Facultad de Ciencias
Departamento de Análisis Matemático

ALGUNOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACION EN DIMENSION INFINITA: APLICACIONES LINEALES Y MULTILINEALES QUE ALCANZAN SU NORMA

Francisco J. Aguirre Bago

Universidad de Granada
1995

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.

La presente memoria ha sido realizada en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, bajo la dirección de los Doctores María Dolores Acosta Vigil y Rafael Payá Albert.

El autor

Fdo: Francisco Aguirre Bago

Los Directores

Fdo: María Dolores Acosta Vigil   Fdo: Rafael Payá Albert

Universidad de Granada
1995

Contenidos

Introducción

La presente memoria pretende hacer algunas aportaciones al estudio de ciertos problemas de optimización en dimensión infinita, más concretamente, problemas referentes a la abundancia de operadores, formas multilineales o polinomios, en espacios de Banach de dimensión infinita, que alcanzan su norma.

Históricamente, el primero de los resultados acerca de este tipo de problemas es el Teorema de Bishop-Phelps. Obtenido en 1961, es uno de los pocos resultados en la teoría general de espacios de Banach que proporciona información no trivial sobre un espacio de Banach arbitrario, lo que invita a incluirlo entre los principios básicos del Análisis Funcional.

Resolviendo un problema que había permanecido abierto durante bastante tiempo, E. Bishop y R. Phelps prueban en [9] que el conjunto de los funcionales lineales continuos en un espacio de Banach, que alcanzan su norma, es denso en el espacio dual para la topología de la norma.

La versión más general del teorema, referente a la abundancia de puntos y funcionales de soporte de un conjunto convexo cerrado, fue obtenida por los mismos autores en 1963 [10]. En un trabajo posterior de R. Phelps [46] puede encontrarse un análisis de las principales ideas que intervienen en la demostración del teorema, que son las responsables de muchas de las extensiones y perfeccionamientos que después se han conseguido.

Hoy día puede decirse que las extensiones del Teorema de Bishop-Phelps constituyen un amplio, fructífero y bien diferenciado capítulo del Análisis Funcional, que incluye numerosos resultados, de gran interés en sí mismos, y que han encontrado aplicaciones en campos muy diversos. Tales resultados reciben la denominación genérica de "principios variacionales" o "principios de optimización perturbada" y, de manera muy simplista, puede decirse que responden al siguiente esquema: fijada una función f, definida en un cierto conjunto y con valores reales, se dan condiciones suficientes para que exista otra función g, tan "próxima" a f como se quiera, que alcance su máximo. En el Teorema de Bishop-Phelps, f y g vienen dadas por el valor absoluto de sendos funcionales lineales continuos en un espacio de Banach, restringidos a la bola unidad, y la proximidad viene definida en términos de la norma del espacio dual.

Los principios variacionales que más utilidad han demostrado fuera del Análisis Funcional prescinden de la linealidad de f y g, lo que los hace adaptables a situaciones muy variadas. El más representativo fue obtenido por I. Ekeland en 1972 [19] y la variedad de sus aplicaciones puede comprobarse acudiendo a la recopilación hecha por el propio autor [20]. El libro de R. Phelps [45] contiene una exposición sistemática de varios principios de optimización, desde el punto de vista del Análisis Convexo. Más recientemente, R. Deville, G. Godefroy y V. Zizler han obtenido un resultado bastante general que engloba la mayoría de los principios variacionales conocidos [15] (véase también [16]).

Pero volviendo al espíritu original del Teorema de Bishop-Phelps, pueden considerarse extensiones del mismo en las que la linealidad, o algún otro tipo de ingrediente algebraico, mantenga su protagonismo. Caben en este sentido dos posibilidades, la primera de las cuales, que aparece ya claramente sugerida en el trabajo original de Bishop y Phelps, consiste en hacer que otro espacio de Banach desempeñe el papel del cuerpo escalar y preguntarse por la eventual densidad del conjunto de los operadores que alcanzan su norma. Alternativamente, es posible seguir considerando funciones con valores escalares pero sustituyendo la linealidad por otro tipo de perfección algebraica: formas multilineales, polinomios ...

Los dos primeros capítulos de esta memoria se dedican al problema de la densidad de los operadores que alcanzan su norma. Dados dos espacios de Banach X e Y, consideremos el espacio $L(X,Y)$ de los operadores (siempre lineales y continuos) de X en Y con su norma natural, y sea $NA(X,Y)$ el subconjunto de $L(X,Y)$ formado por los operadores que alcanzan su norma, esto es, $T \in NA(X,Y)$ cuando $\|T\| = \|Tx_0\|$ para algún x_0 en la esfera unidad de X. El problema, planteado ya en [9] como hemos dicho, es decidir si se verifica o no la siguiente igualdad:

$$\overline{NA(X,Y)} = L(X,Y), \qquad (*)$$

cosa que, como se verá, no siempre ocurre.

Como no podía ser de otra forma, la investigación sobre este concreto problema de optimización ha sido bastante intensa, se ha prolongado durante más de tres décadas y a ella han contribuido autores como J. Lindenstrauss [41], J. Bourgain [11] y W. Gowers [30] por citar sólo algunos de los más prestigiosos. Todo este trabajo de investigación ha cristalizado en una serie de interesantes resultados que ponen de manifiesto la estrecha, y en ocasiones sorprendente, relación entre la eventual veracidad de $(*)$ y ciertas propiedades estructurales o geométricas de los espacios involucrados.

Las secciones introductorias de los Capítulos 1 y 2 contienen una exposición detallada de los resultados conocidos sobre operadores que alcanzan la norma. No obstante damos aquí una visión general de algunos precedentes que nos permita presentar, también muy brevemente, nuestras principales aportaciones.

En su trabajo pionero [41], publicado en 1963, J. Lindenstrauss da los primeros ejemplos de espacios X, Y tales que no se verifica $(*)$ y delimita el problema introduciendo dos propiedades que en cierto modo vertebran toda la investigación posterior. Concretamente, se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad A (de Lindenstrauss) si se verifica $(*)$ para todo espacio Y, mientras que Y tiene la propiedad B si $(*)$ es cierta para todo X. Nótese que la propiedad B está más en la línea del Teorema de Bishop-Phelps, ya que éste afirma que el cuerpo escalar tiene la propiedad B.

Lindenstrauss aporta una condición intrínseca a un espacio de Banach Y, que prueba ser suficiente para que Y verifique la propiedad B. Posteriormente, dicha condición, bautizada con el nombre de propiedad β, ha recibido bastante atención (véase, por ejemplo, [44], [49], [24], [25]). Dedicamos el primer capítulo a estudiar una debilitación de la propiedad β que hemos dado en llamar, en un alarde de imaginación, propiedad casi-β. Mejorando el resultado de Lindenstrauss recién citado, probamos que la propiedad casi-β implica ya la propiedad B (Teorema 1.14). Este principal resultado del Capítulo 1, junto con los primeros ejemplos de espacios con la propiedad casi-β que no verifican la β, aparecerá publicado en [2]. Hemos procurado aquí ampliar la gama de ejemplos y, de hecho, probamos que cualquier espacio de Banach, de dimensión sobre $\mathbb{R}$ mayor que dos, admite una norma equivalente para la cual verifica la propiedad casi-β y no la β (Corolario 1.26). Conseguimos así, en particular, nuevos ejemplos de espacios de dimensión finita con la propiedad B.

Para lograr una mejor comprensión de la propiedad casi-β y, al mismo tiempo, disponer de un test que ayude a decidir si ciertos espacios la verifican, hacemos un estudio de su relación con la estructura extremal de la bola dual (Teorema 1.20). Completamos el primer capítulo con un análisis de la estabilidad de la propiedad casi-β mediante ciertas construcciones. Por ejemplo, la propiedad casi-β (al igual que la B y a diferencia de la β) es estable por c_0-sumas (Proposición 1.25).

Como se ha comentado, los primeros ejemplos de espacios de Banach que no tienen la propiedad B aparecen ya en el trabajo de Lindenstrauss [41]. Posteriormente J. Uhl [55], R. Huff [34], J. Johnson y J. Wolfe [39] y W. Schachermayer [50] aportaron nuevos resultados en esta dirección. Sin embargo, el ejemplo más llamativo de espacio de Banach sin la propiedad B fue obtenido por W. Gowers en 1990 [30]: para $1 < p < \infty$, l_p no tiene la propiedad B. En el segundo capítulo de esta memoria, siguiendo una línea de argumentos que aparece ya sugerida en [1], hemos tratado de llevar un poco más lejos las técnicas de Gowers para obtener nuevos ejemplos de espacios sin la propiedad B. Para ello usamos ciertos preduales de espacios de Lorentz de sucesiones, cuya utilidad en problemas de operadores que alcanzan la norma se pone de manifiesto en el trabajo de Gowers. Estudiamos con cierto detalle la geometría de tales espacios para detectar la propiedad clave que propicia dicha utilidad: una forma muy especial de carecer de puntos extremos en la bola unidad (Lema 2.9). Esta propiedad permite probar que un operador definido en uno de estos espacios, con valores en un espacio estrictamente convexo, que alcance su norma, ha de ser de rango finito (Teorema 2.10). Explotando esta idea es como conseguimos nuevos ejemplos de espacios que no tienen la propiedad B. Destacamos el resultado más vistoso: ningún espacio de Banach uniformemente convexo de dimensión infinita tiene la propiedad B (Corolario 2.16).

En el tercer y último capítulo de la memoria abandonamos, aunque no del todo como se verá, el problema de la densidad de los operadores que alcanzan la norma, para considerar otro tipo de posibles extensiones del Teorema de Bishop-Phelps. De vuelta a funciones con valores escalares, pero con perfecciones algebraicas diferentes de la linealidad, cabe preguntarse por la posibilidad de obtener un teorema análogo al de Bishop-Phelps para formas multilineales. Más concretamente, dado un espacio de Banach X y un número natural k, podemos considerar el espacio de Banach $\mathcal{L}^k(X)$ de las formas k-lineales continuas en X; la norma de $\varphi \in \mathcal{L}^k(X)$ es, por definición, el supremo de los valores absolutos de φ en el producto cartesiano de k veces la bola unidad de X y decimos que φ alcanza su norma cuando dicho supremo es un máximo. Es lógico preguntarse si el conjunto $\mathcal{AL}^k(X)$ de las formas k-lineales continuas que alcanzan su norma es denso en el espacio $\mathcal{L}^k(X)$. Cuestiones similares pueden plantearse considerando, en lugar de formas multilineales, formas cuadráticas o polinomios homogéneos.

Aunque resulte extraño, dada la naturalidad de tales planteamientos, su estudio es muy reciente y se inicia en un trabajo de R. Aron, C. Finet y E. Werner [5] de próxima aparición. Dichos autores dan condiciones suficientes para la densidad de $\mathcal{AL}^k(X)$ en $\mathcal{L}^k(X)$, para cualquier natural k, y dejan abierto el problema de si dicha densidad se verifica en general, sin hipótesis sobre el espacio de Banach X.

En el Capítulo 3 contestamos negativamente la pregunta recién formulada: existe un espacio de Banach X tal que $\mathcal{AL}^k(X)$ no es denso en $\mathcal{L}^k(X)$ para $k \geq 2$ (Teorema 3.5 y Corolario 3.6). Concretamente X es, de nuevo, un predual de un espacio de Lorentz de sucesiones y las ideas que intervienen en la demostración son las mismas que ya se habían explotado en el capítulo anterior.

El caso $k = 2$ merece especial comentario, pues el espacio $\mathcal{L}^2(X)$, de formas bilineales, se identifica canónicamente con el espacio $L(X, X^*)$ de los operadores de X en su dual, y es fácil ver que, salvo esta identificación, $\mathcal{AL}^2(X)$ está contenido en el conjunto $NA(X, X^*)$ de los operadores que alcanzan su norma. De hecho construimos abundantes ejemplos de espacios de Banach X tales que $NA(X, X^*)$ no es denso en $L(X, X^*)$ (Teorema 3.9).

Con técnicas similares a las usadas en el caso multilineal y un poco de esfuerzo adicional, probamos también que no puede esperarse un teorema análogo al de Bishop-Phelps para formas cuadráticas y tampoco para polinomios homogéneos (Teoremas 3.14 y 3.17). Parte de los resultados del Capítulo 3, concretamente los referentes a formas bilineales y cuadráticas, aparecerán publicados en [3].

Hemos tratado de exponer y comentar brevemente los problemas abiertos que, en relación con los resultados de cada uno de los capítulos, nos han parecido más sugestivos. Algunos de ellos son problemas ya clásicos en la teoría de operadores que alcanzan la norma, problemas realmente difíciles sobre los que nuestros resultados podrían arrojar alguna luz. Otras veces se trata de problemas menos relevantes, pero quizá más accesibles, que vienen motivados directamente por nuestro trabajo.

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todos los miembros de este departamento por la amable acogida que me dispensaron cuando me incorporé a sus tareas. Sin su comprensión, esta memoria ni tan siquiera se habría podido plantear. También es de estricta justicia mencionar la labor de auténtico socorrista informático del Profesor Jerónimo Alaminos. Gracias por su ayuda. Y por su paciencia.

Si en todo viaje es más importante el camino que recorremos que la meta en sí, en la elaboración de una tesis doctoral esta circunstancia se hace aún más patente: las innumerables sesiones de trabajo que lleva consigo, con el aprendizaje que suponen (o deberían suponer), pueden considerarse un fin en sí mismas. He tenido el impagable privilegio de compartir esas horas con los Profesores María Dolores Acosta y Rafael Payá que han dirigido esta memoria. Desde mi llegada al departamento, mi deuda con ellos se ha ido haciendo tan larga que expresarla detalladamente excedería los límites de estas páginas. Por otra parte, afirmar que este trabajo no existiría sin ellos es simplemente ocioso. Permítaseme decir únicamente que el haber tenido la ocasión de descubrir su enorme talla, tanto profesional como humana, ha sido, desde mi punto de vista, el principal resultado de esta memoria.

Capítulo 1

Densidad de los operadores que alcanzan la norma

A. Antecedentes

Sea X un espacio de Banach y X^* su dual topológico. Recordemos que la norma de un funcional lineal y continuo $x^* \in X^*$ viene dada por:

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : x \in B_X\}$$

donde B_X denota la bola unidad cerrada de X. Cuando el supremo anterior es un máximo, es decir, cuando existe $x_0 \in S_X$ (la esfera unidad de X) tal que $|x^*(x_0)| = \|x^*\|$, decimos que el funcional x^* *alcanza su norma.* Es bien sabido que si X es reflexivo todo funcional alcanza su norma y, como caso particular del Teorema de James, el recíproco también es cierto. Una situación más general se presenta cuando el conjunto de los funcionales que alcanzan la norma es denso en X^* para la topología de la norma. Durante algún tiempo se llamó *subreflexivos* a los espacios de Banach que verifican esta condición hasta que, en 1961, E. Bishop y R. Phelps [9] demostraron que todo espacio de Banach es subreflexivo:

1.1 Teorema de Bishop-Phelps. *Sea X un espacio de Banach (real o complejo). El conjunto de los funcionales que alcanzan su norma es denso en X^* para la topología de la norma.*

De hecho, el teorema anterior admite una versión más general, debida a los mismos autores, referente a la abundancia de "funcionales de soporte" de un conjunto convexo y cerrado [10]. Nos ocupamos en este capítulo de otro tipo de extensiones del teorema, más concretamente de la posibilidad de sustituir funcionales por operadores.

Sean pues X e Y dos espacios de Banach y denotemos $L(X,Y)$ al espacio de los operadores lineales y continuos de X en Y, en el que siempre consideraremos la topología asociada a la norma usual de operadores:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\} \quad (T \in L(X,Y)).$$

Al igual que para los funcionales, diremos que un operador $T \in L(X,Y)$ *alcanza su norma* si existe $x_0 \in S_X$ tal que

$$\|Tx_0\| = \|T\|.$$

Llamando $NA(X,Y)$ al conjunto de los operadores que alcanzan su norma, resulta perfectamente natural, y de hecho así lo consideraron Bishop y Phelps en [9], preguntarse qué espacios de Banach verifican la siguiente igualdad:

$$\overline{NA(X,Y)} = L(X,Y). \tag{$*$}$$

En 1963, J. Lindenstrauss [41] observa que $NA(X,Y)$ no siempre es denso y aporta un primer resultado general en la dirección positiva: *para cualesquiera espacios de Banach X e Y, el conjunto de los operadores lineales y continuos de X en Y cuyos segundos adjuntos alcanzan su norma es denso en $L(X,Y)$.* Nótese que si un operador alcanza su norma, también la alcanza su adjunto, pero no recíprocamente.

Diez años más tarde, afinando las técnicas de Lindenstrauss, V. Zizler probó el siguiente teorema, que tendremos ocasión de usar más adelante:

1.2 Teorema (Zizler [57, Proposition 4]). *Para cualesquiera espacios de Banach X e Y, el conjunto de los operadores lineales y continuos de X en Y cuyos primeros adjuntos alcanzan su norma, es denso en $L(X,Y)$.*

Por otra parte, Lindenstrauss, considerando que la pregunta formulada por Bishop y Phelps es demasiado general como para tener una respuesta satisfactoria, propone desdoblar el problema fijando la atención en cada uno de los dos espacios e introduce las que, desde entonces, son conocidas como "propiedades A y B de Lindenstrauss": diremos que el espacio X tiene la *propiedad A* si se verifica $(*)$ para todo espacio de Banach Y, mientras que Y tendrá la *propiedad B* si se verifica $(*)$ para todo X. Con esta nomenclatura, el Teorema de Bishop-Phelps afirma simplemente que el cuerpo escalar tiene la propiedad B, mientras que del Teorema 1.2, o de su precedente obtenido por Lindenstrauss, se deduce que todo espacio reflexivo tiene la propiedad A.

El resultado más importante sobre la propiedad A y probablemente el más profundo de toda la teoría de operadores que alcanzan su norma, fue obtenido por J. Bourgain en 1977 [11], probando que:

Todo espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym tiene la propiedad A.

En cierto modo este resultado es óptimo, ya que, mediante un ligero retoque de las técnicas de Bourgain, R. Huff [34] consiguió probar que, recíprocamente:

Un espacio de Banach que no verifique la propiedad de Radon-Nikodym, se puede renormar equivalentemente de forma que no verifique la propiedad A.

Volviendo al trabajo de Lindenstrauss, conviene resaltar las propiedades geométricas que en él aparecían ya como condiciones suficientes para las propiedades A y B. Para que un espacio verifique la propiedad A, basta con que *su bola unidad sea la envolvente convexo-cerrada de un conjunto de puntos uniformemente expuestos.* Posteriormente, W. Schachermayer [49] introdujo una propiedad algo más restrictiva, llamada propiedad α. Como condición suficiente para la propiedad B, Lindenstrauss aportó la que después fue denominada propiedad β. Las definiciones son como sigue:

1.3 Definición. Se dice que un espacio de Banach X tiene la *propiedad* α si existe un conjunto $\{(x_\lambda, x_\lambda^*) : \lambda \in \Lambda\} \subset S_X \times S_{X^*}$ y una constante $\rho < 1$ tales que:

(i) $x_\lambda^*(x_\lambda) = 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda.$

(ii) $\lambda, \mu \in \Lambda, \ \lambda \neq \mu \Rightarrow |x_\lambda^*(x_\mu)| \leq \rho.$

(iii)$^\alpha$ $\|x^*\| = \sup\{|x^*(x_\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x^* \in X^*.$

Si se verifican (i) y (ii) y, en lugar de (iii)$^\alpha$, exigimos

(iii)$^\beta$ $\|x\| = \sup\{|x_\lambda^*(x)| : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in X,$

se dice que X tiene la *propiedad* β.

La dualidad (parcial) entre las propiedades α y β es patente. Un espacio X tiene la propiedad α si, y sólo si, X^* tiene la β con funcionales w^*-continuos. En particular un espacio reflexivo tiene la propiedad α (resp. β) si, y sólo si, su dual tiene la β (resp. α). Como ya se ha comentado, se tiene:

1.4 Teorema [49, Proposition 1.3], [41, Proposition 3]. *Todo espacio de Banach con la propiedad α (resp. β) tiene la propiedad A (resp. B).*

El principal interés de las propiedades α y β radica en que son muy generales bajo el punto de vista isomórfico. De hecho, J. Partington demostró en 1982 [44, Theorem 1] que:

Todo espacio de Banach admite una norma equivalente con la propiedad β.

Con respecto a la propiedad α, la situación no es tan clara; W. Schachermayer [49, Theorem 4.4] probó que:

Todo espacio de Banach débilmente compactamente generado puede renormarse equivalentemente con la propiedad α.

Este resultado fue mejorado recientemente por B. Godun y S. Troyanski [28] [29], probando que es suficiente con que el espacio contenga un sistema biortogonal de cardinal igual al carácter de densidad. El primer ejemplo de un espacio de Banach que no puede renormarse con la propiedad α aparece en el trabajo ya citado de Schachermayer, que aprovecha un espacio construido por S. Shelah [51] usando un axioma de la teoría de conjuntos adicional a los usuales. Admitiendo la hipótesis del continuo, K. Kunen construyó un espacio topológico compacto de Hausdorff K tal que $C(K)$ no puede renormarse equivalentemente con la propiedad α (véase [43, § 7]).

Hasta aquí hemos tratado de presentar una reseña de los resultados más sobresalientes acerca del problema de la densidad de los operadores que alcanzan la norma, limitándonos, de momento, a los resultados en la dirección positiva. Al principio del segundo capítulo comentaremos, también brevemente, algunos resultados negativos o contraejemplos. Una recopilación bastante exhaustiva de los resultados conocidos sobre operadores que alcanzan la norma se puede encontrar en [26].

El principal objetivo de este capítulo es dar un pequeño paso adelante en la dirección positiva. Introduciremos una propiedad más general que la β, que hemos dado en llamar propiedad casi-β, y probaremos, como resultado principal, que la propiedad casi-β implica la B. Discutiremos con detalle hasta qué punto la propiedad casi-β es más general y más estable que la β.

B. Algunas observaciones sobre la propiedad β

Como ya se ha dicho, la propiedad β fue introducida por Lindenstrauss como una condición suficiente para que un espacio de Banach tenga la propiedad B. De hecho en la literatura no aparece explícitamente ningún espacio de Banach con la propiedad B que no tenga la β, ejemplo que, como se verá, es fácil de conseguir aprovechando que la propiedad B es estable por ciertas construcciones que sin embargo no conservan la β.

Repetimos la definición de la propiedad β con una notación diferente que será más cómoda en lo que sigue. Intentamos con ello, además de evitar un exceso de subíndices, centrar la atención en el conjunto de funcionales, que es el auténtico protagonista.

1.5 Definición. Un espacio de Banach Y tiene la *propiedad β* cuando existe un conjunto $A \subset S_{Y^*}$, una aplicación $\sigma : A \longrightarrow S_Y$ y una constante $\rho < 1$ verificando:

i) $y^*(\sigma(y^*)) = 1 \ \forall y^* \in A$.

ii) $y^*,\ z^* \in A,\ y^* \neq z^* \Rightarrow |z^*(\sigma(y^*))| \leq \rho$.

iii) $\|y\| = \sup\{|y^*(y)| : y^* \in A\} \ \forall y \in Y$.

Cuando sea necesario mencionar explícitamente alguno de los elementos que aparecen en la definición, diremos que Y verifica la propiedad $\beta(A, \sigma, \rho)$. En algún caso no será preciso ser tan explícito y diremos, por ejemplo, que Y tiene la propiedad β con constante ρ.

El objeto de este capítulo es, como ya se ha dicho, obtener una condición suficiente para que un espacio de Banach verifique la propiedad B, más general que la propiedad β y que disfrute de mayor estabilidad. Motivamos nuestro estudio con algunas sencillas observaciones sobre la propiedad β, empezando con algunos ejemplos ilustrativos.

1.6 Ejemplos. **(i)** Se comprueba inmediatamente que el espacio l_∞ de las sucesiones acotadas de escalares, con su norma natural, tiene la propiedad β con constante 0, pues basta tomar $A = \{e_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ y $\sigma(e_n^*) = e_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, donde

$$e_n^*(x) = x(n) \qquad (x \in l_\infty, n \in \mathbb{N}),$$

$$e_n(k) = 0 \text{ si } k \neq n, \quad e_n(n) = 1, \quad (n, k \in \mathbb{N}).$$

Es claro que cualquier subespacio cerrado de l_∞ que contenga al espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero, tendrá igualmente la propiedad β.

(ii) De manera formalmente más general, sea L un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff con un conjunto denso de puntos aislados; denotemos por $C_b(L)$ al espacio de Banach de todas las funciones continuas y acotadas en L, con su norma natural, y por $C_0(L)$ al subespacio cerrado de $C_b(L)$ formado por las funciones que se anulan en el infinito. Si Y es un subespacio cerrado de $C_b(L)$ que contenga a $C_0(L)$, entonces Y tiene la propiedad β con constante cero.

