad o si por el contrario interpretan el enunciado como referido a la ocurrencia del suceso en un único ensayo.

Ítem 10:

Al inicio del siguiente camino (véase el anexo 2) se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia su alimento situado al final del camino. En el orificio A ponemos queso y en el B nueces. Según un amigo mío que ha criado muchos hámsteres, 80 de cada 100 hámsteres prefieren el queso a las nueces.

10.A.- ¿A dónde te parece más probable que llegue el hámster? ¿Por qué?

10.B.- Si hacemos la prueba con un hámster y este se dirige hacia B, ¿piensas que mi amigo estaba equivocado?

10.C.- Si hacemos la prueba con 10 hámsteres y 3 de ellos se dirigen a B (eligen las nueces) ¿pensarías que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué?

En este ítem construido por nosotros mismos, se trata de la interpretación de un enunciado de probabilidad frecuencial y permite discriminar los sujetos que emplean el "enfoque en el resultado aislado". Hemos introducido este ítem para analizar el efecto del contexto, más familiar al alumno, sobre este sesgo.

3.3. RESULTADOS DE LA MUESTRA PILOTO Y CRITERIOS DE REVISIÓN DEL CUESTIONARIO

Finalizada la construcción del cuestionario, se realizaron algunas pruebas de comprensión de los enunciados con alumnos de 14 y 18 años, quienes colaboraron con nosotros en la redacción definitiva. Asimismo, estos primeros ensayos nos sirvieron para estimar el tiempo necesario que los alumnos emplearían en completar el cuestionario con comodidad.

Con objeto de obtener unos primeros datos con los que podríamos ensayar el plan de análisis de datos previsto y estimar la generalizabilidad del cuestionario, procedimos a ensayarlo con una muestra piloto.

Esta muestra estuvo formada por cuarenta y un alumnos de catorce años y veintinueve de dieciocho años. Los primeros pertenecían a un mismo colegio de educación secundaria de la ciudad de Melilla con un ambiente cultural y social medio, de los que treinta eran niños y el resto niñas. Eran alumnos que no habían recibido previamente ninguna enseñanza sobre probabilidad aunque en sus respuestas se podía observar interés por estas cuestiones y ciertas vivencias relacionadas con este mundo del azar. En cuanto a los veintinueve del segundo grupo, eran veintidós alumnos y siete alumnas de C.O.U. de un instituto con un nivel social y cultural también medio. Estos alumnos habían recibido enseñanza sobre la probabilidad, que según su currículum debería haber sido por lo menos de quince horas en cursos previos y en este mismo curso de seis.

Una vez recogidos los datos de la muestra piloto, se procedió a resumir sus resultados. Para cada uno de los alumnos se analizaron las respuestas, clasificando los argumentos obtenidos. En el Anexo 3 analizamos con detalle cada uno de los ítems que componen esta parte de la prueba. El propósito principal de este análisis fue detectar posibles problemas de interpretación de los enunciados para corregirlos si fuera necesario.

Ya analizados los resultados del cuestionario piloto, pasamos a estudiar los puntos que se deberían modificar para elaborar el cuestionario definitivo. Nuestra intención era realizar los mínimos cambios posibles, puesto que uno de nuestros objetivos era la comparación con los trabajos de Green, Lecoutre y Konold de los cuales habíamos tomado los ítems.

Por ello, sólo se ha procedido a variar las preguntas si hubo dificultad de interpretación del enunciado por parte de los alumnos. Ello ha ocurrido en los casos siguientes:

En el ítem 8 hemos observado que las opciones propuestas por Lecoutre no eran totalmente comparables en las dos partes de esta cuestión. Mientras que en la primera parte había una opción de respuesta "es imposible saberlo", esta opción no existía en la segunda parte. Nos ha parecido interesante añadir esta opción en la segunda parte, porque el alumno puede pensar que no existe un procedimiento matemático para el cálculo de las probabilidades de los sucesos implicados. Además la mayor parte de los alumnos había elegido precisamente esta opción en la primera parte de la pregunta.

En el ítem 10 decidimos cambiar el contexto, en lugar de que el hámster tuviera que elegir entre el queso y las nueces, sustituimos por un hámster que tuviera que elegir entre cacahuetes y pipas. Hicimos este cambio porque en este ítem los niños se guiaron preferentemente por sus experiencias previas más que por los datos. Muchos de los niños argumentaban que a los hámsteres no suele gustarles el queso, a pesar de lo que decía el enunciado del problema. Otros argumentaron que el olor del queso podría asustar al hámster.

Aunque estos datos pueden ser interesantes, porque indican que los alumnos consideran factores ajenos a los datos en los problemas probabilísticos, fue un distractor que nos impidió conocer si los alumnos interpretaban correctamente el enunciado de probabilidad frecuencial. Además, en este mismo ítem, cambiamos la cantidad de hámsteres a considerar en la proporción, pusimos 70 de cada 100 para mantener la misma proporción que figuraba en el último apartado del ítem, atendiendo las sugerencias de algunos alumnos. En consecuencia, se procedió a la modificación del ítem.

Finalmente se empleó el cuestionario piloto para calcular los índices de generalizabilidad de la prueba, siguiendo un procedimiento semejante al empleado en Estepa (1993), Vallecillos (1994) o Navarro - Pelayo (1994).

Tabla 3.3.1. Índice de dificultad de los ítems en la muestra piloto.

ÍTEM	RESPUESTA	ARGUMENTO
5.1	0.49	0.51
5.2	0.3	0.48
6	0.34	__
7.1	0.18	0.07
7.2	0.34	0.29
8.1	0.2	0.13
8.2 a)	0.26	__
8.2 b)	0.02	__
9.1	0.24	__
9.2	0.3	__

Para ello se utilizaron solo los ítems 5 a 9 ya que en los cuatro primeros no hemos diferenciado entre respuestas correctas e incorrectas. No hemos tenido en cuenta el ítem 10 puesto que muchos alumnos se guiaron por sus teorías previas En cada uno de ellos se puntuaron tanto las respuestas así como los argumentos de los items 5, 7 y 8.1, obteniéndose los índices de dificultad que se muestran en la tabla 3.3.1., como porcentaje de resultados correctos en el total de alumnos.

Podemos observar la notable dificultad de la mayoría de los ítems, aunque hemos decidido conservarlos, por ser cada uno de ellos fundamental para el estudio de los sesgos que intentamos evaluar.

El cálculo del índice de generalizabilidad Brennan (1983) emplea los resultados del análisis de varianza de medidas repetidas de la puntuación en cada ítem que se muestra en la tabla 3.3.2.

A partir de esta tabla y siguiendo el método expuesto en Dunn y Clark (1987 pag. 234), se han obtenido las siguientes estimaciones de los componentes de la varianza:

Varianza residual $\sigma^2_r = 0.2$

Varianza dentro de los ítems $\sigma^2_i = 0.0325$

Varianza dentro de los sujetos $\sigma^2_s = 0.0077$

Tabla 3.3.2. Resultados del análisis de varianza de medidas repetidas

FUENTE DE VARIACIÓN	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrados Medios
SUJETOS	51.19	69	0.74
RESIDUAL	173.02	828	0.2
ÍTEM	49.2	14	4.1

Usando estos componentes, hemos empleado la fórmula propuesta en Thorndike (1989) para el cálculo de los coeficientes de generalizabilidad, de la cual se ha obtenido un índice de generalizabilidad:

$$G_i = \frac{0.0325}{0.0325 + \frac{0.2}{14}} = 0.69$$

para la población de ítems, lo que señala que nuestros resultados tienen una generalizabilidad limitada si se cambian los ítems por otros diferentes aunque se refiera a los mismos conceptos que hemos analizado en nuestra investigación. Ello es consistente con nuestro marco teórico por el cual el significado de los objetos matemáticos depende del contexto y situaciones problemáticas involucradas.

Para la población de sujetos hemos obtenido una media de generalizabilidad:

$$G_s = \frac{0.0077}{0.0077 + \frac{0.2}{70}} = 0.73$$

que es algo mayor. Este índice depende del tamaño de la muestra de los alumnos (70), que podemos aumentar en la muestra definitiva para obtener una mayor generalizabilidad. Fijados nuestros objetivos de obtener un índice de reneralizabilidad a la población de sujetos de al menos 0.9, hemos calculado el tamaño necesario de la muestra

$$G_{si} = \frac{0.077}{0.0077 + \frac{0.2}{n}} \geq 0.9$$

de donde hemos obtenido n $ 233, por lo que se ha decidido tomar al menos 233 sujetos en la muestra definitiva.

El reto de las preguntas se conservaron tal y como estaban. Los resultados de la muestra piloto fueron suficientemente interesantes para indicarnos que merecía la pena estudiar una muestra más amplia. Por otro lado, no tuvimos demasiada dificultad en la categorización de las respuestas, ya que contábamos con categorías previas definidas en otras investigaciones. La mayor parte de las respuestas de los niños pudieron ser englobadas en dichas categorías, aunque también han aparecido algunas categorías nuevas.

3.4. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA EXPERIMENTAL

La muestra utilizada para completar el cuestionario se tomó entre los alumnos de diversos centros de Educación Secundaria y Bachillerato de la ciudad de Melilla. El número total de alumnos de la muestra fue de 277 que se distribuyeron en dos grupos: el primero de estos grupos era de 147 alumnos de segundo curso de Educación Secundaria y el segundo de 130 alumnos del Curso de Orientación Universitaria. Aunque se procuró que el número de alumnos en los dos grupos estuviese lo más igualado posible, el hecho de utilizar grupos completos de alumnos ha hecho que el tamaño de las dos muestras varíe ligeramente.

Además de los estudios cursados, la característica común en cada uno de estos grupos es la edad, que en el primero era de catorce o quince años y en el segundo, alrededor de dieciocho.

En total han participado en el estudio seis centros diferentes en los que, en todos los casos, hemos encontrado cooperación e interés por nuestro trabajo. Todos los profesores participantes colaboraron en el éxito de la recogida de datos, motivando a sus alumnos para que completasen el cuestionario con el mayor interés posible y para que describiesen con detalle sus argumentos. Agradecemos a todos estos profesores su valiosa cooperación, sin la cual esta investigación no hubiera podido completarse.

Describimos a continuación brevemente las características de cada uno de los grupos de alumnos participantes, utilizando claves para referirnos a los diferentes centros. Indicaremos el nivel social más frecuente del centro, el número de chicos y chicas y si en su currículum previo habían estudiado conceptos probabilísticos.

El primero de estos grupos, al que denominaremos ESO, estaba formado por alumnos de cuatro centros distintos, que denominaremos: JC, MF, EN, LS, alumnos estos que en ningún caso habían recibido enseñanza en probabilidad. JC es un centro de un nivel social medio bajo. En él se pasó la prueba a treinta y dos alumnos, de los que dieciocho eran chicas y catorce chicos. Los centros MF y EN son centros con un nivel social medio. En el primero de ellos participaron cincuenta y tres alumnos de los que veintiocho eran chicas y veinticinco eran chicos. En el segundo, EN, solo participaron veintisiete; de ellos dieciséis eran chicos y el resto chicas. Por último, el centro LS es de nivel social medio alto y en él participaron treinta y cinco alumnos de los que treinta eran chicos y cinco chicas. El número total de chicos de esta primera muestra fue, por tanto, 62 chicas y 85 chicos.

El segundo de los grupos, al que denominaremos COU, estaba formado por alumnos de dos centros diferentes, ambos de nivel social homogéneo medio. Estos centros los diferenciaremos por los claves IE e IL, diferenciando en cada uno de ellos los cursos por letras.

En el primero de estos centros participaron dos cursos: IEA con veinticinco alumnos de los que diez eran chicos y quince chicas, IEB con diecinueve, de los que once son chicos y ocho chicas. En el centro IL obtuvimos la muestra de tres cursos distintos: ILA con veinticinco alumnos, quince chicos y diez chicas; ILB con treinta y seis alumnos de los que dieciséis eran chicos y veinte chicas; ILC con veinticinco alumnos de los que catorce eran chicos y once chicas. En total esta segunda muestra estuvo formada por 66 chicos y 64 chicas.

En este grupo todos los alumnos habían recibido enseñanza previa de probabilidad durante un mes aproximadamente. Pero este aprendizaje lo recibieron en su mayoría en el curso anterior (tercer curso de Bachillerato). Incluso, en algún caso de alumnos repetidores, habían transcurrido dos años desde el estudio de la probabilidad. Sólo unos pocos alumnos volvieron a estudiar el tema de forma un poco más profunda como parte de la asignatura de Matemáticas II en ese mismo curso. En todos los casos, los alumnos coincidieron en manifestar que habían olvidado o que no dominaban el tema.

3.5. RECONOCIMIENTO Y GENERACIÓN DE SECUENCIAS ALEATORIAS

Una vez recogidos los datos de la muestra, se procedió a resumir sus resultados. En esta sección analizamos las propiedades de las secuencias aleatorias producidas por los alumnos o reconocidas por ellos, que constituyen parte del significado personal asignado por los alumnos a dichas secuencias. Las preguntas que nos planteamos son:

¿Cuáles son las características de las secuencias y distribuciones aleatorias generadas por los alumnos? ¿Cuáles de ellas coinciden con las propiedades matemáticas? ¿Varían estas características en los dos grupos de alumnos? ¿Cuáles son los argumentos que los alumnos usan para considerar una secuencia como aleatoria o no aleatoria? ¿Cambian con las variables de tarea de los ítems? Para dar una respuesta a estas preguntas se analizaron las respuestas en los diferentes ítems, clasificando los argumentos obtenidos. Puesto que en algunas tareas los alumnos deben generar sus propias secuencias aleatorias, haremos una descripción de las características estadísticas que presentan estas secuencias. Ésta es una forma indirecta de inferir la similitud o diferencia de las secuencias producidas por los alumnos con una secuencia aleatoria. La aleatoriedad, como indican Bar-Hillel y Wagenaar (1993), no es una propiedad observable del dispositivo que la genera y no hay prueba física o lógica, sino solo de tipo estadístico, de la aleatoriedad.

Como señalan Harten y Steinbring (1983), la evaluación de los juicios subjetivos de aleatoriedad es un problema central en la investigación psicológica. Puesto que los estudiantes no tienen un conocimiento detallado de probabilidad, sus respuestas tienen un carácter intuitivo.

Hemos considerado dos tipos de tarea: generación y reconocimiento de secuencias de resultados aleatorios.

3.5.1. GENERACIÓN DE SECUENCIAS DE RESULTADOS ALEATORIOS

Esta parte del cuestionario consta de dos tareas. En el ítem primero, que reproducimos de nuevo para facilitar la lectura de la tesis, se pide a los alumnos que generen una secuencia de resultados aleatorios.

Ítem 1:

Supón que estás lanzando una moneda 50 veces, sin hacer trampas. Pon C o X en cada cuadro (C quiere decir que obtienes una cara y X que obtienes una cruz).

Nuestro interés sobre el ítem es analizar las características que los alumnos asignan a las secuencias aleatorias y estudiar su variación en los dos grupos de alumnos.

Analizaremos las prácticas que realizan los alumnos cuando escriben una secuencia de resultados similar a la que esperarían obtener mediante un procedimiento aleatorio. En este ítem se trata de generar una sucesión de ensayos de Bernoulli, cuyo significado, desde el punto de vista de la institución matemática, fue descrito en el capítulo 1, sección 1.3.3. Sobre algunas de las propiedades matemáticas descritas en aquella sección, trataremos de ver hasta qué punto son reproducidas en las sucesiones generadas por los alumnos.

Las propiedades que hemos analizado sobre las sucesiones generadas por los escolares de esta muestra piloto se describen a continuación. Si una de estas propiedades aparece en las sucesiones generadas por los estudiantes, pensamos que dicha propiedad ha sido identificada por el alumno a lo largo de su experiencia con los juegos de azar y la observación de secuencias de resultados aleatorios. La reproducción consciente de dicha propiedad es, desde nuestro punto de vista, una práctica significativa para el alumno, en la resolución del problema consistente en la generación de una sucesión aleatoria. Las propiedades analizadas son las siguientes:

a. Número total de caras que presentan las secuencias escritas por los alumnos, con objeto de ver hasta qué punto se ajusta a la probabilidad teórica. Vimos en la sección 1.3.3 que una propiedad importante desde el punto de vista matemático en las sucesiones de Bernoulli es la convergencia empírica de las frecuencias a la probabilidad teórica, explicada mediante el Teorema de Bernoulli. También estudiaremos el número de caras en cada una de las dos partes de la secuencia producida por los alumnos, para estudiar la consistencia entre las dos mitades de la misma.
b. La longitud de la racha más larga. En las investigaciones de Green se vio que, en general, los alumnos subestiman la longitud de las rachas de un mismo resultado. Green analizó esta longitud clasificando a los alumnos en tres tipos, en función de la misma. Además de analizar esta variable, para comparar nuestros resultados con los de Green, estudiaremos el número total de rachas producidas, que está relacionado con la longitud de la racha más larga.

En la prueba que se les pasó a los alumnos, de las respuestas que dieron se observa que el número de caras se agrupa alrededor de 23 a 27 para la mayor parte de alumnos (tabla 3.5.1.1), siendo el valor teórico esperado de 25 caras, por lo que el valor medio del número de caras en las secuencias producidas por los alumnos se aproxima mucho al valor esperado.

Sin embargo, los alumnos no reflejan suficientemente la variabilidad aleatoria, ya que la dispersión de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos es menor que la teórica. Puesto que se trata de secuencias de 50 resultados, se sigue una distribución binomial B (50, 0.5), cuya media es 25, varianza 12.5 y desviación típica 3.54. La desviación típica de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos de 14 años es 2.99, menor que la esperada teóricamente, aunque no tan pequeña como en la muestra piloto o en las investigaciones de Green. Del mismo modo, la desviación típica de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos de 18 años es 3.023. No se observan diferencias con la edad en la apreciación de esta variabilidad.

Tabla 3.5.1.1. Frecuencias del número de caras en las secuencias producidas por los alumnos.

Nº de caras	18 años	14 años
50		*
48 - 49	*	
34 - 35	*	
32 - 33	*	*
30 - 31		****
28 - 29	****	*********
27	*****************	*************
25 - 26	M*************************************69	M*************************************66
23 - 24	**********************************	***************************************41
21 - 22	*	**********
19 - 20	**	*
16 - 17	*	
14 – 15		*
13	*	

MEDIA 25.285; 25.259 DES.TIP. 2.997; 3.023

El segundo punto estudiado es la consistencia entre las dos mitades de las secuencias producidas por los alumnos. Al analizar la distribución del número de caras en cada una de las mitades de las secuencias (tablas 3.5.1.2 y 3.5.1.3) observamos que estas distribuciones son en apariencia altamente consistentes, ya que los valores medios y desviaciones típicas son muy similares en las dos partes de la secuencia producida. Ello fue interpretado en la investigación de Green como que el alumno intenta reproducir localmente el comportamiento global de la secuencia. Sin embargo, el coeficiente de correlación entre el número de caras en la primera y segunda mitad de la secuencia ha sido r = -0.1147, lo que indica que no hemos encontrado una asociación entre estas dos variables. El alumno intenta mantener una frecuencia dada en el total de la secuencia, pero no hay una relación directa ni inversa entre el número caras de un mismo alumno en los dos trozos de la secuencia.

Tabla 3.5.1.2. Frecuencias del número de caras en la primera parte de las secuencias producidas por los alumnos.

Nª caras	18 años	14 años
25	****	*
18		**
17	*	*
16	*	
15	*******	********
14	*****************	*********************
13	M************************************47	M*************************************42
12	**********************************	**************************************49
11	***************	*****************
10	**	*****
9	*	*
8	*	

MEDIA 13.054 ; 12.748 DES.TIP. 2.488; 1.763

Tabla 3.5.1.3. Frecuencias del número de caras en la segunda parte de las secuencias producidas por los alumnos.

Nª caras	18 años	14 años
25		*
24	*	
19		*
16	**	
15		*******
14	***********************	**************************
13	*************************************42	******************************
11-12	M************************************41	M************************************48
10	**************	************************
9	***	*******
8	*	**
2		*
0	***	

MEDIA 12.408; 12.571 DES.TIP. 2.464; 2.051

Una segunda característica de las secuencias es la longitud de la racha mas larga. En el estudio de esta característica (tabla 3.5.1.4) vemos que los alumnos producen rachas cortas. Aunque con frecuencia máxima los alumnos producen rachas de 4 ó 5 elementos, un porcentaje importante de alumnos no pasa de rachas de 2-3 sucesos, mientras que, en la distribución teórica, la longitud de la racha más larga es de 5 ó 6 elementos. Aparecen también los tipos que Green denomina "alternantes" (11 casos) que alternan entre cara y cruz en toda las secuencia, la mayor parte alumnos de 18 años. Aparecen también los "replicantes" que producen una sola racha o una racha muy larga de 24, 25 e incluso 50 resultados seguidos iguales. Todos estos datos parecen apuntar a dificultades en la percepción de la independencia de los experimentos repetidos.

Tabla 3.5.1.4. Frecuencias de la longitud de la racha más larga.

Longitud	18 años	14 años
50	*	**
24-25	***	
20-21		*
14-15		**
9-10	**	*
6-7	***	*********
4-5	M*************************************66	M*************************************75
2 -3	**************************************46	**************************************55
1	*********	**

MEDIA 4.600; 4.871 DES.TIP. 5.256; 5.796

Para autores como Bar-Hillel y Wagenaar (1993) o Shaughnessy (1992), la heurística de la representatividad podría explicar la alta tasa de alternancias en las tareas de simulación de secuencias aleatorias. Las características de equiprobabilidad de los dos resultados, junto con alguna irregularidad en el orden de aparición, se espera que aparezcan no sólo a largo plazo, sino en segmentos cortos. La insistencia por la "aleatoriedad" en pequeñas sucesiones acarrea la "no aleatoriedad" en sucesiones largas.

Tabla 3.5.1.5. Frecuencias de número de rachas en las secuencias de los alumnos.

Nª de rachas	18 años	14 años
50	**********	**
42-44		*
39-41		**
36-38	*	*****
33-35	*******************	*************************
31-32	****************	******************
29-30	M**********************************	M************************************
27-28	*************************	*****************
24-26	*************	***********************
21-23	****	****
19-20	*	*******
17-18	*	**
15-16	*	*
11-14		**
6-10	*	
1-5	***	
1	*	**

MEDIA 30.015; 29.238 DES.TIP. 8.442; 6.628

En el estudio de las frecuencias de números de rachas en las secuencias de los alumnos (tabla 3.5.1.5) observamos que, en general, este número de rachas es alto, ya que el valor esperado teórico es 25.5 y su desviación típica es 3.4. El valor medio (media: 30.015 mayores, 29.238 menores; des..tip: 8.442 mayores, 6.628 menores) indica también que incluso aunque los alumnos hayan incluido alguna racha larga, la mayor frecuencia de rachas son de 1 a 3 elementos. Incluso se da el caso de los alumnos que hemos calificados de alternantes que producen 50 rachas. En el caso contrario, los alumnos producen una única racha, que al igual que en la investigación de Green han sido muy escasos. La proporción de "alternantes", aunque pequeña, es ligeramente superior a la de Green.

El número medio de rachas es similar al obtenido por Green (29.6) y asimismo obtenemos una mayor desviación típica que dicho autor (6.3), por lo que creemos nuestros resultados reflejan una mayor variabilidad que la aleatoria. Todos estos resultados que coinciden con los de Green, incluso aunque nuestros alumnos alcanzan los dieciocho años, confirman la hipótesis de este autor de que las propiedades que los alumnos atribuyen a las secuencias aleatorias no cambian con la edad.

3.5.2. GENERACIÓN DE DISTRIBUCIONES ALEATORIAS DE PUNTOS EN EL PLANO

En el segundo ítem se pidió al alumno simular el resultado de un sucesión de experimentos aleatorios, que, por su disposición espacial, se puede modelizar mediante el proceso de Poisson, descrito en la sección 1.2.6. El ítem propuesto fue el siguiente, que reproducimos de nuevo para facilitar la lectura de este trabajo:

Ítem 2:

Pablo, usando 16 fichas numeradas 1,2,3,4,....16, juega de la siguiente forma: pone todas las fichas en una caja vacía y mueve con fuerza la caja. Raquel cierra los ojos y coge una ficha. Es la ficha número 7.

Pablo pone una cruz en la casilla número 7. La ficha 7 se pone otra vez en la caja, se vuelve a mover la caja y otro niño toma una ficha y repite lo que hizo Raquel.

1	2	3	4
5	6	7 x	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2.1. Imagínate que estás jugando a este juego y sacas treinta veces una ficha como arriba se dice. Pon 30 cruces en los lugares que creas según las fichas que saques.

2.2. Enséñanos ahora cómo quedarían las siguientes casillas si juegas este juego 16 veces. Pon 16 cruces.

Nuestro interés se centra en las propiedades que los alumnos atribuyen a las distribuciones aleatorias de "puntos" en el plano y su variabilidad en los dos grupos de alumnos. Diferentes fenómenos se han modelizado mediante estas distribuciones, como la disposición de erratas en un texto, crías de animales en un campo, bombardeos sobre Londres en la II guerra mundial, etc. (Feller, 1973). En nuestro caso, consideraremos como puntos las marcas o cruces colocadas por los estudiantes en la cuadrícula, y nos referiremos a ellas con este término.

Las variables analizadas sobre las distribuciones producidas por los alumnos han sido: el número de celdas con 0, 1, 2 y 3 o más puntos, así como el número máximo de cuadros vacíos adyacentes.

Tabla 3.5.2.1. Distribución teórica del número de puntos por cuadro en las dos partes del ítem.

Puntos por cuadro	λ =1		λ =1,875	
	p	Nº. esperado	p	Nº. esperado
0	0,3679	6,5	0,1535	2,5
1	0,3679	6,5	0,2875	4,5
2	0,1839	3	0,2694	4,3
3	0,0613	1	0,1684	2,7
4	0.0153	0	0,0789	1,3
5	0.0031	0	0,0296	0,5

La distribución empírica producida por los alumnos de la muestra se ha comparado con la distribución teórica, que es una distribución de Poisson en el plano. Puesto que tenemos 16 casillas equiprobables, la probabilidad de cada una de ellas es 1/16. Al ser el número de ensayos 30 en el primer caso y 16 en el segundo, el parámetro de la distribución de Poisson es λ =1 en el primer caso y λ = 1.875 en el segundo. En la tabla 3.5.2.1 presentamos los valores de la probabilidad y el número esperado de cuadros con 0, 1, 2... puntos en la distribución teórica, para ver hasta qué punto el modelo de distribución en el plano del alumno se conforma a esta distribución.

Aunque el número esperado de cuadros vacíos en el primer ítem es 2 ó 3 y en el segundo 6 ó 7, se observa en las tablas 3.5.2.2 y 3.5.2.3 que, en general se tiende a no dejar cuadros vacíos, o dejar muy pocos. Los valores medios se apartan bastante de los teóricos. La mitad de los alumnos en cada grupo no ha dejado ningún cuadro vacío en el primer ítem. Hay algunos casos en que se dejan hasta 13 ó 16 cuadros vacíos, lo que también se aparta mucho del valor teórico.

Tabla 3.5.2.2. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros vacíos en el ítem 2.1.

n	18 años	14 años
16	*	
13		*
10	*	
9		*
8	**	****
7	*	
6		**
5		****
4	**	******
3	*********	******
2	*****************	****************
1	******************************	***********************************
0	**************************************69	**74

MEDIA 1.115; 1.306 DES.TIP. 2.115; 2.144

En el segundo apartado del ítem aumenta el número de alumnos que dejan cuadros vacíos, pero son minoría los alumnos que se acercan al número esperado de cuadros vacíos. Todo ello parece confirmar las teorías de Piaget en cuanto al deseo de regularidad que los alumnos buscan en la aleatoriedad. Especialmente, los alumnos que no dejan cuadros vacíos se acercarían más al estadio II que al III en los estudios de Piaget, a pesar de que algunos de ellos alcanzan los 18 años.

Tabla 3.5.2.3. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros vacíos en el ítem 2.2

n	18 años	14 años
16		*
13		**
11	**	
10	*	***
9	**	*
8	***	***
7	*******	**********
6	***************	********
5	*********************	***************************
4	M******************************	M****************
3	********************	**********************************
2	**************	*******************
1	****	***************
0	*********	*******

MEDIA 4.123; 3.952 DES.TIP. 2.217; 2.608

Observamos ahora la distribución del número de celdas con un punto en las respuestas de los alumnos (tablas 3.5.2.4. y 3.5.2.5). En ellas vemos que los valores medios son en los dos casos más próximos a los esperados, aunque en el ítem 2.2 hay una sobreestimación de este valor. Se muestra una gran variabilidad de alumnos, que en algunos casos no presentan ninguna celda con un punto o todas las celdas tienen un punto.

Tabla 3.5.2.4. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros con un punto en el ítem 2.1

n	18 años	14 años
13	*	
12	*	
10	*	*
9	****	**
8	*****	*******
7	*************	****
6	**************	*********************
5	*******************	***********************
4	M**********************	M****************************
3	**********************	*******************
2	******************	*********************
1	******	***********
0	***	*********

MEDIA 4.469; 3.939 DES.TIP. 2.363; 2.168

En las tablas 3.5.2.6. y 3.5.2.7. mostramos la distribución del número de celdas con dos puntos en las respuestas de los alumnos. Observamos que en el ítem 2.2 hay una sobreestimación del número de celdas con dos puntos, y que en el ítem 2.1 el valor teórico es mucho más acorde al valor medio de las respuestas de los alumnos. Ello es debido a que en el ítem 2.2 los alumnos dejaron menos cuadros vacíos de los que corresponden a la distribución teórica.

Tabla 3.5.2.5. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros con un punto en el ítem 2.2

n	18 años	14 años
16-15	*********	******
14	****	***************
13	**************	*
12	***	*****************
11	******************	*******
10	***************	**************************
9	M************	M**
8	***************	******************
7	****************	***********
6	**********	******************
5	*****	**
4	**	*******
3	**	****
2	**	***
1	**	*
0		*******

MEDIA 8.485; 8.803 DES.TIP. 3.549; 4.040

Tabla 3.5.2.6. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros con dos puntos en el ítem 2.1

n	18 años	14 años
7-10	**	*****
5-6	****************	************************
2-4	M**52	M**58
1	***48	***48
0	**************	**************

MEDIA 2.715; 3.068 DES.TIP. 1.561; 3.547

Tabla 3.5.2.7. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros con dos puntos en el ítem 2.2

n	18 años	14 años
14	**********	****************
12-13	***********	****************
9-10	**************************************40	M**************************************42
6-8	M*************************************41	***************************************41
3-4	*********************	********************
0-2	*******	***********

MEDIA 7.223; 7.993 DES.TIP. 3.549; 5.832

Los alumnos han sido mucho más exactos al reflejar el número de celdas con 3 o más puntos en las distribuciones generadas, aunque con la lógica variabilidad.

Tabla 3.5.2.8. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros con tres o más puntos en el ítem 2.1

n	18 años	14 años
9	*	*
8		**
7	**	****
6	****	*******
5	******************	*****************
4	********************************	**************************
2	********************************	*********************************
1	********************	****************************
0	*********************	*****************************

MEDIA 3.162; 3.068 DES.TIP. 1.679; 1.915

Tabla 3.5.2.9. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros con tres o más puntos en el ítem 2.2

n	18 años	14 años
6		*
4	*	**
3	*******	**
2	*********	**********
1	**************************************40	****************************
0	M*************************************73	M************************************104

MEDIA 0.638; 0.463 DES.TIP. 0.889; 0.916

En resumen, las distribuciones de puntos producidas por los alumnos estiman a la baja el número de celdas vacías, que son sustituidas por celdas con un punto en el ítem 2.2 y por celdas con dos puntos en el ítem 2.1. Puesto que 1 y 2 son los valores enteros más próximos al parámetro de la distribución de Poisson en los ítems 2.2 y 2.1, respectivamente, consideramos que los alumnos han intentado reproducir este número medio de puntos en la mayor parte de los cuadros, aunque admitiendo ligeras fluctuaciones. Estas fluctuaciones no llegan sin embargo a reflejar toda la variabilidad de la distribución aleatoria de Poisson en el plano.

Tabla 3.5.2.10. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros vacíos adyacentes en el ítem 2.1

n	18 años	14 años
16	*	
13		*
9-10	*	
7-8		**
6	*	*
5	*	*
4	*	****
3	*	*
2	******	******
0	*************************************118	*************************************131

MEDIA 0.432; 0.469 DES.TIP. 1.812; 1.640

Por otro lado, en las tablas 3.5.2.10 y 3.5.2.11 estudiamos el número máximo de cuadros vacíos adyacentes. Algunos alumnos no tienen en cuenta la distribución espacial de los cuadros vacíos, que colocan consecutivamente, mientras que en el modelo aleatorio estos cuadros vacíos debieran distribuirse algo menos uniformemente, y algunos de ellos se encontrarían adyacentes. También hemos encontrado casos de alumnos que han dejado vacía hasta la mitad de la cuadrícula. Todo ello nos indica que los alumnos se han concentrado más en las frecuencias de las celdas individuales, que en la distribución global de los puntos.

Tabla 3.5.2.11. Frecuencia de alumnos según el número de cuadros vacíos adyacentes en el ítem 2.2

n	18 años	14 años
16		*
13		**
11	*	
10	*	
9	*	
8	*	****
7	***	***
6	***	**
5	*******	******
4	************	***********
3		
2	*****	************
1	M**************************************	M**********************************
0	*************************************57	*************************************71

MEDIA 1.946; 1.952 DES.TIP. 2.324; 2.723

3.5.3. RECONOCIMIENTO DE PROPIEDADES DE LAS SECUENCIAS ALEATORIAS

Una vez analizadas las propiedades de las secuencias y distribuciones aleatorias generadas por los alumnos en los ítems 1 y 2, nos hemos preguntado si estas propiedades serían reconocidas conscientemente por ellos. Para contestar a esta pregunta, incluimos dos ítems en los que se pide a los alumnos su opinión sobre la aleatoriedad de una serie de secuencias y distribuciones de puntos. Para cada uno de los subítems que componen los ítems 3 y 4 se han analizado dos variables en las respuestas de los alumnos:

a) La opción elegida en el ítem (hizo o no hizo trampas).

b) El argumento con que el alumno justifica esta opción. Estos argumentos se han clasificado de acuerdo con un sistema de categorías homogéneo para los ocho subítems 3.1 a 4.4.

La codificación se obtuvo mediante un proceso cíclico de clasificación de argumentos, comparación de casos similares, y discusión de los casos dudosos con otros investigadores que colaboraron en este proceso. Para cada subítem se efectúan los análisis siguientes:

1) Comparación de la proporción de alumnos que, en cada uno de los grupos, considera aleatoria la situación presentada.

2) Comparación de los argumentos usados para ese ítem particular en cada uno de los grupos, independientemente de su respuesta (se hizo o no trampas). Como hemos razonado en el estudio teórico presentado en la sección 1.3, el concepto de aleatoriedad remite a una colección de objetos y modelos matemáticos. El estudio de los argumentos tiene por objeto identificar, entre las propiedades que hemos incluido en las situaciones presentadas, cuáles son detectadas por los alumnos, independientemente de que las usen para apoyar o rechazar la aleatoriedad. Asimismo, deseamos analizar qué propiedades son mejor o peor reconocidas en cada grupo de alumnos.

3) Comparación de los argumentos usados para apoyar la aleatoriedad y los que se emplean para recharzarla. Este análisis nos permite comprobar la consistencia entre la opción elegida y el argumento, así como su coincidencia o no con las propiedades de los modelos matemáticos descritos en la sección 1.3.

Finalmente se realiza un análisis de correspondencias del conjunto de respuestas de cada sujeto, para estudiar el efecto de las variables de tarea sobre los mismos, y obtener una síntesis de las principales razones de los alumnos para discriminar las situaciones aleatorias y no aleatorias. A continuación presentamos nuestros resultados.

