



Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

TESIS DOCTORAL

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO
DIDÁCTICO EN UN PLAN DE FORMACIÓN
INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
DE SECUNDARIA

Pedro Gómez

Granada, 2007



Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO EN UN PLAN DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección del Doctor Luis Rico Romero del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta el Licenciado Pedro Gómez Guzmán para optar al grado de Doctor en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Pedro Gómez Guzmán

VºBº del Director

Fdo.: Luis Rico Romero

El trabajo que se presenta en esta memoria pretende cumplir con el requisito de la elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctor dentro del programa de doctorado “Didáctica de la Matemática” impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Adicionalmente, se opta a la mención de “Doctor Europeus”, por lo cual se incluye la versión en inglés del resumen ejecutivo del documento. Este resumen contiene las conclusiones del estudio.

Este estudio se realizó en el seno del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* de la Universidad de Granada del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM0193). El estudio recibió el apoyo de dos proyectos del plan nacional de I+D+I, financiados por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y cofinanciados con fondos FEDER, con referencias BSO2002-02799 y SEJ2005-07364/EDUC, respectivamente. El autor realizó una estancia de tres meses, desde el 1 de junio de 2004 al 1 de octubre de 2004, en el Department of Education and Learning de la Universidad de Aalborg, Dinamarca, con la profesora doctora Paola Valero, para cumplir uno de los requisitos para la obtención de la mención “Doctor Europeus”.

ÍNDICE

1. Una Aproximación a Cuatro Cuestiones Generales sobre el Profesor de Matemáticas	1
1. Cuatro Cuestiones Generales sobre el Profesor de Matemáticas	2
2. Roles, Períodos y Contribuciones	4
3. Encuentro de Dos Vertientes en la Formación de Profesores de Matemáticas de Secundaria	5
4. Evaluación de un Modelo de Formación	7
5. Análisis de la Estrategia de Delimitación	8
6. Otra Perspectiva en la Exploración de la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria	9
7. Cuatro Preguntas Generales, una Aproximación Concreta	12
8. Dos Relatos Entrelazados	14
8.1. Fundamentación, Diseño y Desarrollo de la Asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato	14
8.2. Aprendizaje de los Grupos de Futuros Profesores que Participaron en la Asignatura	15
8.3. Resultados, Implicaciones y Conclusiones	15
2. Análisis Didáctico. Una Conceptualización de la Enseñanza de las matemáticas	17
1. La Planificación de Clase. Un Problema diario del Profesor de Matemáticas	18
1.1. Análisis Didáctico como Nivel del Currículo	20
1.2. Noción de Currículo y Trabajo del Profesor	21
1.3. Consideración Funcional de las Matemáticas Escolares	21
2. Planificación, Especificidad del Contenido y Pluralidad de Significados de las Matemáticas Escolares	22
3. Significado y Educación Matemática	23
3.1. Noción de Significado	24
3.2. Noción de Significado en Frege	24
3.3. Tres Dimensiones del Significado de un Concepto en las Matemáticas Escolares	26
3.4. Significado de un Concepto Matemático y Planificación de Clase	27

4. Análisis Didáctico: un Procedimiento para Organizar la Enseñanza de las Matemáticas	30
5. Creencias, Metas y Contextos	33
6. Inicio del Ciclo	35
7. Análisis de Contenido	36
7.1. Usos del Término “Contenido” en las Matemáticas Escolares	37
7.2. Propósitos del Análisis de Contenido	40
7.3. Sistemas de Representación	41
7.4. Estructura Conceptual	44
7.5. Fenomenología	50
8. Análisis Cognitivo	56
8.1. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje	57
8.2. Expectativas del Profesor: Noción de Competencia	62
8.3. Expectativas del Profesor: Noción de Capacidad	64
8.4. Objetivos de Aprendizaje y Núcleos de Contenido de una Unidad Didáctica	66
8.5. Caracterización de un Objetivo de Aprendizaje: Capacidades y Competencias	67
8.6. Caracterización de un Objetivo: Caminos de Aprendizaje	70
8.7. Caminos de Aprendizaje y Dificultades	72
8.8. Selección de Tareas	73
8.9. Dos Significados Cognitivos de las Matemáticas Escolares	74
9. Análisis de Instrucción	75
9.1. Planificación de la Instrucción	75
9.2. La Paradoja de la Planificación	77
9.3. Tarea y Actividad	78
9.4. Características de una Tarea	79
9.5. Procedimiento de Análisis de Tareas	80
9.6. Análisis y Selección de Tareas	81
9.7. Procedimiento para el Análisis de Instrucción	83
9.8. Planificación de la Gestión de Clase	84
9.9. Diseño de Tareas, Resolución de Problemas y Modelización	86
9.10. Recursos para el Diseño y Análisis de Tareas	89
9.11. Una Aproximación Parcial al Análisis de Instrucción	90
10. Análisis de Actuación	92
11. Contribuciones del Análisis Didáctico a la Reflexión sobre la Planificación en Matemáticas	94
11.1. Dos Problemas de la Planificación de la Instrucción	94
11.2. Una Estructura Conceptual para los Organizadores del Currículo	95
11.3. Carácter Parcial e Ideal del Análisis Didáctico	96
11.4. Contribuciones	98
11.5. Análisis Didáctico como Herramienta de Investigación	99

3. Conocimiento Didáctico y Competencias del Profesor de Matemáticas	101
1. Conocimiento Pedagógico de Contenido: una Noción Potente	102
1.1. Investigación sobre el Conocimiento del Profesor de Matemáticas	102
1.2. Taxonomías del Conocimiento del Profesor	103
1.3. Conocimiento Pedagógico de Contenido: Historia de una Noción	105
1.4. Críticas a la Noción de Conocimiento Pedagógico de Contenido	107
1.5. Desarrollos de la Noción de Conocimiento Pedagógico de Contenido	108
2. Conocimiento Didáctico en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria	114
2.1. Del Conocimiento Pedagógico de Contenido al Conocimiento Didáctico en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria	115
2.2. Visión Funcional del Conocimiento del Profesor de Matemáticas	116
2.3. Conocimiento Didáctico de Referencia y Conocimiento Didáctico del Futuro Profesor	117
2.4. Un Significado Concreto de la Expresión “Conocimiento Didáctico”	119
3. Competencias Profesionales y la Formación del Profesor de Matemáticas	120
3.1. Formación Basada en Competencia	121
3.2. Competencias Profesionales y Titulaciones Universitarias. El informe <i>Tuning</i>	123
3.3. Competencias del Profesor	125
3.4. Competencias del Profesor de Matemáticas	125
3.5. Competencias del Profesor de Matemáticas y Dimensiones del Currículo	127
4. Análisis Didáctico y Capacidades del Profesor de Matemáticas	128
4.1. Capacidades del Profesor de Matemáticas que Surgen del Análisis Didáctico	129
4.2. Ejemplo de Dos Capacidades	130
5. Conocimiento Pedagógico de Contenido, Conocimiento Didáctico y Competencia de Planificación del Profesor de Matemáticas	131
4. Aprendizaje de los Futuros Profesores	135
1. Contexto: Diseño y Desarrollo de la Asignatura	136
2. Aproximación Sociocultural al Aprendizaje de los Futuros Profesores	137
3. Teoría Social del Aprendizaje	139
3.1. Aprendizaje como Participación Social	140
3.2. Compromiso Mutuo	142
3.3. Empresa Conjunta	142
3.4. Repertorio Compartido	142

4. Dos Comunidades de Práctica y Significados Parciales	143
5. Génesis Instrumental: Conceptualización del Trabajo de un Grupo	145
5.1. Génesis Instrumental	146
5.2. Génesis Instrumental en el Contexto de la Asignatura	148
6. Desarrollo del Conocimiento Didáctico	149
6.1. Noción de Desarrollo	149
6.2. Dos Aproximaciones al Desarrollo del Conocimiento Didáctico	150
6.3. Desarrollo del Repertorio Compartido	151
7. Factores de Desarrollo	152
8. Aprendizaje, Desarrollo del Conocimiento Didáctico y Análisis de las Producciones	157
9. Competencias y Desarrollo del Conocimiento Didáctico	159
5. Diseño de Planes de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria	161
1. Problemática del Diseño de Planes de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas	162
1.1. Contexto y Diseño de Planes de Formación de Profesores	162
1.2. Conceptualizaciones de la Formación de Profesores	164
1.3. Investigación en Diseño de Planes de Formación de Profesores	165
2. Diversidad en Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria	170
2.1. Contextos, Problemas y Planes de Formación de Profesores de Matemáticas	170
2.2. Modelos de Formación de Profesores de Matemáticas	173
3. Historia de la Asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato	177
3.1. La Asignatura en 1992	178
3.2. La Asignatura en 1999	182
4. Diseño Curricular de la Asignatura en el Curso 2000—2001	183
4.1. Visión Funcional de la Formación Inicial de Profesores	184
4.2. Descripción del Diseño de la Asignatura	188
5. Fundamentación del Diseño	194
6. La Asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato durante el Curso 2000-2001	197
1. Descripción General del Desarrollo de la Asignatura	198
1.1. Organización General	198
1.2. Tratamiento del Contenido	199
1.3. Esquemas de Trabajo	200
1.4. Actividades en clase	201
1.5. Evaluación en la Práctica	204

2. Desarrollo del Análisis Didáctico en la Asignatura	204
2.1. Estructura Conceptual	205
2.2. Estructura Conceptual y Sistemas de Representación	208
2.3. Sistemas de Representación y Análisis Fenomenológico	211
2.4. Análisis Fenomenológico	216
2.5. Modelización, Teorías de Aprendizaje, Errores y Dificultades	218
2.6. Resolución de Problemas y Actividad	219
2.7. Evaluación	221
2.8. Ejemplo de Unidad Didáctica	222
2.9. Presentación de Trabajos Finales	223
3. Organización de la Información Obtenida Durante el Desarrollo de la Asignatura	226
7. Caracterización del Aprendizaje de los Futuros Profesores de Matemáticas	229
1. De una Pregunta General a unos Objetivos de Investigación	230
2. Metodología: Selección de unas Opciones	231
2.1. Un Trabajo Personal y Colectivo	232
2.2. Opciones en los Aspectos Conceptuales	233
2.3. Opciones en la Aproximación Metodológica	234
2.4. Un Estudio de Caso	235
2.5. Función de la Investigación	235
3. Fuentes de Información: una Aproximación Naturalista	236
4. Cuatro Estudios	237
8. Cuatro Estados de Desarrollo del Conocimiento Didáctico	239
1. De las 72 Transparencias a los Cuatro Estados de Desarrollo	240
1.1. 72 Transparencias de Ocho Grupos	241
1.2. Atributos que Caracterizan una Transparencia	242
1.3. Variables y Observaciones	245
1.4. Estados de Desarrollo	247
1.5. Descripción General del Procedimiento	251
2. Cuatro Estados de Desarrollo del Conocimiento Didáctico	254
3. Estados de Desarrollo, Evolución y Progreso de los Grupos	256
3.1. Caracterización de los Estados de Desarrollo	256
3.2. Evolución Paulatina y Desfasada de las Producciones de los Grupos	257
3.3. Ritmo de Progreso y Nivel de Avance de los Grupos	258
3.4. Heterogeneidad en el Desarrollo del Conocimiento Didáctico de los Grupos	259
3.5. Número de Discrepancias y Ritmo de Progreso y Nivel de Avance	260
3.6. Dificultades de los Grupos con los organizadores del currículo del Análisis de Contenido	261

3.7. Observaciones Atípicas	262
4. Una Primera Aproximación al Desarrollo del Conocimiento Didáctico	262
4.1. Desarrollo del Conocimiento Didáctico y Génesis Instrumental	263
4.2. Ritmo de Progreso y Nivel de Avance Variados	263
4.3. Discrepancias y Progreso de los Grupos	264
4.4. Diferencias en la Dificultad de las Nociones	265
5. Cuestiones Abiertas	265
9. Complejidad del Conocimiento Didáctico	267
1. Identificación y Caracterización de los Significados Parciales	268
2. Estructura Conceptual y Génesis Instrumental	270
2.1. Fases en la Organización de la Estructura Conceptual	271
2.2. Conexiones entre Elementos del Mapa Conceptual	284
2.3. Complejidad de la Noción de Estructura Conceptual como Instrumento	288
3. Sistemas de Representación: la Importancia de lo Simbólico	291
3.1. La Importancia del Sistema de Representación Simbólico	292
3.2. Lo Simbólico y lo Gráfico como Representaciones	296
3.3. Jerarquía en los Sistemas de Representación	298
3.4. Variedad en los Sistemas de Representación	299
3.5. Fenomenología, Historia y Sistemas de Representación	302
3.6. Complejidad del Significado de la Noción de Sistema de Representación	303
4. Heterogeneidad Fenomenológica	304
4.1. Codificación y Análisis de los Significados Parciales	305
4.2. Análisis Fenomenológico de los Grupos	306
4.3. Criterios de Organización de los Fenómenos	309
4.4. Tipo y Profundidad del Análisis Fenomenológico	311
4.5. Complejidad de la Noción de Fenomenología	312
5. Puesta en Práctica del Conocimiento Didáctico	313
5.1. Uso de la Información que Surge de los Organizadores del Currículo	314
5.2. El Análisis de Contenido en la Práctica	316
5.3. Complejidad de la Puesta en Práctica del Conocimiento Didáctico	321
6. Complejidad del Conocimiento Didáctico sobre el Análisis de Contenido	321
6.1. Significados Parciales sobre los Organizadores del Currículo del Análisis de Contenido	322
6.2. Complejidad de las Nociones del Análisis de Contenido y Génesis Instrumental	323
6.3. Complejidad de las Matemáticas Escolares	325
6.4. Significado de Referencia y Significados Parciales	326
6.5. Desarrollo del Conocimiento Didáctico y Comunidades de Práctica	327

6.6. Puesta en Práctica del Conocimiento Didáctico	327
10. Una Comunidad de Práctica	331
1. Comunidades de Práctica y Aprendizaje de los Futuros Profesores	333
2. Teoría Social del Aprendizaje de Wenger	334
3. De una Teoría a unos Instrumentos de Codificación, Análisis e Interpretación	336
3.1. De la Teoría a unas Categorías de Análisis	336
3.2. Nueva Definición del Problema	338
3.3. 94 Códigos	339
3.4. Proceso de Codificación	340
3.5. Análisis de la Codificación	344
3.6. Análisis y Producción de los Resultados	348
4. Compromiso Mutuo	349
4.1. Compromiso Mutuo y Aprendizaje como Práctica Social	349
4.2. Entorno	350
4.3. El Líder y su Relación con sus Compañeros	352
4.4. Significado	355
5. Empresa Conjunta	375
5.1. Definición de la Empresa Conjunta	375
5.2. Condiciones Externas	377
5.3. Compromiso y Responsabilidades	380
5.4. Preocupación por la Eficiencia	381
6. Repertorio Compartido	382
6.1. Rutinas de Trabajo	383
6.2. Estructura Conceptual	385
6.3. Sistemas de Representación	386
6.4. Fenomenología	394
7. Emergencia de una Comunidad de Práctica y Desarrollo del Conocimiento Didáctico	401
7.1. Negociación de Significados y Compromiso Mutuo	401
7.2. Comprender y Afinar la Empresa Conjunta	402
7.3. Desarrollo del Repertorio Compartido	403
8. Comunidad de Práctica: una Herramienta para Ver, Pensar y Actuar	404
8.1. Una Herramienta para “ver”	405
8.2. Una Herramienta para “Pensar”	406
8.3. Una Herramienta para “Actuar”	407
11. Un Fenómeno, Cuatro Puntos de Vista	411
1. Cuatro Diseños Relacionados	412
2. Evolución de los significados de los Organizadores del Currículo	413
2.1. Visión Formal de la Estructura Conceptual	413

2.2. Jerarquía en los Sistemas de Representación	416
2.3. Heterogeneidad en la Fenomenología	418
3. Evolución del Conocimiento Didáctico	421
3.1. Patrones de Desarrollo Dentro de la Heterogeneidad	421
3.2. Contribuciones al Significado de los Organizadores del Currículo del Análisis de Contenido: Significados Parciales	423
4. Conjeturas de Explicación del Desarrollo del Conocimiento Didáctico	424
4.1. Experiencia y Visiones de los Futuros Profesores	424
4.2. Dos Comunidades de Práctica	426
4.3. Diseño y Desarrollo de la Asignatura	427
5. Génesis Instrumental en la Práctica de la Asignatura	429
5.1. Negociación de Significados en el Aula	429
5.2. Génesis Instrumental en el Grupo	430
5.3. Teoría, Técnica y Práctica en la Génesis Instrumental de los Organizadores del Currículo	432
6. Complejidad de la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria	434
12. Una Etapa en mi Reflexión sobre el Profesor de Matemáticas de Secundaria	437
1. Contribuciones a la Reflexión sobre el Profesor de Matemáticas de Secundaria	438
1.1. Contribuciones Teóricas	438
1.2. Contribuciones Metodológicas	440
1.3. Contribuciones Empíricas	441
1.4. Contribuciones Curriculares	442
2. De la Investigación a la Práctica	442
3. Limitaciones y Cuestiones Abiertas	443
4. El Final de una Etapa; el Comienzo de Otra	444
13. Resumen Ejecutivo	447
1. Una Aproximación a Cuatro Cuestiones Generales sobre el Profesor de Matemáticas	447
2. Análisis Didáctico	449
2.1. Procedimiento de Análisis Didáctico	450
2.2. Análisis de Contenido	453
2.3. Análisis Cognitivo	457
2.4. Análisis de Instrucción	461
2.5. Análisis de Actuación	463
3. Conocimiento Didáctico	464
3.1. Conocimiento Pedagógico de Contenido: una Noción Potente	465

3.2. Conocimiento Didáctico en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria	466
3.3. Análisis Didáctico y Capacidades y Competencias del Profesor de Matemáticas	467
4. Aprendizaje de los Futuros Profesores	469
4.1. Aprendizaje de los Futuros Profesores	470
4.2. Dos Comunidades de Práctica. Significados Parciales, Teóricos, Técnicos y Prácticos	472
4.3. Desarrollo del Conocimiento Didáctico y Factores de Desarrollo	474
5. Diseño de la Asignatura	478
5.1. La Asignatura	478
5.2. Diseño de la Asignatura	480
6. Desarrollo de la Asignatura	483
6.1. Organización y Desarrollo de la Asignatura	483
6.2. Sesiones del Análisis de Contenido	483
6.3. Las Demás Sesiones del Análisis Didáctico	486
7. Diseño de los Estudios Empíricos	487
7.1. De una Pregunta General a unos Objetivos de Investigación	487
7.2. Metodología: Selección de unas Opciones	488
7.3. Fuentes de Información	488
7.4. Cuatro Estudios	489
8. Cuatro Estados de Desarrollo del Conocimiento Didáctico	490
8.1. De 72 Transparencias a Cuatro Estados de Desarrollo	490
8.2. Cuatro Estados de Desarrollo del Conocimiento Didáctico	493
8.3. Estados de Desarrollo, Evolución y Progreso de los Grupos	494
8.4. Una Primera Aproximación al Desarrollo del Conocimiento Didáctico	495
8.5. Cuestiones Abiertas	496
9. Complejidad del Conocimiento Didáctico	497
9.1. Identificación y Caracterización de los Significados Parciales	497
9.2. Complejidad de la Noción de Estructura Conceptual como Instrumento	498
9.3. Complejidad del Significado de la Noción de Sistema de Representación	499
9.4. Heterogeneidad Fenomenológica	501
9.5. Complejidad de las Nociones del Análisis de Contenido y Génesis Instrumental	502
9.6. Complejidad de las Matemáticas Escolares	504
9.7. Desarrollo del Conocimiento Didáctico y Comunidades de Práctica	504
10. Puesta en Práctica del Conocimiento Didáctico	505
10.1. Uso de la Información que Surge de los Organizadores del Currículo	505
10.2. El Análisis de Contenido en la Práctica	506

11. Una Comunidad de Práctica	507
11.1. De una Teoría a unos Instrumentos de Codificación, Análisis e Interpretación	508
11.2. Compromiso Mutuo	510
11.3. Empresa Conjunta	513
11.4. Repertorio Compartido	515
11.5. Desarrollo del Conocimiento Didáctico: Significados Técnico y Práctico	518
11.6. Comunidad de Práctica: una Herramienta para Ver, Pensar y Actuar	519
12. Un Fenómeno, Cuatro Puntos de Vista	522
12.1. Conocimiento Didáctico de los Organizadores del Currículo del Análisis de Contenido	522
12.2. Complejidad de los Organizadores del Currículo del Análisis de Contenido: Significados Técnico y Práctico	524
12.3. Desarrollo del Conocimiento Didáctico en el Contexto de la Asignatura	526
12.4. Contribuciones al Significado de los Organizadores del Currículo del Análisis de Contenido: Significados Parciales	527
12.5. Génesis Instrumental en el Grupo	528
12.6. Teoría, Técnica y Práctica en la Génesis Instrumental de los Organizadores del Currículo	530
13. Una Etapa en mi Reflexión sobre el Profesor de Matemáticas de Secundaria	532
13.1. Contribuciones a la Reflexión sobre el Profesor de Matemáticas de Secundaria	532
13.2. De la Investigación a la Práctica	536
13.3. Limitaciones y Cuestiones Abiertas	537
13.4. El Final de una Etapa; el Comienzo de Otra	538
14. Executive Summary	539
1. An Approach to Four General Questions About the Mathematics Teacher	539
2. Didactic Analysis	541
2.1. Procedure for Didactic Analysis	542
2.2. Subject Matter Analysis	544
2.3. Cognitive Analysis	548
2.4. Instruction Analysis	552
2.5. Performance Analysis	554
3. Didactic Knowledge	555
3.1. Pedagogical Content Knowledge: a Powerful Notion	556
3.2. Didactic Knowledge in the Initial Training of High School Mathematics Teachers	557

3.3. Didactic Analysis and the Capacities and Competences of the Mathematics Teacher	558
4. Future Teachers' Learning	560
4.1. Future Teachers' Learning	560
4.2. Two Communities of Practice: Partial, Theoretical, Technical and Practical Meanings	562
4.3. Development of Didactic Knowledge and Development Factors	565
5. Design of the Course	569
5.1. The Course	569
5.2. Course Design	570
6. Development Of the Course	574
6.1. Organisation and Development of the Course	574
6.2. Sessions on Subject Matter Analysis	574
6.3. The Rest of the Sessions on Didactic Analysis	577
7. Design Of the Empirical Studies	578
7.1. From a General Question to some Research Goals	578
7.2. Methodology: Making Choices	578
7.3. Information Sources	579
7.4. Four Studies	580
8. Four States of the Development of Didactic Knowledge	580
8.1. From 72 Transparencies to Four States of Development	581
8.2. Four States of Development of Didactic Knowledge	583
8.3. States of Development, Evolution and Progress of the Groups	584
8.4. A First Approach to the Development of Didactic Knowledge	585
8.5. Unresolved Questions	586
9. The Complexity Of Didactic Knowledge	587
9.1. Identification and Characterisation of the Partial Meanings	587
9.2. The Complexity of the Notion of Conceptual Structure as Instrument	588
9.3. The Complexity of the Meaning of the Notion of System of Representation	589
9.4. Phenomenological Heterogeneity	591
9.5. The Complexity of the Notions of Subject matter analysis and Instrumental Genesis	592
9.6. Complexity of School Mathematics	593
9.7. Development of Didactic Knowledge and Communities of Practice	594
10. Putting Didactic Knowledge Into Practice	594
10.1. Use of the Information from the Curriculum Organisers	595
10.2. Subject matter analysis in Practice	595
11. A Community Of Practice	596
11.1. From a Theory to some Instruments for Codification, Analysis and Interpretation	597
11.2. Mutual Commitment	599

11.3. Joint Enterprise	602
11.4. Shared Repertoire	604
11.5. Development of Didactic Knowledge: Technical and Practical Meanings	607
11.6. Community of Practice: a Tool for Seeing, Thinking and Acting	607
12. One Phenomenon, Four Points of View	610
12.1. Didactic Knowledge and the Curriculum Organisers of the Subject Matter Analysis	611
12.2. The Complexity of the Curriculum Organisers of the Subject Matter Analysis: Technical and Practical Meanings	613
12.3. Development of Didactic Knowledge in the Context of the Course	614
12.4. Contributions to the Meaning of the Curriculum Organisers of the Subject Matter Analysis: Partial Meanings	615
12.5. Instrumental Genesis in the Group	616
12.6. Theory, Technique and Practice in the Instrumental Genesis of the Curriculum Organisers	618
13. One Stage in My Reflection On the High School Mathematics Teacher	620
13.1. Contributions to Thinking on the High School Mathematics Teacher	620
13.2. From Research to Practice	623
13.3. Limitations and Unresolved Questions	624
13.4. The End of one Stage; the Beginning of Another	625
Agradecimientos	627
15. Referencias	629

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Triángulo semántico (término)	25
2. Las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar	27
3. Análisis que componen el análisis didáctico	29
4. Ciclo de análisis didáctico	31
5. Operaciones en los sistemas de representación	43
6. Mapa conceptual general para la función de segundo grado (Gómez y Carulla, 2001b, p. 40)	47
7. Mapa conceptual general de la representación simbólica de la función cuadrática	48
8. Conexiones entre elementos de un mapa conceptual	49
9. Análisis fenomenológico y modelos	53
10. Propiedad óptica de la parábola y principio de la física	54
11. Análisis fenomenológico	55
12. Análisis cognitivo en el análisis didáctico	56
13. Ciclo de la enseñanza de las matemáticas abreviado (Simon, 1995a, p. 136)	58
14. Noción de capacidad	65
15. Camino de aprendizaje para la tarea T_1	70
16. Ciclo de planificación local	74
17. Caminos de aprendizaje y selección de tareas	75
18. El análisis de instrucción en el análisis didáctico	76
19. Objetivo de aprendizaje, tarea, capacidades y competencias	79
20. Caminos de aprendizaje para la tarea T_2	83
21. Análisis fenomenológico, resolución de problemas y modelización	87
22. Categorías que contribuyen al conocimiento pedagógico de contenido (Morine-Dershimer y Kent, 2001, p. 22)	110
23. Facetas del conocimiento pedagógico (Morine-Dershimer y Kent, 2001, p. 23)	111
24. Matemáticas para la enseñanza y propuestas de Shulman (Ball et al., 2005, p. 20)	113
25. Estructura de capacidades y competencia de planificación	131
26. Aprendizaje como práctica social	141
27. Aprendizaje, práctica y significado	143
28. Modelo de actividad situada con mediación de instrumento (Vérillon, 2000, p. 7)	147
29. Factores del desarrollo del conocimiento didáctico	157
30. Aprendizaje, producciones y desarrollo del conocimiento didáctico	158
31. Carácter situado de la formación de profesores	169

32. Conceptualización del plan de formación	184
33. Esquema general del bloque sobre análisis didáctico	185
34. Estructura de contenidos de la asignatura	190
35. Ciclo metodológico de tratamiento del análisis didáctico	192
36. Fundamentación del diseño de la asignatura	195
37. Esquemas de trabajo en el desarrollo de la asignatura	202
38. Temas desarrollados agrupados por horas de clase (resumen)	203
39. Propuesta del formador para la estructura conceptual del concepto de derivada	206
40. Primera propuesta de estructura conceptual del grupo función cuadrática	208
41. Estructura conceptual y sistemas de representación del grupo función cuadrática	210
42. Estructura conceptual y sistemas de representación del grupo función cuadrática (segunda versión)	212
43. Análisis fenomenológico del grupo función cuadrática (primera versión)	213
44. Análisis fenomenológico del grupo función cuadrática (segunda versión)	216
45. Errores y dificultades para la función cuadrática	218
46. Dificultad para la función cuadrática	220
47. Propuesta de actividad para la función cuadrática	221
48. Criterios de evaluación para la función cuadrática	222
49. Análisis conceptual de la función cuadrática (presentación final)	224
50. Forma multiplicativa y sistema de representación gráfico (presentación final)	225
51. Fenómenos no matemáticos (presentación final)	226
52. Bases de datos sobre el desarrollo de la asignatura	227
53. Estructura conceptual y sistemas de representación del grupo función cuadrática (segunda versión)	241
54. Ciclo de análisis de discrepancias	252
55. Primer folio de la primera tarea del grupo sistemas de ecuaciones lineales (documento 11)	272
56. Segunda tarea del grupo probabilidad (documento 5)	273
57. Tercera tarea del grupo probabilidad (documento 17)	275
58. Tercera tarea del grupo funciones (documento 12)	276
59. Tercera tarea del grupo sistemas de ecuaciones lineales	280
60. Aspecto parcial de la tercera tarea del grupo cónicas (documento 14)	282
61. Cuarta tarea del grupo esfera (documento 29)	283
62. Tercera tarea del grupo números decimales (documento 19)	285
63. Quinta tarea del grupo probabilidad (documento 38)	286
64. Cuarta tarea del grupo función cuadrática	287
65. Quinta tarea del grupo progresiones (documento 35)	295
66. Número de sistemas de representación por transparencia	300
67. Modelo de actividad situada con mediación de instrumento de Vérillon (2000) adaptado a la asignatura	325
68. Categorías de análisis	337
69. Categorías de análisis y preguntas	338
70. Ejemplo de la codificación de la transcripción	342

71. Proceso de codificación	343
72. Identificación de las cuestiones relevantes	343
73. Ejemplo de cuestiones identificadas en la transcripción de una cinta	344
74. Síntesis: de las transcripciones a las cuestiones	346
75. De unas cuestiones a su caracterización, organización y justificación	348
76. Análisis y producción de resultados	349
77. Conjetura de la génesis instrumental de los organizadores del currículo	434
78. Ciclo de análisis didáctico y sus condicionantes	452
79. Operaciones en los sistemas de representación	454
80. Análisis fenomenológico y modelos	456
81. Análisis fenomenológico	457
82. Camino de aprendizaje para la tarea T_1	460
83. Tarea y competencias	462
84. Factores del desarrollo del conocimiento didáctico	477
85. Aprendizaje, producciones y desarrollo del conocimiento didáctico	477
86. Estructura de contenidos de la asignatura	481
87. Estructura conceptual y sistemas de representación del grupo función cuadrática	485
88. Ciclo metodológico de tratamiento del análisis didáctico	489
89. Modelo de actividad situada con mediación de instrumento de Vérillon (2000) adaptado a la asignatura	504
90. Conjetura de la génesis instrumental de los organizadores del currículo	531
91. Cycle of didactic analysis	543
92. Operations in systems of representation	545
93. Phenomenological analysis	547
94. Phenomenological analysis and models	548
95. Learning path for task T_1	551
96. Task, capacities and competences	553
97. Development factors of didactic knowledge	567
98. Learning, productions and development of didactic knowledge	568
99. Content structure of the course	572
100. Conceptual structure and systems of representation of the quadratic function group	576
101. Cycle of methodological treatment of didactic analysis	579
102. Vérillon's model of situated instrumented activity adapted to the course	593
103. Conjecture concerning the instrumental genesis of the curriculum organisers	619

ÍNDICE DE TABLAS

1. Componentes del currículo según los niveles y dimensiones (Rico, 1997b, p. 409)	20
2. Capacidades para el objetivo “manejar el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática”	68
3. Capacidades correspondientes al objetivo “Caracterizar y reconocer funciones cuadráticas” (Lupiáñez, 2005, p. 8)	69
4. Vínculos posibles entre capacidades para el objetivo “manejar el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática”	71
5. Contribución a competencias de la tarea T ₁	82
6. Niveles de educación basada en la competencia (Bowden, 1997, pp. 7-8)	122
7. Organización de las competencias Tuning propuesta por Bajo et. al (2003) (González, 2004, p. 2)	124
8. Indicadores de la calidad de la información	154
9. Temas desarrollados agrupados por horas de clase	202
10. Valores de variables de codificación “Existencia sistemas de representación”	243
11. Definición de variables de conexión	243
12. Ejemplo de codificación para tipos de conexiones en el mapa conceptual	244
13. Ejemplo de una observación	246
14. Primera definición de estados	248
15. Asignación de una observación a un estado	249
16. Análisis de discrepancias para una observación	250
17. Primera asignación de observaciones a estados	250
18. Segunda definición de estados	251
19. Definición final de estados	255
20. Asignación final de observaciones a estados	255
21. Discrepancias por grupo y observación	255
22. Caracterización de los estados de desarrollo	257
23. Orden de aparición de temas	257
24. Orden esperado de asignación de observaciones a estados	257
25. Observaciones que no se adaptan a patrón esperado	258
26. Discrepancias y ritmo de progreso y nivel de avance	260
27. Discrepancias por observación	261
28. Ordenación de variables por discrepancias	262
29. Variable sistemas de representación como organizador de la estructura conceptual	279
30. Sistemas de representación utilizados por los grupos	301
31. Valores de la variable criterios de organización de fenómenos	305

32. Criterios de organización del análisis fenomenológico	310
33. Principal criterio de organización de los fenómenos	311
34. Papel de las Subestructuras en el análisis fenomenológico	311
35. Número de grupos	317
36. Frecuencia de uso de la información	318
37. Frecuencias por grupos	319
38. Ejemplos de códigos	340
39. Principales cuestiones identificadas en el proceso de síntesis	345
40. Tipos de episodio de propuesta de significado	361
41. Capacidades para el manejo del significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas	459
42. Primera definición de estados	492
43. Definición final de estados	493
44. Asignación final de observaciones a estados	493
45. Discrepancias por grupo y observación	494
46. Capacities involved in using the graphical meaning of the parameters of the symbolic forms	550
47. First definition of the states	582
48. Final definition of states	583
49. Final assignment of observations to states	584
50. Number of discrepancies by group and observation	584

UNA APROXIMACIÓN A CUATRO CUESTIONES GENERALES SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Qué matemáticas aprenden los escolares y cómo las aprenden depende de la instrucción que ellos reciben en la escuela (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001, p. 435; Wood, 2002, p. 202). El profesor de matemáticas es el principal responsable de esta instrucción. Él es quien, con sus conocimientos y sus creencias y dentro de unos contextos culturales, sociales, políticos, curriculares e institucionales, decide qué tipos de experiencias matemáticas viven sus estudiantes en el aula (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001, pp. 314-315). Durante un tiempo, la investigación en educación matemática centró su atención en los procesos cognitivos de los escolares y en los aspectos curriculares de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, el reconocimiento de la importancia del papel del profesor en el aprendizaje de los escolares explica, al menos parcialmente, el intenso desarrollo que, durante los últimos quince años, ha tenido la investigación sobre el profesor de matemáticas (Sfard, Hashimoto, Knijnik, Robert y Skovsmose, 2004). El conocimiento del profesor y los programas en los que él se forma o se desarrolla profesionalmente han sido dos de los focos de atención dentro de la literatura de investigación (Ball, 2004, p. 441). Y, aunque se argumenta que la formación inicial de profesores tiene poco impacto en sus creencias y conocimiento (Johnston, 1992; Zeichner y Tabachnick, 1981)¹, los programas de formación inicial y permanente de profesores de matemáticas se están convirtiendo en un punto central

¹ Otros estudios muestran lo contrario (e.g., Darling-Hammond, 2000, p. 166). Por ejemplo, Ensor (2001, p. 316) muestra que los futuros profesores recontextualizan en la práctica lo que aprenden en su formación inicial.

del interés en la investigación sobre el profesor (15th ICMI Study, 2005, pp. 280-282).

1. CUATRO CUESTIONES GENERALES SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

¿Cuáles son las principales cuestiones que, sobre el profesor de matemáticas, se han abordado desde que Shulman (1986, pp. 9-10) introdujo la noción de conocimiento pedagógico de contenido y puso de manifiesto que no bastaba con el conocimiento profundo de la disciplina (y algún conocimiento de pedagogía) para tener éxito como profesor? A continuación, presento una visión general de las inquietudes que algunos investigadores en formación de profesores de matemáticas han formulado en los últimos diez años. Al final de este apartado, recojo, en cuatro preguntas generales, aquellas cuestiones que son más relevantes para el proyecto que presento en este documento y que me permiten ubicar y justificar sus propósitos en el contexto de la investigación en educación matemática.

Cooney (1994), en su artículo de revisión, pregunta: “¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?” (p. 608)²; “¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir comprender las experiencias que viven los profesores? ¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir desarrollar programas de investigación y desarrollo que empujen nuestros esfuerzos hacia adelante?” (pp. 627-628).

Por su parte, Simon (2000, pp. 335-336) argumenta que se requiere una “base de conocimientos” sobre diferentes aspectos relacionados con el profesor:

Se necesita una base de conocimientos que guíe los programas de formación de profesores nóveles y eficaces. Esta base de conocimientos debe incluir la identificación de los aspectos claves del conocimiento y las habilidades del profesor (los objetivos de la formación de profesores), esquemas que permitan describir cómo se desarrollan ese conocimiento y esas habilidades y modelos útiles del tipo de intervención que pueden promover ese desarrollo.

Jaworski (2002, p. 90) detalla estas cuestiones al formular las siguientes preguntas:

¿Cuándo y cómo aprenden matemáticas nuestros estudiantes y cuál es la naturaleza de su conocimiento y comprensión matemáticos? ¿Cómo se desarrolla el conocimiento pedagógico? ¿De qué manera los futuros profesores enlazan sus conocimientos de matemáticas y pedagogía para planificar eficazmente la enseñanza en el aula? ¿En qué momentos o etapas ellos comienzan a relacionar su conocimiento de estas áreas con una conciencia del pensamiento y comprensión matemáticos de los escolares y con las situaciones y cuestiones sociales que rodean las aulas?

² Excepto que indique lo contrario, las citas de documentos cuyos originales no están en español han sido traducidas por mí.

En este sentido, Ball (2001, p. 437) argumenta que

el desarrollo profesional carece de un currículo para el aprendizaje de los profesores, un currículo que considere las prácticas que se espera que ellos desarrollen, el conocimiento matemático que requieren tales prácticas y la atención a lo que ellos ya conocen y creen —es decir, lo que ellos traen a la formación.

Kilpatrick (2003a), en su propuesta para un centro para la competencia (“proficiency”) en la enseñanza de las matemáticas, identifica seis prioridades, formuladas como preguntas:

1. *¿Dónde y cómo los profesores usan las matemáticas en su trabajo?*
2. *¿Qué conocimiento matemático, habilidades y disposiciones están involucrados en la enseñanza competente de las matemáticas?*
3. *¿Cómo pueden los profesores, en formación y en ejercicio, desarrollar su conocimiento matemático y usarlo más eficazmente en la enseñanza?*
4. *¿Qué constituye una oportunidad de aprendizaje profesional en matemáticas, de tal forma que la práctica de la instrucción y su desarrollo sean centrales en ese aprendizaje?*
5. *¿Cuáles son las características de las oportunidades de desarrollo profesional eficaces, de alta calidad y perdurables para profesores de todos los niveles?*
6. *¿Qué se necesita para desarrollar alianzas y colaboraciones productivas en las comunidades que puedan contribuir al aprendizaje profesional de los profesores de matemáticas?*

Hay, por lo tanto, una variedad de preguntas no resueltas en relación con el profesor de matemáticas. Estas cuestiones tienen que ver, de manera general, con la enseñanza que el profesor realiza en el aula, con el conocimiento y habilidades que pone en juego al hacerlo, con los procesos de aprendizaje en virtud de los cuales él desarrolla esos conocimientos y esas habilidades, y con los contextos de formación en los que se crean las oportunidades de aprendizaje para ello. Desde la perspectiva de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, identifiqué, por lo tanto, cuatro cuestiones sobre las que hay interés en el contexto de la investigación en educación matemática:

1. *¿Qué caracteriza la actuación eficaz y eficiente³ del profesor en el aula de matemáticas?*

³ La literatura sobre enseñanza utiliza el término “effectiveness” o “effective teaching” (e.g., Cheng, Mok y Tsui, 2001; Grouws y Cooney, 1988; Kinach, 2002; Loughran, 2002). Aunque el término se originó en la tradición de los estudios de “proceso-producto” que buscaban identificar los comportamientos característicos de los buenos profesores, se ha continuado utilizando para describir una enseñanza de calidad que logra los objetivos que se propone. Ésta es la acepción general del término “eficacia” (como la capacidad para obrar o para conseguir un resultado determinado), mientras que la eficiencia se refiere a la capacidad para lograr un fin empleando los mejores medios posibles.

2. ¿Cuáles deben ser los conocimientos, capacidades y actitudes de un profesor que actúa eficaz y eficientemente?
3. ¿Cómo se deben diseñar e implantar los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria de tal forma que se apoye y fomente el desarrollo de estos conocimientos, capacidades y actitudes?
4. ¿Qué caracteriza los procesos de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria que participan en este tipo de programas de formación inicial?

2. ROLES, PERÍODOS Y CONTRIBUCIONES

Este trabajo se enmarca dentro del contexto de estas cuatro preguntas generales. Es un trabajo sobre diseño de programas de formación inicial y sobre aprendizaje de futuros profesores de matemáticas de secundaria. En él, propongo avances para la conceptualización de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria dentro del contexto español y exploro qué y cómo aprende un grupo de futuros profesores que participó en un programa de este tipo. Se trató de la asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato* que se ofreció a estudiantes de matemáticas de quinto año de la Universidad de Granada durante el curso 2000-2001 (Rico y Segovia, 1999).

Yo asumí diversos roles a lo largo de este proyecto. Mi primer rol fue de diseñador de currículo. Asistí a la asignatura durante la mayor parte del curso anterior a aquel en el que se recogió la información para la indagación empírica. Durante ese tiempo, trabajé en dos actividades. Por un lado, produje una propuesta para modificar el diseño curricular de la asignatura. Por el otro, desarrollé las primeras ideas de una conceptualización de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que permitiera justificar ese nuevo diseño. Mi segundo rol fue de formador. Compartí la responsabilidad del diseño y desarrollo de la asignatura con mi director de tesis, Luis Rico. Estuve a cargo, entre otras cosas, de aquella parte de la asignatura sobre la que se hizo la indagación empírica. Finalmente, mi tercer rol fue como investigador. Diseñé y llevé a cabo un proyecto con el propósito de comprender el aprendizaje de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. Este es, por lo tanto, un proyecto de investigación sobre mi práctica profesional (Ponte, Serrazina, Sousa y Fonseca, 2003) y la de mi director de tesis⁴.

Desarrollé el proyecto en tres períodos, que corresponden a los tres roles que acabo de describir. En el primer período, produje avances en la conceptualización de la asignatura como fundamento para su diseño curricular. En el segundo período, tuvo lugar el desarrollo de la asignatura y el proceso de recolección de información para la indagación empírica. Y, en el tercer período, analicé esa información, produje unos resultados y redacté el reporte correspondiente.

Mis contribuciones a las preguntas que formulé al comienzo de este capítulo se construyeron a partir de tres dimensiones:

⁴ Por esta razón, acorde con la posición de Burton (2002) y siguiendo las guías del Manual de la Sociedad Americana de Psicología (2001), en el que me baso para escribir este documento, utilizaré la voz activa como estilo de redacción.

- ◆ una aproximación a la conceptualización de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria dentro del contexto español;
- ◆ una propuesta de diseño curricular para la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada; y
- ◆ la descripción y caracterización de algunos aspectos del aprendizaje de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura⁵.

A continuación, presento el proceso que dio lugar a la problemática de investigación de la que me ocupé y que es objeto del proyecto que reseño en este documento. El proceso se inicia con el encuentro de dos vertientes en la investigación en formación de profesores de secundaria: la línea de investigación en formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que se venía desarrollando en el seno del Grupo *Pensamiento Numérico* de la Universidad de Granada (Rico, 2004a) y mi experiencia como formador e investigador en los programas de formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria en "una empresa docente", en Bogotá, Colombia (Gómez, Perry, Valero, Castro y Agudelo, 1998; ued, 2004). Como resultado de este encuentro y del análisis de los proyectos de investigación que se venían realizando en Granada, diseñé una perspectiva para la exploración de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, que describo más adelante en este capítulo. Este proyecto se articula dentro del contexto de esa perspectiva.

3. ENCUENTRO DE DOS VERTIENTES EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

El problema que abordo en este proyecto surge del encuentro de dos vertientes en la formación de profesores de matemáticas de secundaria que se venían realizando durante el final de la década de los ochenta y la década de los noventa. La primera vertiente tenía lugar en Granada, España, en el contexto de la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas en la Universidad de Granada. La segunda vertiente tenía lugar en Bogotá, Colombia, en el contexto de los proyectos de formación permanente de profesores de secundaria que desarrolló "una empresa docente", centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes. A continuación, describo cada una de estas vertientes.

Luis Rico impartió por primera vez la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato en 1987. Él la describe en detalle en su proyecto docente (Rico, 1992, p. capítulo III). Como es natural, el diseño de la asignatura ha evolucionado en el tiempo⁶. El propósito de la asignatura es el de contribuir a la formación del futuro profesor de matemáticas de secundaria en dos dimensiones: el inicio de su participación en las prácticas de la comunidad de educadores matemáticos y el

⁵ Estas cuestiones serán descritas en detalle en otros capítulos de este documento. No obstante, vale la pena aclarar que la conceptualización y el diseño curricular que se mencionan aquí involucran una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores. Por otro lado, en el tercer punto (i.e., la indagación empírica) me refiero a la descripción y caracterización del aprendizaje de los grupos de futuros profesores que tuvo lugar con motivo del desarrollo de la asignatura.

⁶ Describiré en detalle el diseño curricular de la asignatura para el curso 2000–2001 en el capítulo 5.

desarrollo de los conocimientos y capacidades necesarios para la planificación de unidades didácticas. En el curso 1999-2000 se consideraron los siguientes temas: historia de las matemáticas y de la educación matemática en España, la noción de currículo y análisis de proyectos curriculares, los fundamentos de las matemáticas escolares (matemáticas, aprendizaje y enseñanza) y los organizadores del currículo. Los organizadores del currículo hacen referencia a “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (Rico, 1997c, p. 45). La noción de sistemas de representación es un ejemplo de un organizador del currículo. El análisis de un tema matemático específico (e.g., la función cuadrática) desde la perspectiva de los sistemas de representación permite recabar y organizar información sobre uno de los múltiples significados de este tema, dentro del contexto de las matemáticas escolares. Otros organizadores del currículo son la historia, la fenomenología, los errores y dificultades o los materiales y recursos. La articulación de los organizadores del currículo como herramientas conceptuales y metodológicas para el análisis de un tema matemático y la organización de la información que surge de ese análisis para el diseño de unidades didácticas se denominaba en ese momento el “modelo de los organizadores del currículo”, al que haré referencia más adelante en este capítulo. Este modelo era la pieza central del diseño de la segunda parte de la asignatura⁷. En esta parte, los futuros profesores se organizaban en grupos, escogían un tema matemático específico, recogían y organizaban información sobre ese tema, y producían el correspondiente diseño de una unidad didáctica.

Durante varios años antes del comienzo de este proyecto, yo trabajé en “una empresa docente”. Allí ejercí funciones de director, investigador y formador de profesores. Como investigador y formador de profesores de matemáticas, participé, con mis colegas, en varios proyectos de formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria. En ellos, fuimos paulatinamente diseñando, llevando a la práctica y evaluando esquemas de trabajo que centraban su atención en el análisis de temas de las matemáticas escolares, el diseño de actividades a partir de esos análisis, la puesta en juego de esos diseños y la evaluación de los resultados (Gómez, 1999; Gómez y Carulla, 2001a, 2001b; Gómez et al., 1998; Perry, Valero, Castro, Gómez y Agudelo, 1998).

En estos proyectos de investigación y formación trabajábamos con profesores de matemáticas de secundaria en ejercicio. Los profesores se organizaban en grupos. Cada grupo estaba compuesto por profesores de una misma institución. Las directivas de la institución apoyaban y participaban en el trabajo de sus profesores (Valero, Perry y Gómez, 1997). Todos los grupos trabajaban sobre un mismo tema matemático y utilizaban herramientas conceptuales y metodológicas de análisis de las matemáticas escolares que denominábamos, en conjunto, análisis didáctico. Cada grupo realizaba un proceso cíclico de análisis, diseño curricular, desarrollo curricular y evaluación, y presentaba sistemáticamente su trabajo en clase durante cada una de las fases del ciclo. Adicionalmente, realizábamos reuniones periódicas.

⁷ También era el foco de interés de la línea de investigación que se estaba desarrollando en ese momento y que describiré en el siguiente apartado.

cas de asesoría con cada grupo por separado en las que formadores y profesores discutíamos sobre el avance de los trabajos.

Llegué, por lo tanto, a Granada con una cierta experiencia en formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria. Pero, ¿era esta experiencia válida en la formación inicial de profesores? ¿Qué aspectos de los dos tipos de formación eran comunes? ¿Cómo compaginar mi experiencia como investigador y formador en Colombia con la línea de investigación que se venía desarrollando en Granada? Como un primer paso para responder estas preguntas, describo a continuación las principales características de dicha línea de investigación, tal y como se encontraba en el momento en que comencé a trabajar en mi proyecto y, por lo tanto, a formar parte de ella.

4. EVALUACIÓN DE UN MODELO DE FORMACIÓN

En el apartado anterior me referí al “modelo de los organizadores del currículo” dentro del contexto de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato. Al final de la década de los noventa, Luis Rico había iniciado una línea de investigación en formación de profesores cuyo foco principal era la “evaluación de ese modelo” (Bedoya, 2002, pp. 58-63; Ortiz, 2002, p. 39; Rico, Gómez, Moreno, Romero, Lupiáñez, Gil *et al.*, 2003). Dado que la idea de “evaluar el modelo” era bastante compleja y general, se diseñó y desarrolló una estrategia de concreción que se utilizó en las tesis doctorales de Evelio Bedoya (2002) y José Ortiz (2002). A continuación describo esta estrategia, dado que ella se constituyó en el punto de partida de mi trabajo. La delimitación del problema se ejecutó en las siguientes dimensiones:

Se selecciona una parte del modelo. Estos dos proyectos de investigación se centraron en aspectos específicos del modelo. Evelio Bedoya trabajó con calculadoras gráficas (como recurso) y sistemas de representación, en el contexto de la función cuadrática. Por su parte, José Ortiz utilizó también las calculadoras gráficas, pero centró su atención en los procesos de modelización en el área del álgebra lineal. Los dos proyectos exploraron el papel del organizador del currículo correspondiente en el desarrollo de competencias de diseño curricular. De esta manera, no había necesidad de abordar la globalidad de los organizadores del currículo y la atención se podía centrar en el trabajo de los futuros profesores en algunos aspectos particulares del modelo.

La experiencia se realiza por fuera del contexto de la asignatura. En los dos proyectos de investigación a los que me refiero, se diseñó un programa de formación de profesores específico y de corta duración que se realizó en al menos dos ocasiones. En ellos participaron una variedad de alumnos —en el caso de Ortiz (2002, p. 156), por ejemplo, participaron tanto licenciados en matemáticas, como estudiantes de matemáticas de diferentes especialidades y diferentes cursos—.

Objetivos y diseños de investigación específicos. Los dos proyectos buscaron explorar y caracterizar las competencias didácticas desarrolladas por los participantes durante los programas de formación correspondientes. En los dos estudios se hizo un análisis detallado de las actitudes de los participantes hacia el uso de la

tecnología y los resultados de este análisis guiaron una parte importante de las conclusiones.

5. ANÁLISIS DE LA ESTRATEGIA DE DELIMITACIÓN

La evaluación de programas de formación que involucran la tecnología es un proceso complejo (Howland y Wedman, 2004, p. 259) y estos dos proyectos hicieron contribuciones importantes dentro del contexto de la educación matemática. Su diseño y sus contribuciones me permitieron reflexionar sobre el problema general de la “evaluación del modelo de los organizadores del currículo”, con el propósito de diseñar mi proyecto. En este apartado, presento algunas reflexiones que, reconociendo las aportaciones de estos trabajos, sirven de base para la estrategia con la que abordé el mismo problema.

El modelo de los organizadores del currículo forma parte de un diseño curricular global dentro de la asignatura. Este modelo involucra una variedad de elementos que interactúan entre sí conceptual y metodológicamente. Por ejemplo, desde el punto de vista conceptual, los organizadores del currículo, como herramientas de análisis de un tema matemático y de diseño de unidades didácticas, se relacionan directamente con la noción de currículo y con los fundamentos de las matemáticas escolares (ver capítulo 2). Por otro lado, el modelo de los organizadores pretende ser el núcleo de un procedimiento de diseño curricular. Para que tenga sentido, este diseño debe involucrar idealmente todos los elementos del modelo (Gómez, 2002a, pp. 347-349). En el caso de los dos estudios a los que me estoy refiriendo, y dados sus propósitos y su extensión temporal, no se pretendía hacer referencia a todos estos elementos, ni a las bases conceptuales sobre las que se fundamenta el modelo. Tampoco se buscaba realizar un trabajo de diseño curricular en toda su extensión.

Como mencioné arriba, quienes participaron en estos programas de formación provenían de diversos ámbitos y tenían diversas formaciones y experiencias docentes que no necesariamente correspondían a la formación y experiencia de los alumnos de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, dentro de la que se había desarrollado y se utilizaba el modelo. Por lo tanto, sus resultados se referían a esos participantes, y no se pretendía extenderlos al contexto de la asignatura.

Los estudios tuvieron que enfrentar las restricciones naturales de un proyecto de grado en cuanto a la amplitud de sus objetivos de investigación. En este aspecto, se enfocaron en el análisis de algunas de las producciones y actuaciones de los participantes. Por un lado, la pregunta “¿cómo aprenden los profesores?” no formaba parte de sus objetivos. Por otro lado, y, de nuevo, teniendo en cuenta las restricciones naturales dentro de las que se realizaron los estudios, el análisis de la información recogida en ellos se restringió también a algunos aspectos específicos del aprendizaje de los participantes. Por ejemplo, se enfatizó el estudio de las actitudes de los participantes hacia la tecnología y se focalizó la investigación al tema matemático tratado en los cursos. En este sentido, el énfasis estuvo más en el aprendizaje de un tema matemático, del manejo de un recurso didáctico (la tecnología) y del uso de una herramienta conceptual y metodológica (sistemas de representación o modelización).

Finalmente, los dos estudios se enfrentaron al problema de darle significado a la frase “evaluación del modelo de los organizadores del currículo”. Mientras que Evelio Bedoya no centró su atención en el significado de la evaluación, José Ortiz abordó este problema desde la perspectiva de la evaluación de programas de formación (Ortiz, 2002, pp. 195-196). Sin embargo, como he mencionado en los párrafos anteriores, el problema de la evaluación del modelo de los organizadores del currículo debería *idealmente* tener en cuenta los objetivos para los que el modelo se desarrolló y el contexto dentro del cual se pretendían lograr esos objetivos. Por el otro lado, la idea del “modelo de los organizadores del currículo” no era, en ese momento, una idea completamente desarrollada conceptualmente y esto implicó que, en cada estudio, se propusiera una interpretación de la misma. En otro proyecto de investigación que estamos desarrollando en la actualidad nos hemos enfrentado a este mismo problema (Rico et al., 2003, p. 294). El “modelo de los organizadores del currículo” se utiliza en diversos ámbitos y con diferentes interpretaciones⁸.

6. OTRA PERSPECTIVA EN LA EXPLORACIÓN DE LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Yo entré a trabajar en esta línea de investigación cuando Evelio Bedoya ya había recogido la información de su proyecto y se encontraba analizándola, y José Ortiz estaba diseñando el curso de formación en el que iba a recoger la información de su estudio. En principio, yo debía trabajar dentro del mismo esquema de estos dos proyectos. Sin embargo, antes de aproximarme a la definición de mi problema de investigación y teniendo en cuenta los comentarios que presenté en el apartado anterior, me pareció importante reflexionar sobre dos cuestiones:

- ◆ ¿Qué es el modelo de los organizadores del currículo y qué papel juega dentro de la asignatura?
- ◆ ¿Cómo *evaluar* este modelo?

Como resultado de estas reflexiones, decidí abordar el problema desde una perspectiva diferente a la de los estudios de Evelio Bedoya y José Ortiz. Debe ser claro que esta *nueva* perspectiva no habría sido posible sin las contribuciones de estos dos estudios. Ellos abrieron el camino en el que pude enfocar mi investigación por líneas diferentes. Las principales características de esta perspectiva fueron las siguientes:

- ◆ concretar un significado para la noción de “modelo de los organizadores del currículo”;
- ◆ centrar la investigación en el aprendizaje de los grupos de futuros profesores;
- ◆ focalizar el trabajo en el análisis de contenido;
- ◆ estudiar los procesos de aprendizaje, más que los resultados;

⁸ En particular, además de la Universidad de Granada, el modelo se utiliza explícitamente en la Universidad de Almería (Moreno, 1998, pp. 51-62) y en la Universidad de Cantabria (González, 2002, pp. 97-102).

- ◆ explorar el aprendizaje de los grupos de profesores;
- ◆ asumir una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores;
- y
- ◆ realizar la investigación dentro del contexto de la asignatura.

A continuación, explico brevemente cada una de estas cuestiones.

Concretar un significado para la noción de “modelo de los organizadores del currículo”. Al abordar este problema y comenzar a revisar la literatura de investigación sobre formación y conocimiento de profesores de matemáticas, caí en la cuenta de que, para darle un significado a la idea del modelo de los organizadores del currículo, era necesario abordar el problema de organizar y estructurar el diseño de la asignatura. El modelo en cuestión era una de las piezas de dicho programa de formación. Mi respuesta a este problema consistió en un ejercicio de revisión de la conceptualización de la asignatura en el que identifiqué, basado en la literatura, las principales cuestiones que se deben abordar en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria e indiqué cómo se abordan esas cuestiones dentro de la asignatura (capítulos 2, 3 y 5). Este ejercicio me permitió, por un lado, hacer una descripción estructurada del diseño curricular de la asignatura y, por el otro, avanzar en el fundamento de este diseño. Adicionalmente, en este ejercicio de conceptualización, hice explícita con carácter operativo la idea de *análisis didáctico* como descripción del procedimiento que idealmente debería realizar un profesor de matemáticas a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas (Gómez, 2002b, pp. 261-285, capítulo 2). Introduje entonces el análisis didáctico como un nuevo nivel para la noción de currículo (Rico, 1997b, pp. 408-410) en el que se enfatiza el proceso de diseño curricular a nivel local. La noción de análisis didáctico me permitió entonces construir una definición *funcional* de la idea de *conocimiento didáctico*, dentro de este contexto local, como el conocimiento que el profesor pone en juego y desarrolla cuando realiza el análisis didáctico (Gómez, 2002b, pp. 285-287, capítulo 3).

Centrar la investigación en el aprendizaje de los grupos de futuros profesores. Para dotar de significado a la idea de *evaluación* dentro del proyecto, decidí que el foco de atención de la investigación fuese el aprendizaje de los futuros profesores que participaron en la asignatura. Sería una evaluación del *desarrollo* de la asignatura, desde el punto de vista del logro de sus objetivos. En términos de la noción de *calidad*, la investigación se centraría en la *eficacia* del plan de formación, teniendo como telón de fondo las nociones de relevancia y eficiencia (Rico et al., 2003, pp. 291-292). El propósito era entonces el de explorar *qué* aprenden los futuros profesores en la asignatura y *cómo* lo aprenden. Éste era, por supuesto, un proyecto ambicioso. Por esa razón, decidí centrar mi atención en uno de los temas que componen los contenidos de la asignatura.

Focalizar el trabajo en el análisis de contenido. El análisis de contenido es uno de los cuatro análisis que componen el análisis didáctico (Gómez, 2002b, pp. 262-271, capítulo 2). Decidí escoger esta parte del contenido de la asignatura como foco de atención por varias razones. Estudiar el aprendizaje de los futuros profesores sobre todo el contenido de la asignatura habría implicado un nivel de exploración que no me habría permitido profundizar en las características específicas del conocimiento y las competencias que desarrollaron los futuros profesores en ella.

Era necesario enfocar la atención sobre una parcela específica de ese contenido. Teniendo en cuenta los avances que había hecho en la conceptualización de la asignatura, no se trataba de escoger algunos organizadores del currículo para realizar la investigación. Dentro de esta conceptualización, el análisis de contenido tiene una coherencia interna que lo hacía apropiado para su exploración. Por otro lado, el análisis de contenido es el primer análisis que se trabaja en la asignatura y resultaba natural escogerlo como principal foco de atención dentro de esta nueva estrategia de investigación. Finalmente, mi interés se centraba en tomar el análisis de contenido como contexto y herramienta para explorar y caracterizar el aprendizaje de los grupos de futuros profesores, al buscar responder a dos preguntas: ¿qué aprenden? y ¿cómo lo aprenden?

Estudiar los procesos de aprendizaje, más que los resultados. Los estudios de Evelio Bedoya y José Ortiz estudiaron en profundidad los resultados de un plan de formación relativamente corto. En estos estudios, se describe y caracteriza en detalle una “foto” del conocimiento didáctico de los participantes en los planes de formación. Por mi parte, yo me interesé en el carácter *evolutivo* de esos procesos de aprendizaje. Siguiendo la metáfora, yo quería llegar a describir y caracterizar una “película”, más que una foto. Yo pensaba que, de esta manera, sería posible explorar, no solamente las dificultades que los grupos de futuros profesores tenían que afrontar en el tiempo, sino también describir y caracterizar los procesos en virtud de los cuales estas dificultades se consolidaban o se superaban y en qué medida ellos lograban los objetivos de la asignatura.

Explorar el aprendizaje de los grupos de profesores. En el nuevo diseño de la asignatura, los futuros profesores trabajan en grupos la mayor parte del tiempo (capítulo 5) y son los principales actores de su propio proceso de aprendizaje. En este sentido, el nuevo diseño de la asignatura redujo la importancia de las sesiones expositivas por parte de los formadores e incrementó la importancia de la exposición en público del trabajo de los grupos y de la discusión y crítica conjunta de esas presentaciones. Aunque hubo algunos trabajos que se realizaron de manera individual, el grueso de las presentaciones y los documentos fueron el producto del trabajo en grupo de los futuros profesores. Este aspecto del diseño de la asignatura tenía que ver con la importancia que los formadores le dimos (y le damos) a la colaboración y al desarrollo de comunidades de práctica como aspecto central de las competencias de un profesor de matemáticas. Por lo tanto, en vez de poner el foco de la investigación en el aprendizaje de los futuros profesores individuales, decidí centrar mi atención en el aprendizaje de los grupos de futuros profesores.

Asumir una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores. Mi interés en los procesos de aprendizaje de los futuros profesores implicaba la necesidad de asumir una posición explícita acerca de cómo ellos aprenden en el contexto de un plan de formación. Mientras que el diseño y el desarrollo de la asignatura se realizaron, en su momento, con una posición de corte de constructivismo social (e.g., Nuthall, 2002, pp. 43-75), pero esta posición no se hizo explícita en el diseño de la asignatura, en el caso del proceso de investigación que iba a realizar, era necesario asumir explícitamente una posición. Por razones que se explican en el capítulo 4, decidí aproximarme al aprendizaje de los grupos de futuros profesores desde la perspectiva de la teoría social del aprendizaje de Wenger (1998). Para

ello, seleccioné, interpreté y adapté los aspectos más relevantes de esta teoría a las características y propósitos del estudio.

Realizar la investigación dentro del contexto de la asignatura. Los puntos anteriores hicieron evidente la necesidad de realizar la investigación dentro del contexto mismo de la asignatura, en cambio de diseñar un plan de formación alternativo, como fue el caso en los estudios de Evelio Bedoya y José Ortiz. Decidí que la esencia de la información que utilizaría en mis análisis sería aquella que surge naturalmente dentro de la asignatura. Sería una investigación de corte naturalista (Erlandson, Harris, Skipper y Allen, 1993).

7. CUATRO PREGUNTAS GENERALES, UNA APROXIMACIÓN CONCRETA

Al comienzo de este capítulo, sugerí cuatro preguntas generales sobre la actuación, el conocimiento, la formación y el aprendizaje del profesor de matemáticas. Basándome en la literatura reciente, mostré la relevancia de estas preguntas en el contexto actual de la investigación en educación matemática, en particular, y en educación, en general. Éstas son preguntas de investigación con implicaciones prácticas evidentes, al menos desde la perspectiva del diseño y desarrollo de programas de formación de profesores de matemáticas. Las preguntas eran las siguientes:

1. ¿Qué caracteriza la actuación eficaz y eficiente del profesor en el aula de matemáticas?
2. ¿Cuáles deben ser los conocimientos, capacidades y actitudes de un profesor que actúa eficaz y eficientemente?
3. ¿Cómo se deben diseñar e implantar los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria de tal forma que se apoye y fomente el desarrollo de estos conocimientos, capacidades y actitudes?
4. ¿Qué caracteriza los procesos de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria que participan en este tipo de programas de formación inicial?

Este trabajo se enmarca dentro de la esfera de acción de estas preguntas generales. Para cada una de ellas determino un contexto concreto de trabajo, que describo a continuación.

Con respecto a la primera pregunta, propongo, desde una perspectiva conceptual, una descripción del procedimiento ideal que el profesor de matemáticas debería realizar a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas (el análisis didáctico). La propuesta se restringe a la problemática de abordar un tema matemático específico y estudiar las implicaciones de tener en cuenta esta especificidad para efectos del diseño y desarrollo curricular. Esto significa que no abordo temas como la gestión de clase o la problemática del diseño curricular “global” en el que participa el profesor de matemáticas (tanto el de una asignatura, como el que tiene lugar dentro de la institución educativa) (Rico, 1997b, p. 409).

En segundo lugar, establezco los conocimientos y capacidades que el profesor debería tener y desarrollar para realizar el análisis didáctico (el conocimiento didáctico). Por lo tanto, esta interpretación del conocimiento didáctico no tiene en cuenta en detalle aquellas competencias del profesor de matemáticas que, siendo necesarias, no son específicas a un tema matemático particular. Esto significa, por ejemplo, que no profundizo en temas como el conocimiento pedagógico general, las actitudes o el pensamiento del profesor en la práctica.

En lo que respecta a los objetivos de un plan de formación, centro la atención en el desarrollo de los conocimientos y capacidades necesarios para planificar unidades didácticas. Adicionalmente, circunscribo el trabajo al entorno de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada. Esto implica poner el foco de atención en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en el contexto español.

Finalmente, estudio y caracterizo el aprendizaje (desde una perspectiva evolutiva) de los futuros profesores que cursaron esta asignatura durante el curso 2000-2001. De estos grupos de futuros profesores, exploro y caracterizo (basado en la teoría social del aprendizaje de Wenger) el proceso en virtud del cual uno de ellos constituyó, desarrolló y consolidó una comunidad de práctica. En este contexto, describo sus procesos de negociación de significado⁹.

En otras palabras, abordo unas preguntas generales con una aproximación concreta, con la intención de contribuir a la reflexión sobre ellas. En el contexto que he delimitado, establezco dos objetivos generales para este proyecto:

1. avanzar en la conceptualización de las actividades del profesor de matemáticas de secundaria, de su conocimiento didáctico y del diseño de planes de formación inicial, y
2. describir y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato del curso 2000-2001 con respecto a los organizadores del currículo correspondientes al análisis de contenido.

Parto de la conjetura de que es posible lograr el primer objetivo a partir de una visión funcional de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y de su conocimiento didáctico. Establezco los siguientes objetivos específicos que desarrollaré con más detalle a lo largo de este documento:

- ◆ introducir y caracterizar un significado de la expresión *análisis didáctico*, como conceptualización de la actuación del profesor en sus actividades de diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas;
- ◆ incorporar un significado del término *conocimiento didáctico*, como una herramienta conceptual para abordar la problemática del conocimiento del profesor de matemáticas; y
- ◆ avanzar en la conceptualización y la fundamentación del diseño curricular de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada.

⁹ Los términos “comunidad de práctica” y “procesos de negociación de significado” forman parte de la estructura conceptual de la teoría social de aprendizaje de Wenger (1998) que describo en el capítulo 5.

Para el planteamiento empírico que establezco en el segundo objetivo general, parto de dos conjeturas. La primera, que es posible organizar y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. La segunda, que es posible abordar el aprendizaje de un grupo de futuros profesores desde la perspectiva sociocultural. Establezco entonces dos objetivos específicos:

- ◆ describir, caracterizar y explicar el *desarrollo del conocimiento didáctico* de los grupos de futuros profesores que participaron en una versión de la asignatura y
- ◆ describir y caracterizar las actividades por fuera del aula de un grupo de futuros profesores cuando preparan su trabajo para la asignatura.

Hasta ahora, he demarcado una problemática de investigación en relación con el profesor de matemáticas (las cuatro preguntas generales) y he justificado la relevancia de este trabajo en el contexto de esa problemática. Por otro lado, he descrito el proceso que dio lugar al diseño del proyecto como consecuencia del encuentro de dos vertientes de investigación en formación de profesores de matemáticas y he presentado las principales características de este diseño. Finalmente, he enumerado los objetivos que pretendo acometer, como estrategia concreta para abordar las cuatro preguntas generales que delimitan la problemática de investigación anterior. A continuación, describo el contenido de este documento.

8. DOS RELATOS ENTRELAZADOS

Mis contribuciones en este proyecto se refieren a dos dimensiones de la problemática de la formación de profesores: por un lado, la fundamentación, diseño y desarrollo de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria; por el otro, la exploración del aprendizaje de los grupos de futuros profesores que participaron en una versión de ese plan. Este documento se organiza alrededor de esas dos dimensiones y tiene tres partes.

8.1. Fundamentación, Diseño y Desarrollo de la Asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato

En esta parte del documento, abordo cuatro cuestiones. En primer lugar, describo el análisis didáctico, como procedimiento que un profesor de matemáticas de secundaria debería idealmente realizar a la hora de diseñar, desarrollar y evaluar unidades didácticas, y el conocimiento didáctico, como el conocimiento que el profesor pone en juego y desarrolla cuando realiza el análisis didáctico. En segundo lugar, asumo una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores en formación. En tercer lugar, presento los avances realizados en la conceptualización de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, como fundamento para su diseño curricular. En cuarto lugar, expongo el desarrollo curricular de esta asignatura durante el curso 2000-2001. Cada una de estas cuestiones corresponde a un capítulo del documento.

8.2. Aprendizaje de los Grupos de Futuros Profesores que Participaron en la Asignatura

La segunda parte se refiere al proyecto de indagación empírica sobre el aprendizaje de los grupos de futuros profesores. Propongo inicialmente el diseño de investigación. El proyecto está compuesto por cuatro estudios.

En el primer estudio, identifiqué y caractericé cuatro estados de desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. En este estudio, analicé las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores en sus presentaciones en clase, utilizando un esquema de corte cuantitativo que me permitió comparar el trabajo de los grupos y, por lo tanto, no tenía en cuenta la especificidad de los temas de cada uno de los grupos.

En el segundo estudio, parto de los resultados del primer estudio para caracterizar el aprendizaje de los grupos de futuros profesores, teniendo en cuenta la especificidad de los temas trabajados por ellos. En este estudio analicé, con una aproximación cualitativa, las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores, las transcripciones de las grabaciones de audio de las sesiones de clase y las transcripciones de entrevistas que realicé a algunos de los grupos.

En el tercer estudio, exploro y caractericé la puesta en práctica del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores, al analizar los trabajos finales presentados por ellos.

Finalmente, en el cuarto estudio, caractericé los procesos de negociación de significado del grupo de futuros profesores que trabajó en el tema de la función cuadrática, al analizar las transcripciones de las grabaciones de audio de sus reuniones por fuera de clase cuando producían los trabajos para la asignatura.

8.3. Resultados, Implicaciones y Conclusiones

Finalmente, en la tercera parte del documento recojo los resultados de las dos primeras partes con el propósito de exponer y justificar mis contribuciones a las cuatro preguntas generales con las que se inicia este capítulo. En los dos últimos capítulos incluyo un resumen ejecutivo de este documento y su traducción al inglés.

ANÁLISIS DIDÁCTICO. UNA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

“¿Cómo organizar la instrucción matemática? Ésta es una de las cuestiones más importantes que se deben tratar en la educación matemática” (Krainer, 1993, pp. 66-67). En este capítulo abordo esta cuestión. Para ello, propongo, desde una perspectiva conceptual, una descripción de un procedimiento ideal, el análisis didáctico, que el profesor de matemáticas puede utilizar a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. La propuesta se restringe a la problemática de abordar temas matemáticos específicos y de estudiar las implicaciones de tener en cuenta esta especificidad para efectos del diseño y desarrollo curricular. Por lo tanto, no abordo temas como la gestión de clase o la problemática del diseño curricular “global” en el que participa el profesor de matemáticas (tanto el de una asignatura, como el que tiene lugar dentro de la institución educativa). De esta manera, propongo una respuesta parcial a la primera de las cuatro preguntas que formulé en el capítulo 1: ¿Qué caracteriza la actuación eficaz y eficiente del profesor en el aula de matemáticas?

La reflexión que presento en este capítulo se fundamenta en los trabajos de Luis Rico y sus colaboradores (Rico, 1992; Rico, 1995a, 1998a, 1998b, 1997e; Rico, Castro, Castro, Coriat, Marín, Puig *et al.*, 1997a) y de Martin Simon (Simon, 1995a; Simon, 1995b, 1997; Simon y Tzur, 2004). Estos investigadores han desarrollado dos herramientas para la planificación de clase (los organizadores del currículo y la trayectoria hipotética de aprendizaje, respectivamente) con las que buscan abordar dos problemas relacionados con esta actividad del profesor: la brecha entre el diseño curricular global y la planificación local (Rico) y la paradoja de la planificación (Simon). Con el análisis didáctico, pretendo organizar y

adaptar esas herramientas en el contexto de la planificación local y de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y propongo un avance en la reflexión sobre esos dos problemas.

1. LA PLANIFICACIÓN DE CLASE. UN PROBLEMA DIARIO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La planificación y la gestión de clase son dos de los problemas que el profesor debe resolver en su actividad docente. Los estándares nacionales e internacionales, las directivas gubernamentales y la planeación estratégica de la institución educativa determinan los contextos social, educativo e institucional en los que se produce el diseño curricular global de cada asignatura. Sin embargo, este diseño curricular global no aporta necesariamente pautas específicas para el día a día de la práctica docente de los profesores. Usualmente los profesores planifican y realizan sus clases con ayuda de su experiencia y de los documentos y materiales de apoyo disponibles, y, muchos de ellos, se basan exclusivamente en las propuestas de los libros de texto. Si esperamos que los profesores de matemáticas aborden su trabajo diario de manera sistemática y reflexiva, basándose en un conocimiento profesional, entonces ellos deberían conocer y utilizar principios, procedimientos y herramientas que, fundamentados en la didáctica de la matemática, les permitan diseñar, evaluar y comparar las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje que pueden conformar su planificación de clase.

Rico (1997a) y Segovia y Rico (2001) han identificado esta problemática al poner de manifiesto las dificultades de los profesores con la noción de currículo en el nivel de la planificación global. En este nivel, el profesor debe identificar unos objetivos, unos contenidos, una metodología y un esquema de evaluación con los que pretende describir el currículo como plan de formación para una asignatura o para una porción amplia de una asignatura. Hay que diferenciar entre los problemas de diseño curricular global (para la totalidad de una asignatura, por ejemplo) y los problemas de diseño curricular local (para una unidad didáctica o una hora de clase sobre una estructura matemática específica o uno o más aspectos de ella). Si tiene en cuenta únicamente los problemas de diseño curricular global (con el esquema de objetivos, contenidos, metodología y evaluación), entonces el profesor tiende a ver la planificación como la secuenciación de contenidos matemáticos y a considerar la enseñanza como el “cubrimiento” de estos contenidos. Al no considerar las problemáticas conceptuales, cognitivas y de instrucción de las estructuras matemáticas específicas, el profesor se ve obligado a describir los objetivos, la metodología y la evaluación en términos generales. Por lo tanto, lo que diferencia a las distintas parcelas del diseño curricular global son los contenidos (Rico, 1997c, pp. 40-41). Cuando tratamos a nivel local los problemas de diseño curricular y nos concentramos en una estructura matemática específica, es posible ampliar esta visión de la planificación y de la enseñanza (p. 55). El *análisis didáctico*, introducido por Rico (Rico, 1997c, p. 55) y que desarrollo en este capítulo, es una conceptualización de ese nivel de la planificación. Es un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y

múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje¹⁰.

La brecha entre la planificación global (de una asignatura) y la planificación local (de una unidad didáctica o una hora de clase) no es el único problema al que, desde el punto de vista de la planificación, se debe enfrentar el profesor. Si el profesor asume una posición constructivista del aprendizaje de los escolares, como, en principio, se espera que lo haga de acuerdo con la mayoría de las directivas curriculares, entonces él se enfrenta a lo que Simon y Tzur (2004, p. 92), citando a Ainley y Pratt (2002, p. 18) denominan la “paradoja de la planificación”. Esta paradoja señala que, si el profesor asume una posición constructivista con respecto al aprendizaje de los escolares, entonces él se enfrenta a una disyuntiva entre:

- ◆ su intención de lograr unos objetivos de aprendizaje y cubrir un contenido previamente establecidos; lo que implica diseñar tareas en las que el contenido matemático que se trabaja sea claro y los escolares puedan saber qué es lo que tienen que hacer, y
- ◆ su deseo de atender a, y sacar partido de las actuaciones de los escolares al abordar la tarea; lo que implica diseñar tareas que los induzcan a crear sus propias construcciones y que fomenten un ambiente de negociación en el aula, en el que exista una cierta ambigüedad sobre lo que hay que hacer, cómo se debe hacer y cómo se determina si lo que se hace es válido.

Analizaré en detalle las implicaciones de la “paradoja de la planificación” en los apartados 8 y 9. En este capítulo, también considero algunas de las cuestiones que mencioné en Gómez (2000) con relación al “modelo de los organizadores del currículo” propuesto por Rico et al. (1997a). En particular, presento una estructura conceptual que organiza y relaciona las nociones de la educación matemática que estos autores proponen. En este sentido, una parte importante del capítulo se basa en los trabajos que Rico ha desarrollado en este tema (ver, por ejemplo, Rico, 1995a, 1998a, 1998b, 1997e; Rico et al., 1997a). Este esfuerzo de sistematización también surge de la experiencia que he vivido al tener la oportunidad de compartir con Luis Rico la responsabilidad docente en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato durante tres años y de discutir con él, con José Luis Lupiáñez¹¹, María José González¹² y con otros colegas sobre la problemática de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. A continuación, describo brevemente algunas de las características de la noción de currículo, con el propósito de dar un marco conceptual al proceso de planificación del profesor. Después abordo la noción de significado en la educación matemática como

¹⁰ La expresión “análisis didáctico” es genérica. Yo utilizaré esta expresión con un significado concreto, relacionado con el proceso de planificación local, que me propongo describir en este capítulo. En la línea de investigación en la que se enmarca este trabajo, González (1998) utiliza esta expresión para referirse a un método de revisión de antecedentes en la investigación en didáctica de la matemática. Una búsqueda en Google en septiembre de 2005 con los términos “didactical analysis” y “análisis didáctico” produjo más de 9.300 resultados, siendo éste un indicativo de la necesidad de concretar el significado de esta expresión genérica. El uso de esta expresión en el contexto de la investigación en educación matemática en España se ha discutido recientemente (ver Gallardo y González, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Gómez, 2006a; González, 2006).

¹¹ Profesor ayudante de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada.

¹² Profesora Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Cantabria.

preámbulo a la descripción del análisis didáctico. Presento los cuatro análisis que lo componen: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Termino el capítulo con unas reflexiones sobre las contribuciones del análisis didáctico a la reflexión sobre la planificación en matemáticas.

1.1. Análisis Didáctico como Nivel del Currículo

En Rico (1997b) se estudian cuatro niveles de reflexión sobre el currículo. Para cada uno de estos niveles, es posible determinar unas componentes que corresponden a cada una de las dimensiones, como se muestra en la Tabla 1¹³.

		<i>Dimensiones del currículo</i>			
		1ª dimensión	2ª dimensión	3ª dimensión	4ª dimensión
		Cultural/ conceptual	Cognitiva o de desarrollo	Ética o formativa	Social
<i>Niveles</i>	Teleológico o de fines	Fines culturales	Fines formativos	Fines políticos	Fines sociales
	Disciplinas académicas	Epistemología e Historia de la Matemática	Teorías del aprendizaje	Pedagogía	Sociología
	Sistema educativo	Conocimiento	Alumno	Profesor	Aula
	Planificación para los profesores	Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
	Análisis didáctico	Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción	Análisis de actuación

Tabla 1. Componentes del currículo según los niveles y dimensiones (Rico, 1997b, p. 409)¹⁴

Los primeros dos niveles son teóricos. El primero considera las finalidades para la educación matemática. El segundo nivel considera las disciplinas que fundamentan la noción de currículo y que aportan la información necesaria para el estudio del currículo de matemáticas. El tercer nivel representa la reflexión curricular cuando el ámbito de actuación es la institución educativa y el encargado es la administración. El nivel de planificación para los profesores representa la versión más conocida del currículo. Es el esquema con el que tradicionalmente se describen los planes de formación a cargo de un profesor o grupo de profesores en el espacio de un aula. El análisis didáctico, que desarrollo en este capítulo y que insinúo en la última fila de la Tabla 1, se constituye en otro nivel del currículo, como procedimiento de planificación local de los profesores.

¹³ La tabla en Rico (1997b, p. 409) incluye los primeros cuatro niveles, cuyo orden he invertido para efectos de claridad en la introducción del análisis didáctico como último nivel.

1.2. Noción de Currículo y Trabajo del Profesor

La noción de currículo es una herramienta básica para el trabajo del profesor. Los documentos curriculares que sirven de guía y condicionan el trabajo del profesor están, en general, estructurados a partir de esta noción. En estos documentos, para cada asignatura se enumeran los contenidos y se describen los objetivos, la metodología y los esquemas de evaluación. En este sentido, la noción de currículo es un elemento central de la comunicación entre la administración educativa y el profesor. Para efectos de concretar su trabajo dentro los contextos educativos e institucionales, el profesor debe conocer y manejar adecuadamente esta noción (al menos al nivel denominado “planificación para los profesores” en la Tabla 1). Por lo tanto, esta noción debe formar parte fundamental de los planes de formación de profesores. No obstante, como se argumentó en el apartado anterior, este nivel del currículo no es necesariamente eficaz cuando el profesor aborda el problema de planificar unidades didácticas:

Necesitamos un nuevo nivel de reflexión curricular conectado con la programación y, por tanto, nuevas herramientas conceptuales con las que trabajar en este nivel y mediante las que abordar las tareas de diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas en el área de matemáticas. La caracterización operacional del currículo mediante objetivos, contenidos, metodología y evaluación, no es inadecuada, sólo lo es su empleo en tareas de diseño y planificación del trabajo para el aula, sin criterios de referencia. (Rico, 1997c, p. 42)

Por esta razón incorporo un nuevo nivel en la Tabla 1. En este nivel, el de la planificación local, las componentes de la noción de currículo incluyen las herramientas que le permitirán al profesor abordar la planificación de unidades didácticas para cada tema, teniendo en cuenta la especificidad del mismo. Con ellas, el profesor podrá concretar (y diferenciar) los objetivos, el contenido, la metodología y la evaluación de cada tema en su planificación. Al dar lugar a este nivel de concreción, la noción de currículo adquiere mayor potencia como herramienta de comunicación y crítica entre los profesores, la administración educativa y los materiales curriculares. El profesor puede dialogar con sus colegas más allá de la discusión tradicional sobre los contenidos; analizar, evaluar y seleccionar otras propuestas de planificación; y abordar los contenidos de los libros de texto de una manera sistemática.

1.3. Consideración Funcional de las Matemáticas Escolares

Este trabajo se enmarca dentro de una línea de investigación en el que se asume una *consideración funcional* de las matemáticas como modo de interpretar el currículo (Rico, Castro, Castro, Coriat y Segovia, 1997b, p. 284). Esta visión funcional y pragmática de las matemáticas escolares también se subraya en el proyecto de evaluación PISA 2003 de la OCDE. Rico (2005) al referirse a las variables que configuran la estrategia para seleccionar las tareas de evaluación en este estudio¹⁵, señala que (p. 17):

¹⁵ Contenido matemático al que se refieren los problemas, competencias para resolver los problemas y situaciones y contextos en los que se localizan los problemas.

Estas tres variables responden a un modelo funcional sobre el aprendizaje de las matemáticas, que postula unas tareas, unas herramientas conceptuales y un sujeto que, al tratar de abordar las tareas mediante las herramientas disponibles, moviliza y pone de manifiesto su competencia en la ejecución de los procesos correspondientes.

La consideración funcional del currículo de matemáticas afecta al modo en que se consideran los fines prioritarios que sustentan el currículo e impregna a las distintas componentes curriculares; también afecta al modo de entender los roles y las funciones de profesores y alumnos y al modo de interpretar el contenido de las matemáticas escolares. En particular, esta posición funcional con respecto al currículo me servirá de marco de referencia cuando, en el siguiente apartado, caracterice los significados de un concepto en las matemáticas escolares.

2. PLANIFICACIÓN, ESPECIFICIDAD DEL CONTENIDO Y PLURALIDAD DE SIGNIFICADOS DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

La noción de planificación que utilizaré en este capítulo va más allá de aquella que se expresa en un documento en el que se describe un plan. Me intereso por la planificación a nivel local. Ésta es una actividad que el profesor no está, en general, obligado a compartir o justificar formalmente. Por lo tanto, en la mayoría de las ocasiones el profesor no produce un documento para su planificación local y, si lo produce, éste sólo contiene un esquema no necesariamente articulado de la lección. Me refiero, más bien, a lo que Schoenfeld (2000a, p. 250), citando a Morine-Dersheimer (1979), denomina *imagen de una lección*:

La imagen de una lección de un profesor incluye todo lo que el profesor se imagina que puede suceder en la lección —la secuencia del día, las formas de interacción con los estudiantes, qué es flexible y qué no lo es (e.g., “comenzaré recogiendo las tareas del día anterior, y, en ese momento, atenderé, durante diez minutos, a todas las preguntas que quieran hacer”), y su sensación de cómo se puede desarrollar la discusión. En situaciones normales, la mayor parte de la imagen de la lección del profesor no está articulada... (p. 250)

La planificación es una de las actividades más importantes en el trabajo del profesor (Ball, 2003, p. 3; Van Der Valk y Broekman, 1999) y es una de sus competencias (Kilpatrick et al., 2001, p. 380; Recio, 2004). Pero, como señalé en el apartado anterior, el profesor debe abordar diferentes tipos de planificación. Cuando la planificación es local, el foco de atención del profesor es un tema (concepto o estructura matemática) matemático específico. La especificidad del contenido matemático es una variable central en la actividad diaria del profesor (Timmerman, 2003, p. 155). En este nivel, la planificación del profesor debe tener en cuenta la complejidad del contenido matemático desde diversos puntos de vista: “cuando las matemáticas se enseñan desde una perspectiva pluralista, entonces se pueden ver desde múltiples perspectivas —perspectivas que motivan a los profesores a

considerar no solamente los diferentes significados de las matemáticas, sino también su diversidad en su enseñanza” (Cooney, 2004, p. 511). De hecho, *la negociación y construcción de esta multiplicidad de significados debe ser uno de los propósitos centrales de la interacción en el aula*. Ésta es la posición que, desde comienzos de la década de los noventa, Rico y sus colaboradores han propuesto como aproximación a la planificación de unidades didácticas en España (Rico, 1992; Rico, 1995a, 1998a, 1998b, 1997e; Rico et al., 1997a). Esta propuesta se centra en la idea de que la planificación de una unidad didáctica o de una hora de clase se debe fundamentar en la exploración y estructuración de los diversos significados de la estructura matemática objeto de esa planificación. Los “organizadores del currículo” propuestos por Rico (1997a, p. 44) son herramientas conceptuales y metodológicas que le permiten al profesor recabar, organizar y seleccionar información sobre estos múltiples significados¹⁶. Para efectos de abordar la descripción del análisis didáctico y su relación con los organizadores del currículo, considero a continuación la interpretación que hacemos de la noción de significado en educación matemática.

3. SIGNIFICADO Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La extensión y profundidad de los significados que construyen los escolares en el aula (y, por consiguiente, la calidad de su aprendizaje) se realiza atendiendo a los distintos modos de expresión y de uso con que se manejen los conceptos, a la capacidad para conectar diversas estructuras y utilizar diferentes procedimientos, a la diversidad de los problemas que pueden interpretarse, abordarse y resolverse, en definitiva, considerando la riqueza de conexiones —de significados— que se establecen para un determinado concepto o conjunto de conceptos matemáticos. En otras palabras, parte relevante del aprendizaje matemático de los escolares se lleva a cabo en el aula, cuando ellos negocian y construyen significados con motivo de las actividades propuestas por el profesor (Biehler, 2005, pp. 61-62; Bromme y Steinbring, 1994, p. 218). ¿Cuáles son los significados de un concepto matemático que pueden ser objeto de la interacción en el aula? ¿Cuáles son los significados que se considera relevante desarrollar? En este apartado, abordo estas preguntas y asumo una posición con respecto a ellas. Mi propósito es mostrar la utilidad de abordar la noción de significado en las matemáticas escolares desde una perspectiva amplia que vaya más allá del significado simbólico con el que tradicionalmente se identifican las matemáticas académicas o disciplinares¹⁷. Desde esta perspectiva, postulo que, en el ámbito escolar, un concepto matemático puede ser estudiado desde una variedad de significados. En este apartado, intro-

¹⁶ Se puede considerar a Wittmann (1984) como un precursor de la idea de organizador del currículo. Él introdujo la noción de “unidad de enseñanza”, compuesta por objetivos, materiales, problemas matemáticos y trasfondo matemático y psicológico (p. 30). “Las unidades de enseñanza permiten organizar el conocimiento didáctico de manera eficaz para la enseñanza” (p. 33).

¹⁷ Con “matemáticas académicas”, me refiero a las matemáticas que se enseñan y aprenden en las licenciaturas de matemáticas. Por su lado, las “matemáticas disciplinares” aluden a la actividad de los matemáticos profesionales y las “matemáticas aplicadas” al uso de las matemáticas en actividades profesionales o disciplinas científicas. Finalmente, las “matemáticas escolares” se refieren a las matemáticas cuando se consideran con la finalidad de ser enseñadas y aprendidas en la escuela.

duzco una selección de estos significados que desarrollaré en el resto de este capítulo.

3.1. Noción de Significado¹⁸

Los lingüistas consideran el lenguaje organizado mediante términos y conceptos y estructurado en oraciones. La filosofía analítica, el positivismo lógico y otros filósofos que se han ocupado del lenguaje han prestado atención especial al significado lingüístico de términos y sentencias, de oraciones, conceptos y relaciones, es decir, al modo en que el lenguaje se relaciona con la realidad. Lugar destacado ocupa el estudio de las condiciones que establecen la veracidad o falsedad de las oraciones en cuestión, que en filosofía, se plantea desde Sócrates.

En filosofía del lenguaje, el significado de una palabra la relaciona *externamente* con el mundo e *internamente* con otras palabras. Una teoría semántica trata de explicar esta doble conexión externa e interna de palabras y conceptos, categorizar las expresiones del lenguaje y describir las condiciones para la veracidad de las oraciones (Honderich, 2001, p. 609).

El lenguaje consta de palabras, que se ordenan en secuencias o sentencias. Con las palabras expresamos nuestras ideas y pretendemos comunicar con los otros. A causa de nuestras convenciones, las palabras se refieren a cosas o tienen significados. Una sentencia completa expresa una proposición, que puede ser verdadera o falsa. La verdad o falsedad de una sentencia dependerá de que el mundo satisfaga alguna condición, conocida como la condición-de-verdad de la sentencia.

3.2. Noción de Significado en Frege

Frege establece la diferencia entre signo y significado y, dentro del significado de un término, distingue entre sentido y referencia. Esta distinción la enuncia, en primer lugar, para los términos o nombres propios y la extiende, posteriormente, a enunciados, proposiciones y conceptos. Con las nociones de sentido y referencia Frege marcó los fundamentos de la moderna teoría semántica hace más de un siglo. La primera precisión la establece para los nombres propios u objetos (Frege, 1998c, § 27):

Es natural entonces que a un signo (nombre, unión de palabras, signo escrito), además de lo designado, que podría llamarse la referencia del signo, va unido lo que yo quisiera llamar el sentido del signo, en el cual se halla contenido el modo de darse... Un nombre propio expresa su sentido, se refiere a su referencia o la designa. Con un signo expresamos su sentido y designamos su referencia.

Así pues, Frege establece un primer triángulo semántico *Signo-Sentido-Referencia*, para los objetos (Ver Figura 1), en el cual por nombre o signo entiendo cualquier designación que represente un nombre propio, cuya referencia sea un objeto determinado, pero no un concepto o una relación. Actualiza así toda una

¹⁸ Debo a Luis Rico la aclaración de que, para efectos del análisis de contenido —que describiré más adelante—, no es necesaria una aproximación social a la noción de significado. Basta con una extensión de las ideas originales de Frege. Por esta razón, en estas secciones utilizo la primera persona del plural en la redacción.

tradición, que inicia Aristóteles, según la cual *las palabras son los signos de las ideas y las ideas son los signos de las cosas*.

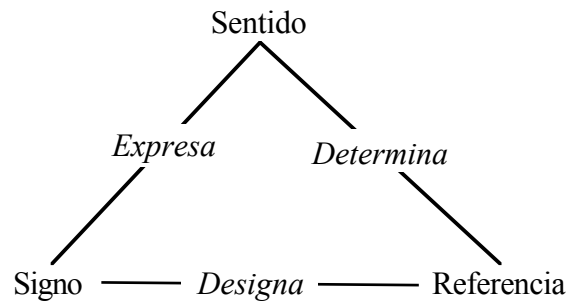


Figura 1. Triángulo semántico (término)¹⁹

Con posterioridad, Frege extiende la distinción semántica entre sentido y referencia a los enunciados o proposiciones. Comienza por afirmar que un enunciado completo contiene un pensamiento, es decir, es una frase con contenido objetivo, apto para ser propiedad común de muchos, y sostiene que el pensamiento que expresa un enunciado es su sentido, no su referencia. Puesto que la búsqueda de la verdad es lo que incita a avanzar del sentido a la referencia, y de acuerdo con su preocupación por el fundamento lógico, argumenta y establece que la referencia de un enunciado es su veracidad o falsedad y su sentido es el pensamiento que expresa (§ 34):

La búsqueda de la verdad es la que incita a avanzar del sentido a la referencia. El valor veritativo de un enunciado es su referencia... Cada enunciado asertivo, en el que tenga importancia la referencia de las palabras, debe ser considerado, pues, como un nombre propio, y su referencia, caso de que exista, es o bien lo verdadero o bien lo falso.

La referencia, lo que marca la objetividad para un enunciado, es su veracidad. Establecida esta importante distinción, Frege extiende el triángulo semántico a todo *término conceptual*, ya que en la ciencia interesa la pregunta por la verdad y, por ello, es necesario asociar una referencia a los términos conceptuales. Al igual que la referencia de un nombre propio es el objeto que designa, un término conceptual *se refiere a un concepto*, si se emplea del modo conveniente en lógica.

Frege establece la referencia de los términos conceptuales en el propio concepto, que suele venir dado por su extensión, es decir, por los objetos que caen bajo el concepto ya que son éstos los que le proporcionan valor veritativo; igualmente, establece el sentido del concepto en su contenido o intensión (comprensión, en sentido conjuntista) (Frege, 1998a, § 133):

Aquello a lo que se refieren dos términos conceptuales es lo mismo si y sólo si las extensiones de concepto correspondientes coinciden. La extensión de los conceptos es preferible a su contenido (intensión) ya que lo esencial para la lógica es la referencia de los términos y no su sentido... Para cada objeto debe poderse determinar si cae bajo un concepto

¹⁹ Frege no dio ningún nombre para la relación entre sentido y referencia. Nosotros la denominamos “determina” siguiendo a Oldager (2004, p. 21).

o no; un término conceptual que no satisfaga este requisito carece de referencia.

Así pues, Frege establece las nociones de sentido y referencia para un término conceptual; de estas nociones afirma: “*El término conceptual debe tener un sentido y, para su uso científico, una referencia*” (§ 135). Extiende así a los conceptos el triángulo semántico.

En la noción de Frege para significado de un término conceptual, el triángulo semántico viene dado por el *signo* o *término* con el que se expresa, por su *referencia* o concepto propiamente tal, y por su *sentido* o *modo en que vienen dados los objetos que caen bajo el concepto*.

Frege utiliza frecuentemente las matemáticas como ejemplo para sus definiciones y nociones teóricas. Por ejemplo, cuando caracteriza el baricentro como la intersección de las medianas a y b de un triángulo, y luego como intersección de las medianas b y c , dice que se trata de *dos sentidos distintos para una misma referencia*, ya que se trata de dos modos de darse lo designado con el término *baricentro* (Frege, 1998c, § 26).

También distingue el signo “7”, los sentidos “ $2 + 5$ ” y “ $3 + 4$ ” y la referencia o “concepto de número siete” (Frege, 1998b, § 3). Para entender la idea de concepto de un número adopta la visión: “Uno es cardinal $\{\emptyset\}$ ”, “Uno” es el término; su referencia es el *concepto de uno*. Pero hay distintos sentidos para este término:

- ◆ S_1 : menor número natural
- ◆ S_2 : divisor de cualquier número
- ◆ S_3 : mitad de dos, etc.

Estos distintos sentidos son modos de referirse al “concepto de uno”. Frege establece que el significado de un término conceptual, para una proposición y un uso determinados, viene dado por la conexión entre el término, su referencia o concepto y el sentido en que se usa.