En efecto, denotando, como es usual, por δ_t al funcional de evaluación en un punto $t \in L$, basta tomar $A = \{\delta_t : t \in D\}$ donde D es un conjunto denso de puntos aislados de L y definir $\sigma(\delta_t)$ como la función característica del punto t para cada $t \in D$. Es claro entonces que Y verifica la propiedad $\beta(A, \sigma, 0)$.

Recíprocamente, es rutinario comprobar que si un espacio de Banach Y verifica la propiedad β con constante cero, existe un espacio localmente compacto de Hausdorff L y un isomorfismo isométrico de Y sobre un subespacio cerrado de $C_b(L)$ que contiene a $C_0(L)$.

Los ejemplos anteriores aparecen de forma más o menos explícita en el trabajo de Lindenstrauss [41]. Igual ocurre con la siguiente caracterización de los espacios normados de dimensión finita con la propiedad β, cuya demostración incluimos con detalle, pues sirve de motivación para un cierto tipo de argumentos que usaremos también en ambientes más generales.

1.7 Proposición. *Sea Y un espacio normado de dimensión finita. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *Y tiene la propiedad β.*

ii) *El conjunto $\mathrm{Ext}(B_{Y^*})$ de los puntos extremos de B_{Y^*} es finito "salvo giros". Más concretamente, existe un conjunto finito $F \subset Y^*$ tal que $\mathrm{Ext}(B_{Y^*}) = \mathbb{T}F$ donde $\mathbb{T}$ es el conjunto de los escalares de módulo 1, $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\}$.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que Y tiene la propiedad $\beta(A, \sigma, \rho)$. Dados $y^*, z^* \in A$, $y^* \neq z^*$, observamos que:

$$\|y^* - z^*\| \geq |(y^* - z^*)(\sigma(y^*))| \geq 1 - \rho > 0.$$

La compacidad de la bola de Y^* obliga a que A sea un conjunto finito.

Como parte de la definición de la propiedad β tenemos que

$$\|y\| = \max\{|y^*(y)| : y^* \in A\} \qquad \forall y \in Y$$

equivalentemente, $B_Y = A^\circ$, el polar (absoluto) de A. Por el teorema del bipolar, $B_{Y^*} = A^{\circ\circ}$ es el cierre de la envolvente absolutamente convexa de A, es decir,

$$B_{Y^*} = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}A)$$

donde $\overline{\mathrm{co}}$ denota envolvente convexo-cerrada. Por el Teorema de Krein-Milman "revertido" (véase por ejemplo [33, § 13.B, Theorem]) deducimos que

$$\mathrm{Ext}(B_{Y^*}) \subset \mathbb{T}A,$$

ya que $\mathbb{T}A$ es cerrado al ser A finito. Por tanto se cumple *ii*) con

$$F = A \cap \mathrm{Ext}(B_{Y^*}).$$

ii) $\Rightarrow$ *i*) Supongamos que $\mathrm{Ext}(B_{Y^*}) = \mathbb{T}F$ donde F es un conjunto finito. El Teorema de Krein-Milman nos asegura que $B_{Y^*} = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{T}F)$ con lo que el Teorema de Hahn-Banach nos da,

$$\|y\| = \max\{|y^*(y)| : y^* \in F\} \qquad \forall y \in Y.$$

Siendo F finito, es claro que podemos encontrar un subconjunto A de F que todavía verifique

$$\|y\| = \max\{|y^*(y)| : y^* \in A\} \qquad \forall y \in Y$$

y que sea minimal con respecto a dicha condición. Dado $y^* \in A$, tal minimalidad nos garantiza la existencia de un $y \in Y$ tal que $|z^*(y)| \leq 1$ para $z^* \in A \setminus \{y^*\}$ mientras que $|y^*(y)| > 1$; tomamos entonces $\sigma(y^*) = \dfrac{y}{y^*(y)}$. Es claro que

$$\rho := \max\{|z^*(\sigma(y^*))| : y^*, z^* \in A, y^* \neq z^*\} < 1$$

con lo que Y verifica la propiedad $\beta(A, \sigma, \rho)$. $\square$

En el caso real, la caracterización recién probada tiene una interpretación geométrica muy intuitiva: un espacio normado real de dimensión finita tiene la propiedad β si, y sólo si, su bola unidad es un *poliedro* (intersección finita de semiespacios cerrados).

Completamos nuestro estudio de la propiedad β en espacios de dimensión finita estableciendo una curiosa relación entre la dimensión del espacio y los posibles valores de la constante ρ.

1.8 Proposición. *Sea n un número natural.*

i) *Si un espacio normado n-dimensional Y tiene la propiedad β con constante $\rho < \frac{1}{n}$, entonces tiene la propiedad β con constante cero.*

ii) *Recíprocamente, dado ρ_0 verificando $\frac{1}{n} \leq \rho_0 < 1$, existe un espacio normado n-dimensional Y que tiene la propiedad β con constante ρ_0 y no la tiene con constante $\rho < \rho_0$.*

Demostración. i) Sea Y un espacio normado n-dimensional con la propiedad $\beta(A, \sigma, \rho)$, siendo $\rho < \frac{1}{n}$. Puesto que el conjunto A separa puntos, deberá contener una base de Y^*, $\{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*\}$. Probaremos que A no puede contener ningún otro funcional.

Supongamos, por el contrario, que existe $y_0^* \in A$ con $y_0^* \neq y_j^*$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Pongamos

$$a_{i,j} = y_j^*(\sigma(y_i^*)), \quad i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Por definición de la propiedad β se tendrá:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{i,i} = 1 & i = 0,1,\ldots,n \\ |a_{i,j}| \leq \rho & i,j = 0,1,\ldots,n, \quad i \neq j \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Por otra parte, y_0^* se podrá expresar como combinación lineal de los elementos de la base $\{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*\}$:

$$y_0^* = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j^*,$$

de donde

$$a_{i,0} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j} \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Para $i = 1,2,\ldots,n$ tendremos, usando (1):

$$\rho \geq |a_{i,0}| = \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{i,j}\right| \geq |\lambda_i| - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}||\lambda_j| \geq |\lambda_i| - \rho \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |\lambda_j|;$$

sumando las n desigualdades y teniendo en cuenta que $\rho < \frac{1}{n}$, obtenemos

$$1 > n\rho \geq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| - (n-1)\rho \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \geq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|.$$

Por otra parte, tenemos

$$1 = |a_{0,0}| = \left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_{0,j}\right| \leq \rho \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|$$

y hemos llegado a contradicción.

Así pues $A = \{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*\}$ es una base de Y^*. Para cada $i = 1,2,\ldots,n$, podemos entonces encontrar $y_i \in S_Y$ tal que $y_j^*(y_i) = 0$ para $j \neq i$; puesto que

$1 = \|y_i\| = \max\{|y_j^*(y_i)| : 1 \leq j \leq n\}$, deducimos que $|y_i^*(y_i)| = 1$. Definiendo entonces

$$\tilde{\sigma}(y_i^*) = \frac{y_i}{y_i^*(y_i)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

es claro que Y verifica la propiedad $\beta(A, \tilde{\sigma}, 0)$.

ii) Sea $\frac{1}{n} \leq \rho_0 < 1$, fijemos una base $\{e_j : 1 \leq j \leq n\}$ de $\mathbb{K}^n$, consideremos el conjunto de funcionales $A = \{y_j^* : 0 \leq j \leq n\}$ definidos por

$$y_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \lambda_j \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$y_0^*\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = \frac{1}{n\rho_0} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

y sea $Y = \mathbb{K}^n$ con la norma dada por:

$$\|y\| = \max\{|y_j^*(y)| : 0 \leq j \leq n\} \qquad (y \in \mathbb{K}^n).$$

Tomando

$$\sigma(y_j^*) = e_j + \frac{\rho_0 - 1}{n - 1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} e_i \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sigma(y_0^*) = \rho_0 \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

es inmediato comprobar que Y verifica la propiedad $\beta(A, \sigma, \rho_0)$.

Resta probar que si Y verifica la propiedad $\beta(\tilde{A}, \tilde{\sigma}, \rho)$ se ha de tener $\rho \geq \rho_0$. Empezamos viendo que los elementos de A deben estar en $\tilde{A}$, salvo multiplicación por escalares de módulo uno. En efecto, para $j = 0, 1, \dots, n$, existirá $z_j^* \in \tilde{A}$ tal que $|z_j^*(\sigma(y_j^*))| = 1$; por el teorema del bipolar, B_{Y^*} es la envolvente absolutamente convexa de A, luego podremos escribir

$$z_j^* = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{i,j} y_i^*$$

con $\lambda_{i,j} \in \mathbb{K}$, $\sum_{i=0}^{n} |\lambda_{i,j}| = 1$, pero entonces :

$$1 = |z_j^*(\sigma(y_j^*))| \leq |\lambda_{j,j}| + \rho_0 \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} |\lambda_{i,j}| \leq \sum_{i=0}^{n} |\lambda_{i,j}| \leq 1$$

de donde se deduce que $\lambda_{i,j} = 0$ para $i \neq j$ y $z_j^* = \lambda_{j,j} y_j^*$ con $|\lambda_{j,j}| = 1$, como se quería.

Sea ahora $\tilde{\sigma}(z_0^*) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$; puesto que

$$1 = \left| \lambda_{0,0} y_0^* \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i \right) \right| \leq \frac{1}{n\rho_0} \sum_{i=1}^{n} |\mu_i|$$

se tendrá $|\mu_i| \geq \rho_0$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, con lo cual

$$\rho \geq |z_i^*(\tilde{\sigma}(z_0^*))| = |y_i^*(\tilde{\sigma}(z_0^*))| = |\mu_i| \geq \rho_0. \qquad \square$$

Dedicamos el resto de esta sección a discutir la estabilidad de las propiedades B y β mediante ciertas operaciones.

Recordemos la noción de c_0-suma de espacios de Banach: dada una familia arbitraria de espacios de Banach $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, llamaremos c_0-suma de dicha familia, y notaremos $(\oplus_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda)_{c_0}$, al subespacio del producto cartesiano $\prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ formado por las familias $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tales que, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{\lambda \in \Lambda : \|y_\lambda\| \geq \varepsilon\}$ es finito, que es un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\| = \sup\{\|y_\lambda\| : \lambda \in \Lambda\}.$$

En algún caso, la notación anterior es innecesariamente complicada; por ejemplo, para la c_0-suma de dos espacios Y_1 e Y_2 escribiremos simplemente

$Y_1 \oplus_\infty Y_2$, pues se trata del producto cartesiano $Y_1 \times Y_2$ con la norma del máximo.

La propiedad β no es estable por c_0-sumas mientras que la B sí lo es. Aunque esto carece de importancia a la hora de utilizar la primera como condición suficiente para la segunda, sí es cierto que, en algún sentido, aleja una propiedad de la otra. Enunciémoslo.

1.9 Proposición. *La propiedad B es estable por c_0-sumas.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach, e $Y = (\oplus_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda)_{c_0}$ donde Λ es un conjunto no vacío arbitrario, y los espacios de Banach Y_λ tienen la propiedad B. Si T es un operador lineal y continuo de X en Y (que supondremos de norma uno) llamemos $T_\lambda = P_\lambda T$ donde P_λ es la proyección natural de Y sobre Y_λ para cada λ.

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Teniendo en cuenta que

$$1 = \|T\| = \sup\{\|T_\lambda\| : \lambda \in \Lambda\}$$

podemos tomar $\alpha \in \Lambda$ tal que $\|T_\alpha\| > 1 - \varepsilon/2$ y, aprovechando que Y_α verifica la propiedad B, podemos encontrar $S_\alpha \in NA(X, Y_\alpha)$ tal que $\|S_\alpha\| = 1$ y $\|S_\alpha - T_\alpha\| < \varepsilon$. Si definimos ahora $S \in L(X,Y)$ de manera que $P_\lambda S = T_\lambda$ para $\lambda \neq \alpha$ y $P_\alpha S = S_\alpha$, es evidente que $\|S - T\| < \varepsilon$ y $S \in NA(X,Y)$. □

Que la propiedad β no goza de la misma estabilidad será consecuencia inmediata de la siguiente proposición, que tiene interés en sí misma:

1.10 Proposición. *Sea $\{Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia arbitraria de espacios de Banach. Si $Y = (\oplus_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda)_{c_0}$ tiene la propiedad β, todos los espacios Y_λ tienen la propiedad β con la misma constante.*

Demostración. Es claro que podemos reducirnos al caso en que Λ tenga dos elementos ya que, para cada $\lambda \in \Lambda$ siempre podremos considerar

$$Y = Y_\lambda \oplus_\infty (\oplus_{\substack{\mu\in\Lambda \\ \mu\neq\lambda}} Y_\mu)_{c_0},$$

es decir, bastará con probar el siguiente lema:

1.11 Lema. *Sean U y V espacios de Banach. Si $Y = U \oplus_\infty V$ tiene la propiedad $\beta(A, \sigma, \rho)$, entonces U y V tienen la propiedad β con constante ρ.*

Demostración. Teniendo en cuenta la identificación natural de Y^* con $U^* \times V^*$ considerando en el producto cartesiano la norma de la suma, probaremos primero que los funcionales de A tienen una de sus coordenadas nula. Supongamos por el contrario que existe $(u^*, v^*) \in A$ con $u^*, v^* \neq 0$ y sea $(u, v) = \sigma(u^*, v^*)$. Se tiene:

$$1 = u^*(u) + v^*(v) \leq \|u^*\|\|u\| + \|v^*\|\|v\| \leq$$

$$\leq (\|u^*\| + \|v^*\|) \max\{\|u\|, \|v\|\} = \|(u^*, v^*)\|\|(u, v)\| = 1$$

obteniéndose:

$$u^*(u) = \|u^*\|, \quad v^*(v) = \|v^*\| \quad \text{y} \quad \|u\| = \|v\| = 1.$$

Si recordamos que $\|y\| = \sup\{|y^*(y)| : y^* \in A\}$ para todo $y \in Y$, tomando $y = (u, 0) \in S_Y$, $0 < \varepsilon < 1 - \|u^*\|$, encontramos $y^* = (\tilde{u}^*, \tilde{v}^*) \in A$ tal que

$$|\tilde{u}^*(u)| > 1 - \varepsilon$$

y conviene observar que $\tilde{u}^* \neq u^*$, ya que $u^*(u) = \|u^*\| < 1 - \varepsilon$.

Puesto que

$$\|\tilde{v}^*\| = 1 - \|\tilde{u}^*\| \leq 1 - |\tilde{u}^*(u)| < \varepsilon,$$

obtenemos

$$\rho \geq |\tilde{u}^*(u) + \tilde{v}^*(v)| \geq |\tilde{u}^*(u)| - |\tilde{v}^*(v)| > 1 - 2\varepsilon$$

y haciendo $\varepsilon \to 0$ llegamos a una contradicción.

Sabido ya que los elementos de A tienen una coordenada nula, es inmediato ver que U y V verifican la propiedad β con constante ρ. En efecto, sea, por ejemplo, $A_U = \{u^* \in U^* : (u^*, 0) \in A\}$ y definamos una aplicación $\sigma_U : S_{U^*} \longrightarrow S_U$ por:

$$\sigma_U(u^*) = u \Leftrightarrow \exists v \in V : \sigma(u^*, 0) = (u, v).$$

Es evidente que, para cada $u \in U$,

$$\|u\| = \|(u, 0)\| = \sup\{|(u^*, v^*)(u, 0)| : (u^*, v^*) \in A\} =$$

$$= \sup\{|u^*(u)| : u^* \in A_U\}$$

y no es menos obvio que, si $u^* \in A_U$,

$$u^*(\sigma_U(u^*)) = (u^*, 0)(\sigma(u^*, 0)) = 1$$

mientras que para $u^*, w^* \in A_U$, $u^* \neq w^*$, se tiene

$$|u^*(\sigma_U(w^*))| = |(u^*, 0)(\sigma(w^*, 0))| \leq \rho \qquad \square$$

1.12 Corolario. *La propiedad β no es estable por c_0-sumas.*

Demostración. Dado cualquier número real $0 < \rho_0 < 1$, la Proposición 1.8 nos proporciona un espacio de Banach que tiene la propiedad β con constante ρ_0 y no puede tenerla con $\rho < \rho_0$. Hagamos esta construcción con cada uno de los términos de una sucesión cualquiera $\{\rho_n\} \to 1$ con $0 < \rho_n < 1$; por la Proposición 1.10, la c_0-suma de los espacios así obtenidos no puede verificar la propiedad β. □

Esta patología nos indujo a plantearnos la posibilidad de conseguir una nueva condición suficiente para la propiedad B, estrictamente más débil que la β y que gozara de mejor estabilidad. La exponemos en la siguiente sección.

C. Una nueva condición suficiente para la propiedad B

Para comprender el tipo de generalización de la propiedad β que haremos a continuación, conviene reinterpretar una de las condiciones que aparecen en la Definición 1.5. Nótese el claro paralelismo existente entre los razonamientos que siguen y los empleados en la Proposición 1.7. Ahora no tenemos ya dimensión finita pero la topología débil-$*$ aporta la necesaria compacidad.

Si un espacio de Banach Y tiene la propiedad $\beta(A, \sigma, \rho)$, se verifica que:

$$\|y\| = \sup\{|y^*(y)| : y^* \in A\} \quad \forall y \in Y \tag{1}$$

es decir, la bola unidad de Y es el polar absoluto de A en la dualidad canónica (Y, Y^*). Aplicando el Teorema del bipolar, (1) implica que la envolvente absolutamente convexa de A es densa en la bola unidad de Y^* para la topología débil-$*$:

$$B_{Y^*} = \overline{\mathrm{co}(\mathbb{T}A)}^{w^*} \tag{2}$$

Recíprocamente, es claro que (2) implica (1). Por otra parte, aplicando el Teorema de Krein-Milman y su "revertido", la condición (2) equivale a que todo punto extremo de B_{Y^*} pueda aproximarse en la topología débil-$*$ por elementos de $\mathbb{T}A$:

$$\mathrm{Ext}(B_{Y^*}) \subseteq \overline{\mathbb{T}A}^{w^*}. \tag{3}$$

En suma, en la definición de la propiedad β puede sustituirse (1) por (3).

Independientemente, la propiedad β exige también una especie de "ortogonalidad":

$$y^*, z^* \in A,\ y^* \neq z^* \Rightarrow |z^*(\sigma(y^*))| \leq \rho < 1. \tag{4}$$

La debilitación que vamos a considerar consiste en "localizar" la condición (4) exigiéndosela por separado a los funcionales de A que, según (3), son necesarios para aproximar *cada punto extremo* de B_{Y^*}.

1.13 Definición. Diremos que un espacio de Banach Y tiene la *propiedad casi-β* si existe un conjunto $A \subset S_{Y^*}$, una aplicación $\sigma : A \longrightarrow S_Y$ y una función $\rho : A \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando las siguientes condiciones:

i) $y^*(\sigma(y^*)) = 1 \quad \forall y^* \in A$.

ii) $y^*, z^* \in A,\ y^* \neq z^* \Rightarrow |z^*(\sigma(y^*))| \leq \rho(y^*) < 1$.

iii) Para cada e^*, punto extremo de la bola unidad de Y^*, existe un subconjunto A_{e^*} de A y un escalar t con $|t| = 1$ tal que te^* pertenece al cierre débil-* de A_{e^*} y $\sup\{\rho(y^*) : y^* \in A_{e^*}\} < 1$.

Igual que con la propiedad β, cuando sea preciso hacer referencia a los elementos que intervienen en la definición, diremos que Y satisface la propiedad casi-$\beta(A, \sigma, \rho)$.

Si Y tiene la propiedad $\beta(A, \sigma, \rho)$, es suficiente entender ρ como una función real constante en A, para poner de manifiesto que Y verifica la casi-$\beta(A, \sigma, \rho)$ pues, respecto a la condición iii), si e^* es un punto extremo de la bola unidad de Y^*, como ya sabemos, $e^* \in \mathbb{T}\overline{A}^{w^*}$, es decir, se puede tomar $A_{e^*} = A$ para cada $e^* \in \mathrm{Ext}(B_{Y^*})$. Notemos también que la condición iii) de la definición de la propiedad casi-β implica que el conjunto A hereda de los puntos extremos de la bola dual la capacidad de normar a los elementos de Y, esto es,

$$\|y\| = \sup\{|y^*(y)| : y^* \in A\}, \quad \forall y \in Y$$

lo que, a su vez, nos permite deducir que para cualquier espacio de Banach X y cualquier operador $T \in L(X, Y)$, se tiene

$$\|T\| = \sup\{\|T^*y^*\| : y^* \in A\},$$

donde T^* es el operador adjunto de T. En efecto:

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \sup_{x \in B_X} \sup_{y^* \in A} |y^*(Tx)| =$$

$$= \sup_{y^* \in A} \sup_{x \in B_X} |T^*y^*(x)| = \sup_{y^* \in A} \|T^*y^*\|.$$

Presentamos ya el principal resultado de este capítulo:

1.14 Teorema. *La propiedad casi-β implica la propiedad B. Más explícitamente, si X e Y son espacios de Banach e Y tiene la propiedad casi-β, entonces el conjunto $NA(X,Y)$, de los operadores que alcanzan la norma, es denso en el espacio $L(X,Y)$ de todos los operadores.*

Para su demostración, junto con el Teorema de Bishop-Phelps, utilizamos el Teorema de Zizler (Teorema 1.2) y el siguiente lema, aplicación directa del Teorema de Representación de Choquet-Bishop-De Leeuw, que, supuesto que un operador adjunto alcance su norma, nos asegura que la alcanza en un punto extremo. Este resultado parece ser bastante conocido y se deduce, por ejemplo, de un teorema de T. Johannesen (ver [40, Theorem 5.8]). Por complitud, incluimos una demostración directa:

1.15 Lema. *Sean X e Y espacios de Banach y T un operador lineal y continuo de X en Y. Si T^* alcanza su norma, entonces existe e^*, punto extremo de la bola unidad de Y^* tal que $\|T^*e^*\| = \|T^*\|$.*

Demostración. Supongamos que $\|T\| = 1$, y sea $y_0^* \in B_{Y^*}$ tal que $\|T^*y_0^*\| = 1$. El Teorema de Choquet-Bishop-De Leeuw (véase [4, pag. 36-38]) aplicado al conjunto convexo-compacto B_{Y^*} con la topología débil-$*$, nos permite encontrar una medida de Borel positiva regular μ en B_{Y^*} con $\mu(B_{Y^*}) = 1$, tal que:

i) μ representa al funcional y_0^*, es decir:

$$y_0^*(y) = \int_{B_{Y^*}} y^*(y)d\mu(y^*) \quad \forall y \in Y.$$

ii) μ "está concentrada" en el conjunto de los puntos extremos de B_{Y^*}. Concretamente: si $E \subset B_{Y^*}$ es un conjunto G_δ que no contiene puntos extremos de B_{Y^*}, entonces $\mu(E) = 0$.