El tercer ítem estudia la capacidad de los alumnos para discriminar modelos aleatorios en las sucesiones de ensayo de Bernoulli. Las propiedades que hacemos variar en estas sucesiones son el número esperado de resultados de cada uno de los posible sucesos y la distribución de las longitudes de las rachas. A continuación presentamos los resultados obtenidos.

Ítem 3:

Se pidió a cuatro niños lanzar una moneda 40 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Ellos pusieron C para indicar una cara y X para indicar una cruz. Estos son sus resultados:

Daniel:
C X C X X C C X C X C C X X C X X C C X X C X C C X X C X C X C X C X C X X C X

Martín:
C X X X C X X C C C X C X X X X X C X C X C C X C X X C C C C X X X C X X C C C

Diana:
C X X X C X X C X C X X X C X X X X C C X X X C X X C X X C X X X X C X X X C X

María:
X X X C X C C X X X C X C C C C C X C X C X X C X C C X X X X C C C X C C X C C

3.1. ¿Hizo trampas Daniel?. ¿Por qué?
3.2. ¿Hizo trampas Martín?. ¿Por qué?
3.3. ¿Hizo trampas Diana?. ¿Por qué?
3.4. ¿Hizo trampas María?. ¿Por qué?

En la primera sucesión el número de caras se ajusta al valor esperado, aunque la distribución de las rachas es muy sesgada. Sólo se han incluido rachas de 1 y 2 elementos. En total 54 alumnos de 14 años y 30 de 18 años han dado una respuesta positiva a este ítem (sí hizo trampa) y el resto negativa. La mayoría de los alumnos consideran que esta sucesión es aleatoria, a pesar del sesgo introducido en la longitud de las rachas. Esta respuesta es consistente con la corta longitud de las rachas de las secuencias generadas por los alumnos en el ítem 1. Green (1991) encontró una mayor dificultad en el reconocimiento por parte de los alumnos de propiedades referidas a las rachas que en propiedades referidas a las frecuencias, lo que se confirma en nuestra investigación. Este porcentaje de alumnos es mayor en los de 18 años, siendo la diferencia estadísticamente significativa. (χ^2=10.790; g.l.=2; p=0.0045). También en la investigación de Green en este ítem, el reconocimiento de la aleatoriedad aumentaba con la edad de los alumnos.

En este ítem se pide al alumno razonar sus respuestas, por lo que podremos comparar con las razones dadas por los estudiantes en la prueba usada por Green o bien refinar la clasificación de respuestas producidas por este autor. Estas respuestas se han categorizado del modo siguiente:

a) Hay un patrón regular en la secuencia.

El argumento hace referencia al orden en que van apareciendo las caras y cruces en la secuencia y al hecho de que aparezca muy regular para ser o no aleatoria. Así es la explicación que dan algunos en sus respuestas: *"No ha hecho trampas, porque tiene una secuencia muy regular de caras y cruces, que es lo más probable que suceda", "Si ha hecho trampas porque los resultados son muy uniformes, casi alternándose las caras y las cruces".*

b) La secuencia sigue un patrón irregular.

En este caso las razones son contrapuestas a las del apartado anterior. Aquí creen que hay una irregularidad en la secuencia de resultados. En ambos casos los alumnos pudieron estar razonando de acuerdo a la heurística de la representatividad (Kahneman *et al.*,1982). Ejemplo de estos argumentos es: *"No hizo trampas porque no sigue un orden"*.

c) Las frecuencias de los distintos resultados son parecidas.

Aquí los alumnos ya hacen referencia a la similaridad de los diferentes resultados de las frecuencias como en los siguientes casos: *"Porque están muy nivelados los números de veces que salen las caras y las cruces", "Las proporciones de caras y cruces son muy parecidas", "Los resultados están cerca del 50%".*

d) Las frecuencias de los distintos resultados son diferentes.

Es el caso contrario del anterior y los argumentos dados están en función de ello. Estos dos argumentos c) y d) se basan en la comparación de las frecuencias observadas y la distribución teórica de la probabilidad.

e) Hay rachas largas.

Estos alumnos están empleando la idea de independencia entre ensayos sucesivos al analizar las rachas de resultados idénticos. Cuando se argumenta que las rachas son demasiado largas se estará razonando de acuerdo a la heurística de la representatividad. El concepto de racha lo dan con otros nombres. No está explícita en sus vocabularios esta palabra, pero subyace en ellos la idea del número de veces seguidas que se da un suceso. Ejemplo de ello lo tenemos en los siguientes argumentos: *"porque se ven muchas caras o cruces seguidas", "Hay secuencias muy seguidas de X".*

f) No hay ninguna racha larga.

Es el contrario del argumento anterior. Ejemplo de este es: *"No se repiten mucho seguidas, se alternan".*

g) Debe haber igualdad de posibilidades en los sucesos.

Este es semejante al d), pero aquí se alude a la probabilidad. Entre los pocos sujetos que escogen este argumento obtenemos las siguientes explicaciones al mismo: *"Las posibilidades son las mismas en los dos casos", "Debe salir igual número de caras que de cruces".*

h) Depende del azar; impredecibilidad o imprevisibilidad.

Muchos sujetos toman esta opción al considerar el azar como una pieza imprescindible en su explicación como vemos en: *"Así es la suerte", "Aunque tiró correctamente puede salir eso porque así es el juego", "Al lanzar una moneda no tiene por qué salir una cosa determinada, aquí el azar juega un papel muy importante"*. Se basan en el carácter aleatorio e impredecibilidad del suceso. En el fondo, podría estar subyacente el "enfoque en el resultado aislado" descrito por Konold.

Las principales razones utilizadas en este ítem han sido: que el patrón es demasiado regular (categoría a, usada en un 65 % por los menores y 24 % por los mayores); que un proceso aleatorio es impredecible (categoría h, en un 45 % y 37 % respectivamente) y las basadas en frecuencias relativas (categoría c, 7% y 30 %

respectivamente). En Green (1991) los argumentos más usados fueron: patrón demasiado regular y rachas demasiado largas.

Las diferencias principales de proporciones en estos argumentos entre los dos grupos fueron estadísticamente significativas (χ^2=38.816; g.l.=4; p<0.0001, agrupando las categorías d, f y g, que fueron las menos empleadas).

Al clasificar los argumentos según la opción elegida en el ítem, observamos que los alumnos argumentan que el patrón es demasiado regular en caso de considerarla no aleatoria (categoría a). Los argumentos para considerarla aleatoria han sido principalmente la imprevisibilidad de los resultados (categoría h) y la coincidencia entre frecuencias observadas y esperadas (categoría c).

Las diferencias de argumentos según se considere o no aleatoria la secuencia fueron estadísticamente significativas (χ^2=118.073; g.l.=4; p<0.0001, agrupando las categorías d, f y g).

En el ítem 3.2 la mayoría de los alumnos considera aleatoria la secuencia que se les presentó en el segundo apartado del ítem; especialmente en el grupo de 18 años, siendo las diferencias estadísticamente significativas (χ^2=11.739; g.l.=2; p=0.0028). Esto es debido a que hay un mayor porcentaje de indecisos entre los de 18 años.

Los argumentos más empleados en este apartado han sido la imprevisibilidad (categoría h) y la existencia de rachas largas (categoría e). Ha habido diferencia en el empleo de los argumentos por los dos grupos de alumnos (χ^2=18.398; g.l.=5; p=0.002, agrupando las categorías a, c, f y g). Los de 14 años se apoyan principalmente en que el patrón es irregular (categoría b) y las rachas demasiado largas (categoría e). Los de 18 años argumentan que el patrón es irregular (categoría b), que las frecuencias se ajustan a las teóricas (categoría c) o la existencia de rachas largas (categoría e). En los dos grupos una de las respuestas más frecuentes es la impredecibilidad (categoría h).

Estos tipos de argumentos también fueron los más frecuentes en este apartado del ítem en la investigación de Green.

Finalmente, hemos encontrado significación estadística al considerar los argumentos empleados si se considera o no la sucesión como aleatoria (χ^2=147.376; g.l.=5; p<0.0001).

La razón dada por los alumnos para considerar esta sucesión como no aleatoria ha sido principalmente la longitud de las rachas (categoría e), frecuencias diferentes (categoría d) y patrón regular (categoría a).

En las respuestas que dan los alumnos al ítem 3.3, la mayor parte ha considerado no aleatoria esta secuencia en la que la frecuencia absoluta de caras es 12, lo que se aparta bastante de la frecuencia teórica esperada en una secuencia aleatoria. No ha habido diferencias significativas entre los grupos.

Los argumentos empleados han sido diferentes en los dos grupos de alumnos (χ^2=16.729; g.l.=7; p=0.0192). Hay un predominio del argumento de impredecibilidad en los alumnos de 14 años (categoría h). Un mayor número de alumnos de 18 años se basa en la desigualdad de frecuencias (categoría d).

Estos argumentos también difieren en función de si la secuencia se considera o no aleatoria. (χ^2=89.149; g.l.=7; p<0.0001, agrupando las categorías c, f y g). El principal argumento para apoyar la aleatoriedad es la imprevisibilidad (categoría h). Las rachas largas (categoría e) y la no coincidencia de las frecuencias de distintos resultados (categoría d) se ha asociado a la no aleatoriedad. En el caso de la investigación de Green, los principales argumentos fueron patrón irregular (aleatoria) y frecuencias (no aleatoria).

Se observa en las respuestas que dan al ítem 3.4 que la mayoría de los alumnos considera aleatoria esta sucesión, en la que se presenta un equilibrio entre las caras y cruces y diferentes longitudes de las rachas. Ha habido ligeras diferencias entre los alumnos: (χ^2=6.076; g.l.=2; p=0.0479).

Los argumentos en que apoyan sus respuestas también han sido diferentes: (χ^2=22.157; g.l.=6; p=0.0011, agrupando las categorías a, f y g), predominando la referencia al patrón irregular (categoría b) y a las rachas (categoría e) en los alumnos de 14 años. Los de 18 han hecho mayor referencia a las frecuencias (categoría c). Ambos grupos han hecho referencia a la imprevisibilidad (categoría h).

También ha habido diferencias de argumentos, en función de que se considere que la sucesión es o no aleatoria: (χ^2=117.169; g.l.=6; p<0.0001). La principal razón para considerar la sucesión no aleatoria es la existencia de rachas largas (categoría e) y la imprevisibilidad se ha asociado a la aleatoriedad (categoría h). Los argumentos obtenidos por Green son semejantes a los del apartado c.

3.5.4. RECONOCIMIENTO DE PROPIEDADES EN LAS DISTRIBUCIONES DE PUNTOS EN EL PLANO

Al igual que en el caso de las secuencias aleatorias, hemos incluido un ítem en el que se pide a los alumnos su percepción de la aleatoriedad de una serie de distribuciones puntuales y los argumentos en los que se apoyan. Nuestro propósito es analizar las propiedades que los alumnos atribuyen a las distribuciones de puntos aleatorias y las diferencias en los dos grupos de alumnos.

Ítem 4:

Al juego que inventó Pablo han jugado cuatro niños y sus resultados son los que mostramos a continuación. ¿Crees que hay alguno de ellos que ha hecho trampas en el juego?. Explica por qué lo crees así y señala si hizo o no trampas en cada uno de los casos. (ver gráfico en el anexo)

4.1. ¿Ha hecho trampa Luis? ____ 4.2. ¿Ha hecho trampa Jaime? ___

4.3. ¿Ha hecho trampa Jesús? ___ 4.4. ¿Ha hecho trampa María? ___

Explica tus respuestas.

Este ítem consta de cuatro apartados. En cada uno de los casos se pide razonar la respuesta. En las investigaciones de Green (1988, 1991) y Toohey (1995), no se pidió a los alumnos argumentar sus respuestas sobre si la distribución era o no aleatoria. Los argumentos que dan nuestros encuestados los hemos agrupado en las siguientes categorías:

a) <u>Hay un patrón regular en la distribución de puntos</u>.

Como sucedía en el ítem anterior, acusan los sujetos encuestados la presencia de alguna regularidad en los resultados presentados y argumentan que la distribución de puntos sigue un cierto patrón u orden, como en los siguientes casos: *"Está todo demasiado correcto, todo en su sitio bien ordenado", "Es poco probable que en algunas casillas no haya ninguno y en la otras estén agrupados de dos en dos", "Es demasiada casualidad que salgan las casillas de los extremos superior derecho e inferior izquierdo con las cruces y en las otras no salga nada"*.

b) <u>La distribución sigue un patrón irregular</u>.

Este es un argumento contrario al anterior, por lo que no necesita ejemplos aclaratorios. En ambos argumentos podría estar encubierta la heurística de la representatividad.

c) Las frecuencias de los distintos resultados son parecidas.

Este argumento es el característico de todos los sujetos que hacen referencia a la semejanza de las frecuencias de distintos resultados. Es el argumento más usado para justificar sus repuestas en el primer apartado del ítem 4, el apartado que se refiere a Luis. Sirvan como modelos de respuestas a este argumento los siguientes: *"Es muy difícil que no salga ninguno repetido", "Es muy difícil que salgan todas las fichas el mismo número de veces"* .

d) Las frecuencias de los distintos resultados son diferentes.

Al contrario del caso anterior, los sujetos que entran en esta categoría dan más importancia a las diferencias entre los resultados que se presentan. La justificación la dan con este argumento principalmente al apartado segundo, el referido a Jaime. Ejemplo: *"Los resultados son muy variados, desde una X hasta 4X y por lo tanto razonables", "Creo que deben salir los resultados más igualados, no tan diferentes el número de veces que se repiten", "Los resultados son muy diferentes, parecen que están hechos al azar".*

e) Hay una celda con demasiados puntos.

Este argumento es bastante usado para justificar los apartados segundo y cuarto. Sería equivalente a argumentar que existen rachas largas en las respuestas al ítem 3, porque implica la idea de independencia. Ejemplos de respuestas aquí englobadas son: *"Tiene demasiadas cruces en algunos cuadros y deja en blanco otros", "En los cuadros de Jaime hay algunos que tiene demasiadas cruces"* .

Los argumentos que siguen apenas si se usan; sólo hay uno o dos alumnos que los usan, siendo por ello poco significativas sus respuestas. Los hemos incluido por consistencia a la clasificación de argumentos en el ítem 3.

f) No hay celdas con varios puntos, celdas con muy pocos puntos. Es el contrario al anterior.

g) Debe haber igualdad de posibilidades en el número de puntos por cuadro. Este argumento es similar al descrito en el sesgo de equiprobabilidad.

h) Otras: por azar, basado en la impredecibilidad de los resultados de los experimentos aleatorios. Es decir se razona siguiendo la pauta descrita en el "enfoque en el resultado aislado". Como ejemplo muestro la siguiente respuesta: *"Salen así porque es a la suerte de cada uno, no se podrá saber"* .

En sus respuestas, la mayor parte de los alumnos considera que esta distribución no es aleatoria. En consecuencia, aparentemente los alumnos habrían superado la etapa II en la teoría de Piaget. No hay diferencia significativa en la proporción de alumnos que considera o no aleatoria esta distribución, en función de la edad, pues el 74,1 % de los alumnos de 14 años y el 74,6 % de los alumnos de 18 años la considera no aleatoria . El porcentaje se mantiene y es similar al obtenido por Green (1991) en alumnos de 13 - 14 años. Toohey (1995) no presenta datos sobre estos porcentajes.

Los argumentos más usuales son que las frecuencias son demasiado parecidas (categoría c) y que el patrón es demasiado regular (categoría a). He encontrado diferencias en los argumentos empleados en los dos grupos: (χ^2=43.987 g.l.=3; p<0.0001, agrupando f y g con 'no contesta'). Los alumnos mayores emplean preferentemente el argumento frecuencial (categoría c) y la impredecibilidad (categoría h), mientras que los de 14 años emplean con más frecuencia la regularidad del patrón (categoría a).

También hemos encontrado diferencias de argumentos, según se considere o no la distribución como aleatoria: (χ^2=73.921; g.l.=3; p<0.0001, agrupando f y g con 'no contesta'). Las razones dadas para señalar que la sucesión no es aleatoria, son principalmente el patrón regular (patrón regular) y la igualdad de frecuencias de los distintos resultados (categoría c). La imprevisibilidad es más usada para apoyar la aleatoriedad (categoría h).

En este segundo apartado del ítem la mayoría considera que la distribución es aleatoria. La distribución presenta cuadros con 0, 1, 2 y 3 puntos; incluyendo algunos cuadros adyacentes vacíos. No hemos encontrado diferencias significativas entre los dos grupos de alumnos. El porcentaje (85,2 %) es algo menor que el obtenido por Green con los alumnos de 13 - 14 años (90 %).

Respecto a los argumentos el más frecuente ahora es la impredecibilidad (categoría h) y el patrón no regular (categoría b). Los argumentos se han diferenciado en los dos grupos de alumnos: (χ^2=15.442 g.l.=4; p=0.0038, agrupando las categorías a, c, e, f y g), dando un mayor número de argumentos los alumnos más jóvenes y apoyándose con mayor frecuencia en la irregularidad de la distribución (categoría b). Los alumnos de 18 años emplean con más frecuencia la imprevisibilidad (categoría h).

Si clasificamos los argumentos según se considere o no la distribución como aleatoria en el ítem 4.2, observamos que también hay diferencias según la opción elegida: (χ^2=50.502; g.l.=4; p<0.0001, agrupando las categorías a, c, e, f y g), siendo mayor el empleo de los argumentos frecuenciales (categoría d), de la imprevisibilidad (categoría h) y del patrón irregular (categoría b) para apoyar la aleatoriedad. El argumento de que hay celdas con demasiados puntos (categoría e) ha estado ligado principalmente a la creencia de que se hizo trampas.

En la respuestas dadas por loa alumnos al apartado c se observa que la mayor parte de alumnos considera no aleatoria esta distribución, en la que el número de puntos por cuadro es 0 ó 2. No es significativa la diferencia según la edad. El porcentaje de alumnos que considera que se hizo trampas es del 63.3 % en el grupo de 14 años y del 57.7 % en el grupo de los de 18 años. En consecuencia, no parece haber un progreso con la edad sobre este ítem, ya que estos porcentajes son muy próximos a los que Green obtiene con los alumnos de 11 años.

Tampoco ha sido estadísticamente significativa la diferencia de argumentos en los dos grupos de alumnos, habiéndose empleado principalmente la homogeneidad del patrón (categoría a) o la imprevisibilidad de los resultados (categoría h).

El argumento de homogeneidad del patrón (categoría a) es el más usado por los entrevistados y está ligado al rechazo de la sucesión como aleatoria, mientras que la aleatoriedad se apoya en la imprevisibilidad (categoría h). Ha sido significativa la diferencia en función de la opción elegida (χ^2=118.623; g.l.=3; p<0.0001).

En las respuestas al apartado 4, la mayoría de alumnos considera esta distribución como aleatoria, a pesar de que los puntos están distribuidos sólo en dos de los cuatro cuadrantes en que podemos dividir la cuadrícula. La diferencia entre los alumnos no es significativa. Vemos por tanto que los alumnos se apoyan más en la distribución de puntos en cada cuadro que en la distribución global de los cuadros vacíos en la cuadrícula. El porcentaje de los que la consideran no aleatoria (40,2 %) es menor que el obtenido por Green (50 %), por lo que en este caso nuestros resultados no apoyan los de este autor.

Se ha producido una diferenciación de los argumentos dados por los alumnos a éste ítem: (χ^2=15.219; g.l.=5; p=0.0094). Los alumnos de 14 años han usado con mayor frecuencia los argumentos de irregularidad en el patrón (categoría b) y de que hay celdas con demasiados puntos (categoría e). La imprevisibilidad (categoría h) ha sido el argumento más frecuente en los alumnos de 18 años.

También en esta opción del ítem hubo diferencias en función de la opción elegida: (χ^2=100.599; g.l.=5; p<0.0001). El argumento de imprevisibilidad de resultados (categoría h), así como la irregularidad en el patrón (categoría b) se han usado preferentemente para apoyar la aleatoriedad. El hecho de que algunas celdas tengan demasiados puntos (categoría e) es un argumento empleado cuando se supone la distribución no aleatoria. Esto indica la presencia de dificultades en la comprensión de la idea de independencia, ya que es un argumento parecido al de la existencia de rachas largas para rechazar la aleatoriedad en las secuencias aleatorias.

3.5.5. INFLUENCIA DE LAS VARIABLES DE TAREA DE LOS ÍTEMS EN EL RECONOCIMIENTO DE LA ALEATORIEDAD Y EN LOS ARGUMENTOS QUE LA APOYAN

Una de las preguntas de investigación planteadas en la introducción de este capítulo es si los alumnos emplean el mismo tipo de argumento para rechazar o admitir la aleatoriedad o si varían estos argumentos en función de las variables de tarea de los ítems.

En el análisis de los ítems 3 y 4 hemos observado como los argumentos que emplean los alumnos no son homogéneos en los diversos apartados de cada ítem. También hemos encontrado variación entre los argumentos que emplean para justificar que la sucesión es aleatoria (no se hizo trampas) o no. Puesto que la clasificación de argumentos se ha hecho de tal modo que sean comparables en las ocho situaciones propuestas, hemos creído conveniente completar nuestros resultados con un análisis de correspondencias que permitan identificar cuáles son las variables que se asocian a cada tipo de argumentos.

Esta técnica (Cornejo, 1988; Greenacre, 1993) permite analizar la estructura de interrelaciones entre filas y columnas en una tabla de contingencia. En nuestro caso, la tabla de contingencia empleada tiene por columnas los diversos ítems y por filas los argumentos empleados por los alumnos, tanto para responder afirmativamente (hizo trampas) como para responder negativamente (no hizo trampas).

En consecuencia, esta tabla se ha formado por unión de tablas de contingencia en las que se ha conservado la diferenciación entre argumentos empleados cuando la respuesta es positiva o negativa. Puesto que las frecuencias esperadas en algunas celdas eran demasiado pequeñas para poder aplicar el contraste Chi cuadrado, se unieron las categorías e) y f) y las categorías g) y h).

La codificación empleada es la siguiente:

- SREGULAR, NREGULAR, cuando se emplea el argumento de regularidad para decidir que se hizo o no se hizo trampas.

- SIRREGULAR , NIRREGULAR, cuando se emplea el argumento de irregularidad.
- SFIGUALES, SFDIFER, NFIGUALES, NFDIFERENTES, argumentos que se refieren a la igualdad o desigualdad de frecuencias.
- SRACHAS, NRACHAS, argumentos basados en la longitud de las rachas.
- SAZAR, NAZAR, equiprobabilidad e impredecibilidad de resultados.
- SNOSABE, NNOSABE, no sabe o no contesta.

Tabla 3.5.5.1. Análisis de la inercia total en la tabla de contingencia.

INERCIA TOTAL = 0.9174				
EJES	AUTOVALOR	% INERCIA	% ACUM.	HISTOGRAMA
1	0.462	50.3	50.3	**
2	0.200	21.8	72.1	******************
3	0.142	15.4	87.5	*************
4	0.073	8.0	95.5	*******
5	0.030	3.3	98.8	***
6	0.006	0.7	99.5	*
7	0.004	0.5	100.0	

En la Tabla 3.5.5.1 se incluye la descomposición de la inercia total obtenida en el análisis de correspondencias, mediante el paquete estadístico BMDP. Podemos observar que se han obtenido tres factores diferenciados, que en su conjunto explican el 87.5 % de la asociación entre filas y columnas en la tabla de datos. Restringiremos la interpretación a estos tres factores. En la Tabla 3.5.5.2. se presentan los resultados correspondientes a estos tres factores, para las diversas categorías de filas y columnas de la tabla de datos. Podemos observar que, en general, la calidad de representación es alta para todas las categorías, excepto para la categoría NRACHAS (No es aleatoria, a causa de las rachas) que tiene una calidad de representación moderada. Ello es debido a que posiblemente esta categoría tenga un peso importante en los factores cuarto, quinto y sexto que no incluimos en el análisis.

Para facilitar la interpretación de los factores, hemos incluido filas y columnas suplementarias. Las filas suplementarias representan valores de dos variables de tarea compartidas en los ocho ítems. Estas variables de tarea son las siguientes:

- Tipo de distribución aleatoria: LINEAL (Ítem 3) o PLANA (Ítem 4).
- Característica de la distribución: HOMOG (homogénea) o VARIAB (Variable). Son distribuciones homogéneas aquellas que, respetando la tendencia, no incluyen toda la variabilidad aleatoria, es decir, los ítems 3a, 4a, 4c. El resto incluye la variabilidad aleatoria.

Tabla 3.5.5.2. Resultados del análisis de correspondencias para filas y columnas

NOMBRE	MASA	QLT	INR	FACTOR	COR2	CTR	FACTOR	COR2	CTR	FACTOR	COR2	CTR
				EJE 1			EJE 2			EJE 3		
SREGULAR	0.144	0.998	0.157	0.518	0.247	0.084	-0.875	0.705	0.553	0.116	0.012	0.014
SIRREGUL	0.018	0.982	0.008	-0.392	0.370	0.006	-0.159	0.061	0.002	0.001	0.000	0.000
SFIGUALE	0.070	1.000	0.354	2.093	0.864	0.662	0.815	0.131	0.232	-0.139	0.004	0.010
SFDIFER	0.043	0.874	0.091	-0.565	0.151	0.030	0.567	0.151	0.069	1.079	0.548	0.352
SRACHAS	0.106	0.872	0.073	-0.547	0.432	0.069	0.384	0.212	0.078	0.397	0.227	0.118
SAZAR	0.052	0.702	0.012	0.038	0.006	0.000	0.100	0.043	0.003	0.166	0.121	0.010
SNOSABE	0.014	0.756	0.007	0.188	0.071	0.001	-0.194	0.075	0.003	0.294	0.173	0.009
NREGULAR	0.028	0.914	0.019	0.319	0.147	0.006	-0.466	0.315	0.030	0.119	0.021	0.003
NIRREGUL	0.102	0.987	0.068	-0.550	0.450	0.066	0.179	0.047	0.016	-0.571	0.485	0.234
NFIGUALE	0.039	0.983	0.043	0.342	0.106	0.010	-0.105	0.010	0.002	0.198	0.036	0.011
NFDIFER	0.019	0.881	0.045	-0.648	0.180	0.018	0.250	0.027	0.006	-1.185	0.603	0.191
NRACHAS	0.017	0.455	0.007	-0.334	0.247	0.004	0.043	0.005	0.000	0.075	0.014	0.001
NAZAR	0.267	0.955	0.021	-0.242	0.728	0.034	-0.035	0.015	0.002	-0.069	0.060	0.009
NNOSABE	0.080	0.929	0.012	-0.246	0.395	0.011	0.097	0.061	0.004	-0.264	0.457	0.040
I3A	0.121	0.974	0.081	0.159	0.038	0.007	-0.570	0.487	0.197	0.029	0.001	0.001
I3B	0.120	0.821	0.037	-0.416	0.569	0.045	0.215	0.152	0.028	0.145	0.069	0.018
I3C	0.119	0.914	0.101	-0.411	0.200	0.044	0.337	0.134	0.067	0.668	0.527	0.375
I3D	0.120	0.874	0.031	-0.309	0.366	0.025	0.207	0.164	0.026	0.138	0.073	0.016
I4A	0.131	1.000	0.366	1.614	0.931	0.739	0.429	0.066	0.121	-0.079	0.002	0.006
I4B	0.128	0.959	0.130	-0.537	0.286	0.080	0.194	0.037	0.024	-0.796	0.628	0.575
I4C	0.130	0.996	0.131	0.217	0.047	0.013	-0.902	0.808	0.529	0.054	0.003	0.003
I4D	0.130	0.662	0.041	-0.412	0.535	0.048	0.111	0.039	0.008	-0.087	0.024	0.007

Aunque en los ítems se han incluido otras variables de tarea, éstas no han resultado tener asociación con los argumentos de los alumnos. En consecuencia, para facilitar la interpretación de los gráficos no las hemos incluido en el análisis final. Tampoco se detectaron diferencias en ninguno de los factores respecto al grupo de alumnos.

. Como columnas suplementarias, introducimos la respuesta positiva (SI) o negativa (NO) en el ítem.

En la Tabla 3.5.5.3 se presentan los resultados para estas filas y columnas suplementarias, en la que destaca que la calidad de la representación es mayor en filas que en columnas. Es decir, hay más variabilidad de los argumentos empleados en función de las variables de tarea del ítem, que en función de si la respuesta es positiva o negativa. Los alumnos detectan las propiedades de las distribuciones aleatorias, aunque no las identifican fácilmente con la aleatoriedad o el determinismo. A continuación interpretamos los tres factores obtenidos.

Tabla 3.5.5.3. Resultados del análisis de correspondencias para filas y columnas suplementarias

FACTOR	QLT	FACTOR	COR2	FACTOR	COR2	FACTOR	COR2
		EJE 3		EJE 2		EJE 3	
LINEAL	0.906	-0.360	0.119	0.105	0.010	0.651	0.392
PLANA	0.910	0.324	0.114	-0.094	0.009	-0.603	0.394
HOMOG	0.976	0.976	0.588	-0.778	0.373	0.004	0.000
VARIAB	0.980	-0.614	0.607	0.476	0.365	0.036	0.002
SI	0.511	0.280	0.026	0.204	0.014	0.727	0.175
NO	0.360	-0.286	0.027	-0.012	0.000	-0.645	0.137

Primer factor:

Frecuencias de distintos resultados y Tasa subjetiva de aleatoriedad. (Figura 5.1)

Este factor ordena, aproximadamente, los ítems en función del número de alumnos que lo ha considerado aleatorio. Podríamos identificarlo como la tasa de percepción subjetiva de aleatoriedad de los alumnos.

En particular separa el ítem 4a (r^2=0.931; x=1.614) que contribuye al 0.739 de la inercia del eje, de los ítems 3b (x= -0,416, r^2=0.569), 3c(x=-0.411, r^2=0.200), 3d (x=-0.309, r^2=0.366), 4b(x=-0.537, r^2=0.286) y 4d(x=-0,412, r^2=0.535). Son los ítems en los que ha habido más y menos respuestas positivas a la pregunta de si se hace trampas. Destacan en consecuencia, características específicas que contraponen estos ítems.

Estos son los argumentos más empleados para justificar que el resultado del ítem 4a no es aleatorio; es decir: o bien que todas las frecuencias son iguales, o que hay demasiada regularidad. Por el contrario, estos dos argumentos no fueron apenas empleados en los ítems 3b,3c, 3d, 4b y 4c.

Una característica que diferencia el primer ítem del resto es la homogeneidad frente a la variabilidad. Cada uno de los posibles 16 resultados del ítem 4a tiene una frecuencia unitaria. Por el contrario, los ítems 3b, 3c, 3d, 4b, 4d, muestran diferentes frecuencias en los distintos resultados. También se pone de manifiesto por la alta correlación y el signo diferente de las categorías de esta variable suplementaria (HOMOG ; x=0.976, r^2=0.588) (VARIAB; x=-0.614, r^2=0.607). El resto de las variables de tarea no correlaciona con este factor. Respecto a los argumentos, encontramos en la parte positiva del eje los siguientes: SFIGUALES (x=2.093, r^2=0.864); SREGULAR (x=0.518, r^2=0.247).

En la parte negativa se presentan los argumentos especialmente ligados a los ítems 3b, 3c, 4b y 4c, que han sido poco empleados en el caso del 4a.

Figura 5.1. Representación gráfica del primer factor.

```
             -      SFIGUALE       -                  -
        2.0  +                     +                  +
             -                     .                    -
             -                     .                  -
             -                     .                  -
             -                     .                  -
             -                     .  I4A             -
             -                     .                  -
        1.5  +                     +                  +
             -                     .                  -
             -                     .                  -
             -                     .                  -
             -                     .                  -
             -                     .                  -
             -                     .                  -
        1.0  +  HOMOG              +                  +
E            -                     .                  -
             -                     .                  -
J            -                     .                  -
             -                     .                  -
E            -                     .                  -
       0.50+        SREGULAR       +                  +
             -                     .                  -
1            -  PLANA  NFIGUALE.-                     -
             -        NREGULAR     .             SI   -
             -          SNOSABE    .  I4C             -
             -                     - . I3A            -
             -             SAZAR   .                  -
        0.0  +                     +                  +
             -                     .                  -
             -                     .                  -
             -           NAZAR     .                  -
             -                     - .I3D        NO   -
             -  LINEAL  SIRREGUL   .                  -
             -                     -  .I3B            -
      -0.50  +                     +                  +
             -         SFDIFER  .  I4B                -
             -  VARIAB   NFDIFERM  .                  –

SRACHAS= -0.55 ;  NIRREGUL= -0.55 ;
NRACHAS=-0.33 ; NNOSABE= -0.25 ;
I3C= -0.41 ;    I4D= -0.41
```

No se hizo trampas, porque el resultado puede ocurrir por azar NAZAR (x=-0.242; r^2=0.728); Sí, porque o bien hay rachas largas o bien hay cuadros con varios puntos SRACHAS (x= -0.547, r^2=0.432); No, porque aparece una distribución irregular NIRREGULAR (x=-0.550; r^2= 0.450); No, aunque no se sabe la razón NNSABE (x=-0.226; r^2=0.395); o sí, porque es demasiado irregular SIRREGULAR (x=-0.392, r^2=0.370).

<u>*Segundo factor:*</u>

<u>*Regularidad del patrón global*</u>. (Figura 5.2)

Aparece una oposición entre el ítem 3a (x=-0,57, r^2=0.487) y 4c (x=-0.902, r^2=0.808) y los ítems 3b (x=0.215, r^2=0.152); 3c (x=0.337, r^2=0.134), 3d (x=0.207, r^2=0.164). En el primer ítem sólo aparecen rachas de 1 y 2 elementos; en el segundo todos los cuadros tienen 0 o 2 puntos. En consecuencia el patrón global de las distribuciones es muy regular. En los ítems que aparecen en la parte positiva hay rachas largas o cuadros con resultados múltiples, por lo que el patrón global es más irregular.

Figura 5.2. Representación gráfica del segundo factor.

```
        .80+              SFIGUALE +                 +
           -                       .                 -
           -                       .                 -
           -                       .                 -
           -                       .                 -
           -              SFDIFER .                  -
           -  VARIAB               .                 -
           -                       . I4A             -
       .40 +              SRACHAS  +                 +
           -                       - I3C             -
           -                       .                 -
           -            NFDIFERM  .                  -
           -            NIRREGUL  .  .I3B         SI -
           -                       .                 -
E          - LINEAL          SAZAR . I4D             -
           -               NRACHAS .                 -
J      0.0 +                       +              NO +
           -                 NAZAR .                 -
E          - PLANA        NFIGUALE .                 -
           -              SIRREGUL .                 -
           -               SNOSABE .                 -
2          -                       .                 -
           -                       .                 -
           -                       .                 -
    -  .40 +                       +                 +
           -             NREGULAR .                  -
           -                       .                 -
           -                       . I3A             -
           -                       .                 -
           -                       .                 -
           -                       .                 -
           -                       .                 -
          -.80   HOMOG             +                 +
           -              SREGULAR .                 -
           -                       . I4C             -
```

NNOSABE = 0.10 ; I3D = 0.21 ; I4D = 0.19

Respecto a los argumentos, en la parte negativa aparecen argumentos que hacen referencia a la regularidad del patrón de la distribución: sí hizo trampas porque el patrón es muy regular (SREGULAR; x=-0.875, r^2=0.705); y no hizo trampas porque el patrón es muy regular (NREGULAR x=-0.466, r^2=0.315).

En la parte positiva argumentos que se apoyan en la existencia de rachas o en las frecuencias de los distintos resultados: Sí hizo trampas porque hay rachas demasiado largas (SRACHAS; x= 0.384; r^2=0.212) Sí, porque las frecuencias son demasiado iguales (SFIGUALES x=0.815; r^2=0.131) y Sí, porque las frecuencias son demasiado diferentes (SFDIFER x=0.567; r^2=0.151).