3.3. Tres Dimensiones del Significado de un Concepto en las Matemáticas Escolares

El triángulo semántico propuesto por Frege identifica los elementos constitutivos del significado de un término conceptual desde una perspectiva estrictamente lógica y formal. Dado que nuestro interés por el significado de los conceptos matemáticos está centrado en el ámbito de la matemática escolar, adaptamos las ideas de Frege para considerar un sistema de relaciones más amplio.

Nuestra propuesta interpreta las ideas de Frege al enfatizar el hecho de que los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático implican, por un lado, los modos en los que se establecen relaciones con otros términos conceptuales matemáticos, y, por el otro, las diferentes formas en las que el término conceptual y estas relaciones se pueden representar. Adicionalmente, y siendo coherentes con nuestra posición con respecto al currículo de matemáticas, adoptamos un punto de vista funcional, en virtud del cual el sentido en el que se usa un término conceptual matemático también incluye los fenómenos que sustentan el concepto. En la matemática escolar, los fenómenos se presentan mediante un contexto o situación en que el concepto toma sentido, o también mediante un problema que se aborda y da sentido al concepto.

Nuestra posición atiende a algunas de las ideas de Steinbring (1997, pp. 51-52) y su propuesta de “triángulo epistemológico”, en el sentido de admitir “la creencia de que los dominios de aplicación (el uso de un concepto dentro y fuera de las matemáticas) son constitutivos de lo que podemos llamar el significado del concepto” (Biehler, 2005, p. 69).

En definitiva, nuestra propuesta aborda el significado de un concepto matemático atendiendo a tres dimensiones que denominamos sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología (Ver Figura 2):

- ◆ En los *sistemas de representación* incluimos las diferentes maneras en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos.
- ◆ En la *estructura conceptual* incluimos las relaciones del concepto con otros conceptos, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura.
- ◆ En la *fenomenología* incluimos aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto.

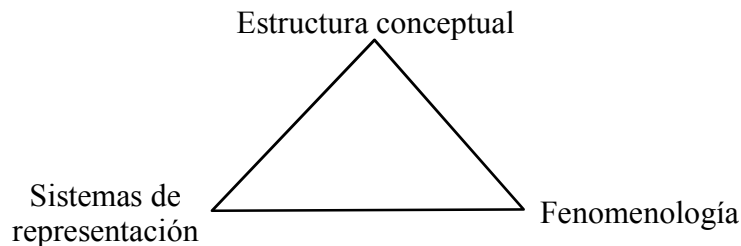


Figura 2. Las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar

Analizaré y describiré en detalle cada una de estas dimensiones más adelante (apartado 7 de este capítulo).

3.4. Significado de un Concepto Matemático y Planificación de Clase

Las tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar que hemos propuesto en el apartado anterior ponen en evidencia una de las cuestiones centrales de la problemática de la planificación de clase: *la multiplicidad de significados de un concepto en las matemáticas escolares*. Un concepto matemático tiene una multiplicidad de significados porque:

- ◆ su estructura conceptual es compleja, dando lugar a una pluralidad de relaciones con otros conceptos matemáticos;
- ◆ hay una diversidad de modos en los que el concepto y sus relaciones con otros conceptos se pueden representar; y
- ◆ hay una variedad de fenómenos que le dan sentido.

Esta multiplicidad de significados de un concepto matemático implica que, para efectos de planificar una hora de clase o una unidad didáctica, el profesor debe:

1. recabar la información necesaria que le permita identificar dichos significados;
2. organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación; y
3. seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción.

En los primeros dos pasos, el profesor debe asegurarse de la completitud y coherencia de la información recogida: por un lado, esta información debe incluir todos los significados que puedan ser relevantes para la reflexión sobre y la realización de la planificación y, por el otro, debe ser válida con respecto al conocimiento matemático establecido para las estructuras matemáticas involucradas. Mostraré más adelante (apartado 7 de este capítulo) que la información que resulta de los dos primeros pasos puede llegar a ser excesiva para los propósitos de la planificación de la instrucción. Por esta razón es necesario que se realice el tercer paso: *la selección de los significados de referencia*²⁰.

Este proceso de selección de significados está condicionado por diversos factores. En primer lugar, la programación de comienzo de curso determina lo que denominaré el *contenido propuesto*²¹ que establece una primera delimitación de los significados de un concepto dado que se consideran relevantes a nivel institucional. En segundo lugar, a lo largo del desarrollo de la asignatura y a la hora de planificar una hora de clase o una unidad didáctica, el profesor debe realizar un segundo proceso de selección. En este momento, el profesor debe seleccionar los *significados de referencia* que, de hecho, serán objeto de la instrucción y, por lo tanto, la base para la determinación de los objetivos de aprendizaje correspondientes. Esta selección de significados deberá ser coherente con el contenido propuesto, y, además, deberá atender al desarrollo mismo de la asignatura hasta ese momento. En este sentido, el profesor, al seleccionar los significados de referencia, deberá tener en cuenta su percepción sobre las capacidades que los escolares ya han desarrollado y su previsión sobre cómo los escolares pueden desarrollar las capacidades involucradas en los objetivos de aprendizaje al abordar las tareas objeto de la instrucción. En otras palabras, en el contexto concreto de la planificación de una hora de clase o una unidad didáctica, la identificación y selección de los significados que serán objeto de dicha planificación y la determinación de los objetivos de aprendizaje que se basen en ellos, debe ser consecuencia de cuatro análisis que describiré en detalle más adelante en este capítulo:

1. el *análisis de contenido*, como el procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto;
2. el *análisis cognitivo*, en el que el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje;
3. el *análisis de instrucción*, en el que el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción; y

²⁰ Denomino a estos significados *de referencia*, para diferenciarlos de los significados que, en la interacción en el aula, los escolares negocian y construyen con motivo de las actividades propuestas por el profesor. De esta manera, distingo, pero también relaciono, dos problemáticas: el proceso de selección de los significados de referencia y el proceso de aprendizaje de los escolares. Profundizaré en este último en el capítulo 4.

²¹ Daré un significado concreto a la noción de contenido propuesto en el apartado 7.

4. el *análisis de actuación*, en el que el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.

Denomino *análisis didáctico* al procedimiento compuesto por estos cuatro análisis y en virtud del cual el profesor puede diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. Como ya lo argumenté antes y las reflexiones anteriores sustentan, el análisis didáctico, como procedimiento de planificación local, es un nivel del currículo y se organiza de acuerdo con las dimensiones del mismo (Ver Figura 3).

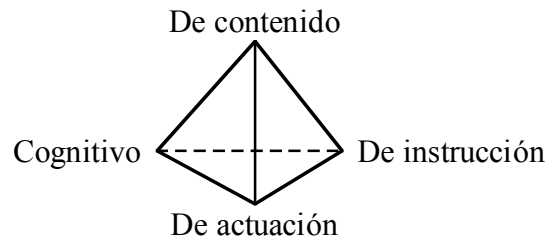


Figura 3. Análisis que componen el análisis didáctico

En este apartado he querido enfatizar varias cuestiones:

- ◆ el papel central de la noción de significado de un concepto matemático en el contexto de las matemáticas escolares y, en particular, en el proceso de planificación de clase²²;
- ◆ la multiplicidad de significados de un concepto matemático;
- ◆ la necesidad de que el profesor identifique y organice esa multiplicidad de significados; y
- ◆ la importancia de que el profesor, teniendo en cuenta el contexto en el que tiene lugar la instrucción, seleccione los significados que considera relevantes para la planificación de clase.

Pero, ¿cómo puede el profesor identificar, organizar y seleccionar los significados relevantes de un concepto matemático para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas? Él necesita herramientas conceptuales y metodológicas que le permitan realizar los cuatro análisis que componen el análisis didáctico. Rico, quien ha sugerido en diversas ocasiones la importancia de la multiplicidad de significados de un concepto matemático²³, ha acuñado el término organizadores del currículo para referirse a estas herramientas. Estas son las herramientas con las que el profesor puede, en primer lugar, en el análisis de contenido, identificar, organizar y explicitar los diversos significados de un concepto matemático y, en segundo lugar, con motivo de los análisis cognitivo, de instrucción y de actuación, seleccionar los significados que considera relevantes para la instrucción y diseñar y evaluar las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la planificación de clase. Describiré en detalle estas herramientas a continuación en la presentación del análisis didáctico.

²² Ver Kilpatrick, Hoyles y Skovsmose (2005) para una reflexión reciente y variada sobre la problemática de la noción de significado en las matemáticas escolares.

²³ Ver por ejemplo, (Rico, 1992, Capítulo III, pp. 35-36; Rico, 1997c).

4. ANÁLISIS DIDÁCTICO: UN PROCEDIMIENTO PARA ORGANIZAR LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

En lo que sigue, describo un procedimiento, que denomino *análisis didáctico*, y que representa mi visión ideal de cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. El análisis didáctico se ubica en un nivel local del currículo (ver la Tabla 1). Mi preocupación se centra en el procedimiento en virtud del cual el profesor planifica, lleva a la práctica y evalúa una unidad didáctica, una hora de clase o una porción de una clase. Entiendo por unidad didáctica “una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos”²⁴ (Segovia y Rico, 2001 p. 87). Por lo tanto, el contenido matemático que es objeto de la instrucción es una estructura matemática específica o uno o más aspectos de una estructura matemática para la que hay unos objetivos de aprendizaje determinados. El periodo de tiempo en el que tiene lugar la instrucción es limitado y la especificidad del contenido permite profundizar en sus múltiples significados. Esta visión local de la enseñanza es similar a la adoptada por Simon (1995a), quien también se centra en las actividades que conciernen un periodo limitado de tiempo y un contenido matemático específico, y constituye una reflexión curricular diferente de aquella que corresponde a la planificación global para los profesores.

La descripción de un ciclo del análisis didáctico seguirá la secuencia propuesta en la Figura 4, a la que haré referencia permanentemente en lo que sigue.

²⁴ Más adelante haré un análisis sobre el uso del término “objetivos” en el procedimiento del análisis didáctico. Aquí destaco el hecho de que el profesor puede determinar unos objetivos *específicos* para una unidad didáctica o una hora de clase y que estos objetivos específicos, estando relacionados con los objetivos generales definidos en el diseño curricular global, se refieren a sus expectativas con respecto al aprendizaje de los escolares para la estructura matemática objeto de dicha unidad didáctica u hora de clase (Ver la discusión sobre las metas del profesor en el siguiente apartado).

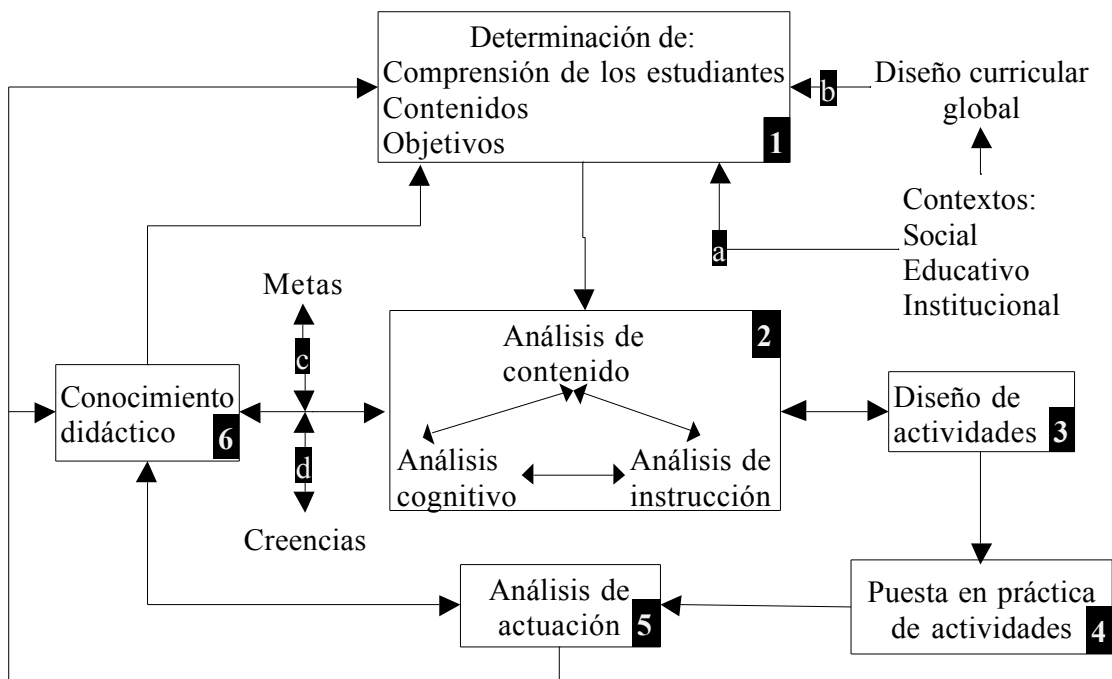


Figura 4. Ciclo de análisis didáctico

En los diferentes apartados de este capítulo describiré cada uno de los elementos y de las relaciones que se presentan en la Figura 4. Describiré los procedimientos y las herramientas conceptuales y metodológicas que el profesor debe poner en juego para realizar el análisis didáctico, y haré énfasis en las múltiples relaciones entre los análisis que lo componen y las herramientas que se ponen en juego. A continuación, hago una breve descripción del ciclo. El análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos generales de aprendizaje que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción (cuadro 1 de la Figura 4). A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende de y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis (cuadro 2). La selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje (relación entre cuadros 2 y 3). El profesor pone en práctica estas actividades (cuadro 4) y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los escolares para obtener información que sirve como punto de inicio de un nuevo ciclo (cuadro 5). El cono-

cimiento didáctico (cuadro 6) es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso²⁵.

Como ya lo insinué, el término “análisis didáctico” es una expresión genérica utilizada en muchos campos con diferentes significados. Por ejemplo, Freud (1981) lo utilizó cuando se refirió a la formación de psicoanalistas. En la didáctica de la matemática, varios autores utilizan el término con diferentes propósitos (e.g., Gallardo y González, 2006; Godino et al., 2006; Gómez, 2006a; González, 2006; Puig, 1997). Yo atiendo a la interpretación de Puig (1997), quien lo define de la siguiente manera: “el análisis didáctico de las matemáticas, esto es, el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos” (p. 61). En el contexto general de esta descripción, en este capítulo buscaré dar un significado concreto al término “análisis didáctico”.

Algunos autores han hecho propuestas que guardan cierta similitud con el análisis didáctico. Por ejemplo, Ball, Lubienski y Mewborn (2001), cuando se preguntan sobre lo que está matemáticamente involucrado en la actividad de enseñar matemáticas, sugieren una aproximación que

implica el análisis matemático de las actividades que están en el núcleo de la enseñanza de las matemáticas. Esas actividades incluyen cuestiones como la exploración de lo que los estudiantes saben; la evaluación, selección y modificación de libros de texto; la decisión acerca de diferentes posibilidades de acción; y la dirección de una discusión productiva (p. 453).

Estos autores señalan que el trabajo del profesor en el aula es matemático, más que simplemente pedagógico, porque:

implica el diseño y enunciado de una pregunta, la reacción a las preguntas de los escolares o la identificación de una incongruencia o una conexión. Que éste es un razonamiento matemático y no simplemente pedagógico es algo que resulta claro cuando se mira con cuidado (p. 453).

Las propuestas de Cooney (Cooney, 2004; Cooney y Wiegel, 2003) sobre el pluralismo en la enseñanza de las matemáticas, que mencioné más arriba, también presentan similitudes con el procedimiento que describiré más adelante.

Por otro lado y desde un punto de vista metodológico, si se observa que el análisis didáctico se inicia en la constatación de un estado inicial y pasa por una planificación, con base en la cual tiene lugar una actuación (de profesores y escolares) que es observada y evaluada con el propósito de dar lugar al inicio de un nuevo ciclo, entonces es posible relacionar este procedimiento con los pasos propuestos en la investigación-acción: planificación, acción, observación y reflexión (Kemmis y McTaggart, 1988). Shulman (1987) detalla más estos pasos, desde la perspectiva del profesor, en su modelo de razonamiento y acción pedagógicos. En este modelo, él sugiere las fases de comprensión, transformación, instrucción, evaluación, reflexión y nueva comprensión (p. 15). De la misma manera, el modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas de Simon (1995a, 1997), partiendo de una visión constructivista del aprendizaje, sugiere un procedimiento similar, en

²⁵ Describiré en detalle la noción de conocimiento didáctico en el capítulo 3.

el que se determina un objetivo de aprendizaje, se realiza un plan de actividades, se formulan hipótesis sobre el proceso de aprendizaje, se ponen en práctica las actividades y se evalúa el conocimiento de los escolares. Con la descripción detallada del análisis didáctico que haré en este capítulo busco dotar de un significado específico, desde la perspectiva de las matemáticas escolares, a este esquema cíclico que ya ha sido sugerido de diferentes maneras en la literatura.

La realización de un ciclo del análisis didáctico se encuentra condicionada por las creencias y las metas del profesor y por los contextos social, educativo e institucional (relaciones a, b, c y d de la Figura 4). Inicio la descripción del ciclo con una reflexión sobre estas condiciones para después describir las diferentes fases y análisis que se proponen en la Figura 4.

5. CREENCIAS, METAS Y CONTEXTOS

Las metas y las creencias del profesor, por un lado, y los contextos institucional, educativo y social, por el otro, condicionan la práctica docente. En este apartado, hago algunas consideraciones sobre el papel del contexto y de las metas y las creencias del profesor en sus decisiones y actuaciones, como factores que influyen en y condicionan la manera como él aborda el análisis didáctico de una estructura matemática. También me referiré a la relación entre las características de la microcultura del aula y el proceso de planificación de la instrucción.

Schoenfeld (2000a), en su propuesta para construir un modelo del profesor de matemáticas, describe de la siguiente manera la relación entre las creencias, las metas, el conocimiento del profesor y su práctica docente:

Postulamos que, sea el profesor consciente o no de sus creencias, metas y conocimiento, estos son factores claves en el proceso de toma de decisiones y tal proceso toma en cuenta esos factores... El modelo de un profesor particular contendrá representaciones de metas, creencias y conocimiento atribuidos a ese profesor y un mecanismo de toma de decisiones que sugiere cómo, en unas circunstancias dadas, esas metas, creencias y conocimiento configuran la decisión del profesor con respecto a qué hacer “después”. (pp. 248-249)

Las metas son aquellos propósitos que el profesor se propone alcanzar. Las metas pueden ser globales con respecto a los estudiantes en periodos largos de tiempo, en las lecciones, en partes particulares de la lección y locales a una interacción particular. Pueden estar orientadas social o epistemológicamente (con respecto al contenido). Pueden estar predeterminadas o pueden ser emergentes. Usualmente hay varias metas operativas en un momento dado (p. 250). “Las creencias del profesor (sobre los estudiantes, el aprendizaje, la enseñanza, las matemáticas...) configuran lo que el profesor ve como creíble, posible o deseable. Por lo tanto, las creencias configuran la selección de metas y planes de acción” (p. 253).

Existe un cuerpo importante de literatura sobre las creencias del profesor de matemáticas y sobre el papel que estas creencias pueden tener en su actuación en el aula (e.g., Cooney y Wilson, 1993; Frykholm, 1999; Thompson, 1984, 1992; Wilson, 1994). “Las creencias son la base de un ‘mapa conceptual’ que guía las decisiones de instrucción que realiza el profesor” (Magnusson, Krajcik y Borko,

1999, p. 122). Cooney, Shealy, y Arvold (1998) hacen un análisis detallado de la estructura de las creencias de los profesores de matemáticas y las conceptualizan a partir de la noción de autoridad. Gil y Rico (2002) y Flores (Flores, 1998) describen y caracterizan las concepciones y creencias que, sobre la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación, mantienen los profesores de matemáticas andaluces. Ball (1991, p. 1) encontró que el conocimiento de los profesores sobre el contenido interactúa con sus supuestos y creencias explícitos sobre la enseñanza y el aprendizaje, sobre los estudiantes y sobre el contexto. Estos supuestos y creencias configuran las maneras como ellos enseñan matemáticas a los escolares:

como sucede en las demás áreas, las creencias configuran la percepción que el individuo tiene de su experiencia. Ellas configuran las metas que el profesor se impone para la interacción en el aula, las opciones que el profesor cree que están disponibles para lograr esas metas, y la manera en que estos recursos (en este caso, diferentes tipos de enseñanza y de contenido matemático, rutinas de clase, etc.) se pueden emplear. (Schoenfeld, 2000a, p. 248)

En este documento, me intereso concretamente en las creencias del profesor sobre las matemáticas (disciplinares, académicas y escolares), y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. El profesor puede y debe tener un conocimiento sobre las diferentes posturas que es posible asumir en estos temas y asume consciente o inconscientemente una de ellas. Su posición sobre estas cuestiones afecta y condiciona la manera como él aborda las diferentes fases del ciclo del análisis didáctico.

Pero, las creencias del profesor son solamente uno de los factores que determinan su actuación (Lerman, 2001):

las creencias de los profesores dependen del contexto: de la situación en la que se recoge la información; de la relación con la entrevista y el entrevistador; de la localización del aula, laboratorio y otro lugar; del grupo particular de estudiantes; y así sucesivamente. Las creencias de los profesores se relacionan con su práctica y con las creencias sobre la práctica, pero no se pueden identificar una con otra. (p. 37)

Lerman (2001) mantiene que, teorías como el constructivismo, con su énfasis en la abstracción reflexiva y la construcción de las estructuras cognitivas, no pueden aplicarse al aprendizaje de los futuros profesores y que los estudios sobre creencias son demasiado estáticos y mentalistas para describir las relaciones entre la teoría y la práctica. Él sugiere que las teorías que tienen en cuenta la complejidad de las prácticas sociales son más apropiadas para el estudio de la formación de profesores (pp. 48-49). Por lo tanto, al reflexionar sobre la actuación del profesor, debemos también tener presentes los contextos en los que se realiza esa práctica.

El contexto social, educativo e institucional también condiciona la instrucción. Este contexto determina las normas y valores que rigen social e institucionalmente y determina aquello que se valora como deseable en el proceso educativo (Eisenhart, Borko, Underhill, Brown, Jones y Agard, 1993, pp. 28-29). De esta manera, el contexto restringe las opciones que el profesor tiene disponibles para realizar su práctica docente (Carlsen, 2001, p. 140). Por ejemplo, los estándares

nacionales o internacionales pueden influir en la reflexión y delimitación de las normas legales. Estas normas pueden determinar unas finalidades de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, mientras que el proyecto educativo del centro puede promover modelos de evaluación particulares. Adicionalmente, el profesor debe tener en cuenta los intereses, conocimientos y capacidades de sus estudiantes y reconocer las diferencias entre ellos (Adler, 2003). Estos y otros factores forman parte del contexto social, educativo e institucional que conforma el marco en el que el profesor realiza su trabajo²⁶. Freitas (2004), haciendo referencia a Apple (1999), señala que documentos curriculares como los del NCTM no abordan las realidades institucionales de la escuela. Por lo tanto, los esfuerzos en formación de profesores se estrellarán con la realidad diaria de los profesores si “no tienen en cuenta las fuerzas estructurales que establecen y mantienen dinámicas específicas de poder institucional” (p. 259).

Por otro lado, el contexto del aula es el entorno estructurado dentro del cual tiene lugar la construcción del conocimiento matemático por parte de los escolares. Este contexto es el espacio en el que se puede constituir y desarrollar una comunidad de práctica (Graven y Lerman, 2003). Este contexto se negocia y se conforma conjuntamente entre profesor y estudiantes y, por consiguiente, no restringe, *a priori*, la instrucción. No obstante, ese proceso de negociación construye paulatinamente un conjunto de normas sociales y socio-matemáticas que caracterizan la micro-cultura del aula y que el profesor debe tener en cuenta a la hora de abordar la instrucción (Yackel y Cobb, 1996).

6. INICIO DEL CICLO

En este apartado, describo el comienzo de un ciclo del análisis didáctico a partir de las condiciones iniciales que acabo de formular. Me refiero al cuadro identificado con el número 1 (en la Figura 4). En los apartados siguientes examinaré sucesivamente cada uno de los cuadros en el orden en el que aparecen en el esquema.

El carácter local del análisis didáctico implica que éste se realiza en una asignatura que se encuentra en marcha y que tiene definidos, en su diseño curricular global, unos objetivos y unos contenidos. Debemos entonces imaginar que, como profesores, acabamos de terminar el tratamiento de un tema (e.g., la función lineal) y vamos a comenzar un nuevo tema (e.g., la función cuadrática), tal y como se indica en el diseño curricular global de la asignatura. El ciclo se inicia con la determinación, por parte del profesor, de la comprensión que los estudiantes tienen en ese momento sobre las bases o nociones necesarias para abordar el nuevo tema, de los contenidos que se pretenden tratar y de los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr. Es decir, el profesor debe determinar, desde la perspectiva del aprendizaje de los escolares, el punto inicial (lo que los escolares ya saben antes de comenzar el ciclo) y el punto final (lo que el profesor espera que los escolares sepan después de la instrucción).

²⁶ Analizaré con más detalle estos factores en el siguiente apartado, cuando considere los diferentes significados de la noción de “contenido” en las matemáticas escolares.

El diseño curricular global delimita inicialmente los objetivos de aprendizaje y los contenidos. Pero, la determinación de los objetivos de aprendizaje específicos que se deben buscar y de los contenidos matemáticos particulares que se deben tratar también depende del resultado del ciclo anterior del análisis didáctico. Por ejemplo, si en el ciclo anterior se trabajó la función lineal, entonces los escolares habrán desarrollado conocimientos y habrán mejorado ciertas capacidades (y contribuido al desarrollo de algunas competencias) que son relevantes para el estudio de la función cuadrática. El análisis de actuación (cuadro 5 de la Figura 4) proporciona al profesor información sobre las actuaciones y producciones de los escolares al final del ciclo anterior²⁷. Con esta información, y basado en su experiencia y en su conocimiento de la literatura, el profesor debe hacer una descripción de la comprensión de sus estudiantes sobre la estructura matemática en cuestión. En esta descripción, el profesor deberá establecer en qué medida, y con motivo de las tareas propuestas, se lograron los objetivos de aprendizaje del ciclo anterior, al identificar qué capacidades se pusieron en juego y, en su caso, en qué medida estas capacidades contribuyeron a las competencias que consideraba pertinentes.

Describiré con mayor detalle este procedimiento cuando considere, más adelante, los análisis cognitivo, de instrucción y de actuación. Esta información sobre logros y carencias cognitivos es central para adaptar y revisar con suficiente especificidad los objetivos de aprendizaje y los contenidos de la unidad didáctica o de la hora de clase que se pretende planificar. La manera como el profesor recoja, analice, organice, seleccione e interprete esta información dependerá de sus conocimientos y sus creencias y estará condicionada por los contextos (cultural, social, institucional y del aula) en los que realiza su labor. Como resultado de esta etapa inicial del análisis didáctico el profesor puede seleccionar los significados de referencia del concepto matemático objeto de la instrucción y delimitar los objetivos de aprendizaje que desea lograr con respecto a dicho concepto. Por ejemplo, el profesor puede decidir que centrará su atención en las relaciones entre los sistemas de representación simbólico y gráfico de la función cuadrática y que buscará desarrollar en sus alumnos las capacidades necesarias para resolver problemas que involucran el significado gráfico de los parámetros de las diferentes formas simbólicas de esa función. La siguiente etapa del análisis didáctico es el *análisis de contenido*, que describo a continuación (cuadro 2 de la Figura 4).

7. ANÁLISIS DE CONTENIDO

En este apartado, describo el análisis de contenido. Éste es el primero de los análisis que componen el análisis didáctico. En la primera sección, identifico y describo los diferentes usos del término “contenido” en las matemáticas escolares. En la segunda, establezco los propósitos del análisis de contenido. Y, en las tres secciones siguientes, caracterizo el análisis de contenido como la exploración de las tres dimensiones del significado de un concepto matemático que introduce en el apartado 3 de este capítulo: los signos o sistemas de representación que se utilizan, la referencia formal, dada por la *estructura conceptual* y el sentido con que se traba-

²⁷ Describiré el análisis de actuación en el apartado 10 de este capítulo.

jan los diversos conceptos o *fenomenología*. En estas tres secciones también describo y ejemplifico las herramientas —organizadores del currículo— que le permiten al profesor recabar, organizar, y seleccionar los significados de referencia que serán objeto de la instrucción.

7.1. Usos del Término “Contenido” en las Matemáticas Escolares²⁸

La noción de contenido es una noción curricular y se utiliza con distintos niveles de precisión y distintos sentidos, que conviene diferenciar y describir. En primer lugar, tenemos, como responsabilidad de la administración educativa, el *Currículo Oficial* que marca el contenido básico o programa oficialmente establecido por gobiernos u organismos responsables. El *programa* es un documento que incluye una descripción global escueta de temas y delimita unos bloques de contenidos; este documento técnico tiene carácter normativo, está integrado en la correspondiente propuesta curricular y su elaboración corresponde a la administración educativa. Para el caso de las matemáticas, sus funciones son enumerar las estructuras matemáticas que deben enseñarse y aprenderse, delimitar su extensión, establecer prioridades, secuenciar su desarrollo, enfatizar conexiones y destacar procedimientos. En definitiva, el programa marca los conceptos y procedimientos de referencia que constituyen la formación matemática básica de todos los ciudadanos de un país o comunidad, socialmente compartidos y cuyo dominio es objeto de evaluación institucional. Los contenidos del programa o *contenidos prescritos* se presentan en el currículo conectados con los objetivos, orientaciones metodológicas y criterios de evaluación

La cultura nacional o local y la comunidad de educadores matemáticos disponen de diversas interpretaciones y desarrollos del programa, bien por las propuestas realizadas por distintos grupos o escuelas, bien por el conocimiento acumulado a lo largo de la historia local de la enseñanza de las matemáticas, bien por el conocimiento experto adquirido mediante la innovación y la investigación, o bien por la comunicación establecida con otras comunidades. Cada una de estas aportaciones suele presentar una opción singular, una interpretación particular sobre unos contenidos pero, conjuntamente, muestran la globalidad del conocimiento establecido sobre un tópico matemático para unos niveles y unas edades determinadas. En la Tabla 1 presentamos los distintos niveles y dimensiones de nuestra noción de currículo. Sobre la dimensión Cultural/Conceptual señalamos que el Sistema Educativo gestiona conocimientos, y que dichos conocimientos se concretan en unos contenidos cuando pasamos al nivel de la planificación para los profesores. Al igual que hemos llamado *matemáticas escolares* a las matemáticas cuando se consideran con la finalidad de ser enseñadas y aprendidas, a los efectos que nos ocupan en este trabajo el conocimiento se refiere al *conocimiento matemático escolar* sobre un tema determinado. Este conocimiento es amplio y diversificado, abierto y, a veces, contradictorio; abarca multitud de facetas teóricas y prácticas, formales y aplicadas, e incluye multitud de referentes históricos, sociales, científicos y culturales sobre el tema. Incluye cualquier conocimiento que permita concretar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas del tema en el aula. Incluye, a su vez, una descripción particularizada de los distintos temas del

²⁸ En esta sección utilizo, de nuevo, la primera persona del plural dado que buena parte de ella contiene las ideas y la redacción de Luis Rico.

programa y presenta distintas organizaciones y desarrollos para cada uno de ellos. Estamos en el nivel general del Sistema Educativo. Este conocimiento no suele concretarse en un documento especializado, sino que abarca toda una literatura que comprende libros de texto, guías didácticas, documentos orientativos, informes de investigación, resultados de innovaciones, artículos y otros documentos redactados por profesores y expertos en educación matemática con influencia local; constituye el núcleo de la biblioteca del departamento de matemáticas de cada centro.

Sobre esta base, acuñamos la noción de *contenido matemático escolar* para referirnos a las posibilidades de interpretación que pueden darse para los contenidos del programa en términos del conocimiento matemático escolar. En particular, el contenido matemático escolar se sustenta sobre el conocimiento relativo a los significados de cada tema matemático del programa. El contenido matemático escolar expresa un marco general que se puede singularizar por temas; marca la experiencia adquirida por cada comunidad de educadores matemáticos, nacional o local. Se refiere al saber acumulado respecto a los significados de los temas del programa y establece un marco de referencia sobre el cual diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula. Estos contenidos son conocimientos necesarios para los profesores; no se contemplan como contenidos para el alumnado, sino como una amplia fuente de documentación e información para el trabajo del profesorado.

En comunidades educativas maduras y con tradición, la cantidad de información disponible para el profesorado puede ser abrumadora y desbordar sus posibilidades de manejo individual. Por ello es usual la elaboración de documentos de síntesis, que establecen un *canon*, ya que suponen una propuesta institucional redactada por equipos de prestigio y respaldada por sociedades profesionales de educadores matemáticos. Ejemplo de canon reconocido es el de los *Estándares Curriculares* del NCTM (Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003), con otro origen, el documento *Adding It Up* (Kilpatrick et al., 2001), y recientemente los *Puntos Focales del Currículo* (Beckman, Charles, Clements, Duckett, Lewandowski, Schielack et al., 2006). Estos documentos tienen por finalidad hacer una revisión amplia de los contenidos de las matemáticas escolares, marcar prioridades en los significados para la selección de temas y tareas, ofertar criterios teóricos para su organización y puesta en práctica, así como mostrar algunos ejemplos de aplicación de las ideas que lo orientan. Los diseños de unidades didácticas para temas específicos tratan de cubrir la misma finalidad.

Hay un tercer nivel en la determinación de los contenidos, que es aquel que ofrecen las programaciones realizadas por equipos de profesores de matemáticas y otros expertos educativos, o bien los libros de texto escolar, que van a servir para un nivel y cursos determinados. Concebimos así aquella parte de la documentación y material que elaboran los profesores o que, al menos, adoptan después de reflexionar sobre la planificación de la materia. Constituye el guión que preparan sobre los contenidos matemáticos, con el que explicitan el contenido que se pretende presentar a los alumnos, es decir, es el *contenido propuesto para la asignatura*. No se considera un documento de referencia, sino que es la expresión de los contenidos que van a presentarse a los alumnos, son los *contenidos que se propone enseñar*, y en ellos se ha tenido que hacer una selección para escoger una op-

ción prioritaria por unos significados concretos de los temas de la asignatura. Éste es el contenido del *diseño curricular global* al que hago referencia en la Figura 4 y forma parte del contexto institucional que condiciona la actividad docente del profesor al que me referí en el apartado 5 de este capítulo. En general, el seminario de matemáticas de cada institución se encarga, al comienzo de cada curso, de revisar y establecer este plan de formación para cada asignatura. La función del contenido propuesto para la asignatura consiste en determinar, en un contexto institucional, qué estructuras o conceptos matemáticos van a ser objeto de las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula y con cuáles significados concretos. Estamos en el nivel de planificación del profesor de la Tabla 1. En bastantes casos, los grupos de profesores aceptan las propuestas que hacen las editoriales, dejándose llevar por su intuición o por sus creencias, siempre que se ajusten de manera general al currículo prescrito por las administraciones educativas. Idealmente, este diseño curricular debería realizarse con suficiente detalle, de tal forma que sus propuestas tengan en cuenta la especificidad de cada uno de los temas correspondientes. En este caso, los grupos de profesores habrán tomado una serie de decisiones al seleccionar unos significados específicos para cada tema. No obstante, y como ya lo he argumentado, en muchas ocasiones el diseño curricular global se limita a sugerir unos esquemas de carácter general para los objetivos, la metodología y la evaluación y a enumerar ordenadamente las opciones que se han adoptado para los temas matemáticos que se deben considerar en la asignatura.

El cuarto nivel de la determinación de los contenidos tiene lugar cuando, a lo largo del desarrollo de la asignatura, el profesor debe abordar la planificación de una hora de clase o de una unidad didáctica para un tema o concepto matemático determinado. El profesor debe entonces tener en cuenta la especificidad de ese tema matemático (objeto de la unidad didáctica y que ha sido establecido en el contenido propuesto para la asignatura), las capacidades que sus estudiantes han desarrollado hasta ese momento y los condicionantes que surgen del contexto del aula, para reflexionar sobre el diseño de un plan de formación a nivel local. Éste es el nivel de planificación local que corresponde a la última fila de la Tabla 1. El *contenido propuesto para un tema o concepto matemático concreto* es el resultado del trabajo y de la reflexión que el profesor hace cuando, a partir de su conocimiento y creencias, identifica y organiza los múltiples significados de dicho tema, para efectos de seleccionar aquellos significados que considera relevantes para la instrucción. Éste es el propósito del análisis de contenido.

Las distinciones anteriores son necesarias para evitar la falacia de identificar el contenido prescrito con los contenidos propuestos. El contenido propuesto, en sus dos niveles (para una asignatura y para un concepto), es una opción singular de las múltiples que pueden concretar el contenido prescrito, y esta elección solamente se puede llevar a cabo mediante el análisis y discusión de los diversos significados de los conceptos que se manejan y su posterior delimitación. Implica, en principio, que el profesor tome decisiones al identificar y seleccionar los significados que considera relevantes para la instrucción. Sus opciones pasan por seguir las indicaciones generales establecidas en el diseño curricular global o los libros de texto, o por realizar una consideración detallada, evaluación y toma de decisiones basada en un trabajo sobre las matemáticas escolares, tarea a la que he llama-

do análisis de contenido. No hay un modo unívoco de dar significado a los contenidos prescritos; se necesita el análisis sobre el contenido matemático escolar, como parte del análisis didáctico, para optar por unos significados de referencia que lleven a un contenido propuesto concreto²⁹.

7.2. Propósitos del Análisis de Contenido

El proceso de determinar un contenido matemático escolar singular para un concepto o unidad didáctica es el eje central y el objeto del análisis de contenido. El proceso de análisis se lleva a cabo utilizando el conocimiento matemático escolar disponible sobre el tema en cuestión. La toma de decisiones tiene lugar cuando, a partir de las distintas opciones de contenido, se establecen criterios para seleccionar un modo singular, complejo y concreto de entender el significado del contenido matemático escolar en cuestión. Este proceso de análisis y toma de decisiones lo realizan los grupos de profesores (contenido propuesto para la asignatura) y cada profesor (contenido propuesto para un concepto) teniendo como referencia el contenido prescrito y atendiendo a las circunstancias específicas de la institución en la que tiene lugar la instrucción, a las características de la cultura del aula que se ha construido a lo largo de la asignatura y a los logros y carencias de los escolares que el profesor percibe a la hora de realizar la planificación. Estos son los contextos sociales, institucionales y de aula que, junto con el conocimiento y las creencias de los profesores, condicionan las opciones que ellos adoptan cuando seleccionan aquellos significados de un concepto que serán objeto de la planificación.

En este proceso de análisis de contenido de las matemáticas escolares el profesor puede utilizar unas herramientas conceptuales y metodológicas que describo en las secciones siguientes. Con estas herramientas, el profesor puede recabar y organizar los diferentes significados de un concepto matemático escolar en las tres dimensiones que propuse en el apartado anterior: sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología. La información sobre estos significados del concepto se caracteriza por no depender necesariamente de las circunstancias de la interacción en el aula. Estos son los significados propios del concepto matemático desde la perspectiva de las matemáticas escolares y en el marco del contenido prescrito. Por ejemplo, los fenómenos que involucran espejos parabólicos y su relación con la propiedad óptica de la parábola, o las diferentes formas simbólicas de la función cuadrática son elementos constitutivos del significado de este concepto que no dependen de si el profesor los conoce o no, si él los propone como parte de la interacción en clase o si los escolares pueden desarrollarlos con motivo de la interacción. Esto no quiere decir que *todos* los significados de un concepto matemático que un profesor llegue a identificar y organizar deban ser incluidos en el diseño y el desarrollo curricular de la unidad didáctica correspondiente. Él deberá hacer una selección e identificar, de acuerdo con las características del contexto del aula en el momento en que tendrá lugar la instrucción, los significados

²⁹ Para una reflexión alternativa sobre los diferentes usos del término contenido y su relación con los significados de un concepto matemático, ver “Meanings of Meaning” (2005). En ese mismo volumen, Biehler (2005, p. 62) se refiere a las “didactically reconstructed intended mathematics for schools”, como el resultado de un proceso con características similares al que he propuesto en este apartado.

que él considera relevantes (los significados de referencia), para delimitar el contenido matemático escolar de la unidad didáctica singular que quiere diseñar. El estudio de la diversidad de significados posibles que surgen mediante el análisis de contenido es garantía que la opción finalmente elegida para determinar el contenido matemático escolar del tema en cuestión se ha hecho con suficiente conocimiento y atendiendo a criterios explícitos. El diseño y posterior desarrollo de la unidad didáctica tienen su fundamento inicial en el análisis de contenido.

El *análisis de contenido* es, por tanto, el procedimiento en virtud del cual el profesor puede identificar, organizar y seleccionar los significados de un concepto o estructura matemática dentro del contenido de las matemáticas escolares. El término “análisis de contenido”, tal y como lo utilizo aquí y como lo señala Maz (Maz, 2005b, pp. 33-36), se relaciona con las técnicas de investigación conocidas como “análisis conceptual” (Rico, 2001) y “análisis de contenido” de textos (Berelson, 1952). Sin embargo, en el contexto del análisis didáctico que desarrollo en este capítulo, el término “análisis de contenido” adquiere un significado concreto que se circunscribe al análisis de un concepto matemático dentro de las matemáticas escolares³⁰. A continuación presento el sentido que le daré a las tres dimensiones del significado de un concepto matemático y describo y ejemplifico las herramientas con las que el profesor puede explorar dichos significados.

7.3. Sistemas de Representación

Recordemos que, según Frege, “ $2 + 5$ ” y “ $4 + 3$ ” son sentidos del signo “7” para la referencia “concepto de número siete”. Él reconoce que puede haber una variedad de signos que tengan como referencia el mismo objeto (concepto): “a una referencia (objeto) no le pertenece sólo un signo” (Frege, 1998c, § 27). Por otro lado, cuando decimos que “ $4 + 3$ ” es un sentido del signo “7” y, por lo tanto, nos basamos en “el concepto de número 4” y en “el concepto de número 3” para ello, utilizamos signos cuya referencia son esos conceptos. Por consiguiente, los signos son elementos constitutivos centrales del significado de un concepto matemático: son los elementos que relacionan el sentido y la referencia y se requieren para expresar las relaciones internas entre los conceptos. En matemáticas, estos signos se organizan en “sistemas” que es posible caracterizar. Siguiendo una de las tradiciones de la literatura en didáctica de la matemática utilizaré de aquí en adelante la expresión “sistemas de representación” para referirme a los sistemas de signos por medio de los cuales se designa un concepto. La importancia de los sistemas de representación en el análisis de contenido radica en que³¹:

³⁰ Desde una perspectiva relacionada, Chaiklin (2002) utiliza la expresión “subject-matter analysis” para denotar un cierto tipo de análisis del contenido. Su preocupación se centra en diseños y desarrollos curriculares que sean coherentes con las teorías de Vygotsky. Su propuesta de análisis de contenido se restringe a las relaciones entre los conceptos. Alrø y Skovsmose (2004, pp. 253-254) critican esta aproximación al desarrollo curricular puesto que, desde su perspectiva, acepta como dado el conocimiento científico sin cuestionarlo.

³¹ La noción de sistema de representación ha adquirido gran importancia en la educación matemática en los últimos quince años. Por ejemplo, en los nuevos estándares para las matemáticas escolares, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos ha introducido un nuevo estándar sobre representaciones (NCTM, 2000, p. 67). En este caso se incluye el dominio de distintos sistemas de representación para cada concepto como una de las competencias que deben alcanzar los alumnos. En 1998, el *Journal of Mathematical Behaviour* le dedicó dos de sus núme-

- ◆ los sistemas de representación organizan los símbolos mediante los que se hacen presentes los conceptos matemáticos;
- ◆ los distintos sistemas de representación aportan distintos significados para cada concepto; y, por lo tanto,
- ◆ un mismo concepto admite y necesita de varios sistemas de representación complementarios.

Puesto que para reflexionar sobre las relaciones entre un concepto matemático al interior de la estructura matemática de la que forma parte, es necesario poner en juego al menos un sistema de representación, abordo primero, en esta sección, la discusión sobre esta dimensión del significado de un concepto, y, en la siguiente, profundizo sobre la estructura conceptual del mismo. Dado que, aún dentro de la educación matemática, el término “sistema de representación” tiene diferentes significados (Goldin y Janvier, 1998, pp. 1-2; Kaput, 1998, p. 265; Rico, 2000, p. 219), es necesario adoptar una posición al respecto. En este trabajo utilizo la definición de Kaput (1992), en virtud de la cual, un sistema de representación es “un sistema de reglas para (i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (p. 523)³².

La definición de Kaput enfatiza el carácter sistémico de la noción. Un sistema de representación está compuesto por signos que se ciñen a unas reglas. Estas reglas determinan cómo crear un signo que pertenezca al sistema, cómo reconocer si un signo dado pertenece a él, y cómo transformar unos signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos. Para que las reglas y signos que caracterizan a un sistema de representación adquieran un sentido concreto, deben referirse a una estructura matemática particular. Por ejemplo, podemos considerar el plano cartesiano como un sistema de representación. Su utilización implica una reglas básicas que incluyen, por ejemplo, la disposición de unos ejes, la determinación de unas unidades de medida para ellos y el procedimiento para identificar y caracterizar un punto del plano en función de su posición con respecto a los ejes. Pero, las reglas que determinan qué signos pertenecen a dicho sistema dependen de qué estructura matemática pretendamos representar en él, dado que nuestro propósito es representar los objetos matemáticos que configuran dicha estructura matemática. Por lo tanto, el sistema de representación gráfico de las funciones en el plano cartesiano implica un conjunto de reglas (para la creación y operación de signos en él) que es diferente del sistema de representación gráfico de los números complejos en el plano cartesiano.

Dado que un mismo concepto o estructura matemática se puede representar en diferentes sistemas de representación, es posible agrupar y caracterizar, en cua-

ros a este tema. En estos números se publicaron artículos de algunos de los participantes en el grupo que, sobre representaciones, se reunió en el PME de 1990 a 1993 (Goldin, 1998b).

³² Kaput utiliza el término “characters” que yo he traducido por “signos”. La definición de Duval (1999) es similar, aunque, en ella, él enfatiza la dimensión cognitiva. Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación debe permitir tres actividades cognitivas: 1) formación de una representación identificable (las reglas de formación del registro semiótico); 2) tratamiento de una representación dentro del mismo registro; 3) conversión de un registro a otro. La conversión y el tratamiento son independientes como actividades cognitivas (p. 178).

tro categorías, las operaciones que se pueden realizar sobre los signos que pertenecen a esos sistemas de representación³³:

1. *Creación y presentación de signos o expresiones.* Esta operación permite determinar expresiones válidas e inválidas ($(x)f = 3x^2 + 2$ es un ejemplo de una expresión inválida en el sistema de representación simbólico para las funciones).
2. *Transformación sintáctica invariante.* Esta operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el objeto matemático designado por esos signos cambie. Es el caso, por ejemplo, de los procedimientos de completación de cuadrados, expansión y factorización que se muestran en la Figura 5.
3. *Transformación sintáctica variante.* Esta operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, en la que el objeto matemático designado cambia. Es el caso, por ejemplo, de las traslaciones horizontal y vertical que se muestran en la Figura 5.

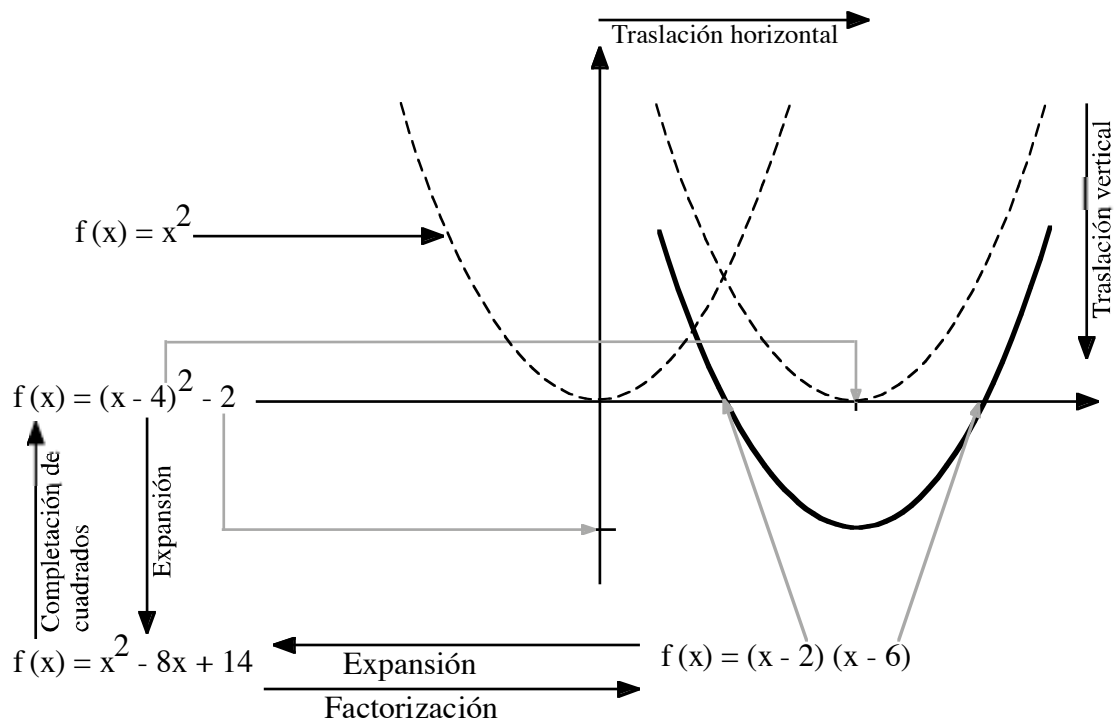


Figura 5. Operaciones en los sistemas de representación

4. *Traducción entre sistemas de representación.* Esta operación se refiere al procedimiento en virtud del cual se establece la relación entre dos signos que designan un mismo objeto pero que pertenecen a diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, las relaciones entre los parámetros de las formas

³³ He adaptado la propuesta de Kaput (1992, pp. 524-525) sobre las actividades matemáticas que tienen lugar en el discurso del aula, al contexto de los sistemas de representación como dimensión del significado de un concepto matemático.

simbólicas de la función cuadrática y sus representaciones gráficas en la parábola de la Figura 5³⁴.

La Figura 5 presenta tan sólo algunos de los múltiples aspectos que componen la complejidad de representaciones (significados) de un concepto como la función cuadrática. Incluyo sólo algunos de los conceptos y procedimientos que conforman esta estructura matemática, en dos de sus sistemas de representación: gráfico (plano cartesiano) y simbólico. Mostraré más adelante que hay significados importantes de este concepto relacionados con los sistemas de representación numérico y geométrico. Los sistemas de representación permiten apreciar la complejidad del sistema de significados de los conceptos en las matemáticas escolares. Esta complejidad tiene su origen en el carácter estructural de los conceptos matemáticos: cada concepto configura una estructura matemática y forma parte de otras estructuras matemáticas. Considero en la siguiente sección esta dimensión de los significados de un concepto.

7.4. Estructura Conceptual

En este apartado abordo la cuestión de los significados de un concepto en las matemáticas escolares desde la perspectiva de su relación con otros conceptos. Cuando, siguiendo a Frege, decimos que “ $4 + 3$ ” es un sentido del signo “7” cuya referencia es el “concepto de número siete”, establecemos, a través de los correspondientes signos y sentidos, relaciones entre “el concepto de número siete”, “el concepto de número 4” y “el concepto de número 3”. Como mostraré en esta sección, éste es uno de los tipos de relaciones que se establecen en la estructura conceptual de un concepto. Para realizar la exploración de estos significados, asumiré una visión estructuralista “informal” de las matemáticas. El *estructuralismo* es una visión de las matemáticas que resalta la importancia de las relaciones estructurales, independientemente de la naturaleza intrínseca de los objetos que se relacionan. Esta visión surgió del desarrollo del método axiomático y fue concretada en el siglo XX por Bourbaki, desde la perspectiva de la teoría de conjuntos (Hellman, 2006). Actualmente existen diferentes tipos de estructuralismo en la filosofía de las matemáticas (Hellman, 2005). Mi posición será “informal” en el sentido de que:

- ◆ el interés de la exploración se centra en el contenido matemático escolar,
- ◆ esta exploración enfatiza las relaciones que se establecen en las estructuras matemáticas relacionadas con un concepto y
- ◆ se trabaja con un significado no formal para la expresión “estructura matemática”.

Pero, ¿qué es una estructura matemática? Desde un punto de vista formal, una estructura matemática se determina cuando se especifica el conjunto de objetos que la sustenta, algunas operaciones (funciones) significativas, algunas relaciones significativas y algunos elementos significativos (Marker, 2000, p. 15). Por ejemplo, el grupo aditivo ordenado de los enteros tiene a \mathbb{Z} como conjunto que lo sustenta y

³⁴ Kaput (1992, p. 525) incluye una quinta operación: la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o “entidades cognitivas” que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización. Me referiré a esta operación en el apartado siguiente.

podemos distinguir la operación binaria $+$, la relación binaria $<$ y el elemento identidad 0 .

En este documento utilizaré la expresión “estructura matemática” con un significado más amplio del que se infiere de la definición anterior. Por esa razón utilizaré la expresión *estructura conceptual* para referirme a tres aspectos de todo concepto matemático del contenido matemático escolar:

1. *Estructuras matemáticas involucradas*. Supondré que todo concepto matemático está relacionado con al menos dos estructuras matemáticas:

- ◆ la estructura matemática que el concepto configura y
- ◆ las estructuras matemáticas de las que él forma parte.

Por ejemplo, el concepto función cuadrática configura una estructura matemática en la que se establecen relaciones estructurales entre conceptos como ecuación cuadrática, parámetro, foco y vértice. Adicionalmente, el concepto función cuadrática forma parte de la estructura matemática correspondiente al concepto función.

2. *Relaciones conceptuales*. Resaltaré las relaciones que se establecen entre el concepto y

- ◆ los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura (e.g., la relación entre la función cuadrática y la ecuación cuadrática),
- ◆ los objetos que son casos particulares de dicho concepto (en términos de Frege, los objetos que saturan el predicado; e.g., $f(x) = 3x^2 - 4$ como caso particular de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$), y
- ◆ los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte (e.g., la relación entre la función cuadrática y las funciones continuas).

3. *Relaciones de representaciones*. Como mostré en la sección anterior, la exploración de los significados de un concepto requiere de los sistemas de representación, puesto que con ellos es posible identificar los modos en que el concepto se presenta. Mostré que, al tener en cuenta los sistemas de representación, se pueden destacar varias relaciones (que surgen de las operaciones en los sistemas de representación que presenté anteriormente):

- ◆ la relación entre dos signos que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un mismo sistema de representación (transformación sintáctica invariante),
- ◆ la relación entre dos signos que designan el mismo objeto o concepto pertenecientes a sistemas de representación diferentes (traducción entre sistemas de representación) y
- ◆ la relación entre dos signos que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación (transformación sintáctica variante).

Por lo tanto, cuando exploramos la estructura conceptual de un concepto en las matemáticas escolares, debemos tener en cuenta tres tipos de “elementos” y dos grupos de relaciones entre esos elementos.

Podemos clasificar los elementos en:

- ◆ los *objetos*, como casos particulares de un concepto y que conforman la extensión del concepto,
- ◆ los *conceptos*, como predicados que son saturados por los objetos y, a su vez, conforman estructuras matemáticas, y
- ◆ las *estructuras matemáticas*, que están conformadas por conceptos.

Por otro lado, las relaciones descritas en los puntos 2 y 3 anteriores se pueden agrupar en dos categorías que denomino *relaciones verticales* y *relaciones horizontales*. Las relaciones verticales se refieren a las relaciones entre los tres tipos de elementos: Objeto \leftrightarrow Concepto \leftrightarrow estructura matemática. Por otra parte, las relaciones horizontales se refieren a las relaciones entre los signos en sus diferentes sistemas de representación (relaciones entre representaciones)³⁵.

Abordar los significados de un concepto desde la perspectiva de su estructura conceptual, implica identificar y organizar los elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas) y las relaciones (horizontales y verticales) correspondientes a ese concepto. Éste es un trabajo *matemático* en el contexto del contenido matemático escolar. Biehler (2005, pp. 69-71), por ejemplo, se aproxima a este tipo de procedimiento cuando, en un esquema y en una tabla, presenta lo que él denomina “el paisaje semántico” del concepto de función. No obstante, las dos herramientas que él utiliza (un esquema en el que se ubican en el plano los elementos y una tabla en la que se clasifican estos elementos) son insuficientes: ninguno de los dos permite hacer explícitas las relaciones entre estos elementos. Para ello, se necesita una herramienta más potente. Los mapas conceptuales es una herramienta que se adapta para este propósito³⁶. Ésta es la herramienta que propongo para que el profesor recoja, organice, represente y comparta la información correspondiente a los significados de un concepto matemático. Existe siempre el riesgo de confundir “estructura conceptual” y “mapa conceptual”. Los mapas conceptuales son herramientas para representar aspectos de la estructura conceptual de un concepto.

La Figura 6 muestra una versión inicial del significado del concepto matemático escolar función de segundo grado donde se presentan los distintos sistemas de

³⁵ Esta descripción de una estructura conceptual en términos de elementos y relaciones tiene su contraparte desde el punto de vista cognitivo en las nociones de conocimiento conceptual y conocimiento procedimental en matemáticas (Hiebert y Lefevre, 1986), que Rico (1997a, p. 31) clasifica en hechos, conceptos y estructuras conceptuales para el conocimiento conceptual y destrezas, razonamientos y estrategias para el conocimiento procedimental. El análisis que propongo aquí es matemático y no atiende, por ahora, a cuestiones cognitivas. Sin embargo, se aprecia la relación entre la clasificación del conocimiento conceptual y los tres tipos de elementos de una estructura conceptual, por un lado, y el conocimiento procedimental y las dos categorías de relaciones entre dichos elementos.

³⁶ “Un mapa conceptual es una forma especial de diagrama para explorar el conocimiento y recabar y compartir información... Un mapa conceptual está compuesto por nodos o celdas, que contienen un concepto, un asunto o una pregunta, y enlaces. Los enlaces se rotulan y su dirección se denota con una flecha. Los enlaces explican la relación entre los nodos. La flecha describe la dirección de la relación y se lee como una oración” (Novak, 1998, p. 1). La construcción de mapas conceptuales es también un catalizador de la reflexión y la discusión entre pares (ver, por ejemplo, Sutherland y Katz, 2005, p. 257).

signos, los fenómenos y las distintas definiciones, cada una de ellas asociada con un modo de representación (Gómez y Carulla, 2001b, p. 40)³⁷.

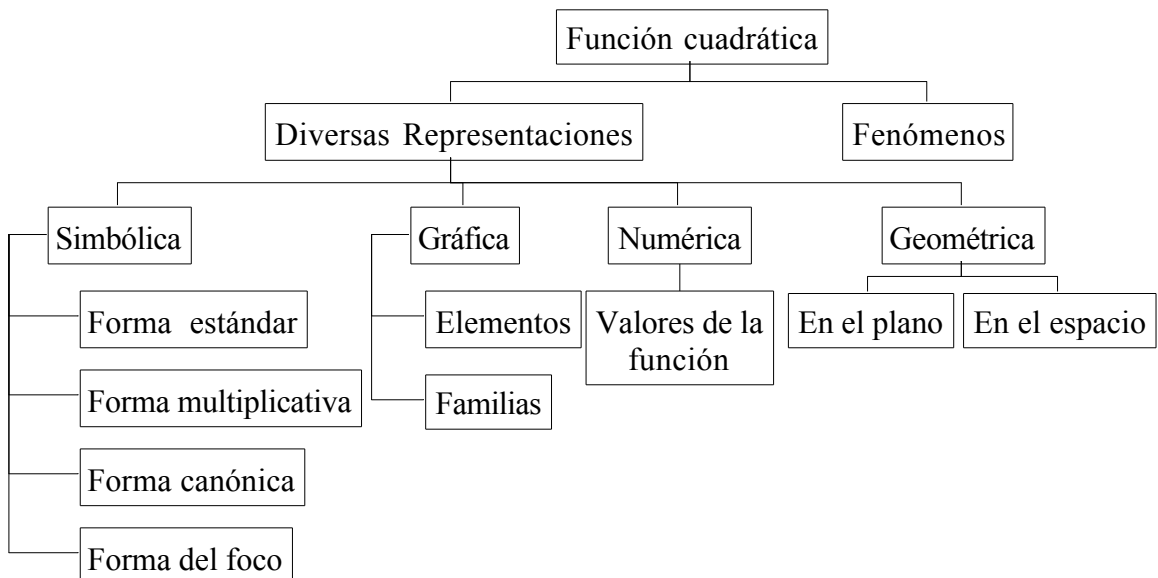


Figura 6. Mapa conceptual general para la función de segundo grado (Gómez y Carulla, 2001b, p. 40)

En este esquema se identifican y organizan las categorías en las que se incluirán los correspondientes elementos y relaciones. Por lo tanto, aún no aparecen los conceptos. Para ello, tenemos que entrar en mayor detalle. La Figura 7 muestra algunos aspectos de la representación simbólica de la función cuadrática.

³⁷ En este mapa conceptual y los que siguen se incluye ya la fenomenología, dimensión del significado que trataré en la siguiente sección.

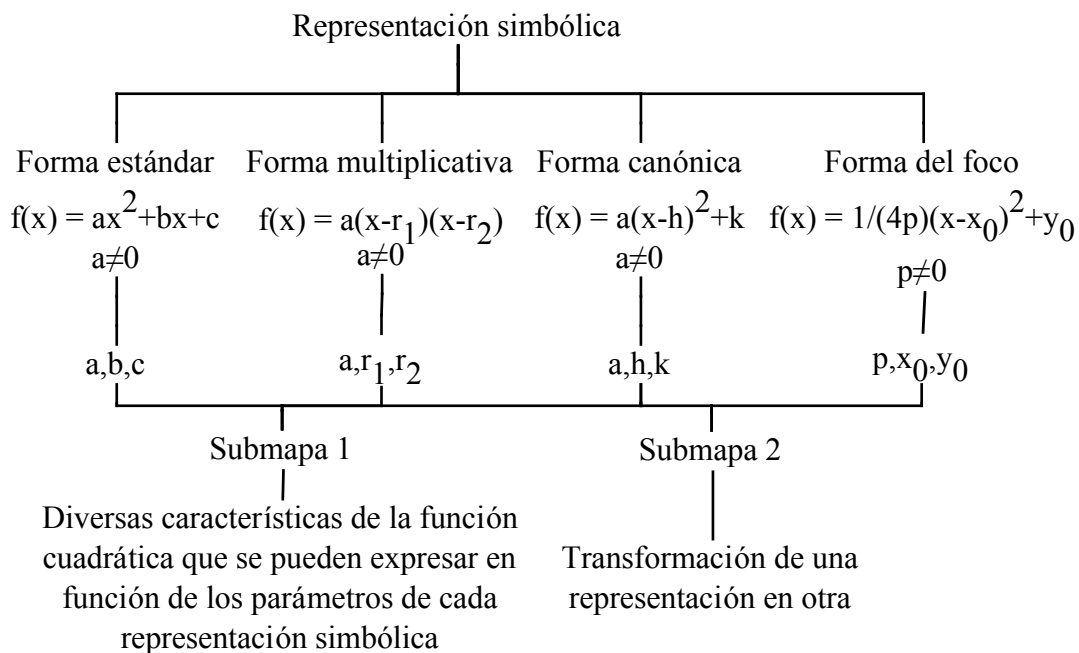


Figura 7. Mapa conceptual general de la representación simbólica de la función cuadrática

En este caso, aparecen los parámetros de las diversas formas simbólicas. Cuando podemos identificar conceptos dentro de un mapa conceptual de una estructura matemática, vemos la necesidad de establecer relaciones entre estos conceptos y sus representaciones. En la Figura 7 se insinúan relaciones entre los parámetros de las formas simbólicas.

La Figura 8 muestra un ejemplo de diferentes conexiones (enlaces) que es posible establecer en una parte del mapa conceptual de la función cuadrática. Desde la perspectiva del contenido matemático escolar, en un mapa conceptual se pueden identificar diferentes tipos de conexiones que se corresponden parcialmente con las relaciones verticales y horizontales que describí arriba³⁸ (ver también la Figura 5):

- ◆ conexiones que establecen relaciones entre diferentes elementos de la estructura matemática (por ejemplo, entre las diferentes formas simbólicas y sus parámetros),
- ◆ conexiones que asocian las diferentes representaciones de un mismo elemento (por ejemplo, los parámetros de la forma multiplicativa y las raíces de la parábola),
- ◆ conexiones que muestran transformaciones de un elemento en otro dentro de un sistema de representación (por ejemplo, el procedimiento de factorización para pasar de la forma simbólica estándar a la forma simbólica multiplicativa), y

³⁸ Utilizo los términos “relaciones” y “conexiones”: con el primero, me refiero a las relaciones entre los elementos de la estructura conceptual, mientras que, con el segundo, hago referencia a la representación de esas relaciones en el mapa conceptual que organiza los significados del concepto en términos de su estructura conceptual, sus representaciones y los fenómenos asociados a él.

- ◆ conexiones que muestran la relación entre categorías de fenómenos y las subestructuras con las que es posible organizarlos (por ejemplo, la relación entre las propiedades del foco de la parábola y los fenómenos de óptica que utilizan estas propiedades —que no se muestra en la figura)³⁹.

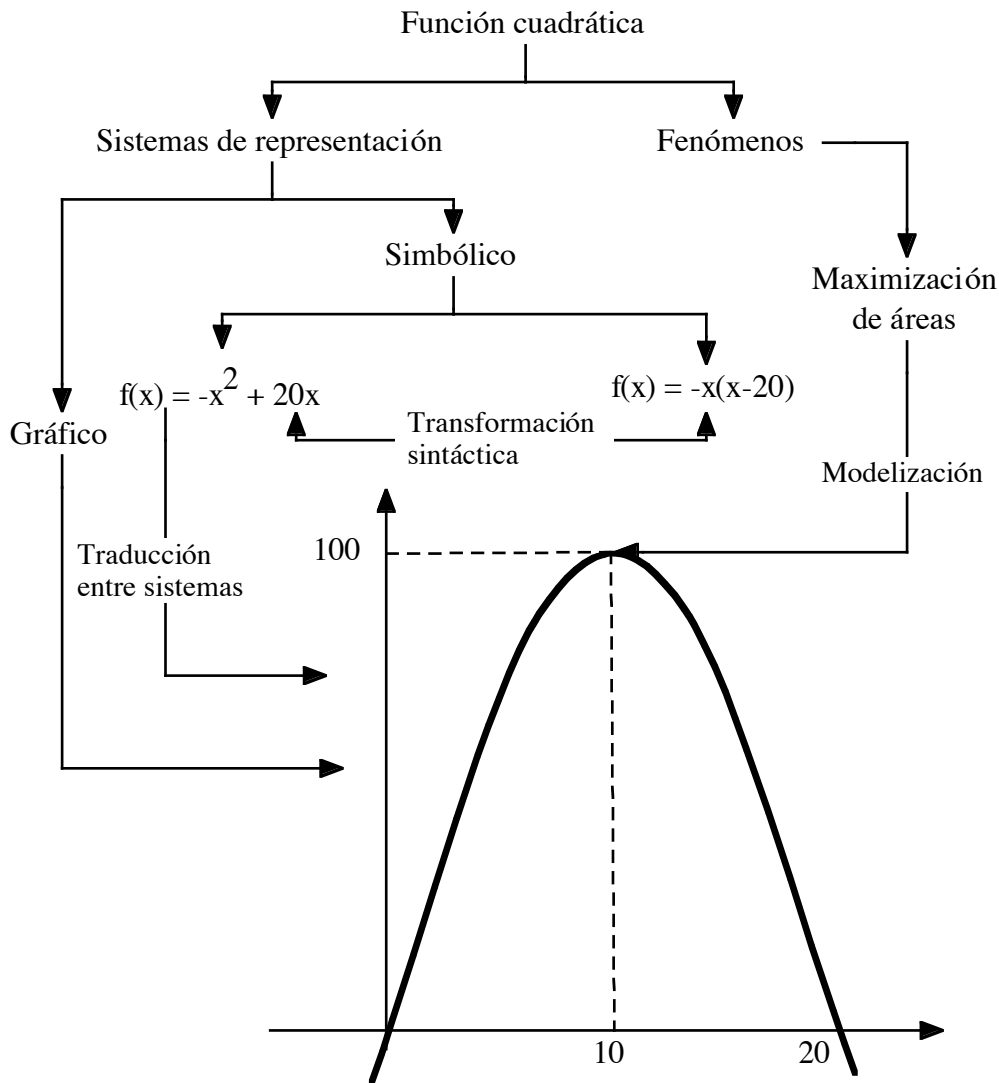


Figura 8. Conexiones entre elementos de un mapa conceptual

Cuando se profundiza en el detalle, el análisis y descripción de una estructura matemática en términos de su estructura conceptual y sus sistemas de representación permite apreciar la complejidad del contenido matemático escolar. Esta complejidad se puede constatar, para el caso de la función cuadrática, en los mapas conceptuales que presento en el Anexo A y que produce con Cristina Carulla (2001b, pp. 32-39). En estos mapas conceptuales incluimos los sistemas de representación

³⁹ En la sección que sigue a ésta, presento la fenomenología como tercera dimensión de los significados de un concepto en las matemáticas escolares. Incluyo aquí esta conexión, sin mucha explicación, para efectos de describir aquí las características de los mapas conceptuales y centrarme, más tarde, en la complejidad del análisis fenomenológico. Por lo tanto, explicaré después la conexión entre subestructuras y fenómenos.

simbólico, gráfico, geométrico, numérico, junto con un mapa conceptual para la fenomenología, en una organización similar a la que presenté en la Figura 6. En el sistema de representación simbólico, incluimos las cuatro formas simbólicas de la función cuadrática. Para cada una de ellas, identificamos sus elementos y establecemos sus conexiones. Por ejemplo, en este mapa conceptual establecemos la relación entre la función cuadrática y la ecuación y la fórmula cuadrática. También describimos simbólicamente características de crecimiento de la función. En otros mapas conceptuales representamos, por ejemplo, las relaciones (a través de los procedimientos de transformación sintáctica) entre las cuatro formas simbólicas, los principales elementos de la parábola, en el contexto del plano cartesiano, y las características gráficas de las familias de funciones cuadráticas.

La descripción detallada de los significados de un concepto matemático en términos de sistemas de representación y estructura conceptual permite identificar y delimitar subestructuras de la estructura matemática representada. A continuación muestro que, al explorar la tercera dimensión de los significados de un concepto matemático, la fenomenología, es posible establecer relaciones entre esas subestructuras y los fenómenos para los que ellas sirven de modelo.

7.5. Fenomenología

La fenomenología es la tercera de las dimensiones con las que organizamos los significados de un concepto en las matemáticas escolares. Como lo postulamos en el apartado 3, la consideración de la fenomenología como elemento constitutivo del significado de un concepto surge de una visión funcional del currículo, en virtud de la cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos que sustentan el concepto⁴⁰.

La fenomenología se entiende comúnmente como un campo disciplinar de la filosofía y como un movimiento en la historia de la filosofía. En su significado básico, la fenomenología es el estudio de los fenómenos. Su desarrollo en la primera parte del siglo 20 se debe, entre otros, a los trabajos de Husserl (Smith, 2003). En la disciplina de la educación matemática, la noción de fenomenología adquirió una particular relevancia con motivo de los trabajos de Freudenthal. No obstante, y como lo señala Puig (1997, pp. 62-63), la relación entre las ideas de Freudenthal y la tradición filosófica correspondiente es débil:

Freudenthal comienza indicando que le ha dado a su método de análisis de los contenidos matemáticos el nombre de “fenomenología” porque parte de la contraposición establecida en la tradición filosófica entre lo que se expresa en esa tradición con los términos “fenómeno” y “noúmeno”. Esa contraposición, cuyo carácter de antítesis pone en duda, la establece en las matemáticas entre los conceptos o estructuras matemáticas, que serían noúmenos y los fenómenos que esos conceptos organizan... Freudenthal es de poca ayuda [para aclarar la relación entre sus ideas y la tradición filosófica] ya que apenas va más allá de dar una caracterización negativa: taxativamente afirma que cuando usa el

⁴⁰ Desde una perspectiva social de la noción de significado, este punto se destaca en “Meanings of meaning” (2005). Sus autores afirman que dos de los aspectos centrales del significado de un concepto matemático son las situaciones que nos permite describir y los problemas que nos permite resolver de manera eficiente y fiable.

término “fenomenología” no se refiere al sentido que le dan Hegel, Husserl o Heidegger, pero tampoco acompaña esta negación de una afirmación de adscripción, sintonía o simpatía con otros filósofos.

Freudenthal (1983) define fenomenología y fenomenología didáctica de la siguiente manera (p. ix):

La fenomenología de un concepto matemático, estructura o idea consiste en describirlo en relación con los fenómenos para los que fue creado y con aquellos a los que se extendió en el proceso de aprendizaje de la humanidad. Cuando esta descripción tiene que ver con el proceso de aprendizaje de una generación joven, es entonces fenomenología didáctica: una manera de mostrarle al profesor aquellos lugares en los que los aprendices pueden involucrarse en el proceso de aprendizaje de la humanidad.

Puig (1997) utiliza el término *análisis fenomenológico*, en el contexto del análisis didáctico, de la siguiente manera (p. 63):

El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos.

Por su parte, Segovia y Rico (2001) distinguen entre fenomenología (como una agrupación de fenómenos) y análisis fenomenológico (como la descripción de esos fenómenos y su relación con el concepto) y resaltan que los conceptos organizan y también describen los fenómenos (p. 89):

La fenomenología de un concepto matemático la componen los fenómenos para los cuales dicho concepto constituye un medio de representación y organización.... Un análisis fenomenológico consiste en describir fenómenos asociados a los conceptos matemáticos así como la relación que existe entre ellos.

En estas descripciones de la fenomenología (o del análisis fenomenológico) hay tres cuestiones que hay que aclarar:

1. ¿Qué queremos decir con fenómenos para los que un concepto es un medio de representación y organización?
2. ¿Qué queremos decir con que un concepto matemático organiza o describe un fenómeno?
3. ¿Cómo se caracteriza la relación entre concepto y fenómeno?

La primera cuestión se refiere al significado del término “fenomenología”, en el contexto de este capítulo y, en particular, en relación con el análisis de contenido. Utilizaré el término *fenomenología*, como dimensión del significado de un concepto, para referirme a los fenómenos que dan sentido a dicho concepto. El concepto permite describir situaciones relevantes vinculadas con el fenómeno o contribuye a enunciar cuestiones que plantean interrogantes sobre el fenómeno.

Para abordar la segunda y la tercera cuestión utilizaré la noción de *modelo matemático*. Lesh y Doerr (2000) abordan la noción de modelo de la siguiente manera (p. 362):

¿Qué es un modelo? La siguiente respuesta (de primera iteración) es familiar a aquellas personas en campos como las matemáticas, física, química y otras ciencias físicas. Un modelo es un sistema compuesto por (a) elementos, (b) relaciones entre los elementos, (c) operaciones que describen como interactúan los elementos, y (d) patrones o reglas, como la simetría, la conmutatividad, o la transitividad que se aplican a esas relaciones y operaciones. Sin embargo, no todo sistema funciona como un modelo. Para que un sistema dado sea un modelo, éste debe ser usado para describir otro sistema, o para pensar sobre él, o para comprenderlo, o para explicarlo, o para hacer predicciones sobre él. También, para que el modelo sea matemáticamente significativo, debe centrarse en las características estructurales del sistema que pretende describir.

La función cuadrática incluye varios modelos matemáticos de fenómenos naturales, sociales y matemáticos que permiten describir situaciones y plantear interrogantes, que pueden dar lugar a problemas, cuya solución se efectúa mediante un modelo. El prever y describir la trayectoria de una pelota de golf o del obús de un cañón, el optimizar el área de un terreno que debe tener un perímetro fijo, el diseño de antenas de satélite o de lentes, y el hallar pares de números que cumplen ciertas condiciones con respecto a su suma y producto, son ejemplos de este tipo de situaciones y cuestiones⁴¹. En general, el proceso de identificar modelos de estas situaciones utiliza sólo algunos de los elementos y propiedades de la estructura matemática que conocemos como función cuadrática. Por ejemplo, el diseño de antenas de satélite o de lentes utiliza propiedades del foco de la parábola, mientras que optimizar el área de un terreno con un perímetro dado utiliza el hecho de que el vértice de una parábola con dilatación negativa es su punto máximo. En otras palabras, la identificación y caracterización de un modelo de una situación implica la puesta en juego de una subestructura de la estructura matemática en cuestión.

Por otro lado, los ejemplos que he presentado muestran que una misma subestructura se puede relacionar con diversos fenómenos. Por ejemplo, la subestructura que permite describir la trayectoria de una pelota de golf, es un modelo de todos aquellos fenómenos que se refieren al movimiento de cuerpos en un campo de fuerza uniforme. La descripción de los fenómenos se puede hacer en tres niveles:

1. identificar un fenómeno específico (el experimento de Galileo en la torre Pisa para la caída libre de cuerpos, cuyo modelo es $x = \frac{1}{2}gt^2$);
2. agrupar fenómenos específicos en un cierto *tipo* de fenómeno (los fenómenos de caída libre de cuerpos en la tierra, con modelo

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2); \text{ y}$$

⁴¹ En el Anexo A presento mapas conceptuales detallados de un análisis fenomenológico de la función cuadrática.

3. agrupar tipos de fenómenos en *categorías* (los fenómenos de movimiento de cuerpos en un campo de fuerza uniforme, con un modelo como

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2).$$

Podemos, por lo tanto, establecer una relación entre subestructuras y fenómenos en la que a cada fenómeno le asignamos la subestructura que le sirve de modelo. Se pueden establecer parejas (Subestructura_i, Fenómeno_j), en las que la Subestructura_i es un modelo del Fenómeno_j. La Figura 9 muestra un esquema de estas relaciones.

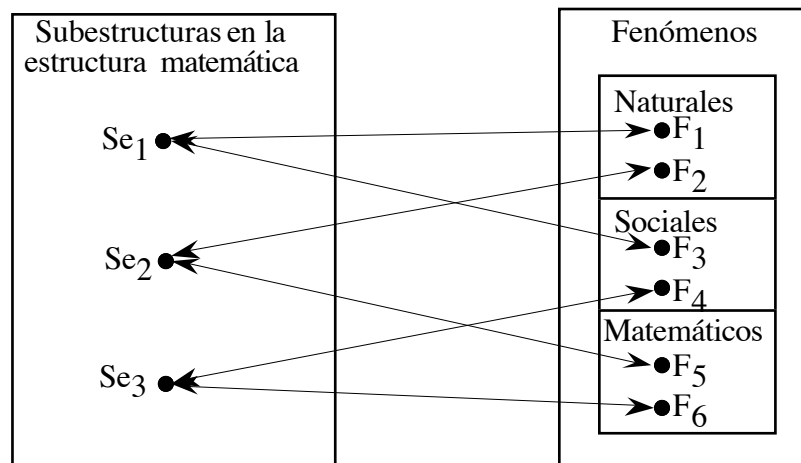


Figura 9. Análisis fenomenológico y modelos

Entonces, el análisis fenomenológico de una estructura matemática implica la identificación de:

1. las subestructuras correspondientes a esa estructura,
2. los fenómenos organizados por cada una de ellas y
3. la relación entre subestructuras y fenómenos.

De esta manera se puede establecer una relación de equivalencia en la que cada clase de equivalencia, representada por una subestructura dada, organiza todos aquellos fenómenos de los cuales es un modelo. En el ejemplo que acabo de presentar, se observa que la subestructura es un “medio de organización” de los fenómenos en el sentido de que caracteriza una *categoría* de fenómenos que incluye una variedad de *tipos* de fenómenos. A los ojos de un físico, categoría y modelo matemático son equivalentes.

Denomino *modelo matemático*, en el contexto de las matemáticas escolares, a la tripla (subestructura, fenómeno, relación) en la que la subestructura es un modelo del fenómeno de acuerdo con una relación. Esta relación identifica aquellas características estructurales del fenómeno que se pueden representar con elementos y propiedades de la subestructura en cuestión. Utilizo el término modelo matemático no solamente para referirme a una tripla que involucra un fenómeno específico, sino también a un conjunto de triplas correspondientes a un tipo de fenómenos o a una categoría de fenómenos. Por lo tanto, al utilizar el término

“modelo matemático” es necesario identificar la subestructura, los fenómenos correspondientes y la relación entre estos fenómenos y la subestructura.

El análisis fenomenológico no consiste únicamente en identificar y enumerar fenómenos vinculados con un concepto, establecer la relación entre subestructuras y fenómenos y clasificar los fenómenos de acuerdo con las subestructuras con las que están relacionados. En el análisis fenomenológico, se debe también describir esas relaciones. En esta descripción, se deben caracterizar los aspectos relevantes del fenómeno (o del interrogante que da lugar a un problema cuya solución se puede obtener mediante el modelo) que pueden asociarse con elementos y propiedades específicas de la estructura matemática. Por ejemplo, en el caso de los reflectores parabólicos, se pone en juego una propiedad de la parábola, por un lado, y un principio de la física, por el otro (ver Figura 10). La propiedad de la parábola establece que la tangente en cualquier punto de la parábola forma ángulos iguales con el segmento que une el punto con el foco y con la recta que pasa por el punto y es paralela al eje de simetría de la parábola. El principio de la física afirma que cuando un rayo choca con una superficie reflectora, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

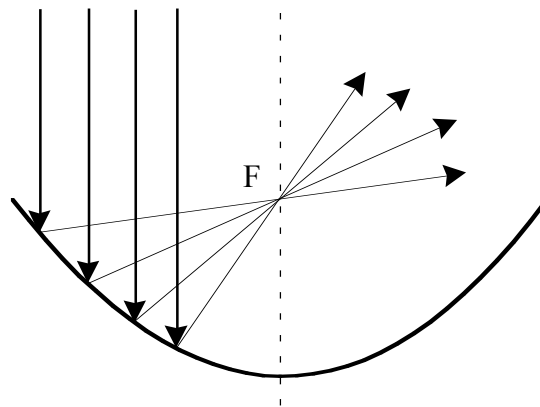


Figura 10. Propiedad óptica de la parábola y principio de la física

Por lo tanto, en el análisis fenomenológico se identifican, por un lado, aquellas características del fenómeno (o de una situación o cuestión relacionada con el fenómeno) que son relevantes desde el punto de vista matemático y, por el otro lado, se relacionan con elementos y propiedades de la estructura matemática en uno o más sistemas de representación (ver Figura 11).

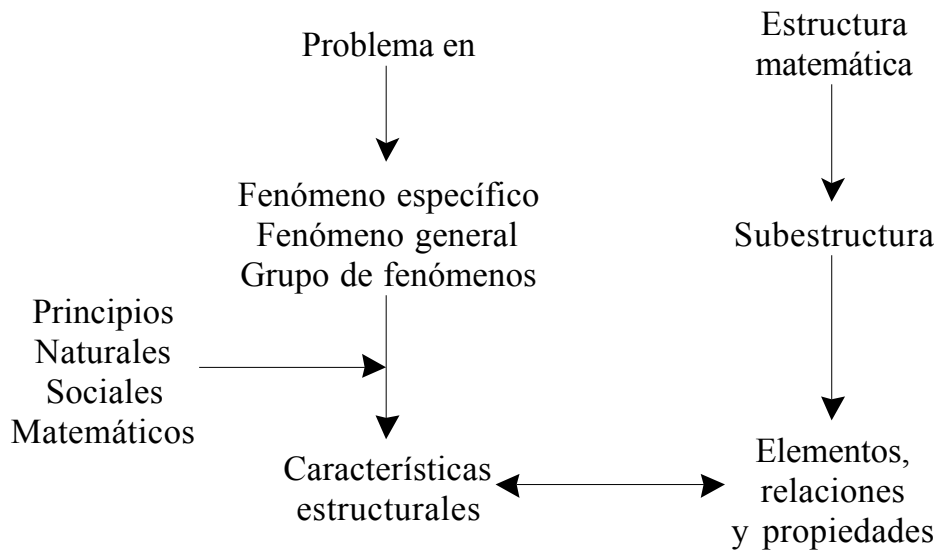


Figura 11. Análisis fenomenológico

He basado las nociones de fenomenología y análisis fenomenológico en la noción de modelo matemático. De esta manera, he establecido el significado, que dentro de este trabajo, le doy a la idea de que los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático (o modos de referir un concepto matemático) también se pueden establecer mediante los fenómenos que sustentan el concepto. El concepto adquiere sentido con respecto a un fenómeno o conjunto de fenómenos, cuando es posible establecer un modelo matemático (tripla subestructura-fenómeno-relación) que los relaciona. Es decir, cuando los fenómenos están vinculados con situaciones que el concepto permite describir o con cuestiones que el concepto permite plantear.

El término “modelo”, e inclusive el término “modelo matemático”, pueden tener diferentes significados dentro de la educación matemática. He utilizado (y utilizaré) el término “modelo” en el sentido de “modelo matemático” tal y como lo he definido en este apartado. Esta distinción es importante porque dichos términos se usan de diferentes maneras en la didáctica de la matemática. Por ejemplo, Castro y Castro (1997, pp. 106-108) utilizan los dos términos, asignando el siguiente significado a modelo matemático: “*modelo matemático es una estructura matemática que aproxima o describe ciertas relaciones de un hecho o fenómeno*” (p. 107, en cursivas en el original). Por otro lado, utilizaré el término “modelización” solamente para referirme a una fase de la resolución de problemas. Más adelante, en el apartado correspondiente al análisis de instrucción de este capítulo (apartado 9), consideraré con más detalle el proceso de modelización que aquí se insinúa. La modelización es un proceso que realizan profesor y escolares. Su propósito no es únicamente el de describir matemáticamente (en uno o más sistemas de representación) aspectos relevantes de un fenómeno. La potencia de la modelización surge de la capacidad que nos da el modelo matemático (y las propiedades de la estructura matemática en la que se representa) para plantear cuestiones relacionadas con el fenómeno, que dan lugar a problemas que no se podrían resolver en el contexto *no* matemático del mismo.

8. ANÁLISIS COGNITIVO

En el análisis cognitivo, “el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, 2002b, p. 271). Para ello, él tiene que tener en cuenta su percepción de la comprensión de los estudiantes al final del ciclo anterior del análisis didáctico, los objetivos específicos que se ha propuesto para el siguiente ciclo, el contenido que pretende tratar, y el contexto, entre otros. El análisis cognitivo que aquí considero es un análisis *a priori*. Con él, el profesor pretende prever las actuaciones de los escolares en la fase posterior del ciclo en la que se ponen en juego las actividades de enseñanza y aprendizaje que él habrá diseñado. Estas hipótesis deben estar sustentadas por una descripción de aquellos aspectos cognitivos que se relacionan directamente con la estructura matemática sobre la cual se trabaja en dichas actividades. Por lo tanto, el análisis de contenido sirve de punto de partida y de punto de referencia para el análisis cognitivo. Por su parte, el análisis cognitivo debe proveer la información necesaria para realizar el análisis de instrucción y utiliza la información que surge del análisis de actuación del ciclo anterior. Estas relaciones se muestran en la Figura 12.

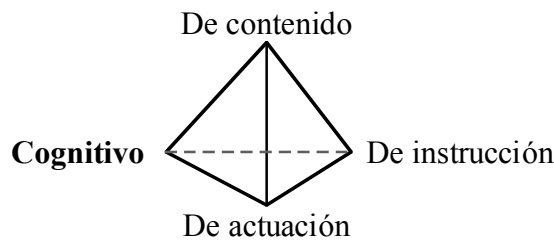


Figura 12. Análisis cognitivo en el análisis didáctico

Shulman (1986) resaltó la importancia del “conocimiento de los estudiantes” como parte del conocimiento pedagógico de contenido (pp. 9-10). Varios autores han insistido en este punto recientemente. Por ejemplo, este aspecto de la planificación y la instrucción forma parte de la visión pluralista propuesta por Cooney (2004), mientras que Ball, Lubienski y Mewborn (2001) consideran que “explorar lo que los escolares saben” (p. 453) es uno de los análisis matemáticos que deben incluirse en la instrucción. Aunque Krainer (2004) insiste en la importancia de darle prioridad al conocimiento previo de los escolares y de comprender su formas de pensamiento, Robert (2000, pp. 284-285) muestra que son pocos los formadores y los profesores en formación que tienen en cuenta este aspecto. Por su parte, Kilpatrick, Swafford y Findell (2001, p. 9) resaltan la necesidad de valorar la demanda cognitiva que pueden requerir las tareas que se proponen a los escolares. En resumen, algunos investigadores han resaltado la importancia de la exploración del conocimiento, capacidades y pensamiento de los escolares como actividad central del profesor cuando él planifica y lleva a la práctica esa planificación. No obstante, son pocas las propuestas conceptuales y metodológicas que sugieran, con algún detalle, cómo el profesor puede recabar y organizar esa información con propósitos prácticos. La noción de *trayectoria hipotética de aprendizaje* (Simon, 1995a) es uno de los intentos más importantes para aproximarse a esta cuestión.

Sin embargo, en su propuesta original, Simon (1995a) no incluye ningún procedimiento concreto que permita establecer los elementos que la componen. Un número reciente del *Mathematics Thinking and Learning* ha sido dedicado exclusivamente a la discusión sobre esta noción (Clements y Sarama, 2004), reconociendo su importancia en las actividades de investigadores en educación matemática y profesores de matemáticas.

En este apartado, comienzo revisando las diferentes interpretaciones que, de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje, se han propuesto recientemente. Concluyo que el papel que esta noción puede jugar en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria no es claro y me pongo como propósito adaptarla para ese contexto. Para ello, presento dos procedimientos con los que el futuro profesor de matemáticas de secundaria (y los profesores de matemáticas en general) pueden realizar el análisis cognitivo. El primero, desarrollado por Lupiáñez y Rico (2006, 2005), permite organizar las capacidades en términos de competencias, y describir y caracterizar el conocimiento y pensamiento matemático de los escolares antes y después de la instrucción. El segundo, los caminos de aprendizaje, es un procedimiento que le permite al profesor describir sus hipótesis acerca de los caminos por los que el aprendizaje se puede desarrollar. Estos significados cognitivos de las matemáticas escolares se basan en tres nociones: competencias, capacidades y dificultades. Concreto los significados que utilizaré para estas nociones en el análisis cognitivo. Mostraré, con algunos ejemplos, cómo estos significados cognitivos de las matemáticas escolares y los procedimientos correspondientes permiten al profesor describir sus conjeturas acerca de cómo el aprendizaje se puede desarrollar cuando los escolares aborden las tareas que él les proponga en el aula.

8.1. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje

¿Cómo puede el profesor describir sus hipótesis acerca de las actuaciones de los escolares cuando ellos se enfrenten a las actividades de enseñanza y aprendizaje que él les va a proponer? ¿Cuál es la información más relevante que el profesor debe recabar y organizar en el análisis cognitivo para que esta información sea pertinente en el análisis de instrucción? ¿Cómo se relaciona la información que puede surgir del análisis cognitivo con los objetivos de aprendizaje del profesor para la unidad didáctica que quiere diseñar y con el diseño de esa unidad didáctica? Simon (1995a) sugirió algunas respuestas a estas preguntas cuando propuso la idea de *trayectoria hipotética de aprendizaje* (ver Figura 13).

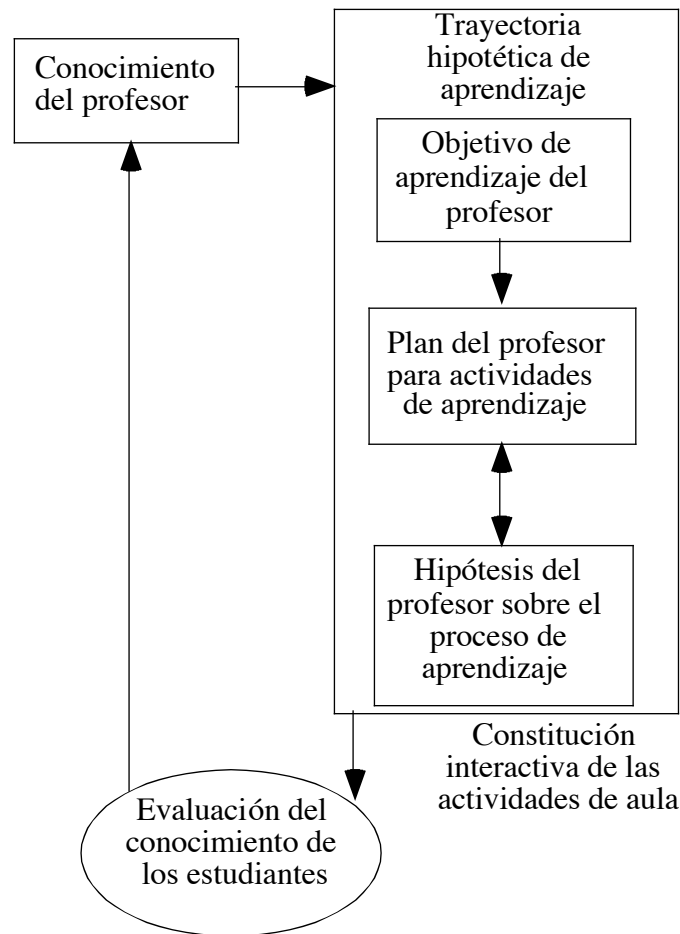


Figura 13. Ciclo de la enseñanza de las matemáticas abreviado (Simon, 1995a, p. 136)

Simon describe su modelo de la siguiente manera (p. 135):

El objetivo de aprendizaje que tiene el profesor indica la dirección de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Utilizo el término “trayectoria hipotética de aprendizaje” para referirme al camino por el que puede proceder el aprendizaje. Es hipotética en el sentido que la verdadera trayectoria de aprendizaje no se puede conocer de antemano. Caracteriza una tendencia esperada. El aprendizaje individual de los escolares recorre caminos idiosincráticos, pero frecuentemente similares. Esto supone que el aprendizaje de un individuo presenta ciertas regularidades (cf. Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb, 1983, p. 118), que la comunidad de la clase condiciona la actividad matemática de maneras frecuentemente predecibles, y que muchos de los escolares en la misma clase pueden beneficiarse de la misma tarea matemática. Una trayectoria hipotética de aprendizaje le proporciona al profesor criterios para seleccionar un diseño instruccional particular; por lo tanto, yo tomo mis decisiones de diseño basado en mi mejor conjetura acerca de cómo puede suceder el aprendizaje.

Simon aclara que la descripción de los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje de la Figura 13 no significa que el profesor persigue siempre un único objetivo o que considera solamente una trayectoria hipotética de aprendizaje. Por el contrario, pretende enfatizar el carácter hipotético del pensamiento del profesor durante la planificación y la relación simbiótica entre las hipótesis del profesor sobre el aprendizaje de los escolares y el desarrollo de actividades de aprendizaje: “la generación de ideas para las actividades de aprendizaje depende de las hipótesis del profesor sobre el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje de sus estudiantes; la generación posterior de hipótesis sobre el desarrollo conceptual de los estudiantes depende de la naturaleza de las actividades que se prevén” (p. 136).

Más recientemente, Simon y Tzur (2004, p. 93) identifican las principales características de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje de la siguiente manera (p. 93):

Una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje de los estudiantes, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes (Simon, 1995a). Mientras que el objetivo del profesor para el aprendizaje de los estudiantes proporciona una dirección para las otras componentes, la selección de las tareas de aprendizaje y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes son interdependientes. Las tareas se seleccionan con base en hipótesis acerca del proceso de aprendizaje; las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje se basan en las tareas propuestas. Este constructo se fundamenta en los siguientes supuestos:

- 1. La construcción de una trayectoria hipotética de aprendizaje se basa en la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción.*
- 2. Una trayectoria hipotética de aprendizaje es el vehículo para planificar el aprendizaje de unos conceptos matemáticos concretos.*
- 3. Las tareas matemáticas proporcionan las herramientas para promover el aprendizaje de unos conceptos matemáticos concretos y, por lo tanto, son un elemento clave del proceso de instrucción.*
- 4. Dada la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el profesor se verá obligado a modificar sistemáticamente cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje.*

Steffe (2004) resalta la relevancia de esta noción dentro de la educación matemática (p. 130):

La construcción de trayectorias de aprendizaje de los niños es uno de los desafíos más urgentes a los que se enfrenta actualmente la educación matemática. Es también uno de los problemas más apasionantes porque es allí donde podemos construir nuestra comprensión de las matemáticas de los niños y cómo nosotros, como profesores, podemos influir en esas matemáticas.

No obstante, y aunque mayoría de los investigadores reconocen los tres elementos centrales de la trayectoria hipotética de aprendizaje (objetivos de aprendizaje, tareas matemáticas e hipótesis sobre el proceso de aprendizaje), y aceptan los cuatro supuestos mencionados arriba, cada quien interpreta y usa la noción con propósitos y de maneras diferentes.

En el número del *Mathematics Thinking and Learning* al que hice referencia más arriba, se perciben dos usos claramente diferenciados: como herramienta de investigación y como herramienta para la planificación. Los trabajos de Steffe (2004), Lesh y Yoon (2004) y Clements, Wilson y Sarama (2004) son trabajos esencialmente de investigación en los que se explora la trayectoria hipotética de aprendizaje para temas concretos. Por otro lado, los trabajos de Gravemeijer (2004) y Simon y Tzur (2004), aunque exploran también trayectorias hipotéticas de aprendizaje, se preocupan con mayor énfasis por su uso en la planificación del profesor. Finalmente, el trabajo de Battista (2004) se centra en la evaluación. En todos los trabajos, se desarrollan ejemplos de trayectorias hipotéticas de aprendizaje en temas matemáticos concretos. Para ello, los investigadores asumen el papel de profesores en aulas concretas. Aunque hay profesores que participan en algunos de los proyectos, ellos no son quienes producen los resultados de las exploraciones. De hecho, algunos de estos trabajos, como el de Steffe (2004) y el de Gravemeijer (2004) ven la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje como un trabajo *del* investigador, cuyos resultados pueden *apoyar* el trabajo del profesor.