Si definimos $\Phi : B_{Y^*} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\Phi(y^*) = \|T^*y^*\|$, obtenemos una función débil-$*$-semicontinua inferiormente (luego Borel-medible) que verifica:

$$\begin{aligned} 1 = \Phi(y_0^*) &= \sup_{\|x\|\le 1} \{|y_0^*(Tx)|\} = \\ &= \sup_{\|x\|\le 1} \left\{\left|\int_{B_{Y^*}} y^*(Tx)d\mu(y^*)\right|\right\} \le \\ &\le \sup_{\|x\|\le 1} \left\{\int_{B_{Y^*}} |y^*(T(x)|d\mu(y^*)\right\} \le \\ &\le \int_{B_{Y^*}} \Phi(y^*)d\mu(y^*) \le 1. \end{aligned}$$

Por tanto, definiendo $E = \{y^* \in B_{Y^*} : \Phi(y^*) = 1\}$, se tendrá $\mu(E) = 1$. Ahora bien, E es un conjunto G_δ, ya que Φ es semicontinua inferiormente y

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{y^* \in B_{Y^*} : \Phi(y^*) > 1 - \frac{1}{n}\right\}.$$

Se sigue de ii) que E ha de contener algún punto extremo. $\square$

Demostración del Teorema 1.14. Sea Y un espacio de Banach con la propiedad casi-$\beta(A,\sigma,\rho)$. Para cualquier otro espacio de Banach X, hemos de probar que $NA(X,Y)$ es denso en $L(X,Y)$. Por el Teorema 1.2, el conjunto

$$NA_1(X,Y) = \{T \in L(X,Y) : T^* \in NA(Y^*,X^*)\}$$

es denso en $L(X,Y)$, luego bastará probar que

$$NA_1(X,Y) \subseteq \overline{NA(X,Y)}.$$

Sea pues $T \in L(X, Y)$ un operador tal que T^* alcanza su norma y supongamos, sin perder generalidad, que $\|T\| = 1$. El lema anterior nos proporciona un punto extremo $e^* \in B_{Y^*}$ tal que $\|T^* e^*\| = 1$ y la definición de la propiedad casi-β nos asegura la existencia de un subconjunto $A_{e^*} \subseteq A$ y un escalar t con $|t| = 1$ tales que te^* pertenece al cierre débil-$*$ de A_{e^*} verificándose además que

$$r := \sup\{\rho(y^*) : y^* \in A_{e^*}\} < 1.$$

Desde este punto en adelante, nuestro argumento es similar al utilizado por Lindenstrauss para la propiedad β [41, Proposition 3]. Dado $\varepsilon > 0$, teniendo en cuenta que $1 + r\frac{\varepsilon}{2} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, podemos fijar γ verificando

$$0 < \gamma < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad 1 + r\left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma\right) < \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 - \gamma).$$

Notemos que

$$\sup\{\|T^* y^*\| : y^* \in A_{e^*}\} = 1.$$

En efecto, puesto que la función $y^* \longrightarrow \|T^* y^*\|$ es débil-$*$ semicontinua inferiormente, si fuese $\sup\{\|T^* y^*\| : y^* \in A_{e^*}\} = \alpha < 1$, por estar te^* en el cierre débil-$*$ de A_{e^*}, se tendría también $\alpha \geq \|T^*(te^*)\| = 1$, una contradicción. Así pues, podemos encontrar $y_0^* \in A_{e^*}$ tal que $\|T^* y_0^*\| > 1 - \gamma$.

El Teorema de Bishop-Phelps nos permite tomar un funcional $x_0^* \in X^*$ que alcance su norma y que verifique

$$\|x_0^*\| = \|T^* y_0^*\| > 1 - \gamma, \qquad \|x_0^* - T^* y_0^*\| < \gamma.$$

Definimos ahora un operador $S \in L(X, Y)$ por

$$S(x) = T(x) + \left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) x_0^*(x) - T^* y_0^*(x)\right] y_0 \qquad (x \in X),$$

donde $y_0 = \sigma(y_0^*)$. Entonces

$$\|S - T\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|x_0^*\| + \|x_0^* - T^* y_0^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \gamma < \varepsilon$$

y sólo nos falta probar que S alcanza su norma.

Para ello utilizaremos el hecho ya comentado de que

$$\|S\| = \sup\{\|S^* y^*\| : y^* \in A\},$$

pero siendo

$$S^* y^* = T^* y^* + y^*(y_0)\left(\frac{\varepsilon}{2}x_0^* + x_0^* - T^* y_0^*\right) \qquad \forall y^* \in Y^*,$$

se tiene que, para $y^* \in A$, $y^* \neq y_0^*$,

$$\|S^* y^*\| \leq 1 + \rho(y_0^*)\left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma\right) \leq 1 + r\left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma\right)$$

mientras que, si $y^* = y_0^*$ tenemos $S^* y_0^* = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) x_0^*$, por tanto,

$$\|S^* y_0^*\| = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\|x_0^*\| > \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 - \gamma) > 1 + r\left(\frac{\varepsilon}{2} + \gamma\right),$$

esto último gracias a la elección de γ.

Hemos obtenido que

$$\|S^* y_0^*\| > \|S^* y^*\| \quad \forall y^* \in A,\ y^* \neq y_0^*,$$

de donde se deduce que $\|S^*\| = \|S^* y_0^*\|$. Finalmente, por ser múltiplo de x_0^*, $S^* y_0^*$ alcanza su norma como funcional en X y por lo tanto S también la alcanza ya que, si $x_0 \in B_X$ es tal que $\|S^* y_0^*\| = |S^* y_0^*(x_0)|$, se tiene que

$$\|S\| = \|S^*\| = |S^* y_0^*(x_0)| = |y_0^*(S x_0)| \leq \|S x_0\|. \qquad \square$$

Naturalmente, el teorema anterior generaliza al obtenido por Lindenstrauss (ver Teorema 1.4) según el cual, la propiedad β implica la B. Estamos ahora obligados a probar la no trivialidad de dicha generalización. A lo largo de esta memoria aparecerán abundantes ejemplos de espacios con la propiedad casi-β que no tienen la β, pero, de momento, queremos presentar el más sencillo y, quizá también, el más llamativo:

1.16 Ejemplo. Consideremos el conjunto

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,1,1),(0,1,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

donde $a_n = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^n}, \cos\frac{\pi}{2^n}, 0\right)$ para cada natural n. Sea $Y = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|)$ donde $\|\cdot\|$ es la norma cuya bola dual resulta ser $B_{Y^*} = \mathrm{co}(A \cup -A)$. Es fácil comprobar que

$$\mathrm{Ext}(B_{Y^*}) = A \cup -A, \tag{1}$$

en particular $\mathrm{Ext}(B_{Y^*})$ no es finito e Y no tiene la propiedad β (Proposición 1.7).

Sin embargo, si definimos

$$\sigma(a_n) = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma(0,1,\pm 1) = \left(0, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$$

y

$$\rho(a_n) = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \rho(0,1,\pm 1) = \frac{1}{2},$$

entonces Y verifica la propiedad casi-$\beta(A,\sigma,\rho)$. En vista de (1), la condición iii) de la Definición 1.13 se cumple de manera trivial. La comprobación del resto de las condiciones es rutinaria. A título de ejemplo, para $n \neq m$ se tiene

$$a_m(\sigma(a_n)) = \cos\left(\frac{\pi}{2^n} - \frac{\pi}{2^m}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{2^n} - \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \rho(a_n).$$

Permítasenos intentar una visualización geométrica del conjunto B_{Y^*} en $\mathbb{R}^3$. Es evidente que su construcción está inspirada en el clásico ejemplo de un espacio normado tridimensional tal que el conjunto de los puntos extremos de su bola unidad no es cerrado. Dicho ejemplo se consigue tomando como bola unidad la envolvente convexa de una circunferencia y dos segmentos perpendiculares al plano que la contiene y de la misma longitud, cuyos puntos medios sean diametralmente opuestos, de forma que dichos puntos no son extremos pero sí lo son los restantes puntos de la circunferencia. La complicación adicional de nuestro ejemplo consiste en sustituir la circunferencia por una especie de "polígono" cuyos infinitos vértices forman dos sucesiones convergentes a los puntos medios de los aludidos segmentos, de tal forma que el conjunto de los puntos extremos es infinito y *discreto*.

La existencia de espacios de dimensión finita que verifican la propiedad casi-β y no la β pone de manifiesto, a nuestro entender, que la generalización conseguida es más sustanciosa de lo que una simple comparación de ambas definiciones parece indicar. Es natural esperar que, al sustituir una condición de tipo "uniforme" por una versión "localizada" de la misma, se obtenga una propiedad más general para espacios de dimensión infinita, pero resulta sorprendente que, también en dimensión finita, la generalización sea estricta.

Más adelante obtendremos una caracterización de los espacios de dimensión finita con la propiedad casi-β que viene claramente sugerida por el ejemplo anterior.

D. Propiedad casi-β y estructura extremal de la bola dual

Iniciamos en esta sección un estudio más sistemático de la propiedad casi-β, presentando en primer lugar un resultado que clarifica su definición, haciéndonos ver que el conjunto A que en ella aparece está, esencialmente, determinado en forma única. Concretamente los puntos de A quedarán caracterizados por la siguiente propiedad:

1.17 Definición. Sea Y un espacio de Banach y sea y^* un elemento de la bola unidad del espacio dual Y^*. Se dice que y^* es *fuertemente w^*-expuesto* por $y \in S_Y$ si $y^*(y) = 1$ y, para cada sucesión $\{y_n^*\}$ en B_{Y^*} tal que

$$\{y_n^*(y)\} \to 1,$$

se verifica que

$$\|y_n^* - y^*\| \to 0.$$

Equivalentemente, $y^*(y) = 1$ y, para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $\delta > 0$ tal que

$$z^* \in B_{Y^*}, \quad |1 - z^*(y)| < \delta \Rightarrow \|z^* - y^*\| < \varepsilon.$$

1.18 Proposición. *Sea Y un espacio de Banach que verifica la propiedad casi-$\beta(A, \sigma, \rho)$. Entonces, cada $y^* \in A$ es fuertemente w^*-expuesto por $\sigma(y^*)$. Recíprocamente, si $y^* \in S_{Y^*}$ es fuertemente w^*-expuesto, entonces existe un escalar t con $|t| = 1$ tal que $ty^* \in A$. En suma, $\mathbb{T}A$ es el conjunto de los puntos fuertemente w^*-expuestos de B_{Y^*}.*

Demostración. Sea $y_0^* \in A$ y $\varepsilon > 0$ arbitrario; para ver que y_0^* es fuertemente débil-$*$ expuesto por $\sigma(y_0^*)$, bastará probar que existe $\gamma > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} z^* \in \mathrm{co}(\mathbb{T}A) \\ |1 - z^*(\sigma(y_0^*))| < \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \|z^* - y_0^*\| \leq \varepsilon. \tag{1}$$

En efecto, como la envolvente absolutamente convexa de A es débil-$*$ densa en la bola unidad de Y^*, si $y^* \in B_{Y^*}$ verifica $|1 - y^*(\sigma(y_0^*))| < \gamma$, tomamos una red $\{z_\lambda^*\}_{\lambda \in \Lambda}$ en $\mathrm{co}(\mathbb{T}A)$ débil-$*$-convergente a y^* y encontramos $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow |1 - z_\lambda^*(\sigma(y_0^*))| < \gamma.$$

Usando (1),

$$\|z_\lambda^* - y_0^*\| \leq \varepsilon \quad \text{para } \lambda \geq \lambda_0,$$

y la semicontinuidad inferior de la norma nos da $\|y^* - y_0^*\| \leq \varepsilon$.

Para probar (1), tomemos $\gamma = \dfrac{\varepsilon}{2}(1 - \rho(y_0^*))$ y sea $z^* \in \mathrm{co}(\mathbb{T}A)$ verificando $|1 - z^*(\sigma(y_0^*))| < \gamma$. Es evidente que podemos escribir

$$z^* = t y_0^* + s y^*$$

donde t, s son escalares con $|t| + |s| = 1$ e $y^* \in \mathrm{co}[\mathbb{T}(A \setminus \{y_0^*\})]$, es decir, existen $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^* \in A \setminus \{y_0^*\}$ y escalares $t_1, t_2, \ldots, t_n$ con $\sum_{k=1}^{n} |t_k| = 1$, tales que $y^* = \sum_{k=1}^{n} t_k y_k^*$. Se tiene entonces

$$|y^*(\sigma(y_0^*))| \leq \sum_{k=1}^{n} |t_k| |y_k^*(\sigma(y_0^*))| \leq \rho(y_0^*)$$

de donde

$$\gamma > |1 - z^*(\sigma(y_0^*))| =$$

$$= |1 - t - sy^*(\sigma(y_0^*))| \geq$$

$$\geq |1 - t| - \rho(y_0^*)|s| \geq$$

$$\geq |1 - t|(1 - \rho(y_0^*)),$$

es decir,

$$|1 - t| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

gracias a la elección de γ; así,

$$\|y_0^* - z^*\| = \|y_0^* - ty_0^* - sy^*\| \leq$$

$$\leq |1 - t| + (1 - |t|) \leq \varepsilon.$$

Recíprocamente, sea $e^* \in S_{Y^*}$ fuertemente w^*-expuesto por $y \in S_Y$. Dado que e^* es un punto extremo de B_{Y^*} y que $e^*(y) = 1$, la definición de la propiedad casi-β nos asegura la existencia de una sucesión $\{y_n^*\}$ de elementos de A y un escalar s de módulo uno tales que $sy_n^*(y) \to 1$ y $r = \sup_n \rho(y_n^*) < 1$. Por ser e^* fuertemente w^*-expuesto por y, se sigue que $\|sy_n^* - e^*\| \to 0$ pero, para $n, m \in \mathbb{N}$, si $y_n^* \neq y_m^*$ tenemos

$$\|sy_m^* - sy_n^*\| = \|y_m^* - y_n^*\| \geq |1 - y_n^*(\sigma(y_m^*))| \geq 1 - r > 0$$

lo que nos indica que la sucesión $\{y_n^*\}$ será constante a partir de algún término, de donde $\frac{1}{s}e^* \in A$. □

Es claro que la proposición anterior sigue siendo cierta si Y verifica de hecho la propiedad β, pero hay, en tal caso, una perfección adicional que merece ser destacada. Cuando se ha probado que cada punto $y_0^* \in A$ es fuertemente w^*-expuesto, se ha obtenido $\|y^* - y_0^*\| \leq \varepsilon$ siempre que $y^* \in B_{Y^*}$

verifique $|1 - y^*(\sigma(y_0^*))| < \gamma$ con $\gamma = \frac{\varepsilon}{2}(1 - \rho(y_0^*))$. Si Y tiene la propiedad β, la función ρ es constante, con lo que γ es independiente del punto $y_0^* \in A$ considerado. Podemos decir en este caso que los puntos de A son *uniformemente* w^*-expuestos.

La prometida caracterización de la propiedad casi-β en dimensión finita vendrá dada en términos del espacio topológico que a continuación presentamos, cuya consideración viene claramente motivada por la proposición anterior. De hecho probaremos que, a plena generalidad, existe una estrecha relación entre la topología de dicho espacio y la propiedad casi-β.

1.19 Definición. Dado un espacio de Banach Y, en el conjunto $\mathrm{Ext}(B_{Y^*})$ de los puntos extremos de la bola dual, consideremos la relación de equivalencia:

$$e_1^* \sim e_2^* \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{T} : e_1^* = te_2^*,$$

es decir, identificamos cada punto extremo con todos sus "girados" (con su opuesto en caso real). Denotaremos por E_Y al conjunto cociente y consideraremos siempre en E_Y la topología cociente de la débil-$*$. Cuando sea necesario, denotaremos por $[e^*] \in E_Y$ a la clase de equivalencia que contiene a un punto extremo e^*. Obsérvese que, para cada $y \in Y$, la aplicación $[e^*] \mapsto |e^*(y)|$ está bien definida y es continua en E_Y.

1.20 Teorema. *Sea Y un espacio de Banach. Consideremos las siguientes afirmaciones:*

i) *E_Y es discreto.*

ii) *Y verifica la propiedad casi-β.*

iii) *E_Y tiene un conjunto denso de puntos aislados.*

Se verifica que $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii)$. Si se supone que la topología inducida en $\mathrm{Ext}(B_{Y^*})$ *por la débil-$*$ coincide con la de la norma, entonces $ii) \Rightarrow i)$.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Construimos A tomando un representante arbitrario de cada elemento de E_Y. Sea $y^* \in A$ y notemos que, por ser $[y^*]$ abierto en E_Y, el conjunto $H = \mathrm{Ext}(B_{Y^*}) \setminus \mathbb{T}y^*$ es w^*-cerrado (relativo a $\mathrm{Ext}(B_{Y^*})$) pero, siendo y^* punto extremo, el teorema de Krein-Milman revertido nos asegura que, de hecho, y^* no pertenece a la envolvente convexa y w^*-cerrada de H.

Aplicando el teorema del bipolar (nótese que H es equilibrado) existe $y \in Y$ tal que

$$|z^*(y)| \leq 1 < |y^*(y)| \quad \forall z^* \in H.$$

Es claro que $\|y\| = |y^*(y)|$, con lo que, definiendo

$$\sigma(y^*) = \frac{y}{y^*(y)}, \qquad \rho(y^*) = \sup\{|z^*(\sigma(y^*))| : z^* \in H\} < 1$$

se tiene que Y verifica la propiedad casi-$\beta(A, \sigma, \rho)$, ya que la tercera condición de la Definición 1.13 está garantizada desde el principio por ser

$$\mathrm{Ext}(B_{Y^*}) = \mathbb{T}A.$$

$ii) \Rightarrow iii)$ Probaremos que si Y tiene la propiedad casi-$\beta(A, \sigma, \rho)$, el conjunto $[A]$ es denso en E_Y y todos sus puntos son aislados. En efecto, recordemos que $A \subseteq \mathrm{Ext}(B_{Y^*})$ (proposición anterior), lo que permite considerar el conjunto $[A] \subseteq E_Y$.

Puesto que $\mathrm{Ext}(B_{Y^*}) \subseteq \overline{\mathbb{T}A}^{w^*}$, $[A]$ es denso en E_Y y esa misma densidad hace que cada punto aislado de $[A]$ sea también punto aislado de E_Y. Ahora bien, es evidente que todos los puntos de $[A]$ son aislados ya que, para cada $y_0^* \in A$, se tiene

$$[y_0^*] = \{[y^*] \in [A] : |y^*(\sigma(y_0^*))| > \rho(y_0^*)\}.$$

Finalmente, supongamos que Y verifica la propiedad casi-$\beta(A, \sigma, \rho)$ y que en $\mathrm{Ext}(B_{Y^*})$ coinciden las topologías inducidas por la débil-$*$ y por la de la norma. Puesto que $[A]$ es discreto, bastará ver que $[A] = E_Y$. En efecto, dado $e^* \in \mathrm{Ext}(B_{Y^*})$, la definición de la propiedad casi-β nos permite encontrar un subconjunto A_{e^*} de A tal que

$$r := \sup\{\rho(y^*) : y^* \in A_{e^*}\} < 1$$

y $t \in \mathbb{T}$ tal que te^* pertenece al cierre débil-$*$ de A_{e^*}. La hipótesis sobre la coincidencia en $\mathrm{Ext}(B_{Y^*})$ de la topología de la norma y de la débil-$*$ nos permite encontrar una sucesión $\{y_n^*\}$ de puntos de A_{e^*} tal que $\|y_n^* - te^*\| \to 0$. Ahora bien, para $n, m \in \mathbb{N}$, si $y_n^* \neq y_m^*$ se tiene:

$$\|y_n^* - y_m^*\| \geq |1 - y_m^*(\sigma(y_n^*))| \geq 1 - \rho(y_n^*) \geq 1 - r$$

luego la sucesión $\{y_n^*\}$ ha de ser constante a partir de un cierto término y obtenemos que $te^* \in A$, de donde $[e^*] \in [A]$. $\square$

En la Proposición 1.7 se vio que un espacio normado de dimensión finita Y tiene la propiedad β si, y sólo si, E_Y es finito. Como consecuencia evidente del teorema anterior, tenemos una caracterización de la propiedad casi-β en dimensión finita:

1.21 Corolario. *Un espacio normado de dimensión finita Y tiene la propiedad casi-β si, y sólo si, el espacio topológico E_Y es discreto.*

Es bien sabido que el conjunto de los puntos extremos de la bola unidad de un espacio real bidimensional es cerrado y, por tanto, las propiedades casi-β y β resultan equivalentes en este caso particular. Así pues, el espacio real con la propiedad casi-β que no verifica la β descrito en Ejemplo 1.16 es el más sencillo posible. La situación es diferente en el caso complejo pues, incluso en dimensión dos, se puede construir una norma de manera que el conjunto de los puntos extremos de la bola unidad no sea cerrado. Probablemente este hecho es conocido pero, al no haber encontrado ningún ejemplo concreto en la literatura, improvisamos una construcción:

1.22 Ejemplo. *Una norma en $\mathbb{C}^2$ para la cual el conjunto de los puntos extremos de la bola unidad no es cerrado.* Partiremos de $\mathbb{C}^2$ con la norma de la suma, cuyos puntos extremos son los de la forma $(t,0)$ ó $(0,t)$ con $|t| = 1$, construyendo una sucesión de puntos exteriores a la bola que converjan a un punto de la misma (de hecho al punto $(1/2, 1/2)$) que no es extremo; la envolvente absolutamente convexa de esta sucesión y la bola original será la bola unidad para una nueva norma que, con ciertas condiciones sobre los términos de la sucesión, tendrá a dichos términos como puntos extremos.

Tomemos cualquier sucesión $\{\phi_n\}$ de números reales positivos, estrictamente decreciente y que verifique $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n < \frac{\pi}{3}$.

A partir de ella definimos

$$\theta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \phi_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$r_1 = \frac{1}{2\alpha} \qquad r_n = r_1 \prod_{k=2}^{n} \cos\phi_k \qquad (n \geq 2)$$

donde $\alpha = \prod_{k=2}^{\infty} \cos\phi_k$, producto infinito cuya convergencia se deduce inmediatamente de la sumabilidad de la serie $\sum \phi_n$. Es claro también que $\{\theta_n\} \searrow 0$, $\{r_n\} \searrow \frac{1}{2}$ y $r_1 < 1$ pues

$$\alpha = \prod_{k=2}^{\infty} \cos\phi_k \geq \prod_{k=1}^{\infty} \cos\phi_k \geq \cos\left(\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k\right) > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

donde se ha utilizado el hecho, fácilmente comprobable por inducción, de que si $\{\phi_n\}$ es una sucesión de números reales positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \leq \frac{\pi}{2}$, se tiene, para sumas finitas,

$$\cos\left(\sum_{k=1}^{n} \phi_k\right) \leq \prod_{k=1}^{n} \cos\phi_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea ahora $a_n \in \mathbb{C}^2$ dado por $a_n = r_n(e^{i\theta_n}, e^{-i\theta_n})$, y formemos el conjunto $E := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(1,0),(0,1)\}$.

Consideremos, finalmente, en $\mathbb{C}^2$, la norma cuya bola unidad viene dada por

$$B := \mathrm{co}(\mathbb{T}E).$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, para asegurarse que $a_n \in \mathrm{Ext}(B)$, basta comprobar que el funcional lineal $f_n = (e^{-i\theta_n}, e^{i\theta_n})$ verifica

$$f_n(a_n) > |f_n(y)| \qquad \text{para } y \in E,\ y \neq a_n, \tag{2}$$

pues ello impide claramente que a_n se pueda expresar como combinación absolutamente convexa no trivial de elementos de E. Veamos pues que se cumple (2): notemos que $f_n(a_n) = 2r_n$ mientras que $|f_n(0,1)| = |f_n(1,0)| = 1 < 2r_n$ y para el resto de los elementos de nuestra sucesión, si $m > n$,

$$f_n(a_m) = 2r_m \cos(\theta_n - \theta_m) < 2r_n$$

y para $m < n$,

$$\begin{aligned} f_n(a_m) &= 2r_m \cos(\theta_m - \theta_n) = \\ &= 2r_1 \left(\prod_{k=2}^{m} \cos\phi_k\right) \cos\left(\sum_{k=m}^{n-1} \phi_k\right) \leq \\ &\leq 2r_1 \left(\prod_{k=2}^{m} \cos\phi_k\right) \left(\prod_{k=m}^{n-1} \cos\phi_k\right) < \\ &< 2r_1 \left(\prod_{k=2}^{m} \cos\phi_k\right) \left(\prod_{k=m+1}^{n} \cos\phi_k\right) = \\ &= 2r_1 \prod_{k=2}^{n} \cos\phi_k = 2r_n \end{aligned}$$

donde, además del estricto crecimiento de $\{\cos\phi_n\}$, se ha usado de nuevo la desigualdad (1).

Observemos que la construcción anterior nos proporciona, de hecho, *un ejemplo de espacio normado complejo bidimensional con la propiedad casi-β pero no la β*: en efecto, llamemos Y al predual del espacio arriba construido y notemos primeramente que $\mathrm{Ext}(B_{Y^*}) = \mathrm{Ext}(B) = \mathbb{T}E$ pues los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ permanecen como puntos extremos de B, gracias a que $r_n < 1\ \forall n$. Para ver que E_Y es discreto basta recordar que las funciones

$$\pi_1 : [(z_1, z_2)] \mapsto |z_1|, \qquad \pi_2 : [(z_1, z_2)] \mapsto |z_2|$$

están bien definidas y son continuas en E_Y, con lo que las igualdades

$$[a_1] = \{w \in E_Y : 2r_2 < \pi_1(w) + \pi_2(w) < 2\}$$

$$[a_n] = \{w \in E_Y : 2r_{n+1} < \pi_1(w) + \pi_2(w) < 2r_{n-1}\} \quad (n \geq 2)$$

$$[(1,0)] = \{w \in E_Y : \pi_1(w) > r_1\}$$

$$[(0,1)] = \{w \in E_Y : \pi_2(w) > r_1\},$$

prueban que cada punto de E_Y es aislado.

Naturalmente Y no tiene la propiedad β puesto que E_Y no es finito.