Respecto a las variables de tarea, opone la homogeneidad (HOMOG x=-0.770, r^2=0.373) que ahora aparece con coordenada positiva frente a la variabilidad (VARIAB x=0.476, r^2=0.365). Éstas tienen ahora un aspecto global y no local.

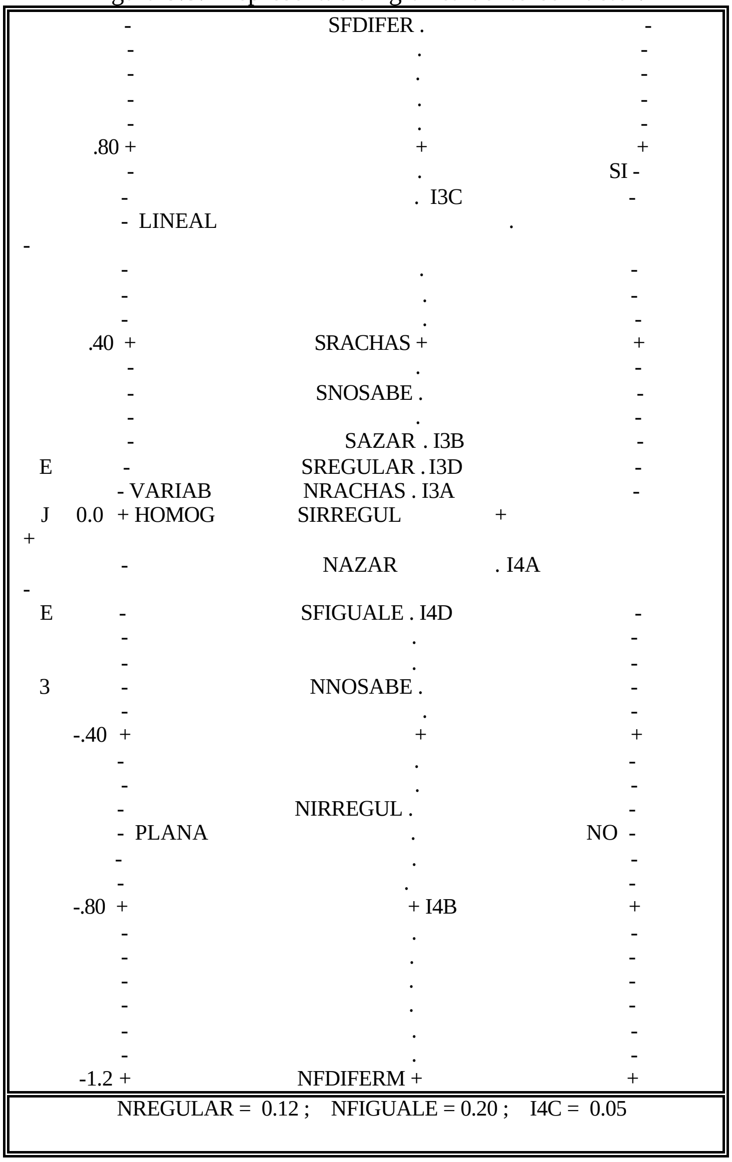
Tercer factor:

Tipo de distribución lineal o plana. (Figura 5.3)

Separa las distribuciones lineales (parte positiva) y planas (parte negativa). Los principales ítems que contribuyen al mismo son el 3c (x=0.668; r^2=0.527) y 4b (x=-0.796, r^2=0.575) que se oponen entre sí. El argumento asociado al primero ha sido principalmente: Sí, porque las frecuencias de resultados son muy diferentes (SDIFER;

x= 1.079; r^2= 0.548), aunque también se usan Sí, porque hay rachas largas (x=0.397, r^2= 0.227 y Sí, pero no sabe por qué (x=0.294, r^2=0.173).

Figura 5.3. Representación gráfica del tercer factor.



Al segundo tipo de ítem han estado asociados: No, porque el patrón es irregular (x=-0.571; r^2=0.485); No, porque las frecuencias de los distintos cuadros son diferentes (x=-1.185, r^2=0.603) y No, pero no sabe por qué (x-0.264, r^2=0.457).

De este modo aparecen contrapuestos dos ítems en los cuales las frecuencias esperadas en la distribución de probabilidad subyacente no se ajusta a la observada.

Los valores de las variables de tarea que aparecen asociados a este eje son LINEAL (x=0.651; r^2=0.392); PLANA (x=-0.603, r^2=0.394); SI (x=0.727, r^2=0.175); NO (x=-0.645, r^2=0.137). Es decir, aunque en los dos ítems hay una fuerte diferencia entre la distribución de frecuencias esperada y la observada, los alumnos han considerado que se hace trampas en el caso de la distribución lineal en mayor medida que en la plana. El eje también separa aquellos argumentos que están más ligados a la aceptación o rechazo de la aleatoriedad.

En consecuencia, la falta de ajuste entre la distribución teórica y la presentada en el ítem ha sido mejor detectada en el caso de la distribución lineal que en la plana.

En definitiva, y como consecuencia de los tres factores identificados, observamos que los alumnos reconocen las características que hemos hecho variar en los ítems presentados. Además, las utilizan para decidir si consideran la situación como aleatoria o no aleatoria. Estas características pueden resumirse en tres, que corresponden a los factores identificados:

1. Los alumnos atribuyen una variabilidad local a los fenómenos aleatorios. Por ello esperan frecuentes alternancias de resultados y ausencia de patrones en el orden o en la disposición espacial de los resultados.
2. Los alumnos esperan una regularidad global dada por la semejanza entre las frecuencias de distintos resultados y las probabilidades teóricas.
3. Sin embargo, se espera alguna discrepancia (aunque no mucha) entre las distribuciones teóricas y las observadas. Estas discrepancias se reconocen con facilidad en las secuencias lineales, pero no en las distribuciones de puntos en el plano.

3.6. HEURÍSTICAS Y SESGOS EN LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

La segunda parte de la prueba analiza la extensión de diversas heurísticas y sesgos en la muestra de alumnos. Está compuesta de cuatro ítems, en cada uno de los cuales analizamos la respuesta elegida por el alumno, así como el argumento utilizado. Todos estos ítems han sido tomados de diversas investigaciones como Garfield (1991) o Konold y Garfield (1993). Además de estudiar la extensión de las heurísticas y sesgos en los estudiantes, estamos interesados en la consistencia entre respuestas y argumentos, así como en la diferencia en los dos grupos de alumnos. Finalmente, deseamos estudiar si existen o no asociaciones entre distintas heurísticas y sesgos, y si sobre ellos influyen las variables de tarea de los ítems, lo que no ha sido estudiado por otros autores.

Una vez codificados los datos se obtuvieron tablas de clasificación cruzada de tipos de respuesta y tipo de argumento por grupo de alumnos. Asimismo se estudiaron los argumentos elegidos según opción correcta o incorrecta en el ítem para hacer un análisis similar al realizado en la primera parte del cuestionario. Finalmente, se compararon entre sí las opciones elegidas en algunos ítems similares. Aunque las frecuencias de algunas categorías de argumentos son muy bajas, se han conservado en las tablas que presentamos, para poder destacar el hecho de que ciertos tipos de argumento están asociados a ítems particulares.

Sin embargo, para el cálculo del contraste Chi cuadrado, se ha tenido en cuenta que la mínima frecuencia esperada sea mayor que uno y que no más del 20 por ciento de las celdas tengan frecuencias inferiores a cinco, con objeto de respetar las condiciones de aplicación del método (véase Moore, 1995). Cuando no se cumplen estas condiciones, se han agrupado filas o columnas de baja frecuencia para el cálculo del contraste, aunque las tablas se incluyan completas. A continuación presentamos los resultados obtenidos.

En las tablas de frecuencias no incluimos las filas o columnas cuyas celdas sean todas de frecuencia nula.

3.6.1. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LOS ÍTEMS

Ítem 5

5.1.¿ Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- CCC++ b.- +CC+C c.- +C+++ d.- C+C+C

e.- Las cuatro sucesiones son igualmente probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

La mayor parte de los alumnos (153; que es el 55.3 %) perciben la equiprobabilidad de las diferentes secuencias. Sin embargo, un alto número de alumnos (82, que representan el 29.6%) eligen como más probable la opción b, que es precisamente no ordenada, pero que respeta más la proporción teórica de caras y cruces. La respuesta de estos alumnos se justificaría, según las investigaciones de Kahneman *et al.* (1982), entre otros motivos por la heurística de la representatividad.

Esta opción ha sido algo más frecuente en los alumnos de 14 años, mientras que los de 18 han elegido en mayor porcentaje la opción correcta, diferencias que son estadísticamente significativas, ya que se obtuvo un valor Chi cuadrado igual a 10.257, con 5 g.l. cuyo nivel de significación fue 0.0542. Este resultado contradice los obtenidos en la investigación de Fischbein *et al.* (1991), según la cual los alumnos adquieren la heurística de la representatividad a lo largo de la adolescencia.
Los argumentos de los alumnos en este ítem se han clasificado de la forma siguiente:

a) <u>Debe haber aproximadamente igual número o hay la misma probabilidad de caras y cruces</u>.

En este apartado hemos incluido los alumnos que manifiestan explícitamente su expectativa de la conservación de la frecuencia relativa de caras y cruces, en relación a la probabilidad teórica, incluso en una secuencia corta.

Por ejemplo, algunos alumnos de 18 años responden así: "*Cada apartado tiene un 50 % de probabilidad", "Si la moneda está equilibrada, existe la misma probabilidad de que salga cara o cruz", "Al lanzar una moneda tienes un 50 % de cara y un 50 % de cruz y por lo tanto en ese orden tienen todas las mismas posibilidades", "La cara y la cruz tienen que salir más o menos en la misma medida"*. La justificación en la elección de este argumento dado por un alumno de 14 años es: "*Porque son más o menos equivalentes*". Aunque algunos alumnos asignan correctamente probabilidades empleando argumentos frecuenciales o el principio de indiferencia, otros dan este argumento para justificar una opción incorrecta. Sería una respuesta típica de la heurística de la representatividad, que manifiesta una creencia injustificada en la "ley de los pequeños números" y la falta de apreciación de la variabilidad muestral en las pequeñas muestras.

b) Debe haber frecuentes alternancias entre caras y cruces.

Estos alumnos se apoyan en una propiedad diferente al considerar, no la tendencia global señalada por la frecuencia, sino la variabilidad, indicada por la alternancia de resultados. La propiedad que estos alumnos fallan en aplicar es la "pérdida de memoria" de una sucesión de Bernoulli, así como la idea de independencia de los ensayos sucesivos. Es también una respuesta típica de la heurística de la representatividad.

Por ejemplo, en los alumnos de 18 años, se dan las siguientes respuestas: "*Es más probable una alternancia entre caras y cruces que el que salgan dos cruces o caras seguidas o tres", "Si está equilibrada la moneda, lo más seguro es que salgan alternativamente caras y cruces*", "*Como la probabilidad de que salga cara o cruz es del 50 %, en teoría debería salir una vez sí y otra no cara*". En cuanto a los de 14 años, éstas son sus principales justificaciones: "*Porque deben salir más o menos dos veces caras y tres cruces más o menos alternas", "Porque salen más o menos seguidas", "Porque no es probable que se repitan mucho seguidas", "No debe haber mucha diferencia de veces entre caras y cruces".*

c) Es cuestión de suerte, puede ocurrir cualquiera de las secuencias.

Los estudiantes justifican la equiprobabilidad de los resultados, no por un razonamiento combinatorio, sino por su creencia en la impredecibilidad de lo aleatorio. Un grupo importante de estos alumnos podrían estar razonando de acuerdo con el "enfoque en el resultado aislado" descrito por Konold (1989, 1991), aunque otros podrían estar razonando correctamente, dependiendo de la opción elegida.

En este caso, los principales argumentos por parte de los mayores son: *"No podemos adivinar cuál será más probable", "Como depende del azar y aunque parezca muy difícil, todo puede ocurrir", "En cinco tiradas pueden salir cinco cruces o cinco caras y también cualquier otra variante", "Sólo lanzando la moneda se puede saber la sucesión que sale y que será casi seguramente distinta de la siguiente, todo depende de la suerte*". Los alumnos de 14 años han dado las siguientes respuestas: *"Según la suerte que tengamos y según la moneda como la tires", "La suerte es así", "Creo que las cuatro opciones son posibles, puede salir cualquier cosa, depende de la suerte".*

d) Hay un patrón regular.

Se alude explícitamente al hecho de que una secuencia aleatoria no debe tener un patrón reconocible. Intuitivamente aparece la definición de secuencia aleatoria que da base a la definición de Kolmogorov (Fine,1973).

Las respuestas más características, referentes a este argumento, dadas por los alumnos de 18 años son: *"Me parece más usual que no sean muy parecidas las cosas que salen", "Porque la probabilidad no cumple leyes de simetría o de cosas muy homogéneas", "Es demasiada casualidad que se lleve un orden en la lista de los resultados".* Entre los alumnos de 14 años las principales justificaciones dadas para sus respuestas son: *"Es poco probable que salgan tan repetidos unos después de otros", "Es mucha coincidencia que salgan tan parecidos", "Es muy difícil que se alternen con tanta regularidad".*

e) Por experiencia propia.

Los alumnos argumentan su experiencia sobre sucesiones obtenidas en juegos de azar, aunque no saben dar una razón para su elección.

En este caso las respuestas más características son: *"Lo sé, porque he jugado mucho a ésto", "Varias veces he hecho esta prueba y casi siempre me ha salido ese resultado", "Hice lanzamientos con una moneda y ninguno de los resultados que se ponen me ha salido en otras ocasiones".*

f) Más probable dos caras consecutivas o bien dos cruces consecutivas.

En este caso, la razón es contrapuesta a la b), ya que se esperan la existencia de algunas rachas y no la constante alternancia de resultados.

Por ejemplo *"No creo que se repitan tres veces seguidas las caras o las cruces, tampoco creo que se alternen las caras y las cruces cada vez que se lancen"*, (alumno de 18 años).

g) Es más probable que salgan caras (cruces).

Algunos alumnos conceden una mayor probabilidad a uno de los sucesos, debido a que las monedas, en general, no son perfectamente simétricas.

Ejemplos de este argumento son las siguientes respuestas: *"Creo que al tirar una moneda sale siempre más veces la cara que la cruz", "Es raro que no salgan más las caras que las cruces", "Siempre salen más las cruces".*

h) Es más aleatoria, sin regularidad fija. Se utiliza el argumento contrario al e).

Las principales respuestas referentes a este argumento son: *"No siempre da un resultado equilibrado y regular", "Es lo más probable, porque se repiten mucho de la misma forma", "Lo veo más probable, porque sigue el mismo orden".*

Por último, un número apreciable de alumnos indica que no sabe justificar su respuesta, o simplemente la deja en blanco.

En general los alumnos argumentan que, debido al carácter aleatorio, puede obtenerse cualquier resultado (categoría c). También tiene una frecuencia importante el considerar que no debe haber rachas en la secuencia (categoría b) y el caso de los alumnos que no proporcionan ningún argumento.

Al comparar entre sí los dos grupos de alumnos, obtenemos diferencias estadísticamente significativas ($\chi^2 = 25.217$; g. l. = 4 ; p = 0.00004, agrupando las categorías a, e, g y h). Los alumnos de 14 años han usado más veces que sus compañeros el argumento de las rachas (categoría b), mientras que los de 18 años han empleado más la imprevisibilidad (categoría c) y el considerar más probables dos resultados del mismo tipo seguidos (categoría f).

Si se analiza la correspondencia de estos argumentos con la respuesta a este ítem, se observa que el argumento más usado para la opción correcta ha sido la impredecibilidad (categoría c), mientras que para la opción incorrecta la más frecuente es la categoría b (*"frecuentes alternancias entre caras y cruces"*), al que sigue la respuesta en blanco o no contestar. Las diferencias fueron estadísticamente significativas ($\chi^2 = 36.92$; g. l. = 4, agrupando las categorías a, e, g y h).

5.2. Abajo listamos las mismas sucesiones de caras y cruces. ¿Cuál de las sucesiones es menos probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- CCC++
b.- +CC+C
c.- +C+++
d.- C+C+C
e.- Las cuatro sucesiones son igualmente poco plausibles.
¿Por qué has dado esta respuesta?

La opción más frecuente ha sido la correcta, es decir, que todas las secuencias son igualmente probables. Las respuestas que se consideran menos probables son la c y la d. La proporción de respuestas correctas es mayor en los alumnos de 18 años, siendo las diferencias estadísticamente significativas (χ^2=10.193, g.l.=4 p=0.0373).

Los argumentos de los alumnos se han clasificado con el mismo criterio que en el apartado 5.1 de este mismo ítem. En este caso, la mayor parte de los alumnos ha elegido la opción c), es decir la impredecibilidad de los resultados. También han presentado una frecuencia apreciable las opciones b) y d). La categoría d) consiste en indicar que el patrón parece demasiado regular; lo aleatorio se concibe como desordenado, que es una característica que ya habíamos encontrado en las entrevistas con los alumnos en el capítulo 2. La opción b) por la cual no se admiten rachas largas, también había sido encontrada en dicha fase de entrevistas. De nuevo se produce un mayor razonamiento en los alumnos de 18 años, que dan un mayor número de argumentos correctos, siendo las diferencias estadísticamente significativas (χ^2=14.146; g.l.= 4, p=0.0068, agrupando las categorías e, f, g y h).

En el análisis de los argumentos se produce de nuevo una diferenciación en función de la respuesta. En las respuestas correctas, el principal argumento ha sido la impredecibilidad (categoría c). Por el contrario, en la opción incorrecta ha primado el argumento b) que es incorrecto (frecuente alternancia). Las diferencias han sido estadísticamente significativas (χ^2=223.615; g.l.= 4, p<0.0001).

Finalmente, hemos cruzado las opciones elegidas en los ítems 5.1 y 5.2, con el fin de estudiar la consistencia de los alumnos en ellos.

Observamos una fuerte consistencia de los alumnos respecto a la respuesta correcta. El 75.8% de los alumnos que dan la respuesta correcta en el ítem 5.1, también la dan en el ítem 5.2. Respecto a los alumnos que dieron en el ítem 5.1 respuestas incorrectas, la mayoría elige como menos probable en el ítem 5.2 las opciones a), c) o d). La asociación entre estas respuestas fue estadísticamente significativa (χ^2=121.413, g.l.=6 p<0.0001. El 24.2 % de los alumnos que dieron la respuesta correcta en el apartado 1, pasan a dar una respuesta correcta incorrecta en el apartado 2. Este patrón de cambio en las respuestas en los dos apartados de este ítem fue también observado por Konold *et al.* (1993), quien lo interpretó indicando que estos alumnos razonan en base al "enfoque en el resultado aislado". Sin embargo el porcentaje de alumnos que muestran este patrón de respuesta es menor en nuestro caso que en Konold *et al.* (1993).

Ítem 6.-
Una ruleta se divide en 5 áreas de igual tamaño, como se muestra debajo (véase anexo 2).
Se da un fuerte impulso a la flecha de la ruleta.

¿Cuál de los siguientes resultados es más verosímil que resulte al girar la ruleta tres veces?

a.- 215 en este orden exacto.
b.- obtener los números 2, 1, 5, en cualquier orden.
c.- obtener los números 1, 1, 5 en cualquier orden.
d.- a y b son igualmente verosímiles.
e.- a, b, y c son igualmente verosímiles.

La respuesta más frecuente ha sido considerar equiprobables los resultados (opción e), razonando de acuerdo con el "sesgo de equiprobabilidad" descrito por Lecoutre y Durand (1988), Lecoutre y Cordier (1990) y Lecoutre (1992), o bien mediante el "enfoque en el resultado aislado" sugerido por Konold (1989), (1991). Se hace una extensión incorrecta de la regla de Laplace, al no tener en cuenta el distinto número de veces que puede obtenerse cada suceso. Los alumnos evidencian una falta de razonamiento combinatorio. También ha sido frecuente la respuesta "obtener 215 en cualquier orden", que indicaría una buena capacidad de razonamiento combinatorio. Es notorio que un mayor grupo de alumnos de 14 años que de 18 haya dado esta respuesta, mientras que el porcentaje de respuestas incorrectas es mayor en los alumnos de 18 años. Las diferencias fueron estadísticamente significativas (χ^2=11.865; g.l.= 4 p = 0.0184).

Ítem 7

En la maternidad de la ciudad X están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa, según el sexo del recién nacido.

7.1. ¿Cual de estos casos te parece más probable?:

a.- Que entre los próximos 10 nacimientos 8 o más sean varones.
b.- Que entre los próximos 100 nacimientos 80 o más sean varones.
c.- Las dos cosas anteriores son igual de probables.
Indica cual te parece más probable y por qué

Este ítem fue ya empleado en las entrevistas previas a la preparación del cuestionario. Como en aquél caso, la respuesta más usual es considerar los dos casos equiprobables, aplicando la heurística de la representatividad Kahneman *et al.* (1982). No obstante, un porcentaje importante de alumnos ha dado la respuesta correcta, siendo más frecuente el caso de los alumnos de 18 años. Las diferencias no fueron estadísticamente significativas.

Se han considerado los siguientes argumentos, algunos de los cuales aparecieron en la fase de entrevista, que se ha descrito en el capítulo 2:

a) <u>La muestra pequeña es más variable</u>.

Son los alumnos que piensan que, debido al carácter aleatorio del experimento, la variabilidad de la frecuencia relativa disminuye con el número de ensayos, apreciando el fenómeno de la convergencia.

Ejemplos de este argumento son las respuestas siguientes: *"Ya que es más probable que de 10 niños 8 sean varones a que lo sean 80 de 100"*, *"Porque puede haber una racha de nacimientos de varones en un número pequeño, pero es demasiada casualidad que en cien casos se den ochenta"*, *"Porque a más número habrá más igualdad en el número de niños y de niñas"*, *"Al aumentar la población se estabiliza la proporción"*.

b) Por igual proporción.

Se argumenta que las dos muestras tienen igual proporción y por ello sus probabilidades son iguales. Es la respuesta típicamente descrita en los estudios sobre representatividad. (Bentz y Borocvnik, 1982 b; Kahneman *et al.,* 1982; Wallsten, 1983; Pérez Echeverría, 1990).

Ejemplos de respuestas que justifiquen este argumento son: *"Porque es el mismo porcentaje", "Es lo mismo 8 de 10 que 80 de 100".*

c) Hay mayor proporción en muestras más grandes.

Se aplica ahora la representatividad, no en función del parecido entre el valor del estadístico muestral y el parámetro proporcional, sino al parecido entre dos características de la muestra, la proporción y su tamaño.

Ejemplos de respuestas que justifiquen este argumento: *"La muestra sobre cien sujetos, ofrece un margen mayor y es más difícil no acertar en el pronóstico", "Teniendo mayores posibilidades de que ocurra el fenómeno en grandes muestras".*

d) Igual probabilidad.

Similar al argumento b) pero usando el término probabilidad.

La respuesta que se suele dar en este argumento es: *"En los dos casos la probabilidad es del 80 %", "A efecto de probabilidad es el mismo resultado".*

e) Deben nacer más niñas.

No se admiten los datos del problema, alegando que la proporción de niñas debiera ser mayor. Es una manifestación de la heurística de la representatividad con un nuevo matiz: los datos del enunciado son incorrectos, puesto que esa proporción no puede ocurrir, ni siquiera en una muestra pequeña.

Ejemplos de respuestas de este argumento: *"Lo normal es que nazcan más niñas que niños".*

f) No se saben cuantos serán varones o hembras.

Los sucesos aleatorios son impredecibles, incluso en términos probabilísticos. No puede responderse a la pregunta, puesto que no podemos siquiera predecir la probabilidad de los distintos resultados.

Ejemplos que justifican este argumento son: *"No hay ninguna regla para predecir si serán varones o hembras", "Es imprevisible", "En algunos casos pueden nacer más varones y en otros más hembras o al revés", "Depende del azar y no se sabe lo que sucederá".*

g) Nacen más niños que niñas.

Es un nuevo matiz en la aplicación de la representatividad, al suponer, que, puesto que en la realidad, la probabilidad de que un niño sea varón es algo mayor de que sea hembra (0.51) los resultados son razonables.

Ejemplos de respuestas justificando este argumento: *"Suelen nacer mayormente más niños", "En estos tiempos suelen nacer más varones".*

Por último, se incluyen los alumnos que no contestan o indican que no entienden la pregunta o que no saben explicar su respuesta.

Al estudiar las frecuencias y porcentajes de argumentos en el ítem 7.1 en ambos grupos de alumnos observamos que las respuestas más frecuentes han sido considerar sólo la igualdad de proporciones en ambas muestras (categoría b), seguida por el argumento correcto (categoría a). Es también importante el grupo de alumnos que da una respuesta confusa o no respuesta, lo que indica que el alumno actúa por intuición, pues no es capaz de argumentar su respuesta. Los dos tipos de respuestas a) y b) fueron más frecuentes en los alumnos de 18 años. Por el contrario, los de 14 años dejan en mayor proporción la respuesta sin razonar. También han aparecido en este grupo dos tipos de argumentos que no se dan en los alumnos mayores: la impredecibilidad de los resultados (categoría f) y el hecho de que, al ser algo mayor la probabilidad de nacer varón, los dos resultados serían razonables (categoría g). Las diferencias fueron estadísticamente significativas (P^2=58.170; g.l.= 6, $p<0.0001$, agrupando las categorías e y d).

Existe una fuerte consistencia entre la respuesta al ítem y el argumento empleado en las respuestas, ya que el argumento correcto aparece casi exclusivamente ligado a la opción correcta y el resto de los argumentos aparecen ligados a la opción incorrecta. Las diferencias fueron estadísticamente significativas (χ^2=212.094; g.l.=6 ; $p<0.0001$, agrupando las categorías e y d).

7.2. ¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos?

a.- La fracción de chicos será mayor o igual a 7/10.
b.- La fracción de chicos será menor o igual a 3/10.
c.- La fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10.
d.- Las tres cosas son igual de probables.
Indica cuál te parece más probable y por qué

En el estudio de las frecuencias dadas en las respuestas de los alumnos al ítem 7.2 podemos observar que la mayor parte de los alumnos aplica incorrectamente la regla de Laplace, considerando equiprobables todas las alternativas (opción d), respuesta que podría explicarse por el "enfoque en el resultado aislado". Un importante porcentaje de alumnos da la respuesta correcta, siendo mayor la proporción en los alumnos de 18 años. Las diferencias fueron estadísticamente significativas (χ^2=10.151; g.l.=4, $p=0.038$).

Los argumentos que los alumnos dieron en este ítem son los siguientes:

a) No está determinado el número de niños que nacerán.

De nuevo se argumenta la impredecibilidad de los resultados, incluso en términos de probabilidades, respuesta que se corresponde a la descrita por Konold en el "enfoque en el resultado aislado".

Ejemplos de las respuestas dadas son: *"En un número tan pequeño de nacimientos es posible que ocurran muchas cosas", "En nacimientos nacen tanto niños como niñas, cualquier cosa es posible", "Puede ser lo que Dios quiera", "No se puede saber, cada año varía la natalidad".*

b) Nacerán aproximadamente igual número de niños y niñas.

Se consideran más probables los casos en que la frecuencia relativa se aproxima a la probabilidad teórica. Como hemos indicado, ello puede deberse a una concepción correcta sobre las probabilidades binomiales o al empleo de la heurística de la representatividad.

Ejemplos de las respuestas dadas: *"Creo que debe haber una media más exacta", "La opción C es la más razonable, porque está más cerca del 50 % que debe haber de chicos y chicas"*, otro alumno de 18 años dice que deben nacer igual número de chicos que de chicas, pero confunde la fracción que más se acerca a este 50 % *"Elijo la opción B (3/10) porque se ajusta al 50 % ideal entre chicos y chicas"*.

c) Habrá mayor número de varones.

Se basa en el hecho de que la probabilidad de nacer varón es ligeramente superior.

Ejemplos de las respuestas dadas: *"Porque eso no va por probabilidades, puede salir lo que sea que siempre nacerán más varones en un tanto por ciento un poco alto", "Según el índice de natalidad, nacen más niños que niñas"*.

d) Habrá mayor número de niñas.

Ejemplos de esta respuesta: *"El nacimiento de chicas es más abundante", "Es más probable de que sea menor en 10 nacimientos el número de niños que de niñas", "La mayoría de las veces nacen menos niños", "Elijo la opción B porque no hay demasiados chicos y hay bastante probabilidad del nacimiento de chicas", "El porcentaje de chicas es mayor"*.

e) *Por su experiencia*.

Ejemplos de esta respuesta: *"Pienso que lo que se ve en la calle es la proporción más correcta, ya que no soy un cromosoma","Es lo más frecuente en la realidad"*.

Finalmente hemos incluido los que no contestan o no dan un argumento.

La mayor parte de los alumnos cree que no es posible predecir el número de niños que nacerán, razonando según el "enfoque en el resultado aislado" (categoría a). Otro porcentaje importante considera más probable que el número de varones y hembras sea aproximadamente el mismo, lo cual indica una correcta percepción del fenómeno de la convergencia de las frecuencias relativas (categoría b). El argumento correcto es elegido en mayor proporción por los alumnos de 18 años, mientras que los de catorce dejan en mayor proporción el argumento en blanco, siendo las diferencias estadísticamente significativas (χ^2=29.073; g.l.=4 ; p<0.0001, agrupando las categorías d y e).

Al considerar la consistencia entre la opción al ítem y el argumento dado, observamos que las respuestas a) y b) se asocian con la elección incorrecta y la d) con la correcta. Las diferencias fueron estadísticamente significativas (χ^2=104.503; g.l.=4, p<0.0001, agrupando las categorías d y e).

Finalmente, estudiamos la posible asociación entre las respuestas a los ítems 7.1 y 7.2. De los que dan la respuesta correcta en el ítem 7.1, el 42.9% da la respuesta correcta en el segundo y un 57.1% una respuesta incorrecta. De los que dan la respuesta incorrecta en 7.1, sólo el 38.1% da una respuesta correcta a 7.2 y el resto una respuesta incorrecta. Hay, por tanto, una asociación entre las respuestas a los dos ítems, que fue estadísticamente significativa (χ^2=22.208, g.l.=4 p=0.0002). Ello nos autoriza a pensar que estos 30 alumnos que dan la respuesta correcta a ambos ítems, presentan una concepción correcta de la convergencia, mientras que el resto de los que dan la opción correcta solo a un ítem aplicarían uno de los razonamientos incorrectos que hemos descrito.

Ítem 8:
8.1.- Cuando lanzamos dos dados simultáneamente:
a.- Hay las mismas posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
b.- Hay más posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
c.- Hay menos posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
d.- Es imposible saberlo.
Elige la opción que crees más adecuada y razona tu respuesta.

Los resultados en este ítem parecen desalentadores a la hora de valorar el razonamiento combinatorio de los alumnos. Tan solo el 17.3% de los alumnos dan la respuesta correcta. Los alumnos piensan, en su mayoría, que es imposible saber la respuesta a esta pregunta, es decir, se declaran incapaces de aplicar la regla de Laplace, probablemente por dificultad de enumeración del espacio muestral, incluso en este caso tan sencillo. Otros generalizan indebidamente la regla de Laplace, subiendo incluso este porcentaje en los alumnos de 18 años. Hay una ligera mejora del razonamiento combinatorio con la edad y aparecen también diferencias en el porcentaje de los alumnos en las opciones a) y d). Las diferencias fueron estadísticamente significativas (χ^2=8.130; g.l.=3, p=0.0434, agrupando las categorías c y e).

Hemos analizado también los argumentos en este ítem, clasificándolos en los siguientes tipos:

a) Es impredecible o depende de la suerte.

Análogo al comentado en casos anteriores. Las respuestas típicas son: "*No lo sabemos, los juegos son al azar"; "Depende de la fuerza, la posición, etc..., en que tires los dados y es imposible saber todo con exactitud"; "Por mucho que haga pruebas y lance los dados, jamás podré asegurar lo que saldrá"*.

b) Es equiprobable.

Puesto que los resultados elementales son equiprobables, también se consideran equiprobables los resultados de los experimentos compuestos. Se observa aquí una falta de discriminación entre los sucesos simples y compuestos del espacio muestral producto.

Ejemplos de respuestas: '*Tienen las mismas posibilidades (la opción elegida, la A) al igual que cualquier número"; "Porque la posibilidad de que en un dado salga un cinco y en el otro un seis es la misma que si en un dado sale un cinco y en el otro cinco"; "Es imposible saberlo porque cualquier posibilidad es igual de probable que otra"; "Hay las mismas posibilidades de obtener dos veces el mismo número que de obtener dos números distintos"*.

c) Razonamiento de tipo combinatorio.

Estos tipos de argumentos son poco utilizados por los alumnos y las respuestas más usuales que emplean están relacionadas con el concepto laplaciano de probabilidad, más que con el razonamiento combinatorio y siendo todos los que emplean este tipo de argumento los alumnos mayores.

Ejemplos de estas respuestas son: "*Elige la opción B porque la probabilidad de que salga un 5 y un 6 es de un 33 % y la de que salgan dos 5 es de 8,5 %";" Porque dos veces un 5 requiere 1/36 de posibilidades, mientras que un 5 y un 6 tiene 1/18*".

d) Es más difícil que se repita el número.

Este argumento es muy usado por ambos grupos de alumnos, empleando diferentes respuestas tipos como por ejemplo: "*Al ser dados distintos, hay más posibilidades de que salga un 5 y un 6 que dos veces el 5, ya que si en un dado solo hay un 5 , en los demás se puede sacar cualquier número mientras que es muy raro que salga un 5 en cada uno de los dados"; "Al obtener un 5 y un 6 lo podemos obtener en cualquiera de los dos dados y así hay más posibilidades que al obtener el mismo número en los dos, sea el número que sea"; "Aparentemente es igual de probable, pero es cierto que en la práctica suele salir más un 5 y un 6 que dos veces el 5"; "Hay más posibilidades de obtener dos números diferentes antes que dos iguales"*.

e) Por experiencia.

Aunque a veces completan sus justificaciones de otros argumentos diciendo que les suele pasar así a ellos, este argumento tiene entidad propia como para justificar las opciones dadas y sus respuestas tipo suelen ser: "*Porque así es el dado y así me sale a veces";" Porque cuando juego al parchís, me suele pasar eso, aunque no siempre"; "Porque juego y siempre me sale o un 5 o un 6"*.

Los resultados del análisis nos indican que la mayor parte (91 alumno de 14 años y 53 de 18 años) argumentan que el resultado es impredecible (categoría a), es decir el "enfoque en el resultado aislado". Aunque esto es cierto para cada caso particular, sí podremos predecir las frecuencias de los diversos resultados a la larga. Otros (23 de los menores y 19 de los alumnos de 18 años) dan un argumento de representatividad (categoría d). También se apoyan en la equiprobabilidad de los resultados o sesgo de la equiprobabilidad (categoría b). Sólo 5 alumnos usan un argumento de tipo combinatorio.

Al comparar los dos grupos, vemos que los de 14 años emplean preferentemente el argumento de impredecibilidad, mientras en el otro grupo hay una mayor variedad de argumentos. Las diferencias fueron estadísticamente significativas (χ^2=22.377; g.l.=4 p=0.0001, agrupando las categorías c, e y f).

Al comparar el argumento empleado según que la opción elegida fuese correcta o incorrecta vemos que el argumento de impredecibilidad (categoría a) está exclusivamente ligado a la opción incorrecta. Las diferencias fueron estadísticamente significativas (χ^2=146.255; g.l.=4, p<0.0001, agrupando las categorías c, e y f).

Finalmente comparamos las respuestas a este ítem y al 6 en el que también se requiere razonamiento combinatorio. Los resultados muestran que sólo 22 alumnos dan la respuesta correcta a ambos ítems. Hay una gran dispersión de respuesta, por lo que no aparece una asociación significativa entre las respuestas a estos ítems.