Una de las principales diferencias en la interpretación de la noción tiene que ver con el nivel de concreción con el que se usa: desde la planificación de varias sesiones de clase, hasta el trabajo con actividades específicas en una parte de una sesión de clase. Por ejemplo, Gravemeijer (2004) indica que su propuesta de *teorías locales de instrucción* es “la descripción y fundamentación para la ruta de aprendizaje prevista en su relación con una colección de actividades de instrucción para un tema” (p. 107). Steffe (2004) y Lesh y Yoon (2004) también utilizan la noción para describir el aprendizaje de los escolares a lo largo de varias sesiones. Por su parte, Simon y Tzur (2004) ven la trayectoria hipotética de aprendizaje como una herramienta para la planificación de actividades de instrucción en el día a día de un aula. Finalmente, Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004) sugieren que la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje se puede utilizar para promover el “desarrollo micro-conceptual” (p. 234), siendo ésta la actividad central de la instrucción en el aula.

¿Qué relación hay entre la actividad diaria del profesor y la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje? En este punto encuentro ciertas discordancias en las propuestas de algunos de los investigadores a los que he hecho referencia. Por un lado, una de las características centrales de la noción tiene que ver con su carácter reflexivo: “hay una relación reflexiva en la que la trayectoria hipotética de aprendizaje es el trasfondo de los juicios y decisiones locales que, a su vez, modifican la trayectoria hipotética de aprendizaje” (Gravemeijer, Cobb, Bowers y Whitenack, 2000, pp. 249-250). Simon y Tzur (2004, p. 93), en el cuarto supuesto que indiqué más arriba, enfatizan también el papel del profesor en la construcción y revisión permanente de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Pero, ¿cómo hacer compatible el propósito de que sea el profesor quien construya y revise la

trayectoria hipotética de aprendizaje con el hecho de que la totalidad de los ejemplos que se tienen de trayectorias hipotéticas de aprendizaje han sido desarrollados por investigadores que han asumido el papel de profesores? De hecho, propuestas como las de Steffe (2004) y Lesh (2004) son tan complejas y técnicas que resultan poco prácticas para la mayoría de los profesores. Por otro lado, las propuestas de Simon (2004) y Gravemeijer (2004) tienen un carácter esencialmente preceptivo. Finalmente, Baroody, Cibulskis, Lai y Li (Baroody et al., 2004, p. 233) nos recuerdan que la validez ecológica se logra a costa de la falta de universalidad: si se comprueba que una trayectoria hipotética de aprendizaje es válida en una circunstancia particular (en un contexto y con unos estudiantes y un profesor concretos), esto no quiere decir que esa trayectoria hipotética de aprendizaje tenga sentido en otras circunstancias. Esta observación resalta la necesidad de que sea el profesor, con el conocimiento que tiene de sus alumnos, quien construya o adapte la trayectoria hipotética de aprendizaje que corresponde al objetivo que se ha impuesto, teniendo en cuenta las características del contexto concreto en el que tiene lugar la instrucción⁴².

Gravemeijer 2004 (2004, p. 107) aborda estas cuestiones y reconoce la dificultad que tendrían los profesores para construir trayectorias hipotéticas de aprendizaje como las que producen los investigadores. Pero, esto no quiere decir que lo único que se les pueda entregar sean secuencias de instrucción listas para usar. Él sugiere dos elementos que pueden ser útiles para los profesores:

- ◆ un marco de referencia y
- ◆ secuencias de actividades que les sirvan de ejemplo.

Pero, ¿qué puede hacer un profesor con esta información? ¿Cómo puede él usarla para producir y revisar sistemáticamente su propia trayectoria hipotética de aprendizaje para un tema, un contexto y unos escolares concretos?

Para responder a estas preguntas, a continuación, profundizo en uno de los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje: las hipótesis del profesor sobre el proceso de aprendizaje. El análisis cognitivo se puede caracterizar como el procedimiento en virtud del cual el profesor identifica, describe y organiza sus hipótesis sobre el proceso de aprendizaje de los escolares ¿Qué carácter deben tener estas hipótesis? ¿Cómo debe el profesor identificarlas y describirlas? ¿Qué herramientas puede utilizar el profesor para recabar y organizar la información que le permitirá formular sus conjeturas? Si, como argumenta Steffe (2004), “deben ser los profesores, al participar directamente en las actividades de construcción de los niños, quienes deben producir sus trayectorias hipotéticas de aprendizaje” (p. 155), ¿qué capacidades debe tener el profesor para ello? ¿Qué se puede hacer en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria para desarrollar esas capacidades?

La formación inicial debe ser la ocasión en la que los futuros profesores comiencen a desarrollar capacidades para construir trayectorias hipotéticas de aprendizaje que les permitan diseñar actividades de instrucción. Sin embargo, los futuros profesores que participan en este tipo de programas no tienen experiencia

⁴² Si se asume una posición sociocultural con respecto al aprendizaje, entonces el contexto en el que éste tiene lugar es trascendental. Ver, por ejemplo, Valero (2002, p. 546) y Gravemeijer (2004, p. 246).

docente y, en general, no tienen acceso a la práctica en aulas de matemáticas. Por consiguiente, ellos no pueden “participar directamente en las actividades de construcción de los niños”. En lo que sigue, sugiero una adaptación de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje que tiene en cuenta estas restricciones. Para ello, considero tres niveles de expectativas del profesor con respecto al aprendizaje de sus escolares. Introduzco, en primera instancia, las nociones de competencia y capacidad, para después caracterizar el concepto de objetivo de aprendizaje en términos de estas nociones.

8.2. Expectativas del Profesor: Noción de Competencia

Analizo a continuación dos aproximaciones a la noción de competencia: la propuesta de Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) sobre la idea de *pericia matemática*⁴³ y la elaboración que, en el proyecto PISA de la OCDE (OCDE, 2004; OECD, 2000; Rico, 2004b), se hace de las nociones de alfabetización matemática y competencia.

Pericia Matemática: el Reporte Adding—it Up

Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) utilizan la expresión “pericia matemática” para capturar el significado de aprender exitosamente matemáticas. La pericia matemática tiene cinco fibras (p. 5):

1. *Comprensión conceptual*: comprensión de los conceptos matemáticos, las operaciones y relaciones.
2. *Fluidez procedimental*: habilidad para realizar procedimientos de manera fluida, precisa, eficiente y apropiada.
3. *Competencia estratégica*: habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos.
4. *Razonamiento que se adapta*: capacidad para el pensamiento lógico, la reflexión, la explicación y la justificación.
5. *Disposición productiva*: inclinación para considerar las matemáticas como algo sensible, útil y que vale la pena, conjuntamente con la creencia de ser diligente y eficaz.

La pericia matemática está entonces definida en términos de cinco fibras entrelazadas que se deben desarrollar al unísono. En el reporte en cuestión, la pericia matemática se utiliza para definir los objetivos para todos los escolares en el área de números, y para hacer una crítica a la investigación. Observamos que la definición de pericia matemática tiene un carácter cognitivo y se basa (en sus tres primeras fibras) en las nociones de conocimiento conceptual, conocimiento procedimental y resolución de problemas.

Alfabetización Matemática y Competencias: el Reporte Pisa 2003

En el proyecto PISA de la OECD (OCDE, 2004; OECD, 2000; Rico, 2004b) se utiliza la noción de alfabetización matemática o formación matemática, como la capacidad de los escolares para utilizar las matemáticas con el propósito de afrontar los desafíos del futuro. Esta noción se define como (Rico, 2004b, p. 41):

⁴³ He traducido el término “proficiency” como pericia.

la capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades en la vida de cada individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.

Por otro lado, la alfabetización matemática “se asocia a la capacidad del alumno para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos en diferentes áreas de conocimiento y situaciones” (OECD, 2000, p. 71).

En el proyecto, se identifican cuatro aspectos (dos principales y dos secundarios) que organizan el área de conocimiento (matemáticas). Los principales son las competencias matemáticas y las grandes ideas matemáticas. Los aspectos secundarios son los temas matemáticos del currículo y las situaciones y contextos. Las situaciones se refieren al entorno en el que se presentan los problemas matemáticos. Por otro lado, se identifican y caracterizan siete competencias matemáticas generales que “deben ser relevantes y pertinentes en todos los niveles de la educación” (OECD, 2000, p. 74). En el contexto del proyecto PISA, Niss (2003) presenta la noción de competencia como la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en las situaciones en las que ellas pueden jugar un papel (p. 189):

Poseer una competencia matemática consiste en estar preparado y ser capaz de actuar matemáticamente sobre la base de conocimiento y perspicacia⁴⁴. Las acciones en cuestión son, tanto físicas, como de comportamiento (incluyendo lingüísticas) y mentales. Por lo tanto, la evaluación de las competencias matemáticas de un individuo debe fundamentarse en la identificación de la presencia y rango de sus competencias en relación con las actividades matemáticas en las que está o ha estado involucrado.

Niss resalta las siguientes características de la noción de competencia (pp. 188-189):

- ◆ tiene que ver con la actuación del individuo: se refiere a actividades, procesos y comportamientos mentales o físicos;
- ◆ es específica a las matemáticas;
- ◆ su foco se centra en lo que los individuos pueden hacer; y
- ◆ tiene una doble naturaleza: analítica, en el sentido de comprender, interpretar, examinar o evaluar; y productiva, en el sentido de su puesta en juego.

En el informe final del proyecto PISA se establecen las siguientes siete competencias (Rico, 2004b, pp. 48-49): (a) pensar y razonar, (b) argumentar, (c) comunicar, (d) modelar, (e) plantear y resolver problemas, (f) representar, y (g) utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

Análisis de las Aproximaciones

Resulta natural observar que las aproximaciones que he presentado tienen características comunes. No obstante, también se aprecian algunas diferencias. El proyec-

⁴⁴ “Insight”, en inglés.

to *Adding—it Up* propone una visión de la pericia matemática que resalta aspectos cognitivos, al incluir explícitamente referencias al conocimiento conceptual y procedimental. Por su parte, la propuesta del proyecto PISA focaliza la atención en las actuaciones de los escolares. Se habla de competencias y capacidades para realizar tareas.

En los dos proyectos, las competencias se introducen como aspectos de la formación matemática de los escolares que “deben ser relevantes y pertinentes en todos los niveles de la educación” (OECD, 2000, p. 74). Por lo tanto, la noción de competencia sirve como guía para las decisiones que, a nivel institucional, se tomen sobre el diseño curricular de una asignatura o un ciclo de asignaturas. Éste es un aspecto del contexto dentro del cual el profesor debe abordar el problema de planificación. *Las competencias establecen el vínculo entre el diseño curricular global que sigue el profesor y la planificación local que él debe realizar*. Por lo tanto, a la hora de diseñar una unidad didáctica o una hora de clase, el profesor debe valorar la medida en la que las actividades que propone contribuyen a las competencias que se enfatizan en ese diseño curricular global.

8.3. Expectativas del Profesor: Noción de Capacidad

En el contexto de las matemáticas escolares, utilizo el término *capacidad* para referirme a la actuación exitosa de un individuo con respecto a cierto tipo de tarea. Afirmaré que un individuo ha desarrollado una cierta capacidad cuando él pueda resolver las tareas que la requieren⁴⁵. Por lo tanto, las capacidades:

- ◆ son específicas a un tema concreto;
- ◆ pueden incluir o involucrar otras capacidades⁴⁶; y
- ◆ están vinculadas a tipos de tareas.

Por ejemplo, diré que un escolar ha desarrollado la capacidad para ejecutar, comunicar y justificar el procedimiento de completación de cuadrados cuando haya evidencia de que él puede resolver las tareas que implican ese aspecto. Este significado del término capacidad está basado en la concepción funcional de las matemáticas escolares, ya que esta noción relaciona aspectos cognitivos (un individuo desarrolla y manifiesta una capacidad al responder a requerimientos o demandas cognitivas), de contenido (es específica a un núcleo de contenido concreto) y de instrucción (se refiere a tipos de tareas) (Ver Figura 14).

⁴⁵ De esta manera, adapto, de acuerdo con una visión funcional de las matemáticas escolares, una de las acepciones para este término: “aptitud, talento, cualidad que dispone a alguien para el buen ejercicio de algo” (Real Academia Española, 2006).

⁴⁶ Dependiendo del nivel de concreción y del conocimiento previo del individuo al que se refiere la capacidad, una capacidad dada se puede caracterizar en términos de otras capacidades más específicas. Por ejemplo, la capacidad para completar cuadrados se puede caracterizar en otras capacidades más concretas que involucran procedimientos algebraicos. En este caso, como lo explicaré a continuación, “completar cuadrados” debe adquirir el estatus de objetivo de aprendizaje.

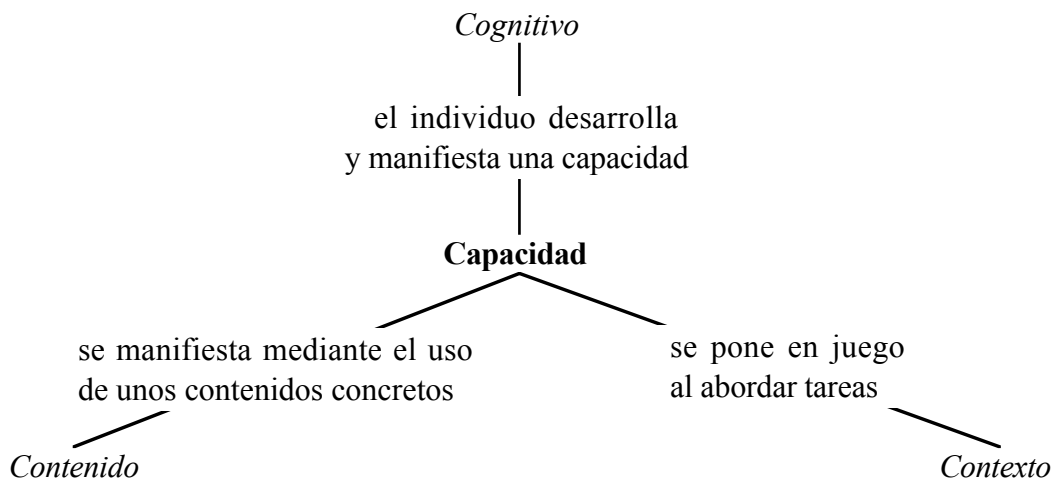


Figura 14. Noción de capacidad

Utilizaré la noción de capacidad como unidad básica de análisis. Una capacidad se caracteriza por un tipo de tareas y depende del nivel de conocimiento de los individuos a los que hace referencia. En el contexto de la planificación, el profesor puede formular “completar cuadrados” como una capacidad para escolares de bachillerato, si él considera que ellos deben conocer el procedimiento que se requiere para resolver las tareas que la caracterizan. Para otros escolares, de un nivel inferior, el profesor puede formular “completar cuadrados” como un objetivo de aprendizaje. Capacidades y objetivos son dos niveles de las expectativas del profesor. Profundizaré en su relación en secciones posteriores. El profesor también expresa expectativas de aprendizaje cuando enuncia, al comienzo de un ciclo del análisis didáctico, los objetivos de aprendizaje de una unidad didáctica y cuando, al comienzo del curso, negocia con sus colegas los objetivos de aprendizaje de la asignatura, en el seminario de matemáticas. Por lo tanto, hay al menos tres contextos en los que se puede utilizar el término objetivo de aprendizaje. De aquí en adelante, utilizaré dicho término para referirme a un objetivo de aprendizaje de una unidad didáctica. Éste es el nivel en el que el profesor es, en principio, autónomo para decidir qué objetivos quiere lograr, cómo los formula y cómo los caracteriza. Por otro lado, la formulación de estos objetivos de aprendizaje puede estar condicionada por otras expectativas de aprendizaje. Por ejemplo, los objetivos que se establecen en el programa (regional o nacional) delimitan las opciones disponibles a los profesores a la hora de formular objetivos de aprendizaje para una asignatura. Finalmente, el proyecto de centro u otros documentos (como estándares nacionales e internacionales) pueden establecer expectativas con respecto a la formación matemática de los escolares a lo largo su paso por la institución escolar.

Mi planteamiento para adaptar la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje a la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y proporcionar una herramienta que pueda ser utilizada por los profesores se basa en las nociones de capacidad y competencia. El procedimiento que propongo para describir el progreso de los escolares con respecto a un objetivo de aprendizaje concreto se fundamenta en la identificación, descripción y relación de cinco elementos:

1. las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción⁴⁷;
2. el objetivo de aprendizaje que el profesor espera que los escolares logren;
3. las tareas que conforman la instrucción;
4. las dificultades que los escolares pueden encontrar al abordar estas tareas; y
5. las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

El carácter reflexivo de la trayectoria hipotética de aprendizaje se expresa en este procedimiento en la relación simbiótica entre los puntos 3 y 5 y que exploraré en detalle al final de este apartado y en el siguiente. Los primeros dos puntos del procedimiento que sugiero requieren que el futuro profesor organice información sobre: (a) lo que los escolares son capaces de hacer antes de la instrucción y (b) lo que se espera que ellos sean capaces de hacer después de la instrucción. Lupiáñez y colaboradores (Lupiáñez y Rico, 2006, 2005) han desarrollado un procedimiento para organizar esta información, basado en la nociones de capacidad y competencia, que presentaré en la sección 8.5.

8.4. Objetivos de Aprendizaje y Núcleos de Contenido de una Unidad Didáctica

Mi propuesta, siguiendo a Simon y Tzur (2004), parte de la identificación, por parte del profesor, de un objetivo de aprendizaje que él espera que los escolares logren. En el marco de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje, supongo que el objetivo de aprendizaje al que se refiere Simon es *uno* de estos objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica para la que el profesor está diseñando una planificación. Este objetivo de aprendizaje es el marco de referencia que delimita y condiciona los procedimientos que el profesor debe realizar para formular sus conjeturas sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje de los escolares en relación con las actividades que él les proponga.

En lo que sigue, utilizaré como ejemplo uno de los posibles objetivos de una unidad didáctica sobre la función cuadrática: “reconocer, diferenciar y utilizar el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática y comunicar y justificar los resultados que obtenga de su aplicación”. Para efectos de simplificar la redacción, me referiré, en algunas ocasiones, a este objetivo como “manejar el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática”.

Desde la perspectiva curricular, un objetivo de aprendizaje concreto delimita una parcela del contenido. La Figura 5 representa (de manera parcial) los principales aspectos del contenido de la función cuadrática que corresponde al objetivo que formulé en el párrafo anterior. Utilizo el término *núcleo de contenido* para referirme a la parcela de contenido que corresponde a un objetivo concreto y diferenciarlo del término “tema matemático” que he utilizado hasta ahora para referirme al contenido de una unidad didáctica (e.g., la función cuadrática).

Un objetivo de aprendizaje es un constructo complejo. Si el profesor quiere diseñar tareas que promuevan en sus escolares el logro de un objetivo, es necesario caracterizarlo de tal forma que sea posible conjeturar de qué manera y en qué

⁴⁷ Aunque Simon no incluye este elemento en la propuesta original de la trayectoria hipotética de aprendizaje, sí enfatiza su importancia en su elaboración posterior (Simon y Tzur, 2004, p. 93).

medida una tarea (o una secuencia de tareas) pueden contribuir a su logro. Utilizaré, a continuación, las nociones de capacidad y competencia como constructos que permiten caracterizar, desde dos perspectivas complementarias, un objetivo de aprendizaje.

8.5. Caracterización de un Objetivo de Aprendizaje: Capacidades y Competencias

En esta sección pretendo mostrar cómo las nociones de capacidad y competencia permiten caracterizar un objetivo de aprendizaje. Esta caracterización es necesaria si el profesor quiere diseñar tareas (y secuencias de tareas) que induzcan a los escolares a lograr el objetivo de aprendizaje y a contribuir al desarrollo unas competencias previamente establecidas. Para caracterizar un objetivo de aprendizaje, desde esta primera perspectiva, el profesor debe: (a) identificar y formular las capacidades cuya puesta en juego puede contribuir al logro del objetivo y (b) establecer en qué medida el objetivo de aprendizaje contribuye a una lista de competencias.

¿Cómo identificar las capacidades cuya puesta en juego puede contribuir al logro del objetivo? Éste es el punto en el que, dentro del análisis didáctico y a partir de una visión funcional de las matemáticas escolares, se establece el vínculo entre el análisis de contenido y el análisis cognitivo. Dado que un objetivo de aprendizaje delimita un núcleo de contenido, la identificación de las capacidades que contribuyen a ese objetivo se puede realizar a partir del análisis de contenido que corresponde a dicho núcleo⁴⁸.

Tomemos como ejemplo el objetivo que formulé al comienzo de este apartado: “reconocer, diferenciar y utilizar el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática y comunicar y justificar los resultados que obtenga de su aplicación” y el núcleo de contenido correspondiente que se representa parcialmente en la Figura 5. Al analizar, interpretar y complementar esta información, el profesor puede identificar las capacidades que presento en la Tabla 2, como aquellas cuya puesta en juego puede contribuir al logro del objetivo en cuestión.

Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de transformaciones simbólicas

C1	Completación de cuadrados
C2	Expansión
C3	Factorización

Identificar, mostrar y justificar los parámetros

C4	Forma canónica (a, h, k)
C5	Forma foco (p, h, k)
C6	Forma estándar (a, b, c)
C7	Forma multiplicativa (a, r1, r2)

⁴⁸ Éste no es el único vínculo entre el análisis de contenido y el análisis cognitivo. La información que surge del análisis de contenido de un tema (e.g., la función cuadrática) puede usarse para establecer y formular los objetivos de aprendizaje para este tema. No profundizo aquí en este procedimiento.

<i>Identificar, mostrar y justificar los siguientes elementos gráficos</i>	
C8	Coordenadas del vértice
C9	Puntos de corte con el eje Y
C10	Puntos de corte con el eje X
C11	Coordenadas del foco
C12	Ubicación de la directriz
C13	Ubicación del eje de simetría
<hr/>	
<i>Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de transformaciones gráficas</i>	
C14	Traslación horizontal
C15	Traslación vertical
C16	Dilatación

Tabla 2. Capacidades para el objetivo “manejar el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática”

No hay una única manera de caracterizar un objetivo en términos de capacidades. El profesor toma decisiones al interpretar, de acuerdo con su conocimiento, metas y creencias, la información que surge del análisis del núcleo de contenido. Además, una vez identificado un aspecto del núcleo de contenido, la capacidad correspondiente se puede formular de diversas maneras, dependiendo de las acciones que el profesor supone que los escolares son capaces de realizar con respecto a ese núcleo⁴⁹.

El segundo procedimiento, establecer en qué medida el objetivo de aprendizaje contribuye a una lista de competencias, le permite al profesor verificar y reformular, si es el caso, las capacidades cuya puesta en juego puede contribuir al logro de dicho objetivo. Con este procedimiento, desarrollado por Lupiáñez y Rico (Lupiáñez y Rico, 2006; Lupiáñez et al., 2005), el profesor relaciona capacidades y competencias. Para cada capacidad que corresponde a un objetivo de aprendizaje, el profesor decide a qué competencias contribuye, construyendo una tabla de doble entrada *Capacidades-Competencias* en la que, para cada celda, el profesor establece si una capacidad dada contribuye o no a una competencia (ver Tabla 3)⁵⁰. La información que surge de esta tabla le permite al profesor establecer en qué medida (relativa) el conjunto de capacidades (cuya puesta en juego puede contribuir al logro de un objetivo de aprendizaje) contribuye a cada una de las competencias (sombreados que aparecen en la segunda fila de la Tabla 3). El análisis de este resultado, en términos de su conocimiento, metas y creencias y de las condiciones que le impone el contexto, puede inducir al profesor a revisar su elección y formulación de capacidades. Por ejemplo, como resultado de este análisis, el profesor puede identificar que se contribuye débilmente a la competencia de argu-

⁴⁹ En este documento no profundizo en esta problemática. El profesor puede referirse a una gran variedad de acciones como reconocer, identificar, mostrar, recordar, interpretar, ejemplificar, clasificar, generalizar, comparar, ejecutar, implementar, diferenciar, organizar, atribuir, verificar, criticar, conjeturar, comunicar y justificar.

⁵⁰ Los códigos que aparecen en la primera fila corresponden a las siete competencias PISA que enumere en la sección anterior.

mentación y puede decidir reformular algunas de las capacidades de tal forma que incluyan acciones que contribuyan al desarrollo de esa competencia⁵¹.

		PR	A	C	M	RP	R	LS
CARACTERIZAR Y RECONOCER FUNCIONES CUADRÁTICAS								
1	Construir ejemplos de funciones cuadráticas, simbólica y gráficamente.	X	X		X	X		
2	Proporcionar argumentos para justificar por qué una función es cuadrática ó no.	X	X		X	X		
3	Argumentar por qué una función cuadrática tiene siempre un extremo.				X	X		
4	Ejemplificar funciones cuadráticas con un extremo dado, simbólica y gráficamente.	X			X	X		
5	Identificar el vértice y el eje de simetría de una parábola.			X	X	X		
6	Identificar elementos en la expresión simbólica: variable, exponente, coeficiente,...			X	X			X
7	Usar términos habituales: función cuadrática (2º grado), igualdad, valores, gráfica,...			X				
8	Interpretar y manejar convenios habituales de representación: $f(x)=$, uso de "=", variables,...			X		X	X	X
9	Describir verbalmente situaciones asociables matemáticamente con una función cuadrática.			X			X	X
10	Describir situaciones y contextos en los que se encuentran formas u objetos parabólicos.			X			X	X

Tabla 3. Capacidades correspondientes al objetivo "Caracterizar y reconocer funciones cuadráticas" (Lupiáñez, 2005, p. 8)

La reflexión sobre las nociones de competencia y capacidad me permite regresar a los primeros dos puntos del procedimiento de análisis cognitivo que propuse en la sección 8.3: la descripción y caracterización, en términos de capacidades, del conocimiento previo de los escolares y del objetivo de aprendizaje que el profesor pretende que logren. Me he basado en la noción de capacidad para describir y caracterizar estos puntos extremos de la instrucción⁵². Por un lado, a partir de los resultados del análisis de actuación, el profesor puede construir una tabla de Capacidades-Competencias en la que registre aquellas capacidades que son relevantes para el tema que va a planificar y que considera que los escolares ya han desarrollado. Adicionalmente, el profesor puede también identificar las competencias a las que esas capacidades han contribuido. Por el otro lado, el profesor puede construir una segunda tabla, del mismo tipo, en la que registre las capacidades que él espera que los escolares hayan desarrollado con motivo de la instrucción y sus correspondientes competencias. El núcleo de la información en estas tablas es la lista de las capacidades que caracterizan el objetivo de aprendizaje.

⁵¹ La decisión de a qué competencias contribuye una capacidad es una decisión que el profesor debe ser capaz de justificar.

⁵² Ésta es la expresión que utiliza Gravemeijer (2004, p. 22).

8.6. Caracterización de un Objetivo: Caminos de Aprendizaje

Me queda por describir el modo en el que el profesor puede realizar los puntos 3, 4 y 5 del procedimiento de la sección 8.6. Dada una tarea, ¿cómo puede el profesor prever el aprendizaje de los escolares cuando ellos la aborden?, ¿cómo puede la formulación de estas hipótesis afectar el análisis y selección de las tareas?, ¿qué papel puede jugar el conocimiento del profesor sobre las dificultades de los escolares relacionadas con el objetivo de aprendizaje en cuestión? Abordaré estas preguntas basándome en la noción de camino de aprendizaje.

Un *camino de aprendizaje de una tarea* es una secuencia de capacidades que los escolares pueden poner en juego para resolverla. Siguiendo con el ejemplo del objetivo “manejar el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática” y, a partir de las capacidades que enumeré en la Tabla 2, supongamos la siguiente tarea T_1 : “dado que 2 y 6 son los cortes con el eje X de una parábola con dilatación 1, encontrar las coordenadas del vértice”. Un camino de aprendizaje para esta tarea es $C10 \rightarrow C7 \rightarrow C2 \rightarrow C6 \rightarrow C1 \rightarrow C4 \rightarrow C8$ (ver Tabla 2).

Los caminos de aprendizaje de una tarea se pueden representar en un grafo en el que se agrupan las capacidades correspondientes al objetivo de aprendizaje y se establece la secuencia de capacidades mediante vínculos entre ellas. La Figura 15 muestra un camino de aprendizaje para la tarea T_1 : reconocer los cortes en el eje X como elemento gráfico (C10), reconocer que esos cortes corresponden a los valores de r_1 y r_2 en la forma multiplicativa de la función cuadrática (C7), utilizar el procedimiento de expansión (C2) para obtener la forma estándar y reconocerla (C6), utilizar el procedimiento de completación de cuadrados (C1) para obtener la forma canónica e identificar y reconocer sus parámetros h y k (C4) y reconocer los valores de esos parámetros como las coordenadas del vértice en la representación gráfica (C8).

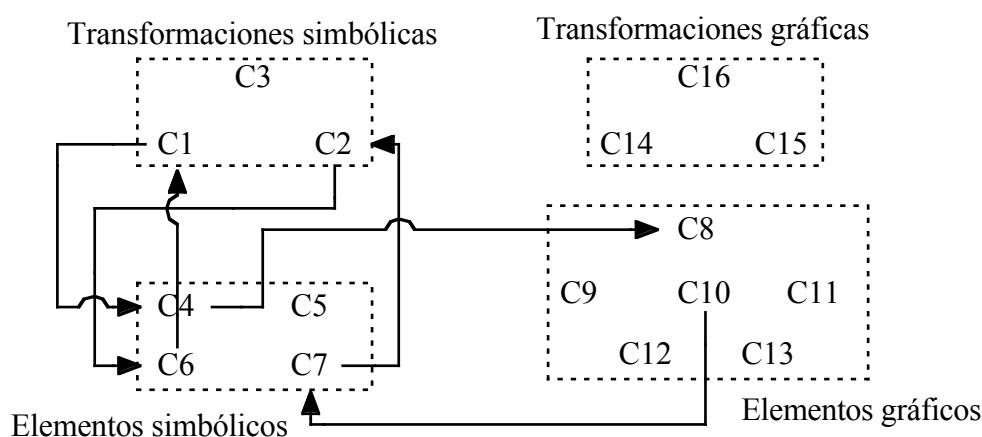


Figura 15. Camino de aprendizaje para la tarea T_1

El camino de aprendizaje para la tarea T_1 que represento en la Figura 15 informa al profesor sobre una secuencia *ideal* de capacidades que los escolares podrían poner en juego al abordar la tarea. La denomino ideal porque es la secuencia que surge de las condiciones que imponen la tarea y el núcleo de contenido que corresponde al objetivo de aprendizaje. Por ahora no he tenido en cuenta las dificultades que pueden manifestar los escolares al abordar la tarea o las estrategias al-

ternativas que ellos pueden utilizar y que ponen en juego capacidades que no corresponden al núcleo de contenido. Abordaré estas cuestiones más adelante. Desde esta perspectiva ideal, es posible hablar de los caminos de aprendizaje que corresponden a un objetivo de aprendizaje. Para ello, el profesor puede definir el conjunto de tareas (o tipos de tareas) que caracterizan el objetivo. Un conjunto de tareas T caracteriza un objetivo dado si el profesor considera que un individuo ha logrado el objetivo cuando es capaz de resolver las tareas incluidas en T ⁵³. Los caminos de aprendizaje de un objetivo son entonces aquellos que corresponden a las tareas de T . Resulta confuso representar en un grafo los caminos de aprendizaje de un objetivo. No obstante, en la Tabla 4 presento los vínculos que pueden constituir estos caminos de aprendizaje para el caso del objetivo del ejemplo que estoy considerando⁵⁴. Una flecha en una celda dada indica que es posible (desde el punto de vista del núcleo de contenido) vincular la capacidad que se encuentra en esa fila con la capacidad que se encuentra en esa columna. Los caminos de aprendizaje del objetivo del ejemplo, desde la perspectiva ideal, son las secuencias de capacidades que se pueden construir a partir de la información de la Tabla 4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1				→	→											
2						→										
3							→									
4		→						→						→	→	→
5		→									→	→	→			
6	→		→						→						→	→
7		→							→							
8				→										→	→	
9						→										
10							→									
11					→											
12					→											
13					→											
14				→				→								
15				→		→		→								
16				→		→										

Tabla 4. Vínculos posibles entre capacidades para el objetivo “manejar el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática”

Un objetivo de aprendizaje se concreta en aquellos caminos de aprendizaje que corresponden a un conjunto de tareas tales que el profesor considera que los escolares han logrado el objetivo si son capaces de resolverlas. Un camino de aprendi-

⁵³ Me refiero aquí a tareas *no* rutinarias para las que los escolares, antes de la instrucción, no conocen procedimientos preestablecidos. Por lo tanto, en el contexto de una planificación concreta, las tareas que caracterizan un objetivo son, desde la perspectiva de los escolares, diferentes de las tareas que caracterizan las capacidades. Éstas últimas son tareas rutinarias.

⁵⁴ La representación con un grafo de los caminos de aprendizaje permite agrupar las capacidades correspondientes. En la representación en una tabla esta posibilidad desaparece.

zaje es más que las capacidades que lo componen: es la secuencia de capacidades que permiten resolver un cierto tipo de tareas. Por lo tanto, un individuo ha logrado un objetivo si, para los tipos de tareas que lo caracterizan, es capaz de reconocer el camino de aprendizaje que corresponde a cada tipo de tarea y ejecutarlo con éxito.

El análisis y caracterización de un objetivo de aprendizaje desde el punto de vista de sus caminos de aprendizaje (en esta perspectiva ideal) pone de manifiesto, desde un punto de vista cognitivo (las posibles demandas cognitivas a las que deben responder los escolares), la complejidad propia del núcleo de contenido. También informa al profesor sobre los tipos de tareas que se pueden enunciar con respecto a ese objetivo y ese núcleo. Un *tipo de tarea*, en este contexto, se caracteriza por una o más secuencias de capacidades que las tareas que lo componen pueden requerir para su solución.

8.7. Caminos de Aprendizaje y Dificultades

Existe una estrecha relación entre las nociones de camino de aprendizaje y dificultad. Son las dos caras de una misma moneda. Cuando afirmamos que un escolar “puede ejecutar un camino de aprendizaje...”, estamos mirando una cara de la moneda. La otra cara corresponde a la afirmación “el escolar tiene una dificultad al...”. Tanto el camino de aprendizaje, como la dificultad se evidencian cuando el escolar aborda una tarea. Decimos que el escolar tiene una dificultad, cuando incurre en un error al abordar la tarea. Si resuelve la tarea exitosamente, afirmamos que esto puede ser evidencia de que sabe reconocer y ejecutar el camino de aprendizaje.

Al caracterizar un objetivo de aprendizaje en términos de sus caminos de aprendizaje, el profesor debe tener en cuenta su conocimiento sobre los errores y dificultades de los escolares. Por ejemplo, el profesor puede saber que sus estudiantes tienen dificultades para obtener la forma canónica de la función cuadrática dadas sus raíces y su dilatación. En el caso del objetivo de aprendizaje que he tomado como ejemplo, el profesor debe tener en cuenta las dificultades a las que se enfrentan los escolares cuando abordan tareas relacionadas con el significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática. Su experiencia le debe permitir identificar algunas de ellas. También las puede encontrar en la literatura. Por ejemplo, Zaslavsky (1997) identificó varios obstáculos⁵⁵ relacionados con la función cuadrática. En Gómez y Carulla (1998) identificamos las siguientes dificultades originadas en la instrucción:

- ◆ Reconocimiento de dos únicas formas simbólicas (estándar y multiplicativa).
- ◆ Desconexión entre las formas simbólicas.
- ◆ Desconexión entre los diferentes sistemas de representación.

El profesor puede entonces incluir esta información en su análisis de los caminos de aprendizaje para un objetivo. Esto lo puede hacer, por ejemplo, marcando en la tabla de caminos de aprendizaje aquellas capacidades que corresponden a esas dificultades. Para el caso de la primera dificultad, esto implica resaltar las capacida-

⁵⁵ No entro aquí en el análisis de la relación entre obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas (ver, por ejemplo, Radatz, 1979; Rico, 1995b; Socas, 1997).

des C4 y C5 y sus vínculos (ver la Tabla 4). De esta manera, él puede decidir que tiene que favorecer aquellas tareas que involucren esas capacidades y los vínculos correspondientes.

La enumeración y descripción de dificultades tiene sentido cuando ya se han identificado y caracterizado las capacidades correspondientes al núcleo de contenido al que se refiere el objetivo de aprendizaje para el que el profesor desea producir una planificación. El análisis de las dificultades indica las cuestiones claves que hay que tener en cuenta dentro de ese proceso. Son secuencias de capacidades de la red de caminos de aprendizaje sobre los que el profesor debe insistir. En principio, las tareas que él diseñe deben buscar poner en juego aquellas secuencias de capacidades que involucran dificultades de los escolares.

La experiencia también puede informar al profesor sobre las dificultades de los escolares. Algunas de estas dificultades pueden llevar al profesor a ampliar el núcleo de contenido y la lista de capacidades correspondientes. Por ejemplo, es posible que el profesor sepa que, al abordar la tarea T_1 que enuncié antes, algunos escolares, una vez que han obtenido la forma estándar de la función, hacen la gráfica de esta función (por procedimientos gráficos —transformaciones— o numéricos) y estiman las coordenadas del vértice a partir de dicha gráfica. Si el profesor considera que ésta es una dificultad de los escolares, debe tenerla en cuenta y hacerla explícita en su análisis de los caminos de aprendizaje. Para ello, deberá por ejemplo, tener en cuenta las capacidades necesarias para producir la gráfica de una función con procedimientos numéricos.

8.8. Selección de Tareas

Hasta ahora he sugerido procedimientos para identificar y organizar las capacidades de los escolares antes y después de la instrucción y para tener en cuenta las dificultades de los escolares en la descripción de los caminos a lo largo de los cuales se puede desarrollar el aprendizaje. Pero, esta reflexión no ha incluido el análisis y la selección de las tareas. Qué caminos pueden recorrer los escolares dependerá de las tareas que se les proponga. La descripción de las capacidades y de los caminos de aprendizaje le permiten al profesor producir conjeturas sobre esos caminos y, al hacerlo, revisar las tareas que puede proponer en su diseño. Dado que, en el caso de la formación inicial, las tareas no se llevarán a la práctica, el proceso es hipotético. En la Figura 16 describo el procedimiento que un futuro profesor puede realizar para seleccionar las tareas que formarán parte de su propuesta de planificación.

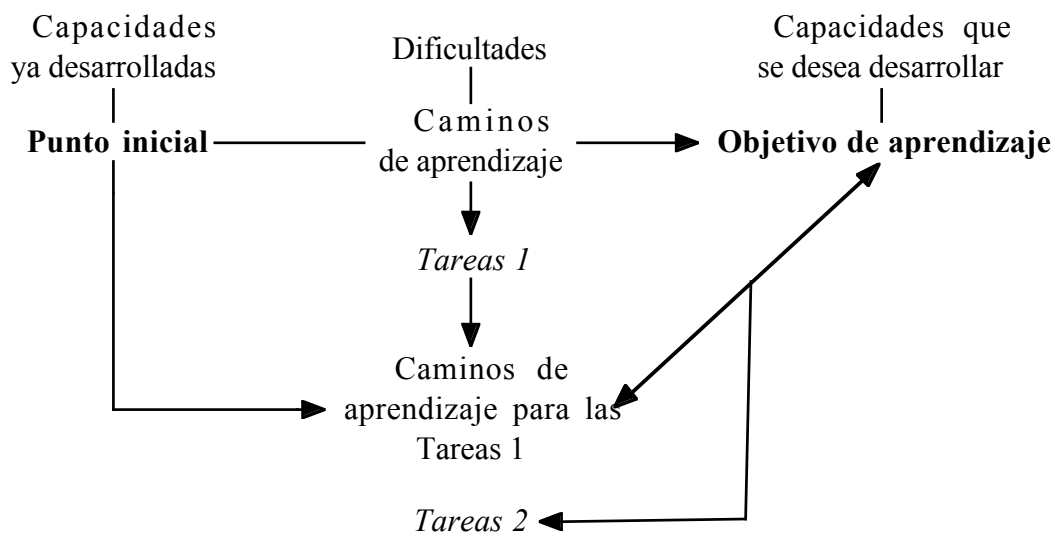


Figura 16. Ciclo de planificación local

Como lo describí en la sección anterior, la caracterización del objetivo de aprendizaje en términos de su contribución a las competencias y de sus caminos de aprendizaje, le dan luces al futuro profesor sobre las secuencias de capacidades que sería deseable que los escolares pusieran en juego al realizar las tareas. Con esta información, él puede diseñar y seleccionar una primera versión de esas tareas (Tareas 1 en la Figura 16). Una vez que tiene identificadas unas tareas, él debe verificar cuáles son las secuencias de capacidades que ellas requieren y aquellas que los escolares pueden poner en juego al abordarlas. Esta revisión le dará luces para revisar su propuesta de tareas y podrá producir una nueva versión de ellas⁵⁶ (Tareas 2 en la Figura 16). Profundizaré en este procedimiento en el siguiente apartado.

8.9. Dos Significados Cognitivos de las Matemáticas Escolares

Comencé este apartado enunciando que, en el análisis cognitivo, “el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, 2002b, p. 271). La revisión de la literatura mostró que la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje puede facilitar ese propósito. Con esta revisión, puse de manifiesto la importancia de esa noción en la actuación docente del profesor de matemáticas cuando diseña actividades de enseñanza y aprendizaje. No obstante, tal y como se presenta en los diversos trabajos analizados, la noción no se adapta a las condiciones y propósitos de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Por esa razón, basándome en los principios que estructuran la idea de trayectoria hipotética de aprendizaje y en una visión funcional de las matemáticas escolares, he presentado un procedimiento con el que el futuro profesor puede

⁵⁶ Este es el punto en el que el procedimiento que propongo aquí se diferencia de los procedimientos que se basan en la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje. En el caso, de la trayectoria hipotética de aprendizaje, ésta se revisa con motivo de la actuación en el aula de los escolares al abordar las tareas.

realizar el análisis cognitivo. Este procedimiento requiere que el profesor identifique y formule las capacidades de los escolares cuya puesta en juego puede contribuir al logro del objetivo de aprendizaje que el profesor pretende lograr. El profesor puede caracterizar el objetivo de aprendizaje desde dos perspectivas. En la primera, él puede establecer en qué medida el objetivo de aprendizaje contribuye a una lista de competencias, al utilizar la tabla Competencias-Capacidades. En la segunda, él puede identificar los caminos de aprendizaje del objetivo en cuestión.

La noción de trayectoria hipotética de aprendizaje y el procedimiento que he propuesto en este apartado resaltan la relación simbiótica entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción. Si pretendemos atender a las actuaciones y construcciones de los escolares en el aula, al formular conjeturas sobre los caminos a lo largo de los cuales se puede desarrollar el aprendizaje, entonces las tareas que diseñemos o seleccionemos tienen que tener en cuenta esos caminos de aprendizaje y su contribución a las competencias. Simultáneamente, una vez que seleccionamos unas tareas, podemos prever aquellos caminos que son favorecidos por ellas y en qué medida contribuyen a las competencias (ver Figura 17). En este apartado, he centrado mi atención en la primera parte de esta relación, al presentar dos procedimientos que permiten caracterizar un objetivo de aprendizaje en términos de sus caminos de aprendizaje y su contribución a las competencias. En el siguiente apartado, abordo la segunda parte de la relación.

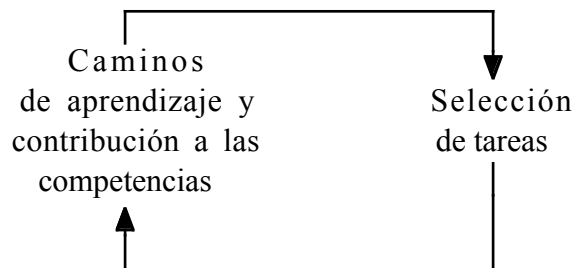


Figura 17. Caminos de aprendizaje y selección de tareas

9. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

9.1. Planificación de la Instrucción

En este apartado, introduzco el análisis de instrucción como el procedimiento en virtud del cual el profesor puede analizar y seleccionar las tareas disponibles para el diseño de las actividades de enseñanza y aprendizaje. Más adelante daré un significado concreto a los términos “tarea” y “actividad”. El análisis de instrucción utiliza la información que surge del análisis de contenido y del análisis cognitivo para efectos de analizar y seleccionar las tareas que se pueden utilizar en el aula (Gómez, 2002b, p. 277). La separación entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción es analítica: estos dos análisis dependen el uno del otro, puesto que, como mostré en la sección 8.8, el resultado que surge de la identificación de los caminos de aprendizaje (o de la selección de tareas) afecta el análisis de las tareas (o la identificación de los caminos de aprendizaje). En la Figura 18 ubico el análisis de instrucción en el contexto de los otros tres análisis del análisis didáctico.

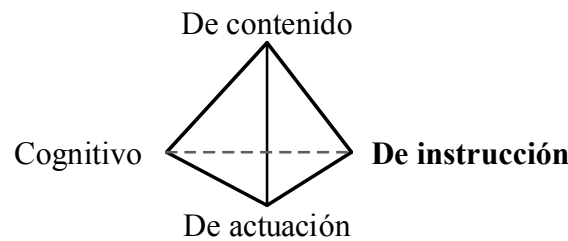


Figura 18. El análisis de instrucción en el análisis didáctico

La planificación de la instrucción es un proceso complejo que involucra, entre otras cosas, el análisis y la selección de tareas. Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) destacan la importancia de las tareas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de la siguiente manera:

Las tareas son centrales para el aprendizaje de los estudiantes, puesto que configuran, no solamente sus oportunidades para aprender, sino también su visión del contenido (p. 335).

Destacamos la idea de que el diseño de las lecciones debe combinar dos elementos: una elaboración significativa de los objetivos de contenido que uno tiene y una detallada y completa previsión de y una preparación para las posibles respuestas de los estudiantes (p. 337).

La eficacia con la que una tarea matemática contribuye al aprendizaje de los estudiantes es una función, tanto de su calidad, como de su potencial para estimular el aprendizaje de las matemáticas y de las interpretaciones y usos que los estudiantes hagan de ella... Por lo tanto, una de las cuestiones importantes cuando se diseñan tareas matemáticas consiste en tener en cuenta lo que los estudiantes ya saben y en maximizar la posibilidad de que los estudiantes progresen en el aprendizaje del contenido. Este proceso implica juicios acerca de cómo diseñar de tal forma que las tareas anticipen las respuestas de los estudiantes y estén estructuradas en pasos matemáticos del tamaño adecuado (p. 350).

En este apartado, abordo estas cuestiones. En particular, centraré mi atención en el análisis y selección de tareas para la planificación, en el contexto de un objetivo de aprendizaje concreto que el profesor pretende lograr. Éste será un análisis parcial porque no consideraré la problemática de planificar para un conjunto de objetivos, abordaré superficialmente el problema de la secuenciación de tareas y sólo consideraré la gestión de clase desde la perspectiva del diseño, análisis y selección de tareas⁵⁷. Comienzo el apartado regresando a la paradoja de la planificación. Después abordo las nociones de actividad y tarea y sugiero algunas de las características que debe tener una tarea. A partir de las nociones de capacidad y competencia, y utilizando las herramientas que propuse en el análisis cognitivo, establezco un procedimiento para el análisis y selección de tareas, que ejemplifico para el caso del significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas que analicé en el apartado anterior. Finalmente, sacó partido de este procedimiento

⁵⁷ El análisis de instrucción es objeto de un trabajo en curso en nuestro grupo de investigación (ver Marín, 2005).

para presentar algunas consideraciones sobre la planificación de la gestión de clase, la relación entre el diseño de tareas y la resolución de problemas y el uso de recursos en el aula.

9.2. La Paradoja de la Planificación

No es posible abordar la planificación de la instrucción sin asumir una posición con respecto a la enseñanza. La relación entre una posición filosófica (e.g., dualismo, pluralismo, instrumentalismo, relativismo extremo), una visión del aprendizaje (e.g., conductismo, constructivismo simple, constructivismo radical, constructivismo social, cognición situada, comunidades de aprendizaje) y un estilo de enseñanza (e.g., autoritario-instrucción por imposición, semi-autoritario-explicador, democrático-facilitador, completamente democrático-guía) ha sido considerada en diversos estudios (ver, por ejemplo, Baroody et al., 2004, pp.227-230; Ernest, 1989; Socas, 1998). En este apartado, centro la atención en la paradoja de la planificación que se insinúa en la cita de Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) anterior y que mencioné al comienzo del apartado 1 (Ainley y Pratt, 2002, p. 18; Ainley y Pratt, 2006, pp. 24-25). Diversos autores han considerado esta paradoja. Por ejemplo, y desde la perspectiva de la formación del profesor, Sullivan (2002, p. 290) afirma que

si miramos la enseñanza como un proceso en el que se determinan previamente unos objetivos y se diseñan unas actividades que pretenden llevar a los estudiantes al logro de esos objetivos, entonces el estudio del currículo y de la gestión de clase es seguramente suficiente. Pero si se espera que la enseñanza y el aprendizaje incluyan un componente interactivo y dependan de cómo el profesor interactúa con los estudiantes, entonces [otros aspectos también] son importantes.

Krainer (1993, pp. 66-67) aborda el problema desde del punto de vista de la *certidumbre* en la enseñanza y el aprendizaje: por un lado se tiene la seguridad de unas matemáticas bien establecidas que deberían dar lugar a cursos bien configurados que manifiesten eficiencia económica y vías de trabajo bien desarrolladas; por el otro, está la contribución de los escolares a la instrucción y la importancia de que ellos investiguen y descubran, lo que contribuye a la inseguridad.

Herbst (2003) reformula y aborda la paradoja del constructivismo al identificar tres tensiones en la práctica de un profesor que utiliza tareas originales⁵⁸. Él describe la paradoja como la dualidad que enfrenta el profesor entre ser capaz de reaccionar rápida y apropiadamente a las actuaciones de los escolares y la responsabilidad de cumplir con unos programas de desarrollo del conocimiento que han sido preestablecidos institucionalmente. Es la dualidad entre el profesor como compañero (o acompañante) en, y el profesor como diseñador de la empresa de desarrollo del conocimiento, empresa ésta que relaciona escolares, profesor y contenido matemático, y en la que se encuentran inmersas las tareas.

En resumen, si se pretende que, tanto el profesor, como los escolares sean partícipes del proceso de construcción del conocimiento de estos últimos, entonces la planificación de la instrucción y, por lo tanto, el análisis y selección de las tareas matemáticas debe prever la actuación de los escolares. En este apartado,

⁵⁸ “Novel tasks”, en inglés.

abordaré esta cuestión. Sin embargo, antes de hacerlo, debo concretar el significado que utilizaré para los términos *tarea* y *actividad*.

9.3. Tarea y Actividad

Siguiendo a Doyle (1986, p. 399), estructuro lo que sucede en el aula en los siguientes niveles: (a) sesión, (b) lección (colección de actividades ligadas a un contenido), (c) actividad y (d) tarea. En este apartado me intereso por los últimos dos niveles y utilizaré los términos “tarea” y “actividad” con unos significados concretos. Según Doyle (1986), “la actividad es la unidad básica de la organización del aula” (p. 398) y se caracteriza dependiendo del tipo de organización que genera (e.g., individual, en grupo). Herbst (2003) describe de la siguiente manera las cuatro componentes generales de las tareas académicas propuestas por Doyle (1988, p. 169): “(a) un producto que hay que obtener; (b) operaciones que se hacen para producir ese producto; (c) recursos que se usan en esa producción; (d) importancia de la tarea en el sistema de responsabilidades de la clase” (pp. 204-205). Por su parte, Christiansen y Walther (1986) hacen un análisis detallado de estas dos nociones, basándose en la teoría de actividad de Leont’ev. Según estos autores, “la actividad procede a través de un sistema de acciones que buscan un propósito” (p. 255). La tarea (aquello que asigna el profesor) se convierte en el objeto de la actividad del estudiante (p. 260) y la enseñanza a través de actividades implica la necesidad de planificar con el propósito de utilizar la actividad del estudiante como el principal vehículo para lograr el aprendizaje que se pretende (p. 265).

Las reflexiones anteriores ilustran la complejidad conceptual que se encuentra involucrada en las nociones de *tarea* y *actividad*. En lo que sigue,

- ◆ utilizaré el término *tarea* para referirme a las demandas estructuradas de actuación que el profesor da a los escolares;
- ◆ me referiré, por otro lado, a las *actividades* que escolares y profesor realizan con motivo de una *tarea*.

En los dos puntos anteriores se encuentran implícitas varias cuestiones que conviene hacer explícitas. Al asignar una *tarea* (o una secuencia de *tareas*), el profesor tiene un propósito con respecto al aprendizaje de los escolares. Éste es el objetivo de aprendizaje concreto que condiciona y delimita la planificación y para el que el profesor puede establecer en qué medida contribuye a unas competencias. Al abordar una *tarea*, los escolares tienen un propósito (resolverla). Las actividades de los escolares y del profesor se componen de acciones⁵⁹ que pretenden lograr los propósitos correspondientes. Al ejecutar dichas acciones, tanto escolares, como profesor, ponen en juego una colección de capacidades que contribuyen al desarrollo de las competencias. La planificación del profesor, debe incluir, no solamente el análisis y selección de las *tareas*, sino también la previsión de las posibles acciones de los escolares al abordar una *tarea* y de las secuencias de

⁵⁹ "Una acción es una actividad consciente, física o imaginada, con un propósito" (Battista, 2004, p. 186). En sus comentarios a Simon (1995a), Steffe y D’ambrossio (1995) elaboran la noción de acción dentro del marco constructivista. Desde la perspectiva que presenté en el apartado anterior, un escolar realiza una acción cuando pone en juego una capacidad o cuando establece y ejecuta el vínculo entre dos capacidades.

capacidades que ellos pueden poner en juego al realizarlas (camino de aprendizaje).

Ilustro gráficamente estos vínculos en la Figura 19, en la que se observa la estrecha relación entre la noción de tarea y las nociones de capacidad y competencia en las que basé el análisis cognitivo. Esta relación será central en el procedimiento que propondré más adelante para el análisis y selección de tareas.

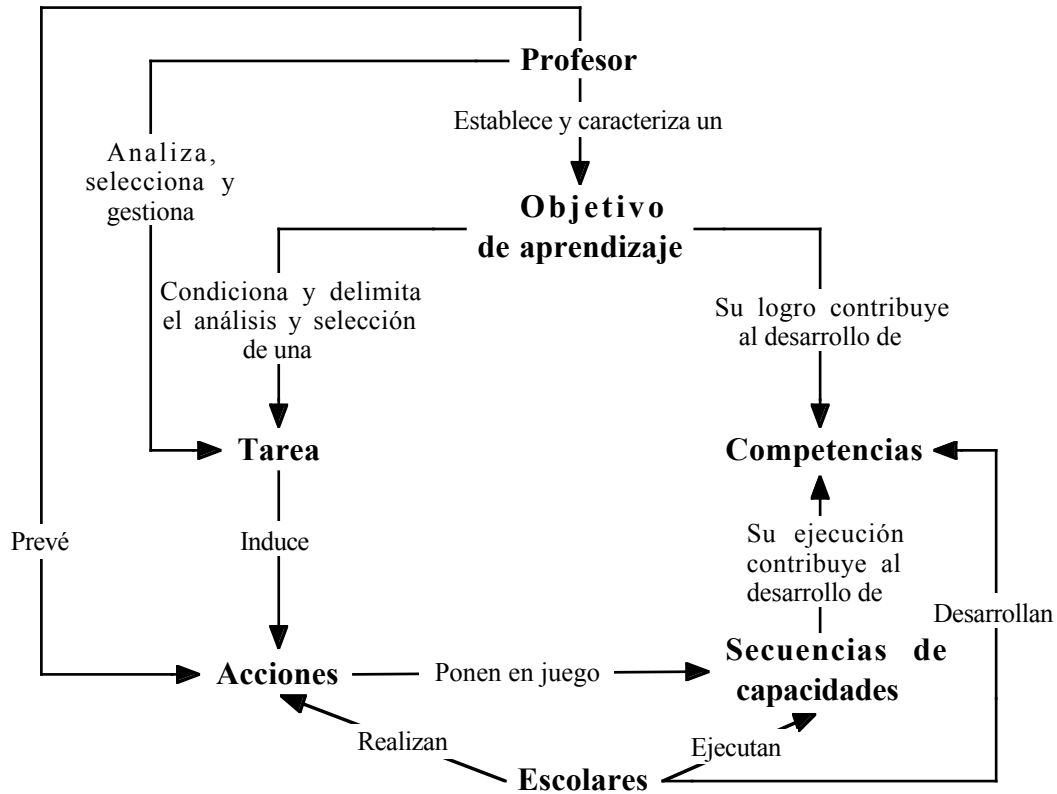


Figura 19. Objetivo de aprendizaje, tarea, capacidades y competencias

9.4. Características de una Tarea

¿Qué características debe tener una tarea?⁶⁰ Las tareas son unidades fáciles de manejar que permiten abordar situaciones más complejas como el diseño de unidades didácticas. Krainer (1993) sugiere algunas propiedades de lo que él llama “tareas potentes”⁶¹ (p. 68): deben permitir establecer conexiones con otras tareas; deben insinuar nuevas preguntas; deben incitar a la actuación de los escolares en el proceso de construcción de los conceptos; y deben generar reflexión en los escolares. Marín (2005, pp. 2-3) enumera, por su parte, algunos indicadores para la selección, diseño y organización de las tareas.

Simon y Tzur (2004, p. 93) sugieren un mecanismo que fundamenta estas características “deseadas” de una tarea y que aborda la pregunta “¿Cómo puede una tarea contribuir a que los escolares construyan *nuevo* conocimiento? Ellos lo de-

⁶⁰ Diversos autores, siguiendo a Polya (1945), diferencian entre tareas rutinarias y no rutinarias y llaman, a estas últimas, problemas. En este apartado utilizo el término tarea como equivalente a problema.

⁶¹ “Powerful tasks”, en inglés.

nominan el *mecanismo de reflexión sobre las relaciones entre actividades y sus efectos*. Según estos autores, el proceso comienza cuando los aprendices establecen un propósito con motivo de la tarea, propósito que no se debe confundir con el objetivo de aprendizaje determinado por el profesor. Habiendo establecido un propósito, los aprendices ejecutan acciones que ponen en juego sus capacidades para efectos de lograr su propósito y tienen en cuenta los efectos de sus acciones. Los aprendices construyen un nuevo concepto al reflexionar sobre las relaciones entre las acciones y sus efectos. Baroody, Cibulskis, Lai y Li (2004) sugieren que la propuesta de Simon y Tzur se fundamenta en el principio de *novedad moderada* de Piaget en virtud del cual, “aquella información que se encuentra justo por fuera de la comprensión del aprendiz puede ser, al menos, parcialmente asimilada (comprendida), puede provocar acomodación y es interesante para el aprendiz” (p. 237).

Es precisamente a partir de las ideas de Piaget que Waldegg (1998) caracteriza una tarea (situación problemática) como

una situación novedosa caracterizada en función de las hipótesis mencionadas, así:

- *es significativa para el estudiante porque encuadra en contextos o circunstancias que les son familiares y atractivos y, por tanto, motivantes;*
- *el estudiante es capaz de resolverla a partir de sus conocimientos y estructuras cognitivas previas; pero*
- *representa un desafío intelectual porque, lejos de requerir de un algoritmo o de un procedimiento rutinario, es una situación diseñada para obligar al estudiante a reestructurar sus conocimientos y explicaciones con el fin de dar solución al problema;*
- *da lugar a una modificación de las estructuras cognitivas previas del estudiante que le permite incluir, en las explicaciones originales, nuevos casos o contextos de aplicación de los conceptos involucrados (p.24)⁶².*

9.5. Procedimiento de Análisis de Tareas

Diversos autores clasifican las tareas de diferentes maneras (Doyle, 1986). Muchas de estas clasificaciones se centran en sus características intrínsecas. Por ejemplo, las tareas se pueden clasificar de acuerdo con el tipo de organización que generan en el aula: hay tareas que los escolares realizan individualmente y otras que realizan en grupo. Mi interés aquí no tiene que ver con este tipo de clasificación. El foco de mi interés se centra en *el análisis de tareas como recurso para el logro de un objetivo de aprendizaje a través de la puesta en juego de los caminos*

⁶² Se puede observar una relación entre esta caracterización de una tarea y la tríada de la enseñanza propuesta por Jaworski y utilizada por Potari y Jaworski (2002) como herramienta de reflexión y análisis de la enseñanza. La tríada pretende ser una descripción de cómo se puede buscar un equilibrio entre tres dominios de las actividades de enseñanza: aquéllas que corresponden a la gestión del aprendizaje de los estudiantes, a reaccionar de manera sensible a sus necesidades y a proponer desafíos que sean interesantes desde el punto de vista matemático (p. 352). Mientras que la propuesta de Waldegg surge de una reflexión sobre los principios del constructivismo, la tríada de la enseñanza es una herramienta de análisis que surge de la observación de clase.

de aprendizaje que lo caracterizan. En este sentido, me intereso en dos criterios para analizar y seleccionar una tarea: la medida en que la tarea contribuye al desarrollo de las competencias y las secuencias de capacidades (caminos de aprendizaje) que la tarea puede inducir a los escolares a poner en juego.

El modelo de la Figura 19 sienta las bases para este propósito. El análisis de una tarea parte de la caracterización del objetivo de aprendizaje en términos de su contribución a las competencias y sus caminos de aprendizaje y debe ser un procedimiento que permita:

1. identificar las capacidades (y los posibles vínculos entre ellas) que se pueden poner en juego cuando los escolares la aborden;
2. construir el grafo de los caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando aborden la tarea;
3. identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir y en qué medida; y
4. evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información.

En lo que sigue, describo este procedimiento para el análisis de tareas. Para ello, utilizo al ejemplo que trabajé en el apartado anterior.

9.6. Análisis y Selección de Tareas

Regreso al objetivo de aprendizaje que utilicé para los ejemplos del apartado anterior: “reconocer, diferenciar y utilizar el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática y comunicar y justificar los resultados que obtenga de su aplicación”. En ese apartado analicé la tarea T_1 desde la perspectiva de sus caminos de aprendizaje y observé que esta tarea, desde un punto de vista ideal, admite un único camino de aprendizaje. La descripción que hice en la sección 8.6 me permite producir la tabla Capacidades-Competencias para esta tarea. Para ello, considero cada una de las capacidades que se ponen en juego en el camino de aprendizaje en cuestión y establezco (en el contexto de ese camino de aprendizaje) a qué competencias contribuye cada una de esas capacidades. Bajo el supuesto de que la tarea se formula en un ambiente de trabajo individual y que sus resultados no se comunican o justifican, obtengo los resultados de la Tabla 5 en la que he incluido únicamente las capacidades que idealmente se ponen en juego con motivo de la tarea.

Capacidades	Competencias						
	PR	A	C	M	RP	R 57%	LS 43%
C1							×
C2							×
C4						×	
C6						×	

Capacidades	Competencias						
	PR	A	C	M	RP	R	LS
						57%	43%
C7							×
C8						×	
C10						×	

PR: pensar y razonar, A: argumentar, C: comunicar, M: modelar, RP: plantear y resolver problemas, R: representar, y LS: utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.

C1: completación de cuadrados, C2: expansión, C4: forma canónica, C6: forma estándar, C7: forma multiplicativa, C8 coordenadas del vértice, C10: puntos de corte con el eje X.

Tabla 5. Contribución a competencias de la tarea T_1

Este análisis muestra que la tarea T_1 contribuye únicamente a las competencias de representar y utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones. El análisis de los caminos de aprendizaje de esta tarea, que presenté en la sección 8.6, mostró que T_1 genera un único camino de aprendizaje, la secuencia $C10 \rightarrow C7 \rightarrow C2 \rightarrow C6 \rightarrow C1 \rightarrow C4 \rightarrow C8$. Con motivo de esta información, el profesor puede decidir, ya sea formular la tarea de otra manera (que podría, por ejemplo, poner en juego capacidades que contribuyan a las competencias de argumentar y comunicar) o desecharla para considerar una nueva tarea. Supongamos que elige la segunda opción y que, con motivo de la información que ha obtenido en los análisis anteriores, considera la siguiente tarea T_2 :

Una parábola tiene como coordenadas de su foco $(0, \frac{9}{4})$ y como ecuación de su directriz $y = \frac{7}{4}$. Se obtiene mediante una traslación vertical de dos unidades a partir de la parábola básica cuya representación simbólica es $y = x^2$. Encuentre las coordenadas de su vértice, sus cortes con los ejes X y Y , la ecuación de su eje de simetría y sus formas simbólicas. Justifique sus resultados.

La Figura 20 presenta el grafo de los caminos de aprendizaje de esta tarea. Se observa que este grafo es más complejo que el de la tarea T_1 (Figura 15). Esta diferencia en la complejidad de los dos grafos es consecuencia de que hay más de un camino de aprendizaje para la tarea T_2 y que estos caminos de aprendizaje ponen en juego un mayor número de capacidades. Estas características de T_2 también se manifiestan en su tabla Capacidades-Competencias (que no incluyo aquí).

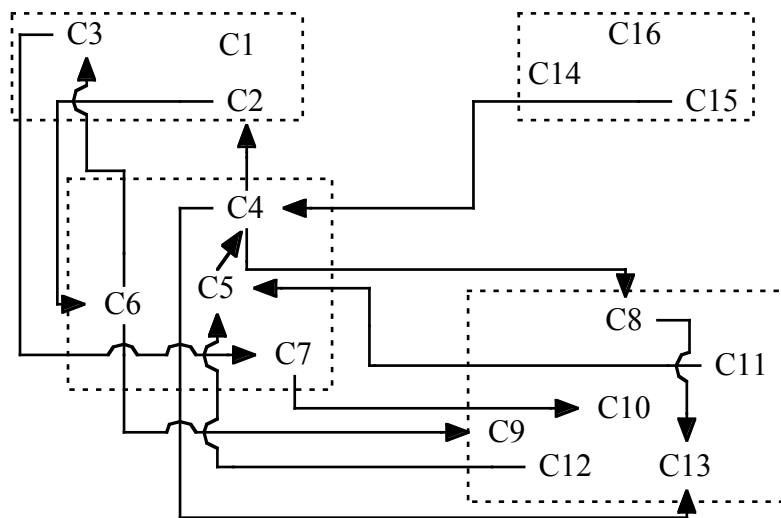


Figura 20. Caminos de aprendizaje para la tarea T_2

Al reflexionar sobre las características de la tarea T_2 y su relación con los caminos de aprendizaje, el profesor puede concluir que él puede combinar T_2 con otras tareas similares en las que los datos iniciales corresponden a otros atributos de la parábola en cuestión (ver Gómez, Mesa, Carulla, Gómez y Valero, 1996, pp. 77-79). En este sentido, el análisis de tareas a partir de sus caminos de aprendizaje proporciona información al profesor tanto para comparar y seleccionar tareas, como para diseñar secuencias de tareas que contribuyan al logro de un objetivo de aprendizaje concreto.

9.7. Procedimiento para el Análisis de Instrucción

El análisis y selección de tareas es un procedimiento esencial del diseño de unidades didácticas. El profesor necesita herramientas que le permitan establecer, con algún grado de certidumbre, la pertinencia de una tarea (o secuencia de tareas) con respecto a los objetivos de aprendizaje que él se ha propuesto. En la sección anterior he presentado las bases de un procedimiento que puede ser útil a la hora de analizar y seleccionar tareas que contribuyan al logro de un objetivo de aprendizaje concreto. Este procedimiento permite evaluar la pertinencia de las tareas e involucra los siguientes pasos:

1. Establecer el contexto en el que se va a realizar la tarea. Esto implica:
 - ◆ especificar el nivel educativo en el que tiene lugar la instrucción;
 - ◆ describir, en términos de competencias, las principales características del diseño curricular global en el que se enmarca la planificación local que incluye las tareas en cuestión;
 - ◆ explicitar los supuestos acerca de las normas (sociales y socio-matemáticas) que caracterizan la micro-cultura del aula (Yackel y Cobb, 1996).
2. Seleccionar un objetivo de aprendizaje concreto para cuyo logro se seleccionarán las tareas.
3. Como parte del análisis cognitivo, producir la tabla de Capacidades-Competencias para el objetivo de aprendizaje. Esto implica:

- ◆ a partir de la información que surge del análisis de contenido y de las competencias que se busca desarrollar, establecer el núcleo de contenido del objetivo de aprendizaje e identificar las capacidades que se consideren relevantes;
 - ◆ establecer a qué competencias contribuyen dichas capacidades y revisar el enunciado de las mismas para que se adapten a las condiciones del primer punto.
4. Caracterizar el objetivo de aprendizaje en términos de su contribución a las competencias y sus caminos de aprendizaje.
 5. Seleccionar unas tareas.
 - ◆ En general, el profesor parte de tareas ya existentes y el propósito es evaluar su pertinencia para efectos de compararlas, rechazarlas o modificarlas.
 6. Evaluar las tareas con respecto a su tabla Capacidades-Competencias. Esto implica, para cada tarea,
 - ◆ identificar las capacidades (y los vínculos entre ellas) que se pueden poner en juego cuando los escolares aborden la tarea; e
 - ◆ identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir.
 7. Construir el grafo de los caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando aborden cada tarea.
 8. Establecer a qué competencias contribuye la tarea y en qué medida.
 9. Evaluar la pertinencia de las tareas a partir de esta información.
 10. Aceptar, rechazar o modificar las tareas y establecer una secuenciación.

9.8. Planificación de la Gestión de Clase

En este documento no abordo la problemática de la gestión de clase desde la perspectiva de la práctica del profesor. Como lo expliqué al comienzo de este capítulo, mi preocupación se centra en la planificación de la instrucción. Por lo tanto, en esta sección centro mi atención en la planificación de la gestión de clase. Y, dentro de este contexto, tampoco analizo la gestión de clase, en aquellos aspectos que se refieren a “las cuestiones de cómo establecer y mantener el orden en el entorno del aula” (Doyle, 1986, p. 392). No obstante, la gestión de clase como “la planificación y el procedimiento para establecer y mantener un entorno en el que enseñanza y aprendizaje pueden tener lugar” (Duke, 1979, p. xii, citado en Doyle (1986, p. 394)), implica que el profesor no sólo debe actuar para “mantener el orden en el aula”, sino que también debe prever y gestionar sus actuaciones de tal forma que los escolares logren los objetivos de aprendizaje. ¿Cómo puede el profesor planificar la gestión de clase de manera eficaz y eficiente?

Si se ve la enseñanza como un proceso en el que se determinan previamente unos objetivos y se diseñan unas actividades que pretenden inducir a los escolares al logro de esos objetivos, entonces la gestión de clase es relativamente sencilla. El profesor debe poner en juego las tareas que ha seleccionado, esperar que los escolares las realicen y evaluar *posteriormente* los resultados de la actividad resultante. En este contexto, el profesor es un ejecutor de un plan preestablecido. No obstante, si el profesor pretende acompañar a los escolares en y promover el desa-

rollo de su pensamiento matemático y, por lo tanto, pretende atender y reaccionar a sus actuaciones *en el mismo momento en que éstas tienen lugar cuando ellos abordan las tareas*, entonces la gestión de clase se convierte en un problema complejo: “las tareas originales extienden los límites de la gestión de clase e intensifican la complejidad de la tarea del profesor como organizador y director de los eventos del aula” (Doyle, 1988, p. 174, citado en Herbst (2003, p. 239)). La complejidad de la gestión de clase se refiere, por consiguiente, a la posible discordancia que, siguiendo a Simon y Tzur (2004, p.92), he identificado como la “paradoja de la planificación”, entre la necesidad de reaccionar rápida y apropiadamente a las actuaciones de los escolares y la obligación de cumplir con unos programas establecidos institucionalmente. Esta paradoja implica tensiones y dilemas que son naturales e intrínsecos a la gestión de clase, algunos de los cuales han sido identificados y caracterizados por Herbst (2003, pp. 206-207)⁶³. La noción de *trayectoria hipotética de aprendizaje*, que analicé al comienzo de este capítulo, y la adaptación de esta noción a la planificación en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que he propuesto, y que se manifiesta en la tabla de Capacidades-Competencias y en el grafo de los caminos de aprendizaje, son herramientas conceptuales y metodológicas que pueden permitir al profesor abordar la paradoja de la planificación.

Estas herramientas le permiten al profesor incluir, dentro de la planificación, sus hipótesis sobre cómo el aprendizaje puede desarrollarse en la práctica del aula. Pero, ¿qué pasa si los escolares actúan de maneras que no están previstas en la planificación? El profesor deberá en todo caso, reaccionar a estas actuaciones no previstas. Y deberá hacerlo en el momento en el que ellas tienen lugar. El hecho de que surjan actuaciones que él no ha previsto, significa que algunos de los supuestos en los que él basó sus previsiones no eran válidos. Es decir, esta diferencia entre lo previsto y lo que realmente sucede puede ser un indicativo de dificultades y obstáculos que el profesor creía superados o que no logró prever, o de capacidades o estrategias no previstas que los escolares ponen en juego. Por lo tanto, esta discordancia puede invalidar la planificación hecha previamente. En este caso, el profesor puede considerar que no tiene sentido continuar con un seguimiento estricto de la planificación inicial. Él tendrá entonces que reformular los objetivos y los contenidos de al menos una parte de su planificación y producir una o más tareas que aborden esos errores y dificultades o que saquen partido de esas capacidades y estrategias. Para ello, tendrá que realizar, sobre la marcha, un nuevo ciclo de análisis didáctico (en particular, en lo que se refiere al análisis cognitivo y al análisis de instrucción) que, partiendo de su percepción de las dificultades, capacidades y estrategias no previstas, pueda sustentar sus nuevas decisiones y actuaciones. Aunque la gestión de clase incluye otros aspectos que no

⁶³ Estas tensiones se refieren a (Herbst, 2003, pp. 206-207):

1. *La dirección o guía de la actividad de los escolares*: el profesor debe buscar un propósito explícito, pero debe estar abierto y preparado para reaccionar a lo que surja con motivo de las actuaciones de los escolares;
2. *Representaciones (recursos)*: el profesor debe dotar a los escolares de lo que necesitan para realizar la tarea, pero debe ser suficientemente impreciso para que los escolares puedan matematizar;
3. *Actuaciones de los escolares*: el profesor debe definir lo que es relevante en la actuación de los escolares, pero debe dejar una cierta ambigüedad con respecto a lo que hay que hacer.

trato aquí (como, por ejemplo, el manejo de la disciplina), veo la gestión de las matemáticas escolares dentro del aula como un juego entre las actuaciones que el profesor tiene previstas en su planificación previa y las decisiones y las actuaciones que el profesor realiza con base en análisis didácticos “sobre la marcha” cuando las actuaciones de los escolares no corresponden a sus previsiones⁶⁴.

9.9. Diseño de Tareas, Resolución de Problemas y Modelización

Hasta ahora, en este apartado, he sugerido un procedimiento que, para una tarea ya diseñada, permite analizarla y evaluarla. Pero, ¿cómo seleccionar, diseñar o adaptar tareas? Las tareas a las que me refiero son tareas no rutinarias. Me refiero, por lo tanto, a lo que en la literatura se conoce como “problemas” y al correspondiente proceso de resolución de problemas. En particular, como lo prometí en la sección 7.5 de este capítulo, en esta sección pretendo relacionar tres elementos del análisis didáctico: el análisis fenomenológico, la resolución de problemas y la selección, diseño y adaptación de tareas.

La resolución de problemas como eje central de la formación matemática de los escolares ha sido uno de los aspectos más destacados del movimiento de reforma de la educación matemática que, desde la década de los ochenta, tiene lugar a nivel internacional. Este movimiento de reforma tuvo su origen en reportes sobre el estado de la educación en Estados Unidos como *Una Agenda para la Acción* (NCTM, 1980), *Una Nación en Riesgo* (NCEE, 1983) y *Un Reporte sobre la Crisis en la Educación en Matemáticas y Ciencias* (AAAS, 1984) y recibió aún mayor ímpetu con las publicaciones del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 1989, 1991, 2000). Recientemente, el Proyecto PISA de la OECD (2004) resalta la importancia de desarrollar en los escolares las capacidades para clarificar, formular y resolver problemas. ¿Cómo desarrollar en los escolares la capacidad para usar e implicarse con las matemáticas (en el sentido de formular y resolver problemas) y qué papel juega el diseño y selección de tareas en el desarrollo de esta capacidad? Resulta evidente que el profesor deberá proponer tareas (problemas) que, en alguna medida, induzcan a los escolares a desarrollarla. Esto me lleva a resaltar la competencia de modelización en la selección de las tareas. En el marco del análisis de contenido, describí la idea de modelo como una relación biunívoca entre elementos y propiedades de una subestructura de la estructura matemática y características estructurales de fenómenos sociales, naturales y matemáticos y establecí su relación con el análisis fenomenológico (ver Figura 11). Estas relaciones entre estructura matemática y fenómenos se expresan, por parte de los escolares y a la hora de abordar una tarea, en el proceso de modelización y en las destrezas, los razonamientos y las estrategias que ellos deben desarrollar para identificar el modelo matemático que corresponde a un fenómeno (o a un problema que se refiere a un fenómeno), para expresar ese fenómeno o problema en términos de uno o más sistemas de representación, para resolver el problema o interpretar el fenómeno dentro de esos sistemas de representación, para traducir la solución o la interpretación en términos del fenómeno, y para verificar esa solución o interpretación. En el esquema de

⁶⁴ Como ya lo mencioné en la nota 62, la posición que propongo aquí es compatible con la tríada de la enseñanza propuesta por Jaworski (1994), como herramienta de análisis de, y reflexión sobre las actividades de enseñanza.

la Figura 21 he identificado estos procedimientos, desde la perspectiva del escolar. Por otro lado, también he identificado (en subrayado) dos procedimientos que el profesor debe realizar para diseñar la tarea: el análisis fenomenológico, como el procedimiento que le permite establecer la relación entre fenómenos (y los problemas que se refieren a ellos) y la estructura matemática; y la simplificación del fenómeno o problema, es decir, la transformación que el profesor debe hacer del problema del mundo real a un texto del tipo que comúnmente se conoce como problema de palabras (Ortíz, 2000, p. 15).

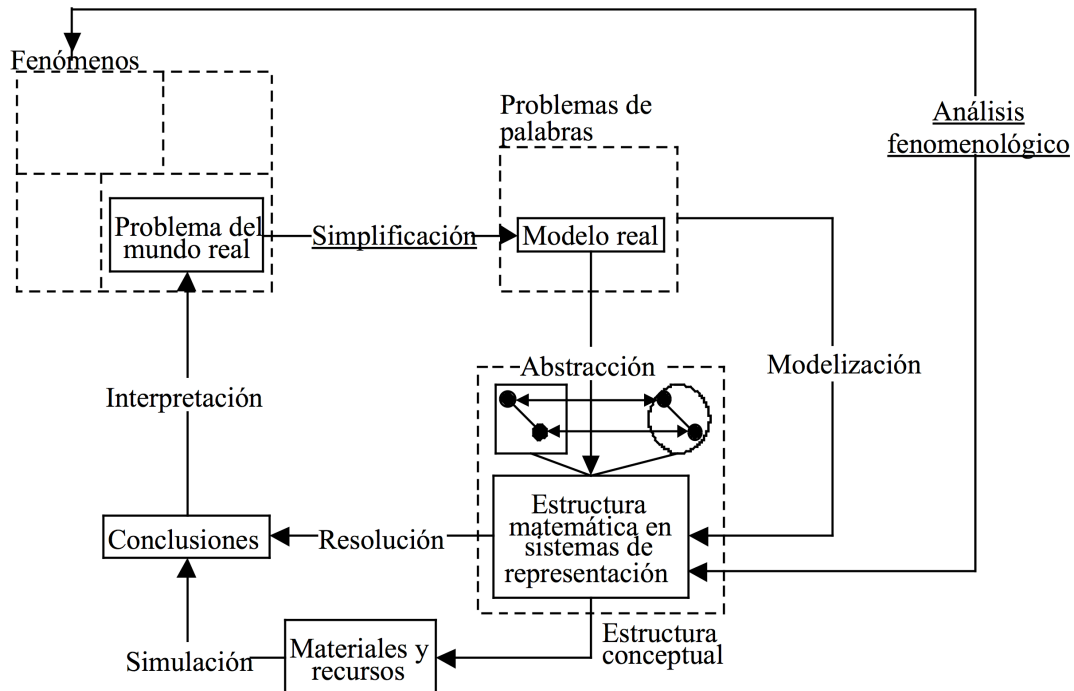


Figura 21. Análisis fenomenológico, resolución de problemas y modelización

El análisis fenomenológico y la simplificación de problemas del mundo real, como actividades que el profesor debe realizar para diseñar una tarea, son procedimientos complejos. Por un lado, es aquí donde el trabajo del análisis fenomenológico, realizado en el marco del análisis de contenido, da sus frutos. Al organizar los fenómenos que están relacionados con una estructura matemática en términos de las subestructuras que pueden servirles de modelo, el profesor tiene a su disposición una información que le permite seleccionar fenómenos en función de las subestructuras de la estructura matemática que él pretende que los escolares pongan en juego. En palabras de Freudenthal (1983 p. 23),

El análisis didáctico-fenomenológico puede orientar al investigador [y al profesor] hacia problemas prácticos que sean adecuados como punto de impacto para un proceso de matematización progresiva. Por lo tanto, en cambio de buscar material que concrete un concepto dado, la fenomenología didáctica sugiere que se busquen fenómenos que puedan crear oportunidades para que el aprendiz constituya el objeto mental que es matematizado por ese mismo concepto.

La identificación de un fenómeno (o de un problema del mundo real) es sólo el primer paso en el diseño de una tarea. El siguiente paso, que en la Figura 21 he denominado *simplificación*, consiste en construir el enunciado del problema que los escolares han de abordar. Este proceso no es sencillo y, para realizarlo, el profesor ha de tener en cuenta al menos los siguientes aspectos⁶⁵:

1. presencia de la estructura matemática en el enunciado de la tarea,
2. precisión (o ambigüedad) con la que se expresa lo que se espera que los escolares realicen, y
3. recursos que los escolares tendrán disponibles para abordar la tarea⁶⁶.

A continuación considero conjuntamente los primeros dos puntos. Trataré el tercero en la siguiente sección. Según Lesh (1997), la actividad tradicional de resolución de problemas implica una situación no matemática que ya tiene una estructura, en la que hay un problema “claro” y para la que la actividad de los escolares consiste en identificar un modelo de la situación para resolver el problema. Ésta es la “aproximación exploratoria”, originalmente formulada por Doerr (1997) y cuya característica definitoria es que “los alumnos exploran simbolizaciones matemáticas convencionales en situaciones reales de experimentación. La intención instruccional se encuentra usualmente bien definida y, en general, involucra el desarrollo de las comprensiones matemáticas de los alumnos que son inherentes a un uso maduro de las simbolizaciones” (Gravemeijer et al., 2000, p. 228). En este tipo de tareas, los escolares tienen que encontrarle el significado a unas simbolizaciones predeterminadas, en cambio de tratar de producir las suyas propias (Lesh y Doerr, 2000, p. 367).

En la “aproximación expresiva”, las simbolizaciones convencionales no son presentadas a los escolares dentro del enunciado de la tarea. Por el contrario, se espera que ellos se enfrenten a situaciones que generen la necesidad de “inventar” sus propias simbolizaciones. Con la ayuda del profesor y de las normas que rigen la interacción, se espera que las simbolizaciones convencionales surjan como producto de una negociación. Es lo que Lesh (1997) denomina actividades de obtención de estructuras.

Finalmente, Gravemeijer (2000) sugiere que la “educación matemática realista” (e.g., Freudenthal, 1973; Gravemeijer, 1994; Streefland, 1991; Treffers, 1993) es una tercera aproximación. En esta aproximación, se define una posible ruta de desarrollo (una idea similar a la trayectoria hipotética de aprendizaje), se parte de unas heurísticas determinadas⁶⁷ y se enfatiza la importancia de la guía del profesor en el manejo del contexto de negociación y en la construcción de nuevas simbolizaciones que estén acordes con la situación, los problemas y los intereses de los alumnos.

El paso de un problema del mundo a real a un texto para ser incluido en el enunciado de una tarea es un procedimiento complejo, puesto que el profesor debe

⁶⁵ Además de las características generales “deseadas” de una tarea mencionadas por Waldegg (1998, p. 24) y que enumeré anteriormente.

⁶⁶ En la formulación de estos aspectos he adaptado las tensiones que el profesor enfrenta en la práctica, propuestas por Herbst (2003) y que enumeré en la nota 63, al contexto de la planificación (diseño y selección de tareas).

⁶⁷ Reinención guiada, análisis fenomenológico y modelización emergente (Gravemeijer, 2004).

enfrentarse, de nuevo, a la paradoja de la planificación. A continuación, presento algunas reflexiones sobre el tercer punto que mencioné más arriba: los recursos que los escolares tendrán disponibles para realizar la tarea.

9.10. Recursos para el Diseño y Análisis de Tareas

La noción de recurso admite una gran variedad de interpretaciones en la educación matemática. En general, cuando se habla de materiales y recursos se piensa en la tiza y la pizarra, el ordenador, el geoplano o la prensa, por ejemplo (Coriat, 1997). Adler (2000) sugiere una visión más amplia de la noción de recurso, que va más allá de los materiales. Ella clasifica los recursos en tres categorías (pp. 210-213):

1. *Humanos*, en los que el profesor es el recurso más importante.
2. *Materiales*, que incluyen:
 - ◆ *tecnologías*, como la pizarra o el ordenador;
 - ◆ *materiales de las matemáticas escolares*, como los libros de texto, el geoplano o la calculadora gráfica;
 - ◆ *objetos matemáticos*, como las representaciones (e.g., el plano cartesiano);
 - ◆ *de todos los días*, como el dinero.
3. *Culturales*, que incluyen el lenguaje y el tiempo que se utilizan de maneras diferentes, dependiendo del contexto.

No pretendo justificar la importancia de los recursos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Tampoco pretendo comentar la literatura sobre materiales y recursos en educación matemática. Basta ver la extensa producción que existe sobre el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Mi interés en esta sección se centra en el papel de los recursos materiales en el diseño, análisis y selección de tareas.

El universo de tareas disponibles para un objetivo de aprendizaje (y los correspondientes caminos de aprendizaje) pueden ampliarse si el profesor tiene en cuenta los materiales y recursos disponibles y la manera como estos materiales y recursos permiten diseñar experiencias matemáticas complementarias a aquellas que es posible proponer con papel y lápiz. Los materiales y recursos pueden transformar las estrategias que profesor y escolares utilizan para representar los conceptos y estructuras conceptuales que forman parte de la estructura matemática (Gómez, 1997). Por ejemplo, algunos materiales manipulativos pueden convertirse en “modelos no matemáticos” de subestructuras de la estructura matemática que se desea tratar. Con estos modelos físicos (como el ábaco) es posible establecer una relación biunívoca entre algunos elementos de la estructura matemática y elementos del modelo y entre las normas que rigen el manejo del modelo y las normas matemáticas que regulan los elementos correspondientes de la estructura matemática. De esta manera, la manipulación del modelo permite “simular” el funcionamiento de la estructura matemática y genera un nuevo significado para ella (ver la Figura 21). Otros materiales y recursos, como las calculadoras y algunos programas de ordenador, pueden verse como sistemas de representación complementarios en los que, no sólo se representan los conceptos involucrados, sino que también es posible manipular dinámicamente estos conceptos. Estos modelos y estas nuevas representaciones pueden sugerir nuevas situaciones en las que los

escolares ponen en juego su conocimiento al resolver tareas y, por lo tanto, pueden insinuar nuevas tareas para abordar los objetivos de aprendizaje.

Dada una colección de recursos disponibles, ¿cómo analizar la pertinencia de cada uno de ellos y cómo usarlos eficaz y eficientemente en el diseño de tareas? Supongamos, por ejemplo, que, en el caso de los ejemplos que analicé en este apartado, la calculadora gráfica forma parte de los recursos que se utilizan usualmente en el aula. Supongamos, además, que cada escolar tiene una calculadora gráfica y que puede usarla en todo momento, inclusive durante las evaluaciones. ¿Cómo cambia el análisis de la tarea T_2 de la sección 9.6?

Si los escolares pueden utilizar calculadoras gráficas para abordar esta tarea, entonces es muy posible que ellos *ejecuten acciones y pongan en juego capacidades que no serían factibles sin el uso de la tecnología*. Por ejemplo, los escolares pueden:

- ◆ experimentar con diferentes formas simbólicas y observar su gráfica en la calculadora, y
- ◆ evaluar en la calculadora valores de la función y comparar el resultado con la información de la tabla.

En otras palabras, los escolares ponen en juego sus capacidades para utilizar las funcionalidades de la calculadora (e.g., manejo dinámico de sistemas de representación). Esto puede implicar, por ejemplo, que el uso de la tecnología fomente la formulación de conjeturas y su verificación (Carulla y Gómez, 1997).

Al introducir un recurso y utilizarlo en el diseño de las tareas, el profesor puede inducir a los escolares a poner en juego capacidades que no aparecerían si el recurso no estuviese disponible. Es en este sentido que los recursos (y, en particular, la tecnología) permite a los escolares vivir nuevas “experiencias matemáticas”. No obstante, esta situación no afecta el procedimiento de análisis de tareas que he propuesto en este apartado. El profesor tendrá que formular conjeturas sobre las acciones que realizarán los escolares, sobre las capacidades que ellos pondrán en juego para ejecutarlas y sobre las competencias a las que estas capacidades contribuyen (ver Figura 19). Tanto la tabla de Capacidades-Competencias, como los caminos de aprendizaje cambiarán. Por lo tanto, la pertinencia del uso de un recurso en una tarea será una función de su contribución a los objetivos de aprendizaje y de comparar esta contribución con el resultado del análisis de tareas alternativas (Gómez, EnPrensa).

9.11. Una Aproximación Parcial al Análisis de Instrucción

En este apartado he presentado una aproximación parcial al análisis de instrucción. Mi propuesta se restringe al análisis de una tarea con respecto a un objetivo de aprendizaje concreto. Pero, el diseño de una unidad didáctica, objeto del análisis de instrucción, es un proceso más complejo y va más allá del análisis de una tarea.

Al final de la sección 9.6 sugerí un criterio para la secuenciación de tareas con respecto a un objetivo de aprendizaje: las tareas deben complementarse en su propósito de poner en juego los caminos de aprendizaje que configuran dicho objetivo. En este sentido, el profesor debe agrupar, en tipos, las tareas que caracterizan un objetivo de aprendizaje. Un tipo de tareas es un conjunto de tareas concretas que generan los mismos caminos de aprendizaje. La secuenciación de tareas

debe ser tal que incluyan tareas de diversos tipos que se complementen entre sí (que impliquen diferentes caminos de aprendizaje).

La secuenciación de tareas debe también tener en cuenta las dificultades de los escolares que el profesor considera relevantes, junto con las estrategias alternativas que él prevé que ellos pueden poner en juego. Esto implica que, en la secuenciación, el profesor debe dar preferencia a aquellos tipos de tareas cuyos caminos de aprendizaje incluyen dificultades de los escolares. Por otro lado, al reconocer que los escolares pueden poner en juego capacidades que no surgen del análisis ideal de un objetivo de aprendizaje (por ejemplo, utilizar procedimientos numéricos para construir la gráfica de la función y , a partir de la gráfica, estimar los valores de algunos de sus elementos), el profesor debe extender el análisis cognitivo del objetivo en cuestión (la lista de capacidades correspondientes) e incluir en su planificación tareas que pongan en juego dichas capacidades. En los dos casos, dificultades y estrategias alternativas, el profesor debe buscar la generación de conflictos: diferencias entre cómo los escolares pretendían resolver la tarea y una solución exitosa de la misma.

En este apartado, tampoco he profundizado en la problemática de diseñar una secuenciación de tareas que aborde el conjunto de objetivos de aprendizaje de una unidad didáctica. En general, los objetivos de una unidad didáctica no son independientes. Queda, por lo tanto, sin analizar cómo se pueden utilizar las herramientas que he presentado (tabla Capacidades-Competencias y caminos de aprendizaje) para lograr una secuenciación de tareas que tenga en cuenta las características y relaciones entre los objetivos de aprendizaje para una unidad didáctica. En palabras de Marín (2005), cómo se puede lograr el “equilibrio de la propuesta global de tareas de la unidad de formación” (p. 3).

Simon y Tzur (2004, p. 96) reconocen, en el contexto de la construcción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje, la dificultad de encontrar actividades que estén disponibles para los escolares y que puedan ser usadas para su aprendizaje. El procedimiento que he propuesto puede ayudar a los profesores a abordar esta cuestión en la práctica. Este procedimiento utiliza información e instrumentos que están disponibles para el profesor: la información que surge del análisis de contenido y su conocimiento sobre las dificultades de los escolares. Con estos instrumentos e información, él puede producir los caminos de aprendizaje para un objetivo de aprendizaje y, a partir de esta información, junto con una propuesta inicial de tareas, explorar qué tan eficaz es una tarea (o secuencia de tareas) para el logro del objetivo.

Mi propósito en este capítulo no era el de proporcionarle al profesor un instrumento para producir trayectorias hipotéticas de aprendizaje como las propuestas por Simon y Tzur. Tal propósito está por fuera del alcance de la mayoría de los profesores. Sin embargo, al seguir las pautas y principios de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje, he propuesto un instrumento más sencillo y menos ambicioso. Este instrumento puede ser usado por el profesor de manera sistemática y reflexiva, y su aplicación le permite, en la medida de su conocimiento y capacidades, seleccionar tareas que promuevan el logro del objetivo por parte de los escolares. En este sentido, no espero que el profesor produzca hipótesis específicas sobre el proceso de aprendizaje. El instrumento informa al profesor sobre los

diferentes caminos de aprendizaje que pueden ponerse en juego con motivo de una secuencia de tareas.

Aunque mi propuesta se distancia de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje, algunos vínculos se mantienen. En particular, he sugerido que el aprendizaje emerge cuando los escolares reconocen y ejecutan caminos de aprendizaje que los inducen a establecer vínculos entre capacidades y les permiten resolver exitosamente tareas. El procedimiento de Simon y Tzur de reflexión sobre la relación entre actividades y sus efectos se puede adaptar a esta circunstancia: los escolares aprenderán (lograrán un objetivo de aprendizaje) en la medida en que reflexionen sobre los efectos de ejecutar una combinación adecuada de los caminos de aprendizaje que caracterizan ese objetivo.

He mostrado que, cuando se formula adecuadamente y se analiza en detalle, un objetivo de aprendizaje es un constructo complejo: puede ser caracterizado por una multiplicidad de caminos de aprendizaje. Queda por consiguiente una cuestión abierta: ¿cómo seleccionar una combinación de caminos de aprendizaje (y su correspondiente secuencia de tareas) que permitan promover el logro del objetivo de aprendizaje de una manera eficaz y eficiente? Ésta es la pregunta que Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) plantean en la cita al comienzo de este apartado. Para diseñar una planificación eficaz, que contribuya al aprendizaje de los escolares, el profesor debe (a) elaborar de manera significativa los objetivos de aprendizaje, (b) tener en cuenta lo que los escolares ya saben, (c) prever las posibles actuaciones de los escolares, y (d) diseñar o seleccionar tareas que tengan potencial para estimular el aprendizaje de los escolares y que estén estructuradas en pasos matemáticos de tamaño adecuado. Considero que los procedimientos que he propuesto para el análisis cognitivo y el análisis de instrucción indican un camino para el logro de estos propósitos.

10. ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

He hecho referencia al análisis de actuación en varias ocasiones a lo largo de este capítulo. Con este análisis, se cierra el ciclo del análisis didáctico y, por consiguiente, se comienza un nuevo ciclo. El análisis de actuación utiliza la información que surge de la puesta en práctica de las actividades de enseñanza y aprendizaje para producir información que permita determinar la comprensión de los escolares en ese momento, los contenidos a tratar en el aula y los objetivos de aprendizaje que se deben buscar en el nuevo ciclo.

El análisis de actuación está relacionado con la evaluación, pero *no* es equivalente a ella. Dependiendo de la concepción que el profesor tenga de la evaluación, la relación entre estos dos procedimientos puede ser estrecha. El análisis de actuación no tiene que ver con la evaluación externa, sino con la evaluación interna del aula. El propósito del análisis de actuación no es clasificar a los escolares para efectos de una nota, sino establecer el seguimiento del progreso de los escolares al comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula; establecer los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula; caracterizar el aprendizaje de los escolares con motivo de la puesta en práctica de las actividades; y producir información relevante para la planificación en

un nuevo ciclo del análisis didáctico. El análisis de actuación puede utilizar la información que surge de las pruebas de evaluación, pero también debe basarse en el análisis de la *actuación* de los escolares al abordar las tareas y al interactuar con los compañeros y con el profesor.