Destacamos otro caso particular importante del Teorema 1.20. Completando la información dada en el Ejemplo 1.6.ii), tenemos:

1.23 Corolario. *Sea L un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$C_0(L)$ tiene la propiedad β.*

ii) *$C_0(L)$ tiene la propiedad casi-β.*

iii) *L tiene un conjunto denso de puntos aislados.*

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ es trivial.

Para probar $ii) \Rightarrow iii)$, basta aplicar el Teorema 1.20, teniendo en cuenta que $E_{C_0(L)}$ es homeomorfo a L; más concretamente, la aplicación $t \mapsto [\delta_t]$ donde δ_t es el funcional de evaluación en el punto t, es un homeomorfismo de L sobre $E_{C_0(L)}$, un hecho bien conocido y fácil de comprobar.

$iii) \Rightarrow i)$ se vio en el Ejemplo 1.6 ii). □

1.24 Nota. Los Corolarios 1.21 y 1.23 permiten observar que ninguna de las dos implicaciones de Teorema 1.20 es, en general, reversible. En efecto, si K es un espacio compacto, infinito, con un conjunto denso de puntos aislados, entonces $C(K)$ verifica las condiciones *ii*) y *iii*) del teorema pero no *i*). En el caso más sencillo posible, K es la compactación por un punto de $\mathbb{N}$ y $C(K)$ es el espacio de las sucesiones convergentes.

Para tener un ejemplo de un espacio que verifique *iii*) y no *ii*), basta pensar en una norma en $\mathbb{R}^2$ para la cual, el conjunto de puntos extremos de la bola dual tenga un conjunto denso de puntos aislados y no sea finito. En el caso más sencillo, dicha bola dual podría ser el "polígono" con infinitos vértices utilizado en el Ejemplo 1.16.

E. Estabilidad de la propiedad casi-β

Empezamos probando que la propiedad casi-β es estable por construcciones que, en general, no conservan la β (Corolario 1.12).

1.25 Proposición. *La propiedad casi-β es estable por c_0-sumas.*

Demostración. Sea $Y = (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda)_{c_0}$ donde, para cada $\lambda \in \Lambda$, el espacio de Banach Y_λ verifica la propiedad casi-$\beta(A_\lambda, \sigma_\lambda, \rho_\lambda)$. Consideremos la identificación habitual del espacio dual de Y con la l_1-suma $(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda^*)_{l_1}$, es decir, el espacio de Banach de las familias $(y_\lambda^*)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda^*$ absolutamente sumables, con la norma dada por

$$\|(y_\lambda^*)_{\lambda\in\Lambda}\| = \sum_{\lambda\in\Lambda} \|y_\lambda^*\|.$$

Denotaremos por P_λ a la proyección natural de Y sobre Y_λ y por I_λ a la inyección natural de Y_λ en Y. Nótese que P_λ^* es la inyección natural de Y_λ^* en Y^*.

Formamos entonces un conjunto $A \subset S_{Y^*}$ "uniendo" los conjuntos A_λ, más rigurosamente, $A = \cup_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda^* A_\lambda$ y definimos las funciones σ y ρ de la única manera razonable, es decir, "extendiendo" las aplicaciones σ_λ y ρ_λ:

$$\sigma \circ P_\lambda^* = I_\lambda \circ \sigma_\lambda, \qquad \rho \circ P_\lambda^* = \rho_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Para ver que Y verifica la propiedad casi-$\beta(A, \sigma, \rho)$, las condiciones $i)$ y $ii)$ de la Definición 1.13 se comprueban sin dificultad. Con respecto a la condición $iii)$, basta recordar que un punto extremo de la bola unidad de una l_1-suma ha de "pertenecer" de hecho a uno de los sumandos, es decir, si $e^* \in \mathrm{Ext}(B_{Y^*})$ existen $\lambda \in \Lambda$ y $e_\lambda^* \in \mathrm{Ext}(B_{Y_\lambda^*})$ tales que $e^* = P_\lambda^* e_\lambda^*$; se toma entonces $B_\lambda \subseteq A_\lambda$ tal que $e_\lambda^* \in \mathbb{T}\overline{B_\lambda}^{w^*}$ con $\sup\{\rho_\lambda(b^*) : b^* \in B_\lambda\} < 1$ y $A_{e^*} = P_\lambda^* B_\lambda$, obteniéndose claramente que $e^* \in \mathbb{T}\overline{A_{e^*}}^{w^*}$ y

$$\sup\{\rho(a^*) : a^* \in A_{e^*}\} = \sup\{\rho_\lambda(b^*) : b^* \in B_\lambda\} < 1. \qquad \square$$

La estabilidad de la propiedad casi-β con respecto a las c_0-sumas, junto con el teorema de renormación de Partington [44, Theorem 1], tiene una interesante consecuencia:

1.26 Corolario. *Todo espacio de Banach de dimensión sobre $\mathbb{R}$ estrictamente mayor que dos puede renormarse equivalentemente de modo que tenga la propiedad casi-β pero no verifique la β.*

Demostración. Sea Y un espacio de Banach de dimensión estrictamente mayor que dos (mayor o igual que dos en caso complejo). Tomamos un subespacio de dimensión tres (dos en caso complejo) al que llamaremos Y_0 y lo renormamos como se expone en el Ejemplo 1.16 (Ejemplo 1.22 respectivamente). Sea Y_1 un complemento de Y_0 y, utilizando el Teorema de Partington, renormamos Y_1 con la propiedad β. Si ahora definimos

$$\|y_0 + y_1\| = \max\{\|y_0\|_0, \|y_1\|_1\} \quad (y_0 \in Y_0,\ y_1 \in Y_1),$$

donde $\|\cdot\|_0$ y $\|\cdot\|_1$ son, respectivamente, las normas recién definidas en Y_0 e Y_1, obtenemos una nueva norma en Y que tendrá la propiedad casi-β (proposición anterior) pero no podrá verificar la β (Proposición 1.10). □

La estabilidad por l_1-sumas es asunto más delicado. En la dirección positiva podemos afirmar:

1.27 Proposición. *Las propiedades β y casi-β son estables por l_1-sumas finitas de espacios reales.*

Demostración. Obviamente bastará probarlo para la l_1-suma de dos espacios. Sean por tanto X e Y espacios de Banach reales que verifican la propiedad casi-β con las ternas (A_X, σ_X, ρ_X) y (A_Y, σ_Y, ρ_Y) respectivamente, y consideremos el espacio de Banach $Z = X \oplus_1 Y$, es decir, $X \times Y$ con la norma dada por

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\| \qquad (x \in X,\ y \in Y).$$

Para probar que Z verifica la propiedad casi-β, nos resultará útil extender las aplicaciones σ_X y ρ_X a los elementos de $-A_X$ como sigue

$$\sigma_X(-x^*) = -\sigma_X(x^*) \qquad \rho_X(-x^*) = \rho_X(x^*) \qquad (x^* \in A_X).$$

Tomamos $A = (A_X \cup -A_X) \times A_Y$ y definimos, para cada elemento $(x^*, y^*) \in A$,

$$\sigma(x^*, y^*) = \frac{1}{2}(\sigma_X(x^*), \sigma_Y(y^*))$$

$$\rho(x^*, y^*) = \frac{1}{2}(1 + \max\{\rho_X(x^*), \rho_Y(y^*)\}),$$

siendo ya inmediato comprobar que se verifican las condiciones i) y ii) de la Definición 1.13.

Para la condición iii), tomemos $z^* = (u^*, v^*) \in \operatorname{Ext}(B_{Z^*})$. Recurriendo a la identificación natural del espacio dual de Z con $X^* \oplus_\infty Y^*$, se tiene que

$$(u^*, v^*) \in \operatorname{Ext}(B_{Z^*}) \Leftrightarrow \begin{cases} u^* \in \operatorname{Ext}(B_{X^*}) \\ v^* \in \operatorname{Ext}(B_{Y^*}) \end{cases}$$

y la propiedad casi-β en X e Y nos proporciona sendos conjuntos de funcionales $A_{u^*} \subseteq A_X$ y $A_{v^*} \subseteq A_Y$ acompañados de sendos escalares $s, t \in \{-1, 1\}$ de modo que

$$su^* \in \overline{A_{u^*}}^{w^*} \quad \text{y} \quad tv^* \in \overline{A_{v^*}}^{w^*}$$

verificándose además que

$$r_{u^*} = \sup\{\rho_X(x^*) : x^* \in A_{u^*}\} < 1 \quad \text{y} \quad r_{v^*} = \sup\{\rho_Y(y^*) : y^* \in A_{v^*}\} < 1.$$

Basta entonces tomar $A_{z^*} = (A_{u^*} \cup -A_{u^*}) \times A_{v^*}$, con lo que $tz^* \in \overline{A_{z^*}}^{w^*}$ mientras que

$$\sup\{\rho(x^*, y^*) : (x^*, y^*) \in A_{z^*}\} = \frac{1}{2}(1 + \max\{r_{u^*}, r_{v^*}\}) < 1.$$

Supongamos ahora que ρ_X y ρ_Y son constantes estrictamente menores que uno, esto es que X e Y verifican la propiedad β. Lo anteriormente expuesto deja claro que, en ambos casos, el mismo conjunto A, junto con idéntica aplicación σ dotan al espacio $X \oplus_1 Y$ de la propiedad β con constante $\rho = 1/2(1 + \max\{\rho_X, \rho_Y\})$. □

Quizá merezca la pena observar que ninguna de las dos restricciones impuestas en la proposición anterior se puede suprimir.

En primer lugar una l_1-suma, aún finita, de espacios complejos con la propiedad β puede no tener siquiera la casi-β; de hecho $\mathbb{C}^2$ con la norma de la suma no tiene la propiedad casi-β pues no es difícil comprobar que, notando Y a dicho espacio, E_Y es homeomorfo a una circunferencia, luego carece de puntos aislados. Tampoco, aún en el caso real, puede esperarse estabilidad por l_1-sumas infinitas. De hecho, el espacio real l_1 no tiene la propiedad casi-β, lo que puede justificarse recordando la bien conocida descripción de los puntos extremos de la bola unidad de $l_1^* = l_\infty$ de la que se deduce sin dificultad que E_{l_1} es el espacio topológico de Cantor $2^{\mathbb{N}}$, que carece de puntos aislados. Alternativamente puede pensarse en que la norma de l_1 no es Fréchet-diferenciable en ningún punto, equivalentemente la bola unidad de l_∞ no tiene puntos fuertemente w^*-expuestos.

No tiene sentido plantearse el estudio de la estabilidad de las propiedades β y casi-β por l_p-sumas ya que los propios espacios l_p $(1 < p < \infty)$, por ser estrictamente convexos, no pueden verificarlas.

Pasemos a estudiar la estabilidad por productos tensoriales. El producto tensorial proyectivo parece un problema difícil, dado que no se dispone de una descripción mínimamente satisfactoria de los puntos extremos de la bola dual de un tal producto. Para la otra norma tensorial más frecuente, la inyectiva, sí que se tiene una descripción manejable de dichos puntos que nos permitirá establecer, fácilmente, la estabilidad de nuestras propiedades por productos tensoriales inyectivos.

Si $X \otimes Y$ representa el producto tensorial algebraico de los espacios de Banach X e Y, recordemos que, para $z = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k \in X \otimes Y$, la norma inyectiva de z viene dada por

$$\|z\|_\varepsilon = \sup\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} x^*(x_k)y^*(y_k)\right| : x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*}\right\}.$$

El *producto tensorial inyectivo de X e Y*, denotado por $X\otimes_\varepsilon Y$, es la completación de $X \otimes Y$ con la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$.

1.28 Proposición. *Las propiedades β y casi-β son estables por productos tensoriales inyectivos.*

Demostración. Sean X e Y espacios de Banach que verifican la propiedad casi-β con las ternas (A_X, σ_X, ρ_X) y (A_Y, σ_Y, ρ_Y) respectivamente.

Dados $x^* \in X^*$ e $y^* \in Y^*$, notaremos $x^* \otimes y^*$ al único funcional lineal continuo en $X \otimes_\varepsilon Y$ que verifica

$$(x^* \otimes y^*)(x \otimes y) = x^*(x)y^*(y) \quad \forall x \in X,\ \forall y \in Y.$$

Para comprobar que $X \otimes_\epsilon Y$ tiene la propiedad casi-β, consideremos el conjunto

$$A = \{x^* \otimes y^* : x^* \in A_X,\ y^* \in A_Y\} \subset (X \otimes_\epsilon Y)^*$$

y definamos

$$\sigma(x^* \otimes y^*) = \sigma_X(x^*) \otimes \sigma_Y(y^*),$$

$$\rho(x^* \otimes y^*) = \max\{\rho_X(x^*), \rho_Y(y^*)\},$$

para cada $x^* \otimes y^* \in A$. Es inmediato comprobar que se verifican las condiciones i) y ii) de la Definición 1.13.

Para la condición iii) usamos un resultado, al parecer debido a I. Singer [52] (véase también [35, Theorem 5.8] o [47, § 4]) según el cual, si e^* es un punto extremo de la bola unidad de $(X \otimes_\epsilon Y)^*$, se tiene $e^* = u^* \otimes v^*$ con $u^* \in \mathrm{Ext}(B_{X^*})$ y $v^* \in \mathrm{Ext}(B_{Y^*})$. La propiedad casi-$\beta$ en X e Y nos da sendos conjuntos de funcionales $A_{u^*} \subset A_X$ y $A_{v^*} \subset A_Y$, acompañados de sendos escalares s y t de módulo uno tales que

$$su^* \in \overline{A_{u^*}}^{w^*} \quad \text{y} \quad tv^* \in \overline{A_{v^*}}^{w^*}$$

verificándose además que

$$\sup\{\rho_X(x^*) : x^* \in A_{u^*}\} < 1 \quad \text{y} \quad \sup\{\rho_Y(y^*) : y^* \in A_{v^*}\} < 1.$$

Si llamamos $A_{e^*} = A_{u^*} \otimes A_{v^*}$, se comprueba fácilmente que

$$ste^* \in \overline{A_{e^*}}^{w^*} \quad \text{y} \quad \sup\{\rho(z^*) : z^* \in A_{e^*}\} < 1.$$

Si X e Y verifican la propiedad β, es claro que, el mismo conjunto A, junto con idéntica aplicación σ dotan al espacio $X \otimes_\epsilon Y$ de la propiedad β con constante $\rho = \max\{\rho_X, \rho_Y\}$. $\square$

Mostramos dos casos particulares, sencillos pero interesantes, de la proposición anterior. Para el primero recordemos que, si L es un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff y X un espacio de Banach, $C_0(L) \otimes_\varepsilon X$ se identifica canónicamente con el espacio $C_0(L, X)$ de las funciones continuas de L en X, que se anulan en el infinito, con su norma natural (ver, por ejemplo, [18, Example VIII.1.6]).

1.29 Corolario. *Si L es un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff con un conjunto denso de puntos aislados y X un espacio de Banach con la propiedad casi-β (resp. β), entonces $C_0(L, X)$ tiene la propiedad casi-β (resp β).*

También es posible probar la propiedad casi-β en algunos espacios de operadores.

1.30 Corolario. *Sean X e Y espacios de Banach. Supongamos que X^* e Y tienen la propiedad casi-β (resp. β) y que al menos uno de ellos tiene la propiedad de aproximación. Entonces el espacio $K(X, Y)$ de los operadores compactos tiene la propiedad casi-β (resp. β).*

Demostración. La propiedad de aproximación de X^* o Y permite identificar canónicamente $K(X, Y)$ con $X^* \otimes_\varepsilon Y$ [14, Proposition 5.3]. □

F. Problemas abiertos

La cuestión más importante, acerca de la propiedad B, que permanece abierta desde hace más de treinta años, consiste en saber si se puede obtener un teorema análogo al de Bishop-Phelps, sustituyendo el cuerpo escalar por un espacio de dimensión finita:

1.31 Problema. *¿Tiene todo espacio normado de dimensión finita la propiedad B?*

Hasta ahora, el único test conocido para saber si un espacio de dimensión finita tiene la propiedad B era la propiedad β. Más concretamente, para un espacio finito-dimensional que no tenga la propiedad β no se sabía, en ningún caso, si tenía la propiedad B. El exponente más claro de esta falta de información aparece explícitamente en un trabajo de J. Johnson y J. Wolfe [38] publicado en 1979: no se sabe si $\mathbb{R}^2$, con la norma euclídea, tiene la propiedad B. Los resultados de este capítulo suponen un ligero avance en la dirección positiva: el hecho de que, aún en dimensión finita, la propiedad casi-β sea estrictamente más general que la β (Ejemplos 1.16 y 1.22, Proposición 1.7 y Corolario 1.21) proporciona nuevos ejemplos de espacios de dimensión finita con la propiedad B que, hasta cierto punto, invitan a conjeturar una respuesta afirmativa al Problema 1.31. Esto explica que hayamos dedicado especial atención a la propiedad casi-β en dimensión finita.

Para la otra familia de espacios de Banach que hemos analizado con más detalle, los espacios de funciones continuas, no hemos sido tan afortunados, ya que, para tales espacios, la propiedad casi-β ha resultado ser equivalente a la β (Corolario 1.23). En realidad no se sabe si la propiedad B es ya equivalente a la β para espacios de funciones continuas. Es ésta otra cuestión que merece ser destacada:

1.32 Problema. *Caracterizar los espacios topológicos compactos de Hausdorff K, tales que $C(K)$ tiene la propiedad B.*

Son muy pocos los ejemplos conocidos de compactos K tales que $C(K)$ no tiene la propiedad B [50], más adelante aparecerá explícitamente alguno de ellos. Por el momento parece difícil conjeturar qué propiedad topológica de un compacto K puede equivaler a la propiedad B de $C(K)$, si bien cierta abundancia de puntos aislados parece obligada.

En cierto modo, el espacio topológico E_Y asociado de manera canónica a un espacio de Banach abstracto Y (Definición 1.19) desempeña un papel similar al que un compacto K juega para $C(K)$, una idea que ha sido ampliamente explotada en diversos ambientes (la teoría de M-estructura en espacios de Banach [8] es un buen ejemplo). Desde este punto de vista, se podría pensar en conseguir una caracterización de la propiedad casi-β en términos de la topología de E_Y. El Teorema 1.20, según el cual la propiedad casi-β de Y queda "encajada" entre dos propiedades topológicas de E_Y, es lo mejor que podemos ofrecer en esa dirección. Dado que el espacio topológico E_Y no determina unívocamente al espacio de Banach Y, no parece que la mencionada caracterización topológica sea factible. Alternativamente, se puede pensar en la afirmación *iii*) del Teorema 1.20 como una propiedad más general que la casi-β que todavía podría implicar la propiedad B:

1.33 Problema. *Sea Y un espacio de Banach tal que E_Y tiene un conjunto denso de puntos aislados. ¿Puede asegurarse que Y tiene la propiedad B?*

Finalmente, quizá merezca la pena mencionar que la sección E deja abiertas algunas cuestiones acerca de la estabilidad de la propiedad casi-β. A título de ejemplo, ya se comentó que no conocemos su comportamiento por productos tensoriales proyectivos.

Capítulo 2

Espacios de Banach que no verifican la propiedad B

A. Antecedentes

Dedicamos este capítulo a presentar algunos nuevos ejemplos de pares X, Y de espacios de Banach tales que el conjunto $NA(X,Y)$ de los operadores que alcanzan su norma no es denso en el espacio $L(X,Y)$ de todos los operadores y, al igual que en el capítulo anterior, fijaremos nuestra atención en el espacio de llegada.

La mayoría de los ejemplos concretos de espacios de Banach para los que se ha podido comprobar que no verifican la propiedad B han sido detectados mediante el mismo tipo de argumentos. Hoy por hoy, no se conoce ninguna condición necesaria para que un espacio de Banach verifique la propiedad B. Por tanto, si se quiere probar que un espacio concreto Y no la verifica, no queda más remedio que recurrir a la propia definición, es decir, hay que encontrar otro espacio de Banach X y un operador lineal y continuo T de X en Y que no pueda aproximarse por operadores que alcancen su norma. Salvo casos aislados, que más adelante comentaremos, esto sólo se ha conseguido para espacios de llegada estrictamente convexos, por tanto con una rica estructura extremal en su bola unidad, utilizando espacios de partida con una estructura extremal muy pobre y asegurándose la abundancia de operadores "no triviales".

Ya Lindenstrauss en [41] presenta esta idea así co..o algunas formas concretas de llevarla a cabo, entre las que nos interesa destacar la siguiente:

2.1 Proposición [41, Proposition 4]. *Sea Y un espacio de Banach estrictamente convexo. Todo operador de c_0 en Y que alcance su norma, es de rango finito. Por tanto, si existe un operador no compacto de c_0 en Y (equivalentemente, Y contiene un subespacio isomorfo a c_0), entonces Y no tiene la propiedad B.*

Demostración. Es claro que si $x \in B_{c_0}$, existe un número natural m tal que, para $n \geq m$, se tiene $|x(n)| < \frac{1}{2}$ y, por tanto,

$$\|x \pm \frac{1}{2}e_n\| \leq 1 \qquad \text{para} \quad n \geq m,$$

donde $\{e_n\}$ es la base canónica de c_0.

Sea ahora Y un espacio estrictamente convexo y $T \in L(c_0, Y)$. Si existe $x_0 \in B_{c_0}$ tal que $\|Tx_0\| = \|T\|$, podemos tomar m como antes, obteniendo

$$\|Tx_0 \pm \frac{1}{2}Te_n\| \leq \|T\| = \|Tx_0\| \qquad \text{para} \quad n \geq m$$

y la estricta convexidad de Y fuerza $Te_n = 0$ para $n \geq m$. □

El resultado anterior proporciona abundantes ejemplos de espacios de Banach que pueden renormarse equivalentemente para que no verifiquen la propiedad B. Recuérdese, por ejemplo, el hecho elemental de que todo espacio separable admite una norma equivalente estrictamente convexa [16, Theorem II.2.6], luego todo espacio separable que contenga un subespacio isomorfo a c_0 puede renormarse equivalentemente para que no verifique la propiedad B. De hecho, la separabilidad se puede sustituir por hipótesis mucho más generales [16, Corollary VII.1.11].

El argumento anterior no puede aplicarse a un espacio como $L_1(= L_1[0,1])$ que no contiene a c_0. Por otra parte, la bola unidad de L_1 no tiene puntos extremos, por lo que puede hacer un papel similar al de c_0 si lo tomamos como espacio de partida. Llegamos así a otra forma de materializar la idea general expuesta al principio, también debida a Lindenstrauss:

Si Y es un espacio estrictamente convexo, todo operador inyectivo con valores en Y, que alcance su norma, ha de alcanzarla en un punto extremo (de hecho expuesto) de la bola unidad del espacio de partida.

Por tanto, si X e Y son espacios de Banach isomorfos, Y estrictamente convexo y B_X no tiene puntos extremos, ningún isomorfismo de X en Y puede alcanzar la norma, pero el conjunto de los isomorfismos de X en Y es abierto en $L(X,Y)$, así que $NA(X,Y)$ no puede ser denso. Por ejemplo, ningún espacio estrictamente convexo isomorfo a L_1 tiene la propiedad B.

La idea de utilizar L_1 como espacio de partida fue mejor rentabilizada por J. Uhl en 1976 [55]:

Si Y es un espacio de Banach estrictamente convexo, entonces $NA(L_1,Y)$ es denso en $L(L_1,Y)$ si, y sólo si, Y tiene la propiedad de Radon-Nikodym.

En particular, un espacio de Banach estrictamente convexo que no verifique la propiedad de Radon-Nikodym no tiene la propiedad B.

Todavía en la órbita de la propiedad de Radon-Nikodym, el primer ejemplo de un espacio de Banach sin la propiedad B que no sea estrictamente convexo puede conseguirse a partir de un resultado de Huff [34]:

Cualquier espacio de Banach que no tenga la propiedad de Radon-Nikodym admite una norma equivalente para la cual no tiene la propiedad B.

Recordemos que si Λ es un conjunto no numerable, el espacio l_∞^Λ (funciones reales o complejas acotadas en Λ) no admite una norma estrictamente convexa equivalente a la usual (véase por ejemplo [16, Corollary II.7.13] o [36, Theorem 2.9.7]). Dado que dicho espacio no tiene la propiedad de Radon-Nikodym, admitirá una norma equivalente sin la propiedad B que, claro está, no puede ser estrictamente convexa.

A propósito del resultado de Huff, conviene mencionar que, salvo el caso trivial del cuerpo base, no se conoce ningún espacio de Banach que verifique la propiedad B en cualquier norma equivalente, así que la hipótesis de que el espacio no verifique la propiedad de Radon-Nikodym podría ser superflua. Algunos resultados que comentaremos más adelante apuntan de hecho en esa dirección.