8.2.- Cuando lanzamos tres dados simultáneamente ¿cuál de estos resultados es más fácil que ocurra?

a.- Obtener un 5, un 3 y un 6.

b.- Obtener dos veces el 5 y una vez el 3.

c.- Obtener tres veces el número 5.
d.- Todos estos resultados son igualmente probables.
e.- Es imposible saberlo.
Escribe la opción que has elegido.

8.3 ¿Es alguno de estos resultados menos probable que los otros dos?

En este apartado del ítem 8 bastantes alumnos creen que, o es imposible dar una respuesta a esta pregunta (categoría e) , o bien que todos los casos son equiprobables, (67 alumnos menores y 56 mayores eligen la opción e; 38 menores y 34 mayores eligen la opción d). Un porcentaje apreciable de alumnos, no obstante, da la respuesta correcta (33 menores y 30 mayores). No se observan diferencias significativas entre los dos grupos de edad.

En el estudio de las respuestas a la segunda parte del ítem observamos que una gran proporción da la respuesta correcta, lo cual parece contradecir la respuesta anterior, a menos que hagamos sobre esta pregunta la misma interpretación que hace Konold del "enfoque en el resultado aislado". Los alumnos pudieran estar interpretando la pregunta como que se les pide una predicción sobre el resultado. Hay otro grupo importante de alumnos que piensa que todos los resultados son equiprobables (categoría d). No hay diferencia significativa en los dos grupos de edad.

También hemos estudiado la asociación entre los ítems 6 y 8.2. Sólo 34 alumnos dan la respuesta correcta a ambos ítems. De los que responden correctamente al ítem 6, el 36.6% da también la respuesta correcta al 8.2. La asociación entre los ítems resultó ser estadísticamente significativa (χ^2=35.175; g.l.=6, p<0.0001).

Finalmente, hemos estudiado la asociación entre las respuestas a los ítems 8.1 y 8.2, observamos asociaciones entre algunas categorías:

Opción a) en el ítem 8.1 y d) en el 8.2, que hacen ambas referencia a la equiprobabilidad de los diferentes resultados o sesgo de equiprobabilidad (16,8 % de la muestra).

Opción b) en el ítem 8.1 (más probable obtener un 5 y un 6) y opción a) en el 8.2 (obtener un 5, un 3 y un 6). Razonamiento combinatorio (10,1 % de la muestra).

Opción d) en ítem 8.1 y e) en ítem 2; ambas establecen que es imposible dar una predicción, (33.5 % de la muestra).

Vemos de este modo que un 60.4% de los alumnos son altamente consistentes en sus respuestas, de las que se identifican tres tipos de razonamientos diferentes en estos problemas:

a) Alumnos con capacidad combinatoria, que pueden diferenciar las diversas posibilidades de cada caso presentado.

b) Alumnos que generalizan indebidamente la regla de Laplace, mostrando el sesgo de equiprobabilidad.

c) Alumnos que no son capaces de dar una predicción, interpretando la pregunta en términos del "enfoque en el resultado aislado".

La asociación entre estas respuestas resultó estadísticamente significativa (χ^2=64.675, g.l.=6 p<0.0001). El resto de alumnos ha dado respuestas inconsistentes en estos ítems.

3.6.2. FACTORES SUBYACENTES EN LAS HEURÍSTICAS Y SESGOS DE LOS ESTUDIANTES

En el análisis de las respuestas y argumentos de los alumnos hemos visto cómo, aun cuando los ítems han sido tomados de estudios sobre representatividad o equiprobabilidad, los alumnos no sólo han mostrado razonamientos correctos o estos sesgos, sino también otros diferentes. Entre ellos destacamos el "enfoque en el resultado aislado".

Tabla 3.6.2.1. Matriz de Burt.

	C51	I51	C52	I52	C6	I6	C71	I71	C72	I72	C81	I81	C82	I82	C83	I83
C51	153	0	116	37	39	114	33	120	40	113	21	132	21	132	62	91
I51	0	124	116	112	54	70	37	87	69	55	27	97	42	82	63	61
C52	116	116	128	0	29	99	28	100	31	97	12	116	14	114	47	81
I52	37	112	0	149	64	85	42	107	78	71	36	113	49	100	78	71
C6	39	54	29	64	93	0	31	62	54	39	22	71	34	59	46	47
I6	114	70	99	85	0	184	39	145	55	129	26	158	29	155	79	105
C71	33	37	28	42	31	39	70	0	30	40	14	56	23	47	31	39
I71	120	87	100	107	62	145	0	207	79	128	34	173	40	167	94	113
C72	40	69	31	78	54	55	30	79	109	0	30	79	40	69	59	50
I72	113	55	97	71	39	129	40	128	0	168	18	150	23	145	66	102
C81	21	27	12	36	22	26	14	34	30	18	48	0	28	20	30	18
I81	132	97	116	113	71	158	56	173	79	150	0	229	35	194	95	134
C82	21	42	14	49	34	29	23	40	40	23	28	35	63	0	46	17
I82	132	82	114	100	59	155	47	167	69	145	20	194	0	214	79	135
C83	62	63	47	78	46	79	31	94	59	66	30	95	46	79	125	0
I83	91	61	81	71	47	105	39	113	50	102	18	134	17	135	0	152

Asimismo, han aparecido inconsistencias aparentes en las respuestas de los alumnos, que parecen cambiar el tipo de razonamiento al variar las variables de tarea de los ítems, tales como el contexto. Con objeto de clasificar qué tipos de razonamiento están ligados a los ítems específicos, conviene realizar un análisis global de las respuestas de cada alumno en esta parte de la prueba. Ello permite analizar si existen interrelaciones entre diversas heurísticas y sesgos o, por el contrario, éstos aparecen independientemente unos de otros, incluso en diferentes sujetos. La importancia de este punto se debe a que una independencia entre distintos razonamientos incorrectos obliga al profesor a tener que centrarse en la superación de cada uno de ellos, ya que la mejora de uno de estos razonamientos incorrectos no implicará la supresión de otros sesgos diferentes.

También la existencia de asociaciones entre respuestas correctas o incorrectas a distintos ítems en esta parte de la prueba implicaría la identificación de factores subyacentes que podrían explicar la aparición de los razonamientos incorrectos en los estudiantes.

Por ello, una vez analizados individualmente los ítems, se llevó a cabo un análisis de correspondencias múltiples de las respuestas correctas e incorrectas a cada uno de los apartados de esta parte de la prueba, para lo cual se cruzaron entre sí las respuestas correctas e incorrectas a los apartados 1 y 2 del ítem 5, ítem 6; apartados 1 y 2 del ítem 7 y apartados 1, 2 y 3 del ítem 8. De este modo hemos obtenido la matriz de Burt, que es una extensión de la tabla de contingencia simple. Esta matriz cruza las categorías correctas e incorrectas de todos los ítems y apartados citados (en total 16 categorías) y se presenta en la tabla 3.6.2.1.

Tabla 3.6.2.2. Análisis de la tabla de frecuencias observadas.

INERCIA TOTAL = 0.1753				
EJES	AUTOVALOR	% DE INERCIA	ACUM %	HISTOGRAMA
1	0.073	41.7	41.7	**********************************
2	0.046	26.1	67.7	*********************
3	0.018	10.4	78.2	*********
4	0.012	7.1	85.3	******
5	0.011	6.2	91.4	*****
6	0.008	4.5	95.9	****
7	0.005	2.7	98.6	**
8	0.002	0.9	99.5	*
CHI CUADRADO CON 225 GL = 3108.383				
NIVEL DE SIGNIFICACIÓN = 0.000				

Indicamos mediante C51 la respuesta correcta al ítem 5 apartado 1 y mediante I51 la respuesta incorrecta al apartado 1 del ítem 5. Idéntica interpretación tiene el resto de los códigos. Como variable suplementaria hemos utilizado el curso al cual pertenece el alumno.

En la tabla 3.6.2.2 se incluye la descomposición de la inercia total obtenida mediante el paquete BMDP. Observemos que los tres primeros factores explican el 78.2 % de la inercia total, que nos parece un porcentaje suficiente, por lo que la interpretación se restringirá a estos tres factores.

En la tabla 3.6.2.3 presentamos el resultado del análisis de correspondencias para las distintas categorías, donde podemos observar que la calidad de representación es en general muy alta. No ocurre lo mismo con las categorías de la variable suplementaria

CURSO, (tabla 3.6.2.4) debido a que, como veremos, los dos grupos de alumnos no son discriminados por los factores obtenidos. En consecuencia no hemos encontrado diferencias respecto al curso, en cuanto a estos factores.

Tabla 3.6.2.3. Resultado del análisis de correspondencias para las distintas categorías.

NOMB	MASA	QLT	INR	FACTOR	COR2	CTR	FACTOR	COR2	CTR	FACTOR	COR2	CTR
				EJE 1			EJE 2			EJE 3		
C51	0.064	0.981	0.014	0.001	0.000	0.000	-0.469	0.979	0.308	-0.015	0.001	0.001
I51	0.061	0.978	0.013	-0.015	0.000	0.000	0.448	0.974	0.267	0.002	0.000	0.000
C52	0.058	0.964	0.016	-0.335	0.412	0.089	0.387	0.549	0.189	-0.018	0.001	0.001
I52	0.067	0.937	0.011	0.284	0.492	0.074	-0.270	0.444	0.107	0.004	0.000	0.000
C6	0.041	0.906	0.014	0.400	0.474	0.089	0.105	0.033	0.010	0.281	0.234	0.176
I6	0.084	0.930	0.007	-0.179	0.394	0.037	-0.073	0.066	0.010	-0.087	0.094	0.035
C71	0.032	0.990	0.011	0.227	0.144	0.023	0.095	0.025	0.006	0.379	0.401	0.252
I71	0.093	0.987	0.005	-0.081	0.128	0.008	-0.063	0.077	0.008	-0.140	0.395	0.100
C72	0.049	0.706	0.013	0.408	0.627	0.112	0.050	0.009	0.003	0.108	0.044	0.031
I72	0.076	0.722	0.009	0.262	0.557	0.072	0.120	0.117	0.024	-0.056	0.025	0.013
C81	0.022	0.939	0.016	0.657	0.569	0.128	0.125	0.021	0.007	-0.249	0.082	0.074
I81	0.103	0.934	0.004	-0.141	0.554	0.028	-0.053	0.079	0.006	0.044	0.054	0.011
C82	0.028	0.871	0.018	0.695	0.762	0.188	0.205	0.067	0.026	-0.136	0.029	0.029
I82	0.097	0.883	0.006	-0.207	0.716	0.057	-0.089	0.134	0.027	0.031	0.016	0.005
C83	0.056	0.968	0.010	0.259	0.377	0.052	0.045	0.011	0.003	-0.227	0.290	0.159
I83	0.069	0.968	0.008	-0.216	0.377	0.044	-0.078	0.049	0.009	0.174	0.245	0.114

Tabla 3.6.2.4. Resultado del análisis de correspondencias para las filas suplementarias.

NOMBRE	QLT	FACTOR	COR2	FACTOR	COR2	FACTOR	COR2
		EJE 1		EJE 2		EJE 3	
BUP	0.302	-0.028	0.046	-0.035	0.069	-0.040	0.092
COU	0.422	0.023	0.060	-0.011	0.014	0.023	0.064

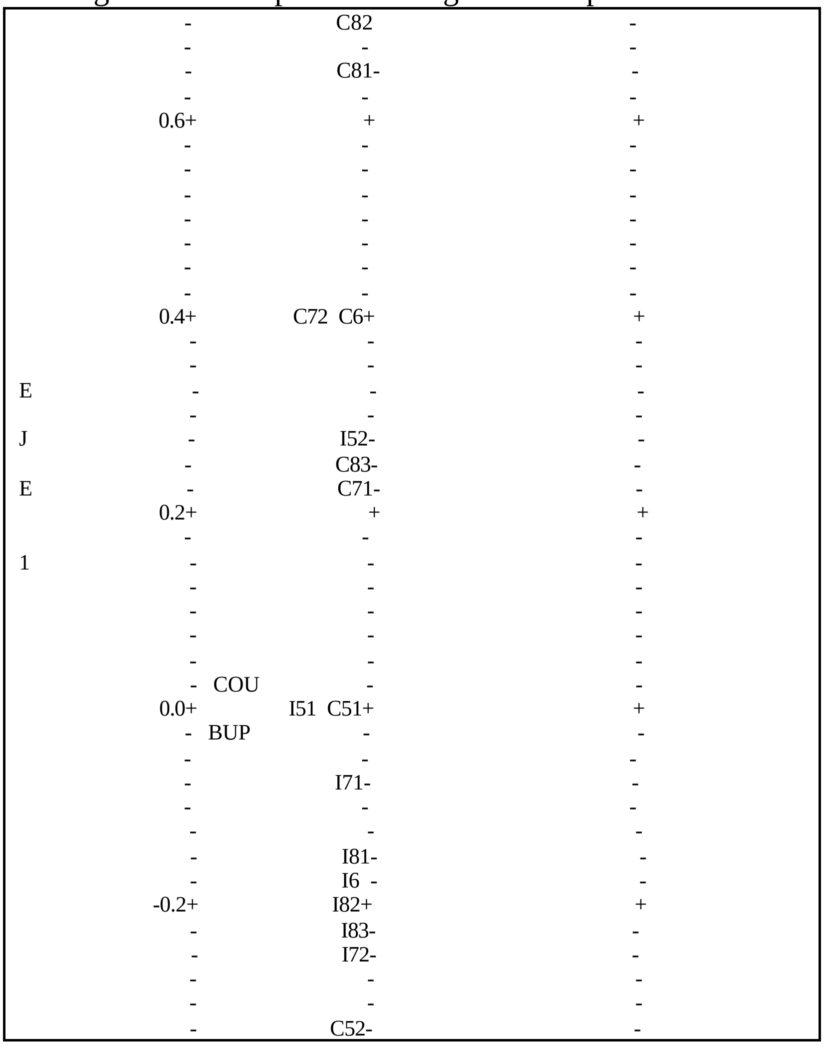
Primer factor:

Índice de dificultad y razonamiento combinatorio (Figura 6.1).

Este es un factor bastante general al que contribuyen la mayoría de las categorías. En efecto, encontramos valores moderados del cuadrado del coeficiente de correlación para todas las categorías, salvo para las que corresponden a las respuestas correctas e incorrectas del ítem 5.1 y del ítem 7.1.

Al analizar el ítem 5, vemos que es el único en el que la respuesta es que todas las opciones son equiprobables. Además, se pide comparar la probabilidad de sucesos simples, mientras que en el resto de los ítems se pide comparar la probabilidad de sucesos compuestos. En el ítem 7.1 se pide la probabilidad de un suceso compuesto. Sin embargo, el tamaño de la muestra es demasiado grande para aplicar un razonamiento combinatorio directo, lo que puede explicar que tampoco contribuya a este factor. En consecuencia, creemos que este factor podría representar la capacidad de aplicar un razonamiento combinatorio para comparar diversas probabilidades.

Figura 6.1. Representación gráfica del primer factor.



En la parte positiva del eje, predominan principalmente las respuestas correctas y la parte negativa en las incorrectas. En consecuencia este eje marca el índice de dificultad de las preguntas que se ordenan aproximadamente a lo largo del eje según dicho índice.

Los ítems que contribuyen a este factor, tanto en su parte positiva (categorías correctas), como en su parte negativa (categorías incorrectas) son aquellos en los que el alumno debe comparar probabilidades de sucesos compuestos en un experimento producto de tres experimentos simples:

En la parte positiva: C82 (x = 0.695; r^2 = 0.762); C81 (x = 0.657; r^2 = 0.569); C6 (x = 0.400; r^2 = 0.474); C72 (x = 0.408 ; r^2 = 0.627) y C83 (x = 0.259; r^2 = 0.377).

En la parte negativa: I81 (x = - 0.141 ; r^2 = 0.554); I6 (x =- 0.179 ; r^2 = 0.394); I82 (x = -0.207 ; r^2 = 0.716); I83 (x = -0.216 ; r^2 = 0.377) y I72 (x = -0.262; r^2 = 0.557).

Hay dos ítems que tienen un comportamiento diferente:

- El ítem 7.1, que sin duda, debido a que el gran tamaño de la muestra, hace que los alumnos no puedan aplicar la enumeración para comparar las posibilidades de los distintos sucesos. Este ítem no tiene una correlación alta con este eje.
- El ítem 5.2, que aparece contrapuesto al resto y el ítem 5.1, que no está afectado por esta factor. Probablemente ello es debido a la confusión señalada en Shaughnessy y Batanero (1995) entre el suceso simple (por ejemplo CCCXX) y el compuesto (obtener exactamente tres caras) en los ensayos binomiales. De este modo obtenemos: I52 (x = 0.284; r^2 = 0.492) y C52 (x = - 0.335; r^2 = 0.412). El ítem 5.1 aparece en el origen de coordenadas.

Como consecuencia, observamos que un primer factor que contribuye al empleo de heurísticas es la falta de capacidad de enumeración sistemática. Por el contrario, la aplicación de un razonamiento de tipo combinatorio contribuye a la respuesta correcta al ítem. Este razonamiento combinatorio se opuso a la vez al sesgo de equiprobabilidad y al "enfoque en el resultado aislado", que fueron las principales causas de razonamiento incorrecto en los ítems 6; 8.1; 8.2; 8.3 y 7.2 (que son los que más han contribuido a este factor), como se vio en el análisis de los argumentos de los alumnos.

Segundo factor:

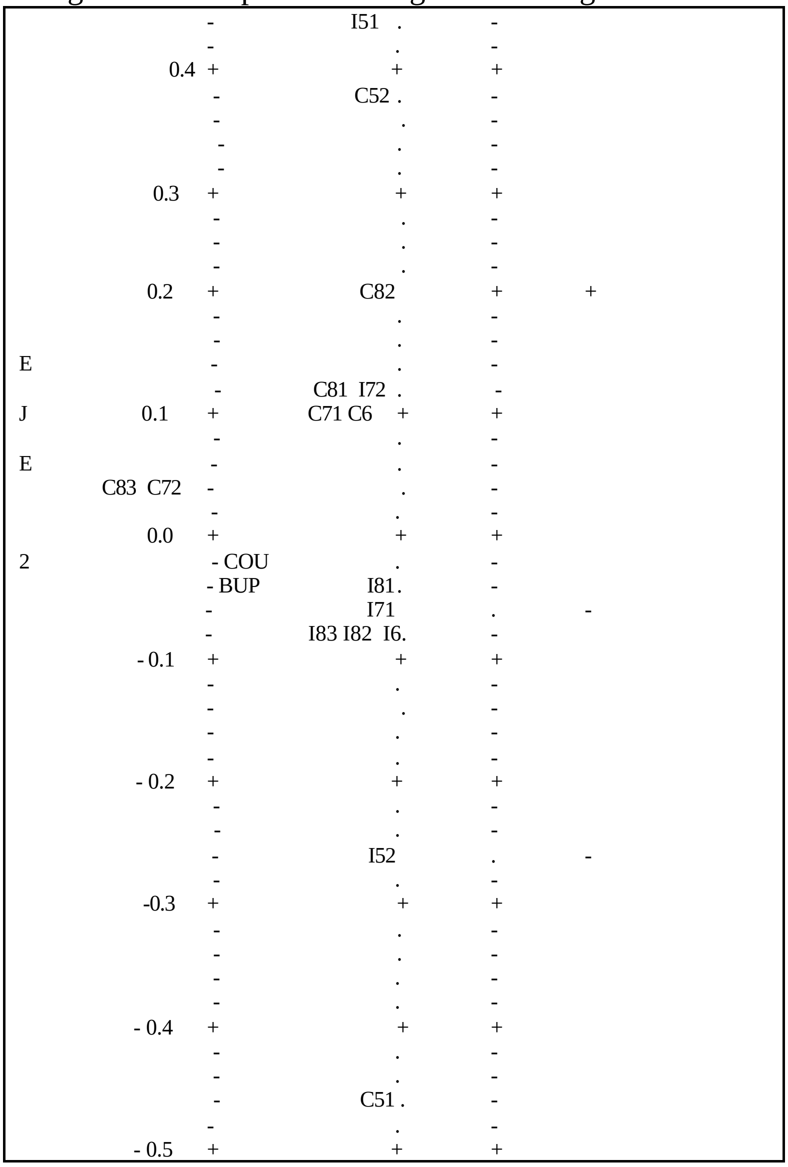
Introducción de elementos subjetivos en la asignación de probabilidades. (Figura 6.2).

En este caso, es el ítem 5 el que define este factor, como se observa en las fuertes contribuciones y correlaciones tanto de las respuestas correctas como de las incorrectas en los dos apartados del ítem. Observamos en consecuencia el comportamiento diferenciado de este ítem, en el cual las probabilidades que se comparan se refieren a sucesos simples en el experimento compuesto.

Todos los casos para los que se pide comparar la probabilidad son equiprobables. En caso de dar una respuesta errónea, el alumno introduce algún elemento subjetivo en la asignación de probabilidades. Esto se ha confirmado en el análisis de los argumentos de los alumnos que hemos presentado en la sección anterior. Entre estos elementos, destacamos la búsqueda de la representatividad local, las frecuentes alternancias y el rechazo de regularidad en el patrón global. Por otro lado, los apartados 1 y 2 del ítem aparecen contrapuestos: (C51; x= - 0,469; r^2 = 0,979); (C52; x= 0,387; r^2 = 0,549); (I51; x= 0,448; r^2 = 0,974); (I52; x= -0,27; r^2 = 0,444).

Ello quiere decir que los elementos subjetivos introducidos en la asignación de probabilidades no han sido los mismos para elegir el suceso más probable y el menos probable, lo que coincide con lo expuesto en Konold *et al.* (1993), quienes encontraron un cambio entre el tipo de respuestas dadas al apartado 1 y 2 de este ítem por los mismos alumnos.

Figura 6.2.   Representación gráfica del segundo factor.



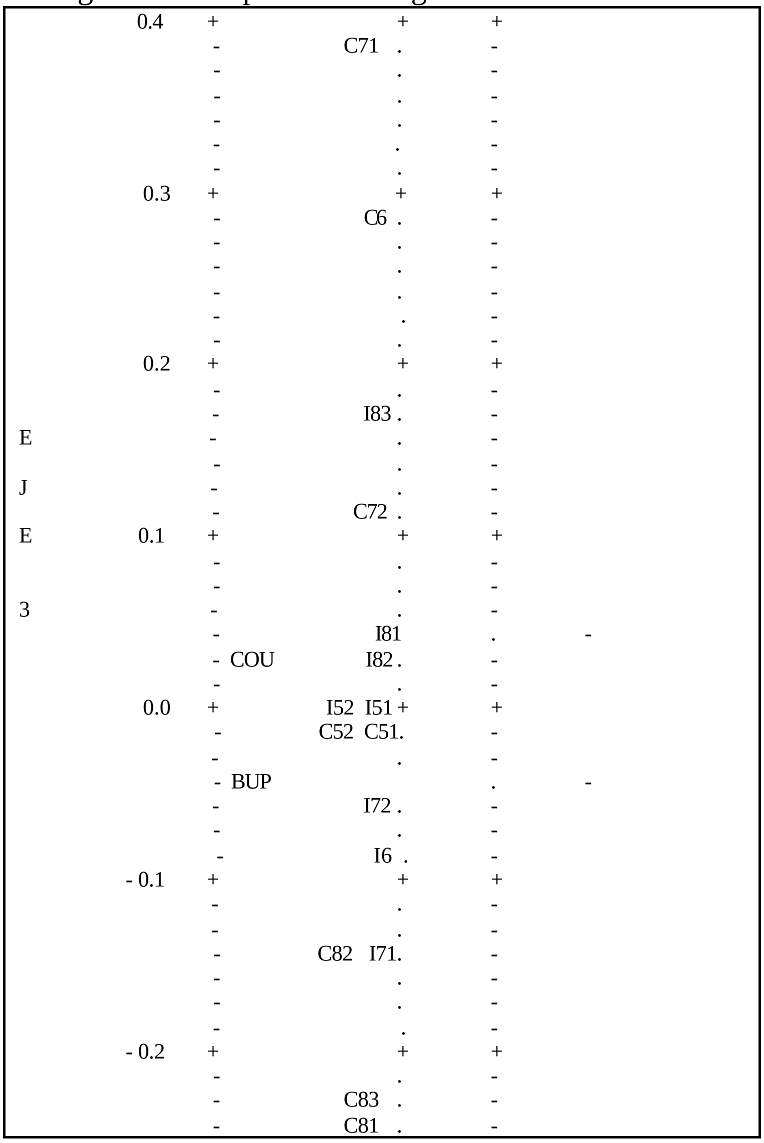
Tercer Factor:

Variabilidad como función inversa del tamaño muestral. (Figura 6.3).

Finalmente, el tercer factor está casi exclusivamente marcado por el ítem 7.1, en el cual los alumnos han de comparar la variabilidad del valor medio en función del tamaño muestral: (C71; x = 0,379; r^2= 0.401) y   (I71; x = -0,140; r^2= 0,395).
Debido a que éste es elevado, los alumnos no pueden aplicar la enumeración para obtener la solución del problema.

Aparece una ligera asociación con otros ítems, aunque la correlación es muy débil. Así, la respuesta positiva al ítem 6: (C6; $x = 0.281$; $r^2 = 0{,}234$) parece influir en la respuesta positiva al ítem 7.1. El razonamiento combinatorio contribuye a apreciar la disminución de la variabilidad muestral en función del tamaño de la muestra. El ítem 8.3 aparece en sentido contrapuesto: (C83; $x = -0{,}227$; $r^2 = 0{,}290$) y (I83; $x = 0{,}17$; $r^2 = 0{,}245$) debido a que los alumnos no han aplicado los mismos criterios para elegir el suceso menos probable y el más probable, de acuerdo con lo expuesto por Konold *et al.* (1993).

Figura 6.3. Representación gráfica del tercer factor.



Finalmente, destacamos que la variable curso no ha tenido influencia en ninguno de los factores, por lo que deducimos que la edad de los alumnos no supone diferencias en la estructura de las respuestas de los alumnos en este apartado del cuestionario.

Como resumen de esta parte del cuestionario, destacamos la dificultad generalizada de los ítems en los que hemos apreciado el empleo de diversas heurísticas y la existencia de sesgos. Destaca particularmente el "enfoque en el resultado aislado" y, en menor medida, la representatividad y equiprobabilidad. Estos sesgos parecen ser debidos a la falta de capacidad combinatoria de algunos estudiantes.

El análisis de correspondencias revela también la independencia entre estos tipos de razonamiento incorrecto, lo que sugiere la necesidad del diseño de situaciones didácticas específicas para la superación de cada uno de ellos por parte de los estudiantes.

3.7. INTERPRETACIÓN DE LA PROBABILIDAD FRECUENCIAL

3.7.1. ANÁLISIS DE LOS ÍTEMS

.

Esta parte del cuestionario evalúa la interpretación que hacen los alumnos de los enunciados frecuenciales de probabilidad. La comprensión de este tipo de enunciados es fundamental para que el nuevo enfoque de enseñanza de la probabilidad sugerido en los diseños curriculares pueda ser implementado con éxito. Nos hemos basado en las investigaciones de Konold, aunque se ha incluido un ítem escrito por nosotros mismos, en el cual se varía el contexto, conservando el tipo de preguntas. Esta última parte se compone de dos ítems, cada uno de los cuales tiene una serie de apartados. Al igual que en las otras dos partes de la prueba, procedemos a un análisis que consta de:

a)Opciones elegidas en cada ítem y argumentos en que apoyan sus respuestas en los dos grupos de alumnos.
b)Consistencia entre la opción elegida al ítem y el argumento en que se apoya.
c)Consistencia entre preguntas relacionadas.

El análisis estadístico se limita de nuevo al estudio de las frecuencias y estadístico χ^2, agrupando filas o columnas conceptualmente semejantes en el caso de que las frecuencias esperadas no cumplan las condiciones de aplicación de esta prueba. A continuación presentamos los resultados.

9.1.- El Centro Meteorológico de Springfields quiso determinar la precisión de su meteorólogo. Buscaron sus registros de aquellos días en los que el meteorólogo había informado que había un 70 por ciento de posibilidades de lluvia. Compararon estas predicciones con los registros que indicaban si llovió o no en esos días en particular.

La predicción del 70 por ciento de posibilidades de lluvia puede considerarse muy precisa, si llovió:

a) Entre el 95 por ciento y el 100 por ciento de esos días.
b) Entre el 85 por ciento y el 94 por ciento de esos días.
c) Entre el 75 por ciento y el 84 por ciento de esos días.
d) Entre el 65 por ciento y el 74 por ciento de esos días.
e) Entre el 55 por ciento y el 64 por ciento de esos días.

Elige la opción que crees es la más apropiada.

En una interpretación normativa de la probabilidad, la opción correcta es la d). Sin embargo, los sujetos que presentan el "enfoque en el resultado aislado" elegirán típicamente una de las respuestas a), b) o c), según los resultados de Konold.

La comprensión de la probabilidad frecuencial en esta pregunta parece razonable, ya que una gran proporción de alumnos ha elegido los valores próximos al 70 % (opción d, que ha sido elegida por el 43.0 %). Sin embargo, una proporción bastante notable de alumnos eligen opciones sesgadas, que indican que la frecuencia esperada de lluvia se sitúa por encima del 75 por ciento.

En concreto un 39.7 % de alumnos (opciones a, b, c) espera que la frecuencia relativa de días de lluvia sea mayor que la probabilidad dada. Un 20.9 % (opciones a, b) estima la frecuencia relativa de días de lluvia por encima del 85 % de días de lluvia y un 11.2 % (opción a) los estima por encima del 95 %. Estos alumnos no relacionarían la probabilidad teórica con la frecuencia relativa de días de lluvia, sobreestimando la frecuencia relativa, debido a que es alta la probabilidad de lluvia que se da. Los resultados se explicarían en la tesis de Konold porque los alumnos hacen una interpretación sesgada del enunciado de la pregunta, creyendo que deben adivinar lo que ocurrirá en un solo ensayo, en vez de concentrarse en la predicción de una serie de sucesos.

También se han dado algunos casos en que el alumno estimaría la frecuencia a la baja, aunque el porcentaje es bastante menor que el que sobreestima la frecuencia de días de lluvia. Todos estos alumnos pueden tener dificultades en la interpretación y estimación de probabilidades usando el enfoque frecuencial.

Al comparar los dos grupos, observamos que la interpretación correcta ha mejorado con la edad. Mientras que el 34.7% de alumnos de 14 años da la respuesta correcta y el 46.3% una estimación por encima del 75 por ciento para la frecuencia relativa esperada, en los alumnos de 18 años estos porcentajes son el 52.3% y 32.4% respectivamente. La significación estadística de estas diferencias ha sido probada mediante el contraste Chi cuadrado de homogeneidad de muestras, obteniéndose un valor χ^2=10.881 con 4 g.l. (p=0.0279), suprimiendo los que no contestan. Sin embargo, es importante aún el número de alumnos de 18 años que interpretan incorrectamente un enunciado frecuencial de probabilidad.

9.2.- Supongamos que este hombre del tiempo dice que mañana hay un 70 por ciento de posibilidades de lluvia y mañana no llueve. ¿Que conclusión sacarías sobre su predicción de que había un 70 por ciento de probabilidades de lluvia?

La segunda parte del ítem ha sido también tomada de las investigaciones de Konold y Garfield (1993) y Konold (1989), (1991). Se trata de confrontar a los alumnos con una situación no prevista, para ver si mantienen un argumento coherente con la opción elegida en la primera parte del ítem. Los argumentos dados a este pregunta han sido clasificados según el siguiente esquema de codificación:

a) Cae dentro del 30 % de probabilidades.

Recogemos en este argumento el caso de los alumnos que piensan que el pronóstico del hombre del tiempo era correcto, pero, debido al 30% de posibilidades en contra de la lluvia, el suceso que ha ocurrido cae dentro de estas posibilidades.

Ejemplos de este tipo de respuestas son las siguientes: "*El 30% de que no llovería, aunque sea menor, ha sido el verdadero, lo que demuestra que no hay nada seguro. Nos podemos acercar, pero nunca es seguro"; "Pues que como existía un 30% de que no llovería, se ha cumplido"; "Que se ha equivocado un poco, porque había un 30% de no llover, y no llovió".*

b) Explicación de tipo causal para el hecho de que no lloviese.

Estos alumnos creen que debiera llover, ya que las probabilidades del 70% son suficientemente elevadas para asegurar que el hecho ocurrirá. Entrarían en el patrón descrito por Konold del "enfoque en el resultado aislado" y buscan una explicación de tipo causal al fallo en su predicción: "*Todavía puede llover, el día no ha finalizado", "Que lo más seguro es que llueva"; "Una racha de viento se llevó las nubes"*. Hay que tener en cuenta que un enfoque probabilístico formal no niega necesariamente la existencia de mecanismos causales subyacentes (Batanero y Serrano, 1995). El cálculo de probabilidades adopta una posición por la cual se ignoran los posibles mecanismos causales, centrándose en las regularidades que ocurren en una serie de ensayos independientes de estos agentes. Sin embargo en el "enfoque en el resultado aislado" se intenta alcanzar la predicción a partir de posibles esquemas causales. Puesto que para estos sujetos, 70% se interpreta como seguridad, la no coincidencia debe deducirse del análisis de los patrones (causas) que la producen y no de los datos de las frecuencias.

c) Se equivocó, debería llover el 100 % de los días.

Como en el caso anterior, los sujetos manifiestan una interpretación incorrecta de la probabilidad frecuencial, llegando al punto de pensar que el pronóstico era equivocado.

Este caso presenta abundantes ejemplos y como muestra presentamos los siguientes: "*Pudo equivocarse, pues había muchas posibilidades para ello"; "Que no consideró mejor la probabilidad de que no lloviera y se equivocó"; "Que sus cálculos están mal hechos, pues habiendo calculado que hay mayores posibilidades de lluvia, más del doble, después no llueve, demuestra que se equivocó".*

d) Sujetos que creen imposible sacar conclusiones.

Son los sujetos que creen que el carácter aleatorio del experimento lo hace imposible de controlar o predecir, ni siquiera en términos de probabilidades.

Explican el fallo en su predicción por el carácter aleatorio del experimento. Serían los que han asimilado los datos al caso del 50% de ocurrencia, pensando que no puede darse ningún otro tipo de predicción. Y como muestra tenemos los siguientes ejemplos de respuestas: *"Que el tiempo es impredecible"; "Nadie sabe lo que va a suceder, depende del viento, etc..."; "No se puede uno fiar de las predicciones hechas por los aparatos meteorológicos"; "No se puede predecir con toda seguridad y mucho menos si se trata del tiempo, que suele ser inestable"; "Es imposible saberlo con exactitud"; "La probabilidad no se puede identificar con la certeza y las predicciones eran de probabilidad".*

De los resultados obtenidos del análisis de los argumentos se puede observar el contraste del resultado de esta segunda parte del ítem con el de la primera. En este apartado, los alumnos no conciben la lluvia como una cuestión de azar, sino que consideran que el tiempo y su predicción, pese a la asignación probabilística, debe ser una cuestión segura. La mayor parte (44.4%) elige la opción c) en la que se especifica que hubo un error por parte del meteorólogo. Esta es una respuesta típica que Konold ha encontrado en los sujetos que presentan el sesgo del "enfoque en el resultado aislado". Konold denomina característica del "ensayo simple" a la tendencia a concentrarse en el resultado de un solo experimento. Esta tendencia contrasta con la aproximación frecuencial, en la que el objetivo se concentra en una muestra de ensayos. Mientras que en el ensayo simple el objetivo es predecir un resultado, y por tanto, es un proceso de decisión, en el enfoque frecuencial el objetivo es predecir el promedio en una muestra. Es decir, la estimación de la frecuencia de un resultado particular en una serie larga de ensayos.