De hecho, si

la evaluación en el aula es más que simplemente una prueba al final de la instrucción para ver el rendimiento de los escolares en condiciones especiales [sino que] es, más bien, una parte integral de la instrucción que informa y guía a los profesores cuando toman decisiones sobre la instrucción (NCTM, 2000, p. 22),

entonces existe una relación estrecha entre el análisis de actuación y la evaluación. ¿Cuál es la relación entre el análisis de actuación y los otros análisis del análisis didáctico (de contenido, cognitivo y de instrucción) y cómo se puede sacar partido de la información que surge de esos análisis y de las herramientas (procedimientos) que se utilizan en ellos para el análisis de actuación? Recordemos que, al realizar la planificación, el profesor ha establecido y caracterizado unos objetivos de aprendizaje; seleccionado unas tareas que conforman las actividades de enseñanza y aprendizaje que llevará a la práctica; y formulado unas conjeturas sobre la actuación de los escolares y que se expresan en los caminos de aprendizaje para esas tareas.

Esta información constituye la base para el análisis de actuación. En una primera fase, el profesor puede *comparar sus previsiones sobre lo que iba a suceder en el aula con lo que realmente sucedió*. Para ello, él puede:

- ◆ establecer en qué medida se lograron los objetivos de aprendizaje, al identificar los caminos de aprendizaje que los escolares ejecutaron y en qué medida las capacidades correspondientes contribuyeron a las competencias que consideraba pertinentes;
- ◆ revisar si las tareas indujeron a los escolares a ejecutar caminos de aprendizaje en los que el profesor preveía que ellos pudieran manifestar dificultades, si esas dificultades se manifestaron (los escolares incurrieron en errores al ejecutar esos caminos de aprendizaje) y si se logró algún progreso en la superación de dichas dificultades;
- ◆ identificar aquellos caminos de aprendizaje (y capacidades) que se pusieron en juego y aquéllos que no; y
- ◆ reconocer las capacidades, caminos de aprendizaje, dificultades y estrategias no previstos y que se manifestaron en la práctica.

En resumen, el profesor puede producir la tabla de Capacidades-Competencias y los caminos de aprendizaje que se deducen de la actuación de los escolares y compararlos con los que él había previsto. La información que resulta de este análisis es relevante, en una segunda fase del análisis de actuación, para: (a) revisar la pertinencia de las tareas que utilizó en el aula; (b) producir la tabla de Capacidades-Competencias para el nuevo ciclo; (c) expresar, en caminos de aprendizaje, sus conjeturas sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje de los escolares; y (d) diseñar, analizar y seleccionar las tareas que conformarán las actividades de enseñanza y aprendizaje.

El procedimiento, en dos fases, para el análisis de actuación que acabo de describir presenta varias similitudes con la propuesta de Lange (1999, p. 56) para una *trayectoria hipotética de evaluación*: “una secuencia de herramientas de evaluación —i.e., actividades, preguntas y encuestas— y respuestas esperadas que apoyan la evaluación de los objetivos de aprendizaje de los profesores que corresponden a una trayectoria hipotética de aprendizaje dada” (Webb, 2004, p. 12). De hecho, Webb, en este documento, resalta la importancia de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje en la evaluación en el aula (pp. 11-13). Los procedimientos y herramientas que he planteado para el análisis cognitivo y el análisis de instrucción se fundamentan, al menos parcialmente, en la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje. Por lo tanto, resulta natural que el procedimiento que aquí sugiero para el análisis de actuación, que pretende ser coherente con esos dos análisis previos, presente grandes similitudes con otras propuestas basadas en la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje.

11. CONTRIBUCIONES DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO A LA REFLEXIÓN SOBRE LA PLANIFICACIÓN EN MATEMÁTICAS

11.1. Dos Problemas de la Planificación de la Instrucción

En este capítulo, me propuse abordar la primera de las cuatro preguntas generales que establecí en el capítulo 1. Se trataba de la pregunta: ¿Qué caracteriza la actuación eficaz y eficiente del profesor en el aula de matemáticas? Mi intención no era la de considerar la problemática de la enseñanza de las matemáticas en toda su complejidad. He puesto el foco de atención en la planificación de la instrucción. En ese contexto, he formulado y analizado dos problemas:

- ◆ la brecha entre el diseño curricular global y la planificación local, y
- ◆ la paradoja de la planificación.

Con respecto al primer problema, he mostrado que, sólo cuando se aborda la planificación de temas matemáticos concretos, es posible explorar los múltiples significados de las estructuras matemáticas correspondientes. Estos significados dan especificidad a la planificación local y permiten diferenciarla de y relacionarla con la planificación global. El segundo problema surge cuando, dentro de un marco constructivista, se pretende que el profesor cumpla con unos programas preestablecidos y, al mismo tiempo, prevea, atienda y reaccione a las actuaciones de los escolares en el aula.

Para abordar el proceso de planificación local, teniendo en cuenta estos dos problemas, he propuesto el análisis didáctico, como un procedimiento ideal que el profesor de matemáticas puede realizar a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. Al describir este procedimiento, he identificado unas herramientas conceptuales y metodológicas y he sugerido unas estrategias sistemáticas que pueden permitirle al profesor explorar la variedad de significados de una estructura matemática concreta, diseñar una planificación y prever y atender a las actuaciones de los escolares. He buscado mostrar que la planificación de la instrucción puede ser un procedimiento sistemático y fundamentado. Con el análisis didáctico, el profesor de matemáticas puede caracterizar la comprensión, las

habilidades y el pensamiento matemático de los escolares y seleccionar las tareas y actividades que mejor se adapten al conocimiento previo de sus estudiantes, a los diversos contextos que condicionan la interacción en el aula y a los objetivos de aprendizaje. De esta manera, la planificación deja de ser un proceso intuitivo o basado exclusivamente en el cubrimiento de unos contenidos y el seguimiento de un libro de texto. Con el análisis didáctico, el profesor puede justificar las decisiones que fundamentan su planificación y, por consiguiente, tener una certidumbre razonable sobre su posible éxito, cuando ella se lleve a la práctica (Gómez, 2002a).

11.2. Una Estructura Conceptual para los Organizadores del Currículo

La idea de organizar la planificación de la enseñanza de las matemáticas y de cerrar la brecha entre la planificación global y la planificación local a partir del análisis de los diversos significados de las matemáticas escolares ha sido trabajada por Rico y sus colaboradores desde comienzos de la década de los noventa (Rico, 1992; Rico et al., 1997a). No obstante, como lo sugerí en Gómez (2000, p. 275), la complejidad de las matemáticas escolares no surge únicamente de la multiplicidad de significados de una estructura matemática, significados éstos que pueden ser explorados con cada uno de los organizadores del currículo. Esta complejidad es también consecuencia de la multiplicidad de relaciones que existen entre estos significados, relaciones que no se desarrollan suficientemente en (Rico et al., 1997a). Al proponer el análisis didáctico, busqué ordenar la colección de organizadores del currículo propuesta por Rico y sus colaboradores en una estructura conceptual y en un procedimiento en los que fuera posible establecer el papel de cada uno de sus elementos en función de su relación con los otros elementos del modelo. Esta estructura conceptual se organiza de acuerdo con las dimensiones del currículo y se constituye en nuevo nivel del mismo (ver Tabla 1).

El carácter sistémico del modelo del análisis didáctico se aprecia en la Figura 4 y se expresa en el hecho de que cada elemento (análisis) se encuentra relacionado directamente con por lo menos otro elemento del modelo. Por ejemplo, el análisis de contenido es necesario para el análisis cognitivo: solamente cuando hemos descrito de manera detallada y sistemática el contenido matemático desde la perspectiva de los elementos correspondientes, podemos identificar las capacidades correspondientes a unos objetivos de aprendizaje. De la misma manera, existe una relación simbiótica entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción. La distinción entre estos dos procedimientos es de carácter analítico. El carácter sistémico del modelo también es evidente al interior de cada uno de los análisis. El análisis de contenido es el producto de organizar y *relacionar* la información que surge del análisis de la estructura matemática desde la perspectiva de su estructura conceptual, sus sistemas de representación y su fenomenología. Por ejemplo, la formulación de una estructura conceptual basada en sistemas de representación informa al análisis fenomenológico y, simultáneamente, la realización de una fase del análisis fenomenológico informa y puede afectar la producción de una nueva versión de la estructura conceptual y de sus sistemas de representación⁶⁸. Las rela-

⁶⁸ Utilizo esta forma de referirme al carácter sistémico y cíclico del modelo para efectos de simplificar la redacción. En realidad, la formulación de la estructura conceptual no puede informar al análisis fenomenológico. Lo que sí puede suceder es que con motivo de diseñar una versión de la

ciones entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción se aprecian en el esquema de la Figura 19. La noción de camino de aprendizaje permite poner de manifiesto la conexión entre tareas y objetivo de aprendizaje, al proporcionar herramientas para analizar, comparar y seleccionar aquellas tareas que pueden contribuir eficaz y eficientemente al logro de dicho objetivo.

Por otro lado, el modelo tiene también un carácter cíclico, que se hace evidente en el hecho de que el resultado de un ciclo del proceso (el análisis de actuación) produce la información necesaria para la formulación del punto de partida de un nuevo ciclo del análisis didáctico (la determinación de los nuevos objetivos de aprendizaje). Algo similar sucede tanto en la relación biunívoca entre los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción, como en la relación entre los organizadores del currículo del análisis de contenido. Por lo tanto, no es posible abordar el análisis didáctico de un tema matemático recogiendo y organizando la información para cada una de las nociones de manera secuencial e independiente. Por el contrario, el proceso de recolección y análisis de la información debe hacerse de manera global de tal forma que la información correspondiente a cada elemento genere la posibilidad de mejorar la información existente para los demás elementos del sistema.

11.3. Carácter Parcial e Ideal del Análisis Didáctico

El análisis didáctico es una visión (conceptualización) *parcial e ideal* de la actividad (de planificación) del profesor. Es una *visión parcial* porque sólo tiene en cuenta algunos aspectos de la complejidad de dicha actividad. El hecho de que haya otros aspectos de esa actividad que no considero dentro del análisis didáctico, no quiere decir que estos aspectos no sean importantes o relevantes o que sean menos importantes que los que exploro en este capítulo. Es el caso, por ejemplo, del diseño curricular global, la secuenciación de tareas o la gestión de clase. Por otro lado, es una *visión ideal* porque no espero que ningún profesor de matemáticas concreto realice sistemáticamente todos y cada uno de los procedimientos que conforman el análisis didáctico. De hecho, en varias ocasiones he descrito los procedimientos que conforman el análisis didáctico como si hubiesen sido realizados por un profesor con un conocimiento profundo y detallado de la estructura matemática y de los organizadores del currículo⁶⁹. Este tipo de descripción me permitirá, en el capítulo 3, abordar y caracterizar las nociones de conocimiento didáctico y competencias del profesor. En este sentido, y como mostraré en los capítulos 3 y 5 de este documento, el análisis didáctico puede servir de fundamento para el diseño de planes de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Es por esta razón que, en diversos lugares del capítulo, me refiero tanto a futuros profesores, como a profesores (en general). Cuando menciono a los futuros profe-

estructura conceptual, el profesor reconozca que en esa estructura conceptual hay información que es útil para la formulación que él debe hacer del análisis fenomenológico. Y una vez realizado este análisis, el profesor puede de nuevo producir información que lo lleve a revisar y cambiar la estructura conceptual previamente hecha.

⁶⁹ Soy consciente, por lo tanto, que utilizo el adjetivo “ideal” con dos sentidos relacionados, pero diferentes. Por un lado, en el sentido de un procedimiento que el profesor difícilmente puede realizar en detalle en su práctica docente. Por el otro lado, en el sentido de un modelo que sirve de norma. Considero que, en este capítulo, he presentado argumentos para justificar este uso del término.

sores, pretendo resaltar aspectos del análisis didáctico que pueden ser especialmente pertinentes en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Y, cuando hago afirmaciones del estilo “el profesor debería...”, no lo hago con una intención normativa, sino para efectos de facilitar la redacción. Ningún profesor en ejercicio puede realizar un análisis didáctico, con el detalle que lo he presentado aquí, en el día a día de su actividad laboral. Algunos profesores podrían utilizar el análisis didáctico como procedimiento para desarrollar proyectos de innovación de largo plazo. Pero, ésta no es la única utilidad del análisis didáctico para el profesor en ejercicio. Además de describir en detalle unos procedimientos, en este capítulo, también he establecido unos principios y he sugerido unas herramientas y unas estrategias que considero claves para la realización de una planificación sistemática y fundamentada. He dispuesto estos principios, estrategias y herramientas en una estructura conceptual que organiza sistemáticamente dicho proceso de planificación.

A la hora de planificar su clase, el profesor puede seguir el procedimiento tradicional, focalizando su atención en el contenido matemático, adoptando las pautas generales establecidas en el diseño curricular global para los objetivos, la metodología y la evaluación, y siguiendo las indicaciones del libro texto. O, como alternativa, él puede utilizar la estructura conceptual a la que me he referido, como guía para su planificación. Esto lo puede hacer con el nivel de detalle que corresponda al tiempo que tenga disponible. Por ejemplo, en cambio de caracterizar la clase del día siguiente como la clase sobre graficas de funciones cuadráticas (contenido matemático) y seguir las pautas curriculares generales y un libro de texto, el profesor en ejercicio puede analizar ese esquema tradicional y reformarlo al formular (y responder en el tiempo que tenga disponible) preguntas del estilo (Gómez, 2004a, pp. 88-89):

Análisis de contenido

1. ¿Cuáles son los conceptos y procedimientos que conforman la estructura matemática?
2. ¿De qué maneras se puede representar el tema?
3. ¿Cómo se pueden organizar los fenómenos para los que la estructura matemática puede servir de modelo?

Análisis cognitivo

1. ¿Qué capacidades han desarrollado ya nuestros alumnos?
2. ¿Qué competencias esperamos que desarrollen con motivo de las actividades que van a realizar?
3. ¿Cómo se pueden caracterizar los objetivos de aprendizaje en términos de las capacidades ya desarrolladas y de los caminos de aprendizaje correspondientes?
4. ¿Qué dificultades hemos percibido que los escolares muestran cuando abordan el tema?

Tecnología

1. ¿Cómo podemos caracterizar los recursos disponibles en términos del análisis de contenido del tema en cuestión?
2. De las características y potencialidades de los recursos disponibles, ¿cuáles de ellos son específicos a las capacidades, caminos de aprendizaje y dificultades que se identificaron en el análisis cognitivo?

Diseño y desarrollo del currículo

1. ¿Qué tareas son relevantes para los objetivos de aprendizaje que queremos que logren nuestros alumnos y para las dificultades que esperamos que superen?
2. ¿Cómo podemos usar eficaz y eficientemente la tecnología en el diseño y desarrollo de esas tareas?

11.4. Contribuciones

He construido el discurso de este capítulo basándome en los trabajos de Luis Rico y sus colaboradores (Rico, 1992; Rico, 1995a, 1998a, 1998b, 1997e; Rico et al., 1997a) sobre los organizadores del currículo y la brecha entre el diseño curricular global y la planificación local y de Martin Simon (Simon, 1995a; Simon, 1995b, 1997; Simon y Tzur, 2004) sobre la trayectoria hipotética de aprendizaje y la paradoja de la planificación. Mi intención ha sido avanzar en la reflexión sobre estas nociones y estos problemas. A continuación enumero brevemente las que considero como mis principales contribuciones a esta reflexión.

El análisis didáctico como estructura conceptual para los organizadores del currículo. Mi primera contribución tiene que ver con el diseño de un modelo, el análisis didáctico, que estructura conceptualmente los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997a) y que, como lo mencioné en la sección anterior, puede servir para avanzar en el fundamento del diseño de programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y para la práctica diaria del profesor de matemáticas en ejercicio.

Organizadores del currículo y significado en educación matemática. He analizado la noción de significado en educación matemática y he hecho una propuesta para el sistema de significados de un concepto matemático. Este modelo me permite justificar la selección de significados que se trabajan en el análisis didáctico y da lugar a la organización de los diversos análisis de acuerdo con las dimensiones del currículo.

Importancia de los contextos y las creencias. He resaltado la importancia de las creencias y de los diferentes contextos (social, educativo, institucional y del aula) como condicionantes de la actividad docente del profesor.

Análisis de contenido. He introducido la estructura conceptual como uno de los significados de un concepto matemático dentro de las matemáticas escolares. En particular, he introducido una caracterización de las conexiones en una estructura conceptual. He mostrado que, con esta caracterización, es posible representar los diferentes aspectos del conocimiento conceptual y procedimental y describir, en términos de los sistemas de representación, las diferentes actividades matemáticas que pueden tener lugar en el aula. También he caracterizado en detalle el análisis

fenomenológico de un concepto matemático, al proponer un significado concreto y operacional para la noción de modelo matemático en el contexto del análisis didáctico.

Análisis cognitivo. He adaptado la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje a la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Para ello, he interpretado la propuesta de Lupiáñez y colaboradores (Lupiáñez y Rico, 2006, 2005) y he introducido la noción de camino de aprendizaje.

Análisis de instrucción. He establecido una conexión entre el diseño curricular global y la interacción en el aula al conceptualizar en un modelo la relación entre las nociones de objetivo de aprendizaje, tarea, capacidad, camino de aprendizaje y competencia (Figura 19). Basándome en ese modelo, he propuesto un procedimiento para el análisis y selección de tareas. He mostrado el papel del “análisis didáctico sobre la marcha” en la planificación de la gestión de clase.

Análisis de actuación. A partir de los procedimientos y herramientas anteriores, he propuesto un procedimiento para la evaluación de la actuación de los escolares en el aula y la utilización de la información que surge de este procedimiento para la formulación del inicio de un nuevo ciclo del análisis didáctico.

11.5. Análisis Didáctico como Herramienta de Investigación

La expresión “análisis didáctico” se utiliza en diferentes contextos, con diversos significados y con propósitos variados⁷⁰. Yo he dado un significado a esta expresión en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria como procedimiento ideal para el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas. No obstante, el análisis didáctico es un análisis sistemático de las matemáticas escolares y, como tal, puede ser de utilidad más allá de la esfera de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Por ejemplo, Maz (2005b) lo utiliza para el análisis histórico de libros de texto. Pero el análisis didáctico también puede ser útil en aquellos estudios sobre la comprensión y el aprendizaje de temas matemáticos en los que es necesario diseñar pruebas y esquemas de análisis de las actuaciones de los sujetos cuando abordan esas pruebas.

El análisis de contenido le puede permitir al investigador fundamentar conceptualmente el contenido matemático objeto de la investigación. Con el análisis cognitivo, y basándose en la información que surge del análisis de contenido, el investigador puede organizar sistemáticamente las capacidades que corresponden a ese contenido y explorar los caminos de aprendizaje de un objetivo de aprendizaje concreto. Con esta información y el procedimiento propuesto en el análisis de instrucción, el investigador puede diseñar pruebas y verificar la pertinencia de esas pruebas con respecto a los objetivos de su investigación. Finalmente, el procedimiento propuesto en el análisis de instrucción da luces sobre los esquemas de evaluación de esas pruebas (ver, por ejemplo, Cañadas, 2006, pp. 14-15).

⁷⁰ Ver, por ejemplo, en el contexto español, las presentaciones en el *Seminario Análisis Didáctico en la Educación Matemática* (Flores, 2005; Gallardo, 2005; Gómez, 2005; González y Ortiz, 2005; Larrubia, 2005; Lupiáñez, 2005; Marín, 2005; Maz, 2005a; Moreno, 2005) y en el seminario “Análisis Didáctico” de X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (Gallardo y González, 2006; Godino et al., 2006; Gómez, 2006a; González, 2006).

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO Y COMPETENCIAS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

En este capítulo abordo la segunda de las preguntas que formulé en el capítulo 1:

¿Cuáles deben ser los conocimientos y capacidades de un profesor que actúa eficaz y eficientemente?

La literatura de investigación sobre el conocimiento del profesor en general y del profesor de matemáticas en particular es extensa y variada. Se han formulado diversas respuestas a esta pregunta (o a preguntas relacionadas). En particular, la noción de conocimiento pedagógico de contenido propuesta por Shulman (1986) ha sido una de las contribuciones más importantes a la reflexión sobre el tema. No obstante, el carácter general de la propuesta original de Shulman no permite explorar con detalle la problemática del conocimiento del profesor de matemáticas. La mayor parte de las taxonomías del conocimiento del profesor se basan en o utilizan esta noción y dividen en compartimentos estancos un conocimiento que, en la práctica, se pone en juego de manera integrada. Sostengo que la reflexión sobre el conocimiento del profesor debe partir de un visión funcional de tal forma que los conocimientos del profesor sean una consecuencia del análisis y descripción de las actividades que él debe realizar para planificar, gestionar y evaluar la instrucción. Por lo tanto, la problemática del conocimiento del profesor se debe considerar, más bien, como la integración de conocimientos, habilidades y actitudes para la acción. Esta aproximación da lugar a la noción de competencias profesionales del profesor, noción que ha adquirido gran importancia recientemente, con motivo de la creación de un área integrada de educación superior en Europa. No obstante, las propuestas sobre competencias del profesor de matemáticas son, por

ahora, listados de competencias genéricas y específicas en las que no es posible identificar la relación entre ellas, ni su función en la actuación del profesor de matemáticas. Por esa razón, sostengo que, al utilizar el análisis didáctico como referencia para la actuación del profesor, es posible determinar sistemáticamente y organizar estructuradamente las capacidades que contribuyen a las competencias del profesor de matemáticas, en particular, a la competencia de planificación.

Comienzo el capítulo haciendo una breve revisión de la investigación acerca del conocimiento del profesor de matemáticas y de las diferentes taxonomías que se han propuesto para esta cuestión. Indico que la noción de conocimiento pedagógico de contenido propuesta por Shulman (1986) representa un cisma en la reflexión sobre el conocimiento del profesor. Analizo en detalle esta noción, presento algunas de las críticas que se han formulado hacia ella y describo dos desarrollos recientes de la misma. Establezco el significado que le daré en este documento a la expresión “conocimiento didáctico” y concreto algunas de sus características. Considero en seguida la noción de competencia como una opción para explorar los conocimientos, capacidades y actitudes del profesor. Para concretar el uso que le daré a este término, hago un breve recuento de la historia de esta noción en la formación de profesores, describo la aproximación propuesta por el proyecto *Tuning*, dentro del marco del Espacio Europeo de Educación Superior, y presento las principales características de la propuesta del Seminario *Itermat* para las competencias del profesor de matemáticas de secundaria. Finalmente, caracterizo la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria. Para ello, muestro que es posible, con base en los procedimientos que conforman el análisis didáctico, estructurar las capacidades que contribuyen a dicha competencia.

1. CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO DE CONTENIDO: UNA NOCIÓN POTENTE

La investigación sobre el conocimiento del profesor se centra en dos grandes agendas: aquella preocupada por cómo el futuro profesor, que no tiene experiencia docente, aprende a enseñar; y aquella que centra su atención en el desarrollo profesional del profesor experimentado (Llinares, 1998b, p. 156). Estas dos agendas de investigación se relacionan con dos esquemas de formación: la formación inicial y la formación permanente. Estas agendas de investigación y estos esquemas de formación corresponden a problemáticas relacionadas pero diferentes (ICMI 15, 2004, p. 363). Me intereso particularmente por la problemática del conocimiento y la formación del futuro profesor de matemáticas. No obstante, haré una reflexión general sobre el conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria.

1.1. Investigación sobre el Conocimiento del Profesor de Matemáticas

La investigación sobre el conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de las matemáticas ha pasado por varias fases (Ball, 1991, pp. 2-4; Cooney, 1994, pp. 609-613). En la primera fase, llamada “de la enseñanza eficiente” y que correspondió al paradigma de investigación conocido como proceso-producto, se

buscó identificar —con base en las opiniones de los escolares— las características de los buenos profesores. Se identificaron principalmente características relacionadas con su personalidad. Al tratar de relacionar estos resultados con el rendimiento de los escolares, se hicieron patentes las deficiencias de este esquema y se entró en una segunda fase. En esta fase, se buscó asociar las características del profesor con el aprendizaje de sus alumnos y se encontró, entre otras cosas, que el conocimiento matemático del profesor (medido, por ejemplo, con el número de cursos que ha tomado o de títulos que ha obtenido) no es un buen indicador del rendimiento de los escolares. En este segundo esquema, el interés se centró en los resultados de los procesos, más que en los procesos mismos. Lo que sucedía en la mente del profesor y lo que sucedía en el aula se consideraban como cajas negras. En la tercera fase, llamada “del pensamiento del profesor”, se aborda la enseñanza como una actividad de pensamiento y acción. La investigación se interesa entonces por la actuación del profesor, por cómo esta actuación depende de las decisiones que él toma y por la relación entre estas decisiones, por un lado, y su conocimiento, sus creencias, sus metas y sus intereses, por el otro. En esta aproximación, esencialmente cognitiva, se resalta la importancia de las creencias y del conocimiento del profesor y se busca caracterizar estas creencias y este conocimiento al identificar los conocimientos disciplinares que le sirven de referencia y al establecer las formas en que estas estructuras cognitivas se conforman, cambian y se movilizan en la práctica. En la actualidad, investigadores como Llinares (1998b) y Lerman (2001) sugieren que esta aproximación cognitiva puede ser insuficiente y que la complejidad del proceso de aprendizaje del profesor y de su práctica profesional debe también ser estudiada desde perspectivas socioculturales. Estas perspectivas enfatizan el papel del profesor como miembro de unas comunidades de práctica, resaltan la importancia del contexto en el que tienen lugar esas prácticas, y conciben el aprendizaje del profesor como el proceso en virtud del cual él progresa en su participación como miembro de esas comunidades de práctica (ver, por ejemplo, Beck y Kosnik, 2001; Gómez y Rico, 2005; Knight, 2002; Krainer, 2003; Lachance y Confrey, 2003; Little, 2002; Stein y Brown, 1997)⁷¹.

La literatura de investigación sobre el conocimiento del profesor, en general, y su relación con la enseñanza de las matemáticas, en particular, es muy extensa. En este apartado, abordo únicamente dos aspectos de esta problemática. Primero, enumero y analizo algunas de las taxonomías del conocimiento del profesor que se han propuesto en las últimas dos décadas. Esta revisión de la literatura resalta la importancia de la noción de conocimiento pedagógico de contenido. A continuación, analizo esta noción en detalle con el propósito de identificar sus principales características, hacer explícitas algunas de sus deficiencias y describir desarrollos posteriores.

1.2. Taxonomías del Conocimiento del Profesor

Hasta comienzos de la década de los ochenta, se aceptó, de manera más o menos generalizada, que el conocimiento del profesor se podía caracterizar por dos componentes independientes y complementarias: un conocimiento de la disciplina (contenido) y un conocimiento de aspectos pedagógicos generales. Al mismo

⁷¹ Abordaré la problemática del aprendizaje del profesor en el capítulo 4.

tiempo que criticó esta visión, Shulman (1987) produjo una clasificación más extendida de los conocimientos del profesor que, como mostraré en esta sección, ha sido mantenida, con algunas modificaciones, por la mayoría de los investigadores. Esta clasificación incluye cinco categorías del conocimiento del profesor: temático de contenido, pedagógico de contenido, de otras áreas, del currículo, de los aprendices, de las metas educativas, y pedagógico general (p. 8)⁷². En el área de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, Bromme (1994) propone una “topología” compuesta por los siguientes conocimientos: de las matemáticas como disciplina, de las matemáticas escolares, de la filosofía de las matemáticas escolares, de la pedagogía, conocimiento pedagógico específico al contenido y la integración cognitiva desde diferentes disciplinas (pp. 74-76). Clasificaciones como las de Shulman y Bromme implican necesariamente una separación (al menos analítica) entre los diferentes conocimientos del profesor. Dicha separación implica dificultades. Por ejemplo, resulta difícil imaginar cómo un profesor puede comprender “cómo se organizan, representan y adaptan temas, problemas o cuestiones particulares a los diversos intereses y capacidades de los estudiantes y cómo se presentan para la instrucción” sin tener en cuenta el conocimiento que él tiene de los aprendices. Por lo tanto, este conocimiento debería incluirse dentro del conocimiento pedagógico de contenido, aunque Shulman los presenta como independientes. Algo similar se podría decir, por ejemplo, de la relación entre el conocimiento de las matemáticas escolares y el conocimiento pedagógico específico al contenido de Bromme. Resulta evidente que no es fácil ubicar en compartimientos estancos los conocimientos que el profesor debe implantar en la instrucción y que estos conocimientos se deberían poner en juego de manera estructurada e interrelacionada.

Simon (1997) resuelve parcialmente estas dificultades al identificar los conocimientos que se ponen en juego cuando, con base en la evaluación del conocimiento de los estudiantes, el profesor reformula la trayectoria hipotética de aprendizaje. Menciona los siguientes: conocimiento de las matemáticas, de las actividades matemáticas y las representaciones, hipótesis sobre el conocimiento de los estudiantes, teorías de los profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y del aprendizaje de los estudiantes sobre un tema específico (pp. 78-80). Aunque pretende definir una estructura de la relación entre estos conocimientos y los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje, ésta no se logra puesto que sugiere que todos los tipos de conocimiento, excepto aquel sobre las actividades matemáticas y sus representaciones, afectan todos los componentes de la trayectoria hipotética de aprendizaje. Se tiene entonces una estructura muy general en la que casi todos los elementos se encuentran relacionados entre sí⁷³. No obstante, la clasificación de Simon, a diferencia de las taxonomías de Shulman y

⁷² Es con motivo de esta clasificación y del hecho de que se incluye una categoría que se denomina conocimiento temático de contenido, que traduzco la expresión “pedagogical content knowledge” como “conocimiento pedagógico de contenido” y no como “conocimiento de contenido pedagógico”, tal y como lo hacen algunos autores (por ejemplo, Flores, 2000; Llinares y Sánchez, 1994). Mi interpretación de la intención de Shulman es que hay dos tipos de conocimientos del contenido: temático y pedagógico. Por consiguiente, en la expresión “pedagogical content knowledge”, lo pedagógico califica al *conocimiento* del contenido y no al contenido, como se podría interpretar en la expresión “conocimiento de contenido pedagógico”.

⁷³ Esto se aprecia en su modelo extendido del ciclo de enseñanza de las matemáticas (Fig. 3.2, p. 79).

Bromme, es *funcional*: se asume una posición con respecto al aprendizaje de los escolares, se propone un esquema de enseñanza compatible con esa postura y se identifican los conocimientos que se consideran necesarios para realizar esa enseñanza.

En el área de la enseñanza de las ciencias, Veal y MaKinster (1999) hacen una revisión de diferentes taxonomías sobre el conocimiento pedagógico de contenido. Por ejemplo, Smith y NeaJe (1989) identifican tres componentes: conocimiento de errores típicos de los estudiantes, de estrategias particulares de enseñanza y de la elaboración del contenido; Cochran, King, y DeRuiter (1991) identifican cuatro componentes: conocimiento del contenido, de los estudiantes, de los contextos y de pedagogía; y Magnusson, Krajcik y Borko (1999) proponen cinco: creencias sobre la enseñanza de las ciencias, conocimiento del currículo de ciencias, conocimiento de la manera como los estudiantes comprenden las ciencias, evaluación y estrategias de instrucción.

Finalmente, Graeber (1999), al preguntarse qué deberían aprender los futuros profesores de matemáticas, se preocupa por “las formas de conocer las matemáticas en cuanto conciernen los tipos de comprensiones matemáticas de los estudiantes y las estrategias de enseñanza que promueven la construcción de significado por parte de ellos” (p. 190). Las ideas que ella propone son las siguientes: comprensión de la comprensión y el pensamiento matemático de los estudiantes; diferentes tipos de comprensión en matemáticas; conocimiento intuitivo como activo y pasivo; algunas características de la instrucción que parecen promover la retención; y representaciones y métodos alternativos. Esta propuesta de Graeber, como algunas de las otras propuestas que he mencionado en esta sección, deja cuestiones importantes por tratar. En particular, la autora no presenta ningún tipo de argumentación, basada en una conceptualización del conocimiento del futuro profesor y de la utilización de ese conocimiento en la práctica, que permita justificar la prioridad de sus ideas sobre otras.

En la mayoría de las taxonomías del conocimiento del profesor que acabo de presentar se aprecia un núcleo común: conocimiento de la disciplina, de cómo “representarla” en el aula, de los estudiantes y de estrategias de instrucción. De cierta forma, estas clasificaciones buscan caracterizar esa integración de los conocimientos sobre contenido y pedagogía que Shulman sugirió en su momento. Se trata, por lo tanto, de esfuerzos por caracterizar la noción de conocimiento pedagógico de contenido.

1.3. Conocimiento Pedagógico de Contenido: Historia de una Noción

La reflexión sobre el conocimiento del profesor presenta un cisma cuando, en 1986, Shulman introduce las nociones de conocimiento pedagógico de contenido y base del conocimiento para la enseñanza. Estas nociones constituyeron una contribución innovadora para la época puesto que, con base en ellas, Shulman refutó la visión tradicional, según la cual, por ejemplo, para ser buen profesor de matemáticas bastaba con tener suficiente conocimiento de las matemáticas, y complementarlo con algunos conocimientos pedagógicos. Shulman enfatizó la importancia de esta noción como fundamento para la enseñanza:

el conocimiento pedagógico de contenido es de especial interés porque identifica diferentes cuerpos de conocimiento para la enseñanza. Repre-

senta la mezcla de contenido y pedagogía en la comprensión de cómo se organizan, representan y adaptan temas, problemas o cuestiones particulares a los diversos intereses y capacidades de los estudiantes y cómo se presentan para la instrucción (1987, p. 8).

La noción de conocimiento pedagógico de contenido implica un cambio importante en la comprensión del profesor

de ser capaz de comprender el contenido temático para ellos mismos, a llegar a ser capaz de descifrar ese contenido temático en nuevas formas, reorganizarlo y secuenciarlo, vestirlo con actividades y emociones, en metáforas y ejercicios, y en ejemplos y demostraciones, de tal manera que pueda ser captado por los estudiantes (p. 13).

No obstante, la noción, expresada de esta manera, es muy general y no permite determinar qué tipos de conocimientos específicos se encuentran involucrados, ni cómo se supone que estos conocimientos se deberían implantar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Con el tiempo, la noción de conocimiento pedagógico de contenido se deslizó, de manera rápida y sin perturbaciones, en la retórica de los formadores de profesores. Hoy, el concepto se da por sentado como si representara el sentido común. No obstante, es un concepto problemático, y estos problemas tienen raíces profundas en el pasado de la formación de profesores. Sus orígenes y su propósito aparecen perdidos y sirven como ejemplo de la “extensa amnesia individual y colectiva” que de acuerdo con Shulman (1986, p. 11) afecta la enseñanza (Bullough, 2001, p. 657).

El significado de la noción no ha evolucionado de manera relevante en la literatura de investigación en educación matemática, en particular, y de la educación, en general, durante la última década y media. Hay algunas excepciones, como los dos desarrollos (uno en ciencias y otro en matemáticas) que presento más adelante. La mayoría de los trabajos que mencionan la noción la siguen utilizando con el significado general propuesto por Shulman, como el conocimiento necesario para transformar un contenido para la enseñanza (Kinach, 2002, p. 53). Por ejemplo, Geddis (1993) lo define como la “amalgama entre pedagogía y contenido que les permite a los profesores transformar el conocimiento para hacerlo accesible a los estudiantes” (p. 612), y Brown y Borko (1992) hablan de la “comprensión de cómo representar temas y cuestiones de un contenido específico de manera que sea apropiada para las diversas habilidades e intereses de los aprendices ... Formas de representar ideas, analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones” (p. 211).

La idea de que el conocimiento pedagógico de contenido es precisamente aquel conocimiento del profesor que le permite actuar eficientemente en el aula es evidentemente muy atractiva y, por esa razón, “mientras que ha sido citado muy frecuentemente, e igualmente usado, han sido muy contadas las ocasiones en las que el término, o el lente que proporciona para la empresa educativa, ha sido cuestionado desde una perspectiva crítica” (Segall, 2004, p. 499).

Aunque la mayoría de los estudios sobre el conocimiento pedagógico de contenido del profesor de matemáticas utilizan un significado general de esta noción, también hay excepciones. Por ejemplo, Wittman (1989) considera que el punto de partida deben ser las matemáticas elementales, desde una perspectiva flexible que permita aplicarlas a los contextos educacionales. Este autor promulga una integración de epistemología, psicología, sociología y matemáticas en el desarrollo de programas de formación de profesores y, por consiguiente, aborda algunas de las deficiencias que he identificado.

1.4. Críticas a la Noción de Conocimiento Pedagógico de Contenido

A continuación, presento cuatro posiciones críticas con respecto a la noción de conocimiento pedagógico de contenido. Estas posiciones afirman que esta noción:

- ◆ representa una visión de un conocimiento fijo y externo que ignora los contextos en los que se pone en juego (Carlsen, 2001); sugiere una separación previa e inexistente entre contenido y pedagogía (Segall, 2004);
- ◆ adolece de un grado reducido de precisión y poder heurístico (Gess-Newsome, 2001); y
- ◆ se fundamenta en una visión restringida del aprendizaje de los escolares.

Visión Post-Estructuralista del Conocimiento Pedagógico de Contenido

La noción de conocimiento pedagógico de contenido se define como una forma de conocimiento del profesor y se caracteriza por su relación con las otras formas (Carlsen, 2001, p. 136). Por lo tanto, se parte de una visión estructural que es estática y neutra. Esta visión enfatiza la disciplina, informa sobre lo que debería saber un profesor y diferencia el conocimiento escolar del conocimiento disciplinar. Es una visión tranquilizadora: “el conocimiento sistemático es posible y puede ser descubierto sin discusiones políticas” (p. 136). Por otra parte, esta visión estructuralista implica la idea de un conocimiento “que es fijo y externo a los profesores y los estudiantes... [y] que sustrae el conocimiento de su contexto histórico-cultural” (p. 140). Pero, de hecho, en el caso de las matemáticas, existe una gran diversidad de contextos en los que tiene lugar la formación de los profesores. Esta diversidad de contextos, implica una multiplicidad de aproximaciones al aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas y a su conocimiento profesional (ver el apartado 2 del capítulo 5).

Separación de Contenido y Pedagogía

Segall (2004) se opone a la visión tradicional, promovida por Shulman, en virtud de la cual hay una separación entre el contenido (dominio de los académicos) y la pedagogía (dominio de los profesores). Su tesis consiste en que “el contenido y la pedagogía ya están relacionados y que la enseñanza eficiente (y los medios eficientes para aprender a enseñar) son el resultado de reconocer esa relación” (p. 489). Por lo tanto, la formación de profesores debería pasar de preocuparse por desarrollar en los futuros profesores estrategias para convertir en pedagógico un contenido que supuestamente no lo es, a reconocer el carácter inherentemente pedagógico de ese contenido.

Precisión y Poder Heurístico

Gess-Newsome (2001) se preocupa por el grado de precisión y el poder heurístico de la noción de conocimiento pedagógico de contenido. Resalta la dificultad que enfrentan los investigadores que utilizan la noción para identificar instancias y componentes específicas de la misma. Aunque la noción es potente, la mayoría de los estudios tienden a centrar su atención en las líneas tradicionales sobre conocimiento temático de contenido o conocimiento pedagógico. Cuando se consideran los constructos que tradicionalmente constituyen el conocimiento pedagógico de contenido (contenido temático, pedagogía y contexto), es posible imaginar un continuo de modelos del conocimiento del profesor. Se parte de un extremo, el *modelo de integración*, en el que el conocimiento del profesor se puede explicar a partir de la intersección de esos tres dominios. En el otro extremo, el del *modelo transformativo*, el conocimiento pedagógico de contenido es la transformación de los conocimientos de contenido temático, pedagógico y del contexto en aquella única forma de conocimiento que afecta la práctica de la enseñanza (p. 10). La posición que se asuma dentro de este rango de modelos posibles establece la manera como cada investigación determina los componentes y relaciones que caracterizan el conocimiento pedagógico de contenido.

Visión Restringida del Aprendizaje de los Escolares

La noción de conocimiento pedagógico de contenido se fundamenta en una visión del aprendizaje de los escolares:

dado que los fines de la instrucción incluyen la transmisión del conocimiento y comprensión estudiantes, la pregunta sobre qué tipo de conocimiento del contenido temático se necesita para enseñar es importante... Los profesores deben encontrar maneras de comunicar el conocimiento a otros (Wilson, Shulman y Richert, 1987, p. 105).

Ésta es una visión de transmisión del conocimiento en la que el profesor es un “comunicador”. La función del conocimiento pedagógico de contenido es precisamente la de permitirle al profesor producir un conocimiento que pueda ser “transmitido” y “captado” adecuadamente.

¿Quiere esto decir que la noción deja de tener validez si se asumen otras posiciones con respecto al aprendizaje de los escolares? Por ejemplo, ¿qué significado adquiere esta noción si se asume una posición constructivista o sociocultural del aprendizaje de los escolares? Abordaré esta cuestión más adelante.

1.5. Desarrollos de la Noción de Conocimiento Pedagógico de Contenido

A continuación describo brevemente dos desarrollos de la noción de conocimiento pedagógico de contenido: uno en enseñanza de las ciencias y otro en enseñanza de las matemáticas.

Conocimiento Pedagógico de Contenido en Enseñanza de las Ciencias

Geddis y Wood (1997) abordan con detalle la problemática de la transformación del conocimiento y se preguntan sobre los resultados de este proceso: “los productos finales de las transformaciones pedagógicas son las *representaciones* del contenido y las *estrategias* de instrucción que se ponen en juego en los encuentros de instrucción específicos” (p. 612, en cursiva en el original). Estos autores asumen

una posición, similar a la de Simon (1997), e identifican una serie de conocimientos que se ponen en juego en las deliberaciones del profesor de las cuales surge la transformación del contenido. Estos conocimientos incluyen representaciones del contenido, preconcepciones del aprendiz, estrategias de instrucción y materiales curriculares⁷⁴.

Todos estos tipos de conocimiento se pueden ver como amalgamas de contenido específico y conocimiento pedagógico y todos son insumos relevantes para las deliberaciones de las que surge la transformación del contenido. Por lo tanto, vemos todas estas instancias particulares como componentes de la categoría amplia del conocimiento pedagógico de contenido (p. 612, en cursiva en el original).

La propuesta de Morine-Dersheimer y Kent (2001) representa un esfuerzo por evitar las reflexiones generales sobre el conocimiento pedagógico de contenido y precisar algunas de sus características. Ellos describen esquemáticamente su propuesta en dos esquemas. En la Figura 22 se representan las categorías que contribuyen al conocimiento pedagógico de contenido.

⁷⁴ Aunque esta propuesta surge en el ámbito de la enseñanza de las ciencias, las reflexiones son de carácter general y, por consiguiente, aplicables a la enseñanza de las matemáticas.

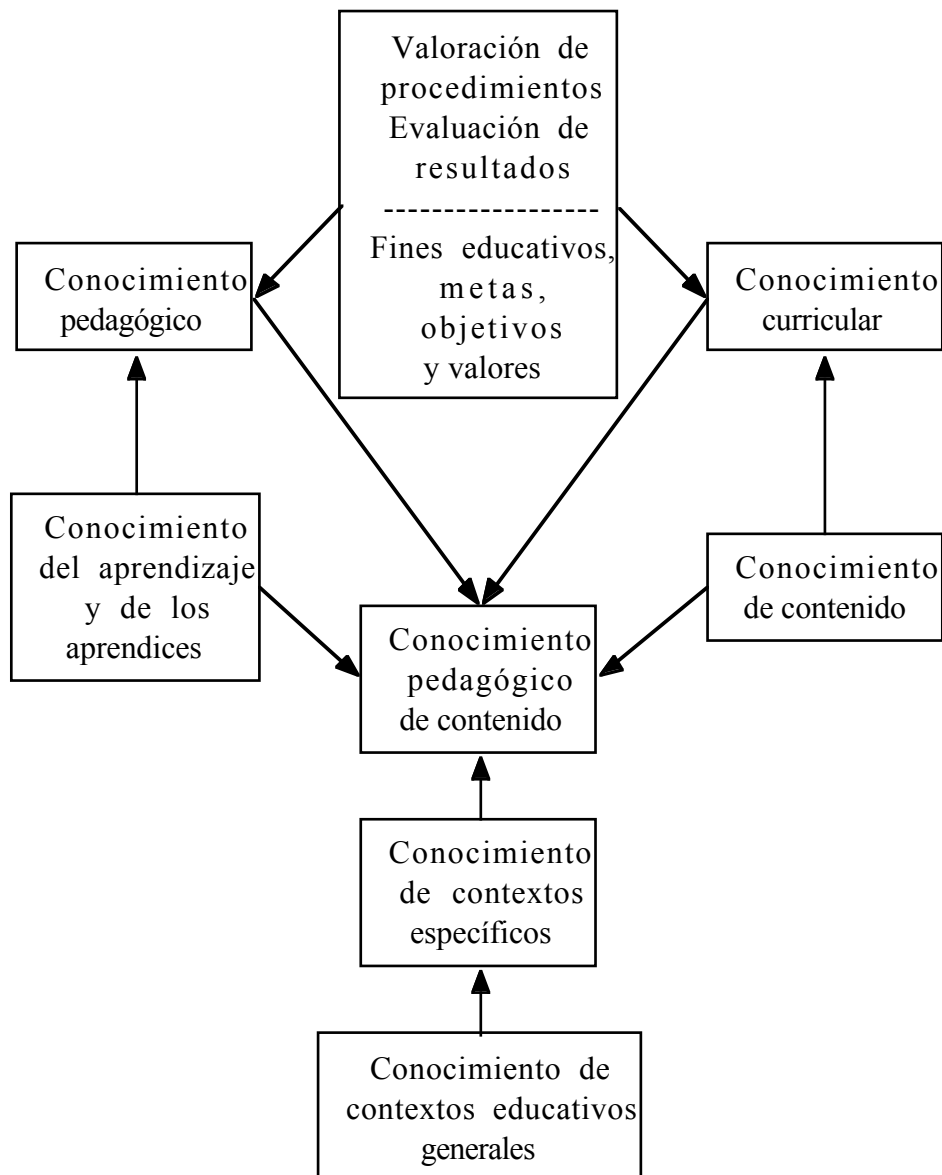


Figura 22. Categorías que contribuyen al conocimiento pedagógico de contenido (Morine-Dershimer y Kent, 2001, p. 22)

Vemos que la descripción que se hace en el modelo sobre el conocimiento del contexto, el conocimiento temático de contenido y el conocimiento pedagógico adquiere especificidad al introducir y relacionar el conocimiento sobre el aprendizaje y los aprendices y el conocimiento sobre el currículo, e incluir la evaluación y la reflexión sobre fines, metas y objetivos. Ellos resaltan tres puntos en este esquema: (a) la imposibilidad de independizar el conocimiento de los fines y metas educativos de los procedimientos de evaluación y valoración; (b) el hecho de que el conocimiento del currículo se sustenta en el conocimiento del contenido y en el conocimiento de metas y procedimientos de evaluación, mientras que el conocimiento pedagógico se sustenta tanto en el conocimiento del aprendizaje y de los aprendices, como en el conocimiento de metas y procedimientos de evaluación; y (c) que, aunque en el esquema sí se da especificidad al conocimiento de los con-

textos educativos generales, esta especificidad se puede asignar también a cada una de las otras categorías (e.g., conocimiento sobre el contenido específico) (pp. 21-22).

En el esquema de la Figura 23, estos autores profundizan en lo que ellos llaman algunas facetas del conocimiento pedagógico general y su relación con el conocimiento pedagógico de contenido (esquina superior izquierda de la Figura 22). Este esquema resulta interesante porque identifica la dualidad entre el conocimiento disciplinar producto de la investigación o conocimiento teórico (porción superior del esquema) y el conocimiento práctico producto de la experiencia (porción inferior). Estas son las dos fuentes del conocimiento pedagógico general que a su vez es uno de los cimientos del conocimiento pedagógico de contenido.

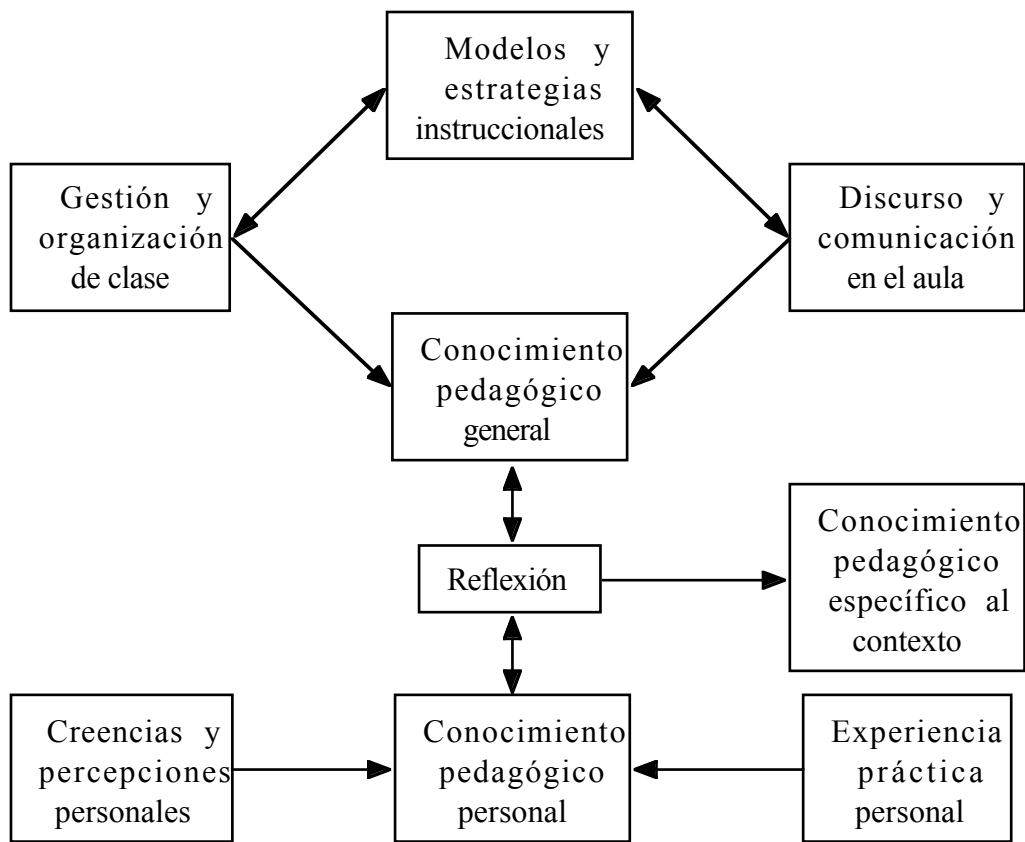


Figura 23. Facetas del conocimiento pedagógico (Morine-Dershimer y Kent, 2001, p. 23)

A diferencia de las clasificaciones de Shulman, Bromme y Simon, el modelo de Morine-Dershimer y Kent es transformativo en términos de Gess-Newsome y Lederman (2001). Su atención a la especificidad de los diversos componentes del conocimiento pedagógico de contenido, a las relaciones entre esos componentes para conformar ese conocimiento y a algunas de las fuentes de donde puede surgir, permite dar un significado más claro y completo a la noción de conocimiento pedagógico de contenido.

Matemáticas para la Enseñanza

Aunque Simon (1995a, 1997) no menciona a Shulman, ni se refiere a la noción de conocimiento pedagógico de contenido, su trabajo hace aportes importantes a la reflexión sobre esta noción. En particular, el modelo extendido del ciclo de enseñanza de las matemáticas (Simon, 1997, p. 79) y la idea de la trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995a; Simon y Tzur, 2004) permiten reflexionar sobre la relación entre el aprendizaje de los escolares, la manera como el profesor puede contribuir a la construcción de ese conocimiento y los conocimientos que son necesarios para lograrlo. Estas son cuestiones que Shulman (2001) ha resaltado posteriormente: “Espero que aquellos que usen esas ideas ahora y en el futuro le prestarán más atención de la que yo lo hice a las conexiones entre el conocimiento del profesor y sus últimas consecuencias para el aprendizaje y desarrollo de los escolares” (p. xi). Como lo mencioné en la sección 1.2, la propuesta de Simon presenta una estructura de los diversos conocimientos del profesor que es demasiado general y en la que no se especifican las características de las relaciones entre estos conocimientos. Sin embargo, esta propuesta tiene la cualidad de asumir una posición con respecto al aprendizaje de los escolares, proponer un esquema de enseñanza compatible con esa postura e identificar los conocimientos que se consideran necesarios para realizar esa enseñanza.

Deborah Ball y sus colaboradores presentan sus últimos trabajos como desarrollos de la noción de conocimiento pedagógico de contenido. Desde hace quince años, ellos se han preocupado por el conocimiento matemático del profesor de matemáticas. Durante mucho tiempo, esta preocupación se centró en el papel, para la enseñanza de las matemáticas, de la comprensión de los profesores del contenido temático (Ball, 1991). Su tesis afirmaba que la enseñanza era el resultado de la combinación de este conocimiento de las matemáticas con las visiones del profesor sobre la enseñanza, el aprendizaje y el contexto (p. 1) y que la formación matemática de la mayoría de los profesores de matemáticas era deficiente (Ball, 1988, p. 1; Ball, 1990, p. 450). Más tarde, estos investigadores reconocieron la importancia de conjugar el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico del profesor. Se basaron en los trabajos de Shulman (1986, 1987) para introducir la idea de una comprensión matemática pedagógicamente útil para el profesor (Ball y Bass, 2000, p. 88). La pregunta, en todo caso, seguía siendo: “¿Cuál es el conocimiento matemático que se necesita para enseñar?” (p. 89). La idea de las matemáticas para la enseñanza aparece recientemente (Ball et al., 2001). Las principales características de esta idea son las siguientes:

- ◆ fundamenta una nueva teoría sobre el conocimiento del profesor de matemáticas (Ball, Bass, Delaney, Hill, Lewis, Phelps *et al.*, 2005);
- ◆ surge de la exploración sistemática, en la práctica, de las actividades que los profesores realizan y las responsabilidades que asumen al enseñar matemáticas dentro y fuera del aula (Ball y Bass, 2003, pp. 5-6); y
- ◆ ha permitido desarrollar, probar y refinar medidas del conocimiento matemático para la enseñanza con el propósito de mejorar la teoría (Hill y Ball, 2004).

A partir de estos fundamentos, Ball y sus colaboradores estructuran el conocimiento del profesor y comparan su propuesta con la noción de conocimiento pe-

dagógico de contenido de Shulman. Sugieren cuatro categorías para el conocimiento del profesor (Ball et al., 2005, pp. 13-19):

Conocimiento común del contenido, como el conocimiento y la habilidad matemática que se espera que tenga cualquier adulto educado. Esta categoría involucra las siguientes capacidades del profesor de matemáticas: reconocer respuestas erradas, identificar definiciones inexactas en los libros de texto, utilizar correctamente la notación y realizar las tareas que le asignan a sus alumnos.

Conocimiento especializado del contenido, como el conocimiento y la habilidad matemática que el profesor requiere en su trabajo y qué va más allá de aquel de un adulto educado. Esta categoría involucra las siguientes capacidades del profesor de matemáticas: analizar los errores de los estudiantes y evaluar ideas alternativas, presentar explicaciones matemáticas y usar representaciones matemáticas, actuar explícitamente con respecto al lenguaje y las prácticas matemáticas.

Conocimiento del contenido y de los estudiantes, como el conocimiento con el que se espera que el profesor sea capaz de anticipar los errores y las concepciones erradas más comunes, interpretar el pensamiento incompleto de los estudiantes y predecir las actuaciones de los estudiantes a tareas matemáticas específicas.

Conocimiento del contenido y de la enseñanza, como el conocimiento con el que se espera que el profesor sea capaz de diseñar secuencias de instrucción, reconocer las ventajas y desventajas de diferentes representaciones y enfatizar cuestiones matemáticas relevantes al responder a los estudiantes.

Ball y sus colaboradores no citan con frecuencia las ideas de Shulman en sus trabajos iniciales (con excepción de algunos trabajos de comienzos de la década de los noventa). No obstante, en sus trabajos recientes hacen una referencia explícita a la noción de conocimiento pedagógico de contenido y ubican su teoría en el contexto de la teoría de Shulman (ver Figura 24).

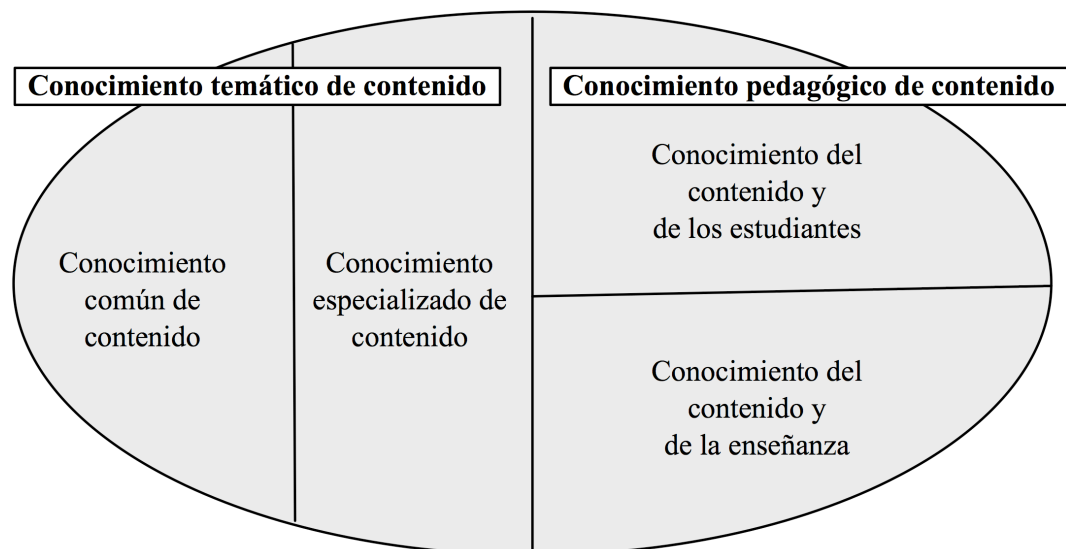


Figura 24. Matemáticas para la enseñanza y propuestas de Shulman (Ball et al., 2005, p. 20)

La relación con las propuestas de Shulman se establece incluyendo los dos primeros tipos de conocimiento en el conocimiento del contenido temático y los dos últimos en el conocimiento pedagógico de contenido (ver Figura 24). Ellos consideran que estas nuevas categorías son necesarias si, a partir de la investigación, queremos (p. 21):

- ◆ explorar si hay algunos aspectos del conocimiento matemático de los profesores que pueden predecir mejor el rendimiento de los estudiantes;
- ◆ diseñar con mayor precisión los programas de formación de profesores; y
- ◆ explorar cómo diferentes aproximaciones a esta formación configuran aspectos particulares del conocimiento matemático del profesor.

Aunque las categorías que estos investigadores proponen se denominan “conocimientos”, en su descripción se aprecia que están compuestas por capacidades. Es, por lo tanto, una aproximación práctica a la noción de conocimiento pedagógico de contenido desde la perspectiva del “saber hacer”. Este aspecto de la propuesta de Ball y sus colaboradores será importante en el último apartado de este capítulo, cuando considere las capacidades y competencias del futuro profesor de matemáticas.

Crítica a la Teoría de Matemáticas para la Enseñanza

Al revisar las publicaciones y los documentos de este grupo de investigación, no se encuentran descripciones suficientemente detalladas de las categorías que conforman la teoría sobre las matemáticas para la enseñanza. Encontramos algunos ejemplos de las preguntas con las que ellos han diseñado pruebas para medir el conocimiento del profesor (LMT, 2005). No obstante, el grupo no ha publicado hasta ahora una descripción más detallada de los aspectos conceptuales que fundamentan las categorías y los procedimientos para formular las preguntas. Es posible que esto se deba a que, como ellos mismos arguyen, su teoría surge del análisis de la práctica. Pero, como Ball y sus colaboradores parecen sugerir, ¿podemos construir una teoría suficientemente integral sobre el conocimiento necesario para la enseñanza analizando la actuación de profesores que consideramos eficientes? O, más bien, ¿debemos también explorar y organizar las actividades que debería *idealmente* desarrollar un profesor de matemáticas para lograr los objetivos de aprendizaje que se ha impuesto⁷⁵? ¿Es posible, a partir de este tipo de aproximación analítica estructurar conceptualmente los conocimientos y habilidades necesarios para realizar esas actividades? Abordo estas preguntas a continuación.

2. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

En este apartado preciso el uso que daré a la expresión “conocimiento didáctico” dentro de este documento. Extiendo la idea de conocimiento pedagógico de con-

⁷⁵ En la sección 11.3 del capítulo 2 presenté algunas reflexiones sobre el carácter ideal del análisis didáctico.

tenido (como transformación de un contenido para ser transmitido) a los conocimientos y habilidades necesarios para diseñar y gestionar actividades de enseñanza y aprendizaje.

2.1. Del Conocimiento Pedagógico de Contenido al Conocimiento Didáctico en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria

La noción de conocimiento pedagógico de contenido ha dado lugar a nuevas líneas de indagación en el área del conocimiento del profesor, al distinguir un conocimiento exclusivo de la enseñanza que es específico al contenido temático de la misma.

El concepto de conocimiento pedagógico de contenido fue bienvenido en los círculos de la educación superior porque reforzó la idea de que la enseñanza, como la investigación, es específica al contenido. Esto implicaba que la enseñanza como “la transformación de la comprensión” dependía de la profundidad, la calidad y la flexibilidad del conocimiento sobre el contenido y en la capacidad de generar representaciones y reflexiones potentes de ese conocimiento (Shulman, 2001, p. xi).

En este sentido, ha sido una idea útil: “cualquier idea en educación es inherentemente incompleta y probablemente gravemente imperfecta. Una idea es útil en la medida en que ella puede estimular la reflexión y la erudición de otros” (p. xi). Sin embargo, como lo indiqué anteriormente, y salvo contadas excepciones, el gran volumen de literatura de investigación sobre el profesor que la utiliza o la menciona directamente no ha logrado asignarle suficiente precisión y poder heurístico. De hecho, como muchas de las grandes ideas, la noción de conocimiento pedagógico de contenido no ha permitido encontrar respuestas a preguntas existentes, sino que, más bien, ha posibilitado la formulación de nuevas preguntas, inexistentes en el pasado, que parecen centrar de manera más clara la problemática del conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza. Al constatar que la formación de profesores se ha ido constituyendo en un campo de indagación sistemática. pero, al mismo tiempo, que la reflexión sobre el conocimiento del profesor de matemáticas y sobre la manera como el profesor construye ese conocimiento no se encuentra plenamente desarrollada, Cooney (1994) se pregunta: “¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?” (p. 608).

Pero, ¿qué significa que el profesor sea eficiente? La noción de profesor eficiente implica que él tiene unos objetivos (con respecto al aprendizaje de los escolares) y que él actúa con el propósito de lograr esos objetivos con la menor cantidad de recursos⁷⁶. Por lo tanto, la pregunta de Cooney sobre los conocimientos que el profesor debe tener para ser eficiente presenta una relación estrecha con la propuesta de Shulman (1987) de un conocimiento pedagógico de contenido que le permita al profesor realizar “la transformación del contenido en formas que sean pedagógicamente potentes” (p. 15), si suponemos que, con “pedagógicamente po-

⁷⁶ En este capítulo, he traducido el término “effective” por “eficiente”, aunque el significado con el que uso el término es el de eficaz —logro de los objetivos— y eficiente —uso de los recursos— (Toranzos, 2001).

tentes”, Shulman se refería al logro de los objetivos de aprendizaje. Los dos autores se están refiriendo a *actuaciones* del profesor, dentro y fuera del aula, para el logro de unos objetivos de aprendizaje que él se ha impuesto. Desde la perspectiva original de Shulman, el profesor debe realizar una transformación del contenido de tal forma que el resultado pueda ser transmitido y captado adecuadamente. Pero, si el propósito no es transmitir un conocimiento (como sería el caso si se asume una posición constructivista del aprendizaje), ¿qué significado asume esa transformación?

La preocupación de Shulman se centraba en la brecha entre el conocimiento académico y disciplinar que puede tener el profesor sobre un tema específico y la forma que debe asumir ese conocimiento para ser transmitido en el aula. Se refería, por lo tanto, en términos la noción de contenido que presenté en el capítulo 2, a la transformación de un contenido prescrito en unos contenidos propuestos. Pero, si asumimos una posición constructivista del aprendizaje, entonces el problema no es producir un *discurso* para transmitir un conocimiento, sino diseñar y gestionar unas *actividades* con las que los escolares puedan construir su conocimiento y el profesor pueda lograr los objetivos de aprendizaje que se ha impuesto. Por lo tanto, es necesario extender la idea de una transformación del contenido prescrito en un contenido propuesto. *El producto de la transformación no es, en sí mismo, un contenido, sino unas actividades de enseñanza y aprendizaje.* Pero, como lo describí en detalle en el capítulo 2, el diseño y la gestión de esas actividades requieren de la identificación, organización y selección de los significados de referencia del concepto objeto de la instrucción, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar las actividades de enseñanza y aprendizaje correspondientes. El procedimiento de análisis didáctico que he propuesto a tal efecto en el capítulo 2 está sujeto a unos procedimientos y herramientas, y se encuentra condicionado tanto por las creencias y metas del profesor, como por las características de los contextos sociales, educativos, institucionales y del aula. En otras palabras, cuando queremos hablar de un “profesor eficiente” (como lo hacen Cooney y otros) o de “formas pedagógicamente potentes” (como lo hace Shulman), no podemos pensar, como lo sugiere Carlsen, en un conocimiento preestablecido, estático y neutro. Estamos más bien hablando de *una integración de conocimientos, habilidades y actitudes para la acción.* Debemos, por lo tanto, abordar el conocimiento del profesor de matemáticas desde una perspectiva funcional.

2.2. Visión Funcional del Conocimiento del Profesor de Matemáticas

Supongo entonces que un profesor eficiente (y eficaz) es aquel que, teniendo en cuenta las condiciones que le impone el contexto, logra los objetivos que se ha impuesto (o que le han sido impuestos). En este apartado, centro mi reflexión en un escenario particular: el propósito del profesor de diseñar una unidad didáctica. Supongo, por lo tanto, que el profesor ha identificado una estructura matemática concreta, objeto de la unidad didáctica, para la que ha formulado (o adaptado) unos objetivos de aprendizaje. ¿Qué conocimientos y habilidades se requieren para lograr este propósito?

Entiendo que los escolares, en el entorno del aula, progresan en el logro de los objetivos de aprendizaje en la medida en que realizan actividades promovidas

por el profesor⁷⁷. El profesor promueve estas actividades al proponer tareas (demandas estructuradas de actuación) y al actuar en el aula cuando los escolares las abordan y buscan resolverlas. Al seleccionar las tareas y al actuar en el aula, el profesor toma decisiones teniendo en cuenta las condiciones del contexto y sus metas, a partir de la información que tiene disponible, y poniendo en juego su conocimiento y sus creencias⁷⁸. Me interesa, en particular, por la información que el profesor puede recabar y organizar sobre la estructura matemática objeto de la unidad didáctica que desea planificar. En el capítulo 2 propuse el análisis didáctico como un procedimiento sistemático y estructurado que le permite al profesor lograr este propósito.

Utilizaré la expresión *conocimiento didáctico* para referirme a los conocimientos y destrezas que son necesarios para realizar el análisis didáctico de un tema matemático. Al describir el análisis didáctico en el capítulo 2, lo presenté como el procedimiento que *idealmente* debería realizar el profesor para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas (ver sección 11.3 de ese capítulo). En este mismo sentido, el conocimiento didáctico que introduzco aquí hace referencia al conjunto de conocimientos y habilidades que se requieren para realizar el análisis didáctico. Esta aproximación al significado de la expresión “conocimiento didáctico” no es operativa. Es necesario calificarla para efectos de utilizarla ya sea en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria o en el contexto de la investigación sobre el aprendizaje y el conocimiento del futuro profesor de matemáticas.

2.3. Conocimiento Didáctico de Referencia y Conocimiento Didáctico del Futuro Profesor

El análisis didáctico está compuesto por un conjunto de procedimientos que permiten analizar una estructura matemática concreta desde varias perspectivas (del contenido, cognitiva, de instrucción y de actuación). Estos procedimientos se fundamentan en unas nociones, los organizadores del currículo, que surgen de la disciplina de la Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, el procedimiento para realizar el análisis de contenido de una estructura matemática se basa en los organizadores del currículo que he identificado como sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología. De manera similar, los procedimientos que configuran el análisis cognitivo se sostienen en nociones como competencia, objetivo de aprendizaje, capacidad, dificultad y camino de aprendizaje. En la literatura en Didáctica de la Matemática se encuentra una variedad de posibles significados para las nociones (los organizadores del currículo) que se ponen en juego en el análisis didáctico. Identifico a este conocimiento como el *conocimiento didáctico disciplinar de referencia*.

⁷⁷ No supongo que estas actividades tengan que expresarse necesariamente en acciones observables. Cuando el profesor da una explicación y el escolar la escucha y la interpreta, el escolar realiza una actividad (mental) que puede contribuir al progreso en su aprendizaje. En todo caso, y como lo manifesté en la sección 9.3, voy a suponer que la mayoría de las actividades de los escolares surgen con motivo de las tareas que reciben de parte del profesor.

⁷⁸ En el apartado 5 del capítulo 2 presenté algunas reflexiones sobre el papel de las metas, las creencias y el contexto en las decisiones del profesor.

Para efectos de diseñar la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, hemos hecho una interpretación del conocimiento didáctico disciplinar de referencia y hemos seleccionado unos significados singulares para cada uno de los organizadores del currículo. He concretado estos significados en el capítulo 2. Éste es el *conocimiento didáctico de referencia para la asignatura*. Por ejemplo, y desde la perspectiva teórica⁷⁹, de los diversos significados para la noción de sistema de representación que existen en Didáctica de la Matemática (Goldin, 1998a; Goldin y Janvier, 1998), hemos optado por el propuesto por Kaput (1992). El conocimiento didáctico de referencia para la asignatura es el conjunto de conocimientos y destrezas que, como diseñadores de este plan de formación, hemos tomado como opción dentro del conocimiento didáctico disciplinar de referencia y que esperamos que los futuros profesores interpreten y construyan como uno de los resultados de su formación. En el capítulo 5 profundizaré sobre esta cuestión. Por lo tanto, cuando me refiero al significado de alguno de los organizadores del currículo que presenté en el capítulo 2, debería utilizar la expresión “significado de referencia para la asignatura” de ese organizador del currículo. De la misma manera, debería utilizar la expresión “conocimiento didáctico de referencia para la asignatura” para referirme al conjunto de esos significados. No obstante, y para simplificar la redacción, en muchas ocasiones utilizaré la expresión “significado de referencia” y “conocimiento didáctico de referencia”, dando por sentado que el contexto permite concretar el uso que le doy a esas expresiones.

Al participar en un plan de formación inicial (en particular, la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato) los futuros profesores (y los grupos de futuros profesores) interpretan el conocimiento didáctico de referencia y construyen un conocimiento (individual o del grupo). Éste es el *conocimiento didáctico del futuro profesor o del grupo de futuros profesores*⁸⁰. Es un conocimiento en permanente evolución y, de hecho, mi interés empírico en este proyecto de investigación se centra en describir, caracterizar y explicar (parcialmente) los procesos en virtud de los cuales los grupos de futuros profesores desarrollaron su conocimiento didáctico. Haré por tanto referencia al *significado que un futuro profesor o un grupo de futuros profesores tiene (o desarrolla) con respecto a un organizador del currículo*. Para simplificar la redacción, en general utilizaré la expresión “significado de un futuro profesor o grupo de futuros profesores...”. Dado el carácter evolutivo del conocimiento didáctico de los futuros profesores, utilizaré también la expresión “significado parcial de un futuro profesor o un grupo de futuros profesores” con respecto a un organizador del currículo. Concreto el significado de esta expresión en el apartado 4 del capítulo 4. Como lo introduce en el apartado 7 del capítulo 1 y lo concretaré en el apartado 1 del capítulo 7, en este proyecto de investigación, centro mi atención en el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores sobre los organizadores del currículo del análisis de contenido.

El significado de referencia de cada organizador del currículo se puede considerar atendiendo a tres aspectos diferentes, pero relacionados. Estos son los signi-

⁷⁹ Desarrollaré más adelante los tres aspectos (teórico, técnico y práctico) del significado de un organizador del currículo.

⁸⁰ En el apartado 3 del capítulo 4 profundizaré en la aproximación socio-cultural al aprendizaje (y el conocimiento) de los futuros profesores.

ficados teórico, técnico y práctico de cada organizador del currículo. El *significado teórico*⁸¹ de un organizador del currículo se refiere a la opción que, como formadores, hemos tomado para el significado del organizador del currículo dentro de la variedad de posibles significados que existen en la literatura en Didáctica de la Matemática. En el caso, por ejemplo, de los sistemas de representación, es la definición de Kaput (1992) a la que hice referencia arriba. En el contexto de la asignatura, nosotros utilizamos e interpretamos el significado teórico de cada organizador del currículo para efectos de proponer procedimientos y herramientas para analizar una estructura matemática concreta. Nuestra visión funcional de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria nos lleva a considerar los organizadores del currículo como herramientas analíticas con un propósito práctico. En el capítulo 2 establecí los esquemas en virtud de los cuales se pueden poner en juego esas nociones para analizar un concepto matemático. En otras palabras, describí, tomando como ejemplo el concepto función cuadrática, qué información esperamos que idealmente los futuros profesores recojan de su tema para efectos de establecer los significados de ese concepto y cómo esperamos que ellos recaben, organicen y presenten esa información. Estas estrategias ideales de análisis de un concepto matemático configuran el *significado técnico* de cada organizador del currículo. Estos significados técnicos, aunque basados en los significados teóricos, los sobrepasan, al destacar el carácter de herramienta analítica que asume cada una de las nociones⁸².

El análisis de la estructura matemática por medio de cada organizador del currículo tiene un propósito práctico: la información que surge de estos análisis debe sustentar la planificación que esperamos que realicen los grupos de futuros profesores. Llamo *significado práctico* de un organizador del currículo al conjunto de estrategias y técnicas necesarias para utilizar la información que surge del análisis de la estructura matemática con ese organizador del currículo en los demás análisis que conforman el análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica. En el apartado 5 del capítulo 4 utilizaré, desde la perspectiva del aprendizaje de los grupos de futuros profesores, la teoría de la génesis instrumental para profundizar y caracterizar los significados técnico y práctico de un organizador del currículo. Allí describo los procesos en virtud de los cuales los grupos de futuros profesores pueden, en la práctica, transformar estas nociones en instrumentos.

2.4. Un Significado Concreto de la Expresión “Conocimiento Didáctico”

Las reflexiones anteriores ponen en evidencia el hecho de que, en este documento, utilizaré la expresión “conocimiento didáctico” desde una perspectiva concreta. El conocimiento del profesor de matemáticas debe incluir otros aspectos que no considero para efectos de este proyecto de investigación. Por ejemplo, la noción de currículo se encuentra siempre en el trasfondo de la reflexión y el uso en la práctica de los organizadores del currículo. Por otro lado, las decisiones y las actuaciones del profesor son consecuencia tanto de su conocimiento, como de sus creencias y metas. Por lo tanto, resulta relevante que los futuros profesores conozcan

⁸¹ De nuevo, aquí debería usar la expresión “significado teórico de referencia para la asignatura”.

⁸² Utilizo el término “técnico” en el sentido de “conjunto de procedimientos y recursos de que se sirve una ciencia o un arte, y pericia o habilidad para usar de esos procedimientos y recursos” (Real Academia Española, 2006).

los fundamentos de las matemáticas escolares (naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje) y reconozcan que, en la práctica, ellos asumen una posición personal con respecto a estos fundamentos. Adicionalmente, la descripción que presenté en el capítulo 2 es parcial: la configuración y estructuración del análisis didáctico es un proyecto en curso y sus componentes no han sido identificados y descritos en su totalidad. Por ejemplo, como lo manifesté en el apartado 9 de ese capítulo, la propuesta que hago para el análisis de instrucción se restringe al análisis de una tarea con respecto a un objetivo de aprendizaje concreto. Finalmente, es claro que las actividades y responsabilidades del profesor de matemáticas van más allá del diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas. En otras palabras, el conocimiento que pone en juego un profesor en su práctica docente es amplio. En este documento, utilicé el calificativo “didáctico” para enfatizar mi interés en aquella parcela del conocimiento del profesor que se refiere y opera con respecto a un contenido matemático específico.

Puede pensarse que el conocimiento didáctico, en el sentido en que quiero utilizarlo en este documento, es el conocimiento que, de una estructura matemática concreta, surge cuando dicha estructura se analiza utilizando los organizadores del currículo. Sería posible abordar el significado de esta expresión de esta perspectiva y concretarlo en la globalidad de la información que es posible recabar y organizar, a partir de los organizadores del currículo (y del análisis didáctico), de las estructuras matemáticas que configuran las matemáticas escolares. No obstante, y para efectos de explorar el conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participan en un plan de formación, me he decantado por la opción que describí más arriba. Entiendo el conocimiento didáctico de un grupo de futuros profesores como el conjunto de conocimientos y habilidades que los facultan para abordar el análisis de una estructura matemática con el propósito de producir y justificar una planificación. Desde esta perspectiva, el conocimiento didáctico de un grupo de futuros profesores se configura alrededor de un conjunto estructurado de capacidades que caracterizan su competencia de planificación. A continuación, abordé la problemática de las competencias del profesor de matemáticas, para después establecer una relación entre la competencia de planificación del profesor y su conocimiento didáctico.

3. COMPETENCIAS PROFESIONALES Y LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

En capítulo 2, introduje la noción de competencia con motivo del análisis cognitivo. Allí me refería a las competencias matemáticas de los escolares y basé la reflexión en la propuesta del informe PISA (OCDE, 2004) para la conceptualización de este término. En este apartado, el foco de interés son las competencias profesionales del profesor de matemáticas. Los dos enfoques, aunque relacionados, son diferentes. Para determinar el uso que le daré al término competencia profesional del profesor de matemáticas, comienzo haciendo una revisión de la noción genérica de competencia profesional. Esta noción (The Scottish Office, 1998) se utiliza en la formación de profesores desde la década de los sesenta. No obstante, la creación del espacio europeo de educación superior y el correspondiente informe *Tu-*

ning (González y Wagenaar, 2003) han puesto de manifiesto la actualidad y la relevancia de esta noción a nivel universitario. Presento una breve historia del “movimiento de las competencias” y de las diferentes aproximaciones que han existido a esta noción en el ámbito de la formación profesional. Describo las principales características del informe *Tuning* con respecto a las competencias genéricas y destaco la carencia, por el momento, de una caracterización suficientemente detallada de las competencias del profesor, en general, y del profesor de matemáticas, en particular. En seguida, reviso algunos proyectos en los que se aborda esta problemática, con especial énfasis en el trabajo de Mogens Niss y el *Seminario Itermat*. Finalmente, justifico un esquema complementario —desde la perspectiva del análisis didáctico— para abordar las competencias del profesor de matemáticas de secundaria.

3.1. Formación Basada en Competencia

El significado de la noción de competencia y de sus implicaciones para una formación basada en la competencia han evolucionado en el tiempo. Estas ideas surgieron con motivo de, y en reacción al movimiento de objetivos demostrables de Bloom de los años cincuenta (Bloom, 1956). Se introdujeron originalmente en la formación de profesores en Estados Unidos en la década de los sesenta, expandiéndose a otras áreas como la formación vocacional y el desarrollo de habilidades profesionales y a otros países como el Reino Unido, Alemania y Australia (Bowden, 1997, p. 1).

Desde otra perspectiva, el surgimiento de la noción de competencia en el sistema educativo americano se puede relacionar con la preocupación por su baja calidad —evidenciada en reportes como *A Nation At Risk: the Imperative For Educational Reform* (NCEE, 1983)— y la necesidad que algunos responsables educativos ven, por ejemplo, de que los programas de formación inicial de profesores “se diseñen alrededor de estándares explícitos y medibles, competencias y sistemas de evaluación de rendimiento” (Bullough, 2002, p. 235). Bullough alerta sobre el riesgo de simplificar y trivializar un esquema como el de las competencias (p. 237). Es un riesgo de todo sistema de evaluación. El movimiento de los estándares, y por lo tanto de las competencias del profesor, como una herramienta para la evaluación de su calidad, se ha extendido. Éste es el caso reciente, por ejemplo, en Australia (Fraser y Morony, 2004) y en el Reino Unido (The Scottish Office, 1998).

La formación basada en la competencia ha generado permanentes debates en los que se caricaturiza al contrario ya sea “como alguien que no se preocupa en absoluto para la preparación para el trabajo, o como alguien que se opone a cualquier aprendizaje que no esté directamente relacionado con un rendimiento laboral preestablecido” (Bowden, 1997, p. 2). Aún teniendo en cuenta la variedad de interpretaciones existentes, Bowden sugiere que los principios básicos y las intenciones de la formación basada en la competencia han permanecido invariables desde la década de los sesenta: un énfasis en los resultados, mayor relevancia al lugar de trabajo, los resultados como competencias observables, la evaluación como juicios sobre la competencia, y el reconocimiento de la mejora en las habilidades (pp. 4-7).

La historia del desarrollo de la educación basada en la competencia se puede organizar en niveles que caracterizan el significado que, en su momento, se le ha dado a los términos “competencia” y “ser competente en”⁸³. La Tabla 6 presenta un resumen de estos niveles.

Nivel	Significado
<i>Genérico</i>	Conocimiento, habilidades y actitudes
<i>Conductista</i>	Rendimiento básico en el lugar de trabajo
<i>Aditivo</i>	Rendimiento más conocimiento (considerados y evaluados independientemente)
<i>Integrador</i>	Integración de conocimientos y rendimiento

Tabla 6. Niveles de educación basada en la competencia (Bowden, 1997, pp. 7-8)⁸⁴

La mayor parte de las críticas al movimiento de competencias se refiere a los primeros dos niveles. En estos niveles, la competencia se desdobra en la realización de tareas discretas (Kerka, 1998, p. 1). En el cuarto nivel, se da la integración de “cómo la persona ve su rol profesional, su capacidad para asumir ese rol, y la base de conocimiento con la que esa identidad y rendimiento profesional se relacionan” (Bowden, 1997, p. 8). Por lo tanto, el haber desarrollado, dentro del marco de una formación, unas competencias no implica que se sea competente en la realización de las tareas profesionales.

El ser competente involucra una combinación de atributos (conocimiento, capacidades, habilidades, actitudes) estructurados en competencias que le permiten a un individuo o a un grupo asumir un papel o realizar una colección de tareas a un nivel o grado de calidad adecuado (esto es, un estándar adecuado) en una situación particular y, por lo tanto, hacen que ese individuo o grupo sea competente en ese papel... (Preston y Walker, 1993, p. 118, en cursiva en el original)⁸⁵

En el marco de la formación profesional y después de analizar veinte definiciones de “competencia” en la literatura, Tejada (1999) conceptualiza las competencias como

el conjunto de conocimientos, procedimientos y actitudes combinados, coordinados e integrados en la acción adquirido a través de la experiencia (formativa y no formativa —profesional—) que permite al individuo resolver problemas específicos de forma autónoma y flexible en contextos singulares. (p. 28)

Más recientemente, el proyecto DeSeCo de la OECD, enfatiza que “una competencia es más que conocimiento y destrezas. Involucra la habilidad para satisfacer

⁸³ En inglés se utilizan los términos “competency” y “competence”. Utilizo “competencia” para el primero, y “ser competente” para el segundo. Este último también se traduce, en algunas ocasiones, como “profesionalidad”.

⁸⁴ Tejada (1999), citando a Gonczy (1994), los denomina “enfoques” e identifica tres: conductista, genérico e integrado o relacional (p. 27).

⁸⁵ Citado en Department of Education (2001, p. 11).

requisitos complejos, al utilizar y movilizar recursos psicológicos (que incluyen capacidades y actitudes)” (OECD, 2005, p. 4).

3.2. Competencias Profesionales y Titulaciones Universitarias. El informe *Tuning*

El proyecto *Tuning* se realizó en el marco del proceso Sorbona-Boloña-Praga-Berlín, en virtud del cual se busca la creación de un área integrada de educación superior en Europa. Este propósito requiere que existan normas comunes para la compatibilidad, la comparabilidad y la competitividad. El proyecto se centra en la caracterización de competencias genéricas y específicas para los graduandos de primer y segundo ciclos. Se utiliza una noción de competencia similar a la de Preston y Walker(1993):

*Las competencias tienden a transmitir el significado de lo que la persona es capaz de o es competente para ejecutar, el grado de preparación suficiencia o responsabilidad para ciertas tareas... las competencias y las destrezas se entienden como **conocer** y **comprender** (conocimiento teórico de un campo académico, la capacidad de conocer y comprender), **saber como actuar** (la aplicación práctica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones), y **saber como ser** (los valores como parte integrante de la forma de percibir a los otros y vivir en un contexto social). Las competencias representan una combinación de atributos (con respecto al conocimiento y sus aplicaciones, aptitudes, destrezas y responsabilidades) que describen el nivel o grado de suficiencia con que una persona es capaz de desempeñarlos (González y Wagenaar, 2003, pp. 69-70, en negritas en el original).*

En el informe se consideran dos tipos de competencias. Aquellas que se relacionan con cada área temática, y que se denominan *específicas*; y las *competencias genéricas* que recogen “aquellos atributos compartidos que pudieran generarse en cualquier titulación y que son considerados importantes por ciertos grupos sociales” (p. 70).

Bajo, Maldonado, Moreno, Moya y Tudela (2003) hacen una clasificación de las competencias propuestas en el informe *Tuning*. Ellos clasifican las competencias en básicas, de intervención y específicas. Y, para cada una de estas categorías, definen otras clasificaciones. González (2004, p. 2) estructura la propuesta de Bajo et al. (2003) como se muestra en la Tabla 7.

Competencias básicas		
<i>Cognitivas</i>		<i>Motivaciones y valores</i>
Conocimientos generales básicos		Motivación de logro
Conocimientos básicos de la profesión		Iniciativa y espíritu emprendedor
Análisis y síntesis		Preocupación por la calidad
Organizar y planificar		Compromiso ético
Resolución de problemas		
Toma de decisiones		
Capacidad de aprender		
Competencias de intervención		
Se aplican sobre el medio —físico y social— o sobre el propio pensamiento		
<i>Cognitivas</i>	<i>Sociales</i>	<i>Culturales</i>
Aplicar conocimientos a la práctica	Habilidades interpersonales	Apreciar diversidad y multiculturalidad
Adaptarse a nuevas situaciones	Liderazgo	Trabajar en contexto internacional
Creatividad	Trabajo en equipo	Conocer otras culturas y costumbres
Crítica y autocrítica	Trabajo en equipo interdisciplinar	
Trabajo autónomo		
Habilidades de investigación		
Competencias específicas		
Habilidad para realizar tareas concretas y de carácter instrumental		
Comunicación oral y escrita en la propia lengua		
Conocimiento de una segunda lengua		
Habilidades de gestión de la información		
Habilidades básicas del manejo de un ordenador		

Tabla 7. Organización de las competencias Tuning propuesta por Bajo et. al (2003) (González, 2004, p. 2)

La propuesta de Bajo et al. (2003) resuelve, desde la perspectiva académica, una de las dificultades del informe *Tuning*, la conceptualización de las competencias propuestas, puesto que asume una posición con respecto a los significados de cada uno de los términos. La clasificación de las competencias en básicas, de intervención y específicas es una aportación importante. El informe *Tuning* propone también el análisis de las competencias específicas a cada una de las disciplinas. Por lo tanto, el análisis y puesta en práctica de las competencias genéricas, objeto de ese documento, no debe mirarse de manera aislada, sino en conjunción con esas competencias específicas. Desafortunadamente el capítulo sobre competencias

específicas a la educación del informe *Tuning* centra su atención en discusiones conceptuales, sin contribuir a su caracterización.

3.3. Competencias del Profesor

En Australia, el Departamento de Educación y Formación ha publicado recientemente un esquema de competencias para los profesores (Department of Education and Training, 2004). Ellos identifican cinco dimensiones para las competencias del profesor: facilitar el aprendizaje de los estudiantes, evaluar e informar sobre el resultado del aprendizaje de los estudiantes, comprometerse en el aprendizaje profesional, participar en el diseño curricular y otras iniciativas centradas en la obtención de resultados, y asociarse con la comunidad escolar (p. 8). El esquema delinea estándares de competencia para la enseñanza eficiente a lo largo de una secuencia de fases del trabajo del profesor. Un profesor puede operar en cualquiera de las fases en cualquier momento de su carrera profesional. Por otra parte, los elementos críticos de competencia se refieren a un rango de acciones profesionales a las que los profesores se comprometen cuando aplican su conocimiento profesional, habilidades y atributos a su contexto de enseñanza. Son características identificables que contribuyen al logro de la totalidad del estándar de competencia (p. 5).

En Estados Unidos, el Consejo Nacional para la Enseñanza Profesional identificó las siguientes competencias del profesor: compromiso con los estudiantes y su aprendizaje, conocimiento de los temas que se enseñan y de cómo se deben enseñar, responsabilidad para gestionar y hacer seguimiento del aprendizaje de los estudiantes, reflexión sistemática sobre su práctica, aprendizaje a partir de la experiencia, y membresía a comunidades de aprendizaje⁸⁶.

3.4. Competencias del Profesor de Matemáticas

Considero a continuación dos aproximaciones a la problemática de las competencias del profesor de matemáticas.

“El Buen Profesor de Matemáticas”

Niss (2003) define al “buen profesor de matemáticas” como aquel que puede inducir y promover el desarrollo de las competencias matemáticas en sus estudiantes. Esto implica que el profesor mismo debe poseer esas competencias matemáticas. Adicionalmente, Niss identifica y caracteriza unas competencias didácticas y pedagógicas más específicas a las matemáticas (pp. 188-190):

Currículo: analizar, evaluar, implantar y crear currículos.

Enseñanza: diseñar, planificar, organizar, orquestar y gestionar la enseñanza, incluyendo el diseño y gestión de situaciones de enseñanza y aprendizaje y de materiales, motivación de los escolares y discusión con ellos sobre el currículo.

Aprendizaje: exhibir, interpretar y analizar el aprendizaje matemático de los estudiantes, junto con sus creencias y actitudes.

⁸⁶ Citado en Department of Education (2001, p. 13). Otros ejemplos de estándares para la enseñanza que implícita o explícitamente se refieren a las competencias del profesor son NBPTS (2002) y NCTM (1991) en los Estados Unidos y Scottish Office Education and Industry (1998) en el Reino Unido.

Evaluación: identificar, evaluar, caracterizar y comunicar los resultados del aprendizaje (competencias) de los estudiantes. Incluye el diseño y análisis de instrumentos y formas de evaluación.

Colaboración: colaborar con colegas de todas las disciplinas, padres, autoridades y otros acerca de la enseñanza de las matemáticas.

Desarrollo profesional: desarrollo de la propia competencia como profesor de matemáticas incluyendo la participación en actividades de desarrollo profesional; reflexionar sobre la propia enseñanza y mantenerse al día con las tendencias y desarrollos en la investigación y la práctica.

La planificación de la instrucción se encuentra dentro de la competencia de enseñanza que propone Niss⁸⁷. ¿Cuáles son las capacidades del profesor necesarias para la planificación? Ésta es una pregunta clave que abordaré en el siguiente apartado. La planificación de la instrucción, por un lado, y la implantación de esa planificación y la gestión de clase por el otro, son actividades diferentes. No obstante, mostraré que la realización de estas actividades requiere de competencias comunes en muchos casos. En particular, mostraré que las competencias de currículo, enseñanza, aprendizaje y evaluación involucran capacidades que son necesarias para la planificación de la instrucción. Relacionaré las competencias del profesor para la planificación con el análisis didáctico. De esta manera, daré especificidad y concreción a esas competencias.

Seminario Itermat

En el marco de la creación del Espacio Europeo de Educación Superior y, dentro del contexto de la definición de competencias para la licenciatura de matemáticas, González (2004) interpreta las nociones de Conocimiento General Básico (CGB) y Conocimiento Básico de la Profesión (CBP), que se identifican en Bajo et al. (2003) y González y Wagenaar (2003) de la siguiente manera (p. 4):

El CGB corresponde a fundamentos disciplinares generales de la Didáctica de la Matemática que son referentes teóricos para el profesor de matemáticas. El CBP es el que capacita para investigar/ejercer la práctica de la profesión de profesor de matemáticas de modo independiente. Esta separación no tiene fronteras claras en los planes de formación de profesores. Las investigaciones sobre la naturaleza del conocimiento del profesor de matemáticas sitúan a este conocimiento en un plano intermedio entre lo teórico y lo empírico y lo describen como un sistema de funcionamiento integrado que combina saberes de naturaleza académica y su puesta en práctica.

Llinares (2004, p. 2) sugiere organizar la discusión sobre las competencias del profesor de matemáticas a partir de tres “sistemas de actividad”: (a) organizar el contenido matemático para enseñarlo; (b) analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos; y (c) gestionar el contenido matemático en el aula.

⁸⁷ En este capítulo utilizo el término “planificación” de una manera genérica dado que los autores a los que hago referencia suponen implícitamente un significado establecido para el mismo. En el apartado 1 del capítulo 2 presenté algunas reflexiones sobre esta noción, enfatizando mi interés por lo que denominé “planificación local”.

En el mismo seminario en el que Llinares hace la propuesta anterior⁸⁸, se establecen unas competencias generales para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (Rico, 2004c, pp. 8-9):

1. dominio de los contenidos matemáticos de Educación Secundaria desde una perspectiva matemática superior y su conocimiento como objetos de enseñanza-aprendizaje,
2. dominio de la organización curricular y planificación de estos contenidos matemáticos para su enseñanza,
3. capacidad para el análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos a través de sus actuaciones y producciones matemáticas, y
4. capacidad de gestión del contenido matemático en el aula.

En este seminario también se establecieron competencias específicas⁸⁹. Algunos ejemplos son los siguientes (Rico, 2004c, p. 9):

- ◆ conectar los contenidos matemáticos de la Educación Secundaria con los fenómenos que los originan, reconociendo los aspectos formales implicados junto con su presencia en situaciones cotidianas y aquellas otras que procedan de ámbitos multidisciplinares (física, biología, economía, etc.);
- ◆ reconocer los tipos de razonamiento de los estudiantes, proponer tareas que los orienten, diagnosticar sus errores, y proponer los correspondientes procesos de intervención;
- ◆ seleccionar y secuenciar actividades para el aprendizaje escolar; analizar los diversos problemas que surgen en situaciones de aprendizaje; y
- ◆ disponer de criterios, técnicas e instrumentos específicos para la evaluación del conocimiento matemático.

3.5. Competencias del Profesor de Matemáticas y Dimensiones del Currículo

En lo que corresponde a la actividad de planificación y a la actuación del profesor en el aula, observamos que la noción de competencia del profesor (en su dimensión general) se tiende a organizar de acuerdo con las capacidades necesarias para gestionar las cuatro dimensiones del currículo: contenido, aprendizaje, enseñanza y evaluación.

Éstas son las dimensiones que organizan los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico. Además, la noción de competencia involucra la realización de una tarea o actividad y la puesta en juego de unas capacidades (que involucran conocimientos, habilidades y actitudes) para realizar esa tarea. Por consiguiente, la noción de análisis didáctico, como procedimiento ideal para la planificación, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas, puede servir como marco conceptual apropiado para explorar las competencias del profesor de matemáticas

⁸⁸ *Seminario Itermat* celebrado en Granada por la Subcomisión Española del ICMI en enero de 2004 (Recio, 2004).

⁸⁹ La idea de “competencia específica” es problemática. Por un lado, resulta difícil determinar hasta que nivel de especificidad se debe llegar. Por el otro, en algunos casos la especificidad se logra al delimitar las competencias generales en contenidos concretos. En el siguiente apartado abordo esta cuestión, al utilizar la noción de capacidad para caracterizar las competencias generales del profesor de matemáticas.

en estos aspectos de su actividad docente. En particular, mostraré en el siguiente apartado que este procedimiento permite identificar, organizar y fundamentar las capacidades específicas que pueden contribuir al desarrollo de la competencia de planificación.

Aunque ya existen varias propuestas al respecto, propongo un esquema complementario para abordar el tema de las competencias del profesor porque, al explorar esta cuestión desde la perspectiva del análisis didáctico,

- ◆ es posible determinar *sistemáticamente* las capacidades que contribuyen a las competencias generales;
- ◆ las capacidades se organizan en una estructura que permite establecer las relaciones entre ellas; y
- ◆ el procedimiento de identificación de las capacidades parte de un marco conceptual (el análisis didáctico) que lo fundamenta, ya que ese marco explicita los requerimientos cognitivos que se le plantean al profesor en formación.

4. ANÁLISIS DIDÁCTICO Y CAPACIDADES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Existe naturalmente una cierta similitud entre la enumeración de las competencias del profesor de matemáticas del Seminario Itermat y las categorías con las que Ball y sus colaboradores organizan los tipos de conocimiento de las matemáticas para la enseñanza. Las dos son aproximaciones que se guían (ya sea desde la práctica o desde la teoría) por las dimensiones del currículo. El problema se centra en profundizar en esas competencias y caracterizarlas a partir de su especificidad a las matemáticas. Mientras que Ball y sus colaboradores fundamentan y especifican la noción de matemáticas para la enseñanza en el análisis de la práctica, yo busco explorar la descripción de las competencias del profesor de matemáticas desde una perspectiva analítica. Ball y sus colaboradores sugieren, por ejemplo, que el profesor debe ser capaz de analizar los errores de los estudiantes y usar representaciones matemáticas (conocimiento especializado de contenido). Pero, más allá de justificar esta elección de capacidades como consecuencia del análisis de la práctica, en sus publicaciones no se encuentran razonamientos que permitan respaldar dicha elección. Algo similar sucede cuando se consideran las competencias específicas propuestas, en el Seminario Itermat, por la Subcomisión Española del ICMI (Recio, 2004). Utilizaré la descripción del análisis didáctico que presenté en el capítulo 2 y la conceptualización del conocimiento didáctico del apartado 2 de este capítulo para identificar las capacidades que pueden contribuir al desarrollo de algunas de las competencias del profesor de matemáticas⁹⁰. Enumeraré y organizaré estas capacidades de acuerdo con los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico. Éstas son, por lo tanto, las capacidades que considero necesarias para planificar una unidad didáctica sobre un tema matemático concreto. Presento únicamente las capacidades básicas correspondientes a cada análisis. Como se sugiere en la descripción del análisis didáctico que presenté en el capítulo 2, cada

⁹⁰ Ya consideré la noción de capacidad en la 8.3 del capítulo 2.

una de estas capacidades básicas se puede desarrollar en procedimientos más detallados. De hecho, el carácter sistémico y cíclico del análisis didáctico hace evidente la relación entre las diferentes capacidades: unas capacidades dadas pueden requerir de otras capacidades o conocimientos.