Todos los ejemplos de espacios sin la propiedad B comentados hasta ahora son, en cierto modo, artificiosos. En 1979 Johnson y Wolfe [38] enumeran una serie de problemas abiertos sobre las propiedades A y B que estaban en el ambiente aunque nadie los hubiera planteado explícitamente. Llama la atención en dicha lista de problemas el hecho de que para una gran mayoría de espacios de Banach clásicos no se sabía si tienen o no la propiedad B. El primer ejemplo de espacio de Banach clásico que, con su norma natural, no tiene la propiedad B, fue detectado por W. Schachermayer [50] en 1983:

$NA(L_1, C[0,1])$ no es denso en $L(L_1, C[0,1])$, en particular $C[0,1]$ no tiene la propiedad B.

Casi simultáneamente y con técnicas mucho más asequibles, Johnson y Wolfe [39] probaron la existencia de un espacio métrico compacto K tal que $NA(L_1, C(K))$ no es denso en $L(L_1, C(K))$.

En 1990, W. Gowers [30], presenta toda una gama de espacios clásicos sin la propiedad B: los espacios l_p con $1 < p < \infty$. Para probarlo, Gowers utiliza como espacio de partida un predual de un espacio de Lorentz que, como espacio vectorial, está incluido en l_p $(1 < p < \infty)$ y la identidad formal es un operador que no puede ser aproximado por operadores que alcancen la norma. Usando que, siempre para $1 < p < \infty$, $L_p(= L_p[0,1])$ es estrictamente convexo y contiene isométricamente a l_p, el mismo argumento de Gowers permite probar que L_p no tiene la propiedad B. Por la misma razón, ningún espacio de Hilbert de dimensión infinita tiene la propiedad B.

En el presente capítulo trataremos de exprimir tanto como podamos las ideas de Gowers (sólo las recién comentadas), con el fin de encontrar nuevos espacios sin la propiedad B. Observaremos que el espacio de partida usado por Gowers (de hecho toda una gama de espacios de ese tipo), no sólo carece de puntos extremos en la bola unidad como probó Gowers, sino que tiene la propiedad típica de c_0 que se usa en la Proposición 2.1, lo que permite razonar como lo hacía Lindenstrauss en dicha proposición, afinando así los resultados de Gowers.

B. Espacios de Lorentz de sucesiones y sus preduales canónicos

En lo que sigue llamaremos *admisible* a cada sucesión $w = \{w(n)\}$ de números reales positivos, estrictamente decreciente, con $w(1) = 1$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} w(n) = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} w(n) = +\infty.$$

Si w es una sucesión admisible, notaremos

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} w(k) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Recordemos que, dada una sucesión admisible w, y $1 \leq p < \infty$, se denomina *espacio de Lorentz* $d(w,p)$ al espacio de Banach de las sucesiones de escalares $x = \{x(n)\}$ tales que

$$\|x\| := \sup_{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(\pi(n))|^p w(n) \right)^{1/p} < \infty$$

donde el supremo se toma sobre todas las permutaciones π de los naturales.

En el libro de Lindenstrauss-Tzafriri [42] puede encontrarse información sobre los espacios de Lorentz, una interesante gama de espacios de Banach con base simétrica, cuyo origen se remonta a 1950. Nos interesa aquí solamente el caso $p = 1$ de la definición anterior y, para simplificar la notación, escribiremos simplemente $d(w)$ en lugar de $d(w, 1)$.

Presentamos a continuación un predual (canónico en un sentido que más adelante se concretará) del espacio $d(w)$, para cualquier sucesión admisible w.

Este predual $d_*(w)$ aparece, si bien nunca de forma muy explícita, en varios trabajos sobre espacios de sucesiones ([27], [48]). Como ya se ha dicho, fue W. Gowers quien puso de manifiesto su utilidad en relación con problemas de operadores que alcanzan la norma. Dado que la mayor parte de este capítulo se basa en propiedades de los espacios $d_*(w)$, discutimos con detalle dichas propiedades aunque algunas de ellas sean conocidas.

2.2 Definición. Sea w una sucesión admisible. En el espacio vectorial c_0 consideraremos una sucesión $\{\varphi_n\}$ de normas como sigue:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{W_n} \sup \left\{ \sum_{j\in J} |x(j)| : J \subset \mathbb{N}, |J| = n \right\} \qquad (x \in c_0,\ n \in \mathbb{N})$$

donde hemos notado $|J|$ al número de elementos de J. Es claro que, para cada natural n, φ_n es una norma en c_0 equivalente a la usual $\|\cdot\|_\infty$. De hecho se tiene:

$$\frac{1}{W_n}\|x\|_\infty \leq \varphi_n(x) \leq \frac{n}{W_n}\|x\|_\infty \qquad (x \in c_0)$$

y, en particular, $\varphi_1 = \|\cdot\|_\infty$.

Llamaremos $d_*(w)$ al subespacio vectorial de c_0 dado por:

$$d_*(w) = \left\{ x \in c_0 : \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0 \right\}$$

dotado de la norma:

$$\|x\| = \max\{\varphi_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \qquad (x \in d_*(w)).$$

Se comprueba sin dificultad que $d_*(w)$ es un espacio de Banach así como que la sucesión $\{e_n\}$ definida, como es habitual,

$$e_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n, \end{cases}$$

es una base de Schauder (simétrica) de $d_*(w)$, a la que llamaremos base canónica.

Para comprobar que $d_*(w)$ es un predual de $d(w)$ utilizaremos el siguiente lema elemental, que aparece explícitamente en un trabajo de W. Sargent [48, Lemma 7] y volverá a ser útil más adelante.

2.3 Lema. *Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales verificando*

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \leq \sum_{k=1}^{m} b_k \qquad \text{para } m = 1, 2, \ldots n.$$

Si $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n \geq 0$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k c_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k c_k.$$

Demostración.

Si para $m = 1, 2, \ldots, n$, notamos $\alpha_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$ y $\beta_m = \sum_{k=1}^{m} b_k$, basta observar que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k(b_k - a_k) = c_1(\beta_1 - \alpha_1) + \sum_{k=2}^{n} c_k[(\beta_k - \beta_{k-1}) - (\alpha_k - \alpha_{k-1})] =$$

$$= c_1(\beta_1 - \alpha_1) + \sum_{k=2}^{n} c_k(\beta_k - \alpha_k) - \sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1}(\beta_k - \alpha_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(c_k - c_{k+1})(\beta_k - \alpha_k) + c_n(\beta_n - \alpha_n) \geq 0. \qquad \square$$

2.4 Proposición. *Sea w una sucesión admisible. El dual topológico del espacio de Banach $d_*(w)$ es isométricamente isomorfo al espacio de Lorentz $d(w)$.*

Demostración. Sea f un funcional lineal continuo en $d_*(w)$. Asociaremos a f la sucesión $y = \{y(n)\}$ donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y(n) = f(e_n)$. Sea π una permutación cualquiera de $\mathbb{N}$ y n un natural arbitrario. Notemos $J_n = \pi(\{1, 2, \ldots, n\})$ y, para $k \in \mathbb{N}$, μ_k será un escalar de módulo uno que verifique $\mu_k y(k) = |y(k)|$. Si tomamos el elemento $x \in d_*(w)$ dado por

$$x = \sum_{j \in J_n} \mu_j w(\pi^{-1}(j)) e_j$$

se tiene claramente que $\|x\| = 1$, luego

$$\|f\| \geq |f(x)| = \sum_{j \in J_n} |y(j)| w(\pi^{-1}(j)) = \sum_{k=1}^{n} |y(\pi(k))| w(k),$$

y de la arbitrariedad de n y π se deduce que $y \in d(w)$ con $\|y\| \leq \|f\|$.

Cada $y \in d(w)$ deberá proceder de un funcional f dado por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) y(k) \qquad (x \in d_*(w)).$$

Bastará probar que, efectivamente, f está bien definido y es un funcional lineal continuo en $d_*(w)$ con $\|f\| \leq \|y\|$. Equivalentemente, hemos de ver que, para cada $x \in B_{d_*(w)}$ y cada natural n, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} |x(k) y(k)| \leq \|y\|.$$

Sea $x \in B_{d_*(w)}$ y tomemos un natural arbitrario n. Notemos antes de nada que $\|x\| \leq 1$ implica que $\sum_{k=1}^{m} |x(\pi(k))| \leq \sum_{k=1}^{m} w(k)$ para $m \in \mathbb{N}$ y cada permutación π. Elijamos π de forma que se tenga

$$\pi(\{1,2,\ldots,n\}) = \{1,2,\ldots n\}, \quad |y(\pi(1))| \geq |y(\pi(2))| \geq \ldots \geq |y(\pi(n))|.$$

Evidentemente

$$\sum_{k=1}^{n} |x(k)y(k)| = \sum_{k=1}^{n} |x(\pi(k))||y(\pi(k))|$$

y aplicando el lema anterior obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |x(k)y(k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |y(\pi(k))|w(k) \leq \|y\|. \qquad \square$$

2.5 Nota. Como ya habíamos anunciado, puede decirse que $d_*(w)$ es un predual "canónico" de $d(w)$, en un sentido que pasamos a precisar. D. Werner ha probado recientemente [56, Proposition 2.2] que $d_*(w)$ es un M-ideal de su bidual. El resultado aparece recogido también en [32, Examples III.1.4 (c)], texto que contiene un estudio sistemático de los espacios de Banach con esa propiedad; concretamente, un espacio de Banach X es M-ideal de su bidual cuando la proyección natural P de X^{***} sobre X^* (para cada $u \in X^{***}$, $P(u)$ es la restricción de u a X, que pertenece a X^* o, si se quiere a X^{***}) verifica que :

$$\|u\| = \|Pu\| + \|u - Pu\| \quad \forall u \in X^{***}.$$

Razonando como en [32, Proposition III.2.2] se prueba que, si dos espacios de Banach son M-ideales de sus respectivos biduales, toda biyección lineal isométrica entre los biduales es la bitraspuesta de una biyección lineal isométrica entre los espacios. Se sigue claramente que X es, salvo isomorfismos isométricos, el único predual de X^* que es M-ideal de X^{**}. En particular, $d_*(w)$ es el único predual de $d(w)$ que es un M-ideal de su bidual. Aplicando el resultado recién citado, también obtenemos que toda biyección lineal isométrica de $d(w)$ sobre sí mismo es traspuesta de una biyección lineal isométrica de $d_*(w)$ sobre sí mismo. Ello justifica sobradamente el considerar a $d_*(w)$ como predual canónico de $d(w)$. En el mismo sentido puede afirmarse que c_0 es el predual canónico de l_1 ya que c_0 también es M-ideal de su bidual.

Antes de presentar nuevos ejemplos de espacios sin la propiedad B, permítasenos hacer notar que los espacios reales $d_*(w)$ constituyen toda una gama de espacios de Banach de dimensión infinita que tienen la propiedad casi-β sin verificar la β. Para comprobarlo necesitamos, naturalmente, conocer los puntos extremos de la bola unidad de los espacios $d(w)$ cuya descripción se debe a W. Davis [13]. Aprovechando precisamente el hecho de que $d(w)$ es el dual de $d_*(w)$ podemos obtener con mayor comodidad dicha descripción.

2.6 Proposición [13, Theorem 3.1]. *Un elemento $y \in d(w)$ es un punto extremo de la bola unidad si, y sólo si, el conjunto $J = \{j \in \mathbb{N} : y(j) \neq 0\}$ es finito y*

$$|y(j)| = \frac{1}{W_n} \qquad \forall j \in J,$$

donde n es el número de elementos de J.

Demostración. Sea $E \subset S_{d(w)}$ el conjunto de los puntos que verifican la condición descrita en el enunciado, y empecemos probando que todo punto de E es extremo. Así pues, fijemos $y \in E$, sea $J = \{j \in \mathbb{N} : y(j) \neq 0\}$, $n = |J|$ y $|y(j)| = \dfrac{1}{W_n}$ para $j \in J$.

Tomemos $x \in d(w)$ tal que $\|y \pm x\| \leq 1$ y sea π una permutación de los naturales que verifique $\pi(i) \in J$ para $1 \leq i \leq n$. De $\|y \pm x\| \leq 1$ obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} |y(\pi(k)) \pm x(\pi(k))| w(k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(\pi(k))| w(k) \leq 1 \tag{1}$$

y sumando las dos desigualdades

$$2 \geq \sum_{k=1}^{n} \left(|y(\pi(k)) + x(\pi(k))| + |y(\pi(k)) - x(\pi(k))| \right) w(k) +$$

$$+2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(\pi(k))| w(k) \geq$$

$$\geq 2 \sum_{k=1}^{n} |y(\pi(k))| w(k) + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(\pi(k))| w(k) \geq$$

$$\geq 2 \sum_{k=1}^{n} |y(\pi(k))| w(k) = \frac{2}{W_n} \sum_{k=1}^{n} w(k) = 2.$$

Se sigue que $|x(\pi(k))| = 0$ para $k \geq n+1$, es decir, $x(i) = 0$ para $i \in \mathbb{N} \setminus J$. Pero también hemos obtenido que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(|y(\pi(k)) + x(\pi(k))| + |y(\pi(k)) - x(\pi(k))| \right) w(k) = 2$$

lo que, en vista de la desigualdad (1), nos da

$$\sum_{k=1}^{n} |y(\pi(k)) \pm x(\pi(k))| w(k) = 1.$$

Puesto que esta conclusión es válida para cada permutación π de los naturales que verifique $\pi(i) \in J$ para $1 \leq i \leq n$, siendo la sucesión w estrictamente decreciente, deducimos que tanto $|y(\pi(k)) + x(\pi(k))|$ como $|y(\pi(k)) - x(\pi(k))|$ han de ser independientes de k, pero entonces

$$|y(\pi(k)) \pm x(\pi(k))| = \frac{1}{W_n} \quad \text{para } k = 1, \ldots, n$$

lo que sólo es posible si $x(\pi(k)) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto $x = 0$ e y es un punto extremo de la bola unidad.

Recíprocamente, probemos que todo punto extremo de la bola unidad pertenece al conjunto E. Viendo a $d(w)$ como dual de $d_*(w)$, empecemos observando que el conjunto E es normante. En efecto, dado $x \in d_*(w)$, encontramos $n \in \mathbb{N}$ y $J \subset \mathbb{N}$ con $|J| = n$ tales que

$$\|x\| = \varphi_n(x) = \frac{1}{W_n} \sum_{j \in J} |x(j)|.$$

Para cada $j \in J$, sea μ_j un escalar tal que

$$|\mu_j| = 1, \qquad |x(j)| = \mu_j x(j);$$

tomando $y(j) = \dfrac{\mu_j}{W_n}$ para $j \in J$, $y(k) = 0$ para $k \in \mathbb{N} \setminus J$, obtenemos un $y \in E$ tal que $y(x) = \|x\|$.

Teniendo en cuenta que $\mathbb{T}E = E$, el Teorema del bipolar, junto con el Teorema de Krein-Milman revertido, nos permiten asegurar que cualquier punto extremo de $B_{d(w)}$ ha de pertenecer al cierre débil-$*$ de E. Ahora bien, para cada $y \in E$, la función $k \mapsto |y(k)|$ toma exactamente dos valores, por tanto un límite puntual de funciones de este tipo tomará a lo sumo dos valores. Deducimos que, si $y \in S_{d(w)} \cap \overline{E}^{w^*}$, el conjunto $\{|y(k)| : k \in \mathbb{N}\}$ tiene exactamente dos elementos, lo que claramente implica que $y \in E$. $\square$

2.7 Proposición. *Para cualquier sucesión admisible w, el espacio real $d_*(w)$ verifica la propiedad casi-β y no verifica la β.*

Demostración. Usaremos varias veces el hecho de que la sucesión $\left\{\frac{n}{W_n}\right\}$ es creciente:

$$\frac{n+1}{W_{n+1}} - \frac{n}{W_n} = \frac{W_n - nw(n+1)}{W_n W_{n+1}} > 0.$$

Sea, como siempre, $\{e_n\}$ la base canónica de $d_*(w)$ y notemos $\{e_n^*\}$ a la correspondiente sucesión de funcionales biortogonales, que no es otra que la base canónica de $d(w)$. Sea A el conjunto de los funcionales $y^* \in B_{d(w)}$ de la forma

$$y^* = \frac{1}{W_n} \sum_{j \in J} s_j e_j^* \tag{1}$$

donde $J \subset \mathbb{N}$ con $|J| = n$, $s_j = \pm 1$ para $j \in J$ y $s_k = 1$ para $k = \min J$.

Fijado un tal $y^* \in A$ definimos

$$\sigma(y^*) = \frac{W_n}{n} \sum_{j \in J} s_j e_j,$$

y

$$\rho(y^*) = \max\left\{\frac{(n-1)W_n}{nW_{n-1}}, \frac{W_n}{W_{n+1}}\right\} < 1.$$

Si $n = 1$ tomamos simplemente $\rho(y^*) = \dfrac{W_1}{W_2} < 1$.

Es fácil comprobar que

$$y^*(\sigma(y^*)) = \|\sigma(y^*)\| = 1 \qquad \forall y^* \in A$$

y probaremos que $|z^*(\sigma(y^*))| \leq \rho(y^*)$ para $z^*, y^* \in A$, $z^* \neq y^*$. Como además, en virtud de la proposición anterior, tenemos $\mathrm{Ext}(B_{d(w)}) = A \cup -A$, habremos así comprobado todas las condiciones de la Definición 1.13.

Sea pues $y^* \in A$ dado por (1) y

$$z^* = \frac{1}{W_m} \sum_{i \in I} t_i e_i^*$$

la expresión análoga para $z^* \in A$ con $z^* \neq y^*$. Observamos fácilmente que

$$|z^*(\sigma(y^*))| \leq \frac{W_n}{nW_m}|I \cap J|,$$

pudiendo darse varias posibilidades: si $m < n$, el crecimiento de la sucesión $\left\{\frac{k}{W_k}\right\}$, ya comprobado, nos da

$$|z^*(\sigma(y^*))| \leq \frac{mW_n}{nW_m} \leq \frac{(n-1)W_n}{nW_{n-1}} \leq \rho(y^*);$$

para $m > n$, las cosas son aún más fáciles

$$|z^*(\sigma(y^*))| \leq \frac{W_n}{W_m} \leq \frac{W_n}{W_{n+1}} \leq \rho(y^*);$$

en el caso $m = n$, si $I \neq J$, hay que observar que $I \cap J$ tiene a lo sumo $n-1$ elementos, obteniéndose

$$|z^*(\sigma(y^*))| \leq \frac{n-1}{n} \leq \rho(y^*);$$

finalmente, si $J = I$, tenemos $n = m > 1$ con $s_k = t_k = 1$ para $k = \min J$ y $s_j = -t_j$ para algún $j \in J$; así

$$|z^*(\sigma(y^*))| \leq \frac{n-2}{n} \leq \rho(y^*).$$

Por tanto, $d_*(w)$ tiene la propiedad casi-$\beta(A, \sigma, \rho)$.

Veamos, por reducción al absurdo, que $d_*(w)$ no tiene la propiedad β. Supongamos que $d_*(w)$ tuviese la propiedad $\beta(\tilde{A}, \tilde{\sigma}, \tilde{\rho})$. Por la Proposición 1.18 tenemos que, tanto $A \cup -A$ como $\tilde{A} \cup -\tilde{A}$ coinciden con el conjunto de los puntos fuertemente débil-$*$ expuestos de $B_{d(w)}$, en particular $A \subset \tilde{A} \cup -\tilde{A}$. Entonces, para $y^*, z^* \in A$ con $y^* \neq z^*$, podemos encontrar $\tilde{y}^*, \tilde{z}^* \in \tilde{A}$, $\tilde{y}^* \neq \tilde{z}^*$, tales que $y^* = \pm\tilde{y}^*$ y $z^* = \pm\tilde{z}^*$ y tendríamos

$$\|y^* - z^*\| = \|\tilde{y}^* \pm \tilde{z}^*\| \geq |\tilde{y}^*(\tilde{\sigma}(\tilde{z}^*)) \pm 1| \geq 1 - \tilde{\rho} > 0.$$

Sin embargo, si n es un natural cualquiera, podemos tomar

$$y^* = \frac{1}{W_{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} e_k^*, \quad z^* = \frac{1}{W_n} \sum_{k=1}^{n} e_k^*$$

obteniendo

$$1 - \tilde{\rho} \leq \|y^* - z^*\| = \frac{1}{W_{n+1}} + \left(\frac{1}{W_n} - \frac{1}{W_{n+1}}\right)(W_{n+1} - 1) \to 0,$$

una contradicción. □

2.8 Nota. Aplicando el razonamiento empleado en la Proposición 2.6 para ver que $\overline{E}^{w^*} \cap S_{d(w)} = E$, se podría haber probado que, en el caso real, el conjunto $\mathrm{Ext}(B_{d(w)})$ es discreto en la topología débil-$*$, por tanto también es discreto el espacio topológico cociente $E_{d_*(w)}$, y el hecho de que $d_*(w)$ tiene la propiedad casi-β se podría entonces haber deducido del Teorema 1.20 $i) \Rightarrow ii)$. Hemos preferido comprobar explícitamente la propiedad casi-β. Nótese que no se pierde información, ya que al probar la propiedad casi-$\beta(A, \sigma, \rho)$ con $A \cup -A = \mathrm{Ext}(B_{d(w)})$, de hecho se está obteniendo también que el espacio $E_{d_*(w)}$ es discreto.

C. Nuevos contraejemplos

Pasamos ya a mostrar la utilidad de los espacios $d_*(w)$ en relación con problemas de operadores que alcanzan su norma, mejorando ligeramente, como ya se anunció, los resultados obtenidos por Gowers en [30]. Para ello utilizaremos la misma idea de Lindenstrauss que expusimos en la Proposición 2.1 pero con los espacios $d_*(w)$ desempeñando el papel de c_0 pues, como vemos a continuación, estos espacios carecen de puntos extremos en su bola unidad de forma tan drástica como c_0. En lo que sigue w será una sucesión admisible arbitraria.

2.9 Lema. *Para cada $x \in d_*(w)$ con $\|x\| \leq 1$, puede encontrarse un número natural m y $\delta > 0$ tales que*

$$\|x + \lambda e_n\| \leq 1$$

para cualquier natural $n \geq m$ y cualquier escalar λ con $|\lambda| \leq \delta$. En particular, la bola unidad de $d_*(w)$ carece de puntos extremos.

Demostración. Fijado $x \in B_{d_*(w)}$, sea N un natural tal que

$$\varphi_k(x) < \frac{1}{2} \quad \text{para} \quad k > N$$

y recordando que $x \in c_0$, tomemos $m \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n \in \mathbb{N},\ n \geq m \Rightarrow |x(n)| \leq \frac{w(N)}{2}.$$

Sea ahora $0 < \delta \leq \dfrac{w(N)}{2}$, $n \geq m$ y pongamos $y = x + \lambda e_n$, donde $|\lambda| \leq \delta$. Vamos a comprobar que $\|y\| \leq 1$.

En efecto, si $k > N$ tenemos

$$\varphi_k(y) \leq \varphi_k(x) + \delta < \frac{1}{2} + \delta \leq 1$$

mientras que para $k \leq N$, si $J \subset \mathbb{N}$, $|J| = k$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} |y(j)| &= |y(n)| + \sum_{j \in J \setminus \{n\}} |y(j)| \leq \\
&\leq \delta + |x(n)| + \sum_{j \in J \setminus \{n\}} |x(j)| \leq \\
&\leq \frac{w(N)}{2} + \frac{w(N)}{2} + \sum_{j \in J \setminus \{n\}} |x(j)| \leq \\
&\leq w(N) + W_{k-1} \leq \\
&\leq W_k
\end{aligned}$$

donde hemos supuesto que $n \in J$, pues en caso contrario todo es trivial. Por lo tanto $\varphi_k(y) \leq 1$ para cada natural k, es decir, $\|y\| \leq 1$. $\square$

2.10 Teorema. *Sea Y un espacio de Banach estrictamente convexo y $T \in L(d_*(w), Y)$.*

i) *$T \in NA(d_*(w), Y)$ si, y sólo si, existe un número natural m tal que*

$$m \Rightarrow T(e_n) = 0,$$

equivalentemente $T = TP_m$, donde $\{P_n\}$ es la sucesión de proyecciones naturales asociada a la base canónica $\{e_n\}$, es decir

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k \quad \forall x \in d_*(w), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

ii) *Como consecuencia, T puede aproximarse por operadores que alcancen su norma si, y sólo si, T es compacto:*

$$\overline{NA(d_*(w), Y)} = K(d_*(w), Y).$$

Demostración. *i)* Supongamos que $T \in NA(d_*(w), Y)$ y sea $x_0 \in B_{d_*(w)}$ tal que $\|T(x_0)\| = \|T\|$. Según el lema anterior, encontramos $m \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que, si $n \geq m$, $\|x_0 \pm \delta e_n\| \leq 1$ y por tanto $\|T(x_0) \pm \delta T(e_n)\| \leq \|T(x_0)\|$. La convexidad estricta de Y nos da $Te_n = 0$ para $n \geq m$.