Otros sujetos (18,4%, respuesta d) creen que es imposible sacar conclusiones sobre el hecho planteado. Finalmente, un grupo importante de alumnos (27,8%, respuesta a) hace una interpretación correcta de la probabilidad frecuencial, alegando que el hombre del tiempo podría estar dentro del 30% de posibilidades de que no lloviese. Este porcentaje es inferior al que dio la respuesta incorrecta.

Al comparar los dos grupos de alumnos, vemos de nuevo la mejora con la edad, especialmente si comparamos los porcentajes de respuestas a las opciones a) y c). La significación estadística de estas diferencias ha sido comprobada mediante el test Chi cuadrado, $\chi^2=11.407$ con 3 g.l. ($p<0.001$), agrupando el argumento b) y los que no contestan.

También se comparan las frecuencias y porcentajes de argumentos en el ítem 9.2, según la opción elegida en el ítem 9.1. En este estudio se observa una mayor proporción del argumento a) correcto (cae dentro del 30 por ciento de posibilidades) en los alumnos que han elegido una opción correcta en la primera parte, aunque eligen con mayor frecuencia la opción c). Por el contrario, los que eligen una opción incorrecta eligen en mayor proporción la c) (se equivocó el meteorólogo) o bien no dan argumento. Las diferencias, sin embargo, no fueron estadísticamente significativas

Ítem 10:

Al inicio del siguiente camino (ver el gráfico en el anexo 2) se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia su alimento situado al final del camino. En el orificio A ponemos pipas y en el B cacahuetes. Según un amigo mío que ha criado muchos hámsteres, el 70 de cada 100 hámsteres prefieren las pipas a los cacahuetes.

10.a ¿A dónde te parece más probable que llegue el hámster? ¿Por qué?

Aunque el enunciado de la segunda parte de este ítem es bastante similar al anterior, el contexto es mucho más familiar al alumno. Además, la información frecuencial se da en términos del tanto por ciento de hámsteres que prefiere un alimento, en lugar de usar el término más técnico de posibilidades o probabilidades.

La mayor parte de los alumnos contesta correctamente a este ítem, incluso los de menor edad, de lo que deducimos que la interpretación directa de un enunciado de probabilidad frecuencial es mucho más sencilla que la pregunta planteada en las investigaciones de Konold. No se observaron diferencias significativas en los dos grupos de alumnos.

Los argumentos de los alumnos en los diferentes apartados de este ítem se clasificaron de acuerdo con un criterio de codificación semejante al del ítem 9.1, que describimos a continuación:

a) Es un hámster del 70 % de posibilidades o es un hámster del 30 % de posibilidades.

En este caso, la justificación no está basada en las apetencias de cada hámster, sino en la probabilidad asignada. Ejemplos de las respuestas dadas para justificar este argumento son: "*Porque la estadística lo recomienda"; "Porque hay más posibilidades y es de ese grupo"; "Es lo más probable"; "Ese es un hámster del 70% de posibilidades, que prefería las pipas"; "Es de la gran mayoría"; "Hay más posibilidades de que el hámster se encuentre entre el 70% de los que prefieren pipas*".

b) Alumnos que buscan una explicación de tipo causal a su predicción.

Puesto que el hámster elige un camino, debe haber una razón - sus preferencias-. No se hace referencia a las probabilidades.

Ejemplos de este tipo de respuestas son los siguientes: "*Es lo que suelen comer más"; "De los hámsteres que he tenido, a todos les gustan más las pipas"; "Les gustan más las pipas y probablemente las haya olfateado"; "Prefieren ese alimento mayoritariamente"; "Al gustarle las pipas se guía por el olfato para llegar a ellas"; "Porque si les gustan las pipas, lo más probable es que vaya a buscarlas primero*".

c) Se equivocó mi amigo.

Alumnos que discuten los datos del problema, poniendo en duda la experiencia del amigo que refiere el ítem.

Son pocos los alumnos que eligen este tipo de argumento y pertenecen al grupo de los alumnos de 18 años, siendo sus respuestas principalmente las siguientes: "*Puede suceder que le gusten las dos cosas o que pertenezca al 30% de los que prefieren los cacahuetes y tu amigo se equivoque"; "En este caso también puede suceder, como en el del meteorólogo, que se equivoque*".

d) Depende del azar.

Puesto que el fenómeno es aleatorio, es impredecible. Por ello, es posible cualquier resultado, a pesar de las probabilidades.

Este argumento lo suelen dar mezclado con otros de los reseñados aquí, pero pondremos las respuestas características de la aleatoriedad de la elección del hámster, siendo estas: "*Es cuestión de gustos y eso depende del hámster que elijamos"; "A no ser que el hámster huela las pipas o los cacahuetes, no sabe a donde ir, depende de la suerte el camino que elija"; "Aunque las posibilidades apunten a las pipas, elegirá el camino que primero vea"; "El no sabe donde hay una u otra cosa y lo que elija depende de la suerte"; "No todos tiene las mismas preferencias y según el hámster que cojamos, irá a uno u otro"; "Como no lo ve, no puede decidir y elige cualquier camino*".

Se observa que la respuesta elegida con más frecuencia por los alumnos es la b) (43,7%), seguida por la a) (41,8%) y d) (11,6%). Sólo un 41.8% se basan en las probabilidades para hacer su predicción. Al comparar los dos grupos de alumnos, observamos un predominio de la respuesta b) en los de 14 años y del tipo a) en los de 18. Mientras que los primeros tienden atribuir explicaciones de tipo causal, los segundos basan su predicción en la estimación de las probabilidades. Las diferencias fueron estadísticamente significativas. (χ^2=28.954 con 4 g.l. ($p<0.0001$).

Puesto que fueron pocas las opciones incorrectas, no se han clasificado los argumentos según opción correcta o incorrecta en el ítem, ya que las frecuencias observadas no nos permitirían aplicar el contraste Chi cuadrado.

10.b Si hacemos la prueba con un hámster y éste se dirige hacia B ¿piensas que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué?

En total 20 alumnos creen que había una equivocación en las frecuencias dadas. En definitiva se está razonando aplicando el "enfoque en el resultado aislado". Hay una mayoría de alumnos, sin embargo, que da una respuesta aparentemente correcta y la proporción aumenta con la edad de los alumnos. Las diferencias entre los dos grupos fueron estadísticamente significativas, (χ^2=8.39 con corrección de continuidad y 1 g.l.; p=0.001), desechando la opción no contesta.

Los argumentos en este ítem tienen unos tipos de respuestas análogos a los del apartado a) del mismo ítem. Un porcentaje apreciable de alumnos (40.5 %) da el argumento correcto, basándose en que una probabilidad del 30 por ciento implica que el suceso puede ocurrir y no sería demasiado raro. Sin embargo este porcentaje es mucho menor que el dado por la respuesta correcta, lo que indica la conveniencia de analizar los argumentos de los alumnos. También aparecen aquí de nuevo los casos en que los alumnos emplean sus teorías previas sin guiarse por los datos objetivos (respuesta b). Por último otro grupo amplio de alumnos aplica el "enfoque en el resultado aislado" (respuesta c; 31.8 %) o cree que, al ser el suceso aleatorio podría ocurrir cualquier cosa, independientemente de las probabilidades (respuesta d; 4.6 %). Al comparar los dos grupos de alumnos vemos una diferencia muy notable entre las proporciones de respuesta a) que es correcta y c) que es incorrecta, siendo la primera superior al 50% en los alumnos de 18 años. Las diferencias fueron estadísticamente significativas (χ^2=23.523 con 3 g.l., p=0.00003). No obstante, resulta preocupante el alto porcentaje de alumnos que manifestarían lo que Konold denomina "enfoque en el resultado aislado".

Puesto que fueron pocas las opciones incorrectas, no se han clasificado los argumentos según opción correcta o incorrecta en el ítem, ya que las frecuencias observadas no nos permitirían aplicar el contraste Chi cuadrado.

10.c Si hacemos la prueba con 10 hámsteres y 3 de ellos se dirigen a B (eligen los cacahuetes), ¿pensarías que mi amigo estaba equivocado? ¿Por qué?

La opción correcta es que no, siendo ésta la mayoritaria. Las diferencias fueron estadísticamente significativas. (χ^2=5.541 (corrección de continuidad) con 1 g.l., p<0.0186), desechando las respuestas en blanco.

Además de los argumentos ya descritos, aparecieron los siguientes:

e) Se mantiene la proporción.

La respuesta se basa en el parecido de la proporción muestral y la poblacional. Aunque la respuesta es correcta, puede tener encubierto el empleo de la heurística de la representatividad. Ejemplos de respuestas que justifican este argumento son: "*El resultado aunque parece casual ha sido igual que el predicho"; "A esos tres le gustan más los cacahuetes y a los otros siete las pipas, como ya se había dicho"; "Había acertado aunque los números fuesen menores*".

f) Hay pocos hámsteres.

El tamaño de la muestra no permite obtener conclusiones. La mayoría de los alumnos de este caso responden que no lo saben, no dan una repuesta o que sucede así porque sí. "*Hay pocos datos*".

La mayor parte de los alumnos han dado un argumento correcto e) o a) ; es decir, se basan en que el caso se ajusta exactamente a las probabilidades teóricas. Los sujetos que argumento b) y f) creen que el suceso es impredecible o se guían por sus teorías previas. Las diferencias fueron de nuevo significativas. χ^2=14.804 con 4 g.l. (p=0.005), agrupando las categorías c) y f). Los alumnos de 18 años eligen en mayor proporción las respuestas a) y e) mientras que los de 14 eligen las b) y d) (impredecibilidad y explicaciones causales en mayor medida.

Puesto que fueron pocas las opciones incorrectas, no se han clasificado los argumentos según opción correcta o incorrecta en el ítem, ya que las frecuencias observadas no nos permitirían aplicar el contraste Chi cuadrado.

3.7.2. FACTORES SUBYACENTES EN LA INTERPRETACIÓN FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD

Finalmente, nos ha parecido interesante estudiar la consistencia entre las repuestas correctas/incorrectas en el ítem 9 y los tres apartados del ítem 10, para lo cual incluimos en la Tabla 7.10 la Matriz de Burt correspondiente. Esta tabla se ha utilizado como matriz de datos en el programa BMDP para realizar un análisis de correspondencias múltiples. Al igual que en la segunda parte del cuestionario, se deseaba analizar las posibles asociaciones entre los errores manifestados por los alumnos en la interpretación de la probabilidad frecuencial.

En la Tablas 3.7.2.2, 3.7.2.3 y 3.7.2.4 se incluyen los resultados del análisis. Las codificaciones que hemos utilizado son las siguientes:

A0; B0; C0; I90 Respuestas incorrectas a los apartados A, B, C, del ítem 10 y al ítem 9 .

A1; B1; C1; I91 Respuestas correctas a los apartados A, B, C, del ítem 10 y al ítem 9 .

Tabla 3.7.2.1. Matriz de Burt: Relación entre las opciones elegidas en las tres partes del ítem 10.

	Ítem 9 correcto	Ítem 9 incorrecto	10 A correcta	10 A incorrecta	10 B correcta	10 B incorrecta	10 C correcta	10 C incorrecta
Ítem 9 correcto	119	0	96	23	112	7	108	11
Ítem 9 incorrecto	0	158	130	28	141	17	143	15
10 A correcta	96	130	226	0	204	22	206	20
10 A incorrecta	23	28	0	51	49	2	45	6
10 B correcta	112	141	204	49	253	0	238	15
10 B incorrecta	7	17	22	2	0	24	11	13
10 C correcta	108	143	206	45	238	13	251	0
10 C incorrecta	11	15	20	6	15	11	0	26

Se ha utilizado como variable suplementaria el curso del alumno (BUP o COU). Esta variable no interviene en el análisis, pero sus categorías se proyectan sobre los ejes obtenidos, para estudiar las diferencias entre los dos grupos de alumnos respecto a los factores obtenidos.

Tabla 3.7.2.2. Descomposición de la inercia total.

INERCIA TOTAL = 0.2780				
EJES	AUTOVALORES	% INERCIA	ACUM %	HISTOGRAMA
1	0.132	47.4	47.4	*********************************
2	0.065	23.4	70.7	*******************
3	0.059	21.2	91.9	*****************
4	0.020	7.1	99.0	******
5	0.003	1.0	100.0	*

En la tabla 3.7.2.2. podemos ver que se obtienen 3 factores, cada uno con un porcentaje de inercia superior al 10%. Entre los tres explican en 91.9% de la inercia. Es de destacar que a pesar de ser preguntas referidas a un mismo contenido (la interpretación frecuencial de la probabilidad) no aparece una estructura unidimensional.

Ello quiere decir que, en general las respuestas correctas e incorrectas en los diferentes ítems no están asociadas, como también se deduce del estudio de la matriz de Burt en la tabla 3.7.2.1.

Tabla 3.7.2.3. Resultados del análisis de correspondencias para las variables principales.

FILA	MASA	QLT	INR	FACTR	C0R2	CTR	FACTR	COR2	CTR	FACTR	COR2	CTR
				EJE 1			EJE 2			EJE 3		
A1	0.200	0.961	0.012	-0.036	0.022	0.002	0.224	0.852	0.155	0.072	0.088	0.018
A0	0.045	0.990	0.052	0.106	0.010	0.004	-0.993	0.863	0.685	-0.366	0.117	0.103
B1	0.224	0.776	0.006	0.144	0.744	0.035	-0.006	0.001	0.000	-0.029	0.031	0.003
B0	0.021	0.867	0.067	-1.634	0.852	0.431	0.064	0.001	0.001	0.209	0.014	0.016
C1	0.222	0.875	0.007	0.153	0.793	0.039	0.040	0.055	0.005	-0.028	0.027	0.003
C0	0.023	0.885	0.070	-1.582	0.825	0.437	-0.384	0.049	0.052	0.187	0.011	0.014
I91	0.125	0.973	0.038	0.194	0.124	0.036	-0.167	0.091	0.054	0.480	0.758	0.491
I90	0.140	0.953	0.027	-0.122	0.076	0.016	0.148	0.113	0.047	-0.386	0.764	0.353

En la Tabla 3.7.2.3 podemos ver que la calidad de la representación de las diversas categorías de las variables principales es alta (por encima de 0.77). Podemos también notar la calidad de la representación de las filas suplementarias en la Tabla 3.7.2.4. A continuación interpretamos los factores obtenidos, que representan componentes diferenciados en la interpretación de la probabilidad frecuencial por parte de los alumnos.

Tabla 3.7.2.4. Resultados del análisis de correspondencias para las variables suplementarias.

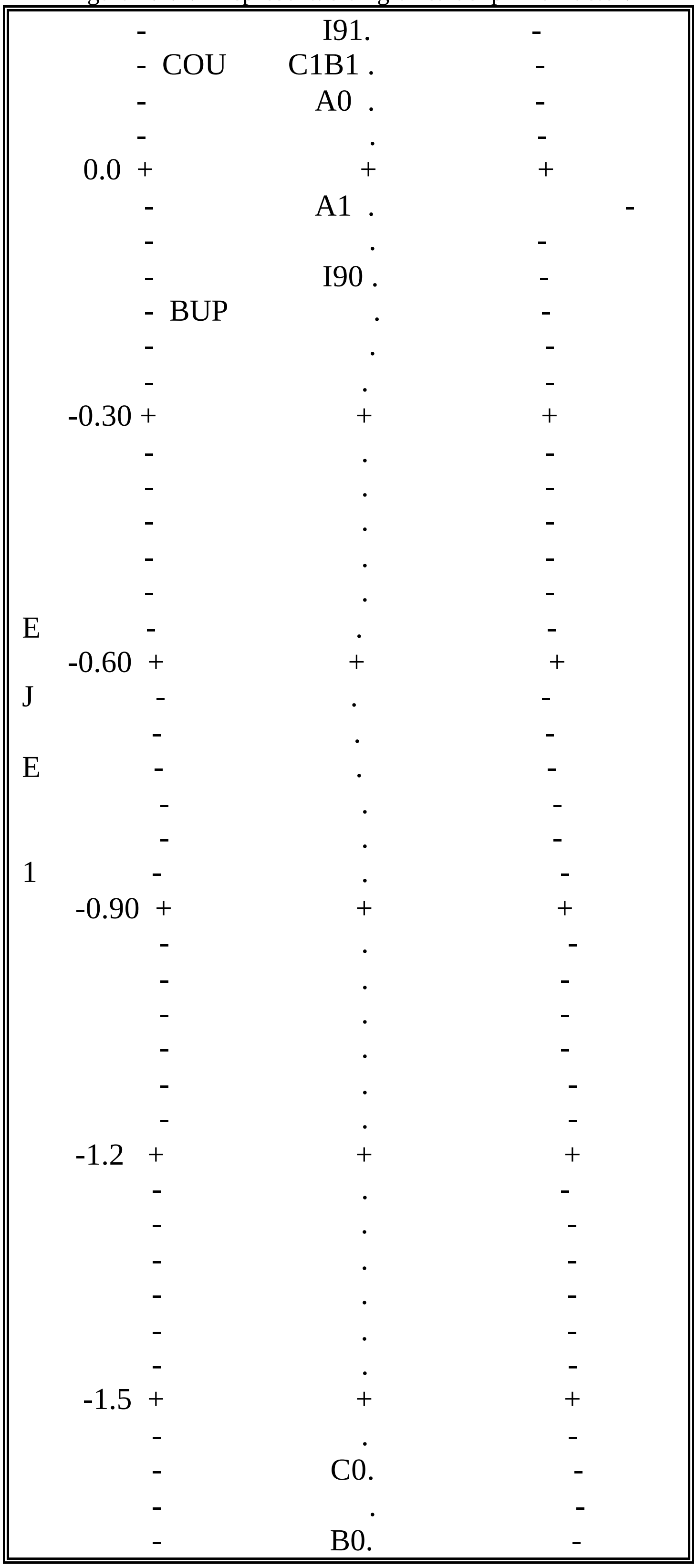
NOMBRE	QLT	FACTOR	COR2	FACTOR	COR2	FACTOR	COR2
		EJE 1		EJE 2		EJE 3	
BUP	0.997	-0.138	0.818	0.022	0.020	-0.061	0.159
COU	0.849	0.136	0.726	-0.024	0.022	0.051	0.101

Primer factor:

Confrontación con la ocurrencia de un resultado poco probable. (Figura 7.2.1)

El primer eje está marcado por la respuesta incorrecta a los apartados b) y c) del ítem 10. En el apartado b) obtenemos x= -1.634, r= 0.852, y contribuye en una proporción del 43.1% a la inercia de este eje. En el apartado c) obtenemos x= -1.582, r= 0.825 y contribuye en una proporción del 43.7% a la inercia de este eje.

Figura 7.2.1.   Representación gráfica del primer factor.



Es decir, el primer factor obtenido separa los sujetos que dan respuestas incorrectas o correctas a estos dos apartados del ítem. Las respuestas incorrectas aparecen con valores negativos altos de las coordenadas y correlaciones en este eje, mientras que las correctas aparecen con correlaciones altas y coordenadas positivas, aunque bajas en el eje: (B1: x= 0.744 r= 0.035) y (C1: x= 0.793 r= 0.039).

Este eje marca, en consecuencia, la coincidencia entre respuestas en los apartados b) y c) del ítem 10, que se refieren a la reacción de los alumnos ante la ocurrencia de un suceso de baja probabilidad. Observando la tabla de Burt, vemos que en estos dos ítems es donde ha habido más acuerdo, tanto en las respuestas correctas como en las incorrectas. Además la respuesta correcta en los dos apartados ha sido mayoritaria en los alumnos, siendo solo 11 los alumnos que dan una opción incorrecta en ambos ítems. Teniendo en cuenta las investigaciones de Konold, los alumnos que dan la respuesta incorrecta piensan que ha habido una equivocación en la estimación de probabilidades. Para ellos, un suceso con baja probabilidad (el 30% en el ítem dado) no debiera ocurrir en un sólo ensayo y aún menos, presentarse en tres ensayos sucesivos, aunque ello caiga dentro de la estimación dada de probabilidades. En nuestro caso son pocos los alumnos que interpretan incorrectamente un resultado inesperado en este ítem, probablemente porque el contacto más familiar les ha facilitado la comprensión de la pregunta planteada.

En la Figura 7.2.1 se reproduce la representación gráfica de este eje. En ella vemos también que hay una separación (aunque no muy acusada) de los dos grupos de alumnos sobre el mismo. También la correlación de los grupos de alumnos con el eje ha sido alta. En consecuencia, vemos cómo, respecto a este factor, hay una mejora al finalizar la enseñanza secundaria, mejora que se pone de manifiesto en el porcentaje de alumnos de 18 años que dio la respuesta correcta.

Segundo factor:

Predicción de la ocurrencia de un suceso, a partir de su probabilidad. (Figura 7.2.2).

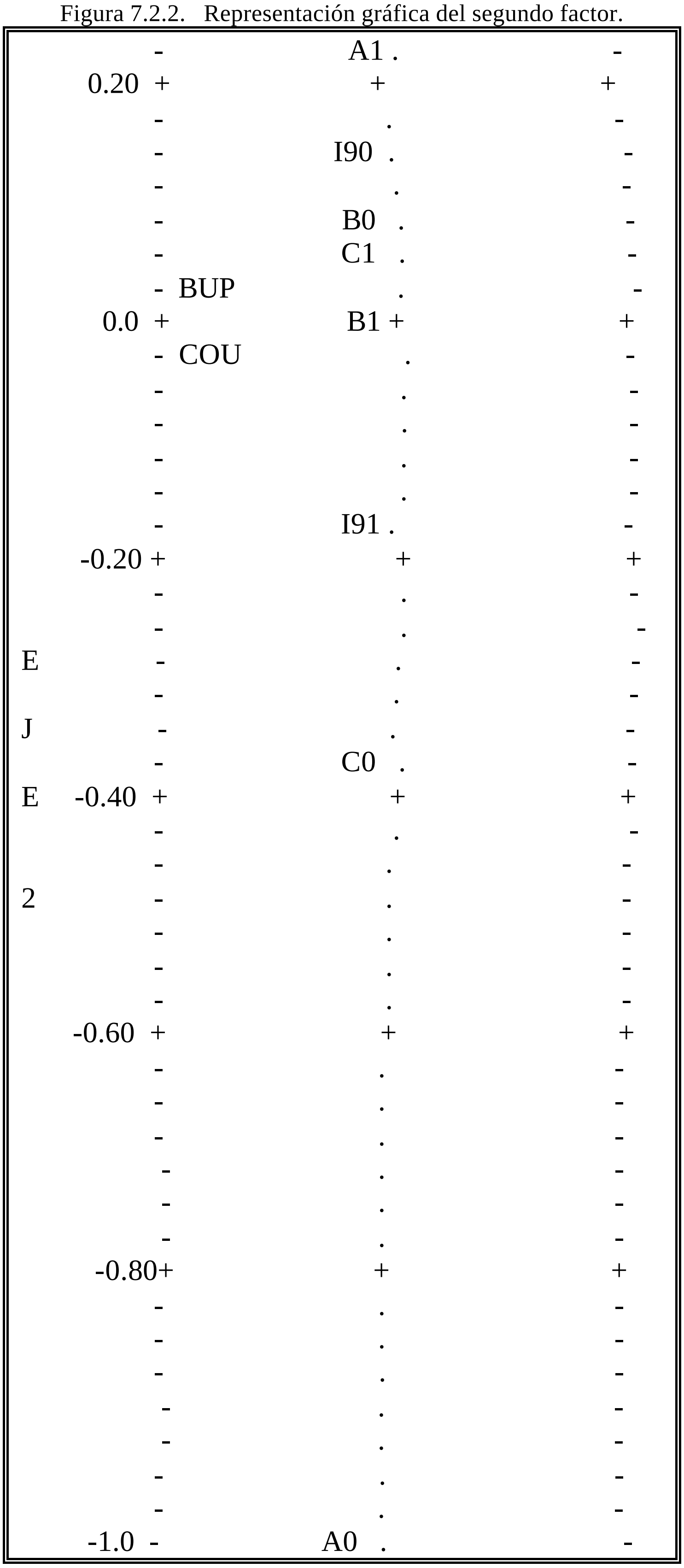
Este segundo factor está prácticamente marcado por el primer apartado del ítem 10, que es el único con fuerte correlación con el factor, habiéndose obtenido las siguientes coordenadas y correlaciones para las respuestas correcta e incorrecta a este apartado: (A1: x= 0.224 r= 0.852) y (A0: x= -0.993 r= 0.863).

La respuesta incorrecta del mismo tiene un peso del 68,5% en la inercia de este eje y la respuesta correcta del 15.5%. Estas dos respuestas aparecen contrapuestas, con correlaciones fuertes y coordenadas de signo diferente en el eje.

Se refiere a la predicción del suceso que ocurrirá, a partir de una información frecuencial de las probabilidades de los dos sucesos posibles. A pesar del alto porcentaje de aciertos, vimos que en este apartado hubo un menor número de contestaciones correctas que el b) o c). Además un grupo importante de alumnos dejó la respuesta en blanco. Creemos que se manifiesta aquí su creencia en la impredecibilidad del suceso, a pesar de poseer información sobre sus probabilidades. Esta hipótesis se ve apoyada por los argumentos que los alumnos dieron en este ítem, muchos de los cuales se basaban en la imposibilidad de predicción o en razones de tipo causal.

En la Figura 7.2.2., se muestra el gráfico de este segundo factor. Observamos en él que no hay diferencia en cuanto al grupo, por lo que en la predicción del suceso, en base a sus posibilidades, no hay diferencia con la edad, ya que en ambos grupos hubo un gran porcentaje de aciertos.

Figura 7.2.2.   Representación gráfica del segundo factor.

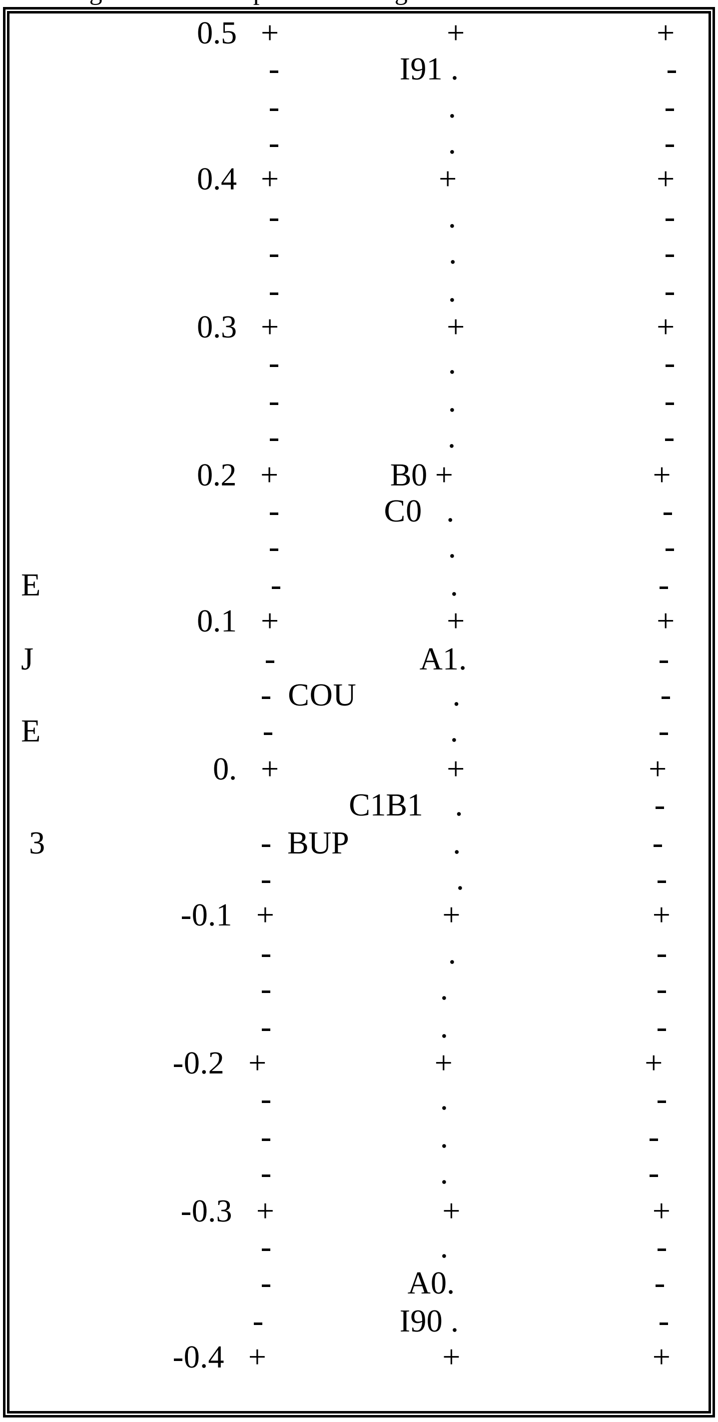


Tercer factor:

Confrontación entre las frecuencias esperadas y la estimación frecuencial de la probabilidad de un suceso. (Figura 7.2.3).

Este tercer factor está prácticamente marcado por el ítem 9.1, que es el único con fuerte correlación con el factor. La respuesta correcta al mismo contribuye a un 49.1% de la inercia del eje y la incorrecta a un 35.3%. Estas respuestas aparecen contrapuestas con correlaciones fuertes y coordenadas de signo contrario sobre el eje.

Figura 7.2.3. Representación gráfica del tercer factor.



En consecuencia este eje marca el grado de acuerdo entre las frecuencias que el alumno espera obtener para el suceso en una serie de ensayos y la estimación frecuencial de la probabilidad de un suceso. En caso de no haber acuerdo, los sujetos sobreestiman las frecuencias probabilidad de un suceso. En caso de no haber acuerdo, los sujetos sobreestiman las frecuencias esperadas, cuando la probabilidad del suceso es alta. Aunque aparentemente este ítem es similar al 10.A, ahora se da al alumno un rango de diferentes frecuencias esperadas entre las cuales ha de elegir uno. En el ítem 10.A tan sólo se le pide que indique si ocurrirá o no el suceso, por lo que el alumno no debe estimar las frecuencias esperadas.

Si observamos la matriz de Burt, es en este ítem donde se da un menor número de respuestas correctas entre todos los que constituyen esta parte de la prueba. Además no hay consistencia entre la respuesta correcta a este ítem y al resto. Por ello define un factor separado de las respuestas al resto de los ítems.

Respecto al grupo de alumnos, no observamos diferencias significativas. No ha habido mejora en la estimación de las frecuencias esperadas con la edad. En la Figura 7.2.3 se muestra el gráfico correspondiente al tercer factor.

3.8. CONCLUSIONES SOBRE SIGNIFICADOS PERSONALES DE LAS SECUENCIAS DE RESULTADOS ALEATORIOS

En este capítulo hemos llevado a cabo un estudio empírico del significado que los alumnos de Bachillerato asignan a las secuencias aleatorias. En esta sección exponemos las principales conclusiones de nuestro estudio.

3.8.1. RECONOCIMIENTO Y GENERACIÓN DE SECUENCIAS ALEATORIAS

En la primera parte del cuestionario se propuso a los alumnos tareas de generación y reconocimiento de secuencias aleatorias y de distribuciones aleatorias de puntos en una cuadrícula, usando varios ítems tomados de las investigaciones de Green.

* Cuando se les pide generar una secuencia de resultados aleatorios similar a la que se obtendría con una moneda no sesgada, los alumnos han reproducido aproximadamente la frecuencia relativa de caras y cruces en las sucesiones generadas, aunque subestiman la variabilidad de la secuencia. El número de rachas producidas es excesivo y la longitud de la racha mas larga pequeña. En consecuencia, del primer ítem deducimos una correcta apreciación de los alumnos sobre la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica y una insuficiente percepción de la variabilidad de esta frecuencia relativa, así como de la independencia de los ensayos. Green (1991) atribuye este comportamiento a la visión del mundo, por parte de los alumnos, sujeto a leyes. En su intento de acomodar los fenómenos aleatorios en este marco, esencialmente determinista, la incertidumbre reflejada en la variabilidad es atenuada y poco enfatizada.

* Las distribuciones de puntos producidas por los alumnos estiman a la baja el número de celdas vacías, que son sustituidas por celdas con dos puntos en el apartado a)

y por celdas con un punto en el apartado b). Puesto que 1 y 2 son los valores enteros más próximos al parámetro de la distribución de Poisson en los apartados a) y b) respectivamente, consideramos que los alumnos han intentado reproducir este número medio de puntos en la mayor parte de los cuadros, aunque admitiendo ligeras fluctuaciones. Estas fluctuaciones no llegan, sin embargo, a reflejar toda la variabilidad de la distribución aleatoria de Poisson en el plano.

Hemos percibido también que algunos alumnos sólo ponen 1 ó 2 cruces en cada cuadro, lo que sería equivalente a la utilización de rachas cortas en el primer ítem.

* Como resumen del tercer y cuarto ítem vemos que existen diferentes razones para considerar una sucesión como aleatoria o no aleatoria y que varían en función del ítem, lo que hace pensar que el alumno es capaz de reconocer las características que hemos hecho variar en las diferentes secuencias. Entre estas características, citamos la correspondencia entre frecuencias observadas y esperadas en los distintos resultados, el número y longitud de las rachas, la existencia de patrones en la secuencia de resultados o distribución espacial de puntos y la imprevisibilidad de los resultados particulares. Estas razones varían en función de la edad del alumno y de la respuesta al ítem, habiendo consistencia general entre opción elegida y argumentos.

* El uso del análisis de correspondencias nos ha permitido detectar tres factores principales, que dan cuenta de la apreciación de los alumnos de tres características de las distribuciones aleatorias:

- Variabilidad local, por la que se espera frecuentes alternancias entre distintas posibilidades y ausencia de patrones establecidos.
- Regularidad global, dada por la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica.
- Grado de discrepancia entre la distribución esperada y la observada, que se espera sea mayor que el teórico. Esta discrepancia, no obstante, se ha detectado con mayor facilidad en las secuencias aleatorias lineales que en las distribuciones aleatorias de puntos en la cuadrícula.

Todos estos resultados nos muestran las propiedades que los alumnos asignan a las secuencias y distribuciones aleatorias de puntos y hasta qué punto éstas coinciden con su significado desde el punto de vista matemático. Como hemos discutido en el análisis teórico, no podemos probar de forma concluyente la aleatoriedad de una secuencia de resultados aleatorios, sino tomar una decisión relativa a su aleatoriedad. Esta decisión dependerá del conjunto de técnicas de contraste disponibles.

Sin embargo, es necesario analizar la relación entre las creencias intuitivas de los sujetos respecto a la aleatoriedad y el cuerpo de conocimientos disponibles sobre este concepto (Harten y Steinbring, 1983). Esto implica que tanto las intuiciones como las técnicas matemáticas han de ser tenidas en cuenta en cada posible nivel de comprensión, incluso elemental. La intuición y la teoría matemática no deben ser contradictorias. Por ello es preciso tener en cuenta las intuiciones de nuestros alumnos para organizar cuidadosamente una secuencia de situaciones didácticas dirigidas a la construcción del conocimiento matemático.

3.8.2. HEURÍSTICAS Y SESGOS EN LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

El segundo punto estudiado fue la asignación de probabilidades a sucesos por parte de los estudiantes, empleando ítems tomados de diferentes investigaciones. Las principales conclusiones sobre este punto han sido las siguientes:

A) Una proporción importante de alumnos parece utilizar el razonamiento titulado "enfoque en el resultado aislado" a lo largo de los distintos ítems. Este tipo de razonamiento no parece variar con la edad de los alumnos. Este sesgo aparece también en las respuestas a los ítems que en las investigaciones previas se habían explicado por la heurística de la representatividad o el sesgo de equiprobabilidad. Ello es debido a que en nuestro caso hemos incluido nuevos distractores en algunos de los ítems.

B) Se muestran en menor medida los sesgos de equiprobabilidad y representatividad. Al contrario de lo expuesto en las investigaciones de Fischbein *et al.* (1991), en nuestra muestra de alumnos estos dos sesgos disminuyen con la edad aumentando el razonamiento combinatorio de los alumnos.