4.1. Capacidades del Profesor de Matemáticas que Surgen del Análisis Didáctico

En este apartado, no pretendo describir en detalle los procedimientos que conforman el análisis didáctico, en términos de las capacidades que requieren. A continuación, enumero las capacidades básicas involucradas en cada uno de los análisis y, más adelante, exploro, a manera de ejemplo y con algún detalle, dos de esas capacidades.

Capacidades básicas para el Análisis de Contenido

Para las tres dimensiones del significado de un concepto, el profesor debe ser capaz de:

- ◆ recabar la información necesaria que le permita identificar los significados del concepto;
- ◆ organizar esta información de manera estructurada;
- ◆ seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción, al tener en cuenta las condiciones de los contextos sociales, educativos e institucionales;
- ◆ seleccionar los significados de referencia al tener en cuenta las condiciones del contexto del aula (que surgen de la información que se obtiene del análisis cognitivo); e
- ◆ identificar los focos de interés que se han de tratar.

Capacidades básicas para el Análisis Cognitivo

A partir de la información que surge del análisis de contenido y del análisis de actuación del ciclo previo, el profesor debe ser capaz de:

- ◆ identificar las capacidades de los escolares que considera relevantes para los focos de interés;
- ◆ formular los objetivos de aprendizaje para estos focos y caracterizarlos en términos de sus caminos de aprendizaje y su contribución a las competencias⁹¹;
- ◆ detectar las dificultades de los escolares que considera relevantes para el logro de los objetivos de aprendizaje; y
- ◆ establecer sus hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

Capacidades básicas para el Análisis de Instrucción

Para efectos de analizar y seleccionar las tareas que conforman la instrucción, el profesor ha de ser capaz de:

- ◆ identificar tareas y secuencias de tareas que pueden configurar su propuesta de planificación;

⁹¹ Las competencias se suponen previamente determinadas por el contexto.

- ◆ establecer los caminos de aprendizaje de esas tareas y su contribución a las competencias; y
- ◆ analizar, comparar y seleccionar las secuencias de tareas que, en su opinión y a partir de la información recogida, contribuyen eficientemente al logro de los objetivos de aprendizaje.

Capacidades básicas para el Análisis de Actuación

Una vez que se ha realizado la instrucción y que el profesor ha observado y registrado lo que sucedió en su interacción con los estudiantes, él ha de ser capaz de:

- ◆ comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula,
- ◆ evaluar los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula,
- ◆ evaluar el aprendizaje de los escolares con motivo de la puesta en práctica de las actividades, y
- ◆ producir información relevante para una nueva planificación.

4.2. Ejemplo de Dos Capacidades

La descripción de los procedimientos que configuran el análisis didáctico y que presenté en el capítulo 2 permite desarrollar en detalle las capacidades básicas que he enumerado en la sección anterior. Por ejemplo, las dos primeras capacidades del análisis de contenido se refieren a la identificación y organización de los significados de un concepto matemático. Si consideramos las dimensiones de sistemas de representación y estructura conceptual de estos significados, entonces, a partir de los procedimientos que configuran el análisis de contenido, podemos concluir que el profesor debe ser capaz, para el concepto correspondiente, de:

1. identificar sus elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas),
2. determinar las diferentes representaciones de esos elementos y
3. establecer las relaciones entre los elementos y entre sus representaciones.

Si profundizamos en el detalle, observamos que la capacidad 3 implica que el profesor debe ser capaz de establecer las relaciones⁹²:

- ◆ entre el concepto y los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura,
- ◆ entre el concepto y los objetos que son casos particulares de dicho concepto,
- ◆ entre el concepto y los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte,
- ◆ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas invariantes),
- ◆ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto pertenecientes a sistemas de representación diferentes (traducción entre sistemas de representación) y

⁹² Ver el capítulo 2 para ejemplos de estas relaciones.

- ◆ entre pares de signos que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas variantes).

En el ejemplo que acabo de presentar se aprecia la estructura de las capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas (ver Figura 25). He identificado unas capacidades básicas que contribuyen a esta competencia y las he estructurado de acuerdo con los análisis que conforman el análisis didáctico. En el caso del análisis de contenido, dos de las capacidades básicas se refieren a la identificación y organización de los significados del concepto en términos de los sistemas de representación y la estructura conceptual. Estas capacidades involucran, entre otras, la capacidad de establecer diversos tipos de relaciones entre los elementos de los mapas conceptuales en los que el profesor organiza los significados del concepto en cuestión.

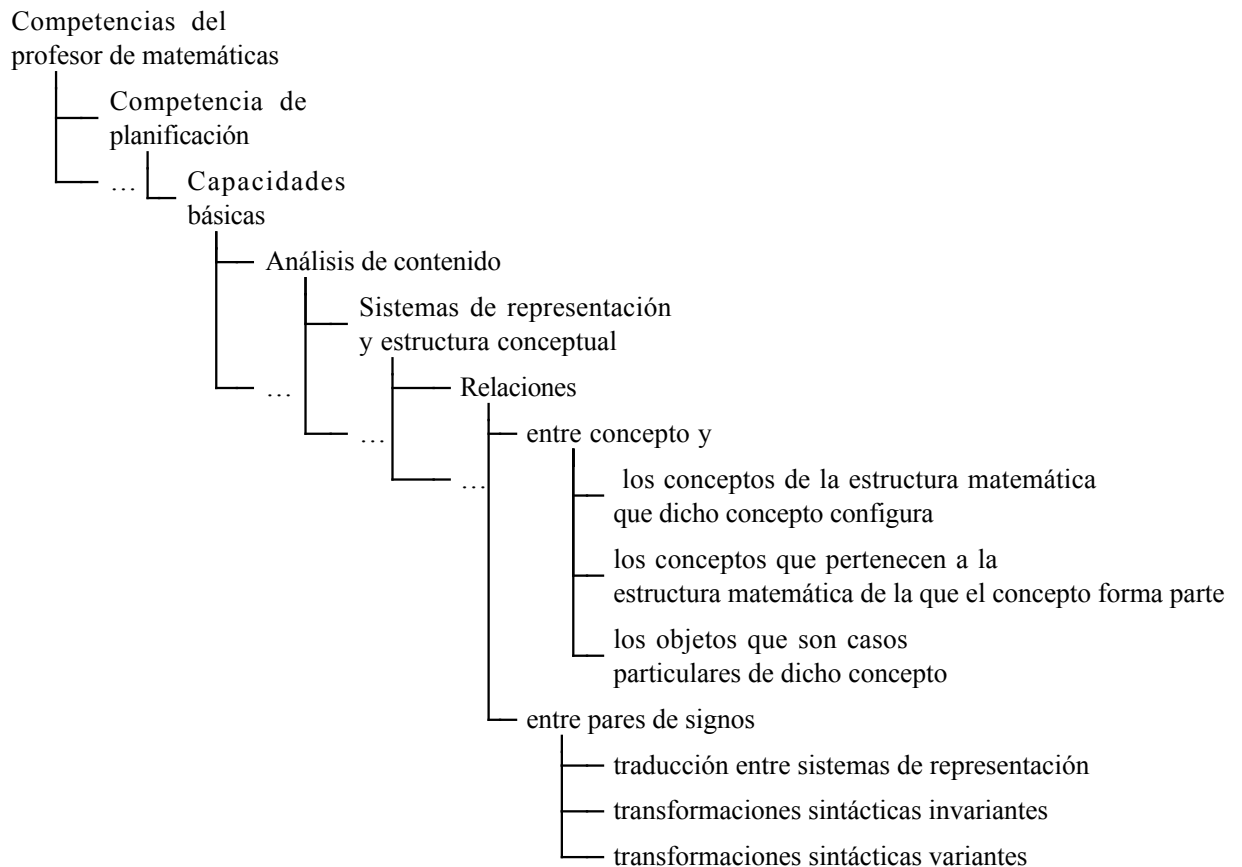


Figura 25. Estructura de capacidades y competencia de planificación

5. CONOCIMIENTO PEDAGÓGICO DE CONTENIDO, CONOCIMIENTO DIDÁCTICO Y COMPETENCIA DE PLANIFICACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

En este capítulo he abordado la problemática del conocimiento del profesor de matemáticas. He resaltado la importancia de la noción de conocimiento pedagógi-

co de contenido en esta problemática y he identificado algunas de sus carencias. En particular, he mostrado y criticado el hecho de que esta noción, en su versión original, implica la idea de la transformación de unos contenidos prescritos en unos contenidos propuestos con el propósito de ser “transmitidos”. He sugerido, por lo tanto, que, desde una perspectiva constructivista del aprendizaje de los escolares, el producto de la reflexión y el trabajo del profesor no debe ser exclusivamente la transformación de un contenido, sino el diseño y gestión de unas actividades de aprendizaje.

Tomando como ejemplo las dos capacidades básicas que desarrollé en la Figura 25, he mostrado que la descripción detallada de los procedimientos que conforman el análisis didáctico permite estructurar las capacidades que pueden contribuir a la competencia de planificación del profesor de matemáticas. El conjunto de todas las capacidades y de las relaciones entre ellas conforma lo que, en el apartado 2, denominé conocimiento didáctico: los conocimientos y destrezas (teóricos, técnicos y prácticos) necesarios para realizar el análisis didáctico de un tema matemático. En realidad, “la mezcla de contenido y pedagogía en la comprensión de cómo se organizan, representan y adaptan tópicos, problemas o cuestiones particulares a los diversos intereses y capacidades de los estudiantes y cómo se presentan para la instrucción” (Shulman, 1987, p. 8) que se encuentra en el núcleo de la noción de conocimiento pedagógico de contenido se debe conceptualizar como más que una mezcla: es una estructura compleja de conocimientos y capacidades que surge cuando, al considerar la especificidad de un tema, se explora la problemática de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas.

Me he aproximado a la conceptualización del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas de secundaria desde una perspectiva funcional. En el capítulo 2 partí de unas expectativas con respecto al aprendizaje de los escolares (qué formación matemática y cómo se desarrolla). Estas expectativas me permitieron delimitar y caracterizar las actividades que el profesor debería realizar para producir una planificación (el análisis didáctico). El conocimiento y las destrezas que se espera que un futuro profesor desarrolle en un plan de formación se determinan a partir del análisis de esas actividades. El conocimiento del profesor es una función de lo que se espera que él sea capaz de hacer y lograr. De esta manera, he concretado el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas como el conjunto de conocimientos y capacidades necesarios para realizar el análisis didáctico y he singularizado los tres aspectos (teórico, técnico y práctico) de ese conocimiento. Por otro lado, la descripción detallada del análisis didáctico me ha permitido caracterizar, de manera estructurada y en términos de capacidades concretas, la competencia de planificación del profesor. Esta estructura de capacidades (de la que he presentado un ejemplo) resalta y detalla otros aspectos de la noción de conocimiento didáctico, tal y como la he concretado en las páginas anteriores.

Utilizaré las ideas que he desarrollado en este capítulo para dos propósitos dentro de este documento. Primero, la estructura que se sugiere en la Figura 25 y la noción de conocimiento didáctico servirán, en el capítulo 5, como uno de los ejes de la fundamentación del diseño del plan de formación de profesores de matemáticas objeto de estudio de este trabajo. Segundo, esta estructura, como caracterización del conocimiento didáctico, tiene también una función metodológica clave en los estudios que constituyen la componente empírica de este proyecto de

investigación. Como ya lo mencioné en el capítulo 1, estos estudios exploran el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores de matemáticas de secundaria en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato que se ofreció a estudiantes de matemáticas de quinto curso de la Universidad de Granada durante el curso 2000-2001. Partiré de la estructura mencionada para construir las categorías de análisis con base en las cuales diseñaré los instrumentos de recolección, codificación y análisis de la información que utilizaré en dichos estudios.

APRENDIZAJE DE LOS FUTUROS PROFESORES

En este capítulo presento el marco conceptual de los estudios empíricos que conforman el proyecto de investigación objeto de este documento. Para ello, asumo una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores, en el contexto del desarrollo de la asignatura. Con base en esta posición, preciso el significado con el que utilizaré los términos claves de dichos estudios: significados que construyen los grupos de futuros profesores, desarrollo del conocimiento didáctico, estados de desarrollo y factores de desarrollo, entre otros. Por lo tanto, mi propósito en este capítulo no es el de presentar una revisión de la literatura sobre el aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un ejercicio de ese tipo permitiría ubicar este proyecto en el contexto de la investigación actual y justificar su relevancia dentro de ese contexto. Considero que ya he satisfecho ese propósito en los capítulos anteriores. Tampoco pretendo describir en detalle las teorías y los marcos conceptuales que sustentan este trabajo. Centraré mi atención solamente en aquellas cuestiones que son pertinentes para fundamentar conceptualmente el diseño y los esquemas metodológicos de los estudios empíricos. Por lo tanto, éste no es un capítulo de “marco teórico” en el sentido con el que se entiende tradicionalmente esta expresión. Por esa razón, para identificar las nociones centrales y las teorías que les dan significado, tengo en cuenta, tanto los objetivos generales y específicos de los estudios empíricos, como las condiciones en las que se realizaron. Adelanto algunos aspectos del diseño de dichos estudios con el propósito de delimitar el ámbito de la discusión.

Las opciones que asumí en su momento para las nociones que guiaron los estudios empíricos que conforman este proyecto buscaron ser coherentes con las condiciones que imponía el contexto en el que los realicé. Estas condiciones se refieren a algunas características del diseño y el desarrollo de la asignatura Didác-

tica de la Matemática en el Bachillerato en el curso 2000-2001 (que presento en detalle en los capítulos 5 y 6), a las opciones metodológicas que escogí (sobre las que reflexiono en el capítulo 7) y a las fuentes de información que tuve a mi disposición. Por lo tanto, antes de establecer mi posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores y a la expresión “desarrollo del conocimiento didáctico”, describo dichas características. En seguida, presento y analizo brevemente las diferentes teorías sobre el aprendizaje, con el propósito de justificar mi selección de la teoría social del aprendizaje de Wenger (1998), como marco conceptual general del proyecto de investigación. Presento los elementos más importantes de esta teoría. Con base en estos elementos, abordo la idea de construcción y desarrollo de los significados de los grupos de futuros profesores. Identifico las dos comunidades de práctica objeto de esta investigación, reitero el uso que daré, tanto a los términos “significado teórico”, “significado técnico” y “significado práctico” de los organizadores del currículo que conforman el análisis de contenido e introduzco la idea de “significado parcial” de un grupo de futuros profesores. En seguida, conceptualizo la actividad de un grupo de futuros profesores cuando realiza por fuera del aula las tareas cuyos resultados deben presentar en clase. Esta conceptualización me permite fijar un significado para las nociones de “conocimiento teórico”, “conocimiento técnico” y “conocimiento práctico”, nociones que fundamentan la idea de “conocimiento didáctico” de los futuros profesores. A continuación, asumo, de nuevo, una posición sociocultural con respecto a la idea de “desarrollo del conocimiento didáctico” y formulo las conjeturas que dan lugar a la idea de “estados de desarrollo”. Con base en la teoría de la “calidad de la información”, establezco la noción de “factores de desarrollo” como noción organizadora del análisis de las producciones de los grupos de futuros profesores. Finalmente, describo la estructura que organiza las nociones anteriores y vinculo la idea de desarrollo del conocimiento didáctico con la noción de competencia del profesor de matemáticas.

1. CONTEXTO: DISEÑO Y DESARROLLO DE LA ASIGNATURA

En la guía didáctica de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato se afirma que uno de sus propósitos es desarrollar las competencias de los futuros profesores para diseñar unidades didácticas sobre un tema matemático concreto. Para ello, se seleccionan unos contenidos que se organizan en torno al análisis didáctico, como el procedimiento ideal que se espera que los grupos de futuros profesores realicen para producir el trabajo final en el que presentan una propuesta del diseño curricular del concepto matemático que les ha correspondido. El análisis didáctico estructura un conjunto de nociones (los organizadores del currículo) que permiten identificar y seleccionar los significados relevantes para la instrucción del concepto en cuestión. En particular, los organizadores del currículo del análisis de contenido (los sistemas de representación, la estructura conceptual y la fenomenología) sirven para identificar los significados del concepto, mientras que los organizadores del currículo pertenecientes al análisis cognitivo, al análisis de instrucción y al análisis de actuación, dan luces para seleccionar los significados

relevantes y para utilizar la información que surge de estos análisis a efectos de diseñar la unidad didáctica.

Desde la perspectiva metodológica, se espera que, a lo largo de la asignatura y con base en estos organizadores del currículo y en las guías y los ejemplos que se proponen, los grupos de futuros profesores recaben, organicen y seleccionen la información que les permita realizar la tarea propuesta (el diseño curricular de una unidad didáctica sobre el tema matemático que les ha correspondido). Este proceso implica, por lo tanto, que los futuros profesores deben: (a) reconocer y comprender el significado teórico⁹³ de los organizadores del currículo involucrados (en el caso del análisis de contenido, las nociones de sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología); (b) poner en juego ese conocimiento para recabar y organizar la información correspondiente al concepto en cuestión; y (c) utilizar esa información tanto en los otros análisis del análisis didáctico, como en la producción del trabajo final (diseño de la unidad didáctica).

Lo anterior implica que los futuros profesores deben desarrollar un conocimiento sobre los organizadores del currículo del análisis de contenido y que deben poner en juego ese conocimiento en dos sentidos: por un lado, para recabar la información correspondiente a cada uno de los organizadores del currículo sobre el concepto que les corresponde; y, por el otro, para utilizar esa información a efectos de elaborar y justificar el diseño de la unidad didáctica sobre dicho concepto.

El diseño de la asignatura se basa en una posición de corte social respecto al aprendizaje de los futuros profesores. Los esquemas metodológicos que se utilizan en la asignatura son coherentes con esta posición⁹⁴. Por ejemplo, se pretende que la mayoría de las actividades de los futuros profesores se realicen en grupos, buscando promover la interacción entre ellos y con los formadores.

En este proyecto de investigación se buscó perturbar lo menos posible el desarrollo de la asignatura. En este sentido, la asignatura se desarrolló normalmente excepto por tres circunstancias: se grabó en audio la interacción en el aula, se realizaron entrevistas con dos grupos de futuros profesores en dos momentos de la asignatura y se grabó en audio el trabajo por fuera del aula de un grupo de futuros profesores. Por lo tanto, la información que se iba a tener disponible era esencialmente la información que se produce naturalmente en la asignatura: los trabajos escritos y las presentaciones orales de los grupos de futuros profesores y la interacción entre futuros profesores dentro de un grupo y entre los futuros profesores y los formadores en clase. Llamaré a esta información las *producciones* (documentos y transparencias de las presentaciones) y las *actuaciones* (participación en la interacción) de los futuros profesores.

2. APROXIMACIÓN SOCIOCULTURAL AL APRENDIZAJE DE LOS FUTUROS PROFESORES

El aprendizaje juega diferentes papeles en este proyecto de investigación. Puedo utilizar el término “aprendizaje” en al menos cuatro contextos relacionados, pero diferentes:

⁹³ Ver sección 2.3 del capítulo 3.

⁹⁴ En el capítulo 5 sustentaré detalladamente esta afirmación.

- ◆ La visión del aprendizaje de los escolares que se presenta y desarrolla dentro de la asignatura. El diseño prevé que se presenten y discutan las diversas teorías sobre el aprendizaje de los escolares, buscando que se constaten sus fortalezas y debilidades y se determine su función, dependiendo de las circunstancias⁹⁵. En el capítulo 2 hice énfasis en el papel del análisis didáctico como estrategia para abordar la paradoja de la planificación, paradoja que surge cuando se asume una posición constructivista del aprendizaje.
- ◆ La posición que, como formadores, asumimos con respecto al aprendizaje de los futuros profesores en el diseño de la asignatura⁹⁶.
- ◆ La posición que, sobre el aprendizaje de los futuros profesores, sustentó nuestra actuación como formadores en el desarrollo de la asignatura durante el curso 2000-2001⁹⁷.
- ◆ La posición sobre el aprendizaje de los futuros profesores que, como investigador, asumo para efectos de fundamentar los estudios empíricos que conforman este proyecto de investigación. Ésta posición es el objeto de este apartado.

Estas posiciones no tienen que ser idénticas. El hecho de que se asuma una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores en el diseño de la asignatura no implica que, en la práctica, los formadores actuáramos permanentemente de acuerdo con esa posición. De hecho, de manera similar a lo que sucede con el aprendizaje de los escolares, diversas circunstancias y objetivos requieren posiciones y actuaciones diferentes (Gómez, 2003). De la misma manera, al investigar sobre el aprendizaje de los futuros profesores no tenemos que asumir necesariamente alguna de las teorías que sustentan el diseño o el desarrollo de la misma. La posición que asumamos debe ser coherente con los objetivos que se desean lograr en la investigación y con las condiciones en las que ésta se realizó.

Las diferentes teorías sobre el aprendizaje⁹⁸ no son necesariamente contradictorias entre sí. El aprendizaje es un fenómeno multidimensional. Cada teoría tiene sus focos de interés y sus esquemas de investigación con los que ilumina diferentes aspectos de dicho fenómeno (Anderson, Reder y Simon, 2000). Por ejemplo, diferentes visiones acerca de la naturaleza del conocimiento implican posiciones diferentes con respecto al aprendizaje (Putnam y Borko, 2000). No obstante, en el caso de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, debemos constatar que los profesores no trabajan, ni aprenden solos. Enseñar y aprender a enseñar son prácticas sociales que requieren colaboración entre pares (Secada y Adajian, 1997). Ésta es la razón por la cual la línea de investigación en formación de profesores que centra su atención en el desarrollo profesoral se ha venido interesando cada vez más en perspectivas que se fundamentan en visiones socioculturales del aprendizaje (e.g., Borko, 2004; Lerman, 2001; Llinares, 1998b; Peressini, Borko, Romagnano, Knuth y Willis, 2004). La formación inicial de profesores de

⁹⁵ Trataré este aspecto del diseño de la asignatura en el capítulo 5.

⁹⁶ En el capítulo 5 estableceré esta posición y enfatizaré su importancia en la conceptualización y fundamentación del diseño de la asignatura.

⁹⁷ En el capítulo 6 reflexionaré sobre esta cuestión.

⁹⁸ e. g., neuro fisiológicas, conductismo, constructivismo en sus diferentes acepciones, aprendizaje situado, teoría social del aprendizaje.

matemáticas es una práctica social compleja. La aproximación sociocultural atiende a esta complejidad (Adler, 1998; Lerman, 2001, p. 45). La investigación en la formación de profesores desde esta perspectiva permite explorar y caracterizar aspectos del proceso de cambio del profesor que las perspectivas tradicionales psicológicas no permiten ver (Stein y Brown, 1997, p. 155), puesto que estas últimas tienden a estudiar el proceso de desarrollo de profesores individuales en contextos altamente estructurados.

Al tener en cuenta los argumentos anteriores y constatar los objetivos de los estudios empíricos y la información recogida para ellos, he seleccionado la teoría social del aprendizaje de Wenger (1998) como fundamento conceptual sobre el aprendizaje de los futuros profesores. Esta elección presenta retos importantes. La teoría de Wenger (y su noción central, la comunidad de práctica) se utiliza cada vez con mayor frecuencia como marco conceptual para explorar los procesos de aprendizaje de profesores que trabajan conjuntamente. No obstante, “mientras que los investigadores en formación de profesores de matemáticas están diseñando contextos para promover el aprendizaje de los profesores y para describir lo que los profesores aprenden en términos sociales, se ha hecho poco para explicar cómo estos contextos promueven dicho aprendizaje” (Graven y Lerman, 2003, p. 189). Además, existe poca investigación que examine las interacciones y las dinámicas específicas que tienen lugar en esos contextos: “Uno de los trabajos analíticos consiste, por consiguiente, en mostrar cómo los profesores, en y gracias a sus interacciones con sus colegas y con el entorno, construyen representaciones concretas de su práctica” (Little, 2002, p. 934). Como lo ha indicado Krainer (2003), todavía queda mucho por explorar acerca del rol de esta perspectiva en la formación de profesores: “¿En qué medida una aproximación como la de ‘comunidades de práctica’ puede aplicarse al aprendizaje en las escuelas y en las universidades? ¿Qué podemos aprender de las ‘empresas de aprendizaje’? ¿Qué implicaciones para la investigación puede tener una aproximación que se construye en la noción de ‘comunidad de práctica’?” (p. 96). En este proyecto de investigación buscaré proponer respuestas a algunas de estas preguntas.

3. TEORÍA SOCIAL DEL APRENDIZAJE

Wenger (1998) propone lo que él denomina una “teoría social del aprendizaje” e insiste en que esta teoría no es contradictoria con otras posiciones sobre el aprendizaje. Cada teoría enfatiza diferentes aspectos de un problema multidimensional. De hecho, el análisis que hemos hecho de las diferentes teorías sugiere, por ejemplo, que la teoría social del aprendizaje incluye los aspectos más relevantes de la aproximación situada sociocultural al aprendizaje. Algo similar se puede afirmar de los aspectos sociales del interaccionismo simbólico.

No resulta fácil resumir la teoría propuesta en Wenger (1998). Éste es un libro de lectura muy difícil, porque los significados de los conceptos se construyen mutuamente en una sucesión de relaciones que no se presentan explícitamente. El autor no pretende dar “definiciones” de los conceptos y, en muchas ocasiones, busca concretar sus significados basándose en lo que *no* significan. Por lo tanto, lo que presento a continuación es una síntesis esquemática de los aspectos de esta teoría que, para este proyecto de investigación, considero más relevantes. No pre-

tendo considerar todos los significados que hay detrás de las nociones que conforman la teoría, sino describir el marco conceptual que da lugar a algunas de las categorías de análisis que utilizaré en los estudios empíricos que conforman este proyecto de investigación⁹⁹.

3.1. Aprendizaje como Participación Social

Se mira el aprendizaje como un fenómeno social que forma parte de la experiencia de participar socialmente en el mundo. La idea de participación se refiere a un “proceso amplio de ser participante activo en las prácticas de comunidades sociales y de construir identidades en relación con esas comunidades” (p. 4). El aprendizaje como participación social se basa en cuatro nociones:

- ◆ *significado*, como nuestra habilidad cambiante (individual y colectiva) para experimentar de manera significativa nuestra vida y el mundo;
- ◆ *práctica*, como nuestros recursos, esquemas y perspectivas históricas y sociales compartidas que pueden soportar el compromiso mutuo en la acción;
- ◆ *comunidad*, como las configuraciones sociales en las que nuestras empresas se definen como valiosas y nuestra participación se reconoce como competente; e
- ◆ *identidad*, como expresión de cómo el aprendizaje cambia quiénes somos y la creación de historias personales de convertirse en el contexto de nuestras comunidades.

Se ubica la noción de significado en un proceso de negociación de significado que surge de la interacción entre otros dos procesos: la participación y la materialización. A través de la participación establecemos relaciones con otras personas, definimos nuestra manera de formar parte de comunidades en las que nos comprometemos con unas empresas, y desarrollamos nuestra identidad. A través de la materialización proyectamos nuestros significados y los percibimos como existentes en el mundo de tal manera que logramos congelar nuestra experiencia en cosas concretas.

En una comunidad de práctica hay un proceso permanente de negociación de significado. Este es un proceso productivo. Los participantes poseen, construyen y negocian significados. El significado es una habilidad individual y colectiva. Esta negociación tiene lugar a través de los procesos de participación y materialización y utiliza los recursos disponibles en el repertorio compartido. A su vez, el desarrollo del repertorio compartido es fruto de esa negociación (ver Figura 26).

La negociación de significados se ve afectada por múltiples elementos y afecta a esos elementos. Como resultado, esta negociación cambia permanentemente las situaciones a las que asigna significado y afecta a todos los participantes... Este proceso genera nuevas circunstancias para nuevas negociaciones y nuevos significados. (p. 54)

La práctica, como fuente de coherencia de las comunidades, es el proceso en el que experimentamos significativamente el mundo. A su vez, una comunidad re-

⁹⁹ He construido un página de Internet en la que se puede explorar dinámicamente y con mayor detalle esta teoría (Gómez, 2004b).

presenta la historia de una práctica en su proceso de negociación de significado. La práctica no existe en abstracto. Existe porque la gente se compromete en acciones cuyos significados negocian entre sí. La noción de comunidad se configura basándose en tres nociones:

- ◆ el *compromiso mutuo*, como el compromiso con acciones cuyo significado se negocia y que genera relaciones entre personas;
- ◆ una *empresa conjunta*, que se negocia colectiva y permanentemente, que genera una responsabilidad mutua y que determina lo que se valora, se discute y se muestra; y
- ◆ un *repertorio compartido*, que incluye los recursos para la negociación de significados, el discurso que permite hacer afirmaciones significativas acerca del mundo y los estilos para expresar formas de membresía e identidad como miembros.

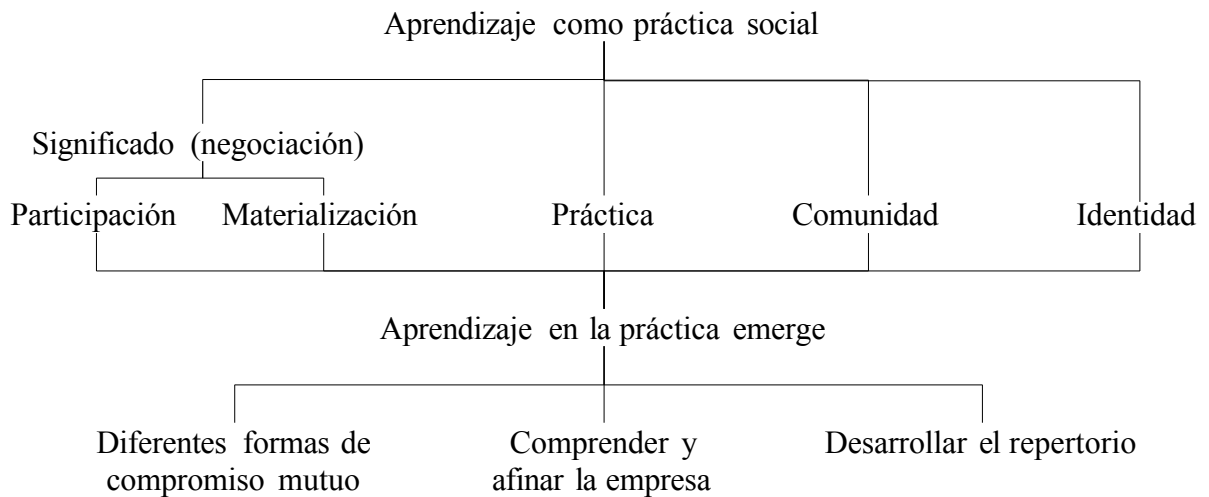


Figura 26. Aprendizaje como práctica social

Se mira a las comunidades como historias de aprendizaje compartido, al aprendizaje como motor de la práctica y a las prácticas como historias compartidas de aprendizaje. La combinación de participación y materialización determinan e influyen en la conformación de la práctica y definen la dirección en la negociación de significado. De esta manera, se establecen diferentes tipos de participantes, entre ellos, los nóveles, cuya incorporación a la comunidad implica un proceso de participación periférica legítima. La práctica es una estructura emergente inestable y el aprendizaje en la práctica implica un compromiso mutuo en la búsqueda de una empresa con un repertorio compartido. Por lo tanto, el aprendizaje emerge en la medida en que:

- ◆ evolucionan diferentes formas de compromiso mutuo;
- ◆ se comprende y se refina la empresa; y
- ◆ se desarrolla el repertorio compartido.

La teoría propuesta por Wenger tiene en cuenta múltiples aspectos del proceso de aprendizaje como práctica social. Omite, por ejemplo, el estudio de la noción de identidad. Para los efectos de este proyecto, centro la atención en los tres procesos que acabo de enumerar y que describo brevemente a continuación (ver Figura 27).

3.2. Compromiso Mutuo

El compromiso mutuo genera relaciones entre las personas y las conecta de maneras diversas y complejas. El desarrollo de la práctica implica mantener suficiente compromiso mutuo en la búsqueda de la empresa, junto con compartir un aprendizaje significativo. Un individuo participa en una comunidad de práctica en la medida en la que se le incluye en aquello que es importante. El compromiso mutuo requiere de la competencia de todos los participantes.

El compromiso es un proceso que incluye la conjunción de una negociación permanente de significado, la formación de trayectorias, y el desarrollo de historias de práctica. Es en la conjunción de estos tres procesos que el compromiso se convierte en una forma de membresía y en una fuente de identidad. (p. 174) Para apoyar el aprendizaje, el compromiso requiere un acceso auténtico a los aspectos de participación y materialización de la práctica. En términos de participación, el compromiso requiere acceso a y la interacción con otros participantes a lo largo de su compromiso. El compromiso requiere también la habilidad y la legitimidad para hacer contribuciones en la búsqueda de la empresa, en la negociación de significados y en el desarrollo de la práctica compartida. (p. 184) El compromiso mutuo en la negociación de significado involucra tanto la producción de propuestas de significado, como la adopción de estas propuestas. (p. 202)

La evolución de diferentes formas de compromiso mutuo se caracteriza por:

- ◆ cómo influye el entorno (qué ayuda y qué molesta),
- ◆ cómo se definen las identidades,
- ◆ cómo se desarrollan las relaciones, y
- ◆ cómo se genera, negocia y materializa el significado.

3.3. Empresa Conjunta

La empresa conjunta de una práctica se negocia colectiva y permanentemente y crea relaciones de responsabilidad mutua entre los participantes. Las empresas son complejas y no implican necesariamente un acuerdo. La empresa es la respuesta y la adaptación de los participantes, con sus restricciones y recursos, a las condiciones externas, y no está nunca completamente determinada por mandato externo. La empresa de una comunidad no es una declaración de propósitos. Al negociar una empresa se crean relaciones de responsabilidad mutua que determinan lo que se valora, lo que se discute, lo que se justifica y lo que se muestra. El régimen de responsabilidad mutua se convierte en una parte integral de la práctica.

El proceso de comprender y afinar la empresa se caracteriza por:

- ◆ el papel de las condiciones externas,
- ◆ las características del discurso (qué se discute, se muestra y se valora), y
- ◆ la definición de la empresa y las responsabilidades.

3.4. Repertorio Compartido

La búsqueda conjunta de la empresa crea recursos para la negociación de significado. Estos recursos, son el repertorio compartido, que es la tercera característica que le da coherencia a la comunidad. Este repertorio incluye rutinas, herramientas, símbolos, acciones o conceptos que la comunidad ha creado o adoptado y que se

han convertido en parte de su práctica. “El repertorio incluye el discurso en virtud del cual los miembros crean afirmaciones significativas acerca del mundo, como también los estilos mediante los cuales ellos expresan su formas de membresía y su identidad como miembros” (p. 83). El repertorio refleja la historia de la responsabilidad mutua y permanece inherentemente ambiguo. Tanto la historia como la ambigüedad aportan a la creación de significado, pero también pueden generar obstáculos.

El desarrollo del repertorio compartido se caracteriza por:

- ◆ los estilos de expresión y las rutinas de trabajo y
- ◆ los recursos de negociación de significado.

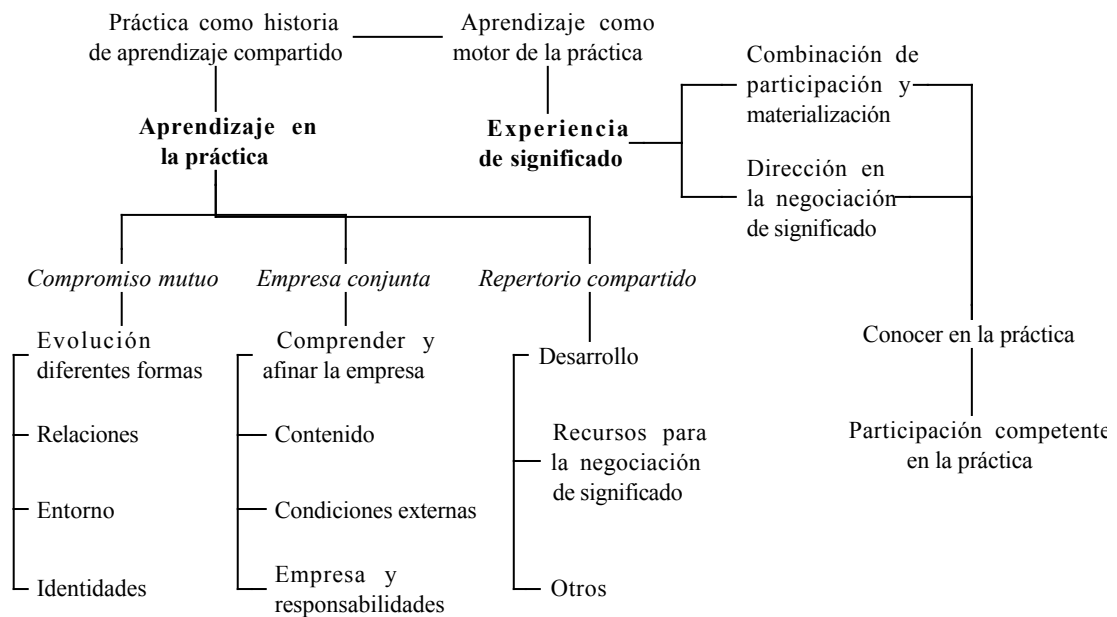


Figura 27. Aprendizaje, práctica y significado

4. DOS COMUNIDADES DE PRÁCTICA Y SIGNIFICADOS PARCIALES

En el contexto de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, conceptualizo dos entornos de trabajo como comunidades de práctica:

- ◆ la *comunidad de práctica del aula*, en la que se comentan y critican las producciones de los grupos de futuros profesores, y se negocia y se decide sobre los significados puestos en juego (en muchas ocasiones sin referencia a un tema específico); y
- ◆ la *comunidad de práctica de cada grupo de futuros profesores*, en la que se negocian y se decide sobre los significados (en la mayoría de las ocasiones específicos al tema del grupo) que se ponen en juego al elaborar las producciones que el grupo presentará a sus compañeros y a los formadores.

Mi interés en este proyecto de investigación se centra en los procesos de aprendizaje que tienen lugar en las comunidades de práctica de cada uno de los grupos. Dada la metodología de trabajo de la asignatura, los resultados de estos procesos de aprendizaje se hacen explícitos en la comunidad de práctica del aula, cuando cada grupo, de manera periódica y sistemática, realiza sus presentaciones ante los demás. Por lo tanto, la comunidad de práctica del aula condiciona las actividades de las comunidades de práctica de los grupos: para cada presentación, cada grupo debe llegar a un consenso acerca de la tarea en cuestión. Este consenso se hace explícito en la información contenida en las transparencias que el grupo utiliza para hacer su presentación y en las actuaciones de los miembros del grupo en el aula.

Considero, por lo tanto, que la información contenida en las transparencias y las actuaciones en el aula de los miembros de un grupo son manifestaciones de los significados que dicho grupo ha construido hasta ese momento. Utilizo el término *significados parciales* para referirme a estos significados. Los denomino “parciales” porque quiero dar a entender que los significados que un grupo ha construido en un momento dado de la asignatura están siempre sujetos a mejora. Son el resultado de lo que el grupo ha aprendido hasta ese momento, como consecuencia de un proceso permanente y dinámico de negociación de significados dentro de la comunidad de práctica del grupo. En dicho momento, esa negociación se ha consolidado, como consecuencia de la obligación de llegar a un consenso, en un estado dado del desarrollo del repertorio compartido del grupo. En otras palabras, para cada presentación, cada grupo ha logrado un cierto desarrollo de su repertorio compartido y sus producciones y actuaciones son expresiones de dicho repertorio compartido. El repertorio compartido se configura entorno a unos significados parciales que se consideran incompletos dado el carácter permanente y dinámico del proceso de aprendizaje de los grupos.

La exploración y descripción del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores implica, por lo tanto, la caracterización de sus significados parciales, tal y como estos significados se expresan en sus producciones y actuaciones. Adicionalmente, es necesario indagar cómo se construyen y negocian esos significados parciales, lo que implica la exploración detallada de los procesos de aprendizaje de al menos un grupo de futuros profesores. Pero, ¿cuál es la relación entre los significados parciales que cada grupo desarrolla sobre los organizadores del currículo que conforman el análisis didáctico y la descripción que de esas nociones hice en el capítulo 2?

Recordemos que cada organizador del currículo del análisis de contenido (por ejemplo, la noción de sistemas de representación) tiene diferentes significados. En primera instancia, distingo los significados teóricos de la noción, tal y como la noción se define dentro de la literatura de la didáctica de la matemática. Sin embargo, desde la perspectiva de la investigación del desarrollo del conocimiento didáctico, como es el caso de este proyecto, el interés se debe centrar en los significados que los grupos de futuros profesores construyen sobre cada organizador del currículo. En este sentido, la definición teórica de un organizador del currículo (por ejemplo, la propuesta de Kaput sobre sistemas de representación), y la capacidad de los grupos de futuros profesores para reproducirla, son sólo un aspecto de

los significados que ellos construyen sobre la misma, como lo indiqué en la sección 2.3 del capítulo 3.

Como formadores, no pretendemos que el conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores se centre en esos significados teóricos. Nuestro propósito es que cada grupo desarrolle un repertorio compartido que le sea útil en las tareas que deben realizar. Los organizadores del currículo que conforman el análisis didáctico son herramientas analíticas con un propósito práctico. En el capítulo 2 establecí las estrategias en virtud de las cuales se pueden poner en juego esas nociones para analizar un concepto matemático. Estas estrategias de análisis configuran unos significados técnicos que, aunque basados en los significados teóricos, los sobrepasan, al destacar el carácter de herramienta analítica que asume cada una de las nociones. He llamado significado práctico de un organizador del currículo al conjunto de estrategias y técnicas necesarias para utilizar la información que surge del análisis de la estructura matemática con ese organizador del currículo en los demás análisis que conforman el análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica. Estos significados técnicos y prácticos, que introduje en la sección 2.3 del capítulo 2, son el marco de referencia que utilizaré para analizar los significados parciales de los grupos de futuros profesores tal y cómo dichos significados se expresan en sus producciones y en sus actuaciones en el aula.

A continuación profundizo en estos tres aspectos del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Me baso en la teoría de la génesis instrumental para conceptualizar las actividades que realiza un grupo de futuros profesores cuando utiliza los organizadores del currículo del análisis didáctico para analizar un concepto matemático concreto.

5. GÉNESIS INSTRUMENTAL: CONCEPTUALIZACIÓN DEL TRABAJO DE UN GRUPO

En este apartado, abordo la noción de conocimiento práctico de los grupos de futuros profesores. Mi intención es situar esta noción en el contexto concreto de las actividades que ellos realizan en la asignatura y, en virtud de las cuales, nosotros, como formadores, esperamos que ellos desarrollen su conocimiento didáctico. Paralelamente, pretendo dar un significado concreto a la expresión “herramienta conceptual” con la que nos referimos en algunas ocasiones a los organizadores del currículo (Rico, 1997c, p. 42). Este ejercicio de conceptualización me permitirá concretar los aspectos teóricos, técnicos y prácticos del conocimiento didáctico de los futuros profesores en el contexto de la asignatura. También dará luces para establecer la relación entre el conocimiento didáctico y los significados que los grupos de futuros profesores desarrollan cuando realizan las tareas y la manera como esos significados se expresan en sus producciones y en sus intervenciones en clase.

Me centraré en este apartado en la actividad que los grupos de futuros profesores realizan cuando utilizan un organizador del currículo para analizar el tema que les ha correspondido. Por ejemplo, en un momento dado de la asignatura, un grupo de futuros profesores puede utilizar la noción de sistemas de representación para recabar y organizar información sobre los significados del concepto de esfe-

ra. La tarea se asigna al final de una sesión. Los grupos realizan la actividad por fuera del aula y preparan unas transparencias con el resultado de su trabajo. En la siguiente sesión, cada grupo presenta, con la ayuda de las transparencias, los resultados de su trabajo al resto de la clase.

¿Cómo conceptualizar la actividad de los grupos de futuros profesores cuando, por fuera del aula, analizan el concepto con la ayuda del organizador del currículo correspondiente? Éste es un trabajo en el que se pone en juego y se construye un conocimiento práctico, en contraposición con lo que se puede considerar como conocimiento teórico. El conocimiento teórico “constituye parte de la estructura cognitiva de una persona pero que, por varias razones, no afecta o no puede afectar a la práctica” (Tamir, 2005, p. 2). Por su parte, el conocimiento práctico se conceptualiza “como la reserva de información y habilidades que guía y conforma la conducta de una persona” (p. 2). En contraposición con esta posición extrema, Thiessen (2000), al analizar el desarrollo del conocimiento profesional del futuro profesor, sugiere que es posible pensar, tanto en un conocimiento proposicional que es relevante para la práctica, como en un conocimiento práctico que se puede interpretar de manera proposicional (p. 530). ¿Cómo profundizar en el significado de estas nociones en el contexto de las actividades que acabo de describir?

5.1. Génesis Instrumental

Partiendo de una visión funcional de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, me inspiro en la idea de *génesis instrumental* (Rabardel, 2003; Rabardel y Bourmaud, 2003; Vérillon, 2000) para conceptualizar las actividades de los grupos de futuros profesores cuando trabajan por fuera del aula. A su vez, esta teoría se inspira, por un lado, en las propuestas de Vygotsky sobre el papel de los instrumentos en el aprendizaje (en un contexto social) y, por el otro, en la teoría de la actividad de Leontiev. La teoría de la instrumentación se ha desarrollado recientemente en Francia en el contexto de lo que se conoce como “ergonomía cognitiva” y se viene utilizando especialmente en el diseño de interfaces para el uso de ordenadores. En el área de la didáctica de la matemática, la teoría ha sido utilizada en el contexto de la informática educativa (Artigue, 2002).

La teoría busca producir modelos de la relación entre un sujeto que utiliza un artefacto concreto (por ejemplo, un martillo o un programa de ordenador) y un objeto sobre el cual actúa, cuando realiza una tarea. Los modelos exploran el papel del artefacto como mediador entre el sujeto y el objeto. En cambio de centrar la atención en la interacción sujeto-objeto, el modelo estudia la “multiplicidad de relaciones que, en una actividad mediada por un instrumento, vinculan el sujeto, el instrumento y el objeto hacia el que se dirige la acción” (Vérillon, 2000, p. 7) (Ver Figura 28). El modelo muestra que el análisis de la actividad no debe tener en cuenta únicamente la relaciones directas Sujeto-Instrumento (S-I) y Sujeto-Objeto (S-O). También debe considerar la interacción Instrumento-Objeto (I-O) y la interacción indirecta Sujeto-Objeto a través de la mediación del instrumento (S(I)-O).

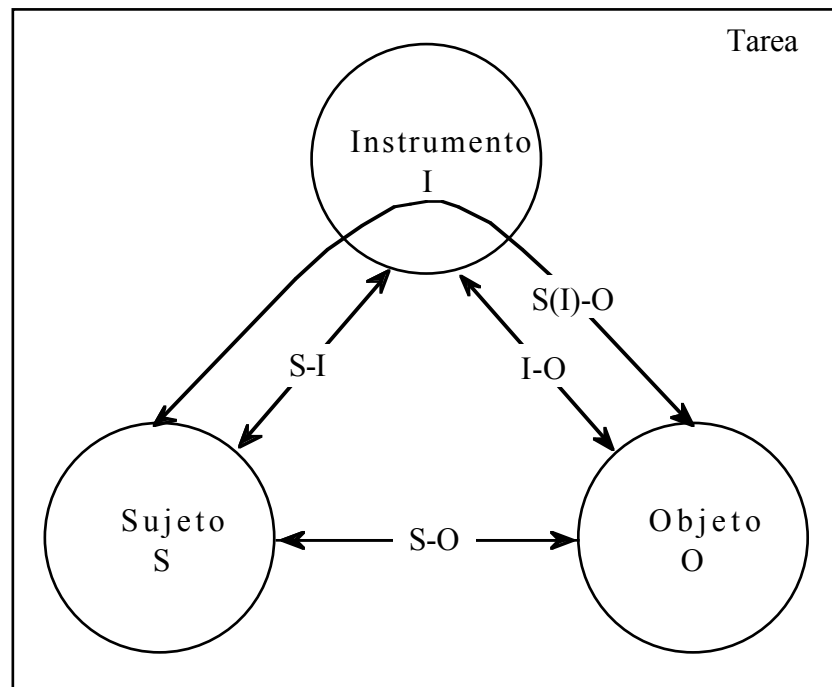


Figura 28. Modelo de actividad situada con mediación de instrumento (Vérillon, 2000, p. 7)

La idea de génesis instrumental surge al constatar que un artefacto se convierte en un instrumento en la medida que tienen lugar tres procesos:

1. la *instrumentalización*¹⁰⁰, como proceso en el que el sujeto transforma y adapta el artefacto a sus necesidades y circunstancias (Rabardel y Bourmaud, 2003, p. 673).
2. La *instrumentación*, como el proceso en el que se generan esquemas de acción (p. 673), es decir, habilidades de aplicación de la herramienta para realizar tareas significativas (Kaptelinin, 2003, p. 834) que, a su vez, se transforman en técnicas (Artigue, 2002, p. 250). Una técnica es una amalgama de razonamiento y procedimientos rutinarios que permiten resolver una tarea (p. 248).
3. La *integración orquestada*, en virtud de la cual la herramienta se integra a otros artefactos (Kaptelinin, 2003, p. 834).

La génesis instrumental tiene lugar en la medida en que el sujeto utiliza el artefacto, desarrollando los esquemas de acción que lo transforman en instrumento. El instrumento puede mediar entre el sujeto y el objeto de diferentes maneras, dando lugar a diferentes valores de las técnicas: (a) en la *mediación pragmática*, el instrumento permite ejercer una acción sobre el objeto, en general, con el propósito de transformarlo; (b) en la *mediación epistémica*, el instrumento contribuye a la comprensión del objeto y, además, tiene lugar la conceptualización del instrumento; y (c) en la *mediación reflexiva*, el uso del instrumento da lugar a transformaciones del sujeto (Rabardel, 2003, p. 668). En esta teoría se asume una posición de

¹⁰⁰ Soy consciente de que este término no existe en castellano, pero lo introduzco como traducción del término “instrumentalization” en inglés, y, así, diferenciar este primer proceso del segundo.

desarrollo porque “la capacidad de manejo de una herramienta no es una meta sino un proceso dentro de un continuo artefacto-instrumento” (Kaptelinin, 2003, p. 835).

El modelo original Sujeto-Instrumento-Objeto se ha extendido para incluir otros sujetos (Rabardel y Bourmaud, 2003, p. 669), o para conceptualizar la interacción de dos sujetos con respecto a un referente y con la mediación de un instrumento semiótico (Vérillon, 2000, p. 8). Por otro lado, también se ha enfatizado, además de su carácter situado, la naturaleza social del instrumento (Shariq, 1998, p. 14).

5.2. Génesis Instrumental en el Contexto de la Asignatura

Estas ideas me permiten conceptualizar los principales aspectos de la actividad de un grupo de futuros profesores, en una fase del ciclo metodológico de tratamiento del análisis didáctico, cuando aborda la tarea de analizar su concepto con la ayuda de un organizador del currículo, o cuando utiliza la información que surge de ese análisis para realizar otros análisis o diseñar la unidad didáctica. Al referirme al modelo básico (Figura 28), observo que, en este caso, el sujeto (S) se refiere al grupo de futuros profesores trabajando por fuera del aula, el objeto (O) es el concepto que están analizando y el instrumento (I) es el organizador del currículo con el que están haciendo el análisis (sistemas de representación, estructura conceptual o fenomenología, en el caso del análisis de contenido). Dado que el instrumento no se refiere a un artefacto material concreto, extendiendo la propuesta original de Rabardel y Vérillon a la idea de “herramienta analítica” (Kaptelinin, 2003, p. 834; Llinares, 2005, p. 3). De esta manera se extiende la idea de que “utilizamos herramientas simbólicas, o signos, para mediar y regular nuestras relaciones con los demás y con nosotros mismos y así cambiar la naturaleza de esas relaciones” (Lantolf, 2000, p. 1).

Observo, por consiguiente, que el organizador del currículo (el instrumento) juega un papel de mediación entre el grupo de futuros profesores (el sujeto) y el concepto (el objeto) en tres tipos de tareas que se relacionan entre sí:

- ◆ T₁: recabar y organizar información sobre modos de considerar el concepto;
- ◆ T₂: usar la información obtenida para realizar los otros análisis que conforman el análisis didáctico; y
- ◆ T₃: usar la información de todos los análisis para tomar decisiones conducentes al diseño de la unidad didáctica.

Las tareas y la actividad de resolverlas están relacionadas de manera dinámica puesto que, al realizar una de ellas, por ejemplo T₂, el grupo de futuros profesores puede ver la necesidad de regresar a T₁, para recabar y organizar nueva información.

Al realizar estas tareas, el grupo desarrolla los procesos de instrumentalización, instrumentación e integración orquestada. Es decir, ellos transforman y adaptan el significado que le asignan al organizador del currículo (instrumento), desarrollan esquemas de aplicación de la herramienta con el propósito, ya sea de recabar información sobre los significados del concepto (objeto), o para usar esa información en los otros análisis, e integran el uso de un instrumento específico (e.g., los sistemas de representación) con los otros instrumentos, para el

diseño de la unidad didáctica. Las técnicas que ellos desarrollan tienen valor pragmático (en la producción de información y en su uso), pero también tienen valor epistémico y reflexivo. *Es a través del uso del instrumento (el organizador del currículo) como mediador entre el grupo de futuros profesores (sujeto) y el concepto sobre el que trabajan (objeto) que el grupo construye y desarrolla significados tanto acerca del concepto, como del organizador del currículo.* Esta actividad, que implica la generación de esquemas de acción, transforma la práctica del grupo.

Todo esto es conocimiento práctico, en términos de Tamir (2005). Observemos que, aunque los formadores presentamos en clase el significado teórico de la noción (e.g., la definición de sistema de representación), las tareas que les asignamos no pretenden que ellos desarrollen su capacidad de declarar dicho significado teórico. Por el contrario, buscamos que desarrollen un conocimiento práctico, en el sentido de que es un conocimiento que viene de la práctica, pero también de que tiene una utilidad y un propósito práctico. Este conocimiento práctico tiene como referente los significados técnicos y prácticos a los que me referí en el apartado anterior. Son los esquemas de acción y las técnicas que permiten a los grupos de futuros profesores resolver las tareas que se les asigna periódicamente.

La génesis instrumental tiene lugar en este proceso de realizar tareas: el artefacto (el organizador del currículo, en su concepción teórica) se transforma en instrumento, en la medida en que el grupo de futuros profesores desarrolla esquemas para resolver la tarea con la ayuda del instrumento. Y es, en este proceso de génesis instrumental, que el grupo negocia significados (del objeto, del organizador del currículo y de los esquemas) que se ponen en juego en la actividad, se materializan en el repertorio compartido y se manifiestan en sus producciones y actuaciones en el aula. Por consiguiente, la noción de génesis instrumental me permite — para el contexto concreto de este proyecto de investigación— precisar y conceptualizar el proceso general de negociación de significados propuesto por Wenger en un proceso más específico que caracteriza las actividades que los grupos de futuros profesores realizan por fuera del aula.

6. DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

En este apartado, establezco el significado de la expresión “desarrollo del conocimiento didáctico” y formulo conjeturas acerca de cómo puede tener lugar dicho desarrollo. Bajo el supuesto de estas conjeturas, introduzco la idea de estados de desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores.

6.1. Noción de Desarrollo

En el contexto de la psicología, la noción de “desarrollo” tiende frecuentemente a interpretarse desde una perspectiva cognitiva. Se estudia entonces el desarrollo cognitivo del individuo. El ejemplo clásico de esta perspectiva son las teorías estructuralistas originadas en las ideas de Piaget. El desarrollo es, en este caso, la transformación de unas estructuras cognitivas débiles en otras más potentes. La trayectoria de desarrollo surge en el juego entre las posibilidades que ofrecen las estructuras y lo que permite la realidad del entorno.

La perspectiva socio-histórica del desarrollo, por su parte, surge de las ideas de Vygotski. El interés de esta perspectiva se centra en la influencia de los contextos en el comportamiento y desarrollo humano. En este caso, “los relatos y los textos juegan un papel central en la comprensión del desarrollo humano” (Strauss, 2000, p. 35). Para Vygotski, el nivel de desarrollo de un individuo está representado por su conocimiento tal y como se expresa cuando trabaja solo (p. 39). Los desarrollos más recientes dentro de esta perspectiva ven el aprendizaje como una práctica social. Es el caso de la teoría social del aprendizaje de Wenger (1998). En el contexto de esta teoría, el aprendizaje es producto de la negociación de significados y emerge en la medida en que evolucionan diferentes formas de compromiso mutuo, se comprende y se refina la empresa, y se desarrolla el repertorio compartido, el estilo y el discurso. Dentro de esta teoría, la noción de desarrollo asume un significado que yo concretaré en un aspecto específico: el desarrollo del repertorio compartido.

Mi aproximación a la noción de desarrollo se inspira, por lo tanto, en la vertiente socio-histórica. Esta aproximación es coherente con mi intención de explorar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores y no de los futuros profesores, como individuos. Al concretar la idea de desarrollo del conocimiento didáctico de un grupos de futuros profesores en el desarrollo de su repertorio compartido puedo relacionar, dentro de un mismo marco conceptual, las nociones de desarrollo y de significado. Siguiendo a Wenger, utilizo la expresión “repertorio compartido” como la materialización de los procesos de negociación de significados que tiene lugar cuando los grupos de futuros profesores, como comunidades de práctica, abordan las tareas de la asignatura. Es entonces el repertorio compartido de cada grupo el que se *desarrolla*. Dado que, cada vez que los grupos de futuros profesores hacen una presentación en clase, ellos deben llegar a un consenso sobre lo que van a proponer, los procesos de negociación de significados se concretan (materializan) sistemática y periódicamente. Esta materialización se expresa en la información contenida en las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores para hacer sus presentaciones y en las intervenciones de los miembros del grupo sustentando sus propuestas.

6.2. Dos Aproximaciones al Desarrollo del Conocimiento Didáctico

Abordo la exploración del aprendizaje de los grupos de futuros profesores, desde la perspectiva del desarrollo de su conocimiento didáctico, a partir de dos aproximaciones:

1. la descripción y caracterización de las producciones y las actuaciones de los grupos de futuros profesores en su trabajo dentro de la comunidad de aprendizaje del aula y
2. la descripción y caracterización de los procesos de negociación de significado que tienen lugar dentro de la comunidad de aprendizaje de uno de los grupos de futuros profesores.

En la primera aproximación, centro mi interés en las producciones de los grupos de futuros profesores y en algunos aspectos de los procesos de negociación de significado que surgen con motivo de la presentación en el aula de estas producciones. Mi propósito es describir y caracterizar lo que resulta de los procesos de

negociación de significado dentro de cada grupo de futuros profesores. En particular, me interesa estudiar cómo las producciones y las actuaciones de cada grupo cambian (evolucionan) en el tiempo, como reflejo de la evolución en los significados que ellos ponen en juego al elaborar cada producción y, por lo tanto, como expresión del desarrollo de su repertorio compartido.

En la segunda aproximación, profundizo, para el caso de un grupo concreto de futuros profesores, en los procesos de negociación de significados que dan lugar a esas producciones, y analizo la constitución y desarrollo de la comunidad de aprendizaje del grupo, siguiendo las pautas de la teoría social del aprendizaje de Wenger.

6.3. Desarrollo del Repertorio Compartido

No espero que, para una presentación dada, las producciones de todos los grupos reflejen siempre los mismos significados parciales con respecto a los organizadores del currículo del análisis de contenido. Espero, más bien, que haya *divergencia* (Roschelle, 1992) en el mismo sentido que, en la escuela, existe una “fuerte tendencia de los estudiantes a construir significados no estándar de los conceptos científicos” (p. 238). Cada grupo tiene su propia especificidad. Cada grupo trabaja, con las mismas herramientas de análisis (los organizadores del currículo del análisis de contenido), pero sobre temas diferentes. Cada producción es el resultado de un proceso de negociación de significados en el que intervienen múltiples factores. Por consiguiente, es natural esperar que haya heterogeneidad en las producciones de los grupos y que esa heterogeneidad sea una manifestación de la heterogeneidad en los significados parciales que los grupos construyen sobre cada uno de los organizadores del currículo. No obstante, me pregunto si, dentro de esta heterogeneidad, es posible identificar algunos patrones que la organicen.

Mi conjetura es que es posible identificar patrones en dos aspectos de las producciones de los grupos de profesores. Por un lado, resulta natural pensar que las diferencias (con respecto a un organizador del currículo dado) en las producciones de los grupos son consecuencia de un número limitado de significados parciales de los grupos. Por lo tanto, espero identificar patrones (categorías) que organicen los significados parciales de los grupos. Estos patrones en los significados parciales deberían expresarse en un número limitado de *atributos* de las producciones¹⁰¹. Estos atributos caracterizarían la puesta en juego de esos significados en el análisis y descripción una estructura matemática.

El segundo tipo de patrón tiene que ver con el proceso de cambio en las producciones de los grupos. Conjeturo que, de la misma forma (pero no por las mismas razones) que, para el desarrollo cognitivo del individuo, es posible, en muchas ocasiones, identificar estados que caracterizan ese desarrollo, también es posible pensar que el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores se puede caracterizar en términos de unos *estados de desarrollo*. Éste es un constructo que postulo con el propósito de implantar una organización y racionalidad al análisis de las producciones de los grupos de futuros profesores. Por lo tanto, es un mecanismo exploratorio con el que pretendo registrar y organi-

¹⁰¹ Los siguientes son ejemplos de posibles atributos de las producciones: número de sistemas de representación utilizados, número de conexiones entre elementos de un mismo sistema de representación y existencia de relaciones entre fenómenos y subestructuras.

zar dichos análisis¹⁰². Cada estado de desarrollo estaría determinado por unos patrones en la evolución de los significados parciales de los grupos de futuros profesores. Si es posible identificar estos estados de desarrollo, entonces mi interés se centrará en explorar cómo los cambios en las producciones de los grupos de futuros profesores pueden ser representativos de, y ser representados por esos estados. De esta manera, lograría una primera aproximación al estudio del desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores.

La idea de estado de desarrollo, como representación de patrones en los significados parciales que los grupos de futuros profesores ponen en juego al elaborar sus producciones y al interactuar en el aula, me permite concretar la idea de dificultad y progreso de un grupo de futuros profesores. Diré que las producciones o actuaciones de un grupo evidencian una *dificultad* con respecto a un organizador del currículo cuando producciones sucesivas del grupo no evolucionan, permaneciendo en un mismo estado. En el mismo sentido, hablaré de *progreso y avance* de las producciones de un grupo cuando éstas pasan de estados iniciales a estados más avanzados. En términos de los significados de los grupos de futuros profesores, las dificultades se manifiestan en significados parciales que permanecen a pesar de los esfuerzos de la instrucción para cambiarlos. Los progresos representan la reorganización de esos significados parciales en otros más cercanos a los significados de referencia promovidos por la instrucción¹⁰³.

La caracterización del desarrollo del conocimiento didáctico de cada grupo de futuros profesores surgirá del análisis de sus producciones y actuaciones. Me interesa, por lo tanto, establecer categorías de los posibles atributos de las producciones que permitan determinar estados de desarrollo, si existen. Para determinar estas categorías partiré de los significados de referencia propuestos en el análisis didáctico. Los atributos de una producción dada (en términos de estas categorías) serán entonces expresiones de la puesta en juego de los significados parciales de los grupos de futuros profesores. Por lo tanto, son el resultado del proceso de desarrollo del repertorio compartido, como consecuencia de la negociación de significados que subyace al proceso de aprendizaje de cada grupo de futuros profesores. Organizo los atributos que caracterizan las producciones y actuaciones de los grupos de futuros profesores en factores de desarrollo, noción que conceptualizo a continuación.

7. FACTORES DE DESARROLLO

Las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores en sus presentaciones en clase, el documento con el trabajo final y las intervenciones de los futuros profesores en el aula son fuentes de información que surgen naturalmente en la asignatura y que utilizaré en tres de los estudios empíricos de este proyecto de investigación. ¿Cómo caracterizar la información que los grupos de futuros profesores plasman en las transparencias y comparten en las discusiones en clase? De

¹⁰² En esta caracterización parafraseo las ideas que Simon, Tzur, Heinz, Kinzel, y Smith (2000, p. 584) desarrollan para la noción de “concepción” en el contexto de la práctica de los profesores de matemáticas.

¹⁰³ Ver la sección 2.3 del capítulo 3, donde concreté el sentido en el que utilizo los diferentes tipos de “significados” que configuran el conocimiento didáctico.

hecho, el trabajo de los grupos de futuros profesores es de manejo de la información. Por un lado, se les pide que recaben información sobre un concepto matemático y, por el otro, se les pide que la organicen y la presenten en público y que la utilicen en las diferentes fases del análisis didáctico y del diseño de una unidad didáctica

Se podría pensar que el análisis de esta información debería hacerse estableciendo si la información que los grupos de futuros profesores presentan corresponde al conocimiento de las disciplinas involucradas (matemáticas disciplinares y escolares, didáctica de la matemática) y a los significados de referencia propuestos en el análisis didáctico. Pero este tipo de análisis es opaco a varios atributos de esa información que permitirían caracterizar los significados que los grupos de futuros profesores construyen paulatinamente al abordar las tareas y que ponen en juego al producir las transparencias e intervenir en clase. Por lo tanto, resulta importante explorar otros atributos de la información que puedan contribuir a organizar su análisis.

Me inspiro en la noción de “calidad de la información” que se ha venido desarrollando en la disciplina de manejo de organizaciones¹⁰⁴. La tesis central que se trabaja en esta área es que la calidad de la información se debe medir por la calidad de las decisiones que permite tomar (Miller, 1996, p. 67). Dentro de las organizaciones, la preocupación por la calidad de la información surge del hecho de que diferentes personas o grupos asumen diferentes roles en su producción y manejo: (a) quienes producen la información, (b) quienes la guardan y la mantienen y (c) quienes la usan (Lee y Strong, 2003, pp. 16-17; Strong, Lee y Wang, 1997). La calidad de la información se caracteriza en términos de cómo el usuario la percibe y la usa (Miller, 1996) y si es apropiada para sus propósitos (Strong et al., 1997). En otras palabras, “el valor de la información no está en ella misma, sino en cómo afecta a su usuario” (Miller, 1996, p. 4).

Se han propuesto diversas listas de atributos para caracterizar la calidad de la información (Miller, 1996; Pipino y Wang, 2002; Strong et al., 1997; Wand y Wang, 1996). Wand y Wang (1996) ven la calidad de la información como un concepto que “es a la vez multidimensional y jerárquico” (p. 351). Ellos definen los indicadores de calidad de la información como “*características de la información y de su proceso de producción*” (p. 350, en cursiva en el original). Organizan estos indicadores en cuatro dimensiones: disponibilidad, interpretación, utilidad y validez (ver Tabla 8).

¹⁰⁴ Ver, por ejemplo, el Programa de Administración Total de la Calidad de la Información del Instituto Tecnológico de Massachusetts (TDQM, 2002).

Indicadores	Descripción
<i>Disponibilidad</i>	
Disponibilidad	Medida en la que la información está disponible o en la que se puede acceder a ella de manera fácil y rápida
<i>Interpretación</i>	
Sintaxis y semántica	Medida en la que es posible interpretar y comprender la información
<i>Utilidad</i>	
Relevancia	Medida en la que el usuario puede utilizar la información para tomar decisiones
Actualidad	Medida en la que la información está actualizada
Volatilidad	Medida del tiempo en el que la información permanece válida
<i>Validez (credibilidad)</i>	
Completitud	Medida en la que no hay información que falte y en la que es suficiente en extensión y profundidad para la tarea que se quiere realizar
Consistencia	Medida en la que hay coherencia y estructura en la información
Compatibilidad	Medida en la que la información se puede combinar con otra
Fuente creíble	Medida de la credibilidad de las fuentes
Exactitud	Medida en la que la información es confiable e imparcial y corresponde con y refleja la realidad

Tabla 8. Indicadores de la calidad de la información

¿Cuáles de estos atributos son relevantes para efectos de caracterizar la calidad de la información que los grupos de futuros profesores presentan en sus transparencias y comparten en sus intervenciones en clase? La caracterización de la calidad de la información que se propone en la Tabla 8 supone que quien recoge y organiza la información, quien la guarda y la mantiene y quien la usa son personas o grupos diferentes. En el caso que me interesa analizar, el mismo grupo de futuros profesores realiza estas tres actividades. Por lo tanto, los atributos de disponibilidad e interpretación no son relevantes¹⁰⁵. Por otro lado, la información que esperamos que los grupos de futuros profesores recojan y organicen no es volátil ni cambiante: se encuentra en los libros de texto, en los manuales de educación matemática y en otros documentos previamente publicados. Por lo tanto, una vez que ellos han recogido la información, los atributos de actualidad y volatilidad tampoco son relevantes. En resumen, me interesa profundizar particularmente en el atributo de relevancia y en los atributos correspondientes a la validez de la información.

¿Cómo interpretar estos atributos en términos de la información concreta que los grupos de futuros profesores recogen y de las tareas que esperamos que ellos realicen? Recordemos que los grupos de futuros profesores recogen y organizan la

¹⁰⁵ El atributo de disponibilidad de la Tabla 8 se refiere a la medida en la que, al interior de una organización, quienes producen, guardan y mantienen la información, la hacen disponible a quienes la usan. Dado que es el mismo grupo que produce y mantiene la información, siempre la tiene disponible para usarla.

información sobre el análisis de contenido de su tema con dos propósitos: para cimentar los otros análisis del análisis didáctico y para diseñar una unidad didáctica. Por otro lado, en la descripción del análisis didáctico, enfatice en dos aspectos del análisis de un tema: la multiplicidad de significados que dicho tema puede presentar en el contexto de las matemáticas escolares, y el carácter sistémico del análisis didáctico, en particular del análisis de contenido. Este último aspecto resalta el hecho de que los diferentes significados de un concepto matemático están relacionados y conforman una estructura. Teniendo en cuenta estas consideraciones, reformulo y organizo los atributos de la calidad de la información contenida en las transparencias de los grupos de futuros profesores y expresada en sus intervenciones en clase en tres dimensiones que denomino *factores de desarrollo*: variedad, organización y papel. La relación de estos factores de desarrollo con los atributos que enumeré en la Tabla 8 es la siguiente: la variedad pretende captar los atributos de completitud y exactitud; la organización, los atributos de consistencia y compatibilidad; y el papel, el atributo de relevancia.

El factor *variedad* pretende recoger la idea de que, para cada organizador del currículo del análisis de contenido, la descripción de una estructura matemática se puede hacer con mayor o menor cantidad de información, profundidad o complejidad. Por ejemplo, desde la perspectiva de los sistemas de representación, el factor variedad se puede expresar, en una producción, en el número de sistemas de representación que se ponen en juego en la descripción de una estructura matemática. En el caso de la estructura conceptual, este factor se puede expresar en el número de niveles del mapa conceptual con el que se representa¹⁰⁶. Y, en el caso del análisis fenomenológico, esta variedad puede apreciarse en el número de fenómenos, disciplinas o subestructuras que se identifican y se utilizan en las producciones. El factor variedad, para un organizador del currículo del análisis de contenido, es, por lo tanto, una manera de organizar aquellos atributos de una producción que se refieren a la cantidad de información que se presenta en ella y a la profundidad con la que se analiza la estructura matemática.

El factor *organización* se refiere a cómo, dentro de una producción, se organiza la información recogida para uno o más organizadores del currículo del análisis de contenido. En el caso de la información de la estructura conceptual, el factor organización se puede referir, por ejemplo, al tipo y número conexiones entre los elementos de la estructura conceptual. En el caso de los sistemas de representación, el factor organización puede verse reflejado en el tipo y posible jerarquía entre los sistemas de representación utilizados para describir la estructura matemática dentro de las producciones.

Finalmente, el tercer factor organizador de los atributos de una producción se refiere a la puesta en práctica de la información recogida para un organizador del currículo dado. Denomino a este factor *papel*, puesto que pretende reflejar el papel que juega cada organizador del currículo del análisis de contenido en los otros aspectos del análisis didáctico. Los atributos de las producciones que quedan or-

¹⁰⁶ Dado que el número de niveles no solamente representa variedad, sino que también es un indicador de la complejidad estructural del mapa conceptual, denomino a este factor, para el caso concreto de la estructura conceptual, como *complejidad*. El factor organización de la estructura conceptual explora otro aspecto de esta complejidad estructural.

ganizados por este factor se clasifican en tres categorías dependiendo del aspecto del análisis didáctico en el que la información se ponga en juego:

- ◆ en los otros organizadores del currículo del análisis de contenido,
- ◆ en otros organizadores del currículo del análisis didáctico y
- ◆ en el diseño de la unidad didáctica.

En el primer caso, nos referimos a la organización de aquellos atributos que reflejan las relaciones entre los organizadores del currículo del análisis de contenido. Por ejemplo, la relación entre la estructura conceptual y los sistemas de representación se puede apreciar desde la perspectiva de cómo y en qué medida los sistemas de representación juegan un papel organizador de la estructura conceptual. También se puede explorar el papel que juega la información recogida para la estructura conceptual en aquello que, dentro de una producción, se propone para el análisis fenomenológico.

El segundo aspecto del factor papel organiza los atributos de las producciones que se refieren a la puesta en práctica de la información recogida para cada organizador del currículo del análisis de contenido en otros organizadores del currículo del análisis didáctico. Por ejemplo, se puede explorar el papel que juega la información recogida para los sistemas de representación en la identificación de posibles errores y dificultades de los escolares al abordar tareas en las que se pone en juego la estructura matemática en cuestión.

Finalmente, el tercer aspecto del factor papel tiene que ver con la puesta en juego de la información recogida para la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico en el diseño de la unidad didáctica. Por ejemplo, se puede explorar cómo se utiliza la información propuesta para el análisis fenomenológico en el diseño de actividades, o la información correspondiente a los sistemas de representación en la definición de los objetivos de la unidad didáctica.

En resumen, los atributos que, en una producción y para cada organizador del currículo del análisis de contenido, reflejan los significados que un grupo ha puesto en juego para realizarla se pueden organizar en tres factores: variedad (o complejidad), organización y papel. Estos factores se encuentran relacionados como se muestra en la Figura 29.

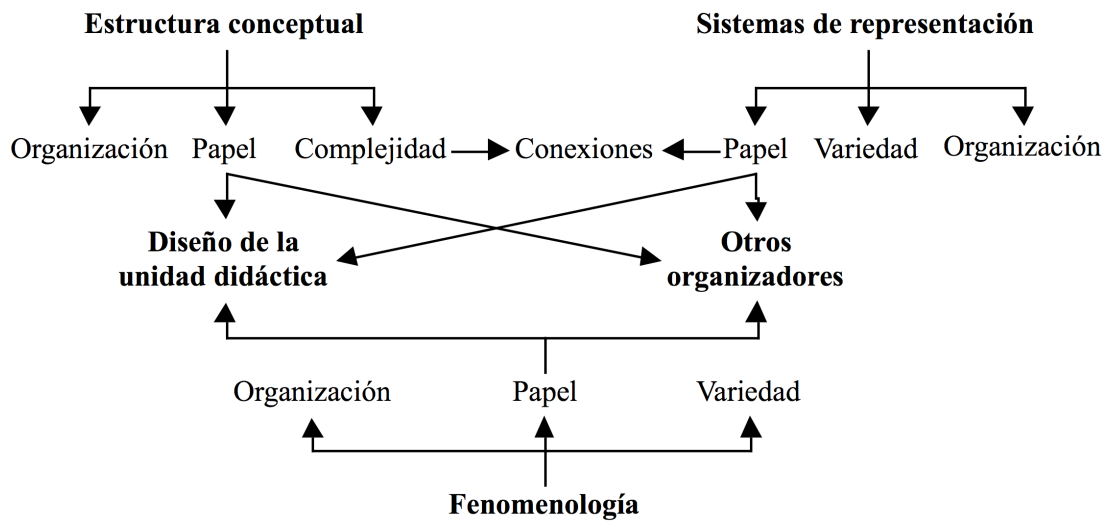


Figura 29. Factores del desarrollo del conocimiento didáctico

8. APRENDIZAJE, DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO Y ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES

Las nociones de significado parcial y conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores se refieren a atributos no observables. Para hablar sobre ellos, es necesario referirse a las producciones y actuaciones de los grupos, como expresiones de esos significados y de ese conocimiento. Para precisar la relación entre estos dos aspectos del problema de investigación, establezco los vínculos entre los diferentes elementos que he descrito en este capítulo (ver Figura 30).

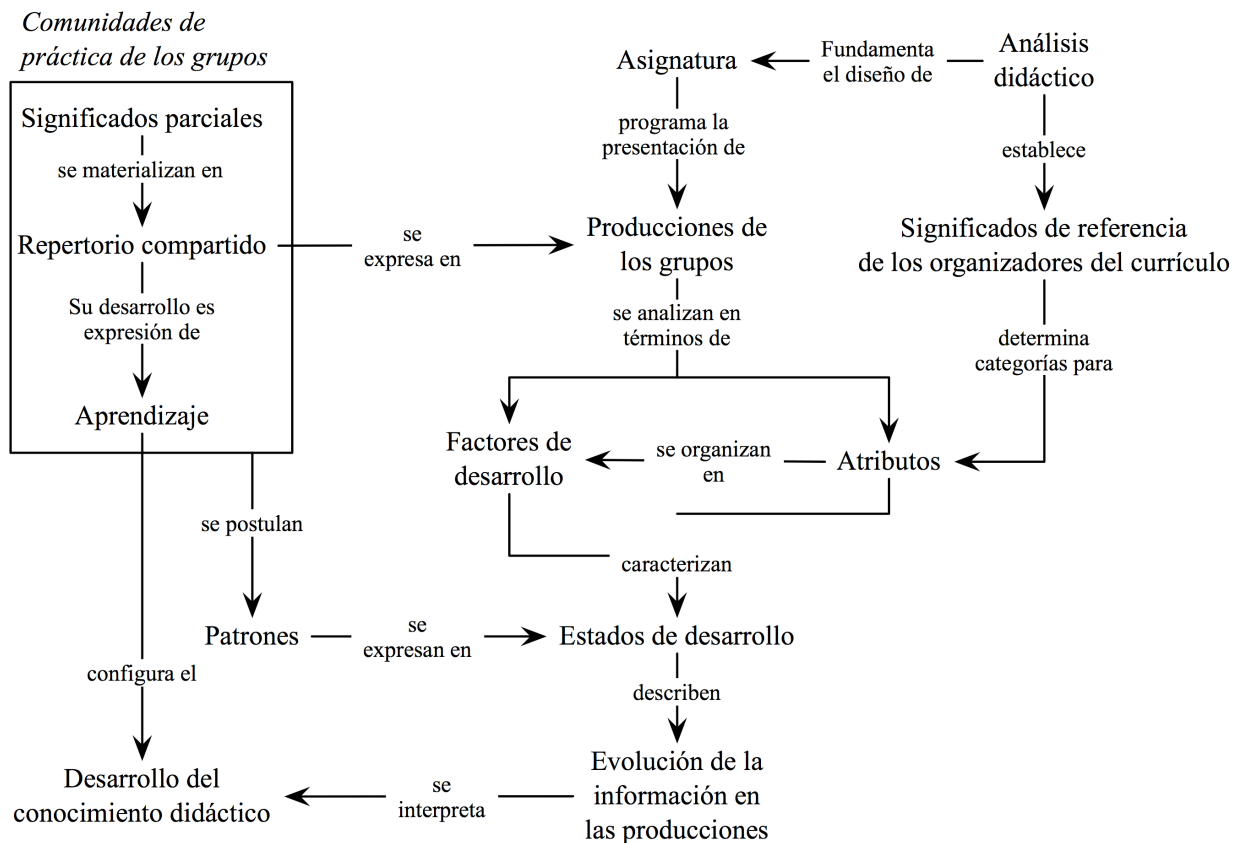


Figura 30. Aprendizaje, producciones y desarrollo del conocimiento didáctico

Comienzo asumiendo una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores. Ésta es una visión sociocultural del aprendizaje en virtud de la cual cada grupo se conceptualiza como una comunidad de práctica en la que sus miembros negocian significados. Estos significados, que he denominado parciales puesto que están permanentemente sujetos a mejora, se materializan en el repertorio compartido de cada grupo. Las producciones y actuaciones de un grupo al resolver una tarea son la expresión del desarrollo de su repertorio compartido hasta ese momento. El diseño de la asignatura prevé la presentación periódica de estas producciones. El análisis didáctico, como conceptualización de la enseñanza de las matemáticas de secundaria, fundamenta el diseño de la asignatura y establece los significados de referencia de los organizadores del currículo del análisis de contenido. Estos significados determinan las categorías que se utilizarán para analizar las producciones en términos de unos atributos. Estos atributos se organizan en factores de desarrollo. Se postulan regularidades en el desarrollo del repertorio compartido de los diversos grupos y se supone, por lo tanto, la existencia de patrones que se expresan en unos estados de desarrollo. Se conjetura que los cambios en las producciones de los grupos de futuros profesores pueden ser representativos de, y ser representados por esos estados. En caso de que se puedan caracterizar, estos estados describen un proceso de evolución en la información contenida en las producciones de los grupos. Este proceso puede entonces interpretarse en términos del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores, como expresión del desarrollo de su repertorio compartido.

9. COMPETENCIAS Y DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

Recordemos que la noción de competencia involucra la combinación de aquellos atributos (conocimientos, capacidades, habilidades y actitudes) que le permiten a un individuo o grupo realizar una tarea con un grado de calidad adecuado (Preston y Walker, 1993, p. 118). En el capítulo 3, caractericé la competencia de planificación del profesor de secundaria en términos de las capacidades que la componen. Las nociones que he presentado en este capítulo me permiten ofrecer una perspectiva complementaria que describe cómo se puede desarrollar esa competencia en el contexto de la asignatura.

Los significados de referencia de los organizadores del currículo que componen el análisis didáctico establecen el grado de calidad con el que idealmente esperamos que los grupos de futuros profesores realicen las tareas que se les asignan en la asignatura. En este capítulo, he conceptualizado el proceso en virtud del cual los conocimientos, capacidades y habilidades que componen la competencia de planificación se pueden desarrollar en un plan de formación. He establecido, por lo tanto, la relación entre las capacidades que idealmente deberían desarrollar los grupos de futuros profesores (y que caracterizan la competencia) y los significados parciales que estos grupos desarrollan a medida que abordan las tareas y que se materializan en estados de desarrollo del repertorio compartido. Esta relación se hace explícita en el hecho de que tanto las capacidades que caracterizan la competencia, como los atributos con los que se analizan las producciones de los grupos de futuros profesores se fundamentan en los significados de referencia de los organizadores del currículo del análisis de contenido. He mostrado que el diseño de la asignatura condiciona el proceso, puesto que cada vez que los grupos de futuros profesores hacen una presentación en clase, ellos se ven obligados a materializar sus significados parciales para plasmarlos en las transparencias que usarán en sus presentaciones. Estos procesos de negociación de significados surgen de la génesis instrumental: el organizador del currículo (en su concepción teórica) se transforma en un instrumento, porque los grupos desarrollan técnicas (esquemas de acción) para resolver las tareas con la ayuda del instrumento. El desarrollo de la competencia de planificación consiste, por lo tanto, en el proceso en virtud del cual los grupos de futuros profesores progresan en la articulación y consolidación de su repertorio compartido. Es decir, en el desarrollo de las técnicas, instrumentos y conceptos que configuran el discurso en virtud del cual ellos recogen, organizan y utilizan la información necesaria para realizar la planificación.

DISEÑO DE PLANES DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

En este capítulo, describo y caracterizo la problemática del diseño de planes de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Uno de los atributos de esta problemática es la diversidad de modelos de formación existentes en la actualidad. No hay *un* problema de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Cada contexto configura un problema diferente e induce al diseño de la solución correspondiente. Todo diseño se basa, implícita o explícitamente, en una conceptualización de la formación de profesores. En estas circunstancias, ¿cómo se debe describir y fundamentar el diseño de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? Para abordar esta pregunta exploro aquellos aspectos del contexto que condicionan el diseño de los planes de formación de profesores de matemáticas y caracterizo las maneras en las que se puede conceptualizar la formación de profesores. Esta exploración me lleva a preguntarme sobre el papel de la investigación en educación matemática en el diseño de planes y asignaturas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y a examinar y analizar la diversidad de los modelos existentes para dicha formación. Esta indagación se concreta en un conjunto de cuestiones que se deben hacer explícitas al describir y fundamentar el diseño de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

Me baso en el resultado anterior para describir el diseño de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato en el curso 2000-2001, período en el que recogí la información que utilizo en los estudios empíricos que forman parte del proyecto de investigación objeto de este documento. Para ello, comienzo por describir el diseño de la asignatura en 1992, momento en el que Luis Rico la pro-

pone y justifica como parte de su proyecto docente. Partiendo de esta descripción, presento y fundamento el diseño de la asignatura en 2000.

1. PROBLEMÁTICA DEL DISEÑO DE PLANES DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Los planes de formación inicial de profesores son, en principio, estrategias para abordar un propósito social: el adiestramiento y formación de los futuros profesores. La caracterización de un plan concreto de formación inicial de profesores depende de los contextos sociales, legales e institucionales en los que tiene lugar dicha formación. Entonces, cuando describimos el diseño de un plan debemos caracterizar aquellos aspectos del contexto que determinan el problema que se pretende solucionar y establecen las condiciones en las que se puede producir dicha solución. Abordo esta cuestión en la primera sección de este apartado. En la segunda sección arguyo que, cuando diseñamos un plan o asignatura de formación de profesores, asumimos implícita o explícitamente una visión de dicho proceso. En esa sección, describo dos aproximaciones a la conceptualización de la formación de profesores. Finalmente, se podría argüir que los diseños de planes de formación de profesores deberían justificarse y fundamentarse en los resultados de la investigación en esta área. Sin embargo, esto no es posible dado que no hay *un* problema de diseño de planes de formación de profesores, sino tantos contextos en los que estos tienen lugar. Por lo tanto, el papel de la investigación es otro: debe servir para informar el proceso de diseño, cuando los encargados del mismo la transfieren y adaptan a su contexto concreto. Éste es el argumento que presento en la tercera sección.

1.1. Contexto y Diseño de Planes de Formación de Profesores

En esta sección, identifico y organizo las características del contexto que considero más relevantes para la descripción del diseño de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, que considero más relevantes¹⁰⁷. Para ello, considero cuatro categorías. Estas categorías se refieren a las condiciones que provienen de la administración educativa como expresión de las expectativas sociales, a las características de la institución en la que tiene lugar el plan de formación, a las características de las escuelas en las que los futuros profesores realizarán su labor docente y a las características de los futuros profesores que demandan la formación.

La sociedad expresa unas expectativas con respecto a la formación de los futuros profesores que se concretan en leyes y normas de carácter nacional y regional. Estas normas definen cuáles deben ser los fines de la formación. En algunas ocasiones, estos fines se adaptan a condiciones internacionales, como es el caso de las competencias dentro del marco del Espacio Europeo de Educación Superior. La administración educativa también puede imponer condiciones en otros ámbitos. Por ejemplo, puede definir los criterios y los esquemas en virtud de los cuales

¹⁰⁷ La descripción del contexto (e.g., las personas a formar, la institución en la que se realiza la formación, las finalidades que se quieren alcanzar) forma parte de la descripción de toda reflexión curricular (Rico y Sierra, 1997, pp. 28-32).

se certifica a un profesor y se le asigna a una escuela concreta. Estas normas también pueden regular la extensión mínima que debe tener la formación, aspectos de su estructura de contenido y los requisitos que debe cumplir el período de prácticas, entre otros.

La institución en la que tiene lugar la formación interpreta y adapta las condiciones anteriores a su contexto. Algunas de las características del contexto institucional se refieren a sus recursos físicos (e.g., grado en el que las aulas de clase son adecuadas para una formación profesional), a la cultura académica de la institución (esquemas de enseñanza y evaluación, por ejemplo), a las características del personal (e.g., formación académica y experiencia de los formadores encargados del programa) y a los posibles debates ideológicos entre los miembros de una facultad o departamento (como es el caso, en muchas ocasiones, entre los matemáticos y los educadores matemáticos) (Eraut, 2000b, pp. 566-567). En general, la duración de la formación, el momento en que tiene lugar dentro de la carrera profesional del futuro profesor y las características del período de práctica (e.g., duración, lugar) se definen a nivel institucional (Stuart y Tatto, 2000, pp. 500-504).

El diseño de los planes de formación debe tener en cuenta las características de las escuelas, como contexto en el que los futuros profesores realizarán su labor docente, puesto que diferentes contextos educativos, institucionales y del aula implican diferentes interpretaciones de las expectativas sociales sobre el profesor. Adicionalmente, las escuelas condicionan las posibilidades del trabajo práctico en la formación de profesores.

El diseño debe también adaptarse a las características (conocimientos, concepciones, actitudes y expectativas) de quienes demandan la formación (los futuros profesores). Quiénes son los futuros profesores y con qué atributos inician su formación depende de una variedad de factores. La demanda de planes de formación inicial de profesores es, en general, una función de las condiciones laborales del profesor (e.g., salario, beneficios), del prestigio social de la actividad docente y de las normas que regulan la asignación de profesores a lugares geográficos concretos (Eraut, 2000b, pp. 561-563). Las condiciones laborales, junto con el prestigio social de la labor docente tienden a motivar en mayor o menor medida a quienes deciden optar por convertirse en profesores. Al diseñar un plan de formación se debe tener en cuenta la experiencia previa, las expectativas, los conocimientos, destrezas, actitudes y preconcepciones de quienes participarán en ellos (los futuros profesores). De hecho, una parte importante del proceso de formación implica un proceso de cambio y desarrollo en estos conocimientos, destrezas y actitudes (Cooney y Shealy, 1997). Por ejemplo, los futuros profesores de matemáticas tienden a esperar que el plan les indique cómo hacer bien lo que ellos consideran que es enseñar matemáticas. Sus preocupaciones tienden a centrarse en la gestión de clase (e.g., manejo del tiempo y de la disciplina, Moore, 2003). Pero esta actitud es contradictoria con una visión de indagación acerca de las matemáticas escolares y acerca de la manera como se aprende y enseña matemáticas en la escuela (Nicol, 1999, p. 47). Otros atributos del futuro profesor de matemáticas que pueden condicionar sus actitudes, sus actuaciones y su aprendizaje en un plan de formación son, por ejemplo, su experiencia como estudiante de pregrado

(Goulding, Hatch y Rodd, 2003), su conocimiento matemático y su experiencia docente (por ejemplo, en clases particulares, Gómez, 2001a).

En resumen, la descripción de un diseño curricular para un plan de formación inicial de profesores no puede circunscribirse exclusivamente a la presentación de su estructura curricular en términos de objetivos, contenido, metodología y evaluación. La justificación de un diseño debe basarse también en la descripción y caracterización del contexto en el que tiene lugar el plan de formación y en la medida en que dicho plan interpreta, se adapta y satisface las condiciones impuestas por ese contexto.

1.2. Conceptualizaciones de la Formación de Profesores

El diseño de una asignatura de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria debe hacer explícita su posición con respecto a la formación de profesores. En los últimos cincuenta años se han identificado tres formas de conceptualizar la formación de profesores (Cochran-Smith, 2004). En la primera, que tuvo su auge entre la década de los cincuenta y la década de los ochenta, se vio la formación de profesores como un problema de adiestramiento. El foco se centró en lograr que la actuación de los futuros profesores fuese similar a la de aquellos profesores que habían sido caracterizados como eficaces. En esta aproximación se estableció una relación entre la actuación del profesor y el rendimiento de los escolares, pero no se tuvo en cuenta el conocimiento, ni las creencias y las actitudes del profesor. En la segunda conceptualización, que va de la década de los ochenta a comienzos del siglo XXI, se conceptualiza la formación de profesores como un problema de aprendizaje. En esta aproximación se tuvo en cuenta el conocimiento, las creencias y las actitudes del profesor y el foco del problema se centró en el diseño de contextos en los que los profesores podían desarrollar (o cambiar) dichos conocimientos, creencias y actitudes (ver, por ejemplo, Ebby, 2000, pp. 93-94). La tercera conceptualización surge de la constatación del bajo rendimiento de los escolares y de su posible relación con la baja calidad de la enseñanza y, por consiguiente, de la formación de profesores. El problema de la formación de profesores se convirtió entonces en un problema de política en el que se buscaba identificar aquellos parámetros de dicha política (e.g., institucional—requisitos de acceso, estructura de programas—, regional—pruebas para profesores, normas de las licenciaturas— y nacional) que pudieran tener efectos positivos en el rendimiento de los escolares. Se generó un movimiento hacia los estándares para los profesores y la formación de profesores. Éste es el caso, por ejemplo, en Estados Unidos, donde el Consejo Nacional de Acreditación de la Formación de Profesores (National Council for Accreditation of Teacher Education, 2002) ha avalado los estándares de la Junta Nacional de Profesores Acreditados (NBPTS, 2002). En Europa, el movimiento hacia estándares se enmarca en el proceso de constitución del Espacio Europeo de Educación Superior y el establecimiento de competencias genéricas y específicas para cada profesión (González y Wagenaar, 2003). En el caso de la formación de profesores de matemáticas de secundaria en España, este movimiento ha dado lugar al establecimiento de un listado de competencias genéricas y específicas (Recio, 2004; Rico, 2004c). Este movimiento hacia estándares de profesores y de la formación de profesores ha sido criticado desde diferentes puntos de vista (Apple, 2001; McPhee y Forde, 2003;

Tamir y Wilson, 2005). Por ejemplo, Mullen y Farinas (2003) han hecho ver que esta aproximación no tiene en cuenta aspectos como el multiculturalismo o la diversidad.

Desde una perspectiva analítica, Merseeth y Lasey (1993) caracterizan diferentes orientaciones a la formación de profesores. Estas orientaciones complementan el análisis histórico de Cochran (2004). La propuesta de Merseeth y Lasey incluye:

una orientación académica que ve al profesor como trasmisor de conocimiento y al foco de la formación de profesores como la ampliación del conocimiento del profesor;

una orientación de desarrollo personal en la que el foco es el fomento del conocimiento individual del profesor, quien, a su vez, lo inducirá en sus estudiantes;

una orientación técnica que identifica y evalúa la competencia en un rango de destrezas concretas;

una orientación práctica en la que el énfasis está en los procesos de reflexión, toma de decisiones y estudio de la práctica; y

una aproximación social o crítica en la que se ve al profesor como un actor político que forma parte de un entablado más amplio.

1.3. Investigación en Diseño de Planes de Formación de Profesores

En la mayoría de las ocasiones, quienes diseñamos planes de formación de profesores, lo hacemos a partir de nuestro conocimiento, experiencia e intuición, sin tener necesariamente en cuenta los resultados de la investigación. De hecho, existen diversas creencias sobre la formación de profesores (Ball, 2002). Algunas de estas creencias son muy populares y hay otras que son contradictorias entre sí. Por ejemplo, se puede pensar que los planes de formación deberían seguir la misma metodología que se espera que los profesores sigan con sus alumnos. Pero, es evidente que “los problemas matemáticos que proporcionan un espacio intelectual apropiado para el aprendizaje de los escolares son frecuentemente diferentes de aquellos que proporcionan espacios de aprendizaje para los profesores” (p. 9). Tomamos experiencias especiales y las generalizamos, desarrollamos creencias y las usamos para explicar fenómenos. Pero no siempre buscamos explicaciones alternativas ni evidencia que pueda cuestionar nuestras creencias.