Recíprocamente, veamos que TP_n alcanza la norma cualesquiera que sean $T \in L(d_*(w), Y)$ y $n \in \mathbb{N}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|TP_n\| &= \sup\{\|TP_n(x)\| : x \in B_{d_*(w)}\} = \\ &= \sup\{\|T(z)\| : z \in P_n(B_{d_*(w)})\} \end{aligned}$$

y el último supremo se alcanza ya que, por ser $\|P_n\| = 1$, tenemos que $P_n(B_{d_*(w)}) = B_{P_n(d_*(w))}$ es compacto.

ii) En vista de *i)* bastará observar que

$$T \in K(d_*(w), Y) \Leftrightarrow \{\|T - TP_n\|\} \to 0.$$

La implicación hacia la izquierda es clara, un límite en norma de operadores de rango finito ha de ser compacto. Para la otra implicación, nótese que $\{P_n^*\}$ es la sucesión de proyecciones naturales asociada a la base canónica $\{e_n^*\}$ de $d(w)$, luego $\{\|x^* - P_n^* x^*\|\} \to 0$ para $x^* \in d(w)$ y, siendo la sucesión $\{P_n^*\}$ acotada en norma, se sigue que $\{P_n^*\}$ converge a la identidad uniformemente en cada subconjunto compacto de $d(w)$. Si $T \in K(d_*(w), Y)$, $T^*(B_{Y^*})$ es compacto y deducimos que $\|T^* - P_n^* T^*\| \to 0$, es decir, $\|T - TP_n\| \to 0$. $\square$

Obtenemos de inmediato la siguiente consecuencia:

2.11 Corolario. *Si Y es un espacio de Banach estrictamente convexo y, para alguna sucesión admisible w, existe un operador lineal continuo no compacto de $d_*(w)$ en Y, entonces Y no tiene la propiedad B.*

Para mostrar la utilidad del corolario anterior debemos aportar condiciones "naturales" para que un espacio de Banach Y verifique las hipótesis. Nada se puede objetar a la naturalidad de la hipótesis de convexidad estricta, que suele tenerse automáticamente o conseguirse con facilidad mediante renormación equivalente. La existencia de operadores no compactos de algún espacio $d_*(w)$ en Y parece una hipótesis más rebuscada que, sin embargo, se da con bastante frecuencia como veremos en lo que sigue.

En [30], Gowers prueba que, tomando $w(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_*(w)$ está contenido (como espacio vectorial) en l_p, para cualquier p con $1 < p < \infty$, con lo que la identidad formal de $d_*(w)$ en l_p es un operador lineal continuo no compacto. Podemos obtener la siguiente generalización:

2.12 Proposición. *Sea Y un espacio de Banach que contenga una sucesión básica $\{y_n\}$, simétrica, normalizada y no equivalente a la base canónica de l_1. Entonces existe una sucesión admisible w y un operador $T \in L(d_*(w), Y)$ tal que*

$$T(e_n) = y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(en particular T no es compacto). Si $\{y_n\}$ es (equivalente a) la base canónica de l_p con $1 < p < \infty$, se puede tomar como w cualquier sucesión admisible tal que $w \in l_p$, por ejemplo, $w(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, independientemente de p.

Demostración. Dado que $\{y_n\}$ no es equivalente a la base canónica de l_1, existe en Y una serie convergente de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} w(n)y_n$ que no es absolutamente convergente. Veamos que es posible tomarla de manera que $w = \{w(n)\}$ sea una sucesión admisible.

Empecemos por deshacernos de los eventuales términos nulos. Para conseguirlo tomemos una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, estrictamente creciente tal que $\sigma(\mathbb{N}) = \{k \in \mathbb{N} : w(k) \neq 0\}$, con lo que la serie $\sum_{n\geq 1} w(\sigma(n))y_{\sigma(n)}$ es convergente. Puesto que toda sucesión básica simétrica es, en particular, subsimétrica (véase, por ejemplo, [42, Proposition 3.a.3]) $\{y_n\}$ es equivalente a $\{y_{\sigma(n)}\}$, luego la serie $\sum_{n\geq 1} w(\sigma(n))y_n$ también es convergente y sigue sin ser absolutamente convergente. Sustituyendo pues $\{w(n)\}$ por $\{w(\sigma(n))\}$ conseguimos $w(n) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora, la incondicionalidad de la sucesión básica $\{y_n\}$ nos permite suponer $w(n) > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, sustituyendo simplemente $w(n)$ por $|w(n)|$. Puesto que $\{w(n)\} \to 0$ por ser $\{y_n\}$ normalizada, la simetría de la sucesión básica $\{y_n\}$, usada ahora sí con toda su fuerza, nos permite conseguir, mediante una conveniente reordenación, el decrecimiento de w. Si este decrecimiento no resultara estricto, multiplicaríamos, término a término, w por cualquier sucesión de números reales positivos, estrictamente decreciente y no convergente a cero. La condición $w(1) = 1$ es una simple normalización que tampoco afecta a las propiedades anteriores de w.

En suma, se tiene una sucesión admisible w tal que la serie $\sum_{n\geq 1} w(n)y_n$ es convergente.

El operador $T \in L(d_*(w), Y)$ cuya existencia queremos probar vendrá obligadamente definido para sucesiones casi-nulas de $d_*(w)$ por

$$T\left(\sum_{k=1}^{n} x(k)e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x(k)y_k.$$

El problema es, naturalmente, comprobar que T está acotado en las sucesiones casi-nulas de la bola unidad de $d_*(w)$.

Fijemos pues una tal sucesión $x = \sum_{k=1}^{n} x(k)e_k$ y sea $y^* \in B_{Y^*}$ arbitrario. Consideremos una permutación π de los naturales verificando que:

$$\pi(\{1,2,\ldots,n\}) = \{1,2,\ldots,n\}$$

$$|y^*(y_{\pi(1)})| \geq |y^*(y_{\pi(2)})| \geq \ldots \geq |y^*(y_{\pi(n)})|.$$

Finalmente, para $k = 1,2,\ldots,n$, sea μ_k un escalar de módulo 1 tal que $|y^*(y_{\pi(k)})| = \mu_k y^*(y_{\pi(k)})$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Se tiene entonces:

$$|y^*(Tx)| = \left|\sum_{k=1}^{n} x(k)y^*(y_k)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |x(k)||y^*(y_k)| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |x(\pi(k))||y^*(y_{\pi(k)})|.$$

Puesto que $\sum_{k=1}^{m} |x(\pi(k))| \leq \sum_{k=1}^{m} w(k)$ para $m = 1,2,\ldots,n$, el Lema 2.3 nos da

$$|y^*(T(x))| \leq \sum_{k=1}^{n} w(k)|y^*(y_{\pi(k)})| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w(k)\mu_k y^*(y_{\pi(k)}) = y^*\left(\sum_{k=1}^{n} w(k)\mu_k y_{\pi(k)}\right) \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{k=1}^{n} w(k)\mu_k y_{\pi(k)}\right\| \leq K \left\|\sum_{k=1}^{n} w(k) y_k\right\| \leq KM$$

donde K es la constante simétrica de la sucesión $\{y_n\}$ y

$$M = \sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n} w(k) y_k\right\| : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

La arbitrariedad de $y^* \in B_{Y^*}$ nos da

$$\|Tx\| \leq KM$$

y esto para cualquier sucesión casi-nula x en la bola unidad de $d_*(w)$. Así pues T se extiende de manera única a un operador lineal y continuo de $d_*(w)$ en Y que obviamente verifica $Te_n = y_n$ para cada natural n y que, por eso mismo, no es compacto, ya que una sucesión básica normalizada no puede tener sucesiones parciales convergentes en norma.

También es claro que si $\{y_n\}$ es equivalente a la base canónica de l_p, con $1 < p < \infty$, podemos tomar como w cualquier sucesión admisible tal que $w \in l_p$, ya que entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} w(n) y_n$ es convergente pero no absolutamente convergente. □

Enlazando los dos últimos enunciados obtenemos inmediatamente:

2.13 Corolario. *Sea Y un espacio de Banach estrictamente convexo que contenga una sucesión básica simétrica no equivalente a la base canónica de l_1. Entonces Y no tiene la propiedad B.*

Destaquemos los casos particulares ya conocidos del corolario anterior:

2.14 Corolario. *Si Y es un espacio de Banach estrictamente convexo que contiene un subespacio isomorfo a c_0 o a l_p con $1 < p < \infty$, entonces Y no tiene la propiedad B.*

Como ya se dijo, para el caso de c_0, el corolario anterior se debe a Lindenstrauss [41], mientras que el caso l_p aparece implícitamente en el trabajo de Gowers [30]. Con respecto a otro caso particular también comentado anteriormente, recuérdese que $L_1[0,1]$ contiene un subespacio isomorfo a l_2 [17, VII. Theorem (Khinchine's Inequalities)], por lo que cualquier espacio estrictamente convexo isomorfo a L_1 verifica las hipótesis del corolario anterior.

Conviene resaltar que el último corolario no agota la información dada por el que le precede. Existen espacios de Banach con base simétrica que no contienen subespacios isomorfos a c_0 ni a l_p para $1 \leq p < \infty$. Ejemplos de tales espacios fueron construidos por Figiel y Johnson [23] y por Altshuler (véase [42, Example 3.b.10]). Cualquier renormación estrictamente convexa de un tal espacio no tiene la propiedad B, en vista del Corolario 2.13.

Pasamos a considerar otra forma de encontrar operadores no compactos en espacios $d_*(w)$, alternativa a la dada por la Proposición 2.12 y más sencilla si cabe:

2.15 Proposición. *Sea Y un espacio de Banach que contenga una sucesión $\{y_n\}$ de vectores de norma uno que admita una p-estimación superior con*

$1 < p < \infty$, esto es, existe $M > 0$ tal que:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k y_k \right\| \leq M \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} \qquad (*)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier sucesión $\{a_k\}$ de escalares. Entonces, tomando $w(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, existe un operador lineal y continuo, no compacto, de $d_*(w)$ en Y.

Demostración. Recuérdese que $d_*(w)$ (con $w(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) está contenido en l_p y que la identidad formal de $d_*(w)$ en l_p es un operador lineal continuo, es decir, existe una constante $K > 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \leq K\|x\| \quad \forall x \in d_*(w).$$

Enlazando con $(*)$ obtenemos que, para $x \in d_*(w)$, la serie $\sum_{n\geq 1} x(n)y_n$ converge con

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y_n \right\| \leq MK\|x\|.$$

Definiendo entonces

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y_n \quad \forall x \in d_*(w),$$

se obtiene el operador buscado. Nótese que $T(e_n) = y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, en particular $\{y_n\}$ converge débilmente a cero, luego no puede tener sucesiones parciales convergentes en norma y T no es compacto. $\square$

Obviamente, un espacio estrictamente convexo que verifique las hipótesis de la proposición anterior no tendrá la propiedad B. Sin embargo, preferimos destacar un caso particular en el que ambas hipótesis se presentan de forma muy natural:

2.16 Corolario. *Un espacio uniformemente convexo, de dimensión infinita, no puede tener la propiedad B.*

Demostración. Sea $\{y_n\}$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach uniformemente convexo Y (Teorema de Mazur [42, Theorem 1.a.5]). Aplicando el Teorema de N. y V. Gurarii (véase, por ejemplo [17, Theorem VIII.3]) existe $p > 1$ tal que $\{y_n\}$ admite una p-estimación superior. Por la proposición anterior existe un operador lineal continuo no compacto de $d_*(w)$ en Y, con $w(n) = \dfrac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y, puesto que Y es estrictamente convexo, basta aplicar el Corolario 2.11. □

Obsérvese que en la última demostración, la convexidad uniforme de Y sólo se utiliza para obtener un operador no compacto de $d_*(w)$ en Y, del que obviamente seguiremos disponiendo si sustituimos la norma de Y por cualquier otra equivalente e incluso si agrandamos el espacio Y. Recordemos además que, según demostró P. Enflo [21], un espacio de Banach admite una norma equivalente uniformemente convexa si, y sólo si, es super-reflexivo. Podemos por tanto enunciar la siguiente versión, más general pero menos estética, del corolario anterior:

2.17 Corolario. *Un espacio de Banach estrictamente convexo que contenga un subespacio infinito-dimensional super-reflexivo no tiene la propiedad B.*

D. Problemas abiertos

Dejando aparte el caso finito-dimensional, ya comentado en el capítulo anterior (Problema 1.31), la cuestión más importante acerca de la propiedad B, que aún permanece abierta, se refiere a un espacio de Banach de lo más clásico:

2.18 Problema. *¿Tiene l_1 la propiedad B?*

La pregunta aparece explícitamente planteada en un trabajo de Johnson y Wolfe ya citado [38, Question 5.(d)].

Gracias a un teorema de Partington [44], también varias veces citado, sabemos que l_1, como cualquier espacio de Banach, puede renormarse equivalentemente con la propiedad B, pero creemos que no se conoce la respuesta a la siguiente pregunta: ¿existe un espacio de Banach isomorfo a l_1 que no verifique la propiedad B? Los resultados conocidos ponen de manifiesto la dificultad que la propiedad B tiene para convivir con la convexidad estricta, así que la eventual respuesta afirmativa a la pregunta anterior debería encontrarse mediante una renormación estrictamente convexa de l_1. Por desgracia no parece que, aún contando con la convexidad estricta, las técnicas empleadas en el presente capítulo puedan ser útiles para abordar este último problema, por razones que pasamos a comentar.

Aplicando el principio de selección de Bessaga-Pelczynski (véase, por ejemplo [17, Chapter V]) se puede probar sin dificultad que si existe un operador lineal continuo, no compacto, de un espacio de Banach X en l_1, entonces X contiene un subespacio complementado isomorfo a l_1. Ahora bien, para cualquier sucesión admisible w, el espacio de Lorentz $d(w)$ es separable, luego $d_*(w)$ no puede contener copias de l_1. Por tanto, todo operador lineal continuo de $d_*(w)$ en l_1 es compacto.

Nótese que el razonamiento anterior explica por qué hay que excluir en la Proposición 2.12 la posibilidad de que la sucesión $\{y_n\}$ sea equivalente a la base canónica de l_1. Quizá merezca la pena comentar también que cualquier espacio isomorfo a l_1 tiene la propiedad de Schur, toda sucesión convergente en la topología débil converge en norma [37, Corollary 27.14] y ello impide claramente que en un tal espacio puedan existir sucesiones normalizadas que admitan una p-estimación superior con $p > 1$. En suma, las técnicas empleadas en el presente capítulo excluyen de manera esencial a los espacios isomorfos a l_1. Sin embargo pensamos que tales técnicas pueden exprimirse un poco más en otras direcciones que trataremos de sugerir.

No sabemos si la mala avenencia de la propiedad B con la convexidad estricta, es de hecho, una total incompatibilidad:

2.19 Problema. *¿Existe algún espacio de Banach, de dimensión mayor que uno, estrictamente convexo y con la propiedad B?*

Descartando el caso finito dimensional, que nos retrotrae al Problema 1.31, y olvidando también el caso de l_1 ya comentado, parece razonable conjeturar que un espacio de Banach de dimensión infinita, estrictamente convexo y que no sea l_1-saturado, no pueda tener la propiedad B. Recuérdese que un espacio de Banach es l_1-saturado cuando todo subespacio infinito-dimensional cerrado contiene un subespacio isomorfo a l_1.

Creemos que merece la pena discutir hasta qué punto los resultados del presente capítulo avalan esta conjetura y otear el camino que queda por recorrer hasta establecer su eventual veracidad.

Durante mucho tiempo se pensó que todo espacio de Banach de dimensión infinita debería contener un subespacio isomorfo a c_0 o a l_p con $1 \leq p < \infty$, conjetura atribuida en ocasiones al propio S. Banach [6]. De haber sido así las cosas, nuestro problema estaría resuelto, ya que un espacio de Banach infinito-dimensional no l_1-saturado contendría un subespacio isomorfo a c_0 o a l_p con $1 < p < \infty$ y, caso de ser estrictamente convexo, no tendría la propiedad B (Corolario 2.14).

Por desgracia, o por suerte según se mire, la mencionada conjetura clásica resultó ser falsa, B. Tsirelson [54] construyó un espacio reflexivo tal que ni él ni su dual contienen subespacios isomorfos a l_p para $1 < p < \infty$. Hoy día suele denotarse por $\mathcal{T}^*$ al espacio construido por Tsirelson y por tanto $\mathcal{T}$ es su dual. En [12] puede encontrarse la definición de $\mathcal{T}$ junto con sus principales propiedades y toda una serie de modificaciones de la construcción original que se han ideado posteriormente para conseguir espacios con propiedades y patologías muy variadas.

Los espacios $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}^*$ no contienen siquiera sucesiones básicas subsimétricas [12, Theorem 1.8, Remark I.1], por lo que no se les puede aplicar la Proposición 2.12. Sin embargo, el espacio $\mathcal{T}^*$ contiene sucesiones con p-estimaciones superiores para cualquier $p > 1$ [12, Proposition V.10], con lo que podemos aplicarle la Proposición 2.15 para encontrar un operador lineal continuo no compacto de $d_*(\{1/n\})$ en $\mathcal{T}^*$ y deducir usando el Corolario 2.11 que $\mathcal{T}^*$, con cualquier norma equivalente estrictamente convexa, no tiene la propiedad B. No sabemos si se puede conseguir el mismo resultado para $\mathcal{T}$.

Teniendo en cuenta que el espacio $\mathcal{T}$ tiene base incondicional, cabe pensar en la posibilidad de debilitar las hipótesis de la Proposición 2.12, sustituyendo simetría por incondicionalidad. Intuitivamente, la simetría de la base canónica de cualquiera de los espacios $d_*(w)$ hace que sea difícil construir en ellos operadores no compactos con valores en espacios que no disfruten de tanta simetría. Una alternativa más viable podría consistir en sustituir los espacios $d_*(w)$ por otra gama de espacios "menos simétricos".

Conviene resaltar que, recientemente, Gowers y Maurey [31] han resuelto toda una serie de problemas muy antiguos, fabricando un espacio de Banach que bate todas las marcas en cuanto a patologías se refiere. Es hereditariamente indescomponible, es decir, ningún subespacio cerrado suyo puede expresarse como suma topológico-directa de dos subespacios de dimensión infinita, en particular no puede contener sucesiones básicas incondicionales, no es isomorfo a su hiperplano ...

Naturalmente, es difícil por el momento saber si en un espacio tan complicado y patológico puede abordarse el estudio de problemas referentes a la densidad de operadores que alcanzan la norma, pero podemos avanzar un dato esperanzador: V. Ferenczi [22], modificando la construcción de Gowers-Maurey, ha producido un espacio hereditariamente indescomponible y uniformemente convexo que, por el Corolario 2.16 no tiene la propiedad B.

1.0 2.8 2.5 3.2 2.2 3.6 2.0 4.0 1.1 1.8 1.25 1.4 1.6

MICROCOPY RESOLUTION TEST CHART
NATIONAL BUREAU OF STANDARDS
STANDARD REFERENCE MATERIAL 1010a
(ANSI and ISO TEST CHART No. 2)

1:24

MILIMET
PULGAD

superiores para cualquier $p > 1$ [12, Proposition V.10], con lo que podemos aplicarle la Proposición 2.15 para encontrar un operador lineal continuo no compacto de $d_*(\{1/n\})$ en $\mathcal{T}^*$ y deducir, usando el Corolario 2.11 que $\mathcal{T}^*$, con cualquier norma equivalente estrictamente convexa, no tiene la propiedad B. No sabemos si se puede conseguir el mismo resultado para $\mathcal{T}$.

Teniendo en cuenta que el espacio $\mathcal{T}$ tiene base incondicional, cabe pensar en la posibilidad de debilitar las hipótesis de la Proposición 2.12, sustituyendo simetría por incondicionalidad. Intuitivamente, la simetría de la base canónica de cualquiera de los espacios $d_*(w)$ hace que sea difícil construir en ellos operadores no compactos con valores en espacios que no disfruten de tanta simetría. Una alternativa más viable podría consistir en sustituir los espacios $d_*(w)$ por otra gama de espacios "menos simétricos".

Conviene resaltar que, recientemente, Gowers y Maurey [31] han resuelto toda una serie de problemas muy antiguos, fabricando un espacio de Banach que bate todas las marcas en cuanto a patologías se refiere. Es hereditariamente indescomponible, es decir, ningún subespacio cerrado suyo puede expresarse como suma topológico-directa de dos subespacios de dimensión infinita, en particular no puede contener sucesiones básicas incondicionales, no es isomorfo a su hiperplano ...

Naturalmente, es difícil por el momento saber si en un espacio tan complicado y patológico puede abordarse el estudio de problemas referentes a la densidad de operadores que alcanzan la norma, pero podemos avanzar un dato esperanzador: V. Ferenczi [22], modificando la construcción de Gowers-Maurey, ha producido un espacio hereditariamente indescomponible y uniformemente convexo que, por el Corolario 2.16 no tiene la propiedad B.

A la vista de todas las consideraciones anteriores, se comprenderá que el camino que queda por recorrer hasta conseguir una respuesta al Problema 2.19, incluso en el caso infinito-dimensional y no l_1-saturado, es largo y difícil.

Capítulo 3

Formas multilineales y polinomios que alcanzan la norma

A. Antecedentes

En un reciente trabajo cuya versión preliminar tuvieron la amabilidad de enviarnos, R. Aron, C. Finet y E. Werner [5] proponen una nueva dirección para conseguir posibles extensiones del Teorema de Bishop-Phelps. Recordemos que este teorema garantiza la densidad, en el dual de un espacio de Banach, del conjunto de los funcionales que alcanzan su norma. Los citados autores plantean la siguiente pregunta: sustituyamos los funcionales lineales continuos por formas multilineales continuas: ¿qué se puede decir acerca de la densidad del conjunto de las formas multilineales que alcanzan su norma? Más concretamente, ¿existe un teorema análogo al de Bishop-Phelps para formas multilineales?

Para un espacio de Banach X, si $\varphi : X^k \longrightarrow \mathbb{K}$ es una forma k-lineal continua, su norma viene definida por:

$$\|\varphi\| = \sup\left\{|\varphi(x)| : x \in (B_X)^k\right\}$$

y notaremos por $\mathcal{L}^k(X)$ al espacio de Banach de todas las formas k-lineales continuas en X.

Al igual que para los funcionales, diremos que φ *alcanza su norma* si existe

$x \in (B_X)^k$ tal que

$$|\varphi(x)| = \|\varphi\|.$$

Llamando $\mathcal{AL}^k(X)$ al subconjunto formado por los elementos de $\mathcal{L}^k(X)$ que alcanzan su norma, la cuestión propuesta por los autores ya citados consiste en estudiar en qué condiciones se verifica la siguiente igualdad:

$$\overline{\mathcal{AL}^k(X)} = \mathcal{L}^k(X).$$

Naturalmente, son aún muy pocos los conocimientos que se tienen sobre este problema. En una primera aproximación, es obligado plantearse qué ocurre con los espacios reflexivos. Pues bien, en este caso, el Teorema de Zizler (Teorema 1.2), junto al hecho elemental de que todos los funcionales en X alcanzan la norma, permite deducir inmediatamente que $\mathcal{AL}^2(X)$ es denso en $\mathcal{L}^2(X)$. Esta primera similitud entre el comportamiento de las formas bilineales y los funcionales lineales establece también una primera diferencia. Es muy fácil encontrar ejemplos de formas bilineales en espacios reflexivos que no alcanzan la norma, situación imposible para los funcionales.

Dejando aparte el caso reflexivo, sólo los dos resultados presentados en [5] han sido aportados hasta ahora. Los dos exigen en X una hipótesis adicional diferente pero que, en ambos casos, también es condición suficiente para que X verifique la propiedad A de Lindenstrauss.

El primero de ellos, conseguido mediante la utilización de un "principio de optimización no lineal" debido a C. Stegall [53], es como sigue:

Si X es un espacio de Banach que verifica la propiedad de Radon-Nikodym, entonces $\mathcal{AL}^k(X)$ es denso en $\mathcal{L}^k(X)$ para todo $k \geq 1$.

El segundo resultado impone a X una condición nada isomórfica: la propiedad α (véase Definición 1.3).

Si X es un espacio de Banach que tiene la propiedad α, entonces $\mathcal{AL}^k(X)$ es denso en $\mathcal{L}^k(X)$ para todo $k \geq 1$.

Los teoremas de Schachermayer, Godun y Troyanski [49] [28] [29], comentados en el Capítulo 1, proporcionan una amplia gama de espacios que admiten una norma equivalente con la propiedad α.