C) Hemos observado también una menor proporción de los sesgos que los descubiertos en investigaciones previas. Ello puede ser debido a que hemos usado no solo las opciones elegidas en los ítems, sino también los argumentos de los alumnos para interpretar sus respuestas.

Como consecuencia del estudio de la segunda parte del cuestionario, hemos observado que los alumnos varían su estrategia en la estimación de probabilidades en experimentos compuestos. Diferentes variables del ítem han influido en la respuesta, observándose no solo la heurística de la representatividad, sino también el sesgo de equiprobabilidad y el "enfoque en el resultado aislado".

El análisis de correspondencias señala, además del razonamiento combinatorio, la introducción de elementos subjetivos y el efecto del tamaño de la muestra como factores en la asignación de probabilidades.

3.8.3. INTERPRETACIÓN FRECUENCIAL DE LA PROBABILIDAD

Podemos concluir de este apartado que una parte de alumnos manifiesta dificultades en la interpretación frecuencial de una probabilidad. Esto se ha notado especialmente en el ítem 9, aunque el contexto más familiar usado en el ítem 10 ha facilitado la interpretación por parte de los alumnos. En consecuencia, creemos que una parte de la dificultad encontrada por Konold en sus investigaciones es debida al enunciado de su pregunta. Es posible, como lo mostramos en nuestros resultados, encontrar situaciones más familiares a los alumnos que les permitan comprender los enunciados de probabilidad dados en términos frecuenciales.

Aunque la opción elegida en los ítems (en especial en los apartados del ítem 10) ha sido con frecuencia correcta, los argumentos en que se apoya la elección no son siempre normativos, indicando que los alumnos atribuyen a los experimentos aleatorios propiedades no acordes con el significado institucional matemático. Entre los argumentos incorrectos que hemos encontrado con mayor frecuencia destacamos los siguientes:

a) Creencia en que ha habido un error en los datos del problema y en la equivalencia entre alta probabilidad y seguridad en la ocurrencia del suceso.

b) Búsqueda de razones de tipo causal para explicar un suceso no esperado.

c) Justificar los resultados por la impredecibilidad de los experimentos aleatorios, sin tener en cuenta la probabilidad de los sucesos.

Como consecuencia del análisis de correspondencias hemos identificado tres aspectos diferenciados en la interpretación de la probabilidad frecuencial, donde las investigaciones de Konold veían una única dificultad por parte de los alumnos. Estos tres aspectos son los siguientes:

a) Predicción de la ocurrencia de un suceso en un experimento simple, a partir de la estimación frecuencial de su probabilidad.

b) Explicación de la ocurrencia de un suceso, a pesar de su baja probabilidad, por razones frecuenciales

c) Estimación de la frecuencia relativa de un suceso en una serie de experimentos, si se posee una estimación frecuencial de su probabilidad.

Estos tres aspectos se han mostrado como factores independientes, por lo que la adquisición de uno de ellos no presupone la de los demás. En consecuencia, cada uno de ellos constituye un problema diferenciado respecto a la probabilidad frecuencial. La enseñanza deberá tener en cuenta estos tipos de problemas y diseñar situaciones didácticas adecuadas para su solución.

CAPÍTULO IV CONCLUSIONES FINALES DE LA INVESTIGACIÓN

4.1. CONCLUSIONES DEL ESTUDIO TEÓRICO

En el primer capítulo de la tesis hemos llevado a cabo un estudio teórico de los objetos matemáticos ligados al enfoque frecuencial en la enseñanza de la probabilidad desde un doble punto de vista.

En primer lugar, el estudio epistemológico ha puesto de manifiesto la complejidad de la noción de aleatoriedad en la institución matemática. Los modernos dispositivos de cálculo y la necesidad de producción de tablas de dígitos aleatorios nos llevan a separar la idea de proceso y secuencia aleatoria. Para estas últimas, hemos mostrado que no hay una definición sencilla del concepto que permita discriminar de forma clara e inequívoca si una cierta secuencia es aleatoria o no aleatoria.

La definición a partir de la idea de repetibilidad e independencia cuenta con la dificultad de mostrar con seguridad si la noción de independencia es aplicable a los casos particulares. Una vez aceptados estos dos presupuestos, la aleatoriedad nos remite a una serie de modelos probabilísticos que son las bases de los contrastes sobre la aleatoriedad de una secuencia dada. Estos contrastes son usados para rechazar secuencias o procedimientos de construcción de secuencias como no aleatorios, aunque siempre con una cierta probabilidad de error. Sin embargo, nunca establecemos con seguridad la aleatoriedad de una secuencia mediante un contraste de hipótesis, ya que la aceptación de una hipótesis nula tiene siempre un carácter provisional, de no encontrar evidencia suficiente para el rechazo.

Del estudio de la investigación psicológica en el tema deducimos también que muchos de los modelos probabilísticos que se derivan de las dos ideas básicas (repetibilidad e independencia) tienen propiedades contraintuitivas. Cuando se enfrentan a situaciones estocásticas, los sujetos esperan una mayor homogeneidad y representatividad local que la teórica, lo que les lleva a rechazar algunas secuencias aleatorias que superarían los contrastes de aleatoriedad y por el contrario a aceptar otras que serían rechazadas en dichos contrastes. Además de las dificultades sobre la idea de independencia, se hacen extensiones indebidas de la regla de Laplace y se producen interpretaciones inadecuadas de los enunciados de probabilidad frecuencial.

Hemos finalizado el estudio teórico con una interpretación alternativa de las razones por las que se producen estos sesgos, en la sección 1.4.5, utilizando el marco teórico de Godinoy Batanero (1994, en prensa). Las implicaciones de esta interpretación sugieren la necesidad de diseñar situaciones didácticas que permitan plantear al alumno problemas significativos sobre la componentes de variabilidad de los procesos estocásticos. Este tipo de situaciones serían necesarias para lograr una evolución positiva de sus intuiciones en el campo de la probabilidad.

4.2. CONCLUSIONES SOBRE LA VIABILIDAD DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS EXPERIMENTADAS EN LA FASE DE ENTREVISTAS

En el capítulo 2 describimos una serie de situaciones didácticas y su experimentación con una muestra reducida de alumnos, siguiendo la técnica de entrevista. Nuestro objetivo era estudiar la posibilidad de introducir a los alumnos algunas ideas intuitivas sobre el proceso estocástico subyacente en una sucesión de resultados aleatorios. Asimismo, la experiencia se orientaba a la profundización en los significados de los alumnos de la muestra sobre los objetos matemáticos subyacentes en esta sucesión de ensayos. Nuestras hipótesis iniciales sobre esta fase de nuestro trabajo eran las siguientes:

H1: *Las actividades didácticas diseñadas para el estudio resultan asequibles a los alumnos y por medio de ellas es posible plantearles preguntas de su interés respecto a la componente de variabilidad de los procesos estocásticos subyacentes.*

H2: *Los alumnos de la muestra aprecian la estabilización de las frecuencias relativas a largo plazo, esto es, aprecian la tendencia en el fenómeno de la convergencia estocástica.*

H3: *Los alumnos de la muestra no aprecian suficientemente la variabilidad aleatoria de los procesos estocásticos. En particular, los alumnos tienen dificultad con la idea de independencia estocástica.*

Como resultado de nuestras entrevistas concluimos que las situaciones experimentadas resultaron interesantes y asequibles a los alumnos. Por medio de ellas les planteamos preguntas relativas a las ideas de experimento compuesto, sucesión de ensayos, independencia, trayectoria, probabilidades de transición, tiempos de espera, esperanza matemática, convergencia, efecto del tamaño de la muestra, etc.

Los alumnos mostraron un razonamiento combinatorio suficiente y facilidad para el cambio entre diferentes sistemas de representación del proceso estocástico en estudio. Asimismo mostraron unas concepciones correctas de las características de imprevisibilidad de los resultados aleatorios y de la convergencia de las frecuencias relativas a las probabilidades teóricas a largo plazo.

El interés de seguir la investigación sobre este punto se acentúa por el hecho de haber observado que los alumnos de la fase de entrevista asignaron los siguientes elementos de significado a diversos objetos probabilísticos, que serían incorrectos desde el punto de vista matemático:

- Se generaliza indebidamente la regla de Laplace en los experimentos compuestos, incluso cuando se muestra un razonamiento combinatorio suficiente para enumerar los sucesos compuestos en dichos experimentos. Creemos que ello podría ser debido a que los alumnos razonan en base al "enfoque en el resultado aislado" descrito por Konold, por lo que en la segunda fase del estudio se incluyó este aspecto que no había sido considerado específicamente en la fase de entrevistas.
- Los alumnos muestran dificultad en aplicar la idea de independencia en los contextos prácticos, aun cuando esta idea parece bien comprendida a nivel teórico.
- Los alumnos asignan valores positivos a la esperanza matemática, incluso en juegos considerados equitativos. Creemos que los alumnos incorporan elementos subjetivos a la asignación de probabilidades, como la creencia en su propia habilidad o en su "suerte" o bien la creencia de poder controlar un experimento aleatorio repetido, descrita por Fischbein *et al.* (1991).
- Creencia en la rápida estabilización de las frecuencias, es decir, sesgo de representatividad local. En algunos alumnos se llega al extremo de creer mas fiables las pequeñas muestras que las grandes.
- Se esperan frecuentes cambios de signo en los recorridos aleatorios.
- Se esperan tiempos cortos de permanencia a un mismo lado del eje en los recorridos aleatorios.

Así mismo, se ha notado una influencia del resultado de las simulaciones realizadas por los alumnos en las actividades propuestas sobre la estabilidad de sus creencias. Incluso algunos alumnos han modificado sus respuestas de correctas a incorrectas como resultado de la simulación.

Ello plantea de nuevo la necesidad de una investigación más profunda sobre la forma de abordar la enseñanza de la probabilidad desde un punto de vista frecuencial. Como sugiere Konold (1995), simplemente hacer que los alumnos hagan predicciones y las comparen con los datos experimentales que obtienen con experimentos aleatorios no es suficiente para cambiar sus concepciones incorrectas. En primer lugar, raramente recogemos datos suficientes para que se pueda observar con claridad el fenómeno de la convergencia estocástica y se revelen los diferentes patrones que pretendemos enseñar a los alumnos. Además, estos suelen ignorar la variabilidad de los datos y su atención, con frecuencia, no se concentra en los aspectos esenciales del proceso.

4.3. CONCLUSIONES SOBRE EL SIGNIFICADO QUE LOS ALUMNOS DE LA MUESTRA ASIGNAN A OBJETOS MATEMÁTICOS LIGADOS A LA APROXIMACIÓN FRECUENCIAL EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

La segunda parte de nuestro estudio estuvo dedicada a realizar un análisis más extenso y válido sobre algunas de las dificultades detectadas en la fase de entrevistas. A continuación describimos las conclusiones sobre esta parte del estudio.

Sucesiones aleatorias

En la sección 3.5 se han analizado las respuestas de los alumnos en la generación y reconocimiento de sucesiones aleatorias. Nuestras hipótesis sobre este punto eran las siguientes:

H4: *Esperamos que los alumnos de la muestra reflejen con notable precisión las frecuencias relativas de caras y cruces en las secuencias generadas. Asimismo esperamos que los alumnos asignen un carácter no aleatorio a las secuencias en que las frecuencias observadas difieran bastante de las esperadas.*

H5: *Suponemos que los alumnos manifestarán un sesgo de representatividad local. Es decir, producirán demasiado rachas en las frecuencias generadas y rechazarán como aleatorias aquellas frecuencias con rachas largas.*

Del análisis de las respuestas y argumentos de los alumnos podemos identificar las siguientes propiedades de las secuencias aleatorias reconocidas intuitivamente por los alumnos de nuestra muestra:

- Impredecibilidad de resultados. Los alumnos argumentan repetidamente la imposibilidad de predicción de tales resultados.

- Convergencia de la frecuencia relativa hacia la probabilidad de los diferentes resultados en un experimento aleatorio. Se manifiesta, tanto en el rechazo que hacen de sucesiones con frecuencias muy diferentes de las teóricas, como en el estudio de las frecuencias de las secuencias generadas por los alumnos.

- Ausencia de patrones obvios. Se rechazan las secuencias demasiado ordenadas, así como aquellas en que la colocación de las caras y cruces siguen un cierto patrón.

Por otro lado, los alumnos han manifestado dificultad con la noción de independencia, esperando una regularidad local de las secuencias aleatorias. Por ello, rechazan la existencia de rachas largas y esperan una menor variabilidad que la que cabe esperar en los procesos aleatorios.

Distribuciones aleatorias de puntos en el modelo de Poisson

En la misma sección hemos analizado la generación y reconocimiento por los alumnos de distribuciones puntuales en una cuadrícula, según el modelo de Poisson, Nuestra hipótesis al respecto era la siguiente:

H6: *Esperamos que los alumnos de la muestra distribuyan los puntos en la cuadrícula de forma tal que todos los resultados posibles estén representados, pero con alguna variabilidad en las frecuencias de los distintos resultados. Esta variabilidad será menos que la teórica.*

De las prácticas efectuadas por los alumnos en la resolución de los problemas propuestos, deducimos las siguientes propiedades reconocidas intuitivamente por los alumnos:

- Variabilidad de la distribución puntual, siendo escasos los alumnos que colocan exactamente un punto por cuadro en el ítem 2. Asimismo se rechazan los ítems donde los puntos están repartidos con demasiada uniformidad en los diferentes cuadros.

- Variabilidad de las frecuencias relativas: los alumnos distribuyen los puntos de modo que aparezcan cuadros vacíos, así como cuadros con varios puntos. Sin embargo, se limitan a dos y a veces tres puntos por cuadro, con lo que la distribución tiene menor variabilidad que la teórica.

Por el contrario, los alumnos no distribuyen adecuadamente los cuadros vacíos en la cuadrícula, resultando a veces distribuciones con un excesivo número de cuadros vacíos adyacentes.

Probabilidades de sucesos en experimentos compuestos

La segunda parte del cuestionario presenta a los alumnos tareas en las que debe asignar probabilidades en experimentos compuestos. Nuestras hipótesis sobre el comportamiento de los alumnos al resolver estos problemas eran las siguientes:

H7: *Sólo una pequeña proporción de alumnos será capaz de proporcionar respuestas correctas al total de ítems en esta parte de la prueba.*

H8: *Los principales tipos de razonamientos incorrectos que esperamos encontrar son la expectativa de una representatividad local de los procesos estocásticos, el "enfoque en el resultado aislado" y el sesgo de equiprobabilidad.*

La dificultad de las tareas planteadas se puso de manifiesto en el escaso número de alumnos que resolvió correctamente los problemas, así como en los argumentos incorrectos proporcionados.

En particular se ha detectado una proporción importante de alumnos que considera imposible hacer un tipo de predicción sobre las probabilidades de los sucesos, basándose en su carácter impredecible. Creemos que ello podría deberse a un razonamiento denominado por Konold "enfoque en el resultado aislado". Este razonamiento podría estar también en la base de respuestas incorrectas que han sido explicadas por otros sesgos en investigaciones anteriores.

Otro sesgo importante es la insensibilidad al tamaño de la muestra (representatividad), que aparece en una gran proporción de alumnos. Por consecuencia, será necesario enfatizar el estudio del efecto de este tamaño en futuros experimentos de enseñanza.

Aunque bastantes alumnos generalizan indebidamente la regla de Laplace (equiprobabilidad), los argumentos revelan que su proporción es menor que la obtenida por otros investigadores. De ello también deducimos lo engañoso que es guiarse por el análisis de las respuestas a ítems de opciones múltiples y la necesidad de analizar la correspondencia en respuestas a más de un ítem y la correspondencia entre opción elegida y argumento proporcionado. Todo esto abre de nuevo interrogantes sobre las interpretaciones que damos a las respuestas de los alumnos y necesidad de ampliar la investigación en el campo de la probabilidad.

Interpretación de enunciados frecuenciales de probabilidad

En la sección 3.3.7 hemos analizado las respuestas de nuestros alumnos a situaciones propuestas por Konold (1989, 1991), así como otras similares diseñadas por nosotros mismos. A continuación describimos nuestra hipótesis sobre este punto:

H9: *Los alumnos de la muestra tienen dificultades en interpretar los enunciados propuestos desde un punto de vista probabilístico, centrándose en la predicción de un resultado aislado. Esta dificultad, sin embargo, disminuye cuando el problema se les presenta en un contexto más familiar.*

Los alumnos han mostrado dificultades en la interpretación frecuencial de una probabilidad. Esto se ha notado especialmente en el ítem 9, aunque el contexto más familiar usado en el ítem 10 ha facilitado la interpretación por parte de los alumnos.

Aunque la opción elegida en los ítems (en especial en los apartados del ítem 10) ha sido con frecuencia correcta, los argumentos en que se apoya la elección no son siempre normativos. Entre los argumentos incorrectos que hemos encontrado con mayor frecuencia destacamos los siguientes:

a) Creencia en que ha habido un error en los datos del problema y en la equivalencia entre alta probabilidad y seguridad en la ocurrencia del suceso.

b) Búsqueda de razones de tipo causal para explicar un suceso no esperado.

c) Justificar los resultados por la impredecibilidad de los experimentos aleatorios, sin tener en cuenta la probabilidad de los sucesos.

Como consecuencia resaltamos la necesidad de tener en cuenta estas dificultades en la organización de secuencias didácticas con el nuevo enfoque sugerido en la enseñanza.

Análisis de los argumentos de los alumnos

Otro grupo de hipótesis se referían a la interpretación de los argumentos de los alumnos y eran las siguientes, que han sido confirmadas a los largo de esta investigación:

H10: *Esperamos obtener una consistencia de los alumnos entre las opciones elegidas en los ítems y los argumentos en que se apoyan. Es decir, esperamos una correspondencias entre argumentos correctos (incorrectos) y opciones correctas (incorrectas).*

H11: *Esperamos que los argumentos de los alumnos nos permitan descubrir que algunas respuestas atribuidas en investigaciones previas a un cierto tipo de heurística (sesgo) tengan una explicación alternativa.*

Diferencias en los grupos de alumnos

Otro punto importante de nuestro estudio eran las posibles diferencias de razonamientos y errores en los alumnos de mayor y menor edad y formación, preocupación que viene expuesta en la hipótesis siguiente:

H12: *Esperamos una mayor proporción de respuestas y argumentos correctos en el grupo de alumnos de 18 años. Es decir, esperamos un mejor razonamiento probabilístico en estos alumnos, respecto a sus compañeros de menor edad.*

Efectivamente hemos encontrado un mejor razonamiento probabilístico en los alumnos de 18 años. Creemos que ello es no sólo debido a su mayor maduración, sino a que han tenido una enseñanza, aunque breve y posiblemente formal, en sus estudios de Bachillerato. Como hemos indicado, este punto merece un estudio más detallado, por la confusión entre las dos posibles variables explicativas en nuestra muestra.

Un punto importante, sin embargo, es que las diferencias no son tan grandes como desearíamos. Ello sugiere la necesidad de reforzar la enseñanza de la probabilidad y extenderla en un período más prolongado, por lo que se apoya los presupuestos de los nuevos diseños curriculares.

Análisis multivariante

Nuestros presupuestos teóricos y metodológicos nos llevaron a un enfoque estructuralista de la investigación. No nos conformamos con el estudio de las respuesta a ítems aislados, sino que queremos detectar la existencia de relaciones entre respuestas a diferentes ítems, porque ello nos puede revelar causas subyacentes a errores repetidos. La hipótesis que formulábamos la incluimos a continuación:

H13: *Esperamos obtener una estructura multifactorial en cada uno de los análisis de correspondencias realizados. Ello es consecuencia de nuestros presupuestos epistemológicos sobre la naturaleza sistémica y componencial de los significados personales sobre un objeto matemático, en general, y sobre los conceptos probabilísticos en particular.*

Para analizar esta hipótesis se han llevado a cabo distintos tipos de análisis multivariantes. Como consecuencia del análisis de correspondencias hemos identificado tres aspectos diferenciados en la interpretación de la probabilidad frecuencial, donde las investigaciones de Konold veían una única dificultad por parte de los alumnos. Estos tres aspectos son los siguientes:

a) Predicción de la ocurrencia de un suceso en un experimento simple, a partir de la estimación frecuencial de su probabilidad.

b) Explicación de la ocurrencia de un suceso, a pesar de su baja probabilidad, por razones frecuenciales.

c) Estimación de la frecuencia relativa de un suceso en una serie de experimentos, si se posee una estimación frecuencial de su probabilidad.

Estos tres aspectos se han mostrado como factores independientes, por lo que la adquisición de uno de ellos no presupone la de los demás. En consecuencia, cada uno de ellos constituye un problema diferenciado respecto a la probabilidad frecuencial. La enseñanza deberá tener en cuenta estos tipos de problemas diseñando situaciones didácticas adecuadas para su solución.

Reflexion final

A lo largo de las conclusiones expuestas se resalta la complejidad del significado de los objetos matemáticos ligados al enfoque frecuencial de la enseñanza de la probabilidad, si queremos llevar a los alumnos más allá de la simple experimentación manipulativa. Cuando el objetivo final es guiar a los alumnos hacia la adquisición de prácticas significativas para la resolución de problemas y hacia la construcción de las ideas estocásticas fundamentales, la reflexión e investigación didáctica es imprescindible.

En este trabajo sólo hemos dado un primer paso en este sentido. Como resultado, hemos aportado algunos datos sobre el problema que nos hemos planteado, pero sobre todo, hemos identificado nuevos problemas de investigación sobre los que es necesario profundizar. Esperamos que ello contribuya a interesar a otras personas para continuar esta línea de investigación.

REFERENCIAS

AHLGREN, A. y GARFIELD, J. (1991). Analysis of the probability curriculum. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds), *Chance encounters: probability in education* (pp. 107-134). Dordrecht: Kluwer.

AUDREY, J. (1989). *Finding out: conducting and evaluating research.* Belmont, CA: Wadsworth Publishing Company.

AYER, A. J. (1974). El Azar. En M. Kline (Ed.), *Matemáticas en el mundo moderno* (pp. 172-181). Barcelona: Blume.

AZORIN, F. y SÁNCHEZ CRESPO, J. L. (1986). *Métodos y aplicaciones del muestreo*. Madrid: Alianza Editorial.

BADRIKIAN, J. (1982). Simulation of games studied in the seventeenth and eighteenth centuries. En D. R. Grey y cols. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 336 - 340). University of Sheffield.

BAKAN, P. (1960). Response tendencies in attempts to generate random binary series. *American Journal of Psychology*, 73, 127 - 131.

BARDIN, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal.

BAR-HILLEL, M. (1983). The base-rate fallacy controversy. En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 39-62). Amsterdam: North Holland.

BAR-HILLEL, M. y WAGENAAR, W. A. (1993). The perceptions of randomness. En G. Keren y C. Lewis (Eds.), *A Handbook for data analysis in the behavioral sciences: methodological issues* (pp. 311 - 339). Lawrence Erlbaum.

BATANERO, C. y GODINO, J. D. (1994). The use of multivariate methods to analyze students' stochastic conceptions. *Proceedings of the IV International Conference on Teaching Statistics* (v. 1, pp. 32-39). Marrakesh: National Institute of Applied Economics.

BATANERO, C., GODINO, J. D. y NAVARRO-PELAYO, V. (1995). The use of implicative and correspondence analysis for assessing pupils' combinatorial reasoning.

En R. Gras (Ed), *Actes du Colloque "Méthodes d'analyse statistique multidimmensionnelles en Didactique des Mathématiques*" (pp. 245-256). Caén: A.R.D.M.

BATANERO, C., GODINO, J. D., VALLECILLOS, A., GREEN, D. R. y HOLMES, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Tecnology,* 25 (4), 527-547.

BATANERO, C., NAVARRO-PELAYO, V. y GODINO, J. D. (En prensa). Effect of the implicit combinatorial model on secondary students' combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics.*

BATANERO, C. y SERRANO, L. (1995). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones didácticas. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 5, 15-28.

BENNETT, D. J. (1993). *The development of the mathematical concept of randomness; educational implications.* Tesis doctoral. New York University. (DAI n. 9317657).

BENTZ, H. J. (1982). Stochastic teaching based on common sense. En D. R. Grey y cols. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 753 - 765). University of Sheffield.

BENTZ, H. J. y BOROVCNIK, M. (1982 a). On representativeness: A fundamental strategy. En D. R. Grey y cols. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 276 - 284). University of Sheffield.

BENTZ, H. J. y BOROVCNIK, M. (1982 b). Some remarks on empirical investigations on probability and statistics concepts. En D. R. Grey y cols. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 266 - 275). University of Sheffield.

BENZECRI, J. P. (1984). *La practique de l'analyse des données*. París: Dunod.

BIEHLER, R. (1991). Computers in probability education. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: probability in education. A review of research and pedagogical perspectives* (pp. 169 - 212). Dordrecht: Kluwer.

BIEHLER, R. (1993). Software tools and mathematics education: The case of statistics. En C. Keitel y K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: mathematics education and technology* (pp 68 - 100). Berlín: Springer Verlag.

BISQUERRA, R. (1989). *Métodos de investigación educativa.* Barcelona: P.P.U.

BLAND, J. M. (1985). Computer simulation of two statistical principles. *Teaching Statistics*, 7, 74 - 77.

BOROVCNIK, M. (1988). Revising probabilities according to new information. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 298 - 302). University of Victoria.

BOROVCNIK, M., BENTZ, H. J. y KAPADIA, R. (1991). A probabilistic perspective. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 27 - 72). Dordrecht: Kluwer.

BRENNAN, R. L. (1983). *Elements of generalizability theory*. Iowa: ACT Publications.

BRIGHT, G. W. y HARVEY, J. G. y WHEELER, M. M. (1982). Using games to teach some probability concepts. En D. R. Grey y col. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 110 - 115). University of Sheffield.

BRIGHT, G. W., HARVEY, J. G. (1986). Probability games. En: R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 57 - 60). University of Victoria.

BRIGHT, G. W., HARVEY, J. G. y WHEELER, M. M.. (1981). Fair games, unfair games. En A. P. Schulte y J. R. Smart (Eds.), *Teaching statistics and probability: 1981 yearbook* (pp 49 - 59). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (2), 165 - 198.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115.

BRUNI, J. V. y SILVERMAN, H. J. (1986). Developing concepts in probability and statistics and much more. *Arithmetic Teacher*, Febr, 34 - 37.

CABRIÁ, S. (1994). *Filosofía de la estadística.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Valencia.

CASTRO MARTÍNEZ, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa.* Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

CHEVALLARD, Y. (1989). *Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionel, rapport officiel.* Seminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble. IREM d'Aix Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la Didactique: perspectives apporteés par une approche anthropologique. *Rechérches en Didactique des Mathématiques,* 12 (1), 73 - 112.

COLLIS, B. (1982). Simulation and the microcomputer: an approach to teaching probability. *Mathematics Teacher*, Oct. 584 - 587.

COOK, T. D. y CAMPBELL, D. T. (1979). *Quasi - experimentation: Design and analysis issues for field settings*. Chicago: Rand McNally.

CORNEJO, J. M. (1988). *Técnicas de investigación social: el análisis de correspondencias.* Barcelona: P.P.U.

COX, D. R. y MILLER, H. D. (1965). *The theory of stochastic processes*. London: Methuen.

COX, C. y MOW, J. T. (1992). Disruption of the representativeness heuristic: can we be perturbed into using correct probabilistic reasoning? *Educational Studies in Mathematics*, 23, 163 - 178.

CUADRAS, C. M. (1991). *Métodos de análisis multivariantes*. Barcelona: Eunibar.

DANE, F. C. (1990). *Research Methods*. Pacific Grow, CA: Thompson Information Publishing Group.

DEL MAS, R., y BART, M. (1989). The role of an evaluation exercise in the resolution of misconceptions of probability. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11 (3), 39 - 54.

DEL MAS, R., y GARFIELD, J. (1991). The use of multiple items to identify misconceptions in probabilistic reasoning. Comunicación presentada en la *Third International Conference On Teaching Statistics*. Dunedim: University of Otago.

DENZIN, N. K. y LINCOLN, Y. S. (1994). *Handbook of qualitative research methods.* London: Sage.

DOOB, J. L. (1953). *Stochastics processes*. New York: J. Wiley.

DUNN, O. J. y CLARK, V. A. (1987). *Applied statistics: Analysis of variance and regression.* New York: J. Wiley.

ENGEL, A. (1986). Statistics by simulation. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the II International Conference on Teaching Statistics* (pp. 217 - 224). University of Victoria.

ENGEL, A. (1988). *Probabilidad y Estadística*. Valencia: Mestral Universidad.

ENGEL, A., VARGA, T. y WALSER, W. *(1972). Hasard ou strategie? Jeux de combinatoire, de probabilités et de statistique*. París: O.C.D.L.

ESCOFIER B., y PAGÉS J. (1988). *Analyses factorielles simples et multiples: objectifs, méthodes et interpretation*. Paris: Dunod.

ESTEPA, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

FALK, R. (1975). *The perception of randomness*. Ph. Dissertation The Hebrew University in Jerusalem.

FALK, R. (1981). The perception of randomness. En C. Comiti y C. Vergnaud (Eds.), *Proceedings of the V International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 222 - 229). Universidad de Grénoble.

FALK, R. (1986 a). Misconceptions of statistical significance. *Journal of Structural Learning*, 9, 83 - 96.

FALK, R. (1986 b). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 - 297). University of Victoria.

FALK, R. (1991). Randomness. An ill-defined - but much needed concept. *Journal of Behavioral Decision Making*, 4, 215 - 226.

FALK, R. y KONOLD, C. (1994). Random means hard to digest. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 16 (1), 259 - 270.

FELLER, W. (1973). *Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones*. vol. I. México: Limusa-Wiley.

FELDT L. S. y BRENNAN R. L. (1991). Reliability. En R. L. Linn, (Ed.), *Educational measurement* (pp. 105-146). New York: American Council on Education and Macmillan.

FINE, T. L. (1973). *Theories of Probability. An examination of foundations*. London: Academic Press.

FISCH, B. y GRIFFEATH, D. (1988). *Graphical aids for stochastic processes*. University of Wisconsin.

FISCHBEIN, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.

FISCHBEIN, E. y GAZIT, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15 (1), 1 - 24.

FISCHBEIN, E. y GAZIT, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, 193 - 198.

FISCHBEIN, E., PAMPU, L. y MINZAT, I. (1970 a). Comparison of Ratios and the chance concept in children. *Child Development*, 41 (2), 377 - 389.

FISCHBEIN, E., PAMPU, L. y MINZAT, I. (1970 b). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *The British Journal of Educational Pshychology* 40 (2), 261 -270.

FISCHBEIN, E., NELLO, M. S. y MARINO, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523 - 549.

FOX, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: Eunsa.

FREUDENTHAL, H. (1972) "The empirical law of large numbers" or "The stability of frequencties". *Educational Studies in Mathematics*, 4, 484 - 490.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

GARFIELD, J. B. (1991). Evaluating students' understanding of statistics: development of the statistical reasoning assessment. En R. Undershill (Ed.), *Proceedings of the XIII PME - NA* (v.2, pp. 1 - 7). Blacksburg, VA.

GARFIELD, J. B. (1995). How students learn statistics. *International Statistics Review*, 63 (1), 25 - 34.

GARFIELD, J. B. y AHLGREN, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 44 - 63.

GARFIELD, J. B. y DEL MAS, R. (1989). Reasoning about chance events. Assessing and changing students' conception of probability. En C. Maher; G. Goldin y B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 11 Meeting of the PME - NA* (v. 2, pp. 189 - 195). Rutgers: Rutgers University Press.

GARFIELD, J. B. y DEL MAS, R. (1991). Students' conceptions of probability. En D. Vere Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (v.1, pp. 340 - 349). Dunedin: University of Otago.

GHIGLIONE, R. y MATALON, B. (1989). *Las encuestas sociológicas.* México: Trillas.

GIL FLORES, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos*. Barcelona. P.P.U.
GLAYMAN, M. y VARGA, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela*. Barcelona: Teide.

GNANADESIKAN, M., SCHEAFFER, R. L. y SWIFT, J. (1987). *The art and techniques of simulation*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 14 (3), 325-355.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (En prensa). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska (Ed.), *What is research in mathematics education and what are its results?* ICMI Study 94. Dordrecht: Kluwer.

GODINO, J. D., BATANERO, C. y CAÑIZARES, M. J. (1988). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

GOEZT, J. P. y LECOMPTE, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

GRAS, R. (1992). L'analyse des données: une méthodologie de traitement de questions de Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12 (1), 59-72*.

GREEN, D. R. (1982 a). *Probability concepts in school pupils aged 11 - 16 years.* Ph. Dissertation. University of Loughborough.

GREEN, D. R. (1982 b). Testing randomness. *Teaching Mathematics and its Application*s, 1 (3), 95-100.

GREEN, D. R. (1983 a). School pupils' probability concepts. *Teaching Statistics,* 5 (2), 34-42.

GREEN, D. R. (1983 b). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D. R. Grey et al. (Eds,. *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (v.2, p. 766 - 783). University of Sheffield.

GREEN, D. R. (1988). Children's understanding of randomness. En E. Davidson y J. Swift (Eds), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 287 - 291). University of Victoria.

GREEN, D. R. (1989). Schools pupils' understanding of randomness. En R. Morris (Ed), *Studies in mathematics education* (v.7, pp. 27-39). París: Unesco.

GREEN, D. R. (1991). A longitudinal study of children's probability concepts. En D. Vere Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics (pp. 320 - 328)*. Dunedin: University of Otago

GREENACRE, M. J. (1993). *Correspondence analysis in practice.* London: Academic Press.

GRONER, R., GRONER, M. y BISCHOF, W. M. (1983). The role of heuristics in models of decision. En R. M. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 87 - 108). Amsterdam: North Holland.

GUTIÉRREZ, A. (1991). La investigación en Didáctica de las Matemáticas. En: A. Gutiérrez (Ed), *Area de conocimiento didáctica de la matemática* (pp. 149-194). Madrid: Síntesis.

GUTIÉRREZ JÁIMEZ, R., MARTÍNEZ ALMÉCIJA, A. y RODRÍGUEZ, T. C. (1992). *Curso de probabilidad.* Madrid: Pirámide.

HACKING, I. (1975). *The emergence of probability.* London: Cambridge University Press.

HARTEN, von G. y STEINBRING, H. (1983). Randomness and stochastic independence. On the relationship between intuitive notion and mathematical definition.

En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 363 - 374). Amsterdan: North Holland.

HAWKINS, A., JOLLIFFE, F. y GLICKMAN, L. (1992). *Teaching statistical concepts.* London: Longman.

HEITELE, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187 - 205.

HERMAN, J. (1990). *Analyse de données qualitatives. V. 2 Traitement d'enquêtes, modèles multivariés*. Paris: Masson.

HOEMANN, H. W. y ROSS, B. M. (1982). Children's concepts of chance and probability. En Brainerd (Ed.), *Children's logical and mathematical cognition* (pp. 93 - 121). Berlín: Springer Verlag.

HUBERMAN, A. M. y MILES, F. M. (1994). Data management and analysis methods. En D. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428 - 444). London: Sage.

HUNT, N. y GREEN, D. R. (1993). Independence on trial. *Teaching Mathematics and its Applications*, 12 (4), 159-162.

JUNGERMAN, H. (1983). The two camps on rationality. En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 63 - 86). Amsterdam: North-Holland.

JUNTA DE ANDALUCÍA (1989). *Diseño curricular de matemáticas. Enseñanza Secundaria. 12 - 16 años.* Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia.

JUNTA DE ANDALUCÍA (1992). Decreto 106/1992 de 9 de junio (BOJA del 20) por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la E.S.O. en Andalucía.

JUNTA DE ANDALUCÍA (1994). Decreto 126/1994 de 7 de junio (BOJA del 26 de julio) por el que se establecen las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía.

KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. (Eds.). (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases.* Cambridge: Cambridge University Press.