¿Qué información relevante nos proporciona la investigación para abordar el problema de diseñar un plan o una asignatura de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? No es posible afirmar que haya un área establecida de investigación en este campo. El diseño y la evaluación de planes de formación de matemáticas es una cuestión que se trata ocasionalmente y, en general, de manera indirecta o parcial, en la literatura de investigación sobre formación de profesores¹⁰⁸. Al parecer, nos encontramos, en la actualidad, en una fase previa de lo

¹⁰⁸ Lo cual no quiere decir que no existan grupos de investigación preocupados por esta cuestión. El caso de la línea de investigación sobre formación de profesores en la Universidad de Granada puede ser paradigmático. Este grupo centra su atención en la evaluación de un “modelo” de formación de profesores de matemáticas. Sin embargo, hasta el momento hemos publicado solamente resultados parciales (relacionados especialmente con el aprendizaje y las actitudes de los futuros

que puede llegar a ser un desarrollo posterior. La preocupación de los grupos de investigación se ha concentrado hasta ahora en explorar qué conocimiento debería tener el profesor de matemáticas y de qué manera se puede desarrollar dicho conocimiento. Estos son sólo dos de los múltiples aspectos que configuran la complejidad del diseño de planes y asignaturas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. A continuación, describo brevemente las características de dos trabajos recientes de meta-análisis en formación de profesores. En seguida, presento las cuestiones más sobresalientes del reciente Estudio ICMI sobre formación de profesores (ICMI 15, 2004). Finalmente, sugiero algunos de los campos en los que es necesario investigar en relación con el diseño y desarrollo de planes y asignaturas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

Dos Trabajos de Meta-Análisis

Recientemente se han realizado dos trabajos de meta-análisis en el área de formación de profesores de matemáticas. Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna (2005), con motivo de un grupo de estudio organizado para el ICME-10, revisaron 160 trabajos de investigación en formación de profesores de matemáticas. Estos trabajos fueron publicados en las revistas de investigación más representativas en el campo¹⁰⁹, en las memorias de algunas de las reuniones de investigación (e.g., PME, ICME, CERME) y en el último *Handbook de Investigación en Educación Matemática* (Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick y Laborde, 1996). Al abordar las preguntas:

- ◆ ¿qué es lo más significativo de la investigación en formación de profesores de matemáticas durante los últimos cinco años? y
- ◆ ¿qué investigación se está produciendo que pueda contribuir a la necesidad de apoyar el aprendizaje y desarrollo de los profesores?,

identificaron cuatro cuestiones que caracterizan la mayoría de los trabajos:

- ◆ son de carácter cualitativo y a pequeña escala;
- ◆ implican al formador investigando su propia práctica con sus estudiantes;
- ◆ predomina la investigación proveniente de países de habla inglesa; y
- ◆ algunos problemas han sido estudiados de manera extensa (pero no exhaustiva), mientras que hay preguntas importantes que están sin examinar.

Con respecto a la última cuestión mencionan, por ejemplo, áreas de investigación como el aprendizaje de los profesores por fuera de los contextos de reforma, el aprendizaje de los profesores a partir de la experiencia, el aprendizaje de los profesores que aborde directamente la desigualdad y la diversidad en la enseñanza de

profesores). Ninguno de estos resultados se ha publicado por ahora en revistas de investigación en inglés. Es muy posible que éste sea el caso en muchos departamentos de didáctica de la matemática en las que el área de investigación es la formación de profesores de matemáticas. Los Centros para el Aprendizaje y la Enseñanza en Estados Unidos son otro ejemplo de grupos de investigación preocupados específicamente en el diseño y desarrollo de planes de formación de profesores de matemáticas (Kilpatrick, 2003a).

¹⁰⁹ Journal of Mathematics Teacher Education, Educational Studies in Mathematics, Journal of Research in Mathematics Education, Journal of Mathematical Thinking & Learning, Journal of Teacher Education y Mathematics Teacher Education and Development, entre otros.

las matemáticas, la comparación de diferentes oportunidades de aprendizaje y los procesos de “dimensionamiento”¹¹⁰.

En su conferencia plenaria en el ICMI-15, Adler y Jaworski (2005) reiteraron estos puntos y resaltaron la importancia de:

- ◆ trabajar en el diseño y desarrollo de programas de gran escala que puedan mantenerse a largo plazo;
- ◆ ayudar a posibles autores a escribir en inglés;
- ◆ estudiar las cuestiones relacionadas con las políticas de formación de profesores de matemáticas; y
- ◆ abordar la problemática de la práctica de los formadores y su relación con el aprendizaje de los profesores y de los estudiantes.

Estudio ICMI 15

En la semana del 15 al 21 de mayo de 2005 se celebró en Aguas de Lindóia, Brasil, el Decimoquinto Estudio ICMI sobre Formación de Profesores de Matemáticas (ICMI 15). En este foro de discusión se trataron las principales cuestiones de actualidad sobre este tema. El estudio se promocionó y organizó a partir de un documento de discusión que se distribuyó y publicó en varios lugares (e.g., ICMI 15, 2004). Los trabajos se organizaron en dos grandes ejes: formación inicial y formación permanente. Al interior de estos ejes se tuvo en cuenta el interés por la formación de profesores de primaria o de secundaria. Es claro que, entre los participantes, no “estaban todos los que son, ni eran todos los que estaban” en formación de profesores de matemáticas. No obstante, los trabajos y las contribuciones de este grupo de investigadores y formadores de profesores de matemáticas se pueden considerar como representativos del estado actual de la investigación y desarrollo en el campo. Del análisis de los trabajos que se presentaron y de las discusiones que tuvieron lugar en esta reunión (Gómez, 2006b), se deduce que la investigación y el desarrollo en formación de profesores de matemáticas se concentra principalmente en cuatro ámbitos (relacionados tanto con la formación inicial y la formación permanente, como con la formación de profesores de primaria y secundaria):

- ◆ los procesos de aprendizaje de los futuros profesores y de los profesores en ejercicio,
- ◆ el papel de la práctica en la formación inicial de profesores,
- ◆ el conocimiento del profesor de matemáticas y
- ◆ el conocimiento y la actuación de los formadores de profesores de matemáticas.

Desde el punto de vista del desarrollo (es decir, de la descripción de, y la reflexión sobre modelos y planes concretos de formación de profesores de matemáticas) el Estudio ICMI 15 proporcionó gran cantidad de información que usualmente no se publica en las revistas de investigación. Me referiré a esta información en el siguiente apartado donde buscaré identificar las principales características del diseño de los planes de formación de profesores de matemáticas.

¹¹⁰ Es decir, pasar de proyectos pequeños y locales a proyectos de mayor escala.

Investigación en Diseño de Planes de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria

El diseño de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria es un proceso complejo. ¿Cuáles son sus principales elementos? ¿Para cuáles de ellos la investigación nos proporciona información relevante? ¿En qué aspectos de esta complejidad es necesario investigar? A continuación abordo algunos aspectos de esta problemática.

En el apartado 1 de este capítulo indiqué que todo diseño se basa implícita o explícitamente en una o más concepciones u orientaciones sobre la formación de profesores (Cochran-Smith, 2004; Merseth y Lacey, 1993). Al asumir una posición con respecto a esta cuestión, el formador toma decisiones acerca de los fines del proceso de formación. Esta asunción (implícita o explícita) condiciona el proceso de diseño. El formador también asume (implícita o explícitamente) una posición con respecto a cómo aprenden los futuros profesores y esta posición también supedita los resultados del diseño. Estos dos aspectos (el político y el epistemológico) están relacionados y forman parte de los debates que tienen lugar en las instituciones encargadas de la formación de profesores (Stuart y Tatto, 2000, pp. 498-500).

Desde la perspectiva de la teoría curricular, los esfuerzos sobre la conceptualización del conocimiento del profesor de matemáticas dan luces para la determinación de los contenidos de los planes y asignaturas de formación de profesores. Por otro lado, la reflexión sobre el aprendizaje del futuro profesor debería contribuir a una apropiada formulación de los objetivos y a una justificación de los esquemas metodológicos. Sin embargo, aún en estos aspectos y sin considerar (por ejemplo, el tema de la evaluación), la investigación contribuye sólo de manera parcial al problema del diseño. De hecho, después de más diez años (Ball, 1991; Cooney, 1994), seguimos preguntándonos sobre cuál debe ser el conocimiento matemático del profesor de matemáticas (Doerr y Wood, 2004), siendo éste uno de los componentes de su conocimiento. La dificultad para abordar estas preguntas y proporcionar respuestas a ellas es, tal vez, una expresión de la complejidad del problema (Eraut, 2000a; Mewborn, 2003), puesto que éste va más allá de la caracterización de las posibles posiciones que se pueden asumir con respecto al aprendizaje de los futuros profesores o de la conceptualización de conocimiento matemático, el conocimiento pedagógico y el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas. Desde la perspectiva curricular, quedan muchas preguntas por explorar en relación con los objetivos, el contenido, la metodología y la evaluación, como elementos fundamentales del diseño de un plan de formación. Por ahora, la investigación nos presenta algunos contados ejemplos de modelos y experiencias en los que se hacen explícitos estos elementos del diseño. Pero aún no nos da luces sobre la problemática de la coherencia entre dichos elementos, su relación con los fines de la formación de profesores y el éxito o fracaso de dichas propuestas como solución al problema de la formación de profesores de matemáticas dentro de un contexto particular.

Se requiere todavía mucha más investigación y evaluación sobre el funcionamiento de diferentes estrategias curriculares y sobre cómo ellas se relacionan con otras partes de los sistemas educativos y sobre qué tan

eficaces son para efectos de producir un cambio (Stuart y Tatto, 2000, p. 512).

La necesidad de investigación en el diseño de planes y asignaturas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria va más allá de las cuestiones curriculares, al nivel de objetivos, contenido, metodología y evaluación. Es necesario profundizar la indagación en el carácter situado de este proceso de formación. Como lo puse en evidencia en el apartado anterior, no hay *un* problema de diseño de planes de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, sino tantos problemas (y soluciones) como contextos en los que estos tienen lugar (Ver Figura 31).



Figura 31. Carácter situado de la formación de profesores

La investigación debería dar luces sobre cómo caracterizar los contextos, sobre las relaciones entre contextos y problemas y sobre la conceptualización de los problemas. ¿Cómo caracterizar y criticar las expectativas sociales sobre la formación de profesores? ¿Qué papel juegan las administraciones educativas en la delimitación de las opciones disponibles para el diseño de planes de formación? ¿Cómo evaluar la coherencia entre un diseño y las expectativas sociales (e.g., estándares, competencias) a las que pretende contribuir? ¿Cuáles son las implicaciones de las políticas sobre condiciones salariales, acreditación y ubicación de los profesores en la demanda de los planes de formación y en los rasgos de los futuros profesores? ¿Qué papel juegan las condiciones institucionales (e.g., cultura académica, recursos físicos, formación académica y experiencia de los formadores) en el éxito de un plan? ¿Qué papel juegan los debates ideológicos al interior de una institución en el condicionamiento del diseño de planes de formación? ¿Qué estrategias son eficaces para adaptar el diseño de un plan a los conocimientos, destrezas, actitudes y preconcepciones de los futuros profesores? Las anteriores son tan sólo algunas de las preguntas que, al enfatizar en el carácter situado de la formación de profesores, debemos abordar en el futuro próximo.

Éstas no son las preguntas que preocupan a la comunidad de investigadores en educación matemática que trabajan en formación de profesores en la actualidad¹¹¹. Los investigadores en educación matemática y los formadores de profesores de matemáticas trabajan dentro de sus propios contextos y abordan sus propios problemas y, por lo tanto, no profundizan necesariamente en la problemática de la diversidad que he expuesto hasta ahora. Hay al menos dos factores adicionales que explican las dificultades que, hasta el momento, ha enfrentado la investigación en formación de profesores para proporcionar soluciones a los problemas re-

¹¹¹ Esto no quiere decir que no haya investigadores en educación matemática que hayan abordado este problema (e.g., Comiti y Ball, 1996; ICMI 15, 2004; Stephens, 2003). El proyecto TEDS-M, actualmente en curso, aborda varios aspectos de este problema desde una perspectiva comparativa a nivel internacional (IEA–TEDS, 2006).

lacionados con el diseño de dichos programas¹¹². Si se tiene en cuenta la especificidad del contexto en el que tiene lugar un programa concreto, entonces resulta difícil abordar la complejidad de su diseño (Mewborn, 2003, p. 50). Por otro lado, aún si fuese posible generar, desde la investigación, la información necesaria para diseñar eficazmente un programa de formación, esta información sería específica al contexto en cuestión y sería difícilmente transferible a otros contextos. En otras palabras, no hay un problema de diseño de programas de formación; hay tantos problemas como contextos. Por lo tanto, no es posible replicar los resultados de la investigación sobre programas de formación de profesores. La investigación puede informar el proceso de diseño (al transferirse y adaptarse sus resultados), pero no proporciona la solución a este problema. Debemos mirar el proceso de diseño de programas de formación desde la perspectiva de un problema al que hay que darle la mejor solución posible dentro de las circunstancias que le corresponden. La investigación puede dar luces sobre los criterios para evaluar diferentes diseños (Eraut, 2000b, p. 559-560).

2. DIVERSIDAD EN FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Las reflexiones de los apartados anteriores ponen en evidencia la importancia de la diversidad en la formación inicial de profesores de matemáticas. En el marco de la problemática que acabo de considerar en el apartado anterior, resulta relevante caracterizar la diversidad de contextos, problemas y soluciones y comprender la relación entre estos tres aspectos de la formación inicial de profesores de matemáticas. De esta manera podré caracterizar, más adelante, el contexto en el que se produjo el diseño de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, ubicarlo dentro del mapa de la diversidad de modelos de formación de profesores y justificarlo (al menos parcialmente), al mostrar en qué medida dicho diseño se adapta a las condiciones que impone su contexto.

En este apartado, considero el tema de la diversidad de los contextos y sus implicaciones en la diversidad de problemas de formación de profesores de matemáticas. Presento, como ejemplo, la situación de la formación inicial de profesores de matemáticas en Francia y Dinamarca. En seguida, caracterizo los modelos de formación de profesores de matemáticas a los que he tenido acceso en la literatura. Termino haciendo algunas consideraciones sobre la diversidad en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

2.1. Contextos, Problemas y Planes de Formación de Profesores de Matemáticas

En el apartado anterior, describí brevemente la multiplicidad de factores que configuran el contexto en el que se diseña y realiza un plan de formación. En este apartado, presento algunos ejemplos que dan cuenta de la diversidad de contextos, problemas y soluciones producto de esta multiplicidad de factores.

¹¹² Estas dificultades se manifiestan en el tipo de problemas que se consideran prioritarios en la actualidad. Por ejemplo, el foro sobre el tema en el PME 28 centró su atención exclusivamente en la problemática del conocimiento matemático del profesor de matemáticas (Doerr y Wood, 2004).

La situación de los futuros profesores de secundaria y de su formación inicial en Europa y Estados Unidos es variada (Comiti y Ball, 1996). Por ejemplo, en Alemania, la formación se hace en la universidad, donde se adquiere el contenido científico. Los futuros profesores deben después dictar clases durante dos años, a lo largo de los cuales atienden seminarios con profesores expertos. En Inglaterra, hay un sistema muy centralizado en el que se da gran importancia a los colegios en los que los futuros profesores hacen sus prácticas. En el sistema francés, los propósitos gubernamentales son muy completos e integran los diversos tipos de conocimientos necesarios para el profesor, aunque no explican cómo se deben lograr. La formación tiene lugar en los IUFM, instituciones no universitarias de educación superior, que no tienen paralelo en otros lugares del mundo. La situación en Estados Unidos está regida parcialmente por la existencia de los estándares y las presiones que estos imponen en profesores y formadores de profesores. El sistema se encuentra completamente descentralizado. Las diferencias entre los modelos utilizados en diferentes países se manifiestan en aspectos como la duración y características de la práctica de los futuros profesores en las escuelas, la importancia que se le da a la planificación o el énfasis en la promoción de la colaboración entre los grupos de futuros profesores (Stephens, 2003).

Comparación de dos Sistemas de Formación: Francia y Dinamarca

La descripción anterior sugiere algunas de las diferencias generales en los sistemas de formación de profesores de matemáticas en diversos países. Pero, ¿cuál es el detalle de estos sistemas? Durand-Guerrier y Winsløw presentaron, en el grupo de trabajo 3 del Estudio ICMI 15 sobre formación de profesores, un documento que aborda esta cuestión (Durand-Guerrier y Winsløw, 2005). Se trata de un estudio comparativo de las características y productos de los sistemas de formación de profesores de matemáticas de secundaria de Francia y Dinamarca.

Ellos centran su esquema de comparación en la noción de conocimiento del profesor de matemáticas. Citando a Bromme (1994), identifican tres componentes del conocimiento del profesor: conocimiento del contenido temático a enseñar, conocimiento pedagógico y conocimiento didáctico. En este trabajo, los autores muestran cómo los sistemas de formación en los dos países organizan el desarrollo de las tres componentes y cómo estas componentes aparecen en la actuación de los futuros profesores cuando abordan tareas hipotéticas de enseñanza. Ellos organizan la comparación de los dos sistemas de acuerdo con seis dimensiones: aspectos generales de los programas, organización (cómo aparecen las tres componentes), cantidad de trabajo en las tres componentes, forma de trabajo en las tres componentes, e historia, ideología y tradiciones que fundamentan los sistemas. A continuación, presento un resumen de los principales resultados de la comparación de los dos sistemas de acuerdo con estas dimensiones.

Los futuros profesores franceses realizan una licenciatura en matemáticas de tres años, para después entrar a estudiar en un instituto de formación de profesores (IUFM) en el que, durante el primer año, se preparan para unos exámenes. Una vez aprobados los exámenes, los futuros profesores son asignados a una escuela en la que son responsables de una clase y continúan recibiendo formación. Al final de este proceso, los futuros profesores tienen garantizada una plaza como profesores. Los futuros profesores daneses se forman, durante cuatro años, en un cen-

tro de formación de profesores (CVU). Durante cada año, los futuros profesores tienen períodos de varias semanas de práctica en las escuelas. Deben aprobar exámenes anualmente. Los contenidos matemáticos de la formación se refieren exclusivamente a las matemáticas escolares. Una vez finalizada su formación, su acceso a una plaza de trabajo se regula de acuerdo con el mercado laboral.

La organización de los programas de formación con respecto a las tres componentes del conocimiento del profesor es diferente. En Francia, los futuros profesores estudian matemáticas académicas durante tres años. En los dos años siguientes, durante su formación en el IUFM, ellos relacionan e integran este conocimiento con las matemáticas escolares y estudian elementos de pedagogía general y de didáctica de la matemática. Los futuros profesores daneses siguen un programa en el que se integra continuamente la práctica en la escuela, el estudio de las matemáticas escolares y las asignaturas sobre pedagogía y didáctica de la matemática. Mientras que en Francia una proporción importante de los formadores son doctores y hacen investigación en didáctica de la matemática, en Dinamarca los formadores no son doctores y no hacen investigación.

Los contenidos de las asignaturas relacionadas con las matemáticas, la pedagogía y la didáctica de la matemática varían de acuerdo con las instituciones en las que tiene lugar la instrucción. Ya he mencionado que los futuros profesores franceses realizan una licenciatura de tres años en matemáticas académicas, mientras que el centro de atención de la formación matemática de los futuros profesores daneses son las matemáticas de secundaria. Este vínculo con las matemáticas escolares también se expresa en la formación didáctica, que se refiere principalmente a principios e ideas relacionados con los propósitos y la práctica de la enseñanza de las matemáticas en la escuela (e.g., elementos de teorías cognitivas). En Francia, la formación en didáctica de la matemática incluye elementos del análisis epistemológico de conceptos (Artigue, 1990), de la teoría de situaciones (Brousseau, 1997) y de la teoría antropológica de la didáctica (Chevallard, 1999). En general, el programa danés está principalmente centrado en la práctica. El programa francés es más académico (con excepción del último año).

El trabajo de los futuros profesores franceses se realiza, en su gran mayoría, de manera individual y dentro del marco tradicional del contexto universitario. Solamente en el último año se promueve el trabajo colaborativo. Los exámenes son individuales e incluyen una prueba de clasificación (el “concours”). En el programa danés, se utiliza una gran variedad de esquemas de trabajo que incluyen un alto grado de interacción entre los formadores y los futuros profesores. Estos esquemas incluyen trabajo en grupo y proyectos. En Dinamarca no hay una prueba de clasificación y una parte de los exámenes se realiza en grupo.

La principal diferencia ideológica con respecto a la enseñanza de las matemáticas en los dos países tiene que ver con la concepción de las funciones y finalidades de la disciplina en la sociedad: “En Francia, al menos tradicionalmente, se considera que las matemáticas son la pieza central de la cultura científica que los estudiantes deben adquirir. En Dinamarca, se enfatizan los usos de las matemáticas en la sociedad” (Durand-Guerrier y Winsløw, 2005, p. 7).

Aspectos comunes dentro de la diversidad

Al comparar la formación de profesores de matemáticas en Francia y Estados Unidos, Comiti y Ball (1996) encuentran puntos comunes dentro de la diversidad. Las similitudes se encuentran en varias dimensiones. Primero, hay una continua búsqueda de soluciones a las relaciones entre la formación académica y la formación profesional y entre las universidades y las escuelas. Segundo, en todas partes hay preocupación por el conocimiento de contenido del profesor, sin que haya soluciones evidentes. Tercero, la formación de profesores se ve como un eslabón en la cadena para la mejora de las escuelas y de la preparación de los estudiantes. En resumen, los formadores de profesores en ambos países tienen metas comunes. El problema es saber cómo lograrlas teniendo en cuenta las condiciones dentro de las que se trabaja.

2.2. Modelos de Formación de Profesores de Matemáticas

Son contados los trabajos en los que se describe de manera completa y suficientemente detallada un plan de formación de profesores de matemáticas (e.g., Nicol, 1999). Por lo tanto, no es posible explorar en qué medida los diseños de planes de formación satisfacen dos condiciones necesarias para la validez (calidad) de un plan: la coherencia entre los componentes del diseño curricular, y la coherencia entre dicho diseño y las condiciones impuestas por el contexto. Al no poder analizar diseños completos, me limitaré a enumerar características aisladas de algunos de ellos.

No pretendo presentar en esta sección una revisión detallada de la literatura sobre diseño de planes y asignaturas de formación de profesores de matemáticas, aún si esta literatura es escasa. Mi intención es la de exponer algunos ejemplos de lo que se está haciendo en la actualidad en este campo, aprovechando particularmente la información que se presentó y discutió en el estudio ICMI 15. Del análisis de esta información, se deduce que la mayoría de los diseños de planes de formación de profesores de matemáticas centran su atención en aspectos metodológicos (y su relación con el aprendizaje de los futuros profesores) y parcialmente en aspectos de contenido (y su relación con el conocimiento del profesor), mientras que no profundizan en la descripción del contexto o la caracterización de los objetivos, los contenidos y la evaluación (Gómez, 2006b).

Contexto

Ya he explicado por qué muy pocos trabajos describen con algún detalle el contexto en el que se realiza la formación y el papel que ese contexto juega en el diseño del plan. Cuestiones como las expectativas sociales sobre la formación de profesores, las políticas sobre condiciones salariales, acreditación y ubicación de los profesores, la cultura académica, los recursos disponibles y los debates ideológicos en la institución, y las actitudes y preconcepciones de los futuros profesores no han sido, hasta ahora, objeto de estudio sistemático en la literatura de formación de profesores de matemáticas.

Algunas de estas cuestiones son de mucha actualidad. Es el caso, por ejemplo, de las reflexiones sobre la formación inicial de profesores de matemáticas en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior (Rico, 2004c). Nociones como la relevancia, originada en los estudios de calidad en las organizaciones,

adquieren importancia al proporcionar un fundamento conceptual y metodológico para determinar en qué medida un diseño curricular contribuye al logro de unas competencias establecidas externamente (González-López, Gil, Moreno, Romero, Gómez, Lupiáñez *et al.*, 2004; Rico *et al.*, 2003).

Otra cuestión que comienza a discutirse en la literatura se refiere a la formación y la actuación del formador de profesores. Los formadores se enfrentan al reto de atender las necesidades y preocupaciones prácticas de los futuros profesores y, al mismo tiempo, contribuir a su desarrollo profesional (Doerr y Masingila, 2001, p. 2.370). Pero, ¿quién forma a los formadores? (Pope y Jones, 2005) ¿Qué características debe tener un programa de formación de formadores? (Sztajn, Ball y McMahan, 2005). Algunos investigadores comienzan a abordar estos problemas (Dawson, 2005; Pope y Jones, 2005), pero éste es un campo incipiente en la investigación en formación de profesores de matemáticas.

Aprendizaje de los Futuros Profesores

Diversos autores resaltan la importancia de asumir una postura con respecto al aprendizaje de los futuros profesores dentro los planes de formación (Lerman, 2001; Llinares, 1998b). Ellos sugieren que una proporción importante de estos planes de formación se diseñan y realizan a partir de una posición implícita y, en muchos casos, inconsciente de cómo los futuros profesores aprenden, posición que sólo se percibe cuando ella se expresa en el diseño y el desarrollo curricular del plan de formación. No obstante, el debate epistemológico (implícito o explícito) es un pilar fundamental del diseño y desarrollo de un plan de formación (Stuart y Tatto, 2000). La mayoría de los trabajos en los que se reflexiona acerca del aprendizaje de los futuros profesores asumen posiciones de corte constructivista social en el que se consolida el paso de mirar la formación de profesores como problema de adiestramiento a mirarla como un problema de aprendizaje (Cochran-Smith, 2004) y en los que se enfatiza el hecho de que la enseñanza de las matemáticas es una práctica profesional. De acuerdo con este enfoque, aprender a enseñar matemáticas implica progresar en el proceso de pertenecer a una comunidad de práctica (Gómez y Rico, 2005; Llinares, 2002)¹¹³. Por lo tanto, se destaca la importancia de la práctica como entorno de análisis y reflexión para promover el aprendizaje (Sullivan, 2002)¹¹⁴. Mostraré en seguida que esta posición conlleva a un interés cada vez mayor en esquemas metodológicos que promueven la colaboración entre los profesores. Sin embargo, hay que tener en cuenta que, dependiendo de los objetivos concretos que se buscan lograr en una coyuntura específica, podemos asumir, como formadores, diferentes posiciones con respecto al aprendizaje de los futuros profesores y utilizar, en el diseño y desarrollo de un plan o

¹¹³ El interés por las aproximaciones socioculturales al aprendizaje del profesor de matemáticas se pone de manifiesto en el hecho que, en el Estudio ICMI 15, se presentaron quince trabajos en los que nociones como “comunidad de práctica”, “comunidad de aprendizaje”, “comunidad de indagación” y “comunidad virtual” servían como fundamento conceptual para la exploración del aprendizaje de los profesores o se utilizaban en el diseño de programas de formación de profesores (Gómez, 2006b).

¹¹⁴ La importancia de este aspecto del aprendizaje del profesor se puso de manifiesto en el Estudio ICMI 15. El *Eje II* de este estudio centró su atención en el análisis de la práctica de los profesores y, en particular, en el papel de la práctica en el aprendizaje del profesor (ICMI 15, 2004, pp. 365-367).

asignatura concretos, diferentes esquemas metodológicos coherentes con esas posiciones (Gómez, 2003).

Objetivos

Los objetivos son un elemento central del diseño de un plan de formación de profesores de matemáticas. Aunque Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) sugieren que “tal vez el objetivo central de todos los programas de formación y desarrollo profesional de profesores es el de ayudar a los profesores a *comprender* las matemáticas que ellos enseñan, cómo sus estudiantes aprenden esas matemáticas y cómo se puede facilitar ese aprendizaje” (p. 398, en cursiva en el original), qué objetivos se establezcan para un plan o una asignatura dada depende de la concepción que se tenga de la formación de profesores (y su relación con las expectativas sociales), de la visión que se asuma acerca del aprendizaje de los profesores y del contexto.

Sorprende que la mayoría de los trabajos que describen con algún detalle el diseño de un plan o asignatura no profundicen en la reflexión sobre los objetivos y centren más su atención en el contenido (y su relación con la problemática del conocimiento del profesor) o en la metodología. La tendencia actual hacia las competencias del profesor de matemáticas sugiere un cambio de aproximación con respecto a los objetivos de un plan de formación. El problema central ya no es el de determinar qué conocimientos debe saber el profesor y definir los objetivos en términos de esos conocimientos. El cambio en las creencias del profesor tampoco es el foco de atención. Ahora, se espera que los objetivos se definan en términos de su contribución al desarrollo de unas competencias que han sido determinadas externamente al plan. Por lo tanto, los objetivos deben expresar la intención de integrar y desarrollar un conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes que sean útiles para la actuación del profesor en la práctica (Rico, 2004c).

Los objetivos son el eje sobre el que se fundamenta la calidad de un plan de formación. Su relevancia establece la medida en que los objetivos contribuyen a las competencias social o institucionalmente establecidas para ese plan. Su eficacia y eficiencia se establecen en términos de la medida en que se logran dichos objetivos con unos recursos dados (Toranzos, 1996).

Contenidos

La reflexión sobre los contenidos de los planes de formación tiende a concentrarse en la discusión sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. En particular, la literatura pone de manifiesto una preocupación permanente por determinar qué conocimiento matemático debe tener el profesor de matemáticas, cómo se caracteriza el conocimiento didáctico en matemáticas y cómo se pueden integrar estos dos tipos de conocimientos. En el apartado 1 del capítulo 3 discutí estas cuestiones.

Metodología

La metodología es el componente curricular sobre el que se produce más información en la literatura de formación de profesores de matemáticas. Varios trabajos describen y evalúan la bondad de diferentes esquemas metodológicos. Algunos de estos esquemas se fundamentan en una posición acerca de cómo aprenden los futuros profesores. Estas posiciones tienden a ser de corte constructivista, con énfasis

sis en los aspectos sociales del aprendizaje. Por esta razón, muchos de los esquemas buscan el desarrollo de la colaboración entre grupos de profesores o la conformación de comunidades de práctica entre ellos. Se parte entonces del supuesto de que la colaboración y el aprendizaje interdependiente inducen la reflexión y promueven la profundización en y la conexión entre el conocimiento de las matemáticas, de los estudiantes y de la instrucción (Beck y Kosnik, 2001; Peter-Koop, Santos-Wagner y Breen, 2003). Varios de los esquemas que enumero a continuación resaltan la colaboración como una de sus implicaciones. Ejemplos de este movimiento son el énfasis en el aspecto colaborativo dentro de la investigación-acción (Levin y Rock, 2003) y la colaboración entre profesor y formador en un esquema de enseñanza compartida (Kluth y Straut, 2003).

El estudio de casos es un esquema muy popular en la formación de administradores de empresas. En la formación de profesores, este esquema se centra en el análisis de episodios de clase (escritos o con otros medios, como el vídeo) que motivan la discusión entre los futuros profesores y los induce a establecer las conexiones entre el conocimiento de las matemáticas, de los estudiantes y de la práctica (Barnett, 1991; Kilpatrick et al., 2001, pp. 392-395; Llinares, 1998a).

El análisis del trabajo de los escolares se ha venido promoviendo como un esquema con potencial en la formación de profesores (Ball, 1999, p. 24). Este esquema puede motivar a los profesores en formación a cambiar su discurso profesional y puede inducirlos a experimentar y reflexionar sobre actuaciones docentes que se encuentren más centradas en sus estudiantes (Kazemi y Franke, 2004, p. 204). En el área concreta de la formación inicial de profesores de matemáticas, este esquema se ha utilizado, por ejemplo, para desarrollar los conocimientos de contenido y pedagógico de contenido del profesor (Palis, 2005), como base de un trabajo colaborativo entre profesores, formadores e investigadores (Francisco, Maher, Powell y Weber, 2005) y para generar una visión más compleja de la práctica (Wood, 2005). Con esquemas similares, es posible utilizar el análisis de materiales curriculares como herramienta de desarrollo profesional (Collopy, Riddick, Barker, Sheriffs, Bass, Ellis *et al.*, 2003).

El uso de Internet en la formación de profesores se está haciendo cada vez más común, dando lugar a lo que se ha venido a llamar “comunidades virtuales” (Bairral y Zanette, 2005). Este esquema de trabajo es evidentemente útil en la formación a distancia (Borba, 2005) y puede servir para mantener comunidades de profesores que se formaron originalmente en esquemas de formación presenciales (Skott, 2005).

El esquema del “grupo de estudio” o “lesson study” se originó en Japón y ha comenzado a tener algún impacto en países occidentales. Éste es un esquema cíclico en el que un grupo de profesores identifica una dificultad específica en la enseñanza de un tema matemático. Para esa cuestión concreta, el grupo realiza varios ciclos de diseño, puesta en práctica y discusión de resultados. Este proceso los induce al análisis de detallado de los aspectos conceptuales, cognitivos y de instrucción de ese tema matemático (Kilpatrick et al., 2001, pp. 394-397). El esquema ha sido adaptado a otros contextos (Robinson, 2005) y se considera como complementario a otras aproximaciones, como el análisis de casos (Silver, Castro, Ghouseini y Stylianides, 2005).

El análisis de vídeos de la práctica se utiliza como medio para motivar la colaboración entre, y la reflexión de los profesores en formación y por lo tanto como catalizador de posibles oportunidades de aprendizaje (Boerst, 2005; Gellert y Krummheuer, 2005; Hospesova, Budejovice, Ticha y Machackova, 2005; Mumme y Carroll, 2005; Seago y Mumme, 2005). Otro esquema con el que los programas de formación se refieren a la práctica es el uso de relatos¹¹⁵. Con este esquema, los profesores en formación reflexionan sobre diversas cuestiones relacionadas con su labor docente y comparten esas reflexiones con sus colegas (Chapman, 2005; Chiocca, 2005).

Resulta difícil determinar la proporción de planes y asignaturas de formación de profesores que utilizan esquemas metodológicos como los anteriores. Tampoco es posible, a partir de la información disponible hasta ahora, argumentar que haya esquemas que sean más eficaces y eficientes que otros. La eficacia y eficiencia de un esquema depende de los objetivos que pretende lograr, de las condiciones impuestas por el contexto en el que tiene lugar la formación y de los recursos disponibles para ello. La formación y el tiempo disponible del formador son seguramente dos de los recursos que condicionan de manera más importante el tipo de esquema metodológico utilizado.

Evaluación

La evaluación no es un tema central en la literatura sobre formación de profesores de matemáticas¹¹⁶. No obstante, es de esperar que, en la medida en que los esquemas de acreditación de profesores adquieran más importancia, los esquemas de evaluación de los planes de formación asumirán tal vez mayor protagonismo. En el caso español, la relación entre la acreditación y la formación de profesores se establece por fuera de los planes ofrecidos por las universidades. Los futuros profesores, una vez terminada su formación académica, entran en otro proceso de formación en academias en las que tutores especializados los *entrenan* para superar los exámenes de acreditación (las oposiciones). En este apartado he centrado la atención en los planes y asignaturas de formación de profesores que tienen lugar en las universidades. Por esta razón, no profundizo en el papel de las academias y esquemas de formación post-universitaria. En todo caso, estas instituciones juegan un papel importante en la formación inicial del profesor de matemáticas español.

3. HISTORIA DE LA ASIGNATURA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN EL BACHILLERATO

En este apartado y el siguiente, describo el diseño de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato¹¹⁷. Esta descripción y las reflexiones que he presentado en los apartados anteriores configuran mi contribución a la tercera de las pre-

¹¹⁵ He traducido de esta manera la idea que en inglés se denomina “story-telling”.

¹¹⁶ Ninguno de los 135 trabajos presentados en el Estudio ICMI 15 tiene a la evaluación como objeto central de la reflexión. Una excepción a esta carencia es, por ejemplo, el trabajo de Shulman (1993) sobre el uso de portafolios en la formación de profesores.

¹¹⁷ De ahora en adelante, y para efectos de simplificar la lectura, hablaré de “la asignatura”.

guntas que formulé en el capítulo 1¹¹⁸. He restringido el ámbito de la pregunta a la problemática del diseño de planes de formación de profesores de matemáticas. Adicionalmente, la descripción del diseño de la asignatura es necesaria en el contexto del proyecto de investigación objeto de este trabajo. Esta descripción me permitirá reseñar, en el siguiente capítulo, el desarrollo de la asignatura durante el curso 2000-2001, curso en el que recogí la información con la que realicé los estudios que conforman la dimensión empírica de la investigación. Pretendo fundamentar el diseño de la asignatura en las ideas que he presentado en los tres capítulos anteriores y en la descripción del contexto en el que ésta tuvo lugar.

La asignatura es un ente vivo, en permanente evolución. Su diseño curricular en el curso 2000-2001 es producto de ese proceso de continua transformación. Por lo tanto, para describir y justificar dicho diseño en el siguiente apartado, presentaré, en éste, algunos aspectos de su historia. Seleccione dos momentos de esa historia: sus inicios, tal y como se describen en el proyecto docente de Luis Rico (1992) y las características de la asignatura en el curso 1999-2000. Tendré en cuenta las reflexiones de los apartados anteriores para describir estos dos momentos de la historia de la asignatura.

3.1. La Asignatura en 1992

Luis Rico presentó su proyecto docente en 1992. En este documento, él describe y fundamenta el diseño curricular de dos asignaturas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la Universidad de Granada: Didáctica de la Matemática en el Bachillerato y Prácticas de Enseñanza en Instituto. Rico menciona que sus propuestas son el producto, entre otras cosas, de su experiencia de cinco años como formador de futuros profesores de matemáticas. El documento incluye una descripción detallada del contexto en el que se enmarcan las propuestas.

Contexto Legal

La política educativa vigente en 1992 proviene de la Ley de Reforma Universitaria de 1983 (Boletín Oficial del Estado, 1983), conocida como “la LRU” y la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo de 1990 (Boletín Oficial del Estado, 1990), conocida como “la LOGSE”. En la LOGSE se establecen las condiciones básicas para acceder a la función docente: título de licenciado, ingeniero o arquitecto y el Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP). Las universidades ofrecen cursos de post-grado que otorgan este certificado. En el caso de la Universidad de Granada, quienes cursan la Especialidad de Metodología, que describiré en seguida, convalidan el CAP. Habiendo satisfecho estas dos condiciones básicas, quien opta por una plaza de profesor de matemáticas de secundaria debe aprobar las “oposiciones”, aspecto del proceso de certificación del profesor de matemáticas que Rico no menciona en su documento. Las oposiciones son unos exámenes de Estado en los que se evalúan los conocimientos disciplinares y didácticos de los candidatos, junto con su competencia para diseñar unidades didácticas. El resulta-

¹¹⁸ La pregunta era: ¿cómo se deben diseñar e implantar los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria de tal forma que se apoye y fomente el desarrollo de estos conocimientos, capacidades y actitudes?

do de estos exámenes permite clasificar a los candidatos, asignándose las plazas disponibles a quienes obtienen los mayores puntajes.

A finales de la década de los ochenta y comienzos de la década de los noventa había una demanda importante de profesores de matemáticas de secundaria, coyuntura que motivó a muchos bachilleres a cursar la licenciatura de matemáticas. Como consecuencia, la proporción de plazas disponibles con respecto a los candidatos a ellas se redujo a finales de siglo. El puntaje mínimo para acceder a una plaza y el número de candidatos que no aprobaba las oposiciones aumentaron. Los futuros profesores de matemáticas se encontraron con la necesidad de mejorar su formación (adiestramiento) para superar los exámenes. Esto generó, durante la década de los noventa, la aparición de las academias para la preparación de oposiciones. No es raro encontrar licenciados en matemáticas que han dedicado cinco años de su vida profesional a prepararse en estas academias para las oposiciones. Estas instituciones constituyen un sistema complementario de formación de profesores. Este sistema de formación no es objeto de análisis en este documento.

La LOGSE también estableció cambios en todos los niveles de la educación. La propuesta de Rico tiene en cuenta el currículo oficial para secundaria y bachillerato del Ministerio de Educación y su concreción por parte del Consejería de Educación de la Junta de Andalucía. Estos currículos oficiales implicaron la necesidad de producir nuevos diseños curriculares para las asignaturas de bachillerato, estableciendo nuevas competencias por parte de los profesores y, determinando así, las condiciones para su formación inicial.

España es uno de los países en los que la profesión de profesor de secundaria tiene gran prestigio social. Este reconocimiento se manifiesta en unas condiciones laborales favorables comparativamente a nivel internacional. A diferencia de otros países (e.g., Bostwana, Inglaterra, Sur África, Estados Unidos, Gómez, 2006b), en España, quienes optan por acceder a una plaza de profesor de secundaria son personas capaces y motivadas que consideran la profesión como su opción de futuro. Por consiguiente, la demanda por plazas de profesor es mayor que la oferta y se mantiene una alta retención en los puestos de trabajo.

Contexto Institucional

En 1992, existía un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la Universidad de Granada. Este plan formaba parte de la licenciatura de matemáticas de esta universidad. La licenciatura ofrecía tres especialidades, denominadas Matemáticas Fundamentales, Estadística y Metodología. Los estudiantes escogían una de ellas al comienzo del cuarto curso. La primera buscaba formar investigadores en matemáticas, la segunda matemáticos con capacidad para desempeñarse en el sector productivo y de servicios y la tercera profesores de matemáticas de secundaria. El plan se configuraba con base en la Especialidad de Metodología. Rico describe el diseño de este plan como tan sólo una opción de la Especialidad de Matemáticas Fundamentales: “Reiteramos así nuestra opinión de que la Especialidad de Metodología es una opción de Matemáticas Fundamentales que se concreta en las cuatro asignaturas propias de la especialidad: Supuestos de la Educación, Métodos Estadísticos aplicados a la Educación, Didáctica de la Matemática en el Bachillerato y Prácticas de Enseñanza en Instituto” (§ III.1.2). La asignatura Supuestos de la Educación presenta reflexiones teóricas, filosóficas,

epistemológicas e históricas sobre la educación. Métodos Estadísticos Aplicados a la Educación aporta conocimientos necesarios para la investigación en educación matemática. La asignatura Prácticas de Enseñanza en Instituto proporciona el contacto con el aula y los alumnos, aporta información sobre las escuelas e institutos y permite la puesta en práctica de diseños curriculares. Esta asignatura y la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato estaban adscritas al Departamento de Didáctica de la Matemática. A pesar de planes como éste, algunos años más tarde, Rico (1999b) reiteraba que “la didáctica de la matemática tiene una escasa integración en los planes de formación de profesorado y nula colaboración con las demás disciplinas matemáticas” (p. 245), producto posiblemente de un debate ideológico entre matemáticos y educadores matemáticos que, en universidades como las de Cádiz, Extremadura, Valladolid y Sevilla se manifestó en el rechazo de propuestas de asignaturas de didáctica de la matemática (p. 256).

En la Universidad de Granada, y en la universidad española en general, existe una cultura académica que, por sus diferencias con la Universidad de los Andes, donde estudié y trabajé como profesor, me sorprendió a mi llegada a España. Esta cultura académica se puede resumir en un esquema de evaluación sustentado en muy pocos exámenes en los que los estudiantes se “juegan” el éxito en cada asignatura y en un esquema de enseñanza en el que no existen libros de texto y el profesor presenta a manera de cátedra el contenido correspondiente. Como consecuencia, los estudiantes desarrollan un esquema de estudio que se centra en tomar notas durante la clase, organizarlas en casa y estudiarlas, en la mayoría de los casos, con poca anterioridad a los exámenes. En el caso de la licenciatura de matemáticas, los estudiantes describen el tratamiento del contenido como un esquema monótono de “...-definición - lema previo - demostración - teorema - demostración - corolario...” (Gómez, Cañadas y Peñas, 2002, p. 480).

Los Futuros Profesores

Rico acostumbra realizar una encuesta entre sus alumnos de la asignatura Didáctica de la Matemáticas en el Bachillerato al comienzo del curso académico. Con esta encuesta, él explora algunas de sus concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas y algunos aspectos de su conocimiento sobre la didáctica de la matemática. Basándose en los resultados reiterados de esta encuesta, concluye que

nos encontramos con unos alumnos que consideran que el nivel de su formación matemática es más que suficiente para ser Profesores de Matemáticas, que desconocen la existencia de un campo de trabajo denominado Educación Matemática y de las actividades que en él se realizan y que no imaginan otros contenidos para la Didáctica de la Matemática que una colección de recomendaciones generales, trucos y reglas que permitan hacer las clases más activas y agradables. No obstante, su receptividad para recibir información sistemática relativa a Educación Matemática, su capacidad para utilizarla, su interés por conseguir más y mejores conocimientos y por profundizar en los mismos hacen que el desarrollo de la Asignatura permita un considerable avance en esta materia (Rico, 1992, § III.2.1).

No todos los estudiantes de matemáticas tienen esa carrera como su primera opción. Su principal preocupación cuando comienzan el plan de formación como profesores tiene que ver con la gestión de clase, aspecto de la enseñanza que les genera mayor intranquilidad, dado que se sienten seguros sobre sus conocimientos matemáticos. Ellos esperan que el plan les proporcione soluciones a lo que ellos perciben como los problemas prácticos que se encontrarán en el aula (Gómez et al., 2002). Por otro lado, dos terceras partes de los futuros profesores tienen alguna experiencia docente anterior al plan de formación, consecuencia de su trabajo en clases particulares o en academias de bachillerato. Esta experiencia docente da lugar a “intuiciones didácticas” que sustentan, con frecuencia, su actuación a la hora de abordar las tareas que realizan en clase (Gómez, 2001a).

Aprendizaje de los Futuros Profesores y Concepción de la Formación de Profesores

Aunque, en su proyecto docente, Rico aborda en detalle los aspectos matemáticos, psicológicos, sociológicos y curriculares de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, él no expresa de manera explícita su posición con respecto a dos cuestiones que, como lo argumenté al comienzo de este capítulo, permiten explicar y fundamentar el diseño de un plan de formación de profesores: qué posición se asume con respecto al aprendizaje de los futuros profesores y cómo se concibe la formación de profesores. Estas dos cuestiones surgen como preocupaciones de la investigación en educación matemática en general y de la formación de profesores en particular años más tarde (Sfard et al., 2004).

Diseño de la Asignatura en 1992

Rico establece dos metas para la asignatura: “conseguir una visión global del campo de la Didáctica de la Matemática y articular el conocimiento matemático sobre los contenidos de la educación secundaria y bachillerato a través de una reflexión didáctica sistemática” (Rico, 1992, § III.2.1). Los objetivos de la asignatura son los siguientes (Rico, 1992, § III.2.2):

- 1. Establecer fundamentos para el currículo de Matemáticas en la Enseñanza Obligatoria y Bachillerato.*
- 2. Conocer y analizar las diferentes funciones de las matemáticas en el sistema educativo.*
- 3. Contextualizar el aprendizaje matemático según las teorías cognitivas que sirven de fundamento a la educación.*
- 4. Establecer los diferentes elementos, fases y etapas en los que se integra el diseño, desarrollo y evaluación del currículo de Matemáticas.*
- 5. Estudiar los Programas de Matemáticas en Secundaria y Bachillerato.*
- 6. Conocer los materiales y recursos usuales en la enseñanza de las matemáticas, así como métodos e instrumentos de evaluación.*
- 7. Conectar a los Profesores en Formación con las organizaciones de la comunidad de Educadores Matemáticos y sus medios de comunicación.*

Se establecen dos bloques temáticos. El primer bloque, fundamentación y marco de referencia, es de carácter psicológico y pedagógico. Incluye el estudio y reflexión sobre el sistema educativo, la educación matemática y los educadores matemáticos, el currículo oficial de matemáticas para secundaria y bachillerato, las metas generales de la educación matemática, el aprendizaje de las matemáticas, la resolución de problemas y los objetivos, los contenidos, los métodos de enseñanza y la evaluación de las matemáticas escolares de secundaria y bachillerato. En el segundo bloque, análisis didáctico y diseño de unidades didácticas para los contenidos del currículo de educación secundaria y bachillerato en matemáticas, se realiza “el análisis didáctico de cada uno de los bloques de conocimientos que forman el currículo de matemáticas en la enseñanza secundaria y bachillerato” (p. § III.2.1). El programa presenta un listado de veintinueve temas del currículo de matemáticas para secundaria y bachillerato.

El esquema metodológico sugiere la presentación de información por parte del profesor, la presentación de trabajos por parte de los futuros profesores y el debate sobre los temas y materiales presentados. Se fomenta el trabajo en grupo. Se espera que los futuros profesores participen en la preparación y redacción de documentos, en el desarrollo de un tema concreto relativo a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en el diseño de un material o recurso didáctico para el aprendizaje de un tema y en la programación de un tema para alumnos de secundaria o bachillerato. La asignatura tiene una carga docente de tres horas semanales, durante todo el curso académico.

En su proyecto docente, Rico (1992) desarrolla en detalle cada uno de los temas del programa, con objetivo general, contenidos, bibliografía básica, otros materiales, actividades, metodología y evaluación. En el desarrollo del segundo bloque sobre análisis didáctico y diseño de unidades didácticas, Rico establece que el objetivo es el de disponer y utilizar elementos de información para el desarrollo curricular completo de un tema. Se espera que los futuros profesores produzcan un documento teórico en el que estructuren y resuman la información que han seleccionado sobre el tema. Los futuros profesores deben trabajar en grupos de cuatro o cinco personas. Los grupos de futuros profesores deben presentar ante la clase un resumen de su documento teórico y del diseño del tema que les ha correspondido. Rico introduce la idea de “elementos organizadores” que permiten “a los alumnos buscar y organizar la información para que ellos, posteriormente, puedan realizar el desarrollo curricular de cada tópico”. Estos elementos organizadores son: 1. ubicación y tratamiento de los contenidos del tema en el Diseño Curricular del Ministerio y en los documentos elaborados por la Comunidad Autónoma Andaluza; 2. conceptos, procedimientos, estrategias y actitudes; 3. fenomenología de los conocimientos; 4. modelos, representaciones, materiales y recursos; 5. errores y dificultades; 6. desarrollo histórico del tópico; y 7. bibliografía de referencia.

3.2. La Asignatura en 1999

En el período entre 1992 y 1997, el grupo de investigación liderado por Luis Rico en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada desarrolló un marco conceptual sobre la teoría curricular en matemáticas (Rico, 1997e) y propuso un esquema de trabajo para el diseño y desarrollo curricular de las matemáticas de la educación secundaria (Rico et al., 1997a). Este trabajo im-

plicó cambios en el diseño de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato.

En el nuevo diseño ya no se habla de metas; se habla de una finalidad: “Iniciar la formación del estudiante de la Licenciatura de Matemáticas como profesor de secundaria mediante la Didáctica de la Matemática es la principal finalidad de esta asignatura” (Rico y Segovia, 1999, p. 1). Algunos de los objetivos se redactan de manera diferente y aparecen unos nuevos, entre los que se destacan los siguientes: “2. Conocer la dinámica de los procesos de innovación curricular, tipologías de currículo y proyectos curriculares de matemáticas en curso. 3. Conocer y analizar las diferentes finalidades de la enseñanza de las matemáticas. 4. Establecer fundamentos para el currículo de matemáticas en la Educación Secundaria, analizando sus dimensiones y niveles. 5. Determinar diferentes campos conceptuales mediante los que organizar el diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas” (p. 1).

Al parecer, el análisis más profundo y estructurado de la noción de currículo y de su función en el análisis de las matemáticas escolares implicó la aparición de nueve temas nuevos en el bloque de fundamentación. En este momento ya se habla de “organizadores del currículo” (Rico, 1997c) y algunos de ellos son objeto de presentación y análisis dentro de dicho bloque (fenomenología, modelos, representaciones y materiales). El programa no presenta cambios en el bloque correspondiente al análisis didáctico y el diseño de unidades didácticas.

Yo participé, como asistente, en la segunda parte del desarrollo de la asignatura durante el curso 1999-2000. Percibí, en la práctica, algunas de las características de la cultura académica de la universidad española. En particular, con excepción de la presentación de resúmenes de lecturas por parte de grupos de alumnos, el bloque de fundamentación se desarrolló en un esquema en el que el profesor presentaba, con la ayuda de transparencias, gran cantidad de información esencialmente teórica, mientras que la principal actividad de los futuros profesores consistía en intentar copiar o resumir el contenido de dichas transparencias. Por otro lado, también percibí las dificultades de los futuros profesores para adaptarse a esquemas de trabajo contrarios a la tradición que ellos habían vivido durante los cuatro cursos anteriores. Ellos se encontraban, por primera vez en su carrera académica, con la responsabilidad de trabajar en grupo y de presentar trabajos en clase.

4. DISEÑO CURRICULAR DE LA ASIGNATURA EN EL CURSO 2000—2001¹¹⁹

El documento que se entrega a los futuros profesores al comienzo del curso y que describe el diseño de la asignatura no cambió del curso 1999-2000 al curso 2000-2001. No obstante, el diseño y el desarrollo de la asignatura¹²⁰ presentaron cambios importantes que quedaron registrados en una publicación (Gómez, 2002b), en un documento de trabajo (Gómez, 2001b) y en las transparencias utilizadas por los formadores durante el desarrollo de la asignatura. En la primera sección de este

¹¹⁹ En el curso 2000-2001 compartí con Luis Rico la responsabilidad de formador en la asignatura.

¹²⁰ En particular, de su segundo cuatrimestre, que estuvo a mi cargo.

apartado describo los cambios más relevantes del diseño de la asignatura. En seguida, hago una presentación global del diseño. Finalmente, fundamento el diseño de la asignatura en las ideas que he desarrollado en los capítulos anteriores.

4.1. Visión Funcional de la Formación Inicial de Profesores

La mayoría de los cambios que se introdujeron en la asignatura en el curso 2000-2001 tienen que ver con el trabajo que, durante 2000, realizamos para dar un fundamento conceptual a la noción de análisis didáctico, tal y como la presenté en el capítulo 2. Esta conceptualización de las actividades que se espera que el profesor realice para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas, permite introducir, de manera explícita, una visión funcional de la formación de profesores, aproximación que he destacado y descrito con algún detalle en los capítulos 2 y 3 de este documento. Esta visión funcional se resume en la Figura 32. El diseño de un plan de formación (en este caso, el segundo bloque de la asignatura) se fundamenta en la enumeración de unos conocimientos y capacidades del profesor (el conocimiento didáctico) y en una posición con respecto a cómo los futuros profesores pueden desarrollar ese conocimiento dentro del plan de formación (aprendizaje de los futuros profesores). La identificación de los conocimientos y capacidades que se consideran relevantes surge de la conceptualización de las actividades del profesor a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas (el análisis didáctico), como lo ejemplifiqué en el capítulo 3. Por otro lado, describí nuestra posición sobre el aprendizaje de los futuros profesores en el capítulo 4.

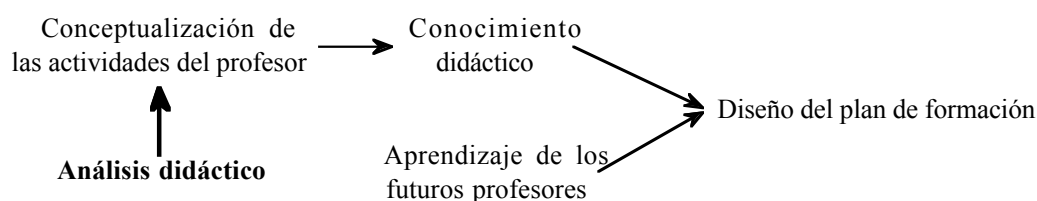


Figura 32. Conceptualización del plan de formación

Esta conceptualización de la formación de profesores dio lugar a que, dentro de la asignatura, se hiciera un mayor énfasis en el diseño de unidades didácticas, como una de las dos finalidades de la misma. La asignatura pretende contribuir a la formación de los futuros profesores con vistas a su práctica docente futura. De las diferentes “tareas profesionales” del profesor (Llinares, 2005) y sus correspondientes competencias (Rico, 2004c), nosotros concentramos nuestra atención en la planificación. Es decir, nos preocupamos por las competencias y capacidades necesarias para el diseño de unidades didácticas. El esquema metodológico para desarrollar estas competencias y capacidades se basó en un proceso de simulación (Van Der Valk y Broekman, 1999), en virtud del cual los grupos de futuros profesores debían producir, al final de la asignatura, el diseño de una unidad didáctica sobre un tema concreto. Este trabajo generó y fue fruto de un proceso de reflexión y se desarrolló con la ayuda de unos fundamentos conceptuales (la noción de currículo y los fundamentos de las matemáticas escolares) y de unas herramientas conceptuales y metodológicas (los organizadores del currículo). Los organizadores del currículo eran los instrumentos con los que los grupos de futuros profesos-

res recogían y organizaban la información que les permitió realizar los diferentes análisis que conforman el análisis didáctico (ver Figura 33¹²¹)

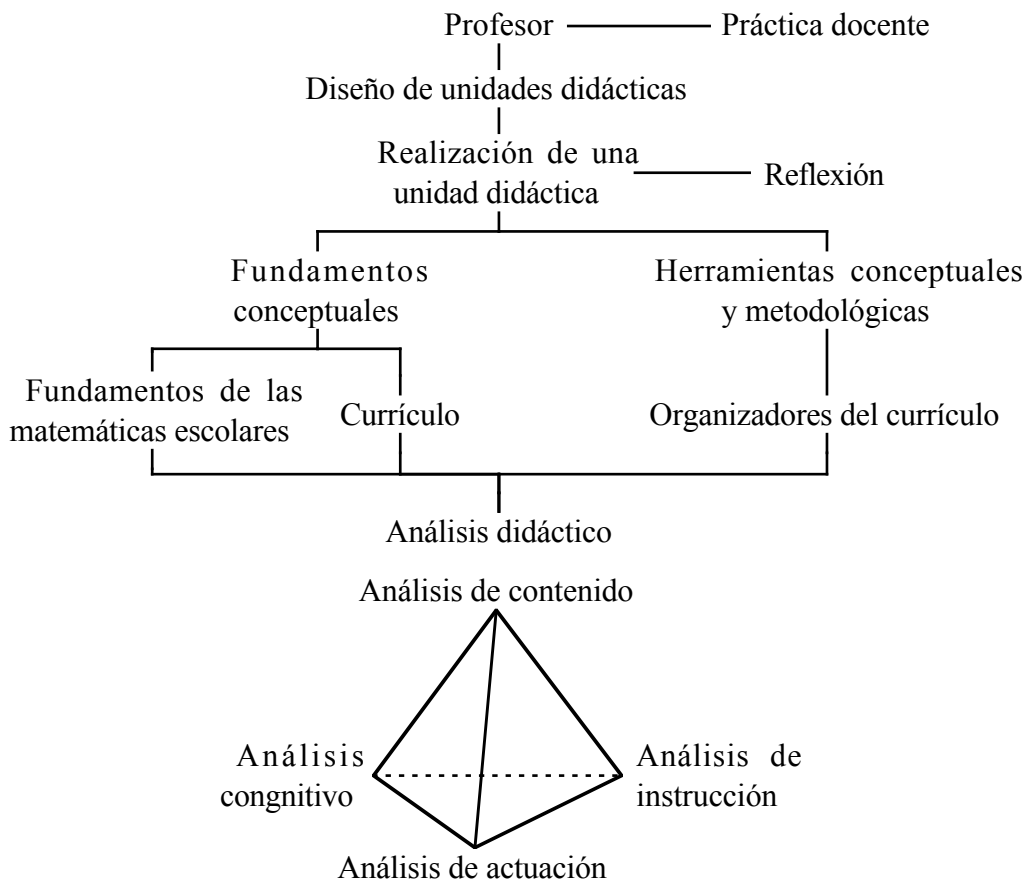


Figura 33. Esquema general del bloque sobre análisis didáctico

Además de los cambios conceptuales que acabo de mencionar, en este curso se introdujo un nuevo esquema metodológico, consecuencia de la modificación en nuestra posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores (ver capítulo 4). Decidimos enfatizar el carácter social de la construcción de significados por parte de los grupos de futuros profesores. Por lo tanto, el trabajo en grupo ya no era solamente un propósito de formación (preparar a los futuros profesores para el trabajo en el seminario del departamento de matemáticas de la institución), sino que era además el entorno primordial en el que se inducía el aprendizaje de los grupos de futuros profesores. Al enfatizar la importancia de la práctica y al destacar el papel de los conceptos como herramientas para abordar problemas de esa práctica, cambiamos también la manera como introducíamos y trabajábamos cada uno de las nociones que conformaban el contenido de este bloque de la asignatura. En particular, y para cada uno de los organizadores del currículo, redujimos el discurso teórico por parte de los formadores y aumentamos los esquemas de trabajo en los que los significados de estos conceptos se construían socialmente. En Gómez (2001b) propuse estos cambios:

¹²¹ Ésta es una adaptación de una de las transparencias con las que se describió estas ideas a los futuros profesores al comienzo del segundo bloque de la asignatura.

Nos referiremos a un organizador del currículo, como una “herramienta” (conceptual y metodológica) para el análisis del contenido a enseñar y el diseño de unidades didácticas. La segunda parte de la asignatura estará compuesta por módulos, uno por cada uno de los organizadores del currículo. Los alumnos estarán organizados en grupos. Cada grupo tendrá asignado un tema del currículo de secundaria sobre el que trabajará a lo largo de la asignatura y sobre el que hará el trabajo final de la misma.

Objetivos

La asignatura tiene unos objetivos globales que no se presentan aquí. Presentamos los objetivos particulares para un módulo dado... Estos objetivos se enumeran en términos de crear espacios o situaciones para que:

- a) los alumnos pongan en juego su conocimiento matemático, sus ideas intuitivas sobre la herramienta y sus creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje;*
- b) los alumnos utilicen la herramienta para analizar el contenido matemático que les corresponde;*
- c) los alumnos vean la necesidad de conceptualizar técnicamente el significado intuitivo que le asignan a la herramienta;*
- d) los alumnos presenten el resultado de su trabajo;*
- e) los alumnos discutan sobre su trabajo y el de otros grupos y vean la necesidad de construir un significado común;*
- f) los alumnos vean la necesidad de relacionar el significado que se le da a la herramienta en cuestión con el significado construido para las herramientas trabajadas con anterioridad;*
- f) los alumnos y los profesores lleguen a un acuerdo sobre el significado que se le va a dar a la herramienta.*

Contenido

El contenido de cada módulo estará centrado en un organizador del currículo y en su relación con los organizadores del currículo que se hayan trabajado previamente....

Metodología

Cada módulo tendrá asignada una sesión de dos horas (el jueves) y una sesión de una hora (el martes).

Sesión martes

La primera sesión comienza con una presentación por parte del profesor acerca de la herramienta. En esta presentación el profesor ubicará la herramienta con respecto a las herramientas previamente estudiadas y dará una primera idea de su importancia desde el punto de vista didáctico. El profesor hará una presentación esquemática del significado de la

herramienta y presentará un ejemplo corto de la utilización de la herramienta para un tema específico. Por ejemplo, presentará un resumen de la manera como se pueden utilizar los sistemas de representación para analizar y describir el contenido matemático relacionado con la función lineal.

A continuación, el profesor le pedirá a los alumnos que trabajen en grupos y que analicen otro contenido matemático (por ejemplo, la función cuadrática), utilizando la herramienta en cuestión. Les dará quince minutos para este trabajo. En seguida, creará un espacio para que los alumnos presenten sus ideas, anotándolas en el tablero y buscando identificar las dificultades.

Al finalizar la sesión, el profesor informará a los alumnos acerca de la tarea para el jueves. Ésta consistirá en analizar el tema matemático que les corresponde con base en la herramienta en cuestión y teniendo en cuenta las herramientas que se han trabajado con anterioridad. Los alumnos deberán preparar un documento y una presentación de máximo diez minutos. El profesor indicará las lecturas que los alumnos podrán hacer si lo desean.

Sesión jueves

La sesión comienza con la presentación de los trabajos de tres o cuatro grupos (ver apartado de evaluación para el esquema de selección de las presentaciones). Antes del receso, el profesor abrirá la sesión de preguntas, comentarios y críticas. El problema a resolver en esta discusión es la determinación de los aspectos comunes de las presentaciones y de los demás trabajos realizados.

La segunda parte de la sesión continuará la discusión. El profesor buscará identificar los puntos centrales presentados en la discusión, junto con las dificultades encontradas. El profesor dará lugar a una nueva discusión acerca del significado de la herramienta. Con base en esta discusión construirá, conjuntamente con los alumnos, una conceptualización del significado de las herramientas, haciendo referencia la literatura sobre el tema.

Al finalizar la sesión, el profesor informará a los alumnos que la tarea para el martes consiste en presentar el documento en versión final acerca de la utilización de la herramienta en cuestión para su tema particular.

Evaluación

El profesor utilizará la siguiente información para evaluar el progreso de los alumnos, junto con sus errores y dificultades. Utilizará esa información tanto para modificar su actuación en clase, como para valorar el trabajo de los alumnos. La información es la siguiente:

- Documento borrador del trabajo.*
- Documento en versión final del trabajo.*

- *Transparencias o preparación de la presentación.*
- *Presentaciones (para aquellos que la hayan hecho).*
- *Participación y aportación en clase.*

En este documento no se menciona un cambio importante en el componente de evaluación. Se trata de los comentarios escritos que uno de los formadores debía entregar a cada grupo con motivo de cada una de sus presentaciones. Los grupos debían recibir estos documentos en la sesión siguiente a su presentación. Se esperaba que en estos documentos, el formador identificara y caracterizara los errores y dificultades de cada grupo de futuros profesores y sugiriera caminos para superar dichas dificultades y avanzar en el trabajo.

4.2. Descripción del Diseño de la Asignatura

En esta sección organizo y resumo el diseño de la asignatura para el curso 2000-2001. Me baso en la información publicada en Gómez (2002b). El documento descriptivo de la asignatura que se entrega a los futuros profesores al comienzo del curso y el programa de la asignatura se encuentran en el Anexo B y el Anexo C, respectivamente.

Finalidad

La finalidad de la asignatura es la de contribuir a la iniciación de la formación del futuro profesor de matemáticas mediante la didáctica de la matemática. Los estudiantes de la asignatura (los futuros profesores) cursan quinto curso de la Licenciatura de Matemáticas y han optado por la Especialidad de Metodología.

Objetivos

En la asignatura se busca contribuir a la formación del futuro profesor en dos dimensiones: el inicio de su participación en las prácticas de la comunidad de educadores matemáticos y el desarrollo de los conocimientos y capacidades necesarias para la planificación de unidades didácticas. Desde la perspectiva de su contacto con la comunidad de educación matemática, se busca que los futuros profesores conozcan los antecedentes, los fundamentos y el desarrollo del currículo actual de matemáticas para la Educación Secundaria en España, teniendo en cuenta la historia del progreso de las matemáticas y de la educación matemática en el país y el contexto legal que regula ese currículo. Por otra parte, se pretende que el futuro profesor se inicie en las prácticas de las comunidades de innovación e investigación en didáctica de la matemática.

Al considerar que la asignatura, como esquema de formación en los procesos de planificación de unidades didácticas, es también una comunidad de práctica, se busca que los futuros profesores desarrollen su capacidad de participación en ella, a través de la construcción de los conocimientos y capacidades necesarios para realizar el análisis didáctico. Estos conocimientos y capacidades se concretan en el desarrollo del conocimiento didáctico: la construcción social de significados teóricos, técnicos y prácticos sobre los organizadores del currículo.

Contenidos

Los contenidos de la asignatura se organizan de acuerdo con el esquema de la Figura 34¹²². La asignatura se inicia con un análisis y reflexión sobre la historia de las matemáticas y de la educación matemática en España, que sirve de contexto para la discusión sobre los antecedentes del currículo de matemáticas en el país. La noción de currículo es la idea de base sobre la que se apoyan la mayor parte de los contenidos. Se discute sobre los fines de la educación matemática y se reflexiona sobre los niveles y dimensiones del currículo. Con esta referencia conceptual, se analizan algunos estudios y proyectos curriculares españoles e internacionales, se reflexiona sobre los antecedentes del currículo de matemáticas en España, y se estudia la organización general, los niveles de concreción y los contenidos del currículo de matemáticas para secundaria que se encuentra en vigor en la actualidad.

¹²² Ésta es una adaptación de una de las transparencias utilizada por los formadores al comienzo del curso.

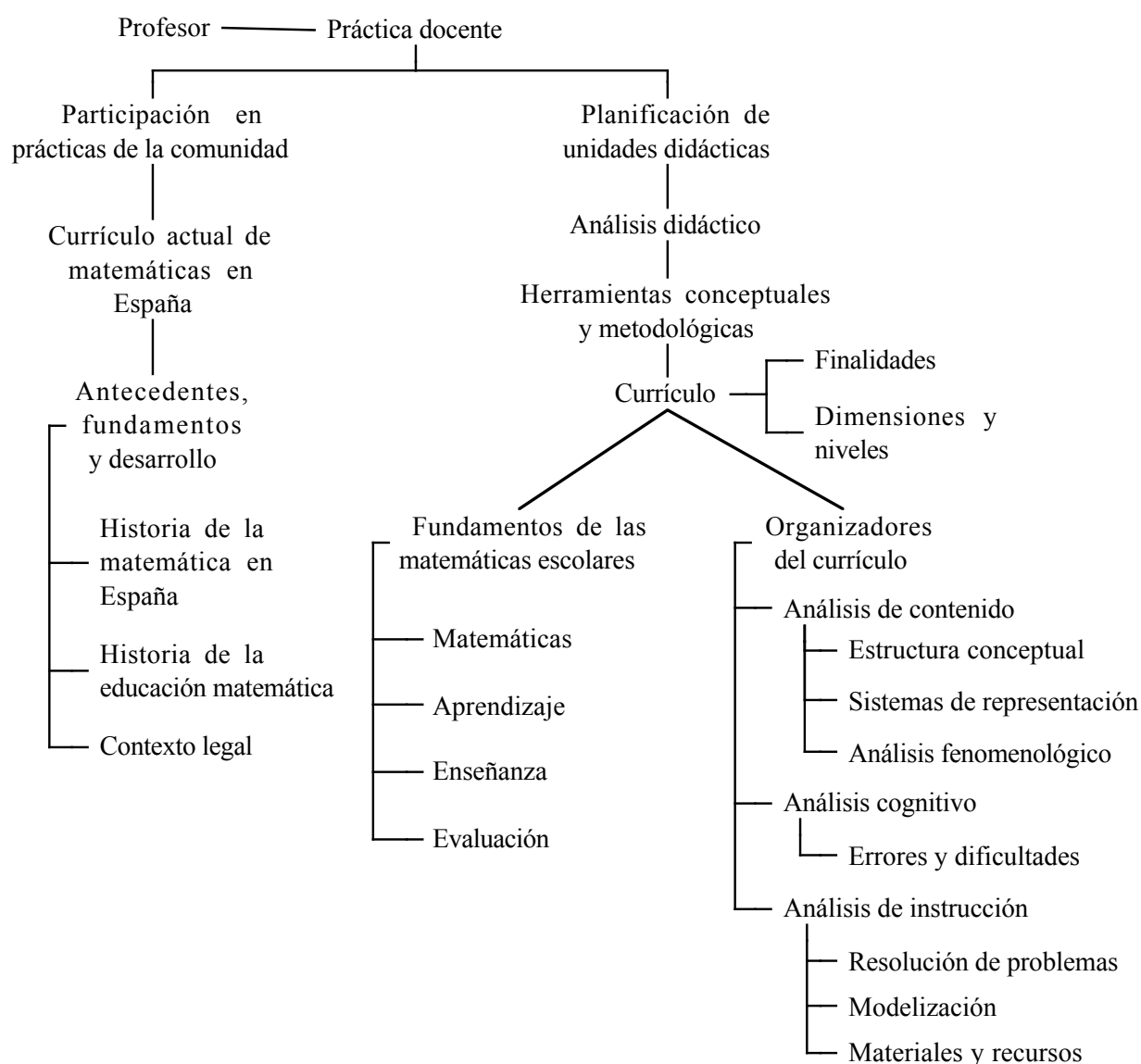


Figura 34. Estructura de contenidos de la asignatura

El tratamiento de los fundamentos de las matemáticas escolares surge de la consideración de la noción de currículo. Se analizan y discuten diversas posiciones acerca de las matemáticas como disciplina, de las matemáticas escolares, del aprendizaje y de la evaluación. La reflexión sobre la enseñanza se vuelve permanente una vez que se comienza a trabajar sobre las diferentes fases del análisis didáctico.

Además de incluir los fundamentos de las matemáticas escolares, el análisis didáctico organiza el tratamiento de los organizadores del currículo. Se considera un análisis conceptual general de cada uno de los organizadores del currículo, pero también se estudian las maneras como estas nociones adquieren significados específicos cuando se utilizan para analizar estructuras matemáticas concretas. La asignatura tiene por lo tanto un contenido matemático específico que se manifiesta en las estructuras matemáticas para las que se realiza el análisis didáctico. La función lineal, el teorema de Tales, la esfera, los números decimales y la simetría

son ejemplos de temas específicos de las matemáticas de secundaria en los que se puede trabajar dentro de la asignatura.

Recordemos que, para efectos del proyecto de investigación objeto de este documento, mi interés se centra en el tratamiento del análisis didáctico, en general, y del análisis de contenido, en particular. En el capítulo 2 presenté los significados de referencia para las diferentes nociones del análisis didáctico. Sin embargo, en el diseño de la asignatura para el curso 2000-2001 no se consideran todas las nociones que incluí en dicho capítulo, como se evidencia en el esquema de la Figura 34. En particular, en esta versión de la asignatura no se trataron las nociones de competencia y capacidad y el análisis cognitivo se centró en el análisis de los errores y dificultades de los escolares. Los análisis de instrucción y de actuación se basaron, por lo tanto, solamente en este aspecto del análisis cognitivo. Aunque en esta versión de la asignatura no se discutió en profundidad sobre la noción de significado de un concepto matemático, los significados de referencia que los formadores propusieron para el análisis de contenido son aquellos que presenté en el capítulo 2.

Metodología

La metodología que se utiliza en la asignatura se puede organizar en tres esquemas¹²³. El primero se refiere a la negociación de significados sociales sobre nociones generales de la didáctica de la matemática. Éste es el caso, por ejemplo, de la noción de currículo. Los futuros profesores, individualmente o en pequeños grupos, leen documentos de referencia y preparan trabajos escritos y presentaciones de resumen y análisis de estos documentos. Con base en estas presentaciones, se realizan discusiones en clase en las que, con la guía de los formadores, se busca que los futuros profesores progresen en su construcción de los significados de esas nociones. En algunos casos, los formadores organizan y presentan la información relevante al tema, como medio para establecer esos significados y marcar pautas sobre las normas que rigen ese discurso. En otras ocasiones, estas normas (significados) surgen de los futuros profesores a partir de sus “intuiciones didácticas” (Gómez, 2001a). En esos casos, se pide a los futuros profesores que reflexionen sobre una noción o un problema y que individualmente propongan una descripción de la noción o una solución al problema. En seguida se les induce a que, en pequeños grupos, comparen las propuestas, identifiquen diferencias y similitudes, negocien esos significados y busquen un consenso. Finalmente, cada grupo presenta su descripción o solución y estas propuestas se discuten entre todos con el propósito consolidar significados sociales que describan la noción o aporten soluciones al problema original.

El segundo esquema metodológico general se utiliza de manera sistemática en la simulación del proceso de planificación de una unidad didáctica. Cada grupo de futuros profesores escoge un tema matemático sobre el que realiza el análisis didáctico y diseña una unidad didáctica. El esquema es cíclico. Cada ciclo corresponde a un organizador del currículo. El orden secuencial en el que se tratan los organizadores del currículo sigue el esquema presentado en la Figura 34. Por ejemplo, el análisis de contenido comienza con el tratamiento de la estructura

¹²³ Utilizo el tiempo presente para facilitar la lectura, aunque en esta sección describo los esquemas metodológicos que se utilizaron en la asignatura durante el curso 2000-2001.

conceptual, sigue con la puesta en juego de los sistemas de representación y finaliza con el análisis fenomenológico. La Figura 35 presenta el esquema básico de un ciclo del esquema metodológico que utilizamos y que describí en la sección anterior.

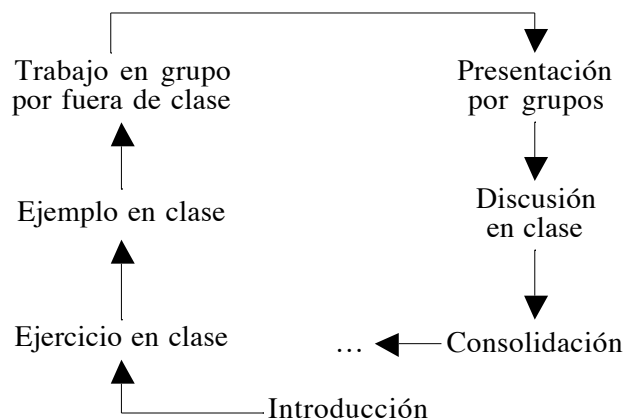


Figura 35. Ciclo metodológico de tratamiento del análisis didáctico

El ciclo parte de la discusión con la que finaliza el ciclo anterior. En general, esta discusión (por ejemplo, sobre los sistemas de representación) da lugar a la introducción de una nueva noción (por ejemplo, la noción de fenomenología). A partir de esta introducción, proponemos un ejercicio en clase, que consiste en la utilización de dicha noción a una estructura matemática predeterminada o a la estructura matemática en la que cada grupo está trabajando. Los grupos presentan sus propuestas y se discuten posibles significados de la noción en su aplicación práctica. A continuación, los formadores presentamos un ejemplo de la utilización de la noción a una estructura matemática específica (diferente de las que tienen asignadas los grupos) y les pedimos que, para la siguiente sesión de clase, pongan en juego esta noción (y las que se han considerado hasta ese momento) a su estructura matemática. En la siguiente sesión, cada grupo presenta los resultados de su trabajo al resto de la clase. Compañeros y profesores comentan y critican cada presentación. Al final, los formadores promueven una discusión en la que buscan formular preguntas y actividades que aborden los errores y dificultades detectados en las presentaciones. En algunas ocasiones, los formadores sugieren aspectos del significado de referencia de la noción con la que se está trabajando. El final del ciclo tiene dos partes. Por un lado, los formadores parten de la discusión anterior para motivar la introducción de una nueva noción. Por el otro, uno de los formadores revisa cada una de las producciones y produce un documento con sus comentarios y sugerencias. Los futuros profesores reciben ese documento durante la siguiente sesión.

Cuando queremos abordar errores o dificultades específicos para los que percibimos que hay una diversidad de posibles posturas por parte de los futuros profesores, utilizamos una variación del esquema que acabamos de presentar. Denominamos a este esquema “*subjetivo → intersubjetivo → objetivo*”, para referirnos a los tipos de conocimientos que se movilizan y a la manera como estos conocimientos se relacionan entre sí. Se trata de un ejercicio en el que formulamos una pregunta o un problema y pedimos a los futuros profesores que

reflexionen individualmente sobre esa pregunta o ese problema. Con base en el resultado de esas reflexiones, les sugerimos que trabajen en grupo, comparen sus posturas individuales y busquen llegar a una posición consensuada que después presentan al resto de la clase. Una vez presentadas estas propuestas, los formadores buscamos promover una discusión en clase con el propósito de comparar los diferentes significados propuestos, abordar los errores y dificultades que se pueden percibir a partir de ellos, y promover la consolidación de un significado social que se aproxime al significado técnico que sugiere el conocimiento disciplinar de referencia.

Estos esquemas buscan simular nuestra visión de lo que debería ser la participación del futuro profesor en el trabajo de la institución educativa. Para ello, buscamos convertir el aula en el espacio en el que se conforma y evoluciona una comunidad de práctica que tiene identificados unos problemas que quiere resolver y unas herramientas conceptuales y metodológicas (los organizadores del currículo que conforman el conocimiento didáctico) para abordarlos. El discurso del aula gira alrededor de los significados de estas nociones, tanto desde un punto de vista conceptual, como desde la perspectiva de su utilización en la resolución de un problema práctico (el diseño de una unidad didáctica). Buscamos, como formadores, motivar y guiar el progreso de los futuros profesores en su participación en las prácticas de esta comunidad, a través de la negociación de las normas que rigen el discurso y que determinan los significados que se construyen socialmente en el aula.

Podemos identificar dos comunidades de práctica. Estas comunidades se han hecho explícitas en los esquemas presentados más arriba. El trabajo en grupos de 3 a 5 futuros profesores es una comunidad de práctica en la que cada futuro profesor aporta sus metas, significados y motivaciones a la resolución de un problema común. Los miembros del grupo deben negociar sus diferentes posturas con el propósito de llegar a una solución común que es presentada al resto de la clase y es comparada con las soluciones de los otros grupos. Como formadores, nosotros esperamos que el interés por pertenecer y representar activamente al grupo motive a cada futuro profesor a progresar en su participación en esta negociación que, partiendo de unos significados individuales, busca construir unos significados sociales. Por el otro lado, promovemos también la comunidad de práctica del aula en la que los futuros profesores, ya sea como individuos o como miembros de un grupo, presentan y defienden sus posturas y critican las propuestas de los demás. En esta negociación de significados, que va determinando las normas que regulan el discurso del aula, nosotros proponemos situaciones y problemas que buscan explicitar las dificultades de grupos e individuos y aproximarlos a los significados de referencia.

Evaluación

Cuando miramos el aula como una comunidad de práctica y consideramos el aprendizaje como el progreso en la participación en esa comunidad, la evaluación se expresa como un componente curricular que está presente permanentemente en todos los aspectos del proceso de formación. Al aceptar que hay un problema común que se busca resolver y que hay herramientas conceptuales y metodológicas que permiten abordarlo, y al compartir sus producciones con el

resto de la clase y negociar los significados sociales que rigen el discurso del aula, individuos y grupos pueden reconocer las cualidades y deficiencias de sus contribuciones. El discurso del aula gira alrededor de los significados que individuos y grupos movilizan para resolver los problemas. Por lo tanto, estos significados se encuentran permanentemente evaluados, comentados y criticados. Esta evaluación tiene lugar en las dos comunidades de práctica. Como formadores, guiamos el discurso del aula para resaltar los logros y las deficiencias de las contribuciones propuestas, teniendo en cuenta el conocimiento didáctico de referencia. Por otra parte, para cada producción escrita de los futuros profesores (documento o transparencia de una presentación) producimos un documento en el que formulamos nuestros comentarios, críticas y sugerencias.

La valoración del trabajo de los futuros profesores es el resultado de la valoración de todas sus producciones y de la apreciación de los formadores de la manera como cada futuro profesor progresa en su participación en la comunidad de práctica del aula. Damos especial atención al trabajo y la presentación final en la que cada grupo presenta y justifica el diseño de la unidad didáctica en su tema.

5. FUNDAMENTACIÓN DEL DISEÑO

En su proyecto docente, Rico (1992) describe en detalle el contexto en el que tenía lugar la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato en ese momento y muestra cómo su propuesta de diseño curricular era coherente con dicho contexto. La mayoría de los rasgos relevantes de este contexto seguían siendo los mismos en 2000 y el diseño de la asignatura, aún con los cambios que he enumerado en el apartado anterior, mantenía la coherencia original. No obstante, en la concepción y el diseño curricular de la asignatura para el curso 2000-2001 se hicieron explícitas algunas cuestiones que complementan la fundamentación del diseño de la asignatura propuesta originalmente por Rico.

La noción de análisis didáctico se encuentra en el centro de esa fundamentación. Como lo justifiqué en el capítulo 2, el análisis didáctico, como una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas, aborda la paradoja de la planificación y permite cerrar la brecha entre la planificación global (de una asignatura) y la planificación local (de una unidad didáctica o una hora de clase). Al poner en el foco de atención estas dos cuestiones, destacamos dos aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por un lado, centramos nuestra atención en una de las competencias del profesor (la planificación). Por el otro, proponemos una estrategia para abordar la problemática de la enseñanza de las matemáticas cuando se asume una posición constructivista del aprendizaje de los escolares. En otras palabras, al destacar el papel del análisis didáctico en las actividades del profesor y en la formación inicial de profesores, tomamos partido: partimos de una posición con respecto a cómo los escolares aprenden matemáticas en el aula y proponemos una visión ideal de cómo se debería desarrollar la enseñanza.

Al describir y estructurar los procedimientos que idealmente el profesor debería realizar para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas, establecemos uno de los pivotes de nuestra concepción de la formación de profesores de matemáticas de secundaria. Hacemos explícita nuestra posición con respecto a lo que consideramos una de las finalidades fundamentales de la formación inicial de

profesores de matemáticas de secundaria: contribuir al desarrollo de los conocimientos y capacidades necesarios para realizar el análisis didáctico.

Nuestra visión sobre el aprendizaje de los futuros profesores es el segundo pivote de la concepción de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la que se basa el diseño de la asignatura para el curso 2000-2001. Hemos asumido una posición de constructivismo social, tal y como la describí en el capítulo 4.

Estos dos pivotes fundamentan el diseño curricular que describí en el apartado anterior. La caracterización de los procedimientos que conforman el análisis didáctico y de los significados de referencia de los organizadores del currículo implicados en esos procedimientos (capítulo 2) me permitió identificar y estructurar las capacidades necesarias para la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria y por consiguiente concretar el conocimiento didáctico de referencia que esperamos que los futuros profesores desarrollen dentro de la asignatura (sección 2.3 del capítulo 3). De esta manera, al asumir una visión funcional de la formación inicial de profesores (ver Figura 32), fundamentamos los objetivos y los contenidos del segundo bloque de la asignatura. Por otro lado, y como lo argumenté en el apartado anterior, los esquemas metodológicos y de evaluación propuestos en el diseño se fundamentan en nuestra posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores (ver Figura 36).

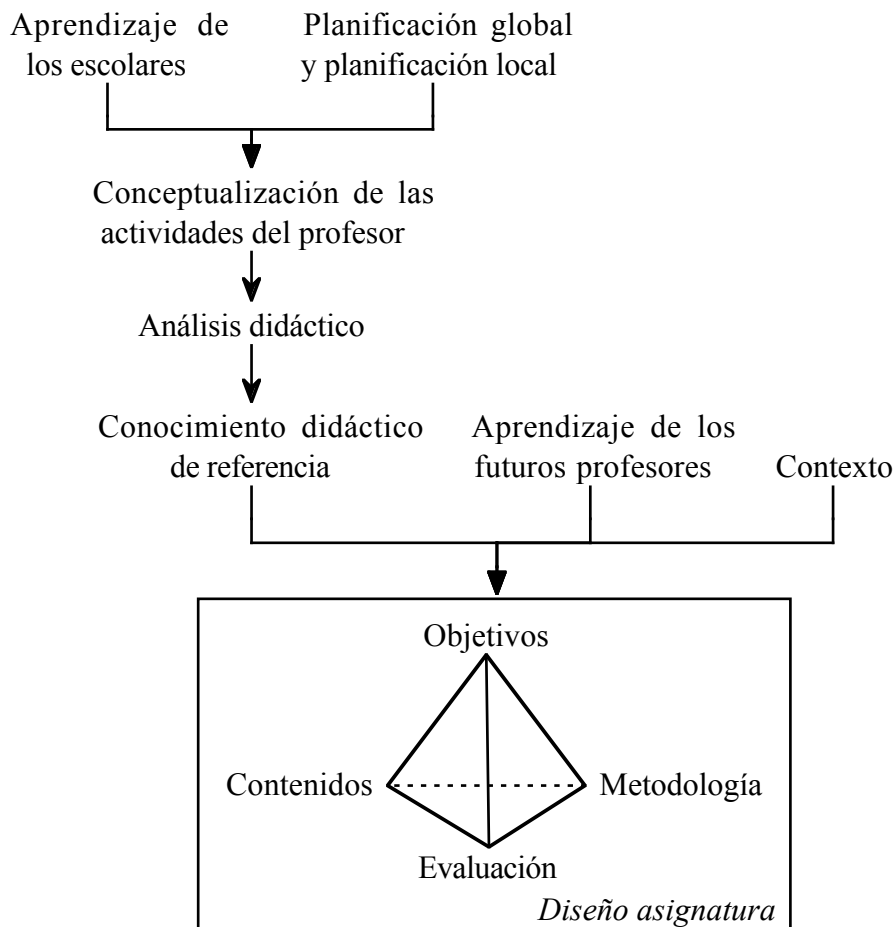


Figura 36. Fundamentación del diseño de la asignatura

LA ASIGNATURA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN EL BACHILLERATO DURANTE EL CURSO 2000-2001

El propósito de este capítulo es describir el desarrollo de la asignatura durante el curso 2000-2001. Éste fue el periodo en el que recogí la información para los estudios que conforman la dimensión empírica de este proyecto de investigación. Dado que estos estudios exploran diversos aspectos del aprendizaje de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura, resulta importante describir el desarrollo de la misma, puesto que este desarrollo configuró las experiencias que dieron lugar a dicho aprendizaje.

La información que utilizaré en este capítulo surge principalmente de tres fuentes. Utilizaré la transcripción parcial que realicé de las grabaciones de audio de todas las sesiones de clase. Esta información se complementa con los apuntes que realicé en aquellas sesiones en las que yo no participé como formador¹²⁴. Finalmente, haré referencia a tres tipos de documentos: las transparencias utilizadas por los formadores en sus exposiciones, las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores en sus exposiciones y los documentos que contienen los comentarios que, como formador, yo hice a cada una de las presentaciones y transparencias de los grupos de futuros profesores. He recogido y organizado esta información en un conjunto de bases de datos interconectadas, que describiré más

¹²⁴ Como ya lo he mencionado, durante el curso 2000-2001, compartí con Luis Rico la responsabilidad de impartir la asignatura, tanto en su diseño, como en su desarrollo. Adicionalmente, yo también actúe como investigador, siendo consciente de que debía tener cuidado en que este tercer papel no influyera negativamente en los dos primeros. En este capítulo, “LR” se refiere a Luis Rico y “PG” se refiere a Pedro Gómez. Otro estudiante de doctorado, José Ortíz, también asistió a todas las sesiones de clase.

adelante. En el Anexo D y el Anexo E incluyo dos versiones de las transcripciones de las sesiones de clase, como referencia para el lector que desee un mayor detalle. En el primero, se incluye, para cada sesión de clase, el contenido de la misma y la fecha de la sesión. En el segundo, incluyo la transcripción resumida de algunas de las sesiones y algunos comentarios a los eventos más relevantes de esas sesiones.

Éste es un capítulo de carácter descriptivo. Esto quiere decir que en este capítulo no pretendo analizar ni interpretar el desarrollo de la asignatura desde la perspectiva del aprendizaje de los grupos de futuros profesores. Este análisis e interpretación es el objeto de los diferentes estudios empíricos que presentaré más adelante en este documento. Tampoco presentaré en detalle todos los eventos que tuvieron lugar a lo largo de la asignatura. Presentaré, más bien, dos tipos de informaciones. Por un lado, caracterizaré el desarrollo de la asignatura en términos curriculares al comparar el tratamiento de los contenidos con lo previsto en el diseño; describiré los principales esquemas de trabajo en clase que se utilizaron; identificaré los esquemas de evaluación que se pusieron en práctica; y describiré el papel y la actuación de los formadores. Por el otro lado, y para efectos de esta caracterización, utilizaré algunos ejemplos provenientes de las grabaciones de audio y de documentos (transparencias y documentos entregados por los futuros profesores) utilizados durante la asignatura.

El capítulo está compuesto de tres apartados. En el primero, presento una visión general de la organización y el desarrollo de la asignatura durante el curso académico 2000-2001. En este apartado, centro la atención en el tratamiento de la secuencia de contenidos y en los esquemas metodológicos utilizados. En el segundo apartado, describo lo sucedido en las sesiones de clase y presento, a manera de ejemplo, la secuencia de transparencias utilizadas por uno de los grupos de futuros profesores en sus presentaciones a la clase. También incluyo los comentarios que, como formador, hice por escrito a esas presentaciones y transparencias. En el tercer apartado, describo la información adicional que se encuentra en los anexos.

1. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL DESARROLLO DE LA ASIGNATURA

En este apartado, presento una descripción general del desarrollo de la asignatura. Considero cuatro aspectos de este desarrollo. Primero describo cómo se organizó el trabajo y la interacción entre formadores y futuros profesores. Después analizo el tratamiento de los contenidos a lo largo del curso. En seguida, enumero los esquemas de trabajo que se utilizaron en la asignatura y estudio sus frecuencias a lo largo del tiempo. Finalmente, hago algunas reflexiones sobre la puesta en práctica de los esquemas de evaluación.

1.1. Organización General

En el curso 2000-2001 se inscribieron 36 futuros profesores en la asignatura, de los cuales 25 eran mujeres y 11 hombres. Todos ellos eran estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada y cursaban cuarto o

quinto curso de la Especialidad de Metodología. Las sesiones de clase tuvieron lugar en un aula de la Facultad de Ciencias.

En la primera sesión de clase, uno de los formadores (LR) hizo una descripción general del programa de la asignatura y entregó el documento correspondiente (este documento se incluye en el Anexo B). Los futuros profesores también recibieron el calendario del primer trimestre del curso (ver Anexo C). A lo largo de las primeras semanas, los futuros profesores se organizaron en ocho grupos: cinco grupos de cinco, dos grupos de cuatro y un grupo de tres integrantes. Estos grupos permanecieron estables a lo largo del desarrollo de la asignatura. Al inicio del segundo trimestre, cada grupo escogió un tema matemático sobre el que iba a desarrollar el análisis didáctico y producir el diseño de una unidad didáctica. Los temas escogidos fueron los siguientes: gráficas y funciones, progresiones, números decimales, probabilidad, cónicas, esfera, función cuadrática y sistemas de ecuaciones lineales.

1.2. Tratamiento del Contenido

Divido el desarrollo de la asignatura en cuatro períodos. El primero incluye el bloque temático sobre fundamentación y marco de referencia y abarca el primer trimestre (veintidós sesiones de clase). El segundo, corresponde a las siguientes once sesiones de clase e incluye la introducción del análisis didáctico y el tratamiento del análisis de contenido. El tercero corresponde a las siguientes veintiún sesiones de clase en las que se trabajó el resto del contenido sobre el análisis didáctico y el diseño de unidades didácticas. El cuarto corresponde a las cuatro sesiones de clase en las que los grupos de futuros profesores presentaron sus trabajos finales. Esta división es consecuencia de mi interés en la exploración del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores sobre el análisis de contenido.

El programa de la asignatura se siguió de manera estricta con retrasos que sólo llegaron a ser de una hora de clase. El esquema de módulos que presenté en el capítulo anterior y en virtud del cual los organizadores del currículo se trabajan de manera similar, se siguió estrictamente en el desarrollo del análisis de contenido. En los otros análisis del análisis didáctico el esquema se combinó con presentaciones de los formadores sobre teorías del aprendizaje, dificultades y errores, resolución de problemas y evaluación. Analizo estas diferencias en el tratamiento de los temas durante las sesiones de clase en la siguiente sección.

A continuación describo brevemente la secuencia de temas que se trataron a lo largo de los tres trimestres¹²⁵. La asignatura comenzó con la presentación de la historia de las matemáticas y de la educación matemática en España. Después se trató la historia del currículo entre los años setenta y noventa y la Ley General de Educación. En este momento, tuvo lugar la primera presentación de los grupos de futuros profesores sobre temas de la historia de la educación matemática en España. En seguida, comenzó la discusión sobre la noción de currículo: se reflexionó sobre los fines de la educación matemática y la complejidad, las dimensiones, los niveles y los componentes del currículo. A continuación se presentó la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo, “LOGSE”. El primer bloque de la asignatura

¹²⁵ El calendario detallado de la asignatura se encuentra en el Anexo C.

natura finalizó con una reflexión sobre aspectos cognitivos del currículo y presentaciones de los grupos de futuros profesores sobre innovaciones curriculares.

El segundo bloque se inició con la introducción y justificación de los organizadores del currículo. Se presentó la historia como primer organizador del currículo. En seguida, se comenzó el tratamiento del análisis de contenido: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Los grupos de futuros profesores hicieron cuatro presentaciones relacionadas con el análisis de contenido. Después se trabajó sobre modelización. El trabajo sobre análisis cognitivo comenzó con presentaciones sobre teorías de aprendizaje, errores, dificultades y obstáculos epistemológicos. Los grupos de futuros profesores hicieron una presentación sobre errores y dificultades. El trabajo en el análisis de instrucción se inició con la reflexión sobre la resolución de problemas. Los grupos de futuros profesores hicieron una presentación de una propuesta de actividad para su tema. Después se discutió sobre materiales y recursos y sobre la noción de metodología. En este momento, los grupos de futuros profesores hicieron una presentación sobre lecturas relacionadas con la resolución de problemas. El análisis de actuación se inició con la reflexión sobre la noción de evaluación. Los grupos de futuros profesores hicieron una presentación de una propuesta de una prueba de evaluación para su tema.

La asignatura terminó con la presentación de un ejemplo de análisis didáctico y de diseño de una unidad didáctica y con la presentación de los trabajos finales de los grupos de futuros profesores.

1.3. Esquemas de Trabajo

El análisis de las transcripciones de las grabaciones de audio de las sesiones de clase me permitió identificar y agrupar los tipos de interacción entre formadores y futuros profesores y el tipo de trabajo realizado durante la asignatura. Éstas son las formas de trabajo que he considerado relevantes desde la perspectiva del interés de investigación de este trabajo. A continuación describo cada uno de estos esquemas de trabajo, haciendo la aclaración de que, durante una sesión, pueden darse varios esquemas que interactúan entre sí. No pretendo profundizar en la estructura de estas formas de trabajo. Sólo quiero caracterizar de manera global el desarrollo de la asignatura con respecto a ellas.

1. *Presentaciones de los formadores.* En este esquema, el formador desarrolla un tema con la ayuda de unas transparencias. La mayor parte del tiempo el formador es quien habla; los futuros profesores escuchan y toman apuntes.
2. *Presentaciones de los grupos de futuros profesores.* Uno o más grupos de futuros profesores hacen una presentación al conjunto de la clase. En general, ellos utilizan transparencias para apoyar su presentación.
3. *Intervenciones complementarias de los formadores.* Cada sesión de clase estuvo a cargo de uno solo de los dos formadores. Sin embargo, el otro formador también participó en las discusiones. Califico como complementarias a estas intervenciones¹²⁶.

¹²⁶ Aquí también incluyo las intervenciones de José Ortíz, el estudiante de doctorado que asistió a las clases.