No obstante estos interesantes resultados, la cuestión de si $\mathcal{AL}^k(X)$ es denso en $\mathcal{L}^k(X)$, sin ninguna hipótesis sobre el espacio X, quedaba abierta en este primer trabajo. Damos aquí algunos ejemplos que muestran que la respuesta es, en general, negativa.

Los mismos espacios que presentamos como contraejemplo en el caso bilineal nos servirán para responder, también negativamente, a una pregunta suscitada en el congreso "Functional Analysis and Applications" celebrado en Gargnano (Italia) en 1993. Allí, P. Georgiev planteaba la posibilidad de establecer un teorema de Bishop-Phelps "cuadrático", es decir, un teorema que afirmara la densidad de las formas cuadráticas que alcanzan su norma.

Con un poco de esfuerzo adicional, probamos también que no existe un teorema de Bishop-Phelps para polinomios.

B. Formas multilineales

Empezamos nuestra discusión del problema de la densidad de las formas k-lineales continuas que alcanzan su norma, comprobando que, como cabría esperar, dicha densidad se hace más difícil cuando k aumenta.

3.1 Proposición. *Sea X un espacio de Banach. Para cada número natural k, si $\mathcal{AL}^{k+1}(X)$ es denso en $\mathcal{L}^{k+1}(X)$, entonces $\mathcal{AL}^k(X)$ es denso en $\mathcal{L}^k(X)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{L}^k(X)$ que supondremos de norma uno. Asociamos a φ, de manera natural, una forma $(k+1)$-lineal y continua:

Fijemos $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| = 1$ y consideremos $\overline{\varphi} \in \mathcal{L}^{k+1}(X)$ dada por

$$\overline{\varphi}(y, x) = \varphi(y)x^*(x) \qquad (y \in X^k,\ x \in X).$$

Es claro que $\|\overline{\varphi}\| = 1$.

Por hipótesis, $\overline{\varphi} \in \overline{\mathcal{AL}^{k+1}(X)}$, es decir, existe una sucesión $\{\overline{\varphi}_n\}$ en $\mathcal{AL}^{k+1}(X)$ tal que

$$\{\|\overline{\varphi}_n - \overline{\varphi}\|\} \to 0. \tag{1}$$

Notemos por (y_n, x_n), con $y_n \in (B_X)^k$ y $x_n \in B_X$, un punto donde $\overline{\varphi}_n$ alcance su norma:

$$\|\overline{\varphi}_n\| = |\overline{\varphi}_n(y_n, x_n)| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Probaremos primero que

$$\{|x^*(x_n)|\} \to 1. \tag{2}$$

En efecto,

$$1 \geq |x^*(x_n)| = \|\varphi\||x^*(x_n)| \geq |\varphi(y_n)||x^*(x_n)| = |\overline{\varphi}(y_n, x_n)| \geq$$

$$\geq |\overline{\varphi}_n(y_n, x_n)| - |\overline{\varphi}_n(y_n, x_n) - \overline{\varphi}(y_n, x_n)| \geq \|\overline{\varphi}_n\| - \|\overline{\varphi}_n - \overline{\varphi}\|,$$

siendo claro que la sucesión $\{\|\overline{\varphi}_n\|\} \to 1$ mientras que, $\{\|\overline{\varphi}_n - \overline{\varphi}\|\} \to 0$.

Pasamos ya a definir una sucesión en $\mathcal{AL}^k(X)$ que convergerá a φ.

Para cada natural n, sea $\lambda_n \in \mathbb{K}$ con $|\lambda_n| = 1$ tal que $\lambda_n x^*(x_n) = |x^*(x_n)|$ y definamos $\varphi_n \in \mathcal{L}^k(X)$ por

$$\varphi_n(y) = \overline{\varphi}_n(y, \lambda_n x_n) \qquad \forall y \in X^k.$$

Se tiene claramente

$$\|\varphi_n\| = \sup\{|\varphi_n(y)| : y \in (B_X)^k\} = \sup\{|\overline{\varphi}_n(y, \lambda_n x_n)| : y \in (B_X)^k\} \leq$$

$$\leq \sup\{|\overline{\varphi}_n(y, x)| : y \in (B_X)^k, x \in B_X\} = \|\overline{\varphi}_n\| = |\overline{\varphi}_n(y_n, x_n)| =$$

$$= |\overline{\varphi}_n(y_n, \lambda_n x_n)| = |\varphi_n(y_n)|,$$

es decir, $\|\varphi_n\| = |\varphi_n(y_n)|$ y $\varphi_n \in \mathcal{AL}^k(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Vamos a ver que $\{\varphi_n\} \to \varphi$.

En efecto, si $y \in (B_X)^k$, se tendrá

$$|\varphi_n(y) - \varphi(y)| = |\overline{\varphi}_n(y, \lambda_n x_n) - \varphi(y)| \leq$$

$$\leq |\overline{\varphi}_n(y, \lambda_n x_n) - \overline{\varphi}(y, \lambda_n x_n)| + |\overline{\varphi}(y, \lambda_n x_n) - \varphi(y)| \leq$$

$$\leq \|\overline{\varphi}_n - \overline{\varphi}\| + |\varphi(y) x^*(\lambda_n x_n) - \varphi(y)| \leq$$

$$\leq \|\overline{\varphi}_n - \overline{\varphi}\| + \|\varphi\||\lambda_n x^*(x_n) - 1| =$$

$$= \|\overline{\varphi}_n - \overline{\varphi}\| + (1 - |x^*(x_n)|),$$

obteniéndose

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \|\overline{\varphi}_n - \overline{\varphi}\| + (1 - |x^*(x_n)|),$$

y, por (1) y (2),

$$\|\varphi_n - \varphi\| \to 0. \qquad \square$$

En lo que sigue mostraremos, para cada natural $k \geq 2$, una familia de espacios de Banach X tales que $\mathcal{AL}^k(X)$ no es denso en $\mathcal{L}^k(X)$. Naturalmente, la gama de espacios será tanto más amplia cuanto mayor sea k.

Si en el capítulo anterior los espacios $d_*(w)$ ya probaron su eficacia para encontrar nuevos espacios de Banach sin la propiedad B, aquí, si bien con alguna restricción sobre la sucesión admisible w, se erigen en protagonistas absolutos. La que ya hemos calificado de "drástica" manera de carecer de puntos extremos en su bola unidad es, de nuevo, la propiedad de estos espacios que nos será más útil. Veamos, para una sucesión admisible cualquiera w, cómo afecta esta propiedad a las formas multilineales que alcanzan su norma. Seguiremos denotando por $\{e_n\}$ la base canónica de $d_*(w)$.

3.2 Lema. *Para cada natural k, si φ es una forma k-lineal continua en $d_*(w)$ que alcanza su norma en un punto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in (B_{d_*(w)})^k$, existen $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que si $j_1, j_2, \ldots j_k \geq N$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son escalares verificando* $\max\{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq k\} \leq \delta$, *se tiene*

$$\|x_i + \lambda_i e_{j_i}\| \leq 1 \quad para \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

y

$$\varphi(x_1 + \lambda_1 e_{j_1}, x_2 + \lambda_2 e_{j_2}, \ldots, x_k + \lambda_k e_{j_k}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Consecuentemente, para $j_1, j_2, \ldots j_k \geq N$, se tiene:

$$\varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k}) = 0.$$

Demostración. La primera parte se probará por inducción sobre k.

Para $k = 1$ es inmediato, pues si $\varphi \in (d_*(w))^*$ alcanza su norma en $x \in B_{d_*(w)}$, usando el Lema 2.9 encontramos $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que, para $|\lambda| \leq \delta$ y $j \geq N$, se tiene

$$\|x + \lambda e_j\| \leq 1,$$

de donde

$$|\varphi(x + \lambda e_j)| \leq \|\varphi\| = |\varphi(x)|.$$

La convexidad estricta del cuerpo escalar nos da $\varphi(e_j) = 0$ y $\varphi(x + \lambda e_j) = \varphi(x)$.

Supuesto demostrado el lema para un natural k, sea $\overline{\varphi} \in \mathcal{AL}^{k+1}(d_*(w))$ y $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) \in (B_{d_*(w)})^{k+1}$ tal que $|\overline{\varphi}(x)| = \|\overline{\varphi}\|$.

Definiendo $\varphi : (d_*(w))^k \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$\varphi(y) = \overline{\varphi}(y, x_{k+1}) \qquad (y \in (d_*(w))^k),$$

es claro que $\varphi \in \mathcal{L}^k(d_*(w))$ y $\|\varphi\| = |\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)|$. Aplicando la hipótesis de inducción, encontramos $\delta_0 > 0$ y $N_0 \in \mathbb{N}$ tales que, si $j_1, j_2, \ldots j_k \geq N_0$ y $\max\{|\lambda_i| : 1 \leq i \leq k\} \leq \delta_0$, se tiene

$$\|x_i + \lambda_i e_{j_i}\| \leq 1 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

y

$$\varphi(x_1 + \lambda_1 e_{j_1}, x_2 + \lambda_2 e_{j_2}, \dots, x_k + \lambda_k e_{j_k}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_k),$$

es decir,

$$\overline{\varphi}(x_1 + \lambda_1 e_{j_1}, x_2 + \lambda_2 e_{j_2}, \dots, x_k + \lambda_k e_{j_k}, x_{k+1}) = \overline{\varphi}(x). \qquad (1)$$

Por otra parte, aplicando de nuevo el Lema 2.9 a $x_{k+1} \in B_{d_*(w)}$ obtenemos $\delta_1 > 0$ y $N_1 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|x_{k+1} + \lambda e_{j_{k+1}}\| \le 1 \quad \text{para} \quad |\lambda| \le \delta_1, \ j_{k+1} \ge N_1.$$

Probaremos que se verifica la afirmación del enunciado con $N = \max\{N_0, N_1\}$ y $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$

Sean pues $j_1, j_2, \dots j_{k+1} \ge N$, $\max\{|\lambda_i| : 1 \le i \le k+1\} \le \delta$; sabemos que

$$\|x_i + \lambda_i e_{j_i}\| \le 1 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, k+1$$

y queda comprobar que, notando $y = (x_1 + \lambda_1 e_{j_1}, x_2 + \lambda_2 e_{j_2}, \dots, x_k + \lambda_k e_{j_k})$, se tiene

$$\overline{\varphi}(y, x_{k+1} + \lambda_{k+1} e_{j_{k+1}}) = \overline{\varphi}(x).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} &|\overline{\varphi}(y, x_{k+1}) + \lambda_{k+1}\overline{\varphi}(y, e_{j_{k+1}})| = \\ &= |\overline{\varphi}(y, x_{k+1} + \lambda_{k+1} e_{j_{k+1}})| \le \|\overline{\varphi}\| = \\ &= |\overline{\varphi}(x)| = |\overline{\varphi}(y, x_{k+1})| \end{aligned}$$

donde hemos usado (1). De nuevo la convexidad estricta del cuerpo obliga a

$$\overline{\varphi}(y, e_{j_{k+1}}) = 0,$$

obteniéndose

$$\overline{\varphi}(y, x_{k+1} + \lambda_{k+1} e_{j_{k+1}}) = \overline{\varphi}(y, x_{k+1}) = \overline{\varphi}(x),$$

como se quería.

Para la segunda parte, tomando $|\lambda| \leq \delta$ y $j_1, j_2, \ldots j_k \geq N$ tenemos, según lo ya demostrado,

$$\varphi(x_1 + \lambda e_{j_1}, x_2 + \lambda e_{j_2}, \ldots, x_k + \lambda e_{j_k}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

El primer miembro es un polinomio en λ de grado k, constante para $|\lambda| \leq \delta$ y cuyo coeficiente principal es $\varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k})$. No queda más salida que

$$\varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_k}) = 0. \qquad \square$$

El siguiente lema, una aplicación del Lema 2.3, nos permitirá, más adelante, definir una forma k-lineal continua que, como veremos, no podrá ser aproximada por formas que alcancen su norma.

3.3 Lema. *Sea w una sucesión admisible. Si $x_1, x_2, \ldots, x_k \in B_{d_*(w)}$, entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_1(j)||x_2(j)| \cdots |x_k(j)| \leq \sum_{j=1}^{n} w(j)^k$$

para cada natural n.

Demostración. Se hará por inducción sobre k, siendo obvio para $k = 1$ por la propia definición de la norma de $d_*(w)$.

Supuesto demostrado el lema para un natural k, fijemos $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ en la bola unidad de $d_*(w)$. Sea $n \in \mathbb{N}$ y π una permutación de los naturales que verifique

$$\pi(\{1,2,\ldots,n\}) = \{1,2,\ldots,n\}$$

y

$$|x_{k+1}(\pi(1))| \geq |x_{k+1}(\pi(2))| \geq \ldots \geq |x_{k+1}(\pi(n))|.$$

Es claro que

$$\sum_{j=1}^{n} |x_1(j)||x_2(j)| \cdots |x_{k+1}(j)| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |x_1(\pi(j))||x_2(\pi(j))| \cdots |x_{k+1}(\pi(j))| = \sum_{j=1}^{n} a_j c_j$$

donde hemos notado

$$a_j = \prod_{i=1}^{k} |x_i(\pi(j))|, \quad c_j = |x_{k+1}(\pi(j))|, \quad (j = 1,2,\ldots,n),$$

y debemos probar que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j c_j \leq \sum_{j=1}^{n} w(j)^{k+1}.$$

Las sucesiones $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots \tilde{x}_k$ dadas por

$$\tilde{x}_i(j) = x_i(\pi(j)) \quad (j \in \mathbb{N},\ i = 1,2,\ldots k),$$

se mantienen en $B_{d_*(w)}$, con lo que la hipótesis de inducción nos permite afirmar que

$$\sum_{j=1}^{m} a_j \leq \sum_{j=1}^{m} w(j)^k$$

para cada número natural m y, en particular, para $m = 1,2,\ldots n$, lo que nos pone en condiciones de aplicar el Lema 2.3 para obtener

$$\sum_{j=1}^{n} a_j c_j \leq \sum_{j=1}^{n} w(j)^k c_j. \tag{1}$$

Usando ahora que la sucesión w es decreciente y que

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \leq \sum_{j=1}^{m} w(j) \quad \text{para} \quad m = 1, 2, \ldots n,$$

ya que $x_{k+1} \in B_{d_*(w)}$, podemos volver a aplicar el Lema 2.3 obteniendo

$$\sum_{j=1}^{n} c_j w(j)^k \leq \sum_{j=1}^{n} w(j)^{k+1}. \tag{2}$$

Enlazando (1) y (2) tenemos la desigualdad buscada. □

Podemos ya, para ciertas sucesiones admisibles w, construir formas multilineales continuas en $d_*(w)$ que están lejos de verificar la tesis del Lema 3.2.

3.4 Lema. *Sea w una sucesión admisible, k un número natural y supongamos que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} w(j)^k < +\infty.$$

Entonces existe $\psi \in \mathcal{L}^k(d_*(w))$ tal que

$$\psi(e_j, e_j, \ldots, e_j) = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Si $x_1, x_2, \ldots, x_k \in B_{d_*(w)}$, tenemos, por el lema anterior,

$$\sum_{j=1}^{n} |x_1(j)||x_2(j)| \cdots |x_k(j)| \leq \sum_{j=1}^{n} w(j)^k \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

con lo que basta definir

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_1(j) x_2(j) \cdots x_k(j) \quad (x_1, x_2, \ldots, x_k \in d_*(w)).$$ □

3.5 Teorema. *Sea w una sucesión admisible y k un número natural tales que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} w(j)^k < +\infty.$$

Entonces $\mathcal{AL}^k(d_*(w))$ no es denso en $\mathcal{L}^k(d_*(w))$.

Demostración. Basta enlazar los Lemas 3.2 y 3.4 para ver que, si $\varphi \in \mathcal{AL}^k(d_*(w))$ y ψ es la forma k-lineal continua definida en el último de ellos, se tiene

$$\|\psi - \varphi\| \geq 1. \qquad \square$$

Notemos que la hipótesis del teorema anterior se verifica para $k = 2$ sin más que tomar, por ejemplo, $w(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, el análogo al teorema de Bishop-Phelps dista mucho de ser cierto para formas multilineales:

3.6 Corolario. *Existe un espacio de Banach X tal que $\mathcal{AL}^k(X)$ no es denso en $\mathcal{L}^k(X)$ para cualquier número natural $k \geq 2$.*

En lo que sigue abordamos de forma ligeramente diferente el problema de la densidad de las formas bilineales que alcanzan su norma. Recordemos que, si X es un espacio de Banach, el espacio $\mathcal{L}^2(X)$ de las formas bilineales continuas en X puede identificarse con el espacio $L(X, X^*)$ de los operadores lineales continuos de X en su dual. Basta para ello asociar a cada $\varphi \in \mathcal{L}^2(X)$ el operador $T : X \longrightarrow X^*$ dado por

$$T(x)(y) = \varphi(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Es evidente además que si φ alcanza la norma, el operador asociado T también la alcanza. Es decir, bajo esta identificación, el conjunto $\mathcal{AL}^2(X)$ está incluido en el conjunto $NA(X, X^*)$ de los operadores lineales y continuos de X en su dual X^* que alcanzan su norma y, claramente, si $NA(X, X^*)$ no es denso, tampoco podrá serlo $\mathcal{AL}^2(X)$.

Curiosamente, en la literatura sobre operadores que alcanzan su norma, no aparece explícitamente ningún ejemplo de espacio de Banach X tal que $NA(X, X^*)$ no sea denso en $L(X, X^*)$. Usando los resultados del Capítulo 2, podremos construir con facilidad ejemplos de este tipo. Se obtendrán como l_1-sumas de dos espacios y, como consecuencia, sus duales podrán ser identificados con l_∞-sumas. Los lemas siguientes contienen algunas observaciones elementales sobre operadores que tienen como espacio de partida o de llegada una suma de las mencionadas.

3.7 Lema. *Sean X, Y_1 y Y_2 espacios de Banach, $Y = Y_1 \oplus_\infty Y_2$ y Q la proyección natural de Y sobre Y_1. Para $S \in L(X, Y)$, se tiene:*

i) $\|S\| = \max\{\|QS\|, \|(Id - Q)S\|\}$.

ii) *Si $S \in NA(X, Y)$ y $\|(Id - Q)S\| < \|QS\|$, entonces $QS \in NA(X, Y_1)$.*

iii) *Si $R \in \overline{NA(X, Y)}$ y $\|(Id - Q)R\| < \|QR\|$, entonces $QR \in \overline{NA(X, Y_1)}$.*

Demostración. *i)* y *ii)* son inmediatas.

iii) Si $R \in \overline{NA(X, Y)}$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $S \in NA(X, Y)$ tal que

$$\|(Id - Q)S - (Id - Q)R\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|QS - QR\| < \varepsilon.$$

Basta tomar $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(\|QR\| - \|(Id-Q)R\|)$ para conseguir

$$\|(Id-Q)S\| < \|QS\|$$

y, aplicando *ii*), $QS \in NA(X, Y_1)$. □

3.8 Lema. *Sean X_1, X_2, Y espacios de Banach y $X = X_1 \oplus_1 X_2$. Para $S \in L(X,Y)$, notemos S_1 y S_2 a las restricciones de S a X_1 y X_2 respectivamente. Entonces:*

i) $\|S\| = \max\{\|S_1\|, \|S_2\|\}$.

ii) *Si $S \in NA(X,Y)$ y $\|S_2\| < \|S_1\|$, entonces $S_1 \in NA(X_1, Y)$.*

iii) *Si $R \in \overline{NA(X,Y)}$ y $\|R_2\| < \|R_1\|$, entonces $R_1 \in \overline{NA(X_1,Y)}$.*

Demostración. *i*) Si $x = x_1 + x_2 \in X$, con $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$, se tendrá

$$\|Sx\| \leq \|S_1 x_1\| + \|S_2 x_2\| \leq$$

$$\leq \|S_1\|\|x_1\| + \|S_2\|\|x_2\| \leq$$

$$\leq \max\{\|S_1\|, \|S_2\|\}(\|x_1\| + \|x_2\|) =$$

$$= \max\{\|S_1\|, \|S_2\|\}\|x\|$$

y obtenemos

$$\|S\| \leq \max\{\|S_1\|, \|S_2\|\}.$$

La desigualdad contraria es evidente.

ii) Sabemos que $\|S\| = \|S_1\| > \|S_2\|$.

Sean $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$ tales que $x = x_1 + x_2 \in B_X$ y S alcance su norma en x. Si fuese $x_2 \neq 0$, se tendría:

$$\|S(x)\| \leq \|S_1\|\|x_1\| + \|S_2\|\|x_2\| < \|S_1\|(\|x_1\| + \|x_2\|) \leq \|S\|$$

luego $x = x_1 \in X_1$ y es claro que S_1 alcanza su norma en x_1.

iii) La demostración es exactamente igual que la del apartado *iii*) del lema anterior. □

3.9 Teorema. *Sea w una sucesión admisible. Supongamos que Y es un espacio de Banach tal que Y^* es estrictamente convexo y existe un operador no compacto de $d_*(w)$ en Y^*. Consideremos el espacio de Banach $X = d_*(w) \oplus_1 Y$. Entonces $NA(X, X^*)$ no es denso en $L(X, X^*)$.*

Demostración. Sea $A \in L(d_*(w), Y^*)$ un operador no compacto. Asumiendo la identificación natural de X^* con $d(w) \oplus_\infty Y^*$, definamos un operador $T \in L(X, X^*)$ por

$$T(z, y) = (0, A(z)) \quad \forall z \in d_*(w),\ y \in Y.$$

Probaremos, por reducción al absurdo, que T no puede aproximarse por operadores que alcanzan su norma.

Supongamos, por el contrario, que

$$T \in \overline{NA(X, X^*)}.$$

Si llamamos Q a la proyección natural de X^* sobre Y^*, es claro que

$$\|(Id - Q)T\| = 0 < \|QT\|$$

y, aplicando el apartado *iii)* del Lema 3.7, obtenemos que

$$QT \in \overline{NA(X, Y^*)}.$$

Pero este último resultado nos permite enlazar con el Lema 3.8 ya que QT se anula en Y, mientras que su restricción a $d_*(w)$ coincide con A, con lo cual obtenemos

$$A \in \overline{NA(d_*(w), Y^*)}$$

lo que provoca una contradicción, pues A sería compacto (Teorema 2.10).

$\square$

Para obtener casos particulares interesantes del teorema anterior, basta usar los resultados del Capítulo 2 que nos aseguran la existencia de operadores no compactos de $d_*(w)$ en un espacio de Banach, sólo que ahora dicho espacio, además de estrictamente convexo, ha de ser dual. Así, aplicando la Proposición 2.12 y el teorema anterior obtenemos:

3.10 Corolario. *Sea Y un espacio de Banach tal que Y^* sea estrictamente convexo y contenga una sucesión básica simétrica, no equivalente a la base canónica de l_1. Entonces existe una sucesión admisible w tal que, el espacio de Banach $X = d_*(w) \oplus_1 Y$ verifica que $NA(X, X^*)$ no es denso en $L(X, X^*)$.*

Recuérdese que la misma Proposición 2.12 nos dice que en el caso $Y = l_p$ con $(1 < p < \infty)$, (con lo que $Y^* = l_q$ con $1 < q < \infty$) podemos tomar $w(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Así pues $d_*(\{1/n\}) \oplus_1 l_p$, con $(1 < p < \infty)$, es un buen ejemplo de espacio de Banach X tal que $NA(X, X^*)$ no es denso en $L(X, X^*)$. De hecho este resultado admite una generalización alternativa a la dada por el corolario anterior.

3.11 Corolario. *Sea Y un espacio de Banach uniformemente suave de dimensión infinita y $X = d_*(\{1/n\}) \oplus_1 Y$. Entonces $NA(X, X^*)$ no es denso en $L(X, X^*)$.*

Demostración. Recordando la total dualidad entre suavidad uniforme y convexidad uniforme (véase, por ejemplo, [7, Proposition 3.II.2.2]) tenemos que Y^* es uniformemente convexo, en particular estrictamente convexo y, razonando como en la demostración del Corolario 2.16, existe un operador no compacto de $d_*(\{1/n\})$ en Y^* con lo que basta aplicar el Teorema 3.9. □

Por último, destacamos el siguiente caso particular del Teorema 3.9:

3.12 Corolario. *Sea w una sucesión admisible tal que $w \in l_2$. Existe un espacio de Banach X isomorfo a $d_*(w)$ tal que $NA(X, X^*)$ no es denso en $L(X, X^*)$.*

Demostración. Por la Proposición 2.12, tenemos que la identidad formal $I : d_*(w) \longrightarrow l_2$ es un operador lineal continuo e igual le ocurrirá a su traspuesto I^*, que salvo identificaciones conocidas, no es otra cosa que la identidad formal de l_2 en $d(w)$. Visto así, podemos considerar la composición I^*I, un operador lineal continuo de $d_*(w)$ en $d(w)$ que lleva la base canónica de $d_*(w)$ a la base canónica de $d(w)$ y que, por tanto, no es compacto. En suma, si $w \in l_2$ existe un operador lineal continuo no compacto de $d_*(w)$ en $d(w)$.