KALBFLEISCH, J. B. (1984). *Probabilidad e inferencia estadística.* Madrid: A.C.

KAPADIA, R. (1986). Didactical phenomenology of probability. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 260 - 264). University of Victoria.

KAPADIA, R. y BOROVCNIK, M. G. (1991). The educational perspective. En R. Kapadia y M. G. Borovnick (Eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp.1-25). Dordrecht: Kluwer.

KENDALL, M. G. (1978). The beginnings of a probability calculus. En Pearson y Kendall (Eds.), *Studies in the history of statistics and probability* (v. I, pp. 19 - 34). London: Charles Griffin.

KILPATRICK, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problem solving. papers from a research workshop.* Columbus, Ohio: ERIC / SMEAC.

KIRK, J. y MILLER, M. L. (1986). *Reliability and validity in qualitative research.* London: Sage.

KNOWLER, K. A. y KNOWLER, L. A. (1981). Using teaching devices for statistics and probability with primary children. En A. P. Shulte y J. R. Smart (Eds.), *Teaching statistics and probability* yearbook (pp. 41 - 44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

KONOLD, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59 - 98.

KONOLD, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

KONOLD, C. (1995). Confessions of a coin flipper and would - be instructor. *The American Statistician*, 49 (2), 203 - 209.

KONOLD, C. y FALK, R. (1992). Encoding difficulty: A psychological basis for misperceptions of randomness. En W. Geeslin y K. Graham (Eds.), *Proceedings of the XVI PME* (v. 2, pp. 9-17). University of New Hampshire.

KONOLD, C. y GARFIELD, J. B. (1993). *Statistical reasoning assessment. Part I: Intuitive thinking*. University of Massachusetts: Scientific Reasoning Research Institute.

KONOLD, C., LOHMEIER, J., POLLATSEK, A., WELL, A., FALK, R. y LIPSON, A. (1991a). Novices' views on randomness. Proceedings of the *XIII PME NA Conference (pp. 167-173)*. Blacksburg, VA.

KONOLD, C., POLLATSEK, A., WELL, A., HENDRICKSON, J. y LIPSON, A. (1991 b). The origin of inconsistencies in probabilistic reasoning of novices. En D. Vere Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 357-362). Dunedin: University of Otago

KONOLD, C., POLLATSEK, A., WELL, A., LOHMEIER, J. y LIPSON, A. (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (5), 392 - 414.

KYBURG, H. E. (1974). *The logical foundations of statistical Inference*. Boston: Reidel.

LECOUTRE, M. P. (1985). Effect d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur le judgements probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6, 193 - 213.

LECOUTRE, M. P. y DURAND, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357-368.

LECOUTRE, M. P. y CORDIER, J. (1990). Effet du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP*, 372, 9 - 22.

LECOUTRE, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557 - 568.

MATALÓN, B. (1979). Epistemología de las Probabilidades. En J. Piaget (Ed), *Epistemología de la Matemática* (pp. 121 - 145). Buenos Aires: Paidós.

MAURY, S. y FAYOL, M. (1986). Combinatoire et résolution de problémes au cours moyens première et deuxième années. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (1), 63 - 97.

M.E.C. (1989). *Diseño curricular base para la enseñanza secundaria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

M.E.C. (1992). *Matemática. Secundaria Obligatoria.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

MEDHI, J. (1982). *Stochastic processes*. New York: Wiley.

MESSICK, S. (1991): Validity. En R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (pp. 13-104). New York: American Council on Education and MacMillan.

MILES, M. B. y HUBERMAN, A. M. (1984), *Qualitative data analysis. A sourcebook of new methods.* London: Sage Publications.
MOLINER, M. (1983). *Diccionario de uso del español.* Madrid: Gredos.

MOORE, D. S. (1995). *The basic practice of Statistics*. New York: Freeman.

MORIN, E. (1986). *El método. El conocimiento del conocimiento.* Madrid: Cátedra.

NAVARRO-PELAYO, V. (1991). *La enseñanza de la Combinatoria en Bachillerato.* Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

NAVARRO-PELAYO, V. (1994). *Estructura de problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

N.C.T.M. (1989). *Curriculum and evaluation standars for school Mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NISBETT, R. E. y ROSS, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgment.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

NISS, M. (Ed.). (1993). *Investigations into assessment in mathematics education. ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.

NOVAK, J. D. y GOWIN, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Martínez Roca.

OJEDA, A. (1994). Students' understanding of the idea of conditional probability. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177 - 184). University of Lisbon.

ORTIZ DE HARO, J. (1996). *Significado de conceptos probabilísticos en los textos de bachillerato.* Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

ORTIZ DE HARO, J., BATANERO, C. y SERRANO, L. (1995). La aleatoriedad en los textos de bachillerato. En L. Berenguer et al. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas* (pp. 203-209). Universidad de Granada.

PÉREZ ECHEVERRIA, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico.* Madrid: Universidad Autónoma.

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. París: Presses Universitaires de France.

POINCARÉ, H. (1936). El Azar. Artículo publicado originalmente en lengua inglesa en Journal of the American Statistical Association, v. 31, (pp 10 - 30). Incluido en J. Newman (Ed), *Sigma. El mundo de las matemáticas*, 3, 68 - 85. Barcelona: Grijalbo.

POLLATSEK, A. y KONOLD, C.(1991)). Randomness is well enough understood to be misunderstood. *Journal of Behavioral Decision Making*, 47, 289-312.

POLYA, G. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

PUIG, L. y CERDAN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

RESNICK, S. I. (1992). *Adventures in Stochastics Processes.* Berlin: Birkhauser.

RÍOS, S . (1967). *Métodos estadísticos.* Madrid: Ediciones del Castillo.

ROMBERG, T.A. (1993): How one comes to know: models and theories of the learning of mathematics. En M. Niss (Ed.), *Investigations into assessment in mathematics education; an ICMI Study* (p. 97-111). Dordrecht: Kluwer.

ROMBERG, T. A., ZARINNIA, E.A. y COLLIS, K.F. (1991). A new world view of assessment in mathematics. En G. Kulm (Ed.), *Assessing higher order thinking in mathematics*. Washington: American Association for the Advancement of Science.

ROSS, B. M. (1955). Randomization of binary sequences. *American Journal of Psychology*, 68, 136 - 138.

SACHS, S. (1983). *Medición y evaluación en educación*. Barcelona: Herder.

SCHOLZ, R. W. (1983). *Decision making under uncertainty.* Amsterdam: North Holland.

SCHOLZ, R. W. (1987). *Cognitive strategies in stochastic thinking*. Boston: Reidel.

SCHOLZ, R. W. (1991). Psychological research in probabilistic understanding. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 213 - 249). Dordrecht: Kluwer.

SCHOOLS COUNCIL PROJECT ON STATISTICAL EDUCATION. (1980). *Statistics in your world*. London: Foulsham Educational.

SCOTT, P. (1988). *Introducción a la investigación y evaluación educativa.* México: UNAM.

SERRANO, L. (1993). *Aproximación frecuencial a la enseñanza de la probabilidad y concepciones iniciales sobre procesos estocásticos*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

SERRANO, L., BATANERO, C. y GODINO, J. D. (1991). Sucesiones de ensayos de Bernoulli y procesos estocásticos asociados. *Actas de las V Jornadas de Profesores de Matemáticas de THALES (pp. 233 - 247).* Granada: Sociedad Thales.

SERRANO, L., BATANERO, C. y GODINO, J. D. (1992). Use of the representativeness heuristic in a situation of simulation. Comunicación presentada en e*l VII International Congress on Mathematics Education*. Quebec, Canada.

SERRANO, L., BATANERO, C. y VALLECILLOS, A. (1994). Concepciones sobre la convergencia estocástica y heurística de la representatividad en una situación de simulación. *Actas de las VI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 571 - 574). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática.

SHAUGHNESSY, J. M. (1977). Misconceptions of probability: An experiment with a small - group, activity - based, model building approach to introductory probability at the college level. *Educational Studies in Mathematics*, 8 (3), 295 - 316.

SHAUGHNESSY, J. M. (1981). Misconceptions of probability: From systematic errors to systematic experiments and decisions. En A. P. Shulte y J. R. Smart (Eds.), *Teaching statistics and probability, 1981 yearbook* (pp. 90 - 100). Reston, VA: N.C.T.M.

SHAUGHNESSY, J. M. (1983). The Psychology of inference and the teaching of probability and statistics: Two sides of the same coin? En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 325 - 350). Amsterdam: North Holland.

SHAUGHNESSY, J. M. (1992). Research in probability and statistics: reflections and directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465 - 494). London: MacMillan.

SHAUGHNESSY, J. M, y ARCIDIACONO, M. (1993). *Visual encounters with chance. Math and the mind's eye. Volume VIII*. Portland State University: The Math Learning Center.

SHAUGHNESSY, J. M. y BATANERO, C. (1995). Una aproximación visual a la enseñanza de las probabilidades binomiales. *UNO*, 5, 103 - 112.

SHERMAN, S. E. y CORTY, E. (1984). Cognitive heuristics. En R. Wyer Jr. y T. S. Krull (Eds.), *Handbook of Social Cognition*. New Jersey: LEA.

SHULMAN, L. S. (1989). Paradigmas y Programas de investigación en la enseñanza. Una perspectiva contemporánea. En M. C. Wittrock (Ed), *La investigación de la enseñanza* (v. 1, pp. 9 - 92). Barcelona: Paidós.

SHULTE, A. P. y SMART, J. R. (1981). *Teaching statistics and probability,* 1981 yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

SIERPINSKA, A. (1990). Some remarks on understanding in Mathematics. *For the learning of Mathematics*, 10 (3), 24-36.

SIERPINSKA, A. (1994), *Understanding in Mathematics.* London: Falmer Press.

SIERRA, R. (1985). *Técnicas de investigación social.* Madrid: Paraninfo.

SIMON, H. A. (1955). A behavioral model of rational choice. *Quarterly Journal of Economics*, 69, 99 - 118.

SNOW R. E. y LOHMAN D. R. (1991), Implication of cognitive psychology for educational measurement. En R. L. Linn (Ed.), *Educational measurement* (Third ed.) (pp. 263- 331). New York: American Council on Education and Macmillan Publ.

SNYDER, D.L. (1975). *Random point processes.* New York: J. Wiley.

STEINBRING, H. (1986). L'independence stochastique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (3), 5 - 50.

STEINBRING, H. (1991). The concept of chance in everyday teaching. Aspects of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 503-522.

TAYLOR, S. y BOGDAN, R. (1986). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación.* Buenos Aires: Paidós.

THORNDIKE R. L. (1989). *Psicometría aplicada*. México: Limusa.

TOOHEY, P. G. (1995). *Adolescent perceptions of the concept of randomness.* Master Thesis. The University of Adelaide.

TRURAN, K. (1994). Children's understanding of random generators. Short oral communication. *Proceeding of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. University of Lisbon.

TRIESMAN, M. y FAULKNER, A. (1987). Generation of random sequences by human subjects: Cognitive operations or psychophysical process. *Journal of Experimental Psychology,* 116 (4), 337 - 355.

TVERSKY, A. y KAHNEMAN, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin,* 76, pp. 105-110. Incluido en D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: heuristics and biases* (pp. 23 - 31). Cambridge: Cambridge University Press.

TVERSKY, A. y KAHNEMAN,D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (1982), *Judgement under uncertainty: heuristics and biases* (pp. 84 - 100) Cambrige: Cambrige University Press.

VALLECILLOS JIMÉNEZ, A. (1992). *Nivel de significación en un contraste de hipótesis: Estudio teórico experimental de errores en estudiantes universitarios*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

VALLECILLOS JIMÉNEZ, A. (1994). *Estudio teórico - experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios.* Tesis doctoral Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

VON MISES, R. (1946). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid: Espasa Calpe (Edición original inglesa publicada en 1928).

VEGA, M. de (1984). *Introducción a la psicología cognitiva.* Madrid: Alianza Psicología.

WALLSTEN, T. S. (1981). Physician and medical student biases in evaluating diagnostic information. *Medical Decision Making*, 1, 145 - 164.

WALLSTEN, T. S. (1983). The theorical status of judgmental heuristics. En R.W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty* (pp. 21-38). Amsterdam: North-Holland.

WEBB, N. L. (1992). Assessment of students' knowledge of mathematics: step toward a theory. En D.A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

WEBER, R. (1986). *Basic Content Analysis.* London: Sage.

WHEELER, D. (1993). Epistemological issues and challenges to assessment: What is mathematical knowledge? En M. NISS (Ed.), *Investigations into assessment in mathematics education; an ICMI Study* (pp. 87-95). Dordrecht: Kluwer.

WITTGENSTEIN, L. (1953). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona: Crítica, 1988.

YIN, R. K. (1994). *Case study research.* London: Sage Publications.

ZABELL. S. L. (1992). The quest for randomness and its statistical applications. En F. Gordon and S. Gordon (Eds.), *Statistics for the XXI Century* (pp. 139-166). The Mathematical Association of America.

ZAKI, M. y PLUVINAGE, F. (1991). Demarches de resolution et de simulation face au problème de la ruine d'un joueur. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 149 - 181.

ANEXOS

ANEXO 1

GUIÓN DE ENTREVISTA

NOCIONES ELEMENTALES DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS
UN ESTUDIO SOBRE CONCEPCIONES INICIALES

1.1.- Juan lanza una moneda diez veces y su compañero Pedro va anotando los resultados obtenidos. Después Pedro muestra a Juan tres listas de resultados de las que Juan elegirá la verdadera. ¿Cuál crees tú que será la verdadera de las tres siguientes?:

A) C,C,C,C,C,X,X,X,X,X
B) C,X,C,X,C,X,C,X,C,X
C) C,X,C,C,C,X,X,C,X,C

¿Por qué?

1.2.- ¿Crees que se puede decir con seguridad el próximo resultado al lanzar de nuevo la moneda?

Explica tu respuesta.

2.1.- Saca una bola de las dos que hay en la bolsa, anota si es roja o verde y devuélvela a la bolsa.

Haz lo mismo otras dos veces.

2.2.- ¿Crees que esta forma es la única o podría haber salido de otra forma?

Si crees que hay otras posibles secuencias en la extracción de las bolas, escribe algunos de los resultados que podrían haber salido.

2.3.- De los últimos resultados que tú has escrito, ¿te parece más probable alguno de ellos?

¿Cuál?

¿Por qué?

2.4.- ¿Serías capaz de escribir todos los posibles resultados que podemos obtener al sacar tres veces una bola de la bolsa, si cada vez devolvemos la bola a la bolsa?

2.5.- Haz otras diez extracciones y anota el resultado.

2.6.- Viendo los resultados que has obtenido hasta ahora en el anterior ejercicio, ¿es más probable que la próxima bola sea roja o que sea verde?

¿Por qué?

2.7.- Si en el lanzamiento de una moneda se ha obtenido una cara, ¿es más probable que en el próximo lanzamiento sea cara o es más probable que sea cruz?

¿Por qué?

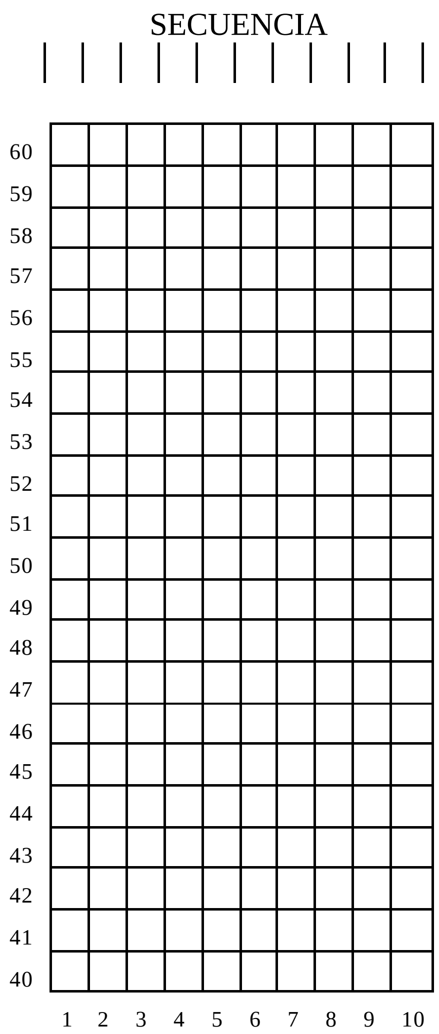
3.1.- Supongamos que un jugador juega a sacar una bola de una bolsa, en la que hay dos bolas, una roja y otra verde, apostando siempre a que sale roja. En cada prueba se juega una moneda. Si sale bola roja gana una moneda y si sale verde pierde una moneda. Al principio del juego tenía 50 monedas.

Haz esta prueba 10 veces, como si fueses el jugador y anota los resultados.

Según lo que has obtenido en tus lanzamientos, ¿cuántas monedas tendrías ahora?

Representa en el gráfico siguiente la frecuencia y el número de monedas que tienes después de cada una de las jugadas.

(Repetir tres veces el experimento de extraer diez bolas y anotar en el gráfico).



3.2.- Después de las cinco primeras jugadas nuestro jugador tenía 51 monedas. Ha pasado de 50 monedas a 51 siguiendo la trayectoria que se te indica:

R V R R V

¿Hay otras trayectorias posibles para pasar de 50 a 51 monedas?

Si tu respuestas es que sí, dibuja en otro gráfico alguna de las trayectorias que tu propones.

¿Podrías haber conseguido exactamente la misma ganancia o pérdida con otros resultados de rojas y verdes en las 5 jugadas?

Da un ejemplo, escribiendo la secuencia de rojas y verdes necesarias para obtener dicho camino.

3.3.- ¿Cuál es la ganancia máxima que podrías haber obtenido en las diez jugadas?

¿Crees que esto es poco probable o muy probable?

¿Por qué?

3.4.- Como puedes ver, en el primer juego que hicimos, después de 10 jugadas, el jugador ha estado por encima del eje (ganando) durante _____ jugadas, y por debajo (perdiendo) durante _____ jugadas. Ha habido _____ cortes con el eje, al pasar de un lado al otro del eje.

¿Piensas que ha tenido mucha o poca suerte en este juego?

¿Te parecen normales los resultados?

¿Por qué?

¿Cuántas veces te parece que sería lo más probable que se cruzará de un lado al otro del eje en 10 extracciones?

¿Por qué?

¿Cada cuántas jugadas piensas que sería más probable que la trayectoria cambiase del lado del eje?

Realiza otra simulación para comprobar tus conjeturas y anota en el gráfico la trayectoria.

3.5.- Si este jugador, durante 50 días seguidos jugase cada día sacando 10 bolas de la caja y comenzando cada día con 50 monedas:

¿Cuántos días piensas que acabaría el juego con más de 50 monedas?

¿Por qué?

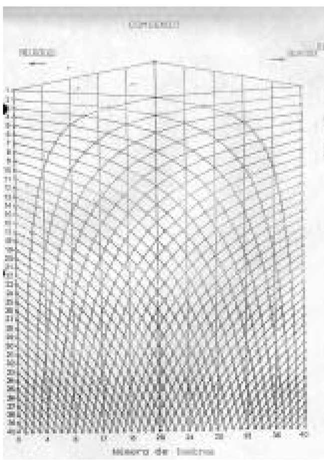
¿Cuánto dinero crees que habría ganado en total en los 50 días?

¿Por qué?

3.6.- El jugador tiene ahora 52 monedas y va a realizar dos jugadas más. ¿Es más probable que después de estas jugadas tenga otra vez 52 monedas, que tenga dos más o que tenga dos menos que antes?

¿Por qué?

4.1.- En la maternidad de la ciudad X están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa según el sexo del recién nacido. Por este motivo han ideado el sistema de registro que se muestra a continuación.



¿Cuál de estos casos te parece más probable? :

A) Que entre los próximos 10 nacimientos, 8 sean varones.
B) Que entre los próximos 100 nacimientos, 80 sean varones.

C) Las dos cosas anteriores son igual de probables.
Indica cuál te parece más probable y por qué.

4.2.- ¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos?

A) La fracción de chicos será mayor o igual a 7/10.
B) La fracción de chicos será menor o igual a 3/10.
C) La fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10.

Escribe lo que crees más probable.

Realiza una simulación, rellena el gráfico y compara con las previsiones.

4.3.- Fíjate en el gráfico que representa la variación de varones conforme aumente el número de nacimientos. ¿En qué parte de este gráfico crees que será más probable que la proporción de varones esté próxima a 0,5 ? :

A) En los 10 primeros nacimientos.
B) Entre los nacimientos 11 y 25.
C) Entre los nacimientos 26 al 40.
D) En todas partes iguales.

Indica tu respuesta y explica el por qué.

ANEXO 2

CUESTIONARIO PILOTO

Nombre... Apellidos...
Colegio o Instituto...

Ítem 1.-

Supón que estás lanzando una moneda 50 veces, sin hacer trampas. Pon C o X en cada cuadro (C quiere decir que obtienes una cara y X que obtienes una cruz).

Ítem 2.-

Pablo, usando 16 fichas numeradas 1,2,3,4,....16, juega de la siguiente forma; pone todas las fichas en una lata vacía y mueve con fuerza la lata. Raquel cierra los ojos y coge una ficha. Es la ficha número 7.

Pablo pone una cruz en la casilla número 7. La ficha 7 se pone otra vez en la caja, se vuelve a mover la lata y otro niño toma una ficha y repite lo que hizo Raquel.

1	2	3	4
5	6	7 X	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2.1. Imagínate que estás jugando a este juego y sacas treinta veces una ficha como arriba se dice. Pon 30 cruces en los lugares que creas según las fichas que saques.

2.2. Enséñanos ahora cómo quedarían las siguientes casillas si juegas este juego 16 veces. Pon 16 cruces.

Ítem 3.-

Se pidió a cuatro niños lanzar una moneda 40 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Ellos pusieron C para indicar una cara y X para indicar una cruz. Estos son sus resultados:

Daniel:
C X C X X C C X C X C C X X C X X C C X X C X C C X X C X C X C X C X C X
X C X

Martín:
C X X X C X X C C C X C X X X X X C X C X C C X C X X C C C C X X X C X X
C C C

Diana:
C X X X C X X C X C X X X C X X X X C C X X X C X X C X X C X X X X C X X
X C X

María:
X X X C X C C X X X C X C C C C C X C X C X X C X C C X X X X C C C X C C X
C C

3.1. ¿Hizo trampas Daniel? ¿Por qué?

3.2. ¿Hizo trampas Martín? ¿Por qué?

3.3. ¿Hizo trampas Diana? ¿Por qué?

3.4. ¿Hizo trampas María? ¿Por qué?

Ítem 4.-

Al juego que inventó Pablo han jugado cuatro niños y sus resultados son los que mostramos a continuación. ¿Crees que hay alguno de ellos que ha hecho trampas en el juego? Explica por qué lo crees así y señala si hizo o no trampas en cada uno de los casos.

X	X	X	X
x	X	X	X
X	X	X	X
X	x	X	x

Luis

4.1. ¿Ha hecho trampa Luis? ____

XX X		X	
	X	X X	X XX
X	x		X X
	X x		

Jaime

4.2. ¿Ha hecho trampa Jaime? ___

X x	xX		
		X x	X X
	x X		x X
	X x		X x

Jesús

4.3. ¿Ha hecho trampa Jesús? ___

		X	X X
		XXX	X X
X	X x		
x	XxX X		

María

4.4. ¿Ha hecho trampa María? ___

Explica tus respuestas.

Ítem 5.-

5.1.- ¿ Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- CCCXX
b.- XCCXC
c.- XCXXX
d.- CXCXC
e.- Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

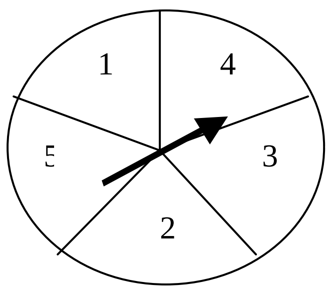
5.2.- Abajo listamos las mismas sucesiones de caras y cruces. ¿Cuál de las sucesiones es menos probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- CCCXX
b.- XCCXC
c.- XCXXX
d.- CXCXC
e.- Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

Ítem 6.-

Una ruleta se divide en 5 áreas de igual tamaño, como se muestra debajo.



Se da un fuerte impulso a la flecha de la ruleta. ¿Cuál de los siguientes resultados es más verosímil que resulte al girar la ruleta tres veces?

a.- 215 en este orden exacto
b.- Obtener los números 2, 1, 5, en cualquier orden
c.- Obtener los números 1, 1, 5 en cualquier orden
d.- Las opciones a y b son igual de verosímiles.
e.- Las opciones a, b, y c son igual de verosímiles.

Ítem 7.-

En la maternidad de la ciudad X están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa, según el sexo del recién nacido.

7.1.- ¿Cuál de estos casos te parece más probable?

a.- Que entre los próximos 10 nacimientos 8 o más sean varones.
b.- Que entre los próximos 100 nacimientos 80 o más sean varones.
c.- Las dos cosas anteriores son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

7.2.- ¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos?:
a.- La fracción de chicos será mayor o igual a 7/10.
b.- La fracción de chicos será menor o igual a 3/10.
c.- La fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10.
d.- Las tres cosas son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

Ítem 8:
8.1.- Cuando lanzamos dos dados simultáneamente:

a.- Hay las mismas posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
b.- Hay más posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
c.- Hay menos posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
d.- Es imposible saberlo.

Elige la opción que crees más adecuada y razona tu respuesta.

8.2.- Cuando lanzamos tres dados simultáneamente ¿cuál de estos resultados es más fácil que ocurra?

a.- Obtener un 5, un 3 y un 6.
b.- Obtener dos veces el 5 y una vez el 3.
c.- Obtener tres veces el número 5.

d.- Todos estos resultados son igualmente probables.

Escribe la opción que has elegido.

8.3.- ¿Es alguno de estos resultado menos probable que los otros dos?

Ítem 9.-

9.1.- El Centro Meteorológico de Springfields quiso determinar la precisión de su meteorólogo. Buscaron sus registros de aquellos días en los que el meteorólogo había informado que había un 70 por ciento de posibilidades de lluvia. Compararon estas predicciones con los registros que indicaban si llovió o no en esos días en particular.

La predicción del 70 por ciento de posibilidades de lluvia puede considerarse muy precisa, si llovió:

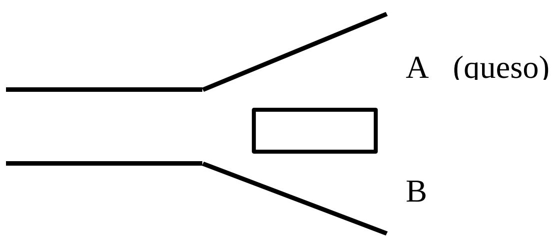
a.- Entre el 95 por ciento y el 100 por ciento de esos días.
b.- Entre el 85 por ciento y el 94 por ciento de esos días.
c.- Entre el 75 por ciento y el 84 por ciento de esos días.
d.- Entre el 65 por ciento y el 74 por ciento de esos días.
e.- Entre el 55 por ciento y el 64 por ciento de esos días.

Elige la opción que crees es la más apropiada.

9.2.- Supongamos que este hombre del tiempo dice que mañana hay un 70 por ciento de posibilidades de lluvia y mañana no llueve. ¿Que conclusión sacarías sobre su predicción de que había un 70 por ciento de probabilidades de lluvia?

Ítem 10.-

Al inicio del siguiente camino se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia su alimento situado al final del camino. En el orificio A ponemos queso y en el B nueces. Según un amigo mío que ha criado muchos hámsteres, 80 de cada 100 hámsteres prefieren el queso a las nueces. Los otros 20 prefieren las nueces.



10.A. ¿A dónde te parece más probable que llegue el hámster?

¿Por qué?

10.B. Si hacemos la prueba con un hámster y este se dirige hacia B, ¿piensas que mi amigo estaba equivocado?

¿Por qué?

10.C. Si hacemos la prueba con 10 hámsteres y 3 de ellos se dirigen a B (eligen las nueces), ¿pensarías que mi amigo estaba equivocado?

¿Por qué?

ANEXO 3

RESULTADOS DETALLADOS DEL ESTUDIO PILOTO

3.1. RESULTADOS SOBRE SECUENCIAS ALEATORIAS

Ítem 1:

Supón que estás lanzando una moneda 50 veces, sin hacer trampas. Pon C o X en cada cuadro (C quiere decir que obtienes una cara y X que obtienes una cruz).

Los aspectos que hemos analizado sobre las sucesiones generadas por los escolares de esta muestra piloto son los siguientes:

a) Número total de caras que presentan en la secuencia escrita por los alumnos, con objeto de ver hasta que punto se ajusta a la probabilidad teórica.

b) La longitud de la racha más larga. En las investigaciones previas se vio que, en general, los alumnos subestiman la longitud de las rachas de un mismo resultado. Presentamos a continuación un resumen de los datos de nuestros alumnos.

Frecuencias del número de caras en las secuencias producidas por los alumnos

Número de caras	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
14 años	1	0	0	5	3	12	11	7	0	1	1
18 años	2	0	1	0	1	11	7	7	0	0	0

En general los alumnos han sido bastante exactos al reflejar la frecuencia relativa de caras y cruces, ya que el número de caras se agrupa alrededor de 25 a 27 y el valor teórico esperado serían 25 caras. El valor medio del número de caras en las secuencias producidas por los alumnos de 14 años ha sido 25.39 y el obtenido en los alumnos de 18 años ha sido 25,24.

Sin embargo, los alumnos no reflejan suficientemente la variabilidad aleatoria, ya que la dispersión de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos es menor que la teórica. Puesto que se trata de secuencias de 50 resultados, se sigue una distribución binomial B (50, 0.5), cuya media es 25 y varianza 12.5. La varianza de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos de 14 años es sólo 3.53, es decir, una tercera parte la esperada teóricamente. Del mismo modo, la varianza de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos de 18 años es 3,29. No se observa una mejora con la edad en la apreciación de esta variabilidad, sino al contrario.

Frecuencias de la longitud de la racha más larga

Longitud de la racha	1	2	3	4	5	6	7	8	10	25	30
14 años	0	0	16	10	5	1	0	1	0	0	0
18 años	2	0	7	8	4	1	0	2	0	2	1

En general los alumnos producen secuencias demasiado cortas siendo la más larga, en general de 3 o 4 sucesos. Aparecen también los tipos que Green denomina "alternantes" (2 casos) que alternan entre cara y cruz en toda las secuencia, que han sido alumnos de 18 años. Aparecen también los "replicantes" que producen una sola racha o una racha muy larga de 25 e incluso 30 resultados seguidos iguales, también en este tipo de alumnos. Todos estos datos parecen apuntar a dificultades en la percepción de la independencia de los experimentos repetidos.

En consecuencia, de este primer ítem deducimos una correcta apreciación de los alumnos sobre la convergencia de la frecuencia relativa a la probabilidad teórica y una insuficiente percepción de la variabilidad de esta frecuencia relativa, así como de la independencia de los ensayos. Estos resultados nos animan a conservar este ítem como parte del cuestionario definitivo.

Otros aspectos que se analizarán en la muestra definitiva es la consistencia entre la primera y segunda parte de la secuencia producida y el número total de rachas producidas dentro de una misma secuencia.

Ítem 2:

Pablo, usando 16 fichas numeradas 1,2,3,4,....16, juega de la siguiente forma; pone todas las fichas en una lata vacía y mueve con fuerza la lata. Raquel cierra los ojos y coge una ficha. Es la ficha número 7.

Pablo pone una cruz en la casilla número 7. La ficha 7 se pone otra vez en la caja, se vuelve a mover la lata y otro niño toma una ficha y repite lo que hizo Raquel.

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

2.1. Imagínate que estás jugando a este juego y sacas treinta veces una ficha como arriba se dice. Pon 30 cruces en los lugares que creas según las fichas que saques.

2.2. Enséñanos ahora cómo quedarían las siguientes casillas si juegas este juego 16 veces. Pon 16 cruces.

En particular, hemos analizado en las distribuciones producidas por los alumnos:

a) La frecuencia de cuadros vacíos.

b) La existencia de cuadros con dos o más resultados.

c) El número máximo de resultados en un cuadro.

Frecuencia de alumnos según el número de cuadros vacíos en el apartado a)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12
14 años	14	5	8	4	2	2	2	2	0	1	1
18 años	15	4	3	2	2	0	1	0	1	0	0

Frecuencia de alumnos según el número cuadros vacíos en el apartado b)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	16
14 años	1	2	2	5	11	5	2	6	2	0	0	3	1
18 años	2	2	3	4	4	2	4	4	2	1	1	0	0

Aunque el número esperado de cuadros vacíos en el primer ítem es 6 ó 7 y en el segundo 2 ó 3, se observa que, en general se tiende a no dejar cuadros vacíos, o muy pocos, en el primer ítem. La tercera parte de los alumnos en cada grupo no ha dejado ningún cuadro vacío en el primer ítem. También hay algunos casos en que se dejan hasta 10 ó 12 cuadros vacíos lo que también se aparta mucho del valor teórico.

En el segundo ítem aumenta el número de alumnos que deja cuadros vacíos, aunque se subestima el número de ellos, ya que el número medio queda lejos del valor esperado.

Hemos percibido también que algunos niños sólo ponen 1 ó 2 cruces en cada cuadro, lo que sería equivalente a la utilización de rachas cortas, no percibiendo la variabilidad de los procesos estocásticos. En el modelo teórico vemos que se espera encontrar cuadros con hasta cinco puntos en el primero de los ítems.

Por otro lado, algunos niños no tienen en cuenta la distribución espacial de los cuadros vacíos, que colocan consecutivamente, mientras que en el modelo aleatorio estos cuadros vacíos debieran distribuirse algo más uniformemente, aunque alguno de ellos se encuentren adyacentes. Todos estos aspectos nos han llevado a la decisión de conservar este ítem para el estudio definitivo en el que analizaremos con más detalles las respuestas de los alumnos.

Ítem 3:

Se pidió a cuatro niños lanzar una moneda 40 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Ellos pusieron C para indicar una cara y X para indicar una cruz. Estos son sus resultados:

Daniel:
C X C X X C C X C X C C X X C X X C C X X C X C C X X C X C X C X C X C X X C X

Martín:
C X X X C X X C C C X C X X X X X C X C X C C X C X X C C C C X X X C X X C C C

Diana:
C X X X C X X C X C X X X C X X X X C C X X X C X X C X X C X X X X X C X X X C X

María:
X X X C X C C X X X C X C C C C C X C X C X X C X C C X X X X C C C X C C X C C

3.1. ¿Hizo trampas Daniel? ¿Por qué?
3.2. ¿Hizo trampas Martín? ¿Por qué?
3.3. ¿Hizo trampas Diana? ¿Por qué?
3.4. ¿Hizo trampas María? ¿Por qué?

Se trata de reconocer sucesiones aleatorias lineales. Es la inversa de la tarea propuesto en el ítem 1, en el sentido de que el experimento aleatorio considerado es el mismo: lanzamiento de una moneda no sesgada. El espacio muestral es, por tanto, compuesto de dos resultados equiprobables.

En este ítem se pide al alumno razonar sus respuestas, por lo que podremos comparar con las razones dadas por los estudiantes en la prueba usada por Green o bien refinar la clasificación de respuestas producidas por este autor. Estas respuestas se han categorizado del modo siguiente:

a) Hay un patrón demasiado regular en la secuencia.
b) La secuencia sigue un patrón demasiado irregular.
c) Las frecuencias de los distintos resultados son demasiado parecidas.
d) Las frecuencias de los distintos resultados son demasiado diferentes.
e) Hay rachas demasiado larga.
f) No hay ninguna racha larga (demasiado alternancia).
g) Debe haber igualdad de posibilidades en los sucesos.
h) No sabe.
i) No responde.
j) Patrón normal/anormal (esta respuesta la hemos añadido nosotros a las dadas por Green).

Clasificación de las respuestas de los alumnos en el apartado 1

		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
14 años	si	10	0	1	1	1	0	0	2	0	1
	no	0	1	1	5	0	0	4	0	6	8
18 años	si	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	no	0	0	7	0	0	0	0	9	1	6

En total 16 alumnos de 14 años y 6 de 18 años han dado una respuesta positiva a este ítem y el resto negativa. La mayoría de los alumnos consideran que esta sucesión no es aleatoria.

Las principales razones para considerar la sucesión como aleatoria han sido:

- El patrón de la secuencia se "ajusta " al modelo de lo que se piensa será una sucesión aleatoria (10 alumnos de 14 años y 4 de 18).
- Consideran que no hay rachas muy largas y además casi se alternan las caras con las cruces (6 alumnos de 14 años y 2 de 18).

Las razones para creer que la sucesión no es aleatoria son:

- Las frecuencias de los diferentes resultados son demasiado parecidas (1 alumno de 14 años y 7 de 18).

- Las frecuencias de los resultados son demasiado diferentes (5 alumnos de 14 años) o debe haber igualdad de posibilidades en los sucesos (5 alumnos de 14 años).
- El patrón no corresponde a lo que se espera en un suceso aleatorio (8 alumnos de 14 años y 6 de 18).

Clasificación de las respuestas de los alumnos en el apartado 2

		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
14 años	si	0	0	0	9	12	0	0	1	0	0
	no	0	0	3	0	0	2	0	1	7	6
18 años	si	0	0	3	0	0	0	0	1	1	1
	no	0	3	6	0	0	0	0	7	2	5

Las razones dadas por los alumnos para considerar esta sucesión como aleatoria han sido:

- Las frecuencias de los resultados son demasiado diferentes (9 alumnos de 15 años).
- Hay rachas demasiado largas (12 alumnos de 14 años).

Las razones dadas por los alumnos para considerar esta sucesión como no aleatoria han sido:

- Las frecuencias de los resultados son demasiado parecidas (3 alumnos de 14 años y 6 de 18).
- No dan razón para esta respuesta.

Clasificación de las respuestas de los alumnos en el apartado 3

		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
14 años	si	1	0	1	11	8	0	0	0	0	1
	no	0	0	1	1	1	0	0	1	7	8
18 años	si	2	0	0	11	2	0	0	0	2	2
	no	0	0	1	1	0	0	0	6	1	1

Las razones dadas por los alumnos para considerar esta sucesión como aleatoria han sido:

- Las frecuencias de los distintos resultados son demasiado diferentes (11 alumnos en cada grupo).
- Hay rachas demasiado largas (8 alumnos de 14 y 2 de 18).

Las razones dadas por los alumnos para considerar esta sucesión como no aleatoria han sido:

- Encuentran que el patrón no es normal (8 de 14 años y 1 de 18).
- No saben explicar su argumento (7 alumnos de 14 y 1 de 18).

Clasificación de las respuestas de los alumnos en el apartado 4

		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
14 años	si	1	0	1	2	5	0	0	0	0	2
	no	0	0	4	4	0	2	2	1	10	7
18 años	si	0	0	1	2	0	0	0	1	1	1
	no	0	3	5	0	0	0	0	7	4	4

Las razones dadas por los alumnos para considerar esta sucesión como aleatoria han sido:

- Hay rachas largas (5 alumnos de 14 años).
- No sabe explicar su elección (10 alumnos de 14 y 4 de 18 años).

Las razones dadas por los alumnos para considerar esta sucesión como no aleatoria han sido:

- Las frecuencias de los distintos resultados son demasiado parecidas (4 alumnos de 14 años y 5 de 18).
- Las frecuencias de los distintos resultados son demasiado diferentes (4 alumnos de 14 años).
- El patrón les parece anormal (7 alumnos de 14 y 4 de 18).
- No explican sus razones (10 alumnos de 14 años y 4 de 18).

Como resumen de este ítem vemos que existen diferentes razones para considerar una sucesión como aleatoria o no aleatoria y que varía en función del ítem, lo que hace pensar que el alumno es capaz de reconocer las características que hemos hecho variar en las diferentes secuencias. En la muestra definitiva podremos depurar la clasificación de los argumentos de los alumnos y comparar la consistencia de los argumentos expuestos y las características de las secuencias producidas por los alumnos.

Ítem 4:

Al juego que inventó Pablo han jugado cuatro niños y sus resultados son los que mostramos a continuación. ¿Crees que hay alguno de ellos que ha hecho trampas en el juego?

Explica por qué lo crees así y señala si hizo o no trampas en cada uno de los casos.

X	X	X	X
x	X	X	X
X	X	X	X
X	x	X	x

Luis

4.1. ¿Ha hecho trampa Luis? ____

XX X		X	
	X	X X	X XX
X	x		X X
	X x		

Jaime

4.2. ¿Ha hecho trampa Jaime? ___

X x	XX		
		X x	X X
	x X		x X
	X x		X x

Jesús

4.3. ¿Ha hecho trampa Jesús? ___

		X	X X
		XXX	X X
X	X x		
x	XxX X		

María

4.4. ¿Ha hecho trampa María? ___
Explica tus respuestas.

En cada uno de los casos se pide razonar la respuesta. Por similitud con el ítem anterior podemos prever los siguientes tipos de respuesta:

a) Hay un patrón demasiado regular en la secuencia.

b) La secuencia sigue un patrón demasiado irregular.
c) Las frecuencias de los distintos resultados son demasiado parecidas.
d) Las frecuencias de los distintos resultados son demasiado diferentes.
e) Hay una celda con demasiados puntos.
f) No hay ninguna celdas con varios puntos.
g) Debe haber igualdad de posibilidades en el número de puntos por cuadro, debe ser aleatorio.
h) No sabe.
i) No responde.
j) Patrón normal/anormal (respuesta añadida por nosotros a las dadas por Green).

Clasificación de las respuestas de los alumnos en el apartado 1

		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
14 años	si	28	0	1	0	0	0	0	3	0	2
	no	1	0	2	0	0	0	1	2	1	0
18 años	si	19	0	0	0	0	0	0	2	1	0
	no	0	0	0	0	0	0	2	2	3	0

Prácticamente todos los alumnos consideran la distribución de puntos como aleatoria. La razón exclusiva dada por los alumnos para considerar esta sucesión como aleatoria ha sido:

- Hay un patrón demasiado regular en la secuencia (28 niños de 14 años y 19 de 18 años). Es la respuesta mayoritaria. Los alumnos han superado el "deseo de regularidad en la distribución" descrito por Piaget e Inhelder (1951).

Clasificación de las respuestas de los alumnos en el apartado 2

		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
14 años	si	1	1	2	1	2	0	0	0	0	0
	no	0	7	3	3	0	0	11	4	2	6
18 años	si	0	0	0	1	0	1	0	3	1	0
	no	0	6	1	0	0	0	5	6	4	1

Prácticamente todos los alumnos consideran que la distribución de puntos no es aleatoria.

Las razones dadas por los alumnos para considerar esta sucesión como no aleatoria han sido:

- La secuencia sigue un patrón demasiado irregular (7 alumnos de 14 y 6 de 18 años).

Clasificación de las respuestas de los alumnos en el apartado 3

		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
14 años	si	1	0	18	0	1	1	0	2	0	0
	no	1	2	4	1	0	1	2	2	1	2
18 años	si	2	0	2	5	0	1	0	1	1	0
	no	0	3	0	0	0	0	3	6	5	0

- Debería haber igualdad de posibilidades para el número de puntos por cuadros (11 alumnos de 14 años y 5 de 18 años).
- Patrón anormal respecto a lo esperado (6 alumnos de 14 años y 1 de 18 años).
- No argumentan su respuestas (4 alumnos de 14 años y 6 de 18 años).

La razón principal dada por los alumnos para considerar esta sucesión como aleatoria ha sido:

- Las frecuencias de puntos en las distintas celdas son parecidas (18 alumnos de 14 años y 2 de 18).

Las razones dadas por los alumnos para considerar esta sucesión como no aleatoria han sido:

- Las frecuencias de puntos en las distintas celdas son demasiado parecidas (4 alumnos de 14 años).
- Hay un patrón demasiado irregular (2 alumnos de 14 años y 3 de 18)
- No dan argumentos (1 alumno de 14 y 5 de 18).

Clasificación de las respuestas de los alumnos en el apartado 4

		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
14 años	si	5	2	1	0	7	1	0	6	0	0
	no	0	2	0	5	1	0	3	4	1	3
18 años	si	3	0	0	4	1	1	0	1	1	0
	no	1	2	0	0	0	0	5	6	4	0

Las razones dadas por los alumnos para considerar esta sucesión como aleatoria han sido:

- Hay un patrón demasiado regular (5 alumnos de 14 y 3 de 18 años).
- Hay una celda con demasiados puntos (7 alumnos de 14 años y 1 de 18 años).
- No da argumentos (6 alumnos de 14 años y 1 de 18 años).

Las razones dadas por los alumnos para considerar esta sucesión como no aleatoria han sido:

- Las frecuencias de los distintos resultados son demasiado diferentes (5 alumnos de 14 años).
- Debería haber igualdad de posibilidades en el número de puntos por cuadros (3 alumnos de 14 y 5 de 18 años).
- No da argumento (4 alumnos de 14 años y 6 de 18 años).

3.2. Resultados sobre representatividad

Ítem 5:

5.1.- ¿Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- CCCXX
b.- XCCXC
c.- XCXXX
d.- CXCXC
e.- Las cuatro sucesiones son igualmente probables.

¿Por qué has dado esas respuestas?

Respuestas que dan en este apartado del ítem 5.1

Tipos de respuestas	a	b	c	d	a,b y d	* e	blanco
14 años	2	13	0	5	0	19	2
18 años	0	5	0	4	3	15	2

Entre los de 18 años, la mayor parte (15 alumnos) perciben la equiprobabilidad de las diferentes secuencias ; sin embargo 12 de ellos rechazan la opción a o la c; estos alumnos aplicarían la heurística de la representatividad. Entre los alumnos de 14 años aumente el número de los que aplicarían esta heurística.

Argumentos dados en el ítem 5.1

Respuestas	*a	b	*c	d	e	f
14 años	2	10	18	1	2	8
18 años	2	4	14	0	3	6

Los argumentos se han clasificado en la forma siguiente:

a) Deber haber igualdad de frecuencias.
b) Deber haber una fuerte alternancia.
c) Es cuestión de suerte, puede salir cualquier cosa.
d) Después de cada racha aumenta la probabilidad de esa cara.
e) Hay un patrón muy regular.
f) No sabe.

En general los alumnos argumentan que debe haber mayor alternancia entre los resultados y, en caso de considerar la equiprobabilidad de resultados, argumentan que, debido al carácter aleatorio puede obtenerse cualquier resultado. La correspondencia de estos argumentos con la respuesta a este ítem y al siguiente será analizada en la muestra definitiva.

5.2. Abajo listamos las mismas sucesiones de caras y cruces. ¿Cuál de las sucesiones es menos probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- CCCXX
b.- XCCXC
c.- XCXXX
d.- CXCXC
e.- Las cuatro sucesiones son igualmente poco plausibles.

¿Por qué has dado estas respuestas?

Respuestas dadas en el ítem 5.2

Tipos de respuestas	a	b	c	d	* e	blanco
14 años	5	0	11	9	14	2
18 años	1	1	12	2	11	2

Las respuestas que se consideran menos probables son la c (desigualdad de frecuencias) y la d (patrón demasiado regular). Entre los alumnos de 18 años, de los 18 que no contestan a la opción e, hay algunos que no consideran la equiprobabilidad.

Los argumentos se han clasificado en la siguiente forma:

a) Deber haber igualdad de frecuencias.

b) Deber haber una fuerte alternancia.
c) Es cuestión de suerte, puede salir cualquier cosa.
d) Después de cada racha aumenta la probabilidad de salir la otra cara.
e) Hay un patrón muy regular.
f) No sabe.

Argumentos dados en el ítem 5.2

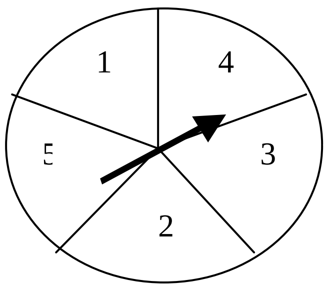
Respuestas	*a	b	*c	d	e	f
14 años	2	15	15	0	6	3
18 años	5	8	12	0	1	4

Entre las respuestas previsibles estarían las siguientes, obtenidas por Garfield:
a) Debe haber aproximadamente el mismo número de caras y cruces.
b) Debe haber frecuentes alternancias entre cara y cruz.
c) Cualquiera de las secuencias puede ocurrir.
d) Si obtienes varias caras seguidas, la probabilidad de que el siguiente lanzamiento sea una cruz aumenta.
e) Hay un patrón demasiado regular.

En nuestro caso, los alumnos, casi en su totalidad, han elegido las opciones b y c.

Ítem 6:

Una ruleta se divide en 5 áreas de igual tamaño, como se muestra debajo.



Se da un fuerte impulso a la flecha de la ruleta.

¿Cuál de los siguientes resultados es más verosímil que resulte al girar la ruleta tres veces?

a.- 215 en este orden exacto.
b.- obtener los números 2, 1, 5, en cualquier orden.
c.- obtener los números 1, 1, 5 en cualquier orden.
d.- a y b son igualmente verosímiles.
e.- a, b, y c son igualmente verosímiles.

Respuestas dadas en el ítem 6

Respuestas	a	* b	c	d	e	f
14 años	1	18	3	3	16	0
18 años	1	6	0	4	16	2

f) significa no contesta

Las respuestas más frecuentes han sido obtener 215 en cualquier orden (18 alumnos de 14 años y 6 de 18) y considerar equiprobables los resultados (16 alumnos en cada grupo). El primer caso indicaría una buena capacidad de razonamiento combinatorio y es notorio que un mayor grupo de alumnos de 14 años que de 18 haya dado esta respuesta. En el segundo caso se hace una extensión incorrecta de la regla de Laplace, al no tener en cuenta el distinto número de veces que puede obtenerse cada suceso.

Ítem 7:

En la maternidad de la ciudad X están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa, según el sexo del recién nacido.

7.1. ¿Cuál de estos casos te parece más probable?

a.- Que entre los próximos 10 nacimientos 8 o más sean varones.
b.- Que entre los próximos 100 nacimientos 80 o más sean varones.
c.- Las dos cosas anteriores son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

Este ítem fue ya empleado en las entrevistas previas a la preparación del cuestionario. Como en aquel caso, la respuesta más usual es considerar los dos casos equiprobables, aplicando la heurística de la representatividad. No obstante, algunos alumnos han dado la respuesta correcta, siendo más frecuente el caso de los alumnos más jóvenes. Esto parece indicar una adquisición de esta heurística a lo largo de la adolescencia.

Opciones elegidas en el ítem 7.1

Respuestas	* a	b	c	d
14 años	11	7	20	3
18 años	2	4	13	10

d) significa no contesta

Se han considerado los siguientes argumentos:

a) La muestra pequeña es más variable.
b) Por intuición.
c) Por igual proporción.
d) No entiende la pregunta.
e) Hay mayor proporción en muestras más grandes.
f) Igual probabilidad.
g) No contesta.
h) Nacen más niños que niñas.

Argumentos dados en el ítem 7.1

Argumentos	* a	b	c	d	e	f	g	h
14 años	5	7	7	2	2	0	10	8
18 años	0	8	7	2	3	1	8	0

Las respuestas más frecuentes han sido considerar sólo la igualdad de proporciones en ambas muestras (7 alumnos en cada grupo) o dar una respuesta confusa o no respuesta, lo que indica que el alumno actúa por intuición pues no es capaz de argumentar su respuesta.

No obstante es también interesante detectar el caso de los alumnos que consideran más segura la muestra pequeña (5 alumnos de 14 años) o que se fijan en el parecido entre la proporción en la población (mayor para los varones) y el tamaño de la muestra, casos ambos que aparecieron en las entrevistas.

7.2. ¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos?

a.- La fracción de chicos será mayor o igual a 7/10.
b.- La fracción de chicos será menor o igual a 3/10.
c.- La fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10.
d.- Las tres cosas son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

Respuestas dadas en el ítem 7.2

Respuestas	a	b	* c	d	e
14 años	6	6	14	15	0
18 años	6	0	10	10	3

e) significa no contesta

En este caso los alumnos esperan que se vuelva al valor esperado del número de nacimientos (14 alumnos de 14 años y 10 de 18). Sin embargo es también frecuente el empleo incorrecto de la regla de Laplace (15 y 10 alumnos respectivamente). En la muestra definitiva sería interesante analizar si estos alumnos que aplican incorrectamente la regla de Laplace son o no consistentes en las diferentes preguntas.

Los argumentos que dan en este ítem son:

a) No está determinado el número de niños que nacerán.
b) Está de acuerdo con la teoría.
c) No contesta.
d) Habrá igual número de niños que de niñas aproximadamente.
e) Habrá mayor número de varones.
f) Habrá mayor número de niñas.

La mayor parte de los alumnos considera la equiprobabilidad o bien cree que no es posible predecir el número de niños que nacerá, lo cual indica una correcta percepción del fenómeno de la convergencia de las frecuencias relativas.

Argumentos dados en el ítem 7.2

Argumentos	a	* b	c	* d	e	f
14 años	15	0	7	7	6	6
18 años	4	3	9	10	3	0

Ítem 8:

8.1.- Cuando lanzamos dos dados simultáneamente:

a.-Hay las mismas posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
b.-Hay más posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
c.-Hay menos posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
d.-Es imposible saberlo.

Elige la opción que crees más adecuada y razona tu respuesta.

Respuestas dadas en el ítem 8.1

Respuestas	* a	b	c	d	e
14 años	6	6	0	29	0
18 años	8	4	0	16	1

e) significa no contesta

Los resultados en este ítem parecen desalentadores a la hora de valorar el razonamiento combinatorio de los alumnos. Tan solo 3 alumnos de 18 años dan la respuesta correcta. Los alumnos piensan que, o bien los resultados son equiprobables, haciendo una incorrecta generalización de la regla de Laplace o que es imposible saber la respuesta a esta pregunta. Es decir, se declaran incapaces de aplicar la regla de Laplace, probablemente por dificultad de enumeración del espacio muestral, incluso en este caso tan sencillo. Hemos analizado también las respuestas, clasificándolas en los siguientes tipos de argumentos:

a) Es impredecible o depende de la suerte.
b) Es equiprobable.
c) Por el cálculo de probabilidades.
d) Es más difícil que salga dos veces el seis.
e) No sabe, no contesta.

Esos resultados se presentan en la tabla siguiente. La mayor parte de los alumnos dan un argumento de representatividad, Otros, consistentemente con la opción elegida en el ítem, se apoyan en que el resultado es impredecible. Aunque esto es cierto para cada caso particular, sí podremos predecir las frecuencias de los diversos resultados a la larga. También se apoyan en la equiprobabilidad de los resultados.

Argumento dados en el ítem 8.1

Argumentos	a	b	* c	* d	e
14 años	29	6	0	4	2
18 años	12	6	2	3	6

8.2.- Cuando lanzamos tres dados simultáneamente ¿cuál de estos resultados es más fácil que ocurra?

a.-Obtener un 5, un 3 y un 6.
b.- Obtener dos veces el 5 y una vez el 3.
c.- Obtener tres veces el número 5
d.- Todos estos resultados son igualmente probables

Escribe la opción que has elegido.

¿Es alguno de estos resultado menos probable que los otros dos?

Las respuestas sobre el resultado más probable se expresan a continuación. La mayoría de los alumnos cree que todos los casos son equiprobables, por lo que podríamos interpretar que se contradice con la respuesta D del caso anterior. En vista de ello, se decidió modificar este ítem para incluir la opción "es imposible saberlo" en la versión definitiva del cuestionario.

Respuestas dadas en el ítem 8.2

Respuestas	* a	b	c	d	e
14 años	13	0	1	24	3
18 años	5	0	0	22	2

Respuestas a la segunda parte del ítem 8.2

Argumentos	a	b	* c	d	e	f
14 años	16	3	1	1	17	3
18 años	10	0	0	0	11	8

3.3. RESULTADOS SOBRE EL "ENFOQUE EN EL RESULTADO AISLADO"

Esta parte del cuestionario evalúa la interpretación que hacen los alumnos de los enunciados frecuenciales de probabilidad. Nos hemos basado en las investigaciones de Konold.

Ítem 9:

9.1.- El Centro Meteorológico de Springfields quiso determinar la precisión de su meteorólogo. Buscaron sus registros de aquellos días en los que el meteorólogo había informado que había un 70 por ciento de posibilidades de lluvia. Compararon estas predicciones con los registros que indicaban si llovió o no en esos días en particular.

La predicción del 70 por ciento de posibilidades de lluvia puede considerarse muy precisa, si llovió:

a.- Entre el 95 por ciento y el 100 por ciento de esos días.
b.- Entre el 85 por ciento y el 94 por ciento de esos días.
c.- Entre el 75 por ciento y el 84 por ciento de esos días.
d.- Entre el 65 por ciento y el 74 por ciento de esos días.
e.- Entre el 55 por ciento y el 64 por ciento de esos días.

Elige la opción que crees es la más apropiada.

Respuestas dadas en el ítem 9.1

Respuestas	a	b	c	d	e	f
14 años	3	6	14	12	3	3
18 años	4	1	3	11	4	6

f) significa no contesta

Este ítem ha sido tomado del test de Garfield, quien lo construyó a partir de los trabajos de Konold. La comprensión de la probabilidad frecuencia en esta pregunta parece razonable, ya que la mayor parte de los alumnos ha elegido los valores próximos al 70 por ciento (opción d), aunque algunos alumnos eligen opciones sesgadas, en el sentido de que suben por encima del 75 por ciento. Estos alumnos no relacionarían la probabilidad teórica con la frecuencia relativa de días de lluvia, sobreestimando la frecuencia relativa, debido a que la probabilidad que se da de lluvia es alta. También se han dado algunos pocos casos en que el alumno estimaría la frecuencia a la baja.

9.2.- Supongamos que este hombre del tiempo dice que mañana hay un 70 por ciento de posibilidades de lluvia y mañana no llueve. ¿Qué conclusión sacarías sobre su predicción de que había un 70 por ciento de probabilidades de lluvia?

Patrones de las respuestas dadas:

a) Cae dentro del 30 % de probabilidades.
b) Es probables que llueva (está dentro del 70 %).
c) Se equivocó, debería llover el 100 % de los días.
d) Imposible sacar conclusiones.
e) No sabe, no contesta.

Resultados dados en el ítem 9.2, según los patrones previos

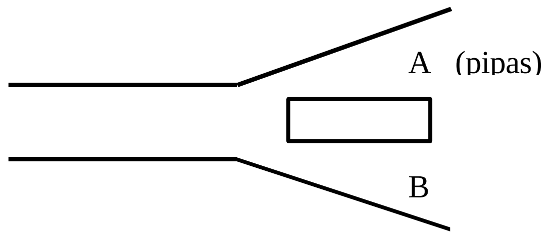
Respuestas	*a	b	c	d	e
14 años	7	3	19	8	4
18 años	14	3	9	1	2

En este apartado, los alumnos no conciben la probabilidad como una cuestión de azar, sino que consideran que el tiempo y su predicción, pese a la asignación probabilística, debe ser una cuestión segura. La mayor parte elige la opción c en la que se especifica que llovió el 100% de los días. Ésta es una respuesta típica que Konold ha encontrado en los sujetos que presentan el sesgo del "enfoque en el resultado aislado", Para estos sujetos, si se dice que lloverá con probabilidad 70 %, es que lloverá con seguridad, porque se concentran en la predicción de un sólo resultado y no en la frecuencia relativa de una serie de sucesos.

Otros sujetos creen que es imposible sacar conclusiones sobre el hecho planteado, Finalmente un grupo importante de alumnos hace una interpretación correcta de la probabilidad frecuencia, alegando que el hombre del tiempo podría estar dentro del 30% de posibilidades de que no lloviese.

Ítem 10:

Al inicio del siguiente camino se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia su alimento situado al final del camino. En el orificio A ponemos queso y en el B nueces. Según un amigo mío que ha criado muchos hámsteres, 80 de cada 100 hámsteres prefieren el queso a las nueces. Los otros 20 prefieren las nueces.



10.A. ¿A dónde te parece más probable que llegue el hámster?
¿Por qué?

Respuestas dadas en el ítem 10.A.

Respuestas	*a	b	c	d
14 años	26	13	2	0
18 años	26	1	1	1

Clave de respuestas del apartado a) de este ítem:

a) Es más probable el A (ir al queso.)
b) Es más probable el B (ir a las nueces.)
c) No se sabe.
d) No sabe, no contesta.

La mayor parte de los alumnos contesta correctamente a este ítem. Hay que significar que en este ítem, hay bastantes alumnos de 14 años que eligen la opción b), argumentando que los hámsteres prefieren los frutos secos al queso. Y sobre esto responden en todos los apartados de este ítem. Por ello se decidió en el cuestionario definitivo, variar el enunciado de este ítem.

La cuantificación de las respuestas dadas a cada uno de los argumentos de las respuestas se indican en la siguiente tabla y a continuación las claves de identificación de cada argumento.

Argumentos dados en el ítem 10.A.

Argumentos	a	b	c	d	e
14 años	13	19	4	2	3
18 años	0	11	12	3	3

Argumentos:
a) Le gustan los frutos secos.
b) Era un hámster del 80 % de posibilidades.
c) Hay más posibilidades para el queso.
d) Depende del azar.
e) No sabe, no contesta.

10.B. Si hacemos la prueba con un hámster y este se dirige hacia B ¿piensas que mi amigo estaba equivocado?

¿Por qué?

Respuestas dadas en el ítem 10.B.

Respuestas	si	no	blanco
14 años	6	22	1
18 años	3	23	3

En total 9 alumnos creen que había una equivocación en las frecuencias dadas. En definitiva se está razonando aplicando el "enfoque en el resultado aislado". Hay una mayoría de alumnos, sin embargo, que da una respuesta aparentemente correcta.

La cuantificación de las respuestas dadas a cada uno de los argumentos de las respuestas se indican en la siguiente tabla y a continuación las claves de identificación de cada argumento.

Argumentos dados en el ítem 10.B.

Argumentos	a	b	c	d	e	f
14 años	20	5	3	3	1	9
18 años	15	3	2	6	3	0

Argumentos:
a) Queda un 20 % de posibilidades.
b) Le gusta más el queso.
c) Se equivocó el amigo.
d) Depende del azar.

e) No sabe, no contesta.
f) No le gusta el queso.

Vemos que un porcentaje apreciable de alumnos da el argumento correcto, basándose en que una probabilidad del 20 por ciento implica que el suceso puede ocurrir y no sería demasiado raro. También aparecen aquí de nuevo los casos en que los alumnos emplean sus teorías previas sin guiarse por los datos objetivos. Por último otro grupo de alumnos aplica el "enfoque en el resultado aislado" o cree que, al ser el suceso aleatorio podría ocurrir cualquier cosa, independientemente de las probabilidades.

10.C. Si hacemos la prueba con 10 hámsteres y 3 de ellos se dirigen a B (eligen las nueces) ¿pensarías que mi amigo estaba equivocado?

¿Por qué?

Respuestas dadas en el ítem 10.C.

Respuestas	si	no	no sabe
14 años	5	27	9
18 años	3	24	2

La opción mayoritaria es que no. En la siguiente tabla presentamos los argumentos utilizados por los alumnos.

Argumentos dados en el ítem 10 .C.

Argumentos	a	b	c	d	e	f
14 años	23	8	3	0	2	5
18 años	20	3	2	1	3	0

Argumentos
a) Se mantiene la proporción.
b) Depende del hámster y no se puede predecir.
c) Cambian las posibilidades.
d) Hay pocos hámsteres.
e) No sabe, no contesta.
f) No comen queso.

La mayor parte de los alumnos han elegido la opción a; es decir, se basan en que el caso se ajusta exactamente a las probabilidades teóricas. Los sujetos que eligen b) y f) creen que el suceso es impredecible o se guían por sus teorías previas

Se trata de la interpretación de un enunciado de probabilidad frecuencial y permite discriminar los sujetos que emplean el "enfoque en el resultado aislado".

ANEXO 4

CUESTIONARIO FINAL

Nombre... Apellidos...
Colegio o Instituto...

Ítem 1.-

Supón que estás lanzando una moneda 50 veces, sin hacer trampas. Pon C o X en cada cuadro (C quiere decir que obtienes una cara y X que obtienes una cruz).

Ítem 2.-

Pablo, usando 16 fichas numeradas 1,2,3,4,....16, juega de la siguiente forma; pone todas las fichas en una lata vacía y mueve con fuerza la lata. Raquel cierra los ojos y coge una ficha. Es la ficha número 7.

Pablo pone una cruz en la casilla número 7. La ficha 7 se pone otra vez en la caja, se vuelve a mover la lata y otro niño toma una ficha y repite lo que hizo Raquel.

1	2	3	4
5	6	7 X	8
9	10	11	12
13	14	15	16

2.1. Imagínate que estás jugando a este juego y sacas treinta veces una ficha como arriba se dice. Pon 30 cruces en los lugares que creas según las fichas que saques.

2.2. Enséñanos ahora cómo quedarían las siguientes casillas si juegas este juego 16 veces. Pon 16 cruces.

Ítem 3.-

Se pidió a cuatro niños lanzar una moneda 40 veces. Algunos lo hicieron correctamente. Otros hicieron trampas. Ellos pusieron C para indicar una cara y X para indicar una cruz. Estos son sus resultados:

Daniel:
C X C X X C C X C X C C X X C X X C C X X C X C C X X C X C X C X C X
X C X

Martín:
C X X X C X X C C C X C X X X X X C X C X C C X C X X C C C C X X X C X X
C C C

Diana:
C X X X C X X C X C X X X C X X X X C C X X X C X X C X X C X X X X C X X
X C X

María:
X X X C X C C X X X C X C C C C C X C X C X X C X C C X X X X C C C X C C X
C C

3.1. ¿Hizo trampas Daniel? ¿Por qué?

3.2. ¿Hizo trampas Martín? ¿Por qué?

3.3. ¿Hizo trampas Diana? ¿Por qué?

3.4. ¿Hizo trampas María? ¿Por qué?

Ítem 4.-

Al juego que inventó Pablo han jugado cuatro niños y sus resultados son los que mostramos a continuación. ¿Crees que hay alguno de ellos que ha hecho trampas en el juego? Explica por qué lo crees así y señala si hizo o no trampas en cada uno de los casos.

X	X	X	X
x	X	X	X
X	X	X	X
X	x	X	x

Luis

4.1. ¿Ha hecho trampa Luis? _____

XX X		X	
	X	X X	X XX
X	x		X X
	X x		

Jaime

4.2. ¿Ha hecho trampa Jaime? ____

X x	xX		
		X x	X X
	x X		x X
	X x		X x

Jesús

4.3. ¿Ha hecho trampa Jesús? ____

		X	X X
		XXX	X X
X	X x		
x	XxX X		

María

4.4. ¿Ha hecho trampa María? ____

Explica tus respuestas.

Ítem 5.-
5.1.- ¿ Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- CCCXX
b.- XCCXC
c.- XCXXX
d.- CXCXC
e.- Las cuatro sucesiones son igual de probables.

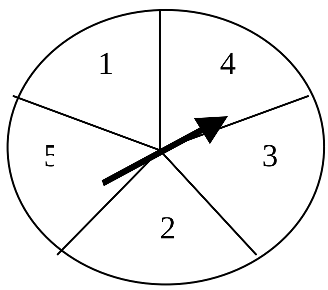
¿Por qué has dado esta respuesta?

5.2.- Abajo listamos las mismas sucesiones de caras y cruces. ¿Cuál de las sucesiones es menos probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a.- CCCXX
b.- XCCXC
c.- XCXXX
d.- CXCXC
e.- Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

Ítem 6.-
Una ruleta se divide en 5 áreas de igual tamaño, como se muestra debajo.



Se da un fuerte impulso a la flecha de la ruleta. ¿Cuál de los siguientes resultados es más verosímil que resulte al girar la ruleta tres veces?

a.- 215 en este orden exacto
b.- Obtener los números 2, 1, 5, en cualquier orden
c.- Obtener los números 1, 1, 5 en cualquier orden
d.- Las opciones a y b son igual de verosímiles.
e.- Las opciones a, b, y c son igual de verosímiles.

Ítem 7.-

En la maternidad de la ciudad X están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa, según el sexo del recién nacido.

7.1.- ¿Cuál de estos casos te parece más probable?

a.- Que entre los próximos 10 nacimientos 8 o más sean varones.
b.- Que entre los próximos 100 nacimientos 80 o más sean varones.
c.- Las dos cosas anteriores son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

7.2.- ¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos?:

a.- La fracción de chicos será mayor o igual a 7/10.
b.- La fracción de chicos será menor o igual a 3/10.
c.- La fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10.
d.- Las tres cosas son igual de probables.

Indica cuál te parece más probable y por qué.

Ítem 8:

8.1.- Cuando lanzamos dos dados simultáneamente:

a.- Hay las mismas posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
b.- Hay más posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
c.- Hay menos posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el 5.
d.- Es imposible saberlo.

Elige la opción que crees más adecuada y razona tu respuesta.

8.2.- Cuando lanzamos tres dados simultáneamente ¿cuál de estos resultados es más fácil que ocurra?

a.- Obtener un 5, un 3 y un 6.
b.- Obtener dos veces el 5 y una vez el 3.
c.- Obtener tres veces el número 5.
d.- Todos estos resultados son igualmente probables.

Escribe la opción que has elegido.

8.3.- ¿Es alguno de estos resultado menos probable que los otros dos?

Ítem 9.-

9.1.- El Centro Meteorológico de Springfields quiso determinar la precisión de su meteorólogo. Buscaron sus registros de aquellos días en los que el meteorólogo había informado que había un 70 por ciento de posibilidades de lluvia. Compararon estas predicciones con los registros que indicaban si llovió o no en esos días en particular.

La predicción del 70 por ciento de posibilidades de lluvia puede considerarse muy precisa, si llovió:

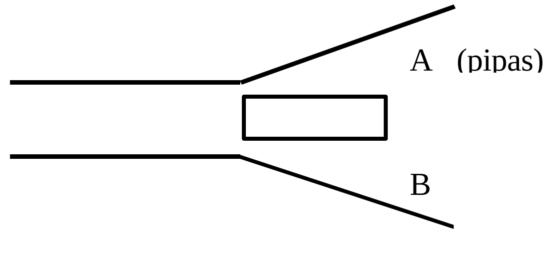
a.- Entre el 95 por ciento y el 100 por ciento de esos días.
b.- Entre el 85 por ciento y el 94 por ciento de esos días.
c.- Entre el 75 por ciento y el 84 por ciento de esos días.
d.- Entre el 65 por ciento y el 74 por ciento de esos días.
e.- Entre el 55 por ciento y el 64 por ciento de esos días.

Elige la opción que crees es la más apropiada.

9.2.- Supongamos que este hombre del tiempo dice que mañana hay un 70 por ciento de posibilidades de lluvia y mañana no llueve. ¿Que conclusión sacarías sobre su predicción de que había un 70 por ciento de probabilidades de lluvia?

Ítem 10.-

Al inicio del siguiente camino se coloca un hámster y se le deja que circule libremente hacia su alimento situado al final del camino. En el orificio A ponemos pipasa y en el B cacahuetes. Según un amigo mío que ha criado muchos hámsteres, 70 de cada 100 hámsteres prefieren las pipas a los cacahuetes. Los otros 30 prefieren los cacahuetes.



10.A. ¿A dónde te parece más probable que llegue el hámster?

¿Por qué?

10.B. Si hacemos la prueba con un hámster y este se dirige hacia B, ¿piensas que mi amigo estaba equivocado?

¿Por qué?

10.C. Si hacemos la prueba con 10 hámsteres y 3 de ellos se dirigen a B (eligen los cachuetes), ¿pensarías que mi amigo estaba equivocado?

¿Por qué?