4. *Preguntas espontáneas de los futuros profesores y respuestas de los formadores.* En esta categoría recojo las intervenciones que los futuros profesores realizaron espontáneamente, cuando el formador realizaba su intervención.
5. *Búsqueda de preguntas, comentarios o dudas por parte de los formadores.* Estos son los eventos en los que el formador hace una pausa en su intervención para verificar si los futuros profesores tienen preguntas o dudas, o quieren hacer algún comentario.
6. *Interacciones entre futuros profesores y grupos de futuros profesores.* En esta categoría identifiqué aquellas ocasiones en las que se establece una discusión entre los futuros profesores, sin la intervención de los formadores.
7. *Ejercicios en clase.* Con este esquema, el formador propone un ejercicio que debe ser resuelto por los futuros profesores en la clase. En general, el formador sugiere que se trabaje primero de manera individual y después se formen grupos pequeños en los que se comparen las propuestas individuales y se llegue a un consenso. Finalmente, un representante de cada grupo presenta la propuesta del grupo, estas propuestas se comparan y se discuten con la participación de todos los asistentes.
8. *Comentarios a presentaciones de los grupos de futuros profesores.* Al finalizar sus presentaciones, los grupos de futuros profesores reciben comentarios en clase por parte de los formadores.
9. *Formulación de tareas.* En esta categoría incluyo los eventos en los que el formador formula el trabajo que los grupos de futuros profesores deben realizar para una sesión de clase posterior.

1.4. Actividades en clase

He analizado las transcripciones de las grabaciones de clase teniendo en cuenta las formas de trabajo que acabo de enumerar. Para cada hora de clase, determiné la proporción de tiempo que se dedicó en ella a cada forma de trabajo. En la Figura 37 aparece una descripción gráfica de la distribución de esos porcentajes a lo largo del desarrollo de la asignatura.

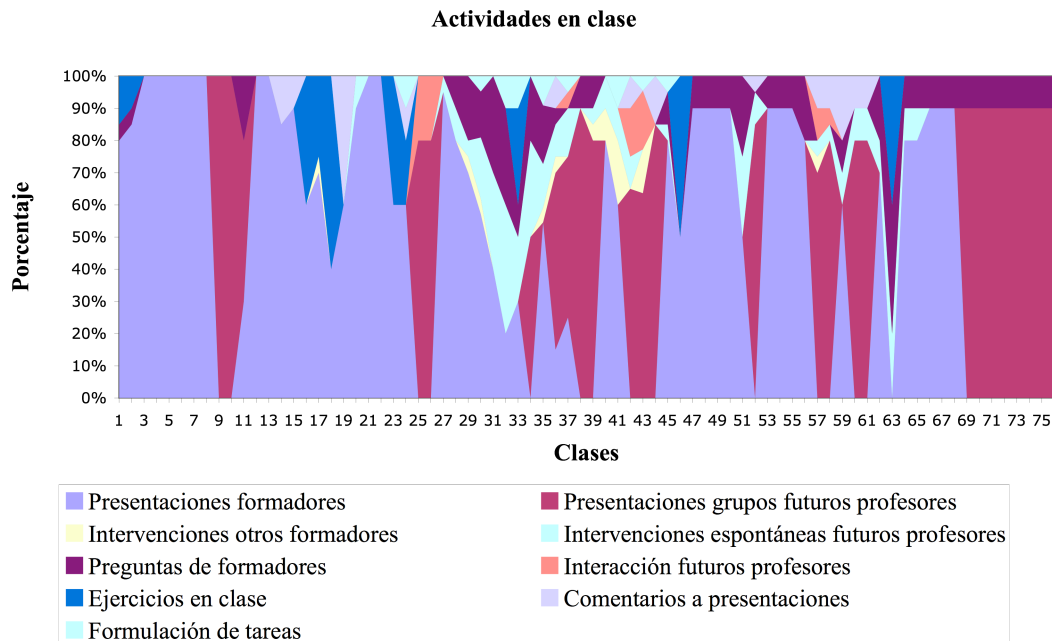


Figura 37. Esquemas de trabajo en el desarrollo de la asignatura

Las horas de clase se encuentran numeradas en el eje horizontal. Las horas de clase se pueden agrupar de acuerdo con los temas desarrollados (ver Tabla 9).

Horas	Tema
1 7	Historia de la educación matemática y leyes de educación
8 11	Presentaciones de grupos sobre historia de la educación matemática
12 18	Fines de la educación matemática, dimensiones y niveles del currículo
19 23	Leyes y decretos educativos
23 24	Cognición y currículo
25 26	Presentaciones de grupos de futuros profesores sobre innovaciones curriculares
27 31	Introducción a organizadores del currículo e historia
32 37	Estructura conceptual y sistemas de representación
38 39	Presentaciones de los grupos de futuros profesores sobre historia
40 44	Sistemas de representación y análisis fenomenológico
45 46	Modelización
47 52	Teorías de aprendizaje, errores y dificultades
53 63	Resolución de problemas y análisis de instrucción
64 65	Evaluación
66 68	Ejemplo de unidad didáctica
69 76	Presentación de trabajos finales

Tabla 9. Temas desarrollados agrupados por horas de clase

La Figura 38 presenta un resumen de la Figura 37. He agrupado las formas de trabajo en intervenciones de formadores (presentaciones de formadores e intervenciones de otros formadores), intervenciones de futuros profesores (presentaciones de los grupos), interacción de futuros profesores (preguntas de formadores, inter-

vención espontánea de futuros profesores e interacción de futuros profesores) y evaluación, ejercicios y tareas (comentarios a transparencias y presentaciones, ejercicios en clase y formulación de tareas).

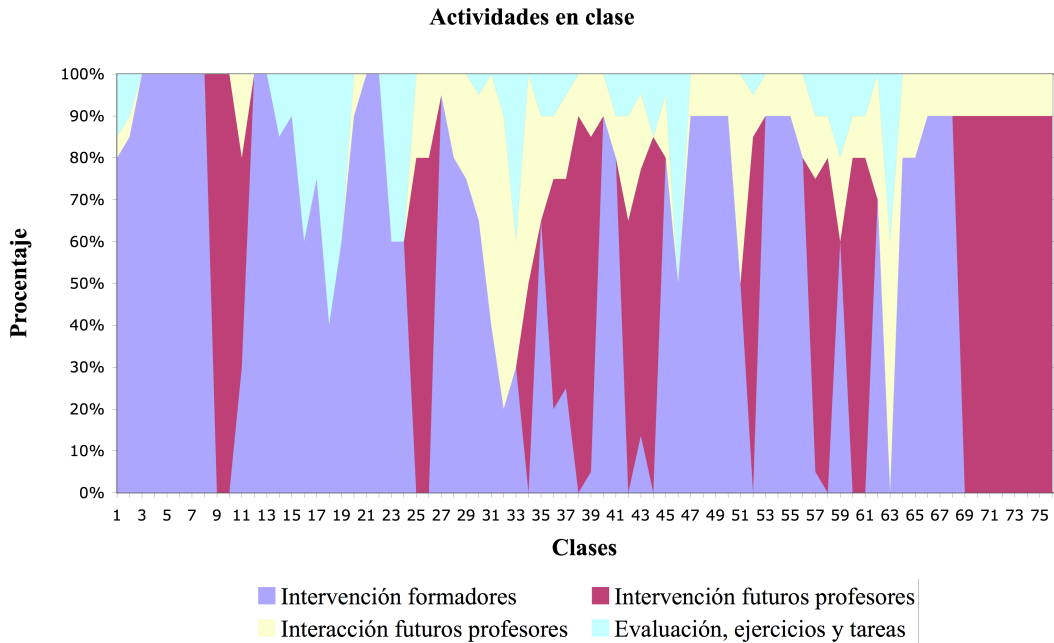


Figura 38. Temas desarrollados agrupados por horas de clase (resumen)

El análisis de la información en estas figuras permite clasificar las sesiones de clase en cuatro grupos de acuerdo con las formas de trabajo más utilizadas. El primer grupo corresponde al bloque de sesiones sobre fundamentación e incluye las primeras 31 sesiones de clase. En este grupo se aprecia un predominio las presentaciones de los formadores y de ejercicios en clase. En dos ocasiones los grupos de futuros profesores hacen presentaciones a la clase. Sin embargo, se aprecia poca interacción entre los futuros profesores. El segundo grupo corresponde a las sesiones sobre análisis de contenido e incluye las sesiones 32 a 46. En esta fase del desarrollo de la asignatura se reducen las presentaciones de los formadores y aumentan las presentaciones de los grupos de futuros profesores y las interacciones entre los futuros profesores. En la Figura 37 se aprecia que durante este período tuvo lugar una mezcla de una gran variedad de esquemas de trabajo. El tercer grupo corresponde al resto de las sesiones de clase sobre el análisis didáctico (sesiones 47 a 68). En este grupo de sesiones reaparecen las presentaciones de los formadores (sobre teorías de aprendizaje, errores y dificultades, resolución de problemas y evaluación), hay tres ocasiones en los grupos de futuros profesores hacen presentaciones y se mantiene un nivel de interacción entre ellos, inexistente en el primer grupo. En este tercer grupo también se incluyen las últimas sesiones de clase en las que uno de los formadores presentó un ejemplo de análisis didáctico y diseño de una unidad didáctica. El último grupo corresponde a las sesiones en las que los grupos de futuros profesores presentaron su trabajo final.

1.5. Evaluación en la Práctica

En el capítulo 5 describí el diseño del esquema de evaluación de la asignatura. Todos los trabajos y pruebas previstos en el calendario se realizaron en la práctica. La nota final de cada futuro profesor se obtuvo a partir de la información que recogimos a lo largo del curso con motivo de sus múltiples actuaciones y producciones y de nuestra apreciación sobre el progreso de los grupos y sus integrantes en el tiempo. Tal y como estaba previsto en el diseño, valoramos especialmente el esfuerzo invertido y la calidad del trabajo final de cada uno de los grupos de futuros profesores.

Dada la frecuencia y el número de intervenciones de los futuros profesores (en grupo e individualmente), pudimos evaluar sistemáticamente cada una de las sesiones de clase. Realizamos esta evaluación inmediatamente después de la sesión, en una reunión entre los formadores. En estas reuniones analizábamos los logros y deficiencias del diseño previsto para la sesión que acabábamos de realizar, nuestra actuación como formadores y las dificultades y progresos de los futuros profesores. A partir de los resultados de esta reflexión, los formadores ajustábamos el diseño de la siguiente sesión de clase a las circunstancias específicas que tenían lugar en ese momento.

Como ya lo mencioné anteriormente y se pondrá en evidencia en uno de los estudios empíricos (ver capítulo 10), los comentarios a las transparencias de los grupos de futuros profesores se constituyeron en uno de los medios más importantes de comunicación entre formadores y grupos de futuros profesores. Dado que estos comentarios eran específicos al trabajo de cada uno de los grupos, los futuros profesores tuvieron sistemáticamente información sobre la calidad de su trabajo y sobre cómo se esperaba que ellos lo mejoraran. En el Anexo F presento los comentarios que hice a las presentaciones y transparencias de los grupos de futuros profesores.

2. DESARROLLO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA ASIGNATURA

En este apartado presento información detallada sobre algunos aspectos del desarrollo de la asignatura. Esta información se refiere al segundo y al tercer trimestre, períodos en los que se trabajó el análisis didáctico. Agrupo las sesiones de clase por temas y hago una breve descripción de las actividades que se realizaron en clase en esas sesiones. Profundizo en dos aspectos del desarrollo de la asignatura que no se constatan en las transcripciones de las clases que presento en el Anexo E: la información contenida en las transparencias utilizadas por uno de los grupos de futuros profesores para hacer las diversas presentaciones de su trabajo y los comentarios que, como formador, hice a esas presentaciones y transparencias. Para ello, utilizo las notas que produjo durante la clase y los comentarios que registré al analizar los trabajos de cada uno de los grupos de futuros profesores.

La información contenida en las transparencias y las transcripciones de las grabaciones de clase son la fuente de información para dos de los estudios empíri-

cos que presentaré más adelante¹²⁷. He escogido las transparencias del grupo función cuadrática porque el trabajo en la casa de este grupo y los procesos de negociación y construcción de significados que dieron lugar a estas transparencias son el objeto de otro de los estudios empíricos (capítulo 10). En este estudio se pone en evidencia la importancia de los comentarios que hice a las presentaciones y transparencias de los grupos de futuros profesores. Por esa razón incluyo ejemplos de estos documentos en este apartado.

2.1. Estructura Conceptual

La primera sesión sobre estructura conceptual tuvo lugar el 15 de febrero de 2001 y comenzó con una revisión sobre los temas vistos en las sesiones anteriores. Hubo comentarios de los futuros profesores sobre el papel de la historia en la enseñanza de las matemáticas y sobre la estructura de los organizadores del currículo. El formador propuso un ejercicio, con el que buscaba que los futuros profesores expusieran sus ideas sobre el concepto de derivada:

*Digo derivada, ¿qué imagen mental tienen de esto? ¿Está ya escrito en la lista? Ahora trabajo por tríos, reuniendo las listas y tratando de organizarlas, relacionar, y caracterizar. ¿Qué tipos de elementos tenemos ahí? [39-B125]*¹²⁸

El formador observó el trabajo de los grupos y resolvió dudas. Propuso organizar las ideas que habían surgido. Los futuros profesores participaron activamente con propuestas diversas (entre ellas, la definición por límite de la noción de derivada). Varios futuros profesores manifestaron su preocupación por la enseñanza, pero el formador concretó el ejercicio en sus aspectos matemáticos. Apareció el interés por explorar las relaciones del concepto de derivada. Un futuro profesor observó que “tiene que estar todo relacionado porque tiene que ver con el concepto de derivada”. Otro futuro profesor estableció la diferencia entre el concepto de derivada y sus aplicaciones. Esta observación generó una discusión entre varios futuros profesores en la que se mencionaron aspectos didácticos e históricos del concepto. El formador insistió en la necesidad de centrarse en los aspectos matemáticos del concepto y en buscar organizar la información que se había obtenido. Se llegó al final de la sesión y el formador formuló el trabajo que había que realizar para la siguiente sesión:

cada concepto, desde el punto de vista matemático, involucra una estructura: elementos relacionados que permiten ver al concepto en cuestión. Independientemente de la enseñanza. Como matemáticos, debemos ser capaces de proponer una estructura. Ésta es una estructura. El número posible de elementos no está determinado. Si yo quisiera hacer la estructura con los 20 o 30 elementos más importantes, ¿cuáles son los más im-

¹²⁷ No presento en el cuerpo de este capítulo transcripciones de las grabaciones de clase porque presentaré la información relevante de este tipo en el capítulo del estudio empírico correspondiente (capítulo 9). Sí incluyo las transparencias de un grupo de futuros profesores porque su inclusión en el capítulo en el que se describe su análisis (capítulo 9) haría difícil su lectura.

¹²⁸ En [39-B125], 39 corresponde al número de identificación de la cinta de audio, A o B al lado de la cinta, y 125 a la posición del contador en el lugar en el que comienza la intervención que se transcribe.

portantes, qué quiero decir con más importantes, y cómo se relacionan entre sí?

Entonces, el martes, con esta idea muy general de lo que puede significar la estructura, vamos a hacer el siguiente ejercicio. Ustedes para el martes, en los ratos de descanso de los estudios para los exámenes, van a hacer lo siguiente. El esquema. Lo pueden hacer individualmente, o lo pueden hacer en grupo. El martes se va a presentar en grupo. Esto va a ser rapidito. Con esta idea general, ustedes van a hacer un primero intento de la estructura conceptual del tema que les corresponde. En junio, todos van a saber mucho. El ejercicio lo pueden hacer con cualquier tipo de información. Lo que sí me interesa particularmente es que lo que mostremos el martes, traiga estructura. Marina dice que se le ocurren dos formas. Una con la evolución histórica (de los fenómenos a lo formal) o, como se explica en la facultad, de lo formal a los fenómenos. Ni la una, ni la otra. Lo que nos interesa es qué es lo que hay en el concepto, matemática y estructuralmente hablando. [39-A300-A363]

En el comienzo de la siguiente sesión algunos futuros profesores hicieron comentarios y mencionaron dudas sobre la noción de concepto y la estructura conceptual. En particular, varios comentarios se centraron en el papel de la definición como medio para “dar a entender” un concepto. El formador (PG) les presentó una propuesta de estructura conceptual para la noción de derivada (ver Figura 39).

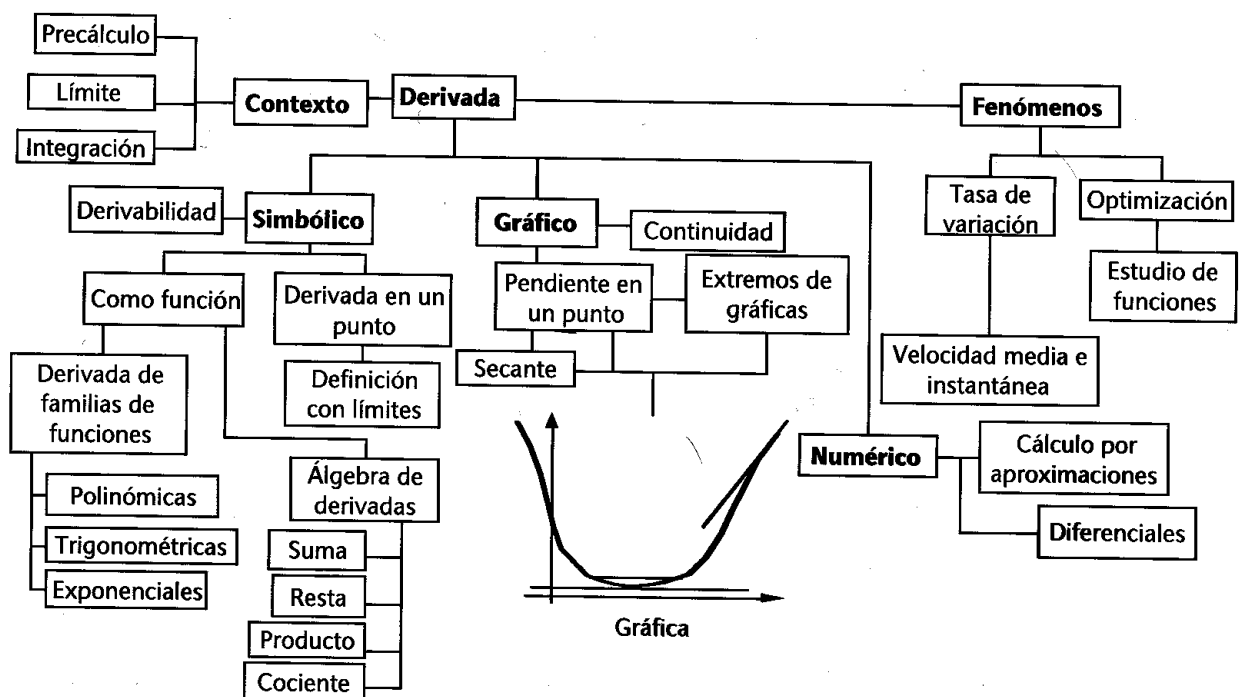


Figura 39. Propuesta del formador para la estructura conceptual del concepto de derivada

El formador sugirió a los grupos de futuros profesores que mejoraran lo que habían hecho como estructuras conceptuales de su tema. Los grupos de futuros profesores trabajaron en clase. En la segunda parte de la sesión, ellos presentaron el

resultado de su trabajo. En la discusión que surgió con motivo de estas presentaciones, un futuro profesor introdujo la idea de sistema de representación, lo que generó más intervenciones de otros futuros profesores que buscaron establecer la relación entre las nociones de concepto y de sistema de representación. Se identificó la noción de sistemas de representación como otro organizador del currículo. En la siguiente hora de clase, los grupos de futuros profesores presentaron sus propuestas para la estructura conceptual de su tema.

Transparencias del Grupo Función Cuadrática

El documento está compuesto por tres folios. Los dos primeros son los borradores que hicieron de tarea y el tercero es la transparencia que prepararon para la clase (Figura 40). En el primer folio se introduce la función $f(x) = x^2$ y $f(x) = (a + x)^2$ como áreas de cuadrados. Enseguida se expande $f(x) = (x + a)^2$ para llegar la forma general con notación de polinomio. Se menciona la continuidad. Se utiliza la fórmula cuadrática para hallar los ceros del polinomio. El análisis que sigue se centra en la gráfica: simetría con respecto al vértice. Se representan dos parábolas (cóncavas hacia arriba y hacia abajo) en las que se identifican las coordenadas del vértice en función de los parámetros de la forma estándar. Se afirma que “los puntos de máximo y mínimo están en el vértice”. El segundo folio presenta un mapa conceptual que resume el primer folio. La estructura tiene como centro la forma estándar (que llaman forma general) que se une a 6 elementos: área de cuadrado, continuidad, representación gráfica, máximo o mínimo, vértice y ceros del polinomio. Establecen además, y de manera correcta, otras conexiones: ceros - gráfica, máximo o mínimo - vértice, máximo o mínimo - gráfica, y continuidad - representación gráfica.

La transparencia muestra claramente la influencia del ejemplo de la estructura conceptual de la derivada que el formador presentó en clase (ver Figura 40). En él aparecen las categorías contexto y fenomenología que no existían en el folio 2. El área del cuadrado aparece en estas dos categorías. También aparece la categoría simbólico, en la que se utiliza únicamente la forma estándar y la ecuación cuadrática (con una mención al álgebra de funciones polinómicas). La representación numérica parece estar incluida aquí en un elemento denominado “tabla de valores”. En la representación gráfica, se presenta una de las gráficas del folio 2, con la identificación de las coordenadas del vértice en función de parámetros de la forma estándar. Se agregan, además, las ideas de concavidad, convexidad, dominio y recorrido. En fenomenología aparece dos temas nuevos: curvas de regresión y tiros parabólicos.

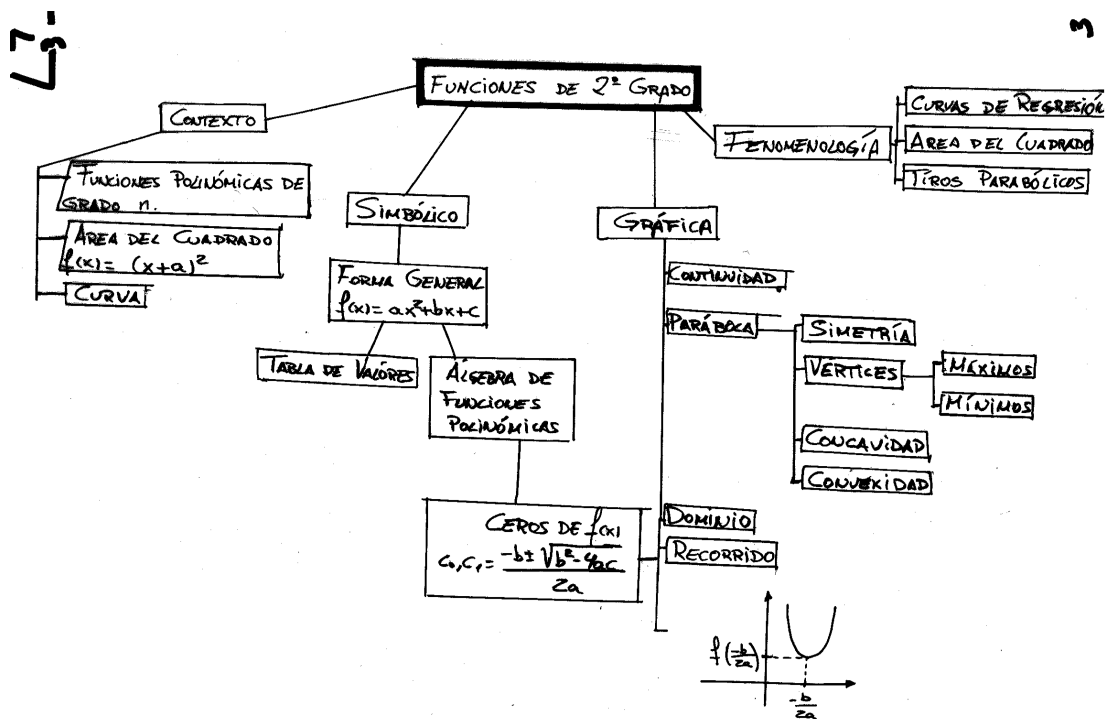


Figura 40. Primera propuesta de estructura conceptual del grupo función cuadrática

Es evidente que este grupo logró manejar bastante bien la idea de estructura antes del comienzo de la segunda sesión como se pone de manifiesto en el folio 2. En este documento se presenta una estructura conceptual bastante compleja (aun si tiene pocos elementos), habiéndose producido este folio antes de la presentación del ejemplo de la estructura conceptual de la derivada. Es posible que ellos hayan podido construir más fácilmente esta estructura porque, como lo dijeron en la presentación, consideran que el tema es sencillo e identificaron un número reducido de elementos. La presentación fue bastante clara y no dio la impresión de que, a diferencia de varios otros grupos, hubiesen investigado en documentos diferentes de los libros de texto. En este caso parece claro que el ejemplo de la estructura conceptual de la derivada con sus categorías de sistemas de representación permitió al grupo enriquecer su producción (en número de elementos y conexiones entre ellos). Esto no se percibió de manera tan clara en otros grupos cuyos borradores iniciales tenían ya gran cantidad de elementos expuestos en listados. Aunque la fórmula cuadrática aparece en el esquema, la ecuación cuadrática no aparece. Ellos hablaron de los ceros de la función y no de las soluciones a una ecuación que no mencionaron. Los integrantes del grupo consideraron que no tenían dificultades con el tema (lo dijeron en la presentación).

2.2. Estructura Conceptual y Sistemas de Representación

La noción de sistema de representación se introdujo en la siguiente sesión a partir del trabajo que los futuros profesores realizaron en la sesión anterior. En su discurso, el formador utilizó algunas de estas transparencias. Las intervenciones de los futuros profesores insinuaron algunas de sus dificultades con esta noción: no veían los sistemas de representación como medio organizador de la estructura

conceptual y no lograban centrar su atención en los aspectos matemáticos del concepto: insistían en su preocupación por las cuestiones didácticas. No obstante, surgió una idea central: se estaba representando un mismo objeto (concepto) y, por lo tanto, los elementos de diferentes representaciones debían estar relacionados. Al final de la sesión, el formador formuló la siguiente tarea:

De hoy en ocho días vamos a seguir con el tema de los sistemas de representación. Y la tarea para de hoy en ocho días, la hacen como quieran, como lo hicieron para la vez pasada, es tratar de mejorar, detallar, profundizar, la estructura conceptual de cada tema, tratando de hacer énfasis, tratando de reflexionar, en el papel que pueden jugar los sistemas de representación para describir el esquema. Son dos cosas. Una, la estructura conceptual de cualquier tema, si nos ponemos a trabajar en detalle, con bastante tiempo, puede tomar tantos folios como ustedes quieran. Aun en casos de temas que parezcan extremadamente precisos. Entonces lo queremos es ver hasta dónde llegamos en profundidad. Pero hasta donde llegamos en profundidad, tratando de resaltar no solamente que hay una gran cantidad de elementos, sino tratando de resaltar cómo están relacionados esos elementos, como están estructurados. Una de las maneras con la que podemos tener criterios para estructurarlos, es tratando de ver cómo puede aportar a esa estructura, la idea de sistemas de representación [no se entiende]. Entonces, lo que vamos a hacer de hoy en ocho días jueves, es volver a mirar. Y, en la medida de lo posible, si pueden traer unas transparencias hechas, pues mejor. Y vamos a hacer más o menos el ejercicio que hicimos la vez pasada, sólo que con una diferencia. Se va a dar tiempo para la crítica. [42-B192]

En las siguientes dos sesiones, los grupos de futuros profesores presentaron su trabajo. En esta ocasión, se dio lugar a que cada grupo recibiera comentarios y críticas inmediatamente después de su presentación. Esto generó discusiones y explicaciones entre los futuros profesores.

Transparencias del Grupo Función Cuadrática

La transparencia está organizada en tres categorías: simbólico, gráfica y fenomenología (ver Figura 41). En el sistema de representación simbólico se encuentran las siguientes categorías: formas de expresión, ceros de la función, vértices, concavidad, convexidad, eje de simetría, dominio, recorrido. Aparece por primera vez la forma simbólica multiplicativa. En el sistema de representación gráfico, introducen la idea de cuádricas. En la fenomenología desarrollan con detalle fenómenos matemáticos como áreas y volúmenes.

Establecen conexiones puntuales externas muy claras, al identificar las coordenadas de puntos como el vértice y los cortes con el eje x . También establecen conexiones para la dilatación - concavidad y el eje de simetría.

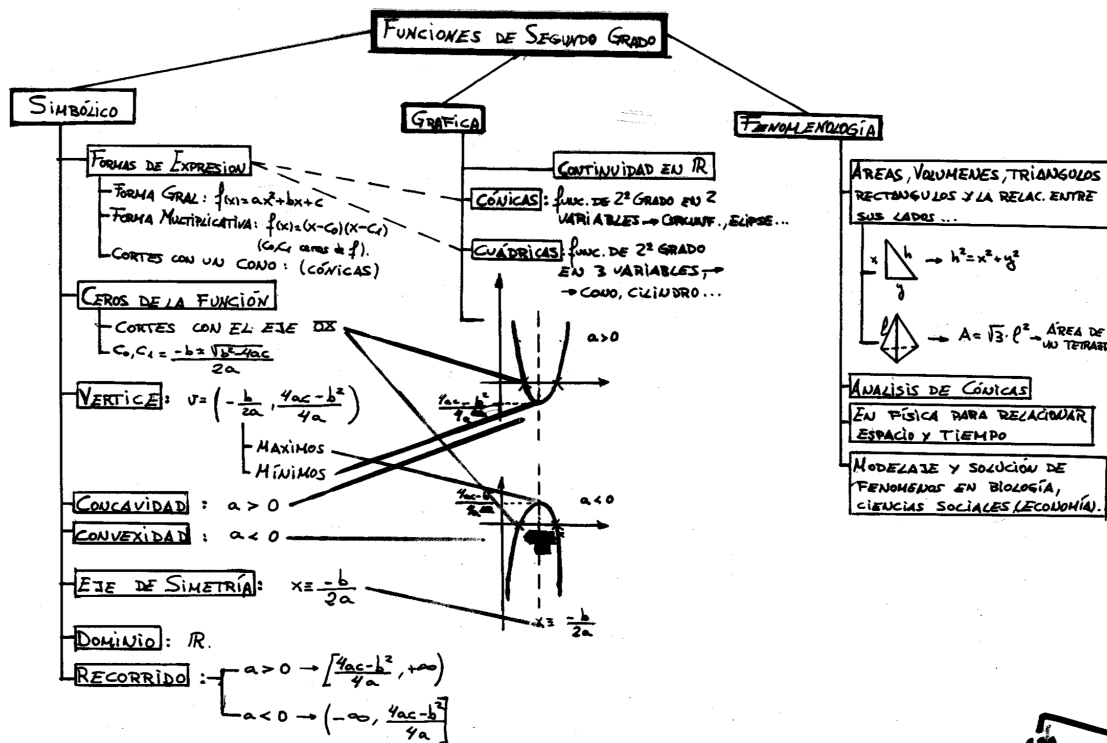


Figura 41. Estructura conceptual y sistemas de representación del grupo función cuadrática

Esta nueva versión no presentó cambios muy radicales con respecto a la versión anterior. El aspecto más interesante que presentó fue la aparición de una serie de conexiones puntuales externas muy claras, junto con la aparición de la forma multiplicativa dentro del sistema de representación simbólico. Desapareció la mención a lo numérico (en la versión 2 estaba la tabla de valores). Las conexiones internas dentro del sistema de representación eran implícitas al expresar algunas propiedades en función de los parámetros de la forma general. No aparecían aún, claro, los procedimientos de tratamiento simbólico, con excepción de la ecuación cuadrática para relacionar las dos formas simbólicas que se presentan.

En resumen, el grupo mantuvo la estructura que tenían anteriormente y la detallaron parcialmente. En la presentación y en la discusión hicieron referencia explícita al problema del espacio para presentar la complejidad.

Comentarios a la Transparencia

El siguiente texto corresponde a los comentarios que, como formador, hice a la presentación y las transparencias del grupo función cuadrática que acabo de presentar.

El establecimiento explícito de algunas conexiones puntuales entre elementos o propiedades del sistema de representación simbólico (el símbolo a , la expresión simbólica de los ceros de la función, por ejemplo) y elementos y propiedades del sistema de representación gráfico (los cortes de la curva con el eje x , la concavidad de la curva) contribuyó de

manera importante a la comprensión del grupo de la importancia de este tipo de conexiones.

Pero, ¿cuáles son los elementos de cada sistema de representación y cuáles son las propiedades? ¿Cómo se relacionan entre sí?

Dentro de la problemática de los sistemas de representación se puede profundizar aún más (una vez ustedes resuelvan el problema de encontrar una manera de representar esa complejidad). Por un lado, la tabla de valores como sistema de representación desapareció de la versión anterior a ésta. El trabajo del grupo de cónicas muestra que hay otros sistemas de representación geométricos, además del que se representa en el plano cartesiano: como lugar geométrico de puntos que satisfacen unas condiciones, como corte de un plano con el cono, etcétera. ¿Cuáles son los elementos y las propiedades de la función cuadrática que mejor resaltan en cada uno de esos sistemas de representación y cómo se relacionan? Por ejemplo, la parábola tiene un foco, pero éste no aparece en su esquema.

En el caso del sistema de representación simbólico, resulta interesante que haya aparecido la forma multiplicativa y que ustedes hayan insinuado una relación entre esa forma y la forma general a través de la ecuación cuadrática. ¿Hay más formas simbólicas? Y si las hay, ¿cómo se relacionan entre sí? ¿Qué elementos tienen y qué propiedades se resaltan en ellas? ¿Cómo se relacionan estos elementos y propiedades con los elementos y propiedades de otros sistemas de representación, como el geométrico del plano cartesiano?

Aunque aparezcan como elementos del sistema de representación simbólico, conceptos como vértice o eje de simetría son elementos que se definen a partir de las características de la representación gráfica. Dentro del sistema de representación simbólico podemos encontrar expresiones simbólicas que representan sus coordenadas. Éste es un comentario un poco sutil, pero que puede ayudar a comprender y profundizar las ideas que se encuentran detrás de la noción general de sistema de representación.

Creo que es mejor restringir el tema a una sola variable.

En el caso de los fenómenos, veremos que hay también una gran variedad de ellos.

2.3. Sistemas de Representación y Análisis Fenomenológico

En las siguientes dos sesiones el formador, basándose en el trabajo previo de los grupos de futuros profesores, concretó el significado de las nociones de estructura conceptual y sistema de representación e introdujo la idea de análisis fenomenológico. Algunos futuros profesores intervinieron con dudas y comentarios. En seguida, y durante dos sesiones, los grupos de futuros profesores presentaron sus trabajos. Estos incluían una mejora de la estructura conceptual, teniendo en cuenta los sistemas de representación, y una primera aproximación al análisis fenomenológico del tema. En esta ocasión, los formadores intervinieron con frecuencia

haciendo comentarios a estas producciones. Algunos futuros profesores reaccionaron a estos comentarios y establecieron una discusión con los formadores. Al mismo tiempo, las críticas de unos grupos a otros se hicieron más claras y técnicas, generando también discusión entre los futuros profesores.

Transparencias del Grupo Función Cuadrática

La estructura conceptual presentada (documento 30.4, ver Figura 42¹²⁹) presenta unas pocas diferencias con la versión anterior de la misma (documento 16.3). Desaparece la fenomenología. Aparece un nuevo sistema de representación sin nombre y que tiene que ver con el área de cuadrados. Es realmente un fenómeno matemático. Como consecuencia del “sistema de representación del cuadrado”, aparece la forma simbólica $f(x) = (x + a)^2$ en el sistema de representación simbólico. El resto del sistema de representación simbólico es idéntico al del documento 16.3. En el sistema de representación gráfico desaparecen las referencias a cónicas y cuádricas y las cónicas aparecen en nuevo sistema de representación geométrico (como consecuencia de los comentarios de PG al documento 16.3). Finalmente reaparece el sistema de representación numérico, aunque en su presentación utilizan letras.

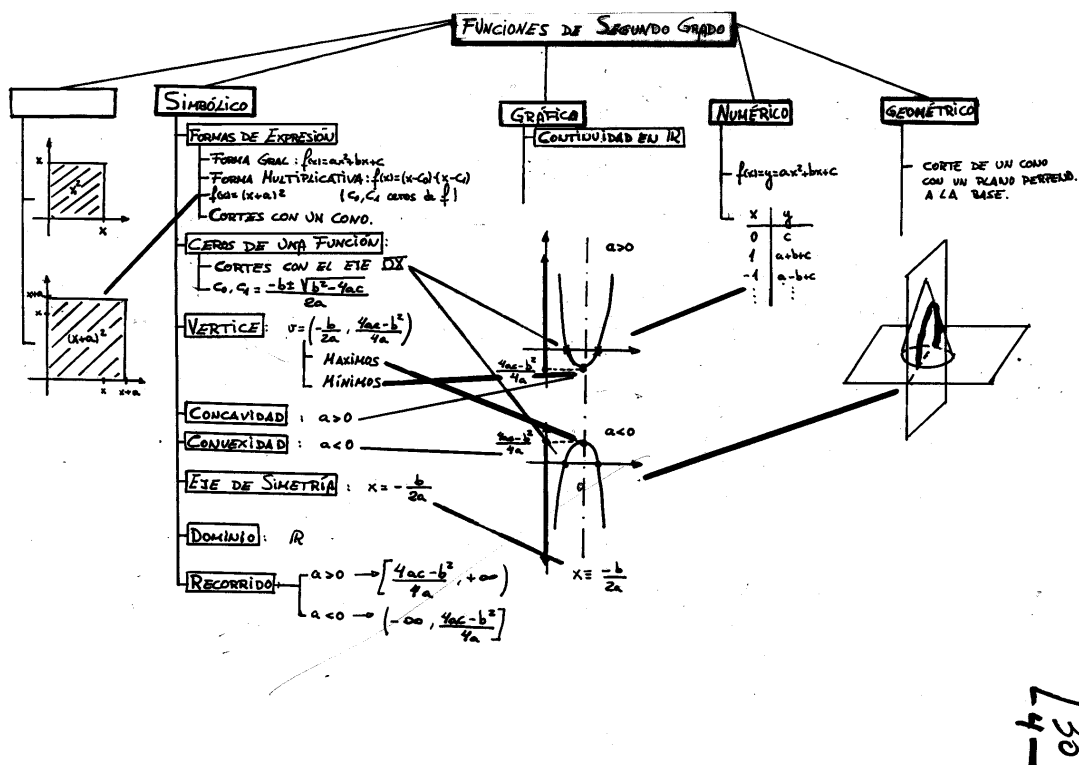


Figura 42. Estructura conceptual y sistemas de representación del grupo función cuadrática (segunda versión)

El documento 30.5 presenta el análisis fenomenológico (ver Figura 43). Este análisis se divide en cuatro partes: modelización de fenómenos, descripción de fenó-

¹²⁹ La numeración de los documentos sigue la secuencia en la que se encuentran registrados en una base de datos.

menos de carácter físico, fenómenos de carácter matemático y cálculo de áreas. No se entra en el detalle de las subestructuras matemáticas que modelizan esos fenómenos.

FENOMENOLOGÍA DE LA
FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO

130
9-

Modelización de fenómenos:

- Curvas de regresión de tipo parabólico: $Y = aX^2 + bX + c$
- Modelización de fenómenos de tipo económico, biológico, químico, social, ... en los que se utilizan funciones de segundo grado.


Descripción de fenómenos de carácter físico:


- Relación entre espacio, tiempo, velocidad y aceleración:
 $r = r_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a (t - t_0)^2$
- Recorrido de partículas en el espacio: $x(t) = t^2 - 4t + 3$
- Aceleración normal $a_n = \frac{v^2}{R}$
- Tiro horizontal y parabólico: $y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$


Fenómenos de carácter matemático:

- Ecuaciones de cónicas y cuádricas
- Teorema de Pitágoras
- Interpolación polinómica de segundo grado.
- Relación con el nº de evo: $x^2 = x + 1$

Cálculo de áreas:

 $x \rightarrow A = x^2$

 $\rightarrow A = 4\pi R^2$

 $l \rightarrow A = \sqrt{3} \cdot l^2$


 $\rightarrow A = 6 \cdot x^2$

Figura 43. Análisis fenomenológico del grupo función cuadrática (primera versión)

Cuando se tienen en cuenta los comentarios que este grupo recibió a la versión anterior de la estructura conceptual, resulta evidente que la nueva versión es esencialmente una adaptación a estos comentarios. La única diferencia importante es la aparición del sistema de representación del cuadrado que sabemos, por otras fuentes, que generó una buena cantidad de discusión entre ellos. Todavía no aparece el foco y la directriz como aspecto central de la función cuadrática y tampoco aparecen los procedimientos simbólicos de transformación sintáctica. En la sesión, LR les hizo ver que su propuesta de parábola como corte de cono estaba equivocada. Tampoco aparecen transformaciones sintácticas en el sistema de representación simbólico. Ellos solamente habían identificado dos formas simbólicas.

El análisis fenomenológico es pobre. Hicieron una separación ad hoc entre fenómenos físicos y no físicos y separaron el cálculo de áreas de los otros fenó-

menos matemáticos. No era claro cómo se involucra la función cuadrática en el teorema de Pitágoras. Parece que consideraron todos aquellos fenómenos en los que aparece un término al cuadrado. Por lo tanto, involucraron estructuras matemáticas que no forman parte de la estructura matemática en cuestión. Las categorías propuestas no clasifican por subestructuras matemáticas.

Comentarios a las transparencias

La estructura conceptual ha evolucionado algo con respecto a la versión anterior, pero es posible que todavía se pueda hacer más trabajo al respecto. Es, tal vez, el momento de responder a dos preguntas que sirvan de criterios para decidir qué hace falta y qué puede sobrar en esta estructura conceptual: 1) ¿para qué nivel de secundaria o bachillerato vamos a diseñar la unidad didáctica sobre función de segundo grado?; 2) lo que aparece actualmente en la estructura conceptual, ¿es lo que consideramos importante que un estudiante de ese nivel conozca sobre el tema?; ¿está todo lo que esos alumnos deberían saber?

Algunas ideas sobre la última versión de la estructura conceptual.

1) la idea del cuadrado no es realmente un sistema de representación. Esa idea no tiene necesariamente un conjunto de reglas que permita crear caracteres, manipularlos y relacionarlos con otros sistemas de representación (a menos que se utilicen las reglas del sistema de representación del plano cartesiano). El área del cuadrado es en realidad una gran familia de fenómenos matemáticos.

2) La noción de foco (y de directriz) brilla por su ausencia en la estructura conceptual. Tal vez las ideas del grupo de cónicas puedan aportar a mejorar esto. Ellos muestran que es una noción central en la descripción de estos objetos matemáticos. Más aún, esta noción puede aparecer en la mayoría de los sistemas de representación. En particular esto genera una nueva forma simbólica cuyos parámetros tienen significado gráfico (y fenomenológico) importante.

3) La idea del cuadrado generó una semilla de una nueva forma simbólica, en la que el cuadrado está completado. ¿Cómo es esa forma simbólica? ¿Qué significado gráfico tienen los parámetros de esa forma simbólica?

4) Al aparecer varias formas simbólicas se genera el problema de pasar de una forma a otra (lo que se conoce como transformaciones sintácticas dentro de sistemas de representación). Ustedes insinúan algo de esto con la ecuación cuadrática y el paso de la forma general a la forma multiplicativa. ¿Cuáles son los procedimientos que permiten hacer estas transformaciones?

Para el análisis fenomenológico tengo también algunos comentarios:

1) Pareciera que el análisis fenomenológico está hecho con base en la identificación de aquellos fenómenos que involucran un término al cuadrado, pero esto no quiere necesariamente decir que involucre a la fun-

ción de segundo grado y que esta estructura matemática permita organizar ese fenómeno. Tomen, por ejemplo, el caso del Teorema de Pitágoras. En este caso habría que hacer una buena cantidad de manipulaciones simbólicas para mostrar que la función de segundo grado organiza algún aspecto de los fenómenos matemáticos que tienen que ver con el teorema. Entonces la pregunta es ¿qué fenómenos son organizados por alguna subestructura matemática perteneciente a la estructura matemática de la función de segundo grado? Para poder responder a esta pregunta, hay que tener claridad acerca de cuáles son las subestructuras matemáticas de la función de segundo grado y, para ello, es posible que sea necesario profundizar en la estructura conceptual...

2) En clase ya se hizo el comentario de que el término “modelización de fenómenos” es demasiado general y no aporta necesariamente al análisis fenomenológico. Ustedes utilizan la frase “fenómenos [...] en los que se utilizan funciones de segundo grado”. El problema del análisis fenomenológico es precisamente el de identificar esas familias de fenómenos y clasificarlas de acuerdo con las subestructuras matemáticas que los organizan. Por ejemplo, la subestructura matemática que organiza los fenómenos de áreas son aquellas funciones de segundo grado de la forma $f(x) = ax^2$. Pero esta subestructura no permite organizar los problemas de relación espacio tiempo en los fenómenos de movimientos uniformemente acelerados y seguramente no es la misma subestructura que permite explicar los movimientos de los cometas, y esta última es diferente de la subestructura matemática que permite describir el funcionamiento de los espejos parabólicos.

3) La separación entre fenómenos físicos y no físicos es un poco artificial. En realidad, tenemos dos grandes categorías iniciales: fenómenos matemáticos y fenómenos no matemáticos. La pregunta es ¿cómo se organizan (clasifican) los fenómenos dentro de esas dos categorías en grandes familias de fenómenos (independientemente de su origen, ya sea economía o biología) de acuerdo a sus características estructurales?

4) La separación entre fenómenos matemáticos y cálculo de áreas también es artificial. Si estamos hablando de cálculo de áreas de objetos matemáticos, entonces nos referimos a un fenómeno matemático. Dense cuenta que ustedes están incluyendo aquí el tema del área de un cuadrado como un fenómeno matemático. Ver comentario 1 a la estructura conceptual.

4) ¿Será posible que una vez que se hayan identificado las subestructuras matemáticas y las familias de fenómenos que les corresponden, se puedan hacer las relaciones entre características del fenómenos y características de la subestructura como lo comenzaron a mostrar los del grupo de probabilidad?

2.4. Análisis Fenomenológico

Con motivo de los comentarios y de la discusión generada por las presentaciones anteriores, el formador indujo a los grupos de futuros profesores a mejorar su trabajo sobre el análisis fenomenológico de cada tema. En la siguiente sesión se presentaron estos trabajos.

Transparencias del Grupo Función Cuadrática

En este documento (ver Figura 44), el grupo continuó organizando los fenómenos de acuerdo con dos grandes familias que ellos dividen respectivamente en otras dos: fenómenos matemáticos (que ellos dividen en fenómenos puramente matemáticos y áreas) y fenómenos no matemáticos (que ellos dividen en fenómenos físicos y representación de fenómenos). En los fenómenos físicos incluyeron las siguientes categorías con ejemplos de campos y fórmulas: mecánica general, movimiento de planetas y relatividad. En fenómenos puramente matemáticos incluyeron: obtención de números singulares mediante ecuaciones de segundo grado, análisis de cónicas, relaciones cuadráticas e interpolación polinómica de segundo grado. La familia denominada "representación de fenómenos" tiene categorías en química, biología, economía, construcción y regresión parabólica. Finalmente en áreas dieron ejemplos de figuras y cuerpos geométricos.

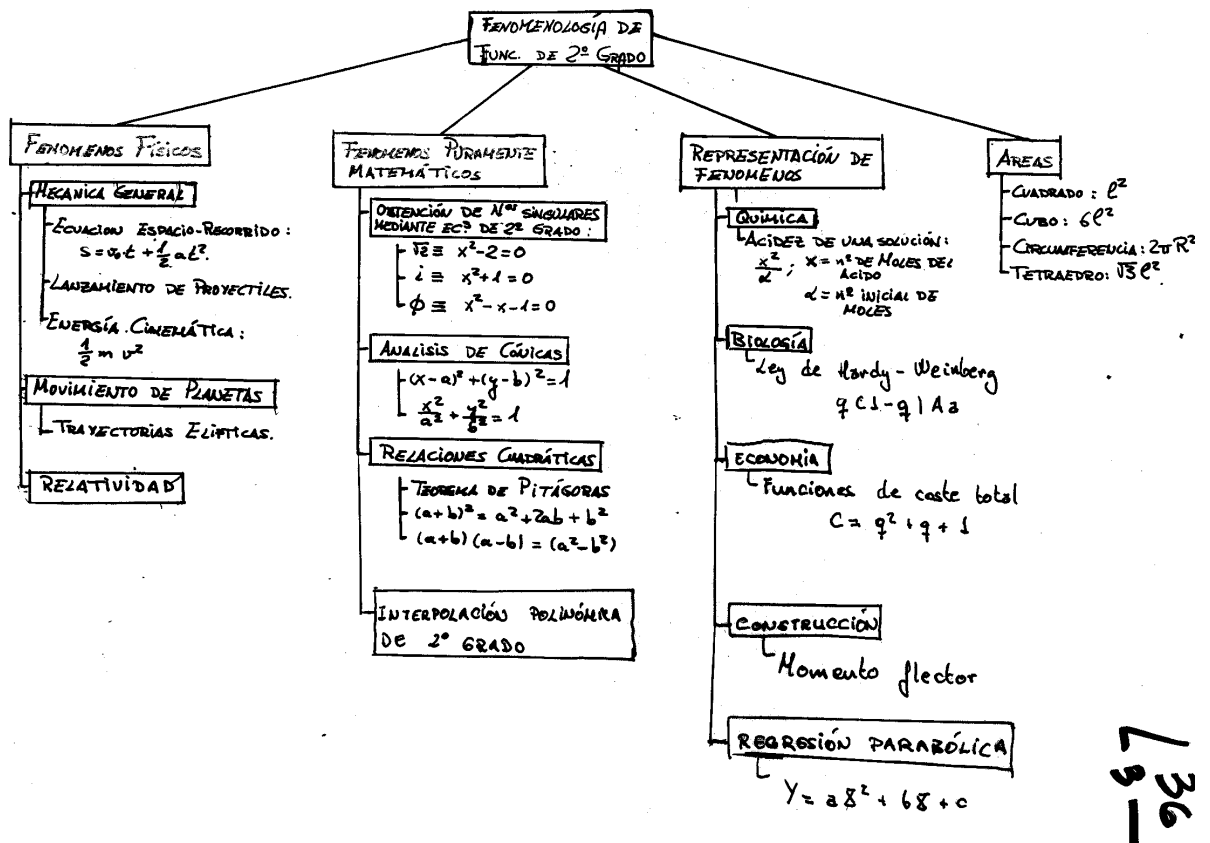


Figura 44. Análisis fenomenológico del grupo función cuadrática (segunda versión)

Este grupo tenía evidentemente una gran dificultad para pasar de la clasificación por áreas a la clasificación por subestructuras matemáticas. Adicionalmente, el grupo insistió en dos puntos particulares: la separación en fenómenos físicos y no físicos y la separación en fenómenos puramente matemáticos y áreas de figuras y cuerpos.

Comentarios a la transparencia

En mi documento anterior ya les hice una serie de comentarios al análisis fenomenológico presentado en esa ocasión. El que ustedes presentan ahora tiene más detalle pero tiene todavía algunas características que quiero volver a resaltar.

La clasificación de los fenómenos no matemáticos en físicos por un lado y no físicos, por el otro, es un poco artificial desde la perspectiva de la estructura matemática en cuestión. Todos esos fenómenos son sencillamente fenómenos no matemáticos. Dentro esa gran familia de fenómenos no matemáticos, ustedes hacen una clasificación por áreas del conocimiento: física, química, biología, economía, construcción. Pero este tipo de clasificación no permite establecer una relación entre las características estructurales de los fenómenos, por un lado, y elementos y propiedades de subestructuras específicas de la gran estructura matemática denominada función de segundo grado, por el otro.

Paralelamente, y como creo que ya les comenté, la familia de áreas de figuras y cuerpos es un fenómeno matemático y se debe incluir en esa categoría.

El problema que se tiene es que, aunque la que ustedes proponen es una clasificación posible, no es necesariamente útil a la hora de ponerla en juego desde el punto de vista didáctico. Lo que a uno le interesa desde esa perspectiva es tener, para una subestructura matemática específica (por ejemplo, aquella relacionada con las propiedades de la parábola en su relación con el foco y la directriz que ustedes tienen un poco olvidada, o aquella relacionada con funciones de segundo grado con los parámetros b y c nulos, o aquella que genera ecuaciones de segundo grado, o seguramente varias otras) aquellos fenómenos y problemas dentro de esos fenómenos que al ser modelizados ponen en juego esa subestructura. La cuestión consiste entonces en identificar las subestructuras matemáticas que permiten organizar los fenómenos que ustedes proponen (y seguramente otros) con esa estrategia.

Al incluir la idea de números singulares o trayectorias elípticas, por ejemplo, ustedes están ampliando el tema de trabajo para incluir casi todo aquello que involucre un término al cuadrado. Es una aproximación posible, pero yo les aconsejaría, para efectos de reducir la complejidad del problema, que se restrinjan a aquellas cuestiones que tengan una relación más directa con el concepto de función de segundo grado.

¡No se olviden de la idea de foco y directriz, tanto para el análisis fenomenológico, como para la estructura conceptual!

2.5. Modelización, Teorías de Aprendizaje, Errores y Dificultades

Para finalizar el análisis de contenido, el formador introdujo la idea de modelización, hizo una recapitulación de las principales ideas que se habían considerado en esta parte de la asignatura y propuso lo que se llamó un ejercicio de reflexión en el que los futuros profesores, en un esquema de ensayo, describieron su concepción de las nociones de estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico. En las siguientes dos sesiones, uno de los formadores (LR) hizo una presentación sobre las teorías de aprendizaje. El otro formador presentó las ideas sobre errores, dificultades y obstáculos epistemológicos en las siguientes tres sesiones. Al final de ellas, los grupos de futuros profesores quedaron con la tarea de analizar su tema desde esta perspectiva.

Transparencias del Grupo Función Cuadrática

Este documento tiene dos grandes apartados: representación simbólica y representación gráfica (ver Figura 45). En el apartado de representación simbólica se tienen dos partes: forma general y ceros de la función. En la primera se presentan dificultades con respecto al reconocimiento de expresiones simbólicas como pertenecientes a la función cuadrática, excepto la última que se refiere a la relación entre las raíces y los coeficientes de la forma general. En los ceros de la función identifican dificultades y errores relacionados con la aplicación de la ecuación cuadrática. En la representación simbólica hay errores y dificultades de varios tipos.

65.1

FUNCIONES 2º GR. ERRORES Y DIFICULTADES

REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

* **FORMA GENERAL:** $f(x) = a \cdot x^2 + bx + c$

- CONSIDERAR COEFICIENTE LÍDER 1
- PROBLEMAS CON AUSENCIA DE COEFICIENTES

$f(x) = x^2 + 2$
 $g(x) = x^2 - x$

- PROBLEMAS CON COEFICIENTES DESORDENADOS

$f(x) = x + x^2 - 2$

- COEFICIENTES HAN DE SER ENTEROS.

$h(x) = 1.5x^2 + 2.33x + 0.3$

- NO RECONOCER COMO FUNCIÓN DE 2º GRADO LA FORMA MULTIPLICATIVA,

$f(x) = (x-3)(x+2)$

NI IDENTIFICAR LAS RAÍCES

- NO IDENTIFICAR LAS RELACIONES ENTRE LAS RAÍCES Y LOS COEFICIENTES DE LA FORMA GRAL.

* **CEROS DE LA FUNCIÓN:** $c_1, c_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- DESPRECIAR a EN EL DENOMINADOR
- DISCRIMINANTE DEBE SER POSITIVO
- LAS SOLUCIONES DEBEN SER ENTERAS.
- PROBLEMAS CON AUSENCIA DE COEFICIENTES

$x^2 = 0$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

- TOMAR COMO EJE DE SINEIRÍA $x=0$.
- CONFUSIÓN ENTRE DOMINIO Y RANGOS
- FALTA DE CONEXIÓN ENTRE SISTEMA DE REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y SIMBÓLICA.
- SE SUELE UTILIZAR TABLA DE VALORES EN VEZ DE DATOS ANALÍTICOS
- SI LA GRÁFICA SALE ABIERTA SE SUELE BUSCAR LA REPRESENTACIÓN COMÚN

OTROS ERRORES

- $(x+a)^2 = x^2 + a^2$
- $(x-a)^2 = x^2 - a^2$

Figura 45. Errores y dificultades para la función cuadrática

Éste es tal vez el mejor trabajo del grupo. En la presentación se puso en evidencia la intención del grupo de seguir de cerca la estructura conceptual. Sorprendió, en

todo caso, que hubiesen dejado a un lado los otros sistemas de representación. No sorprendió, por el contrario, la importancia que le asignaron a la ecuación cuadrática. No diferenciaron entre errores y dificultades.

Comentarios a la Transparencia

Produje comentarios escritos a todas las presentaciones y transparencias de todos los grupos. Para efectos de no extender sin necesidad este capítulo, no reproduzco el resto de los comentarios correspondientes al grupo función cuadrática. Estos documentos se encuentran en el Anexo F.

2.6. Resolución de Problemas y Actividad

El análisis de instrucción se inició con la discusión sobre las ideas generales sobre la noción de problema. Después se estableció la relación entre las nociones de resolución de problemas y análisis didáctico, se establecieron las características conceptuales de la resolución de problemas y se presentó un ejemplo. Al final de estas sesiones se pidió a los grupos de futuros profesores que identificaran una dificultad relacionada con su tema y que diseñaran una actividad que pretendiera abordar esa dificultad. Después de estas presentaciones, el análisis de instrucción finalizó con una discusión sobre los materiales y recursos y su experiencia en el taller previsto en la asignatura. En las siguientes tres sesiones los grupos de futuros profesores presentaron trabajos de resumen de lecturas sobre resolución de problemas. Estos trabajos no eran específicos a los temas que vienen trabajando en el análisis didáctico.

Dificultad y Actividad del Grupo Función Cuadrática

El grupo función cuadrática presentó dos transparencias. En la primera identificaron como dificultad la tendencia de los escolares a pensar que la función cuadrática es lineal (ver Figura 46). Ubicaron esta dificultad en la estructura conceptual y la expresaron en términos del error $f(x + a) = (x + a)^2 = x^2 + a^2$.

69.1

DIFICULTAD PARA FUNCIONES DE 2º

DIFICULTAD: LAS FUNCIONES DE 2º GRADO NO SON LINEALES,
ES DECIR, $f(a+b) \neq f(a)+f(b)$.

LOCALIZACIÓN EN LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL:**SISTEMA DE REPRESENTAC. SIMBÓLICO****FORMAS DE EXPRESIÓN**

- FORMA GENERAL: $f(x) = ax^2 + bx + c$

- FORMA MULTIPLICATIVA: $\begin{cases} - \text{UNA RAÍZ DOBLE: } f(x) = (x+a)^2 \\ - \text{DOS RAÍCES: } f(x) = (x+a)(x+b) \end{cases}$

DESCRIPCIÓN DE LA DIFICULTAD:

LA DIFICULTAD SE PRESENTA AL PASAR DE LA REPRESENTAC.
DE FUNC. DE 2º GRADO CON UNA RAÍZ DOBLE A LA FORMA
GENERAL, ES DECIR, DE $f(x) = (x+a)^2$ A $f(x) = x^2 + 2ax + a^2$
YA QUE EN GENERAL LOS ALUMNOS CONSIDERAN QUE LA
FUNCIÓN CUADRÁTICA $f(x) = x^2$ ES LINEAL, ASÍ:

$$f(x+a) = (x+a)^2 = x^2 + a^2$$

ACTIVIDAD:

Figura 46. Dificultad para la función cuadrática

En la segunda transparencia (ver Figura 47), el grupo propuso una actividad para abordar esta dificultad utilizando las áreas de cuadrados.

69.2

¿Es cierto que $(x + a)^2 = x^2 + a^2$?

Para ver si es o no cierta la igualdad $(x + a)^2 = x^2 + a^2$ vamos a realizar la siguiente actividad:

1.- Dibuja un cuadrado de lado:

x

y otro cuyo lado mida:

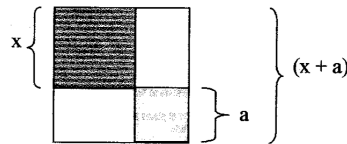
a

Pinta cada uno de un color diferente y recórtalos.

2.- Como ya sabes el área del cuadrado de lado "a" es "a²" y el área del cuadrado de lado "x" es

3.- Dibuja un cuadrado de lado (x + a). ¿Cuál es su área?

4.- Coloca los cuadrados de lados "x" y "a" sobre el de lado (x + a) del siguiente modo:



5.- En vista de los apartados 2 y 3, ¿dirías que la igualdad $(x + a)^2 = x^2 + a^2$ es cierta? (Razona tu respuesta)

6.- ¿Cuál será el valor de $(x + a)^2$ teniendo en cuenta que el área de un rectángulo de lados "x" y "a" es "x · a"? (Razona tu respuesta)

Figura 47. Propuesta de actividad para la función cuadrática

2.7. Evaluación

El análisis de actuación se inició con un ejercicio de análisis de actuaciones de escolares de secundaria que dio lugar a una discusión animada en la que se propuso una diversidad de posiciones sobre la evaluación. En la siguiente sesión, uno de los formadores hizo una presentación sobre el tema de evaluación. Los grupos de futuros profesores quedaron con la tarea de diseñar una actividad de evaluación para su tema, trabajo que presentaron en la siguiente sesión.

Evaluación para el Grupo Función Cuadrática

El grupo utilizó dos transparencias en su presentación, pero sólo entregó una. En esta transparencia ellos proponen unos criterios para la evaluación (ver Figura 48).

EVALUACION DE LA ACTIVIDAD

[92.1

- LA ACTIVIDAD QUE PROPONEMOS ESTÁ PENSADA PARA REALIZAR EN GRUPOS DE 4, POR LO QUE HAREMOS UNA EVALUACIÓN DE CADA GRUPO. SE EVALUARÁN LOS RESULTADOS DE LOS APARTADOS 5 Y 6.
- CRITERIOS PARA LA PREGUNTA 5:
 - ↳ CRITERIO 1: SI LA RESPUESTA ES CORRECTA O NO.
 - ↳ CRITERIO 2: SI EL RAZONAMIENTO ES VÁLIDO O NO EN RELACIÓN CON LOS APARTADOS ANTERIORES.
 - ↳ CRITERIO 3: SI LA RESPUESTA ES CORRECTA PERO NO UTILIZA LOS APARTADOS ANTERIORES ENTONCES CONSIDERAMOS QUE LA RESPUESTA NO ES DEL TODO CORRECTA.
 - ↳ CRITERIO 4: SI LA RESPUESTA NO ES CORRECTA SE TENDRÁ EN CUENTA LOS FALLOS EN EL RAZONAMIENTO PARA LA JUSTIFICACIÓN.
- CRITERIOS PARA LA PREGUNTA 6:
 - ↳ CRITERIO 1: SI LA RESPUESTA ES BUENA SE MIRARÁN SI SE HAN UTILIZADO LOS RAZONAMIENTOS ANTERIORES, ENTONCES CONSIDERAMOS LA RESPUESTA CORRECTA. SI NO SE USAN ESTOS RAZONAMIENTOS LA CONSIDERAMOS MENOS BUENA
 - ↳ CRITERIO 2: SI LA RESPUESTA ES INCORRECTA SE REVISARÁ EL APARTADO ANTERIOR PARA ESTUDIAR LA COHERENCIA Y SE MIRARÁN LOS POSIBLES FALLOS COMETIDOS EN EL RAZONAMIENTO.
- PARA EVALUAR EL RESULTADO DE LA ACTIVIDAD A NIVEL INDIVIDUAL SE REALIZARÁ EL SIGUIENTE EJERCICIO: "DESARROLLAR: $(x-6)^2$ ".
 - ↳ CRITERIO 1: SI EL RESULTADO ES CORRECTO CONSIDERAMOS QUE EL EJERCICIO ES VÁLIDO SEA CUAL SEA EL RAZONAMIENTO SIEMPRE QUE TENGA SENTIDO Y AÑADIRÍAMOS ALGÚN TIPO DE COMENTARIO RESPECTO A CADA RAZONAMIENTO.
 - ↳ CRITERIO 2: SI EL RESULTADO ES INCORRECTO SE VALORARÁ CADA MÉTODO INDIVIDUALMENTE Y LA VALORACIÓN DE CADA RAZONAMIENTO DEPENDE DEL TIPO DE ERROR COMETIDO.

Figura 48. Criterios de evaluación para la función cuadrática

2.8. Ejemplo de Unidad Didáctica

Las últimas sesiones de clase correspondieron a la presentación, por parte de uno de los formadores (LR), de un ejemplo de análisis didáctico y del diseño de una unidad didáctica para los números naturales. La instrucción guió la realización del trabajo final en dos presentaciones en las que se sugirieron algunos documentos de referencia. En primer lugar, se entregó un documento con referencias bibliográficas para cada uno de los temas (documento 84). En la primera presentación, LR hizo una descripción general del diseño curricular al nivel de la planificación del profesor (Rico, 1997d). Esta transparencia tiene referencias parciales a los organizadores del currículo en los componentes objetivo general y contenidos (documento 85). En la segunda presentación, LR presentó una descripción más detallada de cada componente del currículo, en términos de los organizadores del currículo (documento 97). Los temas que se consideraron fueron los siguientes: (a) objetivos (conocimiento conceptual y procedimental, sistemas de representación, modelización, errores y dificultades, materiales y recursos y actitudes), (b) contenidos (campo conceptual, errores y dificultades, sistemas de representación,

fenomenología y modelización y materiales y recursos), (c) metodología (conceptos, creencias previas, sistemas de representación, aprendizaje cooperativo, materiales y recursos y motivación), y (d) evaluación (comprensión, errores, sistemas de representación y valoración de la comprensión). Se indicó el lugar en la red en el que se encontraba el documento sobre evaluación de diseños curriculares (Gómez, 2002a). Se sugirió su lectura, pero ésta no fue obligatoria. En seguida, se presentó una unidad didáctica sobre los números naturales (Documento 99). Esta presentación duró dos sesiones. En ella, LR abarcó la descripción de los organizadores del currículo para los números naturales y propuso una unidad didáctica para este tema. El orden en que se presentaron los organizadores del currículo fue el siguiente: ubicación en documentos oficiales, estructura conceptual, fenomenología, sistemas de representación, dificultades y errores, modelización, materiales y recursos, e historia. Este orden de tratamiento de los temas fue diferente del que se sugirió a lo largo de la segunda parte de la asignatura.

2.9. Presentación de Trabajos Finales

La última actividad de la asignatura fue la presentación de los trabajos finales de los diferentes grupos de futuros profesores. A continuación incluyo, a manera de ejemplo, algunas de las transparencias utilizadas por el grupo función cuadrática en su presentación.

En la Figura 49 el grupo presenta el “análisis conceptual” del tema¹³⁰. En esta transparencia incluyeron cinco sistemas de representación. El grupo desarrolló en detalle los sistemas de representación simbólico, gráfico y cónico y estableció gran cantidad de conexiones entre los elementos de los dos primeros.

¹³⁰ Utilizan los mismos términos del ejemplo de unidad didáctica que se presentó en las últimas sesiones de clase.

Presentación del Trabajo Final del Grupo Función Cuadrática

2. Análisis conceptual.

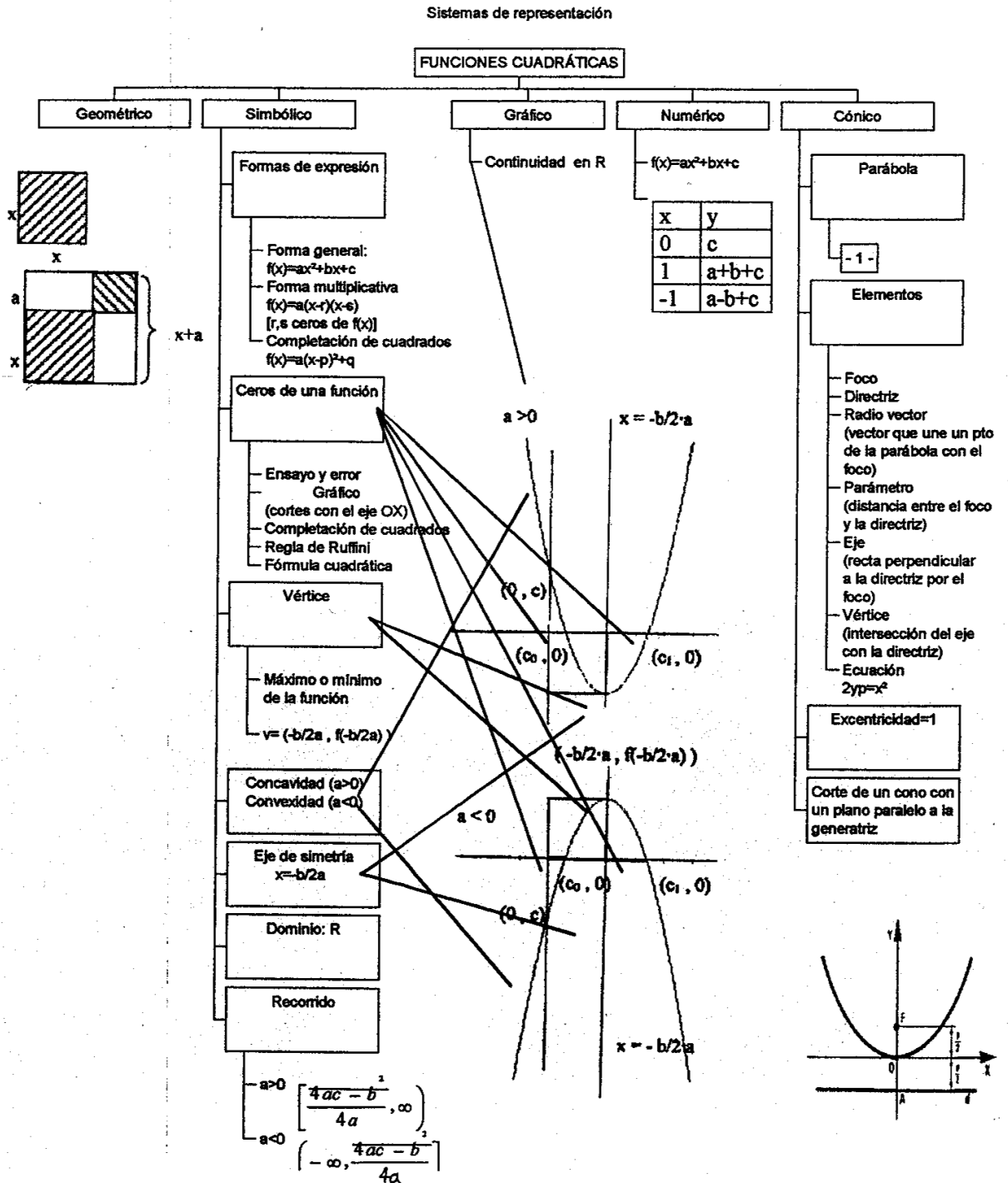


Figura 49. Análisis conceptual de la función cuadrática (presentación final)

La Figura 50 presenta una de las transparencias en las que el grupo detalló las conexiones entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico. En este caso, consideraron la forma multiplicativa de la función cua-

drática y caracterizaron los elementos de la gráfica de la función cuadrática en términos de los parámetros de esta forma simbólica.

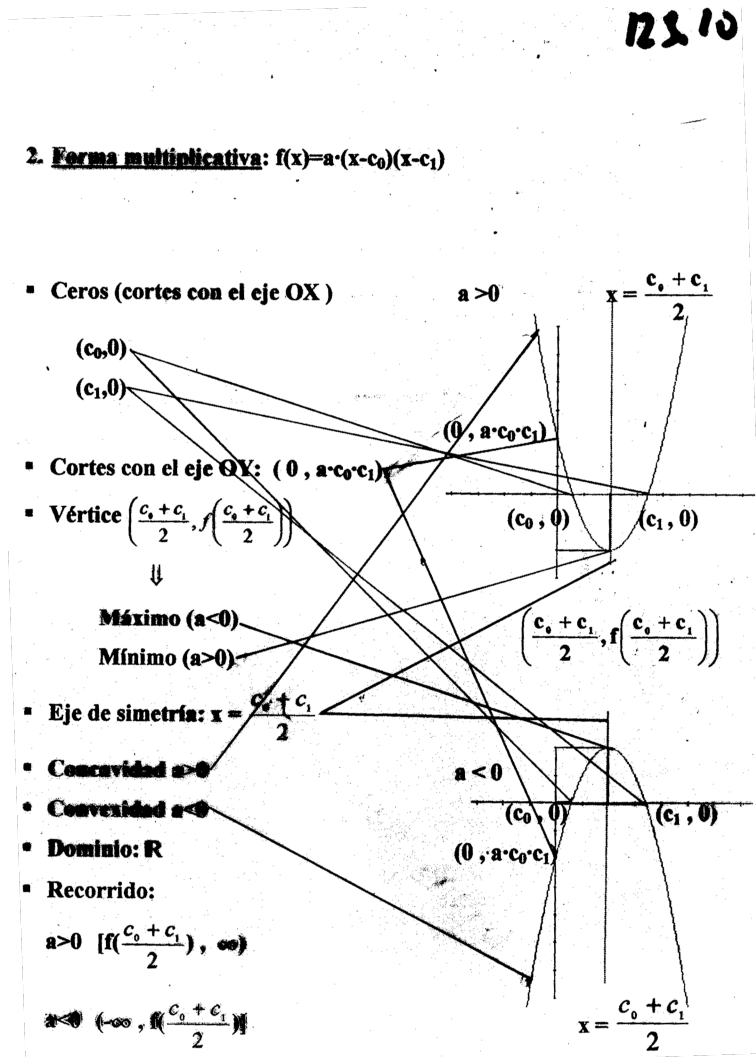


Figura 50. Forma multiplicativa y sistema de representación gráfico (presentación final)

En la Figura 51 aparece una de las transparencias sobre fenomenología en la que el grupo consideró los fenómenos no matemáticos. Aunque continuaron organizando los fenómenos por áreas de conocimiento, identificaron para cada tipo de fenómeno la expresión simbólica que le sirve de modelo.

1.2 Fenomenología y modelización

123.14

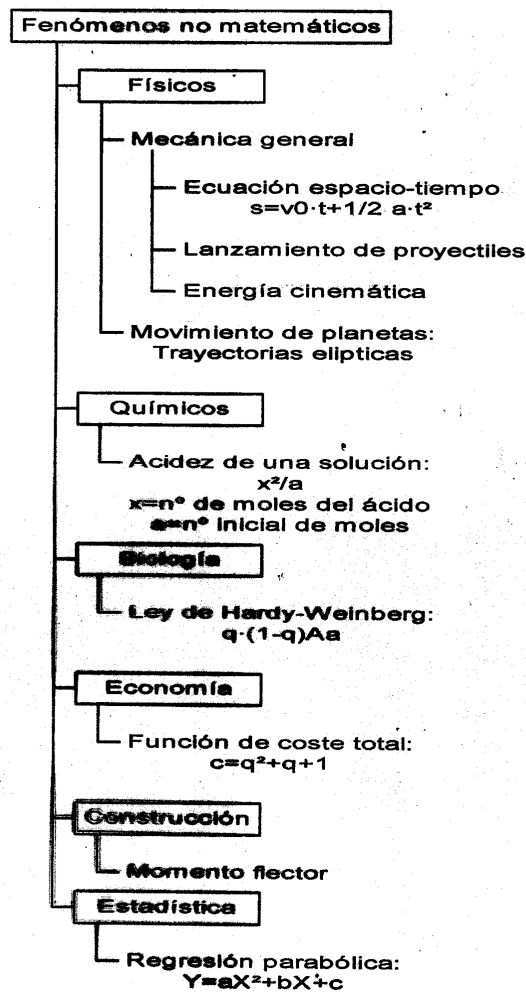


Figura 51. Fenómenos no matemáticos (presentación final)

3. ORGANIZACIÓN DE LA INFORMACIÓN OBTENIDA DURANTE EL DESARROLLO DE LA ASIGNATURA

En este proyecto de investigación me propongo explorar, describir, caracterizar y explicar parcialmente el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada durante el curso 2000-2001. El proceso de aprendizaje de los grupos de futuros profesores dependió, como era de esperarse, de las experiencias que ellos vivieron durante el curso académico, con motivo de haber asistido y realizado las actividades que tuvieron lugar en la asignatura. Por lo tanto, el desarrollo de la asignatura es una información central para el logro de los objetivos de este proyecto de investigación. Pero no es posible (y no tiene sentido) reproducir aquí cada uno de los eventos que, a priori, pudieron tener algún efecto en el aprendizaje de los futuros profesores. Identificaré dichos eventos en los estudios empíricos que presento en capítulos posteriores. En este

capítulo he presentado una visión general de la secuencia en que se trataron los contenidos, de los principales esquemas de trabajo que se utilizaron en las sesiones de clase y de cómo los formadores analizamos nuestra actuación y la de los futuros profesores para adaptar y mejorar la planificación de las clases. Por otro lado, he presentado con mayor detalle las sesiones de clase en las que se trabajó en el análisis didáctico. Y, para este bloque de la asignatura, he descrito la sucesión de producciones de uno de los grupos de futuros profesores, junto con ejemplos de los comentarios que hice a estas producciones.

En los anexos incluyo más información sobre el desarrollo de la asignatura. Allí se encuentran el documento que se entregó a los futuros profesores el primer día de clases con el diseño de la asignatura (Anexo B), el calendario por días en el que se especifica los temas a tratar y las actividades a realizar (Anexo C), la secuencia de temas tratados en cada hora de clase y el formador que estuvo a cargo de ella (Anexo D), las transcripciones parciales de las grabaciones de clase, junto con comentarios y análisis que realicé a medida que tenían lugar las sesiones (Anexo E) y los comentarios que hice a las producciones de los ocho grupos de futuros profesores (Anexo F).

El Anexo G contiene información aún más detallada en otro formato. Se trata de cuatro bases de datos entrelazadas. La Figura 52 presenta la estructura de estas bases de datos y su función en algunos de los análisis que realizaré en los estudios empíricos.

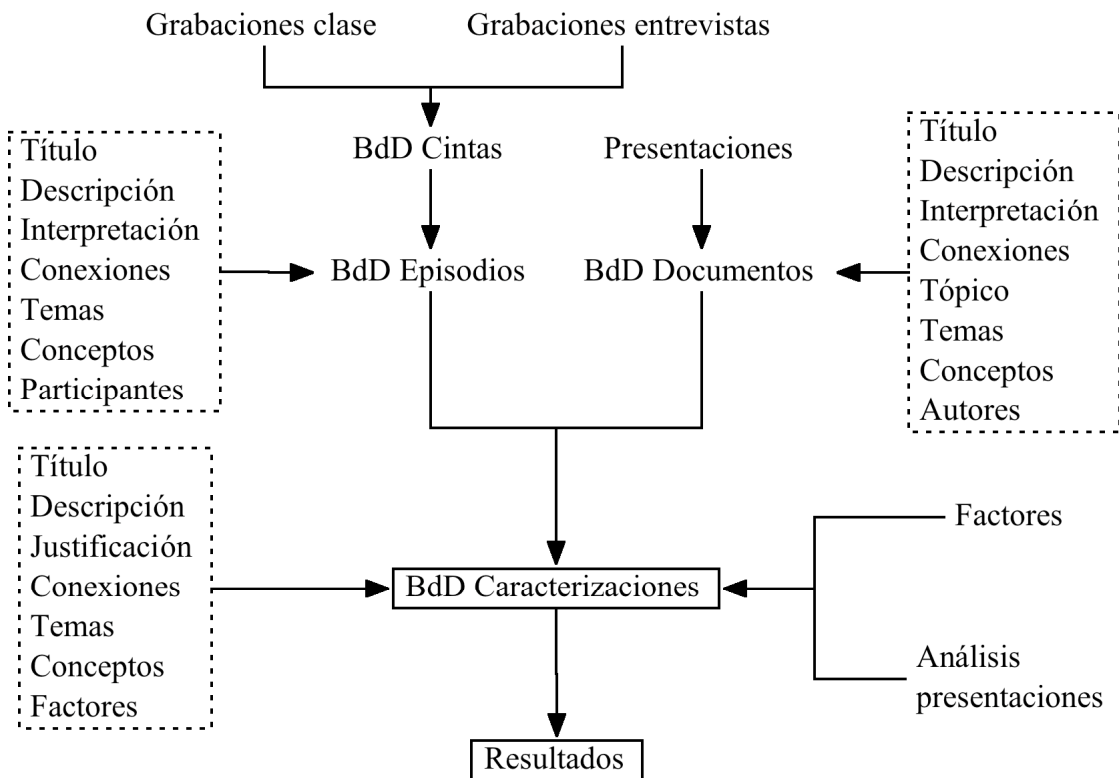


Figura 52. Bases de datos sobre el desarrollo de la asignatura

Las grabaciones de clase y las grabaciones de las entrevistas (a grupos de futuros profesores) se registraron en la base de datos *Cintas* en la que cada registro co-

responde a una cinta y en la que se introduce una descripción cronológica detallada de los episodios que componen la sesión y los documentos utilizados en ella. Estos documentos incluyen las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores para sus presentaciones y las transparencias utilizadas por los formadores en sus intervenciones en clase. Los episodios que se consideran relevantes se registran en la base de datos *Episodios*. Cada registro de esta base de datos incluye, además de la transcripción literal del episodio y su lugar en la cinta correspondiente, una descripción general y una interpretación de lo sucedido en el mismo. En la base de datos *Documentos*, las transparencias y documentos utilizados en las sesiones se registran de manera similar. En la base de datos *Caracterizaciones* se registran los resultados del análisis de los episodios y los documentos que describiré en detalle en el capítulo 9. Cada una de las caracterizaciones pretende registrar algún aspecto del desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores (significados parciales) y se fundamenta en una serie de episodios y documentos. Las bases de datos se encuentran entrelazadas de tal forma que, por ejemplo, es posible navegar rápidamente de una caracterización, a los episodios y documentos que la fundamentan.

CARACTERIZACIÓN DEL APRENDIZAJE DE LOS FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

En el capítulo 1 formulé cuatro preguntas generales que delimitaron el marco de este proyecto de investigación:

1. ¿Qué caracteriza la actuación eficaz y eficiente del profesor en el aula de matemáticas?
2. ¿Cuáles deben ser los conocimientos, capacidades y actitudes de un profesor que actúa eficaz y eficientemente?
3. ¿Cómo se deben diseñar e implantar los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria de tal forma que se apoye y fomente el desarrollo de estos conocimientos, capacidades y actitudes?
4. ¿Qué caracteriza los procesos de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria que participan en este tipo de programas de formación inicial?

He abordado y propuesto respuestas a las tres primeras preguntas en los capítulos precedentes. A la primera, en el capítulo 2, en el que propuse el análisis didáctico como conceptualización de la enseñanza de las matemáticas; a la segunda, en los capítulos 3 y 4, en los que caractericé las nociones de conocimiento didáctico y competencias del profesor de matemáticas y asumí una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores; y a la tercera, en los capítulos 5 y 6, en los que describí el diseño y desarrollo de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada. En este capítulo, describo el diseño de los estudios empíricos con los que pretendo abordar la cuarta pregunta.

En el siguiente apartado, preciso esta cuestión en unas preguntas, un problema y unos objetivos de investigación concretos. Después, analizo las diferentes opciones metodológicas con las que podía abordar el problema de investigación y justifico la elección que realicé. En seguida, describo las fuentes de información que utilicé. Finalmente, presento brevemente los cuatro estudios empíricos cuyos resultados pretenden dar respuesta las preguntas de investigación.

1. DE UNA PREGUNTA GENERAL A UNOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

La pregunta a la que me referí en el apartado anterior tiene un carácter general. Para abordarla, es necesario concretarla en un problema específico de investigación. Realizaré este proceso de concreción, atendiendo a tres dimensiones. Primero, delimitaré el contexto de investigación a un programa concreto de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: la asignatura Didáctica de Matemática en el Bachillerato. Segundo, precisaré los conceptos y teorías que me permitirán dar significado a la expresión “caracterizar los procesos de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria”. Y, tercero, propondré los esquemas metodológicos con los que abordaré el problema de investigación¹³¹.

Considero que ya he tratado las dos primeras dimensiones. Con respecto al contexto de investigación, he descrito y fundamentado el diseño curricular de la asignatura Didáctica de Matemática en el Bachillerato y he descrito los principales aspectos del desarrollo de esta asignatura durante el curso 2000-2001. Desde la perspectiva de los aspectos conceptuales de la asignatura, he especificado las características del análisis didáctico como procedimiento ideal que los grupos de futuros profesores deberían utilizar para diseñar una unidad didáctica; he caracterizado las nociones de conocimiento didáctico de referencia y significados (teórico, técnico y práctico) de referencia de los organizadores del currículo que conforman el análisis didáctico; y he restringido el objeto de estudio a aquellas nociones que componen el análisis de contenido (sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología). En relación con el conocimiento y aprendizaje de los grupos de futuros profesores, he asumido una posición con respecto al aprendizaje de los grupos de futuros profesores; he identificado dos comunidades aprendizaje en las que los grupos de futuros profesores construyen y negocian significados; he caracterizado las nociones de conocimiento didáctico y significado parcial (teórico, técnico y práctico) de un grupo de futuros profesores; he delimitado la noción de desarrollo (evolución) del conocimiento didáctico de un grupo de futuros profesores; y he concretado unos factores de desarrollo que organizan los atributos de las producciones y las actuaciones de los grupos de futuros profesores.

Parto de dos conjeturas. La primera, que es posible organizar y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. Es decir, que es posible identificar estados de desarrollo que se manifiestan en las producciones y actuaciones de los grupos de futuros pro-

¹³¹ En otras palabras, delimitaré el contexto de investigación, precisaré un marco teórico y propondré un esquema metodológico (Rico, 1999a).

fesores. La segunda, que es posible abordar el aprendizaje de un grupo de futuros profesores desde la perspectiva sociocultural.

Estas puntualizaciones me permiten concretar la pregunta general que mencioné en el apartado anterior en unas preguntas de investigación específicas:

1. ¿Cuáles son los significados parciales, con respecto a las nociones del análisis de contenido, que emergen en el desarrollo del conocimiento didáctico cuando los grupos de futuros profesores participan en la asignatura?
2. ¿Cómo se puede describir la evolución de estos significados parciales en términos de estados y factores de desarrollo?
3. ¿Cómo se pueden caracterizar los estados de desarrollo, en caso de que estos se puedan determinar?
4. ¿Es posible explicar estos estados de desarrollo, y los significados parciales asociados, en términos de lo que sucede en la comunidad de aprendizaje del aula y en la comunidad de aprendizaje de uno de los grupos?

A partir de estas preguntas de investigación, puedo enunciar el segundo objetivo general de investigación que concreté en el apartado 7 del capítulo 1. Se trata de

describir y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato del curso 2000-2001 con respecto a las nociones que componen el análisis de contenido.

Preciso este objetivo general en los siguientes objetivos específicos.

1. Para cada una de las nociones consideradas y para las relaciones entre ellas, describir y caracterizar
 - ◆ los significados parciales que los grupos de futuros profesores desarrollan a lo largo de la asignatura y
 - ◆ la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores en términos de estados y factores de desarrollo.
2. Por otro lado, también busco
 - ◆ proponer conjeturas que permitan explicar la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores, y
 - ◆ contrastar algunas de estas conjeturas.

2. METODOLOGÍA: SELECCIÓN DE UNAS OPCIONES

En el capítulo 1, describí el contexto que dio lugar a este proyecto de investigación. Mostré que se enmarca dentro de una línea de investigación del grupo Pensamiento Numérico y Algebraico de la Universidad de Granada. Justifiqué las opciones que escogí y que diferenciaron este trabajo de otros estudios que se habían realizado dentro de esa línea de investigación. En particular, decidí:

- ◆ abordar el problema en el contexto de la asignatura misma, en cambio de diseñar un experimento controlado,

- ◆ interesarme específicamente por el conocimiento didáctico de los futuros profesores, en cambio de poner el foco en la evaluación de un programa de formación, y
- ◆ centrarme en una aproximación evolutiva al estudiar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores.

Estas decisiones definieron un primer marco de referencia para la investigación y expresaban mis visiones personales sobre lo que yo consideraba interesante e importante.

2.1. Un Trabajo Personal y Colectivo

Éste es un esfuerzo personal de investigación y, por esa razón, he redactado este informe en voz activa y en primera persona del singular. Como lo expliqué en el capítulo 1, en este trabajo yo asumí tres roles independientes pero relacionados (y en muchas ocasiones simultáneos):

- ◆ contribuí al avance en la conceptualización de los principales elementos en los que se fundamenta el diseño de la asignatura y participé activamente en el diseño curricular de su segundo bloque temático;
- ◆ estuve a cargo del desarrollo curricular de ese bloque temático en el curso 2000-2001; y
- ◆ realicé el proyecto de investigación objeto de este documento.

Por lo tanto, este reporte describe el camino que, como diseñador, formador e investigador, recorrí durante varios años en mi relación con la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en general, y con un programa de formación, en particular. Este recorrido se puede interpretar como un proceso de investigación sobre la propia práctica (Ponte et al., 2003). Yo no fui el foco de la investigación, pero su diseño y sus resultados hablan sobre mis creencias, valores y actitudes, por un lado, y sobre mi actuación como formador e investigador, por el otro. Por esa razón, considero importante explicitar esas creencias, valores y actitudes y mostrar cómo influyeron en las decisiones que tomé y que delimitaron la estrategia metodológica que llevé a la práctica.

Aunque en el párrafo anterior he enfatizado el aspecto personal de este trabajo, en el capítulo 1 resalté el hecho de que las actividades de diseño, desarrollo e investigación se realizaron en equipo. De hecho, puedo interpretar, *a posteriori*, el trabajo que hicimos como un ejemplo de “experimento de desarrollo profesoral” (Simon, 2000). Simon propone este esquema como una respuesta a la dificultad de formar profesores e investigar sobre esa misma formación: “los investigadores pueden estudiar el desarrollo al comprometerse en la promoción del desarrollo a través de un ciclo continuo de análisis e intervención” (p. 336). El trabajo de los formadores-investigadores se ubica en un ciclo permanente de dos actividades: una de reflexión en la que se hace análisis, se generan hipótesis y se construyen modelos, y otra de interacción en la que se explora, se verifican las hipótesis y se promueve el desarrollo. El punto central de la metodología es que “el investigador promueve el desarrollo profesoral como un medio para estudiar ese desarrollo” (p. 342). Se hacen dos tipos de análisis. Uno permanente y “en vivo”, que tiene lugar durante y entre las sesiones de interacción. Ésta es la base para las intervenciones espontáneas y planeadas con los futuros profesores y genera modificaciones del conocimiento del investigador sobre el conocimiento del futuro profesor. El otro,

retrospectivo, se focaliza en una secuencia de sesiones y permite reexaminar un cuerpo grande de información. En él se desarrollan y articulan los modelos del conocimiento de los futuros profesores, pues permite una visión estructurada de lo sucedido.

Aunque, como investigadores, no diseñamos nuestras actividades a partir de las guías del experimento de desarrollo profesoral, éstas sí pueden interpretarse en esos términos. En particular, durante los cursos 1999-2000 y 2000-2001 mi director de tesis, Luis Rico, otro doctorando, José Ortiz, y yo hicimos el análisis permanente y sistemático de lo sucedido en clase. Inmediatamente después de cada sesión, discutíamos y reflexionábamos sobre lo sucedido en el aula. Estas reflexiones daban lugar, por un lado, a posibles cambios en el diseño de las sesiones siguientes y, por el otro, sugerían ideas y posibles estrategias de investigación. Adicionalmente, realicé con mi director de tesis varias reuniones de “análisis retrospectivo” en las que considerábamos el desarrollo global de la asignatura y reflexionábamos sobre el curso de la investigación. Una proporción importante de las ideas que he expuesto en los capítulos anteriores son fruto de estas discusiones y reflexiones.

2.2. Opciones en los Aspectos Conceptuales

Mis creencias y valores se expresan, en primera instancia, en las opciones conceptuales que he asumido y que he presentado en los capítulos anteriores. Estas opciones se refieren a:

- ◆ una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas —el análisis didáctico—, que expresa mi visión de las actividades que idealmente debería realizar un profesor a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas;
- ◆ una visión funcional del conocimiento del profesor que, partiendo del análisis didáctico, permite caracterizar la competencia de planificación y el conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas de secundaria;
- ◆ una posición acerca de cómo se construye y desarrolla ese conocimiento;
- ◆ una propuesta, basada en los elementos anteriores, acerca de cómo se debe realizar la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, que se expresa en el diseño curricular de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato; y
- ◆ una descripción detallada de cómo se desarrolló la asignatura y, por consiguiente, de cómo realizamos nuestro papel de formadores.

Estas opciones configuraron el marco en el que realicé los estudios empíricos que presentaré en los capítulos que siguen. Con base en ellas, he estructurado una conceptualización del fenómeno que pretendo estudiar y he concretado los significados de los términos claves de la investigación. Por ejemplo, he postulado tres constructos, los significados parciales de los grupos de futuros profesores, los estados y los factores de desarrollo, como medios para conceptualizar, analizar e interpretar las actuaciones y producciones de los grupos de futuros profesores. Como lo mencioné anteriormente, esta conceptualización cambia el foco de atención de la evaluación de un modelo de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria a la caracterización y explicación del desarrollo del conoci-

miento didáctico de los futuros profesores que participaron en la asignatura en un curso académico concreto.

2.3. Opciones en la Aproximación Metodológica

Dentro de los límites que establece el marco conceptual que acabo de describir, es posible pensar en múltiples estrategias metodológicas para abordar el problema de investigación. Desde el punto de vista de las fuentes de información y sus posibles análisis, se podría, por ejemplo, pensar en diseñar un experimento controlado — como los que realizaron Bedoya (2002) y Ortíz (2000)—; diseñar, implantar (en diferentes momentos de la asignatura) y analizar cuestionarios especialmente diseñados para la investigación; realizar entrevistas con todos los grupos de futuros profesores en diferentes momentos de la asignatura; hacer seguimientos (con entrevistas y teniendo en cuenta sus trabajos e intervenciones) de futuros profesores concretos; grabar en vídeo las sesiones de clase; o comprometer a los futuros profesores en el diseño y realización de la investigación. No utilicé ninguno de los métodos anteriores. De hecho, la selección de métodos estuvo delimitada por dos cuestiones:

- ◆ la intención de que la realización de la investigación afectará en la menor medida posible el desarrollo de la asignatura, y
- ◆ la decisión de centrar la atención en el trabajo y producciones de los grupos de futuros profesores, dejando en un segundo plano el análisis de las actuaciones y producciones de los futuros profesores, como individuos.

La primera opción es natural: la asignatura ha sido y continúa siendo objeto de investigación. Estos procesos no deben afectar su normal desarrollo. Esto no quiere decir que yo considere que el hecho de investigar fenómenos que tienen lugar dentro de la asignatura no afectan su desarrollo. Es evidente que lo afectan, por ejemplo, en nuestras actuaciones y actitudes, como formadores, hacia su diseño y desarrollo. No obstante, ese diseño y desarrollo estuvo siempre guiado por el propósito central de contribuir a la formación de los futuros profesores. La segunda opción es consecuencia de una visión: los profesores no trabajan, ni aprenden solos; los futuros profesores tampoco, y esto se expresa en las opciones conceptuales que enumeré en el apartado anterior y en el diseño mismo de la asignatura.

Estas opciones implicaron mi intención de realizar la investigación utilizando la información que surge naturalmente de la asignatura. Describiré estas fuentes de información en el apartado siguiente. Por otro lado, centré mi atención en las actuaciones y producciones que los futuros profesores realizaron y produjeron como grupos. Pero, aún así, había más opciones dentro de las que podía escoger.

El estudio habría podido restringirse a la descripción y caracterización de las actuaciones y las producciones de los grupos de futuros profesores. No obstante, en los análisis previos al curso 2000-2001 y teniendo en cuenta el diseño de la asignatura, era evidente que una parte importante del aprendizaje de los grupos de futuros profesores tenía lugar cuando ellos trabajaban por fuera del aula realizando las tareas que se les había asignado en clase. Ese trabajo había sido, hasta el momento, una “caja negra”. Si quería comprender, al menos parcialmente, cómo y por qué los grupos de futuros profesores actuaban como lo hacían y producían la información que presentaban en clase, era necesario explorar el trabajo que realizaban por fuera del aula. Por esa razón, decidí explorar esos procesos de negocia-

ción de significado. Habría podido, por ejemplo, entrevistar sistemática y periódicamente a uno o varios de los grupos de futuros profesores sobre estas actividades. Pero, sin saber exactamente a lo que me iba a enfrentar, decidí explorar estos procesos en detalle, grabando en audio las sesiones de trabajo de uno de los grupos. Aquí también tomé decisiones: habría podido grabar las sesiones de todos los grupos, pero era evidente que esto produciría una cantidad de información cuyo análisis sobrepasaría las posibilidades de un solo investigador. Por esta razón, me restringí a un solo grupo, pero decidí contrastar esta información con las entrevistas a otros dos grupos en dos momentos de la asignatura: al finalizar el bloque sobre el análisis de contenido y al final de la asignatura.

Estas opciones delimitaron las fuentes de información que describo en el siguiente apartado.

2.4. Un Estudio de Caso

En el capítulo 5, describí la diversidad de contextos en los que se realiza la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en el mundo y cómo esta diversidad implica también una gran variedad de aproximaciones y modelos con los que se aborda. Por esa razón, en ese capítulo, describí en detalle el contexto en el que tiene lugar la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato. Esta investigación tiene lugar y se refiere a ese contexto. Es, por lo tanto, un estudio de caso: el caso del desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores en una asignatura concreta en un momento específico. En ese sentido, la investigación no se refiere a la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en general, ni supone que todos los futuros profesores son similares. Por el contrario, el estudio tiene en cuenta las circunstancias específicas de los futuros profesores granadinos, tal y como las describí en el capítulo 5. Los argumentos que presenté allí justifican una visión situada de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y esta visión ha guiado mi aproximación al problema de investigación. En términos de Schoenfeld (2000b, p. 643), el propósito de la investigación es dar una “prueba de existencia”; es decir, presentar evidencias de un caso en el que una estrategia (de formación) produce unos resultados. La complejidad de los procesos que configuran el fenómeno estudiado y que se hacen patentes en la descripción del diseño y el desarrollo de la asignatura que presenté en los capítulos 5 y 6, ponen de manifiesto la necesidad de tener en cuenta esta complejidad a la hora de pensar en replicar esta investigación. Por esta razón, incluyo con este reporte todos los registros de información en los que basé los análisis que dieron lugar a los resultados de la misma.

2.5. Función de la Investigación

Al alejarme conceptual y metodológicamente de la intención de evaluar un modelo de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, también decidí no pretender que los resultados de la investigación dieran respuesta a preguntas del estilo “¿qué es lo que funciona en el aula?” o “¿qué método es mejor?”. Estas preguntas involucran una complejidad tal que resulta muy difícil dar respuestas que al mismo tiempo sean relevantes y puedan generalizarse. Me interesé más bien en el problema de comprender el proceso de aprendizaje de los grupos de futuros profesores en unas circunstancias concretas. En este sentido, esperaba que la

caracterización del desarrollo de su conocimiento didáctico aportara luces sobre las dificultades y logros que estos grupos de futuros profesores enfrentaron y alcanzaron al realizar las tareas y sobre las posibles causas de estas dificultades y logros. Esta información sería relevante para la revisión del diseño de la asignatura. Ésta es una consecuencia práctica evidente de los resultados de esta investigación y que nos ha afectado a nosotros como diseñadores y formadores y que podría afectar (como, de hecho, lo ha hecho) a los futuros profesores que han participado en versiones posteriores de la asignatura. Esta información también podría ser relevante, sujeta a la interpretación correspondiente, para otros formadores y otras asignaturas que, en alguna medida, fundamentan la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en un modelo similar al nuestro.

Una “prueba de existencia” es también una contribución al conocimiento de la disciplina de didáctica de la matemática. Cada investigador y cada formador puede interpretar y adaptar los resultados de los estudios empíricos que presento más adelante a su contexto específico y a los problemas que se configuran dentro de ese contexto.

Finalmente, como lo mencioné en el capítulo 1, este proyecto de investigación también pretende hacer contribuciones desde el punto de vista conceptual. Estas contribuciones conforman una aproximación a la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que, aunque abordan sólo una parte de dicha complejidad, pretenden ser una respuesta coherente y estructurada a las preguntas generales con las que comencé este capítulo.

3. FUENTES DE INFORMACIÓN: UNA APROXIMACIÓN NATURALISTA

En los capítulos 5 y 6 describí el diseño y el desarrollo curricular de la asignatura en el curso 2000-2001. Allí precisé los esquemas de trabajo que se utilizaron en el bloque temático correspondiente al análisis didáctico. En particular, en la sección 4.2 del capítulo 5 expuse el ciclo metodológico de tratamiento del análisis didáctico (ver Figura 35). Este esquema de trabajo dio lugar a tres tipos de información que utilicé en los estudios empíricos:

1. la información contenida en las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores y por los formadores para hacer sus presentaciones en clase,
2. la información contenida en las transcripciones de las grabaciones de audio de las sesiones de clase y
3. la información contenida en los trabajos finales presentados por los grupos de futuros profesores.

Utilicé dos fuentes de información adicionales:

4. las transcripciones de las grabaciones de audio de entrevistas semi-estructuradas a los grupos cónicas y progresiones aritméticas y geométricas al finalizar el análisis didáctico y al final de la asignatura y

5. las transcripciones de las grabaciones de audio de las sesiones de trabajo fuera del aula del grupo función cuadrática en su proceso de elaboración de sus presentaciones y del trabajo final.

Con excepción de las cuatro entrevistas que menciono en el punto 4, la información que utilicé en los estudios empíricos surge naturalmente de las actividades que se realizan normalmente en la asignatura. Tanto formadores, como futuros profesores fueron informados, desde un comienzo, de la realización de los estudios empíricos y de los propósitos que se buscan al recoger esta información. Dado que la información se recogió de manera continua a lo largo cinco meses de trabajo, se apreció que los futuros profesores se acostumbraron a la presencia de la grabadora de audio. No se apreció ninguna actitud o actuación que estuviese especialmente dirigida o adaptada al hecho de que se pretendiese analizar la información correspondiente.

4. CUATRO ESTUDIOS

Con el propósito de abordar el problema de investigación y lograr los objetivos que enumeré en el apartado 1 de este capítulo, organicé el proyecto en cuatro estudios. Identifiqué cada estudio con su fuente principal de información:

- ◆ análisis de las presentaciones,
- ◆ análisis de las producciones y actuaciones de los grupos de futuros profesores en el aula y en las entrevistas a dos grupos de futuros profesores,
- ◆ análisis de los trabajos finales y
- ◆ análisis de las actuaciones del grupo función cuadrática en su trabajo por fuera del aula.

En lo que sigue, denominaré estos estudios *presentaciones*, *producciones*, *trabajos finales* y *grupo función cuadrática*, respectivamente. A continuación, describo brevemente cada uno de estos estudios.

En el estudio sobre las presentaciones tomo una información esquemática (aquella contenida en las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores en sus presentaciones) y busco identificar y describir cuatro estados de desarrollo del conocimiento didáctico a partir de los cuales se pueda caracterizar la evolución de este conocimiento y comparar el progreso y avance de los diferentes grupos. Este estudio tiene un carácter cuantitativo.

En el estudio sobre las producciones analizo las producciones y actuaciones de los grupos de futuros profesores en el aula y las transcripciones de las entrevistas, teniendo en cuenta la especificidad que corresponde al tema escogido por cada grupo. Con este análisis busco profundizar en el significado de los estados de desarrollo y de las variables que caracterizan a esos estados. Este estudio es de carácter cualitativo y con él busco formular conjeturas de explicación de algunos aspectos de la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores, con respecto a los factores de desarrollo variedad y organización.

En el estudio sobre los trabajos finales analizo los documentos que los grupos de futuros profesores presentaron al final de la asignatura, con el propósito de explorar cómo ellos pusieron en práctica (en los otros análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica) la información que recogieron para los or-

ganizadores del currículo del análisis de contenido. De esta manera, caracterizo el desarrollo de su conocimiento didáctico desde la perspectiva del factor de desarrollo que he denominado “papel”.

Los tres estudios anteriores centran su atención en la comunidad de práctica del aula. En el estudio sobre el grupo función cuadrática pongo el foco de atención en la comunidad de práctica de un grupo concreto para el que describo y analizo los procesos de negociación de significado que dan lugar a sus producciones. Busco formular conjeturas de explicación de algunos aspectos de la evolución del conocimiento didáctico de este grupo.

Los cuatro estudios comparten el marco conceptual general común que he resumido al comienzo de este capítulo. Pero, también, cada estudio, dentro de este contexto general, aborda un problema de investigación específico que implica también una especificidad correspondiente en objetivos, marco conceptual, esquema metodológico e interpretación de resultados.

En los capítulos que siguen, describo cada uno de estos estudios.

CUATRO ESTADOS DE DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

En este capítulo, presento la primera aproximación a la caracterización del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. Para ello, utilizo la información contenida en las transparencias que ellos utilizaron para hacer sus presentaciones periódicas en clase¹³².

Con este estudio, yo quería contrastar dos conjeturas: (a) que los significados parciales de los grupos de futuros profesores que se reflejan en sus transparencias siguen patrones que se pueden identificar y caracterizar; y (b) que se pueden establecer patrones en la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores tal y como se manifiesta en sus transparencias (ver capítulo 7). Utilicé la noción de factor de desarrollo (capítulo 4) para interpretar la información contenida en las transparencias en términos de la evolución de los significados parciales de los grupos de futuros profesores con respecto a cada uno de los organizadores del currículo del análisis de contenido. De esta manera, me impuse unas metas concretas: (a) identificar los atributos más representativos de las transparencias de los grupos de futuros profesores; (b) definir unas variables de análisis a partir de estos atributos; (c) verificar que estas variables siguen patrones estables en el tiempo; (d) identificar y caracterizar unos estados de desarrollo a partir de estas variables; y (e) describir y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico a partir de esos estados de desarrollo.

Para lograr estas metas, diseñé y puse en práctica un esquema metodológico que involucró varios procedimientos. En una primera etapa, codifiqué la información contenida en las transparencias con un sistema de 120 variables dicotómicas. Estas variables de codificación pretendían capturar los atributos más relevantes de

¹³² Para efectos de facilitar la lectura, utilizaré frecuentemente el término “transparencia” para referirme a la información contenida en estos documentos.

las transparencias desde el punto de vista de los objetivos de la investigación. En una segunda etapa, y utilizando la noción de factor de desarrollo, analicé los resultados de esta codificación e identifiqué y caractericé un conjunto de 12 variables de análisis cuyos valores se calculan a partir de los valores de las variables de codificación. En este punto, pude verificar la primera conjetura, al establecer un número reducido de variables con las que me fue posible abordar las principales características de las presentaciones y discernir posibles patrones en la evolución de los valores de las variables. En una tercera etapa, diseñé y puse en práctica un esquema de análisis de la información con el que pude establecer y caracterizar (en términos de las variables de análisis) cuatro estados de desarrollo y asignar cada transparencia a uno de esos estados de desarrollo. Así, verifiqué la segunda conjetura y satisficé los objetivos específicos que me impuse originalmente.

El principal resultado del estudio es la verificación de las dos conjeturas iniciales, verificación que tiene como implicación la identificación y caracterización de cuatro estados de desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Adicionalmente, el esquema metodológico que utilicé me permitió profundizar en algunas características de este proceso. En particular, los resultados ponen en evidencia el hecho de que los grupos de futuros profesores consolidan su conocimiento didáctico de los organizadores del currículo del análisis de contenido con un desfase con respecto al momento en que esas nociones se tratan en la asignatura. Además el ritmo de progreso de los diferentes grupos no es uniforme y, por lo tanto, se pueden establecer similitudes y diferencias en el desarrollo de su conocimiento didáctico. Finalmente, es posible identificar aquellos organizadores del currículo del análisis de contenido que generan mayores dificultades.

En lo que sigue, describo en detalle el estudio. Comienzo el primer apartado presentando el proceso en virtud del cual identifiqué y definí las variables de codificación que caracterizan la información contenida en una transparencia. En seguida, y a partir de estas variables de codificación, defino las 12 variables de análisis con las que se singulariza cada transparencia. Después, describo el procedimiento en virtud del cual se obtiene la caracterización de cuatro estados de desarrollo. Presento estos estados de desarrollo y la asignación final de las 72 transparencias a esos estados en el siguiente apartado. Dado que el procedimiento que diseñé y utilicé no es un método estándar de agrupamiento, discuto sobre su conveniencia e identifico sus virtudes y defectos al compararlo con un método estándar de agrupamiento (el análisis clúster). Finalmente, analizo e interpreto los resultados.

1. DE LAS 72 TRANSPARENCIAS A LOS CUATRO ESTADOS DE DESARROLLO

En el capítulo 6, presenté las transparencias que utilizó el grupo función cuadrática para hacer sus presentaciones. En la Figura 53 reproduzco la Figura 42 del capítulo 6 correspondiente a la transparencia con la que este grupo presentó su segunda versión de la estructura conceptual y los sistemas de representación.

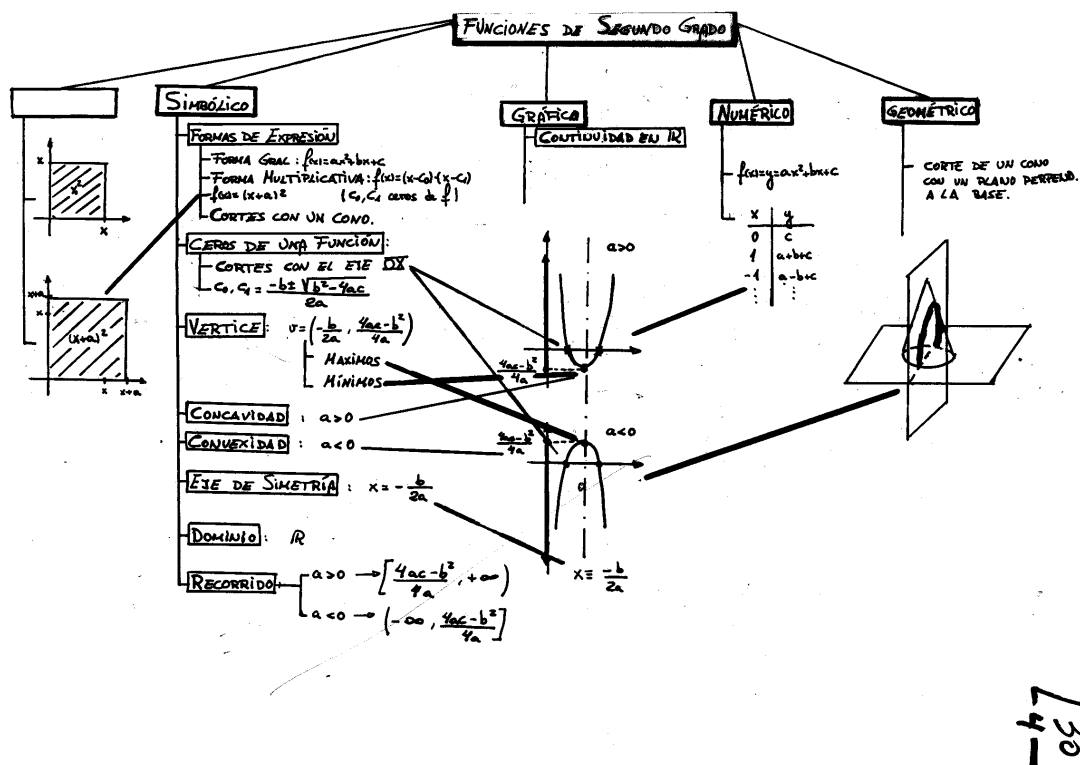


Figura 53. Estructura conceptual y sistemas de representación del grupo función cuadrática (segunda versión)

Al observar este ejemplo, resulta evidente que hay gran cantidad de información en una transparencia. Esta información es la expresión del estado de desarrollo del repertorio compartido de un grupo de futuros profesores en un momento dado. Mi problema consistía en diseñar un esquema de codificación y análisis de las transparencias de los grupos que me permitiera caracterizar dicho desarrollo. Aunque cada grupo trabajó, a lo largo de la asignatura, en un tema matemático concreto, yo estaba interesado en producir una caracterización de la evolución de los significados parciales de los diferentes grupos de futuros profesores que fuese independiente de los temas matemáticos. En otras palabras, me interesaba comparar el progreso de los diferentes grupos. ¿Cómo codificar las 72 transparencias para lograr estos propósitos? Antes de presentar el esquema de codificación y análisis que diseñé para abordar este problema, describo a continuación la información que tenía disponible.

1.1. 72 Transparencias de Ocho Grupos

Recordemos que se conformaron ocho grupos de futuros profesores. Cada grupo trabajó sobre un tema matemático. Los temas fueron los siguientes: gráficas y funciones, progresiones, números decimales, probabilidad, cónicas, esfera, función cuadrática y sistemas de ecuaciones lineales. Todos los grupos hicieron nueve presentaciones a lo largo de la asignatura (relacionadas con el análisis didáctico y el diseño de la unidad didáctica). Los temas de estas presentaciones fueron los siguientes:

1. primera versión de la estructura conceptual del tema,

2. segunda versión de la estructura conceptual,
3. estructura conceptual y sistemas de representación (segunda versión),
4. sistemas de representación y primera versión del análisis fenomenológico,
5. segunda versión del análisis fenomenológico,
6. errores y dificultades,
7. diseño de una actividad de enseñanza y aprendizaje,
8. diseño de una actividad de evaluación y
9. presentación del trabajo final.

1.2. Atributos que Caracterizan una Transparencia

Una transparencia de un grupo presenta información esquemática sobre el análisis que ese grupo ha hecho de su tema. Cada análisis utiliza como herramienta uno o más organizadores del currículo. Mi propósito era construir un instrumento de codificación de esta información que satisficiera tres condiciones:

1. Debía servir para todas las transparencias. Es decir, el esquema de codificación debía ser independiente del tema de cada grupo y del momento de la asignatura en que se produjo la presentación.
2. El producto de la codificación de las transparencias debía servir de información básica para el análisis de los cambios en las transparencias, como indicativo del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. En otras palabras, los resultados de la codificación debían proveer la información necesaria y suficiente para la identificación y cálculo de las variables con los que se caracterizarían unos hipotéticos estados de desarrollo.
3. El esquema de codificación debía ser suficientemente sencillo y claro para asegurar su confiabilidad.

Mi propósito era entonces definir un conjunto de variables de codificación con el que pudiera caracterizar los atributos de las 72 transparencias. Para identificar estas variables de codificación, realicé un proceso cíclico, siguiendo las pautas de la investigación fundada (Corbin y Strauss, 1990). El punto de partida era claro: debía fundamentarme en el marco conceptual que presenté en los capítulos 2, 3 y 4. Dado que cada transparencia era la expresión de los significados parciales de un grupo en un momento dado, su codificación debía fundamentarse en las nociones de significado de referencia y significado parcial de un grupo de futuros profesores que presenté en el capítulo 4 y que ejemplifiqué, para el caso de la función cuadrática, en el capítulo 2.

Consideremos por ejemplo, la noción de sistemas de representación. En el capítulo 2 resalté la importancia de que el análisis de un concepto matemático implique la identificación de las diferentes maneras como ese concepto se puede representar. En el caso de la función cuadrática, mostré que este concepto se puede representar eficientemente en los sistemas simbólico, gráfico, numérico y geométrico. Otros conceptos pueden requerir otros sistemas de representación. Al analizar las 72 transparencias desde esta perspectiva, decidí considerar los siguientes sistemas de representación: simbólico, gráfico, numérico, geométrico, figurativo,

verbal y otros. Hice la aclaración de que el sistema de representación gráfico se refiere principalmente a gráficas dentro del plano cartesiano, mientras que el sistema de representación geométrico se refiere a representaciones de geometría plana o del espacio, pero sin referencia a ejes de coordenadas. Este listado da lugar a seis variables dicotómicas para la codificación de una transparencia. Con cada variable se establece si en la transparencia aparece o no el sistema de representación correspondiente (utilizo el valor 1 para el primer caso y 0 para el segundo). Entonces, para el caso de la transparencia que corresponde a la Figura 53, se obtienen los valores de las variables que presento en la Tabla 10.

Sistema de representación							
	Simbólico	Gráfico	Númérico	Geométrico	Figurativo	Verbal	Otro
Valor	1	1	1	1	0	0	0

Tabla 10. Valores de variables de codificación “Existencia sistemas de representación”

Otro aspecto que considero en el significado técnico de esta noción se refiere a las operaciones entre los sistemas de representación. En el capítulo 2, introduje las transformaciones sintácticas y las traducciones entre sistemas de representación. Con base en este significado técnico, y teniendo en cuenta que los grupos de futuros profesores presentan su análisis utilizando mapas conceptuales, establecí dos categorías de variables dicotómicas para caracterizar las transparencias de acuerdo con estos significados: conexiones que se establecen entre elementos de un mismo sistema de representación y conexiones que se establecen entre sistemas de representación. Adicionalmente, y teniendo en cuenta las reflexiones y los análisis que realicé con Cristina Carulla en un estudio anterior (Gómez y Carulla, 2001b), introduje cuatro variables de codificación adicionales que caracterizan las conexiones que se pueden establecer entre los elementos de un mapa conceptual. Estas variables establecen si hay conexiones puntuales, globales, implícitas o explícitas. En la Tabla 11 presento las definiciones de estas variables.

Variable	Definición
Puntuales	Una conexión es puntual si conecta dos elementos específicos
Globales	Una conexión es global si conecta grupos de elementos
Implícitas	Una conexión es implícita cuando en un sistema de representación se utiliza un término de otro sistema de representación para identificar un elemento
Explícitas	Una conexión es explícita cuando aparece una línea que une los elementos

Tabla 11. Definición de variables de conexión

En la Tabla 12 presento el resultado de codificar la transparencia que se presenta en la Figura 53 con estas variables. Las variables son dicotómicas y establecen si el tipo o número de conexiones aparece en la transparencia.

Variable	Valor
Conexiones internas a un sistema de representación	
0	1
1	0
2	0
3 o más	0
Conexiones entre sistemas de representación	
0	0
1	0
2	0
3 o más	1
Tipos de conexiones	
Globales	0
Puntuales	1
Implícitas	1
Explícitas	1

Tabla 12. Ejemplo de codificación para tipos de conexiones en el mapa conceptual

El proceso de identificación y definición de las variables de codificación fue cíclico. Partiendo de los significados de referencia de los organizadores del currículo del análisis de contenido, produce una lista de variables con la que hice una primera codificación de las 72 transparencias. En seguida, maticé y extendí el listado inicial teniendo en cuenta los factores de desarrollo: organización, variedad (complejidad) y papel. Adicionalmente, tuve en cuenta el esquema que habíamos utilizado en estudios anteriores. Con estos criterios, realicé varios ciclos de codificación, buscando, en cada ciclo, afinar la selección y definición de las variables de codificación. Presento la lista final de las 120 variables de codificación, con sus respectivas definiciones, en el Anexo H. Sería muy dispendioso describir aquí el detalle de la definición de estas variables. A continuación presento una descripción general de las mismas.

Las variables caracterizan las transparencias de acuerdo con diversos criterios. Desde la perspectiva del factor de desarrollo denominado “papel”, se registra el uso que se hace de cada una de los tres organizadores del currículo del análisis de contenido en los otros análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica. Desde la perspectiva del factor de desarrollo denominado “complejidad”, se tiene en cuenta, por ejemplo, el número de niveles de los mapas conceptuales, el número de sistemas de representación que se utilizan, el número de los diversos tipos de conexiones, el número de fenómenos de diferentes tipos y el número de subestructuras. Desde la perspectiva del factor de desarrollo denominado “organización”, se tiene en cuenta, por ejemplo, la forma en que se presenta la estructura conceptual (como listado o como mapa conceptual), el tipo de contenido en la estructura conceptual (e.g., hechos, conceptos, estructuras conceptuales, propiedades, operaciones, tipos, errores y teoremas), el esquema con el que se organiza la estructura conceptual (e.g., de acuerdo con los sistemas de representación o el análisis fenomenológico), la jerarquía con la que se presentan los siste-

mas de representación, la relación entre lo simbólico y lo conceptual en el mapa conceptual y las relaciones entre fenómenos y subestructuras. Adicionalmente a los factores de desarrollo, identifiqué otras variables de codificación que buscaban registrar características particulares de los significados parciales que se expresaban en las transparencias. Es el caso, por ejemplo, de presentar lo fenomenológico como un sistema de representación.

1.3. Variables y Observaciones

La caracterización de unos hipotéticos estados de desarrollo sería muy compleja si se partiera de la información básica que se obtiene a partir de las 120 variables de codificación. Por lo tanto, el siguiente paso debía ser en un proceso de síntesis que:

- ◆ utilizara la información básica que surge de la codificación descrita en la sección anterior y
- ◆ resumiera esa información en un número reducido de variables de análisis a partir de las cuales fuese posible identificar y caracterizar los estados de desarrollo del conocimiento didáctico.

Para identificar estas variables de análisis tuve en cuenta varias cuestiones: lo que nuestra experiencia como formadores nos indicaba sobre cómo los grupos de futuros profesores avanzan en su aprendizaje; la revisión y el análisis sistemático de las transparencias y de su codificación; los significados de referencia de los organizadores del currículo del análisis de contenido; y el análisis de los factores de desarrollo y su significado. Los factores de desarrollo fueron el hilo conductor en el proceso de transformar y resumir los datos básicos (que surgen de las variables de codificación) en las variables de análisis. De esta reflexión, surgió un primer grupo de variables, cuya definición fui refinando en un proceso cíclico. En cada ciclo, analicé los resultados que se obtenían al utilizar las variables para caracterizar las transparencias; contrasté su definición con el marco conceptual del estudio; y revisé su significado a partir de mi experiencia como formador. Al final de este proceso obtuve 12 variables:

1. número de niveles del mapa conceptual que describe el tema (complejidad EC),
2. existencia de las nociones centrales del tema en la estructura conceptual (nociones centrales),
3. número de criterios de organización de la estructura conceptual (criterios de organización),
4. uso coherente de los criterios de organización (uso coherente criterios),
5. número de conexiones (conexiones),
6. número de sistemas de representación (variedad SRS),
7. papel de los sistemas de representación como organizadores de la estructura conceptual (SRS como organizador),
8. número de contextos (matemático, natural, social) a los que pertenecen los fenómenos presentados (variedad fenómenos),

9. número de disciplinas a los que pertenecen los fenómenos presentados (variedad disciplinas),
10. número de subestructuras utilizadas para organizar los fenómenos (variedad subestructuras),
11. papel de los tres organizadores del currículo del análisis de contenido en el uso de los otros organizadores del currículo y en el diseño de la unidad didáctica (papel), y
12. coherencia entre lo propuesto en la estructura conceptual y el uso que de ella se hace en las otras fases de la asignatura (coherencia EC).

Los valores de estas variables se obtienen a partir de los valores de las variables de codificación. Por ejemplo, para una transparencia dada, el valor de la variable 5, conexiones, se obtiene a partir de los valores de las variables de codificación que describí en la sección anterior. En la Tabla 13 presento los valores de estas variables para el caso de la transparencia que se representa en la Figura 53. En lo que sigue, utilizaré el término *observación* para referirme a la interpretación de la información contenida en una transparencia en términos de las variables de análisis que acabo de presentar.

	Variable	Valor
1	Complejidad EC	2
2	Nociones centrales	1
3	Criterios de organización	2
4	Uso coherente criterios	1
5	Conexiones	3
6	Variedad SRS	2
7	SRS como organizador	2
8	Variedad fenómenos	3
9	Variedad disciplinas	4
10	Variedad subestructuras	2
11	Papel	0
12	Coherencia EC	0

Tabla 13. Ejemplo de una observación

En su momento, consideré que esta lista de variables capturaba apropiadamente los atributos más relevantes de las transparencias y se constituía en el punto de partida para la identificación y caracterización de los estados de desarrollo. Más tarde, cuando, en el segundo estudio de este proyecto (ver capítulo 9), analicé (de manera cualitativa) las presentaciones de los grupos de futuros profesores y sus correspondientes transparencias, sin las restricciones impuestas en este primer estudio, identifiqué algunas variables adicionales (en particular, para el análisis fenomenológico) que habrían podido modificar la lista anterior. No obstante, como mostraré en el siguiente capítulo, estas variables adicionales no son compatibles con el análisis cuantitativo que se propone en el estudio que presento en este capítulo. Además, mostraré que la inclusión de esas variables de análisis no habría

afectado los resultados de este estudio. Por estas razones, mantuve la lista original de variables.

1.4. Estados de Desarrollo

El paso siguiente consistió en verificar mi conjetura sobre la existencia de patrones en la evolución de la información en las transparencias de los grupos de futuros profesores. Éste fue un proceso de exploración que partió de suponer que la conjetura era válida y verificar las consecuencias de tal suposición. En otras palabras, supuse que la sucesión de transparencias de los grupos se ceñía a patrones estables de cambio y que era posible representar esos patrones en términos de las variables de análisis previamente definidas (ver Figura 30 del capítulo 4). Para ello, analicé la evolución de las transparencias de cada grupo, identificando aquellas variables que cambiaban de una presentación a la siguiente y estableciendo una primera aproximación a posibles estados de desarrollo. Presento los resultados de este primer análisis en el Anexo I. Surgieron cuatro posibles estados de desarrollo. Decidí que éste era un número adecuado de estados para analizar y discriminar apropiadamente las observaciones, por dos razones. Primero, este número de estados de desarrollo coincidía con el número de fases en las que se desarrolló la asignatura con respecto a los organizadores del currículo del análisis de contenido: estructura conceptual, sistemas de representación, análisis fenomenológico y utilización de la información producida en el análisis de contenido en los otros análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica. Y, segundo, al realizar el análisis no tuve necesidad de definir estados adicionales.

Habiendo caracterizado el conjunto de variables de análisis y decidido el número de estados, el problema consistía entonces en caracterizar esos estados en términos de combinaciones de valores de esas variables de tal forma que:

- ◆ la sucesión de estados fuesen representativos de una evolución y
- ◆ las observaciones se ajustaran tanto como fuera posible a los estados a los que eran asignadas.

El primer paso en esta búsqueda se centró en la formulación de una definición inicial de los estados que fuese coherente con el marco conceptual (el significado de referencia de los organizadores del currículo del análisis de contenido) y con mi experiencia como formador. Para ello, me basé en los factores de desarrollo: la evolución del conocimiento didáctico debía representar avances en términos de variedad (complejidad), organización y papel en el uso de los organizadores del currículo. Así, para cada variable identifiqué cuatro rangos de sus valores, correspondiendo cada rango a uno de los cuatro estados, sucesivamente. Impuse dos condiciones a la definición de los rangos: la unión de los cuatro rangos debía ser igual al rango total de los valores que podía asumir la variable; y dos rangos sucesivos de una variable podían compartir máximo un valor —a menos que el rango fuese del tipo $[n, \infty)$ —. La Tabla 14 muestra los rangos que asigné a cada una de las variables en virtud de los cuales definí la primera versión de los estados. Estos valores surgieron del análisis inicial que mencioné anteriormente y que describo en el Anexo I.

Variables	Estados			
	1	2	3	4
1 Complejidad EC	[0, 0]	[1, 1]	[2, 2]	[3, ∞)
2 Nociones centrales	[0, 0]	[0, 0]	[1, 1]	[1, 1]
3 Criterios de organización	[3, ∞)	[2, 3]	[1, 2]	[0, 1]
4 Uso coherente criterios	[0, 0]	[0, 1]	[1, 1]	[1, 1]
5 Conexiones	[0, 0]	[1, 2]	[2, ∞)	[3, ∞)
6 Variedad SRS	[0, 1]	[1, 2]	[2, ∞)	[3, ∞)
7 SRS como organizador	[0, 1]	[2, 2]	[2, 3]	[3, 3]
8 Variedad fenómenos	[0, 1]	[1, 2]	[2, ∞)	[2, ∞)
9 Variedad disciplinas	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, ∞)
10 Variedad subestructuras	[0, 0]	[0, 1]	[1, 2]	[2, ∞)
11 Papel	[0, 0]	[0, 0]	[0, 5]	[6, ∞)
12 Coherencia EC	[0, 0]	[0, 0]	[1, 1]	[1, ∞)

Tabla 14. Primera definición de estados

Esta primera definición de estados sigue las siguientes convenciones:

- ◆ Aquellos rangos del tipo $[n, \infty)$ representan rangos que expresan la existencia de n o más unidades de la variable correspondiente;
- ◆ las variables dicotómicas se representan con 0 (no) y 1 (sí);
- ◆ la variable “sistemas de representación como organizador de la estructura conceptual” (SRS como organizador) tiene los siguientes valores: 0 (no aparece), 1 (no se utiliza), 2 (organiza con otros criterios), 3 (organiza);
- ◆ en la variable “papel” se cuenta el número de ocasiones en las que el organizador correspondiente se utiliza para desarrollar una tarea (por ejemplo, en el diseño de una actividad de evaluación);
- ◆ la variable coherencia de la estructura conceptual establece el número de ocasiones en el que, al utilizarse información correspondiente a la estructura conceptual, ésta es coherente con la información originalmente propuesta para este organizador del currículo; y
- ◆ la variable “criterios de organización” es la única variable cuyos valores disminuyen a medida que se avanza en los estados, puesto que se considera que un menor número de criterios de organización de la estructura conceptual implica una mejor organización de la estructura conceptual.

Por ejemplo, de acuerdo con estas convenciones, los estados se definen en términos de la variable conexiones de la siguiente manera (ver la quinta fila de la Tabla 18): ninguna conexión para el primer estado, una o dos conexiones para el segundo estado, dos o más conexiones para el tercer estado y tres o más conexiones para el cuarto estado. Se observa, como lo mencioné anteriormente, que la caracterización de los estados en términos de las variables no es excluyente. En otras palabras, un mismo valor de una variable puede corresponder a más de un estado, como es el caso del valor 2 para la variable conexiones. Una observación que tenga ese valor para esa variable satisface las condiciones para pertenecer a los estados 2 y 3. Dado que se codificaron 72 transparencias y que se tienen 12 variables, el carácter no excluyente de la definición de los estados permite ajustar la asignación de las observaciones a los estados, como lo mostraré en seguida.

Con esta definición de los estados en función de las variables, asigné cada observación a aquel estado que generaba el menor número de discrepancias. La noción de *discrepancia* es central en el procedimiento. Se encuentra una discrepancia, en una variable y para una observación asignada a un estado, cuando el valor de esa variable para esa observación no se encuentra dentro del rango definido para ese estado. En la Tabla 15 presento el caso en el que se asigna la observación de la Tabla 13 al estado 1. La columna denominada “Estado 1” presenta los rangos de valores de las variables que definen el primer estado. Observamos que hay discrepancias en todas las variables, con excepción de las dos últimas.

	VARIABLES	Estado 1	Valor	Discrepancia
1	Complejidad EC	[0, 0]	2	◆
2	Nociones centrales	[0, 0]	1	◆
3	Criterios de organización	[3, ∞)	2	◆
4	Uso coherente criterios	[0, 0]	1	◆
5	Conexiones	[0, 0]	3	◆
6	Variedad SRS	[0, 1]	2	◆
7	SRS como organizador	[0, 1]	2	◆
8	Variedad fenómenos	[0, 1]	3	◆
9	Variedad disciplinas	[0, 1]	4	◆
10	Variedad subestructuras	[0, 0]	2	◆
11	Papel	[0, 0]	0	
12	Coherencia EC	[0, 0]	0	
Número de discrepancias				10

Tabla 15. Asignación de una observación a un estado

En la Tabla 16 presento el análisis de las discrepancias para esta observación. Observamos que la observación debe asignarse al estado 3, puesto que, en ese caso, se genera el menor número de discrepancias (es el estado al que mejor se adapta la observación).

	VARIABLES	Estados			
		1	2	3	4
1	Complejidad EC	◆	◆		◆
2	Nociones centrales	◆	◆		
3	Criterios de organización	◆			◆
4	Uso coherente criterios	◆			
5	Conexiones	◆	◆		

	Variables	Estados			
		1	2	3	4
6	Variedad SRS	◆			◆
7	SRS como organizador	◆			◆
8	Variedad fenómenos	◆	◆		
9	Variedad disciplinas	◆	◆	◆	
10	Variedad subestructuras	◆	◆		
11	Papel				◆
12	Coherencia EC			◆	◆
Número de discrepancias		10	6	2	6

Tabla 16. Análisis de discrepancias para una observación

De acuerdo con el criterio de minimizar discrepancias que acabo de ejemplificar, produje la asignación de observaciones a estados que se muestra en la Tabla 17. La primera columna identifica los ocho grupos y las siguientes columnas cada una de sus nueve observaciones. Los números en las casillas identifican el estado en el que quedaron asignadas las observaciones correspondientes. Por ejemplo, la tercera observación del segundo grupo quedó asignada en el estado 3.

Grupo	Observación								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	2	3	3	3	4	3	4	4
2	1	2	3	3	3	3	3	3	4
3	1	2	2	3	4	3	3	3	4
4	1	2	2	2	3	3	3	4	4
5	1	2	3	3	3	3	3	4	4
6	2	2	2	3	2	3	3	4	4
7	2	2	3	3	3	4	4	4	4
8	1	2	3	2	3	3	4	4	4

Tabla 17. Primera asignación de observaciones a estados

Ésta es entonces la asignación de observaciones a estados que genera menor número de discrepancias, *dada la definición de estados en términos de variables* con la que se inició el proceso (Tabla 14). Con esta asignación se produce un total de 259 discrepancias, un indicativo de un ajuste pobre de la definición de los estados a las características de las observaciones. Para mejorar ese ajuste ejecuté un proceso cíclico de dos pasos por ciclo. En el primer paso, identifiqué aquellas variables para las que se producían mayor número de discrepancias y cambié los rangos de esas variables buscando reducir el número de discrepancias. En el segundo paso, una vez cambiados los rangos de las variables en cuestión, volví a asignar cada observación a aquel estado que minimizaba el número de discrepancias generadas. La Tabla 18 muestra la nueva definición de los rangos en el primer paso del segundo ciclo. Aquellos rangos que fueron modificados aparecen subrayados. Es evidente que, para reducir discrepancias, el cambio en el rango de una variable reduce, en la mayoría de los casos, su capacidad de discriminar entre estados. Por esa razón seguí la regla de que cada variable debía permitir la discriminación de al

menos dos estados y busqué cambiar los rangos lo menos posible para lograrlo. Éste es un juego entre reducción de número de discrepancias y mantenimiento de un nivel aceptable de discriminación, que comentaré más adelante.

	Variables	Estados			
		1	2	3	4
1	Complejidad EC	[0, 0]	[1, 2]	[2, 2]	[2, ∞)
2	Nociones centrales	[0, 0]	[0, 1]	[1, 1]	[1, 1]
3	Criterios de organización	[3, ∞)	[2, 3]	[1, 2]	[0, 1]
4	Uso coherente criterios	[0, 0]	[0, 1]	[1, 1]	[1, 1]
5	Conexiones	[0, 0]	[1, 2]	[2, ∞)	[3, ∞)
6	Variedad SRS	[0, 1]	[1, ∞)	[2, ∞)	[3, ∞)
7	SRS como organizador	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 3]
8	Variedad fenómenos	[0, 1]	[1, 2]	[2, ∞)	[2, ∞)
9	Variedad disciplinas	[0, 1]	[1, ∞)	[2, ∞)	[3, ∞)
10	Variedad subestructuras	[0, 0]	[0, 1]	[1, ∞)	[2, ∞)
11	Papel	[0, 0]	[0, 0]	[0, 5]	[6, ∞)
12	Coherencia EC	[0, 0]	[0, 0]	[0, 0]	[1, 1]

Tabla 18. Segunda definición de estados

Con esta nueva definición de estados se generaron 137 discrepancias, que representaban aproximadamente la mitad de las discrepancias de la primera asignación y el 15.8% del número total de valores de las variables (12 variables para 72 observaciones). Una vez realizado el segundo paso del ciclo y habiendo reasignado las observaciones a los estados que minimizan el número de discrepancias, fue posible volver a analizar las variables que generan mayor número de discrepancias y reiniciar el ciclo. Detuve el proceso al final del tercer ciclo porque, al tratar de cambiar los rangos de las variables que generaban mayor número de discrepancias, estas variables perdían demasiada capacidad discriminatoria.

1.5. Descripción General del Procedimiento

El análisis de discrepancias es fundamental para mi propósito de caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Dado que no es un procedimiento estándar de agrupamiento, considero importante, en esta sección, describir y analizar sus características generales y compararlo con uno de los procedimientos estándar de agrupamiento (el análisis clúster).

El Procedimiento de Análisis de Discrepancias

El procedimiento busca producir un agrupamiento de un conjunto de observaciones. En el caso de este estudio, las observaciones correspondían a la codificación de la información contenida en nueve paquetes de transparencias para cada uno de ocho grupos de futuros profesores. El orden en las observaciones dentro de un grupo representa una secuencia en el tiempo. Se han definido unas variables basadas en la codificación de las transparencias y se ha determinado un número de estados. Tanto las variables, como el número de estados surgen del análisis inicial de la información, del marco conceptual y de la experiencia del investigador.

El propósito es obtener una definición de los estados, en términos de las variables, que se ajuste lo mejor posible a las observaciones. El rango de los valores posibles de cada variable se divide en tantas partes como estados se hayan determinado. Dos rangos sucesivos diferentes de una variable pueden compartir máximo un valor, a menos que sean del tipo $[n, \infty)$. De esta forma, el estado i queda definido por el conjunto de todos los rangos de orden i de las variables (ver los ejemplos de la Tabla 14 y la Tabla 18).

Al asignar observaciones a estados, aparecen discrepancias. Esto sucede cuando, para al menos una variable y un estado, hay una observación asignada a ese estado que asume valores que no pertenecen al rango establecido para esa variable en ese estado. El problema se traduce entonces en obtener una definición de estados que minimice el número de discrepancias, con un grado aceptable de discriminación entre ellos.

El proceso para obtener la definición de esos estados es cíclico (ver Figura 54). Cada ciclo está compuesto por dos pasos: asignación de observaciones a estados y cambio en la definición de rangos de algunas de las variables para algunos de los estados. En el primer paso, la asignación se hace de tal forma que el estado escogido para una observación sea aquel que genera el mínimo número de discrepancias. En el segundo paso, se identifican las variables que generan mayor número de discrepancias y los estados en los que se generan. A continuación, se analizan las consecuencias de cambiar la definición de esos estados (y posiblemente de los estados contiguos) en términos de esas variables. El cambio en los rangos se rige por un criterio doble: reducir el número de discrepancias, manteniendo un nivel aceptable de discriminación entre estados. Una vez que se han cambiado los rangos de las variables que generan mayor número de discrepancias (en aquellos estados en que se generan), es necesario revisar la asignación de observaciones a estados. Se inicia un nuevo ciclo. En el caso de los datos de este estudio, fueron necesarios tres ciclos. Cuando revisé por cuarta vez la definición de los estados en términos de las variables, observé que los cambios que permitían reducir discrepancias implicaban una pérdida demasiado importante en el grado de discriminación. Por lo tanto, detuve el proceso allí.

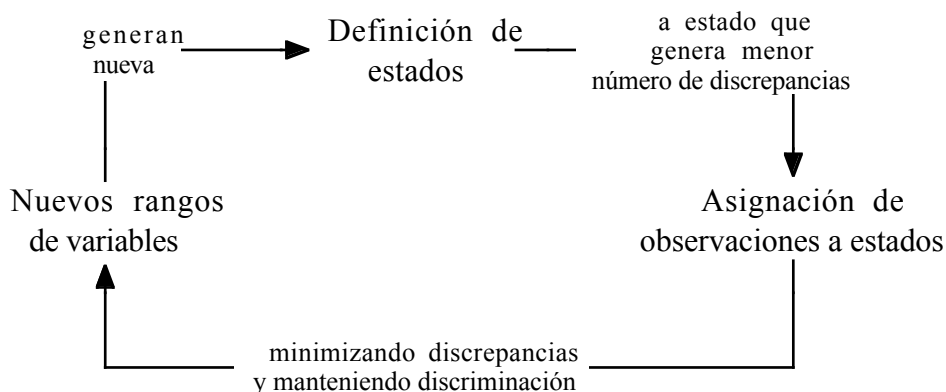


Figura 54. Ciclo de análisis de discrepancias

El procedimiento involucra el juicio del investigador en varios momentos del proceso. La revisión de la definición de los estados en términos de la variable que genera mayor número de discrepancias no es automático. El investigador tiene

que decidir qué definición del estado permite reducir discrepancias manteniendo un nivel adecuado de discriminación. Para ello, analiza las consecuencias de diferentes definiciones y escoge la más apropiada. Este juego entre reducción de discrepancias y grado de discriminación también tiene lugar cuando se termina el proceso.

En algunas ocasiones, una observación dada genera el mismo número de discrepancias cuando se asigna a dos estados diferentes. En este caso, el investigador debe decidir a qué estado asignarla. En el caso de este estudio, utilicé los siguientes criterios:

- ◆ tienen prelación aquellas variables que corresponden al momento de la asignatura al que pertenece la observación;
- ◆ la variable conexiones tiene prelación sobre las otras de su mismo nivel;
- ◆ la variable criterios de organización tiene menos prelación que las demás variables; y
- ◆ la variable papel tiene prelación sobre la variable coherencia.

Estos criterios no son arbitrarios. Surgen del marco conceptual y del análisis de la información. Observé que la variable conexiones representa más fielmente la organización de la estructura conceptual que las variables relacionadas con las nociones centrales o los criterios de organización. Ésta última tiene menor importancia, dado que el análisis se centra en el papel organizador de los sistemas de representación. Finalmente, la coherencia en la utilización de la información requiere, en primera instancia, que esa información se ponga en juego.

El proceso de análisis de discrepancias no tiene en cuenta ni el sentido en el que aparece la discrepancia (por encima o por debajo del estado al que se ha asignado la observación), ni la magnitud de la discrepancia (si está uno o dos estados por encima o por debajo del estado asignado). El procedimiento busca asignar la observación a aquel estado que es más “coherente” con ella en términos del menor número de discrepancias.

Aunque el proceso es artesanal, lo he automatizado de tal forma que el investigador debe únicamente intervenir en las ocasiones que se mencionaron arriba. En el Anexo J, presento ejemplos de las hojas de cálculo de Excel en las que programé el sistema. En estas hojas, se generan automáticamente las discrepancias de tal forma que es posible analizar automáticamente las consecuencias de asignar observaciones a estados y de cambiar la definición de los estados en términos de las variables.

En un segundo ejercicio, apliqué el procedimiento partiendo de una definición diferente de los estados iniciales. Las variables discriminaron un poco menos al comienzo. No obstante, el proceso produjo un resultado final similar. Aunque ésta no es una prueba de que el procedimiento converge siempre, a un mismo resultado y para cualquier conjunto de datos iniciales, sí me indicó que el procedimiento no produce resultados aleatorios.

Análisis de Discrepancias y Análisis Clúster

Dado que el análisis de discrepancias es un método de agrupamiento, cabe preguntarse por qué no utilicé alguno de los métodos estándar que existen para este propósito. Respondo esta pregunta haciendo referencia al análisis clúster, puesto que es el método de agrupamiento que se utiliza con más frecuencia para el tipo

de problemas que surgieron en este estudio. En el Anexo K, muestro que la información disponible no satisfacía las condiciones requeridas por el análisis clúster. Para utilizar este método, habría sido necesario diseñar unas nuevas variables que se adaptaran a esas condiciones. No fue claro que este propósito se pudiese lograr sin que, al mismo tiempo, se perdiera concreción en la relación entre las variables, el problema que quería abordar y los objetivos de investigación que me había impuesto. No obstante, en dicho anexo destaco que, a partir de los resultados del análisis de discrepancias, es posible producir una definición *ad hoc* de las variables de análisis y que estas nuevas variables satisfacen las condiciones impuestas por el análisis clúster. Los resultados de utilizar este método en estas condiciones me permitió identificar las virtudes y defectos del análisis de discrepancias.

Su primera virtud es que es un procedimiento que no impone condiciones concretas sobre las variables. Requiere únicamente que la definición y los valores de las variables tengan sentido para el investigador desde la perspectiva del marco conceptual y los objetivos de la investigación. Su segunda virtud radica en que permite un análisis detallado de los resultados desde múltiples puntos de vista, como lo mostraré más adelante. Finalmente, su uso provee la información necesaria para la definición *ad hoc* de nuevas variables que sí satisfacen las condiciones del análisis clúster. Los agrupamientos que obtuve utilizando los dos métodos para este estudio son coherentes (como, en principio, era de esperarse). Las diferencias entre los dos agrupamientos se pueden explicar en términos del significado de las variables originales y de las características de los dos métodos.

El análisis de discrepancias adolece del defecto de no tener en cuenta ni la magnitud, ni la dirección de las discrepancias. El método también adolece del defecto (aparente) de no ser un procedimiento “automático”. En cada fase del ciclo, al definir estados y asignar observaciones a estados, el investigador debe poner en juego su juicio para tomar decisiones. No obstante, como lo mostré para el caso de las observaciones correspondientes a este estudio, estas decisiones no son arbitrarias. Es posible establecer criterios concretos para tomar estas decisiones y estos criterios tienen sentido con respecto al significado de las variables, el marco conceptual y los objetivos del estudio.

2. CUATRO ESTADOS DE DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

Utilicé el procedimiento que acabo de describir para analizar las observaciones. La Tabla 19 presenta la definición de los estados que obtuve al final de tres ciclos del procedimiento.

	Variables	Estados			
		1	2	3	4
1	Complejidad EC	[0,0]	[1,2]	[2,∞)	[2,∞)
2	Nociones centrales	[0,0]	[0,1]	[1,1]	[1,1]
3	Criterios de organización	[3,∞)	[2,3]	[1,2]	[0,1]
4	Uso coherente criterios	[0,0]	[0,1]	[1,1]	[1,1]

Variables	Estados			
	1	2	3	4
5 Conexiones	[0,0]	[1,3]	[3,∞)	[3,∞)
6 Variedad SRS	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)	[3,∞)
7 SRS como organizador	[0,1]	[1,2]	[2,3]	[3,3]
8 Variedad fenómenos	[0,1]	[1,2]	[2,∞)	[2,∞)
9 Variedad disciplinas	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)	[3,∞)
10 Variedad subestructuras	[0,0]	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)
11 Papel	[0,0]	[0,5]	[0,5]	[6,∞)
12 Coherencia EC	[0,0]	[0,0]	[0,0]	[1, ∞)

Tabla 19. Definición final de estados

En la Tabla 20, presento la asignación final de observaciones a estados. Recordemos que cada fila representa un grupo de profesores y sus correspondientes observaciones, organizadas cronológicamente. Entonces, por ejemplo, las observaciones correspondientes al grupo 7 quedaron asignadas sucesivamente a los siguientes estados: 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 3 y 4.

Grupo	Observación								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	2	2	3	3	4	3	4	4
2	1	2	3	3	3	3	3	3	4
3	1	2	2	3	3	3	3	3	3
4	2	2	2	2	2	3	3	3	3
5	2	2	3	3	3	3	3	4	4
6	2	2	2	3	3	3	2	3	4
7	2	2	3	3	3	3	4	4	4
8	1	2	2	2	3	3	3	2	2

Tabla 20. Asignación final de observaciones a estados

Finalmente, la Tabla 21 presenta el número de discrepancias por grupo y observación.

Grupo	Observación									Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1 Funciones y gráficas	1	1	2	0	0	0	1	1	0	6
2 Progresiones	3	3	0	0	1	1	1	2	2	13
3 Números decimales	1	2	2	2	1	1	1	0	1	11
4 Probabilidad	3	0	2	1	2	1	1	1	5	16

Grupo	Observación									Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
5 Cónicas	3	1	2	0	1	1	3	2	3	16
6 Esfera	2	1	1	1	1	2	2	4	3	17
7 Función de segundo grado	2	1	0	0	0	2	2	3	0	10
8 Sistemas de ecuaciones lineales	2	1	1	0	3	1	5	3	4	20
Total	17	10	10	4	9	9	16	16	18	109

Tabla 21. Discrepancias por grupo y observación

3. ESTADOS DE DESARROLLO, EVOLUCIÓN Y PROGRESO DE LOS GRUPOS

El procedimiento con el que he obtenido los resultados me permite ahora profundizar en la descripción del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Estos resultados identifican cuatro estados de desarrollo que se pueden caracterizar en términos de los organizadores del currículo del análisis de contenido y de los factores de desarrollo. Al analizar las observaciones, se constata que los grupos avanzan en su conocimiento didáctico de manera paulatina, pero desfasada con respecto a la instrucción. El ritmo con el que los grupos de futuros profesores progresan y el máximo nivel (estado) que logran no es uniforme entre ellos. Hay grupos que logran avanzar hasta el cuarto estado generando pocas discrepancias, mientras que las producciones de otros grupos se estabilizan en estados anteriores. Se constata que hay una relación directa entre el número de discrepancias generadas por las producciones de un grupo y su ritmo de progreso y nivel de avance. Al analizar las discrepancias desde la perspectiva de las variables, es posible identificar aquellas nociones en las que los grupos de futuros profesores manifiestan mayores dificultades. Finalmente, es posible identificar aquellas observaciones que no se ajustan al patrón general presentado por las demás.

3.1. Caracterización de los Estados de Desarrollo

El esquema de codificación y análisis de la información con el que obtuve los resultados se basa en un proceso cíclico que busca minimizar discrepancias. Por consiguiente, los estados de desarrollo que surgen de ese proceso identifican las combinaciones de valores (o rangos de valores) de las variables a las que, en conjunto, mejor se adaptan las observaciones para una tarea dada. Entonces, estas combinaciones de valores de variables se pueden considerar como representativas de los estados más significativos del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. A partir de la información de la Tabla 19, puedo caracterizar estos cuatro estados en términos de los organizadores del currículo del análisis de contenido y de los factores de desarrollo de la siguiente manera (ver Tabla 22).

Estado	Caracterización
1	Es un estado básico en el que la estructura conceptual no tiene complejidad, se utilizan varios criterios de organización sin coherencia, se utiliza máximo un sistema de representación, sin conexiones, y no hay variedad en el análisis fenomenológico. En la Tabla 20, se aprecia que sólo tres grupos tienen observaciones clasificadas en este estado. Esto sugiere que es un estado que se puede superar con el conocimiento previo y las intuiciones didácticas (Gómez, 2001a) con las que los futuros profesores afrontan inicialmente la tarea.
2	Es un estado de transición. Hay algo de complejidad en la estructura conceptual y comienza a aparecer variedad en los sistemas de representación, aunque aún no hay variedad en el análisis fenomenológico.
3	En este estado, hay un avance en todas las variables, excepto las variables papel y coherencia. La estructura conceptual es compleja, con un nivel intermedio de organización. Hay variedad en los sistemas de representación y en el número de conexiones. Aparece algo de variedad en el análisis fenomenológico.
4	En este estado, se logra plena complejidad en el análisis fenomenológico y se aprecia la utilización coherente de la información para la realización de las tareas.

Tabla 22. Caracterización de los estados de desarrollo

3.2. Evolución Paulatina y Desfasada de las Producciones de los Grupos

Los cuatro estados que acabo de presentar describen una evolución en el valor de las variables que los determinan. Esta evolución es coherente con el orden en el que se tratan los diversos temas en la asignatura y con el tipo de tareas que se asignan a los grupos de futuros profesores en el tiempo. No obstante, los cambios tienen lugar con un desfase con respecto a los momentos de la instrucción. La complejidad (en la estructura conceptual) y la variedad (en los sistemas de representación y en el análisis fenomenológico) se desarrollan en momentos posteriores a su introducción en clase y cuando ya no son objeto de discusión. La variedad en el análisis fenomenológico se desarrolla al final de la asignatura, al menos dos meses después de haberse tratado el tema en clase.

En la Tabla 23, presento los momentos de la instrucción en los que se tratan los cuatro temas en relación con el momento en el que se producen las observaciones. Por ejemplo, los sistemas de representación se tratan en clase en la sesión anterior a la presentación de la tercera tarea.

	Observación			
	1	3	4	6
Temas	Estructura conceptual	Sistemas de representación	Análisis fenomenológico	Papel y coherencia

Tabla 23. Orden de aparición de temas

De acuerdo con este orden, se esperaría idealmente que las producciones de los grupos de futuros profesores quedaran clasificadas en los estados que se marcan en la Tabla 24.

Estado	Observación								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	◆	◆							
2		◆	◆	◆					
3				◆	◆	◆			
4						◆	◆	◆	◆

Tabla 24. Orden esperado de asignación de observaciones a estados

En la Tabla 25, presento las observaciones que no se adaptan a este patrón. Indico en cursiva aquellas observaciones clasificadas en un estado posterior al que corresponde en la Tabla 24; en negrita, aquellas observaciones clasificadas en un estado anterior; y, en negrita subrayado, aquellas que fueron clasificadas con un desfase de dos estados (anteriores)¹³³.

Grupo	Observación								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2						3		
2			3				3	3	
3							3	3	3
4	2				2		3	3	3
5	2		3				3		
6	2						<u>2</u>	3	
7	2		3						
8							3	<u>2</u>	<u>2</u>

Tabla 25. Observaciones que no se adaptan a patrón esperado

Observamos, como mencioné anteriormente, que cinco grupos logran presentar producciones iniciales que se clasifican en el estado 2, dando a entender que el estado 1 puede ser superado con los conocimientos previos y las intuiciones didácticas; que tres grupos logran un nivel importante de variedad en los sistemas de representación (y en las conexiones) con anterioridad al momento esperado (estado 3 en la observación 3); que la mayoría de los grupos tienen dificultades para alcanzar el estado 4 antes de la octava tarea; y que, en la segunda parte de la asignatura, la mayoría de las producciones de los grupos se clasifican tardíamente (con desfase con respecto a la instrucción) en los estados correspondientes (observaciones en negrita en la Tabla 25).

¹³³ Con el propósito de simplificar la lectura, me refiero a los grupos por su número. Los grupos son los siguientes: 1, funciones y gráficas; 2, progresiones; 3, números decimales; 4, probabilidad; 5, cónicas; 6, esfera; 7, función de segundo grado; y 8, sistemas de ecuaciones lineales.

3.3. Ritmo de Progreso y Nivel de Avance de los Grupos

A continuación, analizo el desarrollo del conocimiento didáctico desde el punto de vista de la evolución de las producciones de cada uno de los grupos de futuros profesores. Como se constata en la caracterización de los estados, hay un progreso evidente a medida que se avanza en la asignatura. Sin embargo, este progreso no es uniforme. El ritmo con el que se progresa y el máximo nivel (estado) que se alcanza difiere entre los grupos. Con *ritmo de progreso* me refiero a los momentos en los que los grupos pasan de un estado dado a otro superior. El *nivel de avance* se refiere al momento en el que el grupo alcanza su estado de mayor nivel. La información de la Tabla 20 permite establecer algunos resultados con respecto al ritmo de progreso y nivel de avance de los grupos de futuros profesores.

Hay únicamente tres observaciones que quedan clasificadas en el estado 1. Este resultado se puede interpretar en el sentido de que los conocimientos previos y las intuiciones didácticas de los futuros profesores les permiten realizar producciones con un nivel de complejidad y variedad superior al caracterizado por el estado 1.

En el estado 2 se observa una transición. Mientras que hay un grupo (el 2) que presenta una sola observación clasificada en este estado, hay otro grupo (el 5) que produce cinco observaciones de este nivel. En este estado comienza a manifestarse la variedad en la evolución de las producciones de los grupos de futuros profesores.

Mientras que el paso del estado 1 al estado 2 sucede a más tardar en la segunda de las nueve observaciones de cada grupo, el paso del estado 2 al estado 3 sucede en diferentes momentos: desde la tercera observación para los grupos 2, 5 y 7, hasta la sexta para el grupo 4.

Dos grupos (el 3 y el 4) presentan producciones que se estabilizan en el estado 3. Por lo tanto, son grupos que presentan dificultades para lograr variedad en el análisis fenomenológico y para utilizar coherentemente la información que han recogido y organizado.

De los cinco grupos que presentan producciones clasificadas en el estado 4, dos de ellos (el 2 y el 6) lo logran únicamente en la última tarea (el trabajo final). En los otros tres grupos, la observación con la que llegan al estado 4 varía: en la séptima para el grupo 6, en la sexta para el grupo 7, y en la quinta para el grupo 1.

Solamente las últimas producciones, correspondientes al trabajo final, de los grupos 1 y 7 cumplen todas las condiciones del estado 4 (no presentan discrepancias).

3.4. Heterogeneidad en el Desarrollo del Conocimiento Didáctico de los Grupos

Los grupos 1 y 7 presentan las producciones que mejor se adaptan a lo esperado. Comienzan en el estado 2 y alcanzan el estado 4 antes del trabajo final, tarea ésta, en la que no generan discrepancias. Además, como lo mostraré más adelante, son los dos grupos que generan menor número de discrepancias en total (Ver Tabla 20).

Los grupos 2 y 5 presentan una evolución similar. Logran alcanzar el estado 4 al final, manteniendo un número importante de observaciones en el estado 3. La última observación (el trabajo final) de estos dos grupos queda clasificada en el

estado 4, presentando discrepancias en las variables complejidad y sistemas de representación como organizador (los dos grupos) y criterios de organización (grupo 5). El grupo 6 también alcanza el estado 4 (en el trabajo final), pero tiene un retroceso al estado 2 en la tarea 7 (causado por una reducción en 2 conexiones) y presenta un número mayor de discrepancias. Su última observación presenta discrepancias en las variables complejidad, sistemas de representación como organizador y número de subestructuras.

Los grupos 3 y 4 son similares en el sentido de que se estabilizan en el estado 3 aunque el primero tiene menos discrepancias que el segundo. El trabajo final del grupo 4 presenta cuatro discrepancias. Dos de ellas (complejidad y conexiones) corresponden al estado 2, mientras que otras dos (papel y coherencia) corresponden al estado 4. Ésta es una observación que, teniendo las características distintivas del estado 4 (papel y coherencia), queda clasificada en el estado 3 como consecuencia de una estructura conceptual pobre.

Finalmente, el grupo 8 presenta una serie de producciones que siguen un comportamiento particular. Además de ser el grupo con mayor número de discrepancias, presenta un retroceso al estado 2 en las dos últimas producciones.

3.5. Número de Discrepancias y Ritmo de Progreso y Nivel de Avance

El número de discrepancias en una observación es un indicativo del grado en el que la observación presenta valores de las variables que corresponden a un estado dado. Si una observación no presenta discrepancias, todas las variables asumen valores que corresponden al estado al que ha sido asignada. Aunque cada observación se clasifica en el estado que genera menor número de discrepancias, si una observación presenta discrepancias, esto significa que hay una o más variables que asumen valores que no corresponden al estado al cual ha sido asignada. En el caso del conjunto de observaciones de un grupo, el número de discrepancias es una medida del grado en el que las producciones del grupo avanzan (o retroceden) simultáneamente en todas las variables. La Tabla 26 presenta una clasificación de los grupos de acuerdo con el número total de discrepancias de sus producciones y su ritmo de progreso y nivel de avance.

Grupo	Discrepancias	Progreso y avance
1 Funciones y gráficas	6	1
7 Función de segundo grado	10	2
3 Números decimales	11	6
2 Progresiones	13	4
5 Cónicas	16	3
4 Probabilidad	16	7
6 Esfera	17	5
8 Sistemas de ecuaciones lineales	20	8

Tabla 26. Discrepancias y ritmo de progreso y nivel de avance

Las primeras dos columnas de la tabla identifican los grupos. En la tercera se indica el número total de discrepancias de las producciones de cada grupo. He ordenado las filas de la tabla de acuerdo con esta columna. La cuarta columna, progreso y avance, presenta el orden que proporcionan la globalidad de las producciones

de cada grupo de acuerdo con el estado final que lograron y el momento en el tiempo en el que alcanzan cada estado (que he denominado antes nivel de avance y ritmo de progreso). Se ordenan primero los grupos que presentaron producciones clasificadas en el estado 4. Entre ellas se clasifican primero los grupos que llegaron antes a ese estado. Un procedimiento similar se aplica a los demás grupos y estados. Se constata una relación directa entre las dos clasificaciones (número de discrepancias y ritmo de progreso y nivel de avance) con dos excepciones: el grupo 3 que presenta pocas discrepancias, alcanza rápidamente el estado 3, pero no logra alcanzar el estado 4; y el grupo 6, que presenta muchas discrepancias, pero logra alcanzar el estado 4 en el trabajo final. En otras palabras, aquellos grupos con mayor ritmo de progreso y nivel de avance son también los grupos cuyas observaciones generan menor número de discrepancias. Similarmente, se aprecia una relación en el sentido inverso. Los grupos cuyas observaciones presentan mayor número de discrepancias son también los grupos con menor ritmo de progreso y nivel de avance. Hay dos grupos cuyas producciones no se adaptan a estos patrones.

La Tabla 27 presenta el número total de discrepancias para cada una de las tareas.

	Tarea								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Discrepancias	17	10	10	4	9	9	16	16	18

Tabla 27. Discrepancias por observación

Observamos un número alto de discrepancias en la primera tarea y en las tres últimas. Las discrepancias de la primera tarea sugieren la diversidad presentada en esas producciones a partir de los conocimientos previos y las intuiciones didácticas de los futuros profesores. El número de discrepancias en las últimas tres tareas puede ser un indicador de cómo, aunque los grupos lograron avanzar en sus producciones, no lo hicieron necesariamente de forma consolidada.

3.6. Dificultades de los Grupos con los Organizadores del Currículo del Análisis de Contenido

El análisis de discrepancias en cada variable puede dar luces acerca de la medida en que la globalidad de los ocho grupos avanzaron coherentemente en el manejo y utilización del concepto o herramienta correspondiente a esa variable, y en relación con el avance logrado en las otras variables. La interpretación de los resultados, mirados desde esta perspectiva, sugiere aquellas nociones del análisis de contenido que presentaron más dificultades a los grupos de futuros profesores. La Tabla 28 presenta la clasificación de las variables con respecto al número de discrepancias. En la primera columna, aparecen las variables cuyos valores determinan cada uno de los estados. En la segunda columna, indico el número de discrepancias que aparecen por encima del estado al cual ha sido asignada la observación correspondiente. Por ejemplo, si una observación ha sido asignada al estado 3, pero tiene un valor de la variable conexiones que corresponde al estado 2, entonces ésta es una discrepancia por encima del estado correspondiente. En la tercera columna, indico las discrepancias por debajo. En la cuarta columna calculo

la diferencia entre discrepancias por encima y por debajo. Un número positivo en esta diferencia indica que hay una predominancia de observaciones para las que dicha variable asume valores que corresponden a un estado anterior al estado en el que se ha clasificado la observación correspondiente. En otras palabras, según los estados postulados, las observaciones se “retrasan” en esa variable en comparación con el avance en las otras variables. Las diferencias positivas identifican, por lo tanto, las variables que, desde esta perspectiva, presentan mayores dificultades a los grupos de futuros profesores. Ordeno la tabla de acuerdo con esta columna en orden descendente. En la última columna presento el número total de discrepancias. Una discrepancia por encima en una variable y una observación dadas, indica que esa variable asume un valor en esa observación que corresponde a un estado anterior al que ha sido asignada.

Variables	Discrepancias			Total
	Por encima	Por debajo	Diferencia	
Conexiones	16	2	14	18
Variedad fenómenos	13	2	11	15
Variedad sistemas de representación	11	1	10	12
Complejidad	10	7	3	17
Sistemas de representación como organizador	6	3	3	9
Número de subestructuras	4	1	3	5
Nociones centrales	1	1	0	2
Uso coherente de criterios	0	0	0	0
Papel	1	4	-3	5
Criterios de organización	3	11	-8	14
Coherencia	0	10	-10	10

Tabla 28. Ordenación de variables por discrepancias

El análisis de la Tabla 28 sugiere dificultades con la noción de conexión. En 16 observaciones, el valor de esta variable es inferior al valor que corresponde al estado en el que se encuentra clasificada la observación. En otras palabras, en esas 16 observaciones, los grupos no logran presentar producciones con un número adecuado (al estado al que han sido asignadas) de conexiones. Algo similar, pero menos importante se aprecia con las nociones de variedad de fenómenos, variedad en sistemas de representación, complejidad y sistemas de representación como organizador. Por el contrario, en el caso de criterios de organización y coherencia, hay varias observaciones que llegan a un estado más avanzado en estas variables del que les corresponde a las otras variables.

3.7. Observaciones Atípicas

Hay varias observaciones que se salen del patrón general presentado por las demás observaciones. En la observación 7, el grupo 6 presenta un retroceso del estado 3 al estado 2. Ya observamos que este retroceso es causado por una disminución en el número de conexiones. En las observaciones 8 y 9, el grupo 8 presenta un retroceso del estado 3 al estado 2. Además, en estas dos observaciones el grupo

presenta un número alto de discrepancias (un total de 6). En la observación 6, el grupo 1 llega al estado 4. Es la observación más temprana clasificada en este estado. Finalmente, la primera y la última son las dos observaciones que presentan mayor número total de discrepancias.

4. UNA PRIMERA APROXIMACIÓN AL DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

A continuación, resumo los resultados de este estudio y sugiero algunas conjeturas de explicación de los mismos.

4.1. Desarrollo del Conocimiento Didáctico y Génesis Instrumental

La caracterización de los estados y la asignación de las observaciones a ellos es el principal resultado de este estudio. Este resultado corrobora mi conjetura de partida: el conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores evoluciona de acuerdo con patrones estables. Ésta es una evolución paulatina que parte de un estado básico fundamentado posiblemente en los conocimientos previos y las intuiciones didácticas de los grupos de futuros profesores. El desarrollo es coherente con el orden en el que se presentan las diferentes nociones en la instrucción. No obstante, hay un desfase entre el momento en el que se presentan los temas y el momento en el que los significados parciales de los grupos de futuros profesores se materializan en el repertorio compartido y se expresan en sus producciones. En este sentido, la noción de sistemas de representación, por ejemplo, no se consolida en el momento en el que esta noción se presenta en clase y se pide a los grupos de futuros profesores que analicen su tema desde esta perspectiva. Éste es solamente el primer paso.

Los significados parciales de los grupos de futuros profesores con respecto a este organizador del currículo sufren diversas transformaciones y se consolidan en la medida en que tareas posteriores inducen a los grupos de futuros profesores a poner en juego su conocimiento de esta noción para efectos de resolver otros problemas (por ejemplo, realizar el análisis fenomenológico, o diseñar una actividad de evaluación). En términos de la teoría de la génesis instrumental, el artefacto (el organizador del currículo) se transforma en instrumento, en la medida en que los grupos de futuros profesores desarrollan esquemas para resolver las tareas con la ayuda del instrumento. El proceso de génesis instrumental toma tiempo: requiere que los grupos de futuros profesores negocien significados (del organizador del currículo, de su tema matemático y de sus esquemas de acción) y que estos significados parciales se materialicen (en diferentes formas) en las sucesivas ocasiones en las que los grupos presentan sus producciones en clase. Este proceso explica algunas de las diferencias, constatadas en la Tabla 25, entre las observaciones y el patrón esperado de clasificación a los cuatro estados.

4.2. Ritmo de Progreso y Nivel de Avance Variados

Los grupos progresan en el desarrollo de su conocimiento didáctico con diferentes ritmos. Hemos visto que el paso del estado 2 al estado 3 sucede en diferentes momentos (desde la tercera observación para tres grupos, hasta la sexta para el grupo 4). También hemos visto que dos grupos estabilizan sus producciones en el estado

3 y que, de los cinco grupos que presentan producciones clasificadas en el estado 4, dos lo logran solamente en la última observación (el trabajo final). Hay un grupo que presenta un retroceso al estado 2 en las últimas dos producciones.

Estos ritmos de progreso y niveles de avance variados pueden tener diferentes causas. La variedad de los momentos en los que se da el paso del estado 2 al estado 3 puede ser indicativo de una cierta dificultad para poner en juego y desarrollar las nociones de sistemas de representación y análisis fenomenológico. No obstante, la totalidad de los grupos logran superar esta dificultad. El paso del estado 3 al estado 4 es más complejo. Por un lado, hay grupos que no lo logran y otros que sólo lo alcanzan en el trabajo final.

El trabajo final se diferencia del resto de las tareas. Es la tarea con mayor número de discrepancias. Dos grupos alcanzan el estado 4 solamente en esta observación. Estas características particulares de las producciones de los grupos de futuros profesores para el trabajo final son posiblemente consecuencia de la instrucción (en particular del ejemplo de diseño de unidad didáctica que se presentó en clase) y de los requisitos de la tarea misma, que la diferencia de las demás. Por ejemplo, las discrepancias en las variables complejidad y sistemas de representación como organizador de la estructura conceptual de las producciones de los grupos 2, 5 y 6, que presentan un trabajo final clasificado en el estado 4, parecen ser causadas por la desaparición del mapa conceptual como medio para representar la estructura conceptual en el trabajo final. El ejemplo que se presentó en clase tampoco utilizó mapas conceptuales para este propósito.

4.3. Discrepancias y Progreso de los Grupos

Hemos visto que hay una coherencia parcial entre el ritmo de progreso y el nivel de avance de los diferentes grupos, por un lado, y el número total de discrepancias que presentan, por el otro (Tabla 26). Los grupos con mayor ritmo de progreso y nivel de avance (1 y 7) son también los grupos con menor número de discrepancias. Dos de los tres grupos con mayor número de discrepancias son los grupos con menor ritmo de progreso y nivel de avance. Recordemos que el número de discrepancias del conjunto de observaciones de un grupo de futuros profesores es una medida del grado en que sus producciones avanzan (o retroceden) simultáneamente en todas las variables. Por lo tanto, esta correspondencia entre progreso y número de discrepancias de los grupos muestra que aquellos grupos que progresan, lo hacen, en general, avanzando en todas las variables.

Las diferencias entre los grupos (en ritmo de progreso, nivel de avance y discrepancias) pueden ser producto de diversos factores. Partimos del supuesto de que todos los grupos recibieron la misma instrucción (en el sentido de que, además de participar en la misma clase, los comentarios que se hicieron a sus producciones tuvieron un nivel similar de profundidad) y de que no hay necesariamente diferencias significativas entre los miembros de los grupos al comienzo de la asignatura, desde el punto de vista de sus conocimientos previos y sus intuiciones didácticas. Si lo anterior es cierto, entonces las diferencias en las producciones de los grupos deben surgir principalmente de dos fuentes: diferencias en los temas y diferencias en el funcionamiento interno de los grupos a la hora de realizar las tareas.

La diferencia en los temas parece ser una conjetura viable para explicar, al menos parcialmente, las diferencias entre los grupos con mayor y menor ritmo de progreso y nivel de avance. Los grupos de mayor ritmo de progreso y nivel de avance tienen temas que corresponden a objetos matemáticos (funciones y gráficas, función de segundo grado, cónicas) cuyo análisis de contenido tiende a ser más fácil de desarrollar. En los tres casos, el tema es rico en sistemas de representación y permite variedad en el análisis fenomenológico. Por otro lado, los temas de los tres grupos con menor ritmo de progreso y nivel de avance corresponden a un sistema de representación específico (números decimales), un tema general (introducción a la probabilidad) y un procedimiento de resolución (sistemas de ecuaciones lineales). No obstante, el anterior es el único argumento que puedo sugerir por ahora para defender esta tesis.

Por otro lado, hay evidencia (que no presento aquí) de que el comportamiento particular de las producciones del grupo 8 (sistemas de ecuaciones lineales) también pudo ser causado por problemas de coordinación entre los miembros del grupo.

4.4. Diferencias en la Dificultad de las Nociones

El análisis de las discrepancias en cada variable dio luces sobre aquellas nociones que presentaron más dificultades a los grupos de futuros profesores. En este sentido, la noción de conexión presenta un número alto de discrepancias con diferencia positiva. A pesar de reiterados esfuerzos de la instrucción, las producciones de los grupos de futuros profesores tienen un nivel de conexiones inferior al que debería esperarse. Algo similar, pero en menor medida, sucede con las variables de variedad de fenómenos, variedad en sistemas de representación, complejidad y sistemas de representación como organizador de la estructura conceptual. Éstas son las cuestiones que presentan mayores dificultades para los grupos de futuros profesores.

5. CUESTIONES ABIERTAS

Este estudio constituye el primer paso en mi aproximación al desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. Realicé el estudio imponiendo varias condiciones. En primer lugar, centré el esquema metodológico en el análisis de las transparencias que los grupos de futuros profesores produjeron para realizar sus presentaciones en clase. En segundo lugar, diseñé un modelo y unas herramientas de codificación y análisis que me permitieron obtener resultados que no dependen del tema matemático de cada grupo. Finalmente, me puse como propósitos explorar si era posible caracterizar estados de desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos a partir de la información disponible, y estudiar las implicaciones de la identificación de tales estados para efectos de describir el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores. Considero que he satisfecho las metas que me impuse originalmente. Adicionalmente, y como consecuencia de las características de la información que tenía disponible y de los propósitos del estudio, he diseñado y puesto en práctica un método no estándar de agrupamiento que puede ser útil en otros proyectos de investigación.

El análisis de los resultados obtenidos da parcialmente respuesta a una de las preguntas que formulé en los capítulos 1 y 7. Me refiero a la pregunta “¿Cómo se pueden caracterizar los estados de desarrollo, en caso de que estos se puedan determinar?”. Al mismo tiempo, estos resultados generan nuevas cuestiones que deben ser exploradas. La información contenida en las transparencias es la expresión de los significados parciales que los grupos de futuros profesores han desarrollado hasta ese momento. Estos significados parciales son la materialización de los procesos de negociación de significado que tienen lugar en las dos comunidades de práctica que he identificado: la comunidad de práctica del aula y la comunidad de práctica de cada grupo. ¿Cómo se caracterizan estos significados parciales y en qué grado dependen de los temas específicos que trabajan los diferentes grupos de futuros profesores? Ésta es otra de las preguntas que formulé en el capítulo 7. Para responderla es necesario: (a) profundizar en el significado de los atributos y las variables que caracterizan las transparencias y que establecen los patrones en los significados parciales de los grupos de futuros profesores, y (b) a partir de lo anterior, profundizar en el significado de los estados de desarrollo que caracterizan la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Por otro lado, se deben formular y contrastar conjeturas que expliquen: (a) el carácter paulatino y desfasado de la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores; (b) las diferencias entre los grupos; y (c) las dificultades que los grupos de futuros profesores tienen que enfrentar con respecto a algunas de las nociones.

La búsqueda de respuestas a estas cuestiones me induce a la exploración en la complejidad del conocimiento didáctico, objeto del siguiente capítulo.

COMPLEJIDAD DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

En el capítulo 8 identifiqué y caractericé cuatro estados del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. Estos estados de desarrollo se definieron en función de los rangos de valores de 12 variables. Con estas variables yo buscaba capturar los atributos más significativos de las transparencias presentadas por los grupos en clase. De esta manera, mostré que los significados parciales de los grupos de futuros profesores que se manifiestan en dichas transparencias siguen unos patrones estables. Estos patrones me permitieron proponer una primera visión del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Para lograr este propósito, tuve que restringir el análisis de tal forma que fuera posible codificar la información contenida en las transparencias, independientemente del tema matemático de cada grupo, y así poder comparar sistemáticamente las transparencias de todos los grupos de futuros profesores. Por lo tanto, sólo pude ofrecer una caracterización general de los significados parciales que se manifestaron en las transparencias. En este capítulo, abordo esta cuestión con mayor profundidad. Analizo detalladamente las transparencias, las intervenciones en clase y los trabajos finales de los futuros profesores y tengo en cuenta la especificidad de la información con respecto al tema de cada grupo. Mi propósito es identificar y caracterizar detalladamente los significados parciales que, con respecto a los organizadores del currículo del análisis de contenido, manifestaron los grupos de futuros profesores, y describir la evolución de esos significados a lo largo de la asignatura. En otras palabras, en este capítulo, me propongo abordar la pregunta:

¿Cómo se caracterizan los significados parciales que los grupos de futuros profesores manifestaron en sus transparencias y en sus intervenciones en el aula y cómo evolucionan en el tiempo?

También analizo los trabajos finales de los grupos de futuros profesores. Este análisis pone en evidencia en qué medida cada grupo puso en práctica la información que surgió del análisis de su tema, para efectos de diseñar la unidad didáctica. Mientras que el análisis de las transparencias y las intervenciones en clase de los futuros profesores centra la atención en los factores de desarrollo que denominé “variedad” y “organización”, el análisis de los trabajos finales explora dichas producciones desde la perspectiva del factor de desarrollo que he denominado “papel”. La identificación y caracterización de los significados parciales de los grupos de futuros profesores tendrá como marco de referencia los significados teórico, técnico y práctico de los organizadores del currículo del análisis de contenido que presenté en el capítulo 2. Por otro lado, exploraré y caracterizaré la evolución de los significados parciales de los grupos de futuros profesores desde la perspectiva de la transformación de los organizadores del currículo en instrumentos tal y como lo sugiere la teoría de la génesis instrumental (ver capítulo 4). En particular, profundizaré en los procesos en virtud de los cuales los grupos de futuros profesores desarrollan técnicas que les permiten transformar cada organizador del currículo del análisis de contenido en un instrumento para el análisis de los conceptos matemáticos.

Los resultados de estos dos estudios¹³⁴ ponen en evidencia la complejidad del conocimiento didáctico. Para cada uno de los organizadores del currículo del análisis de contenido, los grupos de futuros profesores manifiestan (en las transparencias, en sus intervenciones en clase y en los trabajos finales) una variedad de significados parciales que evolucionan en el tiempo. El análisis de estos significados parciales y de su evolución me permitió identificar y caracterizar las principales dificultades de los grupos de futuros profesores a lo largo de la asignatura. Estas dificultades parecen surgir, al menos parcialmente, tanto de la complejidad de las matemáticas escolares —que los futuros profesores descubren al realizar las tareas—, como de la complejidad de los organizadores del currículo que conforman el análisis de contenido.

A continuación describo el esquema metodológico que utilicé para codificar y analizar las transparencias y las intervenciones en clase. Después, presento los resultados de este análisis para cada uno de los tres organizadores del currículo que conforman el análisis de contenido. En seguida, presento el estudio sobre los trabajos finales de los grupos de futuros profesores. En el último apartado, interpreto estos resultados en términos de la complejidad del conocimiento didáctico.

1. IDENTIFICACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS PARCIALES

Para identificar y caracterizar los significados parciales de los grupos de futuros profesores, utilicé tres fuentes de información:

- ◆ la información propuesta por los grupos de futuros profesores en sus transparencias;

¹³⁴ Análisis de las transparencias y las intervenciones en clase, por un lado, y de los trabajos finales, por el otro.

- ◆ las transcripciones de la grabación en audio de la interacción que tuvo lugar durante las sesiones de clase; y
- ◆ las transcripciones de la grabación en audio de las entrevistas con dos grupos de futuros profesores (cónicas y progresiones aritméticas y geométricas) al final de las sesiones correspondientes al análisis de contenido y al final de la asignatura.

La identificación y caracterización de los significados parciales de los grupos de futuros profesores fue el resultado de un proceso exploratorio y cíclico en el que codifiqué y analicé la información que tenía disponible de las tres fuentes anteriores. Describo en detalle ese proceso en el Anexo L. El proceso se basó en el análisis simultáneo de las transparencias de los grupos de futuros profesores y de las transcripciones de las grabaciones de la interacción en clase y de las entrevistas con los dos grupos. Fue exploratorio en el sentido que, teniendo en cuenta los significados de referencia de los organizadores del currículo del análisis de contenido y tomando como guía los factores de desarrollo, identifiqué aquella información contenida en las transparencias y en las transcripciones que consideré significativa desde el punto de vista del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Codifiqué esta información y organicé y revisé esta codificación varias veces a medida que el esquema de codificación y análisis fue evolucionando. Para ello, desarrollé un sistema interconectado de bases de datos que describí al final del capítulo 6 y en el Anexo G. Las bases de datos se pueden consultar en el disco que se adjunta con este documento. En la Figura 52 del capítulo 6 presenté el esquema que organiza este sistema de bases de datos .

Registré las grabaciones de clase y las grabaciones de las entrevistas (a grupos de futuros profesores) en la base de datos *Cintas* en la que cada registro corresponde a una cinta y en la que se introduce una descripción cronológica detallada de los episodios¹³⁵ que componen la sesión y los documentos utilizados en ella. Estos documentos incluyen las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores para sus presentaciones y las transparencias utilizadas por los formadores en sus intervenciones en clase. Registré los episodios que consideré relevantes en la base de datos *Episodios*. Cada registro de esta base de datos incluye, además de la transcripción literal del episodio y su lugar en la cinta correspondiente, una descripción general y una interpretación de lo sucedido en el mismo. De manera similar, registré en la base de datos *Documentos*, las transparencias y documentos utilizados en las sesiones. Registré en la base de datos *Caracterizaciones* los resultados del análisis de los episodios y los documentos que describiré a continuación. Cada una de las caracterizaciones pretende registrar algún aspecto del desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores (significados parciales) y se fundamenta en una serie de episodios y documentos. Las bases de datos se encuentran entrelazadas de tal forma que, por ejemplo, es posible navegar rápidamente de una caracterización a los episodios y documentos que la fundamentan.

¹³⁵ Un episodio es una porción de la transcripción, de longitud variable, que contiene afirmaciones de uno de los futuros profesores o formadores o intercambio de afirmaciones entre varios futuros profesores y formadores. La longitud de los episodios es variable. Su contenido y coherencia se centra en el hecho de que giran en torno una idea, mensaje u opinión.

Mi interés se centró en identificar aspectos de la información contenida en las transparencias y en las transcripciones que permitiera caracterizar manifestaciones de los significados parciales de los grupos de futuros profesores. En su momento, denominé a esos registros como “caracterizaciones”. Cada caracterización podía estar vinculada a varias transparencias y episodios, siendo todos ellos manifestaciones de un mismo significado parcial. El significado de referencia de los organizadores del currículo del análisis de contenido y los factores de desarrollo me sirvieron de guía para identificar y organizar las caracterizaciones. Identifiqué aquellos periodos de la asignatura en los que un significado parcial, en sus manifestaciones en las transparencias e intervenciones de los futuros profesores, se mantenía estable a lo largo de varias sesiones, a pesar del esfuerzo de la instrucción por cambiarlo. También registré aquellos momentos en los que se apreciaron cambios en los significados parciales de uno o más grupos de futuros profesores.

Construí la lista de caracterizaciones a medida que codifiqué y analicé las producciones y actuaciones de los futuros profesores. En este proceso, el análisis de un conjunto de datos (por ejemplo, las grabaciones de clase y las producciones de los grupos de futuros profesores con respecto a un organizador del currículo) produjo una primera versión de estas caracterizaciones que, al revisarla, reorganicé en un nuevo conjunto de posibles códigos, con los cuales volví a codificar y analizar la información. Repetí este proceso hasta que no se produjeron nuevas reorganizaciones de los códigos correspondientes a un organizador del currículo. El procedimiento de análisis consistió en identificar aquellos episodios y documentos más representativos del desarrollo del conocimiento didáctico de los organizadores del currículo del análisis de contenido, y establecer caracterizaciones para cada una de ellas. El esquema interactivo y coordinado de las bases de datos me permitió identificar, para cada caracterización, la evidencia (episodios y documentos) que la sustentaba más adecuadamente.

2. ESTRUCTURA CONCEPTUAL Y GÉNESIS INSTRUMENTAL

Los grupos de futuros profesores comenzaron el trabajo de análisis de contenido de su concepto con la noción de estructura conceptual. El propósito era identificar y relacionar los principales conceptos y procedimientos que caracterizan el concepto y ubicar dicho concepto dentro de la estructura conceptual de la que forma parte. Puesto que éste fue el primer ejercicio de análisis didáctico del concepto, los grupos de futuros profesores tuvieron diversas dificultades al realizarlo. En este apartado, centro la atención en dos de esas dificultades y en el proceso en virtud del cual los grupos de futuros profesores las superaron paulatinamente a lo largo de la asignatura.

En la primera sección, describo la evolución de los significados parciales de los grupos de futuros profesores con respecto a la organización de los mapas conceptuales que representan la estructura conceptual. En la segunda, analizo las transparencias e intervenciones en clase de los futuros profesores desde la perspectiva de las conexiones entre los elementos de esos mapas conceptuales. En la

última sección, articulo e interpreto los resultados de estos análisis en términos de la teoría de la génesis instrumental que presenté en el capítulo 4.

2.1. Fases en la Organización de la Estructura Conceptual

La evolución de la organización de los mapas conceptuales con los que los grupos de futuros profesores representaron al estructura conceptual de su tema estuvo caracterizada por varias fases. Al comienzo, se presentaron estructuras en forma de listado de elementos, que paulatinamente se convirtieron en mapas conceptuales con alguna estructura. Esta estructura aumentó en complejidad y se organizó inicialmente de acuerdo con una variedad de criterios, relacionados, en general, con los organizadores del currículo. En las transparencias, se aprecia que, cuando se analiza un concepto y se describe en un mapa conceptual, los diferentes elementos se organizan de acuerdo con diversos criterios. Estos criterios son, en algunos casos, la fuente de las ideas para identificar dichos elementos. Los criterios de organización se pueden combinar entre sí, cuando una parte de un mapa conceptual se organiza por un criterio y, otra parte, por otro. Desde la perspectiva del proceso de construcción de significados, la variedad de criterios en la organización es un indicador del nivel de comprensión tanto del tema (desde la perspectiva del análisis de contenido) como de la estructura conceptual (como instrumento para el análisis de ese tema).

En el estudio que presenté en el capítulo 8, definí tres variables que buscaban caracterizar la organización de los mapas conceptuales con los que los grupos de futuros profesores representaron la estructura conceptual de su tema: complejidad, criterios de organización y sistemas de representación como organizador del mapa conceptual. En términos de estas variables, los estados de desarrollo del conocimiento didáctico se establecen de la siguiente manera. El estado 1 está caracterizado por una estructura en forma de listado con más de dos criterios de organización; el estado 2 por una estructura sencilla en forma de mapa conceptual y dos o tres criterios de organización; el estado 3 por una estructura compleja (más de dos niveles de jerarquía) y máximo dos criterios de organización; finalmente el estado 4 se caracteriza por una estructura conceptual organizada con base en un solo criterio de organización¹³⁶. Esta descripción de los estados resume y articula una variedad de significados parciales de los grupos de futuros profesores. En esta sección caracterizo y ejemplifico estos significados parciales, y describo las fases que caracterizaron su evolución.

De un Listado a un Mapa Conceptual Organizado por los Organizadores del Currículo

Tres grupos presentaron estructuras conceptuales en forma de listado en la primera producción: progresiones, números decimales y sistemas de ecuaciones lineales.

¹³⁶ La instrucción indujo a los grupos de futuros profesores a representar la estructura conceptual de su tema por medio de mapas conceptuales. El análisis que hago en este apartado se refiere a los esquemas de organización de esos mapas conceptuales. Sin embargo, para efectos de simplificar la lectura, utilizaré expresiones como “organización de la estructura conceptual” para referirme a la organización de los mapas conceptuales con los que los grupos de futuros profesores representaron la estructura conceptual de su tema.

les. En el documento 11¹³⁷, el grupo sistemas de ecuaciones lineales presentó un documento que consta de dos folios, el primero, con el borrador de lo que habían traído de tarea y, el segundo, con lo que habría sido la transparencia para la presentación en clase. El primer folio es un listado que viene estructurado en las categorías de los organizadores del currículo: errores y dificultades, diversidad de representaciones, fenomenología, diversidad de materiales, evolución histórica y análisis conceptual. Esta producción es prototípica del estado 1 para las variables complejidad y criterios de organización del estudio del capítulo 8 (ver Figura 55).

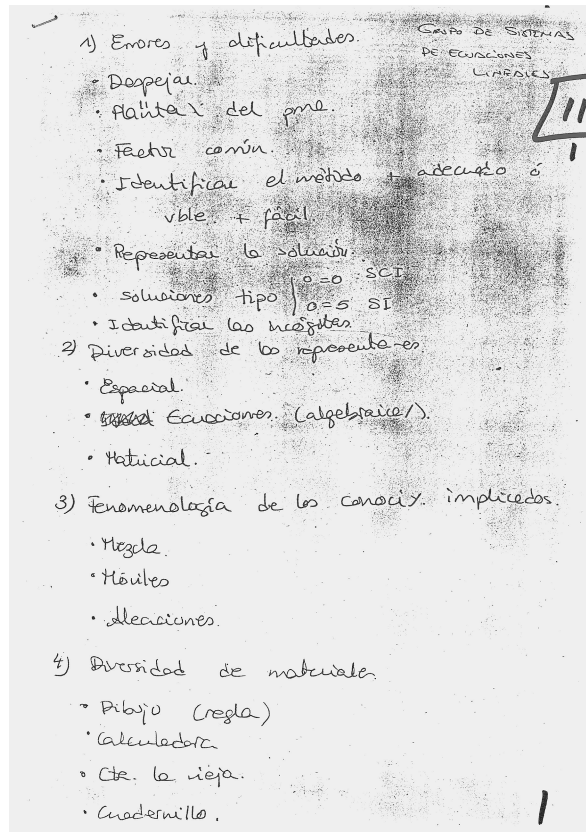


Figura 55. Primer folio de la primera tarea del grupo sistemas de ecuaciones lineales (documento 11)

Con motivo de la discusión en clase, cada uno de estos grupos logró presentar una segunda transparencia en la que el análisis se representa estructuradamente, con conexiones entre los diversos elementos y con al menos un criterio de organización. En esta primera fase, los mapas conceptuales propuestos fueron sencillos, con pocos niveles de complejidad.

La organización de la estructura conceptual con base en los organizadores del currículo se aprecia en la primera y segunda transparencias del grupo probabilidad, y en la primera producción de los grupos números decimales, cónicas y sistemas de ecuaciones lineales (ver Figura 56, para el trabajo del grupo probabilidad). En esta transparencia, el grupo hizo un esfuerzo por utilizar los organizadores del currículo como medio para estructurar la tarea. Se aprecia que

¹³⁷ Referencio los documentos de acuerdo con el orden en el que están registrados en la base de datos *Documentos* a la que hice referencia en el apartado anterior.

la noción de estructura conceptual está poco desarrollada, y el grupo intenta darle un significado con base en otros elementos vistos dentro de la asignatura. En la primera sesión, este significado se construyó de manera muy rudimentaria. En algunos casos, el organizar la estructura conceptual con base en los organizadores del currículo no permite apreciar y explorar la estructura matemática subyacente al concepto analizado.

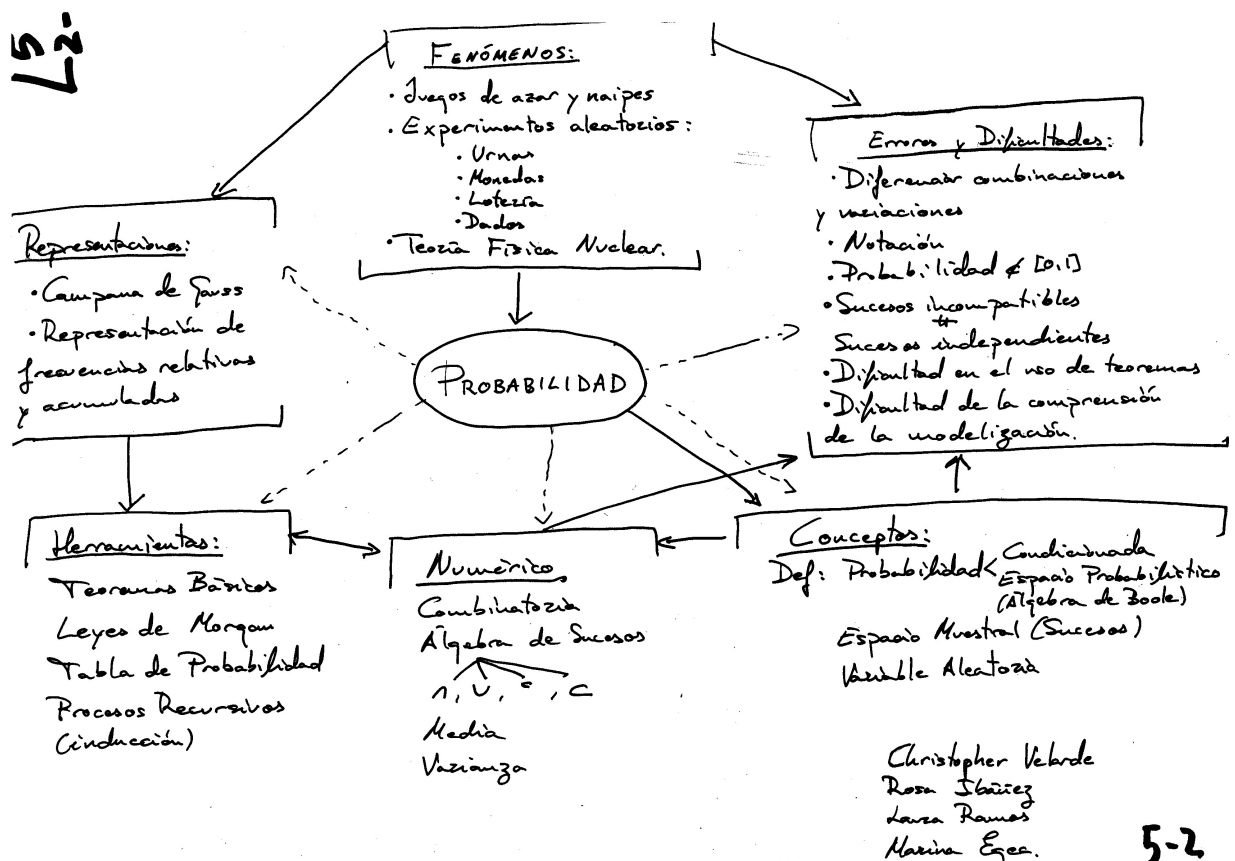


Figura 56. Segunda tarea del grupo probabilidad (documento 5)

Esta manera de organizar la estructura conceptual resulta natural para las primeras producciones. Los organizadores del currículo habían formado parte de la instrucción en las clases precedentes. Era la herramienta conceptual que los futuros profesores tenían a mano en el momento de abordar la tarea. Esta manera de proceder (influenciada por la instrucción previa) se hace manifiesta en el episodio 78, en el que el grupo cónicas describe cómo llegaron a su primera producción¹³⁸.

Maite: Esto en realidad fue después del examen. Salimos del examen, y llegamos y empezar a decir cosas que...

Esmeralda: Hicimos como con lo de derivada. Empezar a decir.

¹³⁸ En las transcripciones de las grabaciones, utilizo el código “()” para indicar apartes que no se entienden. Los dos formadores se identifican por LR (el director) y PG (el doctorando). La numeración de los episodios se refiere a su orden de clasificación en la base de datos *Episodios* a la que me referí en el apartado anterior.

Maite: Y cuando ya tenemos la lista () bueno pues ahora, pues los organizadores, vamos a ver en cuál podemos meter cada uno.

PG: Y, ¿por qué se les ocurrió que tenían que meterlos en los organizadores?