Como cualquier espacio separable, $d_*(w)$ admite una norma equivalente cuya norma dual es estrictamente convexa, es decir, existe un espacio de Banach Y, isomorfo a $d_*(w)$, tal que Y^* es estrictamente convexo [16, Theorem II.2.6]. Aplicando el Teorema 3.9, el espacio $X = d_*(w) \oplus_1 Y$ verifica que $NA(X, X^*)$ no es denso en $L(X, X^*)$.

Resta observar que el propio X es isomorfo a $d_*(w)$, equivalentemente, que $d_*(w)$ es isomorfo a $(d_*(w))^2$, pero esto es una clara consecuencia del hecho de que $d_*(w)$ tiene base simétrica. □

C. Formas cuadráticas y polinomios

Visto ya que no es posible un teorema análogo al de Bishop-Phelps para formas multilineales, mostramos en esta sección que tampoco puede haberlo para formas cuadráticas. Precisemos primero el concepto de forma cuadrática tal y como lo vamos a considerar aquí.

Si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), por *forma sexquilineal hermítica en X* entendemos una aplicación $\varphi : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal en la primera variable y verificando que

$$\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)} \qquad \forall x, y \in X,$$

en particular $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in X$. En el caso real, la conjugación es la identidad y una forma sexquilineal hermítica no es otra cosa que una forma bilineal simétrica.

Diremos que una aplicación $Q : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *forma cuadrática* si existe una (de hecho única) forma sexquilineal hermítica φ en X, tal que

$$Q(x) = \varphi(x,x) \qquad \forall x \in X.$$

Si X es un espacio de Banach, notaremos por $\mathcal{Q}(X)$ al espacio de Banach real de las formas cuadráticas continuas en X con la norma dada por

$$\|Q\| = \sup\{|Q(x)| : x \in B_X\} \quad (Q \in \mathcal{Q}(X))$$

y, naturalmente, diremos que $Q \in \mathcal{Q}(X)$ *alcanza la norma* si existe $x \in B_X$ tal que

$$|Q(x)| = \|Q\|.$$

Al conjunto de todas las formas cuadráticas en X que alcanzan la norma lo denotaremos $\mathcal{AQ}(X)$.

Nos disponemos a presentar ejemplos de espacios X en los que $\mathcal{AQ}(X)$ no es denso en $\mathcal{Q}(X)$. Estos espacios serán, como es de esperar, del mismo tipo que los utilizados como contraejemplo en el caso de las formas bilineales, es decir, $X = d_*(w)$ para ciertas sucesiones admisibles w. Como consecuencia, el paralelismo de lo que sigue con lo que entonces se expuso resultará más que notable. Empezamos viendo, al igual que allí, cómo se comportan las formas cuadráticas en $d_*(w)$ que alcanzan su norma. Surge aquí una diferencia, ya que una forma cuadrática que alcance su norma no está obligada a anularse en casi todos los vectores básicos como les ocurría a las formas bilineales.

3.13 Lema. *Sea w una sucesión admisible. Si Q es una forma cuadrática continua en $d_*(w)$ que alcanza su norma en un punto $x_0 \in B_{d_*(w)}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$,*

$$Q(x_0)Q(e_n) \leq 0.$$

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{AQ}(d_*(w))$ y φ su forma sexquilineal hermítica asociada.

Normalizando y sustituyendo Q por $-Q$ si fuera preciso, podemos suponer, sin perder generalidad, que

$$\|Q\| = Q(x_0) = 1.$$

Utilizando el Lema 2.9, tomamos $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que, si $|\lambda| \leq \delta$ y $n \geq N$,

$$\|x_0 + \lambda e_n\| \leq 1$$

y, en particular, $\|x_0 \pm \delta e_n\| \leq 1$.

Como Q alcanza la norma en x_0, se tendrá, siempre para $n \geq N$,

$$|Q(x_0 \pm \delta e_n)| \leq 1,$$

es decir,

$$|1 \pm 2\delta \mathrm{Re}\, \varphi(x_0, e_n) + \delta^2 Q(e_n)| \leq 1.$$

De aquí deducimos

$$\pm 2\delta \mathrm{Re}\, \varphi(x_0, e_n) + \delta^2 Q(e_n) \leq 0;$$

sumando las dos desigualdades y recordando que $\delta > 0$, obtenemos

$$Q(e_n) \leq 0 \qquad (n \geq N). \qquad \square$$

Veamos ya que no existe una versión cuadrática del Teorema de Bishop-Phelps.

3.14 Teorema. *Sea w una sucesión admisible tal que $w \in l_2$. Entonces $\mathcal{AQ}(d_*(w))$ no es denso en $\mathcal{Q}(d_*(w))$.*

Demostración. Si $x \in B_{d_*(w)}$, el Lema 3.3 nos dice que

$$\sum_{j=1}^{n} |x(j)|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} w(j)^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

luego, si definimos la aplicación Q_0 por

$$Q_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} |x(j)|^2 \qquad (x \in X),$$

tendremos que $Q_0 \in \mathcal{Q}(X)$.

Dada $Q \in \mathcal{Q}(d_*(w))$ tal que

$$\|Q - Q_0\| < \min\left\{1, \frac{1}{2}\|Q_0\|\right\},$$

veremos que $Q \notin \mathcal{AQ}(d_*(w))$. En efecto, para cada natural n, usando que $Q_0(e_n) = 1$, obtenemos

$$|Q(e_n) - 1| \leq \|Q - Q_0\| < 1,$$

luego $Q(e_n) > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Aplicando el lema anterior, si Q alcanzase su norma en un punto $x_0 \in B_{d_*(w)}$ se tendría $Q(x_0) \leq 0$, es decir, $Q(x_0) = -\|Q\|$, pero entonces,

$$\begin{aligned} 2\|Q_0 - Q\| &\geq Q_0(x_0) - Q(x_0) + \|Q_0 - Q\| = \\ &= Q_0(x_0) + \|Q\| + \|Q_0 - Q\| \geq \\ &\geq Q_0(x_0) + \|Q_0\| \geq \\ &\geq \|Q_0\|, \end{aligned}$$

una contradicción. □

Para terminar, analizamos también el problema de la densidad de los polinomios homogéneos que alcanzan su norma. Recordemos que si X es un espacio de Banach, se dice que una aplicación $P : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es un *polinomio homogéneo continuo de grado k* si existe una forma k-lineal continua y simétrica en X tal que

$$P(x) = \varphi(x, \overset{(k)}{\ldots}, x) \qquad \forall x \in X.$$

Notaremos $\mathcal{P}^k(X)$ al espacio de Banach de los polinomios homogéneos continuos de grado k en X dotado con la norma

$$\|P\| = \sup\{|P(x)| : x \in B_X\}.$$

Dado $P \in \mathcal{P}^k(X)$, si existe $x_0 \in B_X$ tal que

$$\|P\| = |P(x_0)|,$$

diremos que P *alcanza la norma* y escribiremos $P \in \mathcal{AP}^k(X)$.

Es claro que, si X es un espacio de Banach real, $\mathcal{Q}(X) = \mathcal{P}^2(X)$. Nuestro primer resultado para polinomios homogéneos es, por tanto, un caso particular del teorema anterior:

3.15 Corolario. *Existe un espacio de Banach real X tal que $\mathcal{AP}^2(X)$ no es denso en $\mathcal{P}^2(X)$.*

En el caso complejo obtendremos el mismo resultado para polinomios de grado arbitrario. La geometría de los espacios $d_*(w)$ tiene, cómo no, interesantes consecuencias sobre los polinomios que alcanzan su norma:

3.16 Lema. *Sea w una sucesión admisible y llamemos X al espacio de Banach complejo $d_*(w)$. Si $k \geq 2$ y $P \in \mathcal{AP}^k(X)$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $P(e_n) = 0$ para $n \geq N$.*

Demostración. Sea $x_0 \in B_X$ tal que $|P(x_0)| = \|P\|$.

Utilizando el Lema 2.9 por última vez en esta memoria, tomemos $\delta > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que, para $|\lambda| \leq \delta$ y $n \geq N$, se tenga

$$\|x_0 + \lambda e_n\| \leq 1$$

y, como consecuencia, $|P(x_0 + \lambda e_n)| \leq |P(x_0)|$.

Fijado $n \geq N$ arbitrario, la última desigualdad nos dice que el módulo del polinomio $P(x_0+\lambda e_n)$ alcanza un máximo relativo en el origen. Por el principio del módulo máximo, dicho polinomio debe ser constante, pero su coeficiente principal es $P(e_n)$, luego $P(e_n) = 0$. $\square$

3.17 Teorema. *Existe un espacio de Banach complejo X tal que $\mathcal{AP}^k(X)$ no es denso en $\mathcal{P}^k(X)$ para todo $k \geq 2$.*

Demostración. Sea w una sucesión admisible tal que $w \in l_2$ y llamemos X al espacio de Banach complejo $d_*(w)$. El Lema 3.4 nos proporciona $\psi \in \mathcal{L}^k(X)$ tal que

$$\psi(e_n, \overset{(k)}{\ldots}, e_n) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

y, de hecho, ψ es simétrica.

Definiendo $P_0 \in \mathcal{P}^k(X)$ por

$$P_0(x) = \psi(x, \overset{(k)}{\ldots}, x) \qquad \forall x \in X,$$

tendremos que $P_0(e_n) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Por el lema anterior, cualquier $P \in \mathcal{AP}^k(X)$ verificará que $P(e_n) = 0$ para n suficientemente grande, luego $\|P - P_0\| \geq 1$. □

D. Problemas abiertos

El presente capítulo contiene alguna nueva información sobre operadores que alcanzan la norma, que merece la pena comentar: la existencia de espacios de Banach X tales que $NA(X, X^*)$ no es denso en $L(X, X^*)$. Entre los ejemplos suministrados de espacios con dicha propiedad destacan los dados por el Corolario 3.12, renormaciones equivalentes de $d_*(w)$ para sucesiones admisibles $w \in l_2$. El paso clave de la demostración es la existencia de un operador no compacto de $d_*(w)$ en $d(w)$, que hace que ninguna renormación estrictamente convexa de $d(w)$ (siempre para $w \in l_2$) tenga la propiedad B. Si se piensa que los espacios de Lorentz $d(w)$ tienen algún parecido con l_1, se observará cierto paralelismo de este resultado con los problemas referentes a l_1 planteados en el capítulo anterior. Siguiendo con ese paralelismo, no sabemos si los espacios de Lorentz $d(w)$, con su norma natural, tienen la propiedad B. De hecho ni siquiera sabemos si $NA(d_*(w), d(w))$ es denso en $L(d_*(w), d(w))$ es decir, si realmente es necesaria una renormación en el Corolario 3.12. De verificarse tal densidad, $d_*(w)$ con $w \in l_2$ nos daría la respuesta afirmativa a una pregunta, que nos ha sido formulada por R. Aron, referente a la posible equivalencia entre las dos maneras de abordar el problema de la densidad de las formas bilineales que alcanzan su norma expuestas en la sección B:

3.18 Problema. *¿Existe algún espacio de Banach X tal que $NA(X, X^*)$ es denso en $L(X, X^*)$ pero $\mathcal{AL}^2(X)$ no es denso en $\mathcal{L}^2(X)$?*

Pasemos ahora a la consideración de formas k-lineales continuas con $k \geq 2$.

La Proposición 3.1 establece que la densidad de las formas k-lineales continuas que alcanzan su norma se dificulta al aumentar k. Cabe preguntarse si se dificulta estrictamente, es decir, si la clase de espacios de Banach X tales que $\mathcal{AL}^k(X)$ es denso en $\mathcal{L}^k(X)$ decrece estrictamente conforme k aumenta:

3.19 Problema. *¿Existe, para cada número natural k un espacio de Banach X tal que $\mathcal{AL}^k(X)$ es denso en $\mathcal{L}^k(X)$ pero $\mathcal{AL}^{k+1}(X)$ no es denso en $\mathcal{L}^{k+1}(X)$?*

Nótese que el primer objetivo del presente capítulo fue conseguir respuesta afirmativa a la pregunta anterior para el caso $k = 1$ (Corolario 3.6). El problema queda abierto incluso para $k = 2$.

Se nos puede argumentar, con toda la razón, que para conseguir el Corolario 3.6, es suficiente tratar el caso $k = 2$, luego bastaría haber probado los Lemas 3.2 y 3.4 para $k = 2$, con un considerable ahorro de notación. A cambio se nos reconocerá que, con poco esfuerzo adicional, hemos conseguido mayor estética y generalidad en los resultados y no descartamos que el Teorema 3.5 pueda ser útil para resolver el problema recién planteado. Pero es que, además, el Lema 3.4 se usa, en su forma general, para resolver el problema de la densidad de los polinomios que alcanzan su norma (Teorema 3.17) y, para este fin, no está claro que sea suficiente considerar el caso $k = 2$. Más concretamente, no sabemos si la Proposición 3.1 tiene un análogo para polinomios.

3.20 Problema. *Sea X un espacio de Banach, k un número natural, $k \geq 2$. Supongamos que $\mathcal{AP}^{k+1}(X)$ es denso en $\mathcal{P}^{k+1}(X)$. ¿Puede afirmarse que, entonces $\mathcal{AP}^{k}(X)$ es denso en $\mathcal{P}^{k}(X)$?*

Este problema guarda estrecha relación con otro, también referente a polinomios, que obviamente ha quedado abierto, ya que el Corolario 3.15 sólo se refiere a polinomios de grado 2 mientras que el Teorema 3.17 sólo cubre el caso complejo: ¿dado un natural $k > 2$, existe un espacio de Banach *real* X tal que $\mathcal{AP}^{k}(X)$ no es denso en $\mathcal{P}^{k}(X)$? La demostración del Teorema 3.17 no puede llevarse a término en caso real, simplemente porque utiliza el principio del módulo máximo, pero la explicación última de la diferencia entre los casos real y complejo podría ser más profunda.

Indice de notaciones

$\mathbb{N}$	*conjunto de los números naturales*
$\mathbb{R}$	*cuerpo de los números reales*
$\mathbb{C}$	*cuerpo de los números complejos*
$\mathbb{K}$	*cuerpo escalar, indistintamente* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$
$\mathbb{T}$	*conjunto de los escalares de módulo uno*
$\|J\|$	*número de elementos de un conjunto finito* J
X, Y, Z	*espacios de Banach*
X^*	*dual topológico de* X
B_X	*bola unidad cerrada de* X
S_X	*esfera unidad de* X
$\mathrm{Ext}(B)$	*conjunto de los puntos extremos de un conjunto* B
E_Y	*espacio topológico asociado canónicamente a un espacio de Banach* Y*, p. 32*
$\mathrm{co}(A)$	*envolvente convexa de un conjunto* A
$\overline{\mathrm{co}}(A)$	*envolvente convexo-cerrada de* A

$\overline{A}$	*cierre de un conjunto A en la topología de la norma*
$\overline{A}^{w^*}$	*cierre de A en la topología débil-**
$L(X,Y)$	*espacio de Banach de los operadores lineales continuos de X en Y*
$NA(X,Y)$	*subconjunto de $L(X,Y)$ formado por los operadores que alcanzan su norma, p. 4*
$K(X,Y)$	*subconjunto de $L(X,Y)$ formado por los operadores compactos*
T^*	*operador adjunto o traspuesto del operador T*
K	*espacio topológico compacto de Hausdorff*
$C(K)$	*espacio de Banach de las funciones continuas en K*
L	*espacio topológico localmente compacto de Hausdorff*
$C_b(L)$	*espacio de Banach de las funciones continuas y acotadas en L*
$C_0(L)$	*espacio de las funciones continuas en L que se anulan en el infinito*
$C_0(L,X)$	*funciones continuas de L en X que se anulan en el infinito*
l_∞	*espacio de las sucesiones acotadas de escalares*
l_∞^Λ	*espacio de Banach de las funciones acotadas con valores escalares definidas en un conjunto Λ*
l_p	*espacio de las sucesiones p-sumables de escalares $(1 \leq p < \infty)$*
c_0	*espacio de las sucesiones de escalares convergentes a cero*
$X \oplus_\infty Y$	*$X \times Y$ con la norma del máximo*

$X \oplus_1 Y$	$X \times Y$ con la norma de la suma
$(\oplus_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda)_{c_0}$	c_0-suma de una familia de espacios de Banach
$(\oplus_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda)_{l_1}$	l_1-suma de una familia de espacios de Banach
$X \otimes Y$	producto tensorial algebraico de los espacios vectoriales X e Y
$X \otimes_\varepsilon Y$	producto tensorial inyectivo de los espacios de Banach X e Y
w	una sucesión admisible, p. 58
$d(w,p)$	espacio de Lorentz de sucesiones, p. 58
$d(w)$	espacio de Lorentz $d(w,1)$, p. 58
$d_*(w)$	predual "canónico" de $d(w)$, p. 59
$\mathcal{T}^*$	espacio de Tsirelson original [54]
$\mathcal{T}$	espacio dual del anterior
$\mathcal{L}^k(X)$	espacio de Banach de las formas k-lineales continuas en X, p. 87
$\mathcal{AL}^k(X)$	formas k-lineales continuas en X que alcanzan su norma, p. 88
$\mathcal{Q}(X)$	espacio de Banach real de las formas cuadráticas en X, p. 105
$\mathcal{AQ}(X)$	formas cuadráticas en X que alcanzan su norma, p. 105
$\mathcal{P}^k(X)$	espacio de Banach de los polinomios homogéneos continuos de grado k en X, p. 108
$\mathcal{AP}^k(X)$	subconjunto de $\mathcal{P}^k(X)$ formado por los polinomios que alcanzan su norma, p. 108

Bibliografía

1. M.D. Acosta, F.J. Aguirre and R. Payá, *A space by W. Gowers and new results on norm and numerical radius attaining operators*, Acta Univ. Carolinae, Math. et Phys. **33** (1992), 5-14.

2. M.D. Acosta, F.J. Aguirre and R. Payá, *A new sufficient condition for the denseness of norm attaining operators*, aparecerá en Rocky Mountain J. Math.

3. M.D. Acosta, F.J. Aguirre and R. Payá, *There is no bilinear Bishop-Phelps Theorem,* aparecerá en Israel J. Math.

4. E.M. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

5. R. Aron, C. Finet and E. Werner, *Some remarks on norm-attaining n-linear forms.* En: Function Spaces (K. Jarosz, Ed.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 172, Marcel Dekker, New York, 1995.

6. S. Banach, *Theory of Linear Operations*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

7. B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1982.

8. E. Behrends, *M-Structure and the Banach-Stone Theorem*, Lecture Notes in Math. 736, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

9. E. Bishop and R.R. Phelps, *A proof that every Banach space is subreflexive,* Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 97-98.

10. E. Bishop and R.R. Phelps, *The support functionals of a convex set.* En: *Convexity* (V.L. Klee, Ed.), Proc. Symp. Pure Math. VII, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1963, pp. 27-35.

11. J. Bourgain, *On dentability and the Bishop-Phelps property*, Israel J. Math. **28** (1977), 265-271.

12. P.G. Casazza and T.J. Shura, *Tsirelson's Space*, Lecture Notes in Math. 1363, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

13. W.J. Davis, *Positive bases in Banach spaces*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **16** (1971), 487-492.

14. A. Defant and K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland, Amsterdam, 1993.

15. R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *A smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions*, J. Funct. Anal. **111** (1993), 197-212.

16. R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math. 64, Longman, New York, 1993.

17. J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Graduate Texts in Math. 92, Springer-Verlag, New York, 1984.

18. J. Diestel and J.J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977.

19. I. Ekeland, *Sur les problèmes variationnels*, C. R. Acad. Sci. Paris **275** (1972), 1057-1059.

20. I. Ekeland, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **1** (1979), 443-474.

21. P. Enflo, *Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm*, Israel J. Math. **13** (1972), 281-288.

22. V. Ferenczi, *A uniformly convex hereditarily indecomposable Banach space*, Preprint, 1994.

23. T. Figiel and W.B. Johnson, *A uniformly convex Banach space which contains no l_p*, Compositio Math. **29** (1974), 179-190.

24. C. Finet, *Renorming Banach spaces with many projections and smoothness properties*, Math. Ann. **284** (1989), 675-679.

25. C. Finet and W. Schachermayer, *Equivalent norms on separable Asplund spaces*, Studia Math. **92** (1989), 275-283.

26. M.R. Galán, *Operadores que alcanzan su norma*, Memoria de Licenciatura, Universidad de Granada, 1994.

27. D.J.H. Garling, *On symmetric sequence spaces*, Proc. London Math. Soc. **16** (1966), 85-106.

28. B.V. Godun and S.L. Troyanski, *Operators which attain their norm and geometry of the unit ball of Banach spaces*, Soviet Math. Doklady **42** (1991), 532-534.

29. B.V. Godun and S.L. Troyanski, *Renorming Banach spaces with fundamental biorthogonal system.* En: Banach spaces (Bor-Luh Lin, W.B. Johnson, Eds.), Contemporary Math. 144, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1993, pp 119-126.

30. W.T. Gowers, *Symmetric block bases of sequences with large average growth*, Israel J. Math. **69** (1990), 129-151.

31. W.T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 851-874.

32. P. Harmand, D. Werner and W. Werner, *M-Ideals in Banach Spaces and Banach Algebras*, Lecture Notes in Math. 1547, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

33. R.B. Holmes, *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Graduate Texts in Math. 24, Springer-Verlag, New York, 1975.

34. R. Huff, *On non-density of norm attaining operators,* Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **25** (1980), 239-241.

35. A. Hulanicki and R.R. Phelps, *Some applications of tensor products of partially-ordered linear spaces*, J. Funct. Anal. **2** (1968), 177-201.

36. V.I. Istratescu, *Strict Convexity and Complex Strict Convexity*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 89, Marcel Dekker, New York, 1984.

37. G.J.O. Jameson, *Topology and Normed Spaces*, Chapman and Hall, London, 1974.

38. J. Johnson and J. Wolfe, *Norm attaining operators*, Studia Math. **65** (1979), 7-19.

39. J. Johnson and J. Wolfe, *Norm attaining operators and simultaneously continuous retractions*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 609-612.

40. A. Lima, *Intersection properties of balls in spaces of compact operators*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **28** (1978), 35-65.

41. J. Lindenstrauss, *On operators which attain their norm*, Israel J. Math. **1** (1963), 139-148.

42. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

43. S. Negrepontis, *Banach Spaces and Topology*. En: Handbook of Set-Theoretic Topology (K. Kunen and J. Vaughan, Eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1045-1142.

44. J.R. Partington, *Norm attaining operators*, Israel J. Math. **43** (1982), 273-276.

45. R.R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes in Math. 1364, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

46. R.R. Phelps, *Support cones in Banach spaces and their applications*, Adv. Math. **13** (1974), 1-19.

47. W. Ruess, *Duality and geometry of spaces of compact operators*. En: Functional Analysis: Surveys and Recent Results III (K. Bierstedt and B. Fuchssteiner, Eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 59-78.

48. W.L.C. Sargent, *Some sequence spaces related to the l^p spaces*, J. London Math. Soc. **35** (1960), 161-171.

49. W. Schachermayer, *Norm attaining operators and renormings of Banach spaces*, Israel J. Math. **44** (1983), 201-212.

50. W. Schachermayer, *Norm attaining operators on some classical Banach spaces*, Pacific J. Math. **105** (1983), 427-438

51. S. Shelah, *Uncountable constructions for B.A. e.c. groups and Banach spaces*, Israel J. Math. **51** (1985), 273-297.

52. I. Singer, *Les points extrémaux de la boule unité du dual d'un produit tensoriel normé inductif d'espaces de Banach*, Bull. Sci. Math. **82** (1958), 73-80.

53. C. Stegall, *Optimization and differentiation in Banach spaces*, Linear Algebra and Appl. **84** (1986), 191-211.

54. B.S. Tsirelson, *Not every Banach space contains an imbedding of l_p or c_0*, Funct. Anal. Appl. **8** (1974), 138-141.

55. J.J. Uhl, Jr., *Norm attaining operators on $L^1[0,1]$ and the Radon-Nikodym property*, Pacific J. Math. **63** (1976), 293-300.

56. D. Werner, *New classes of Banach spaces which are M-ideals in their biduals*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **111** (1992), 337-354.

57. V. Zizler, *On some extremal problems in Banach spaces*, Math. Scand. **32** (1973), 214-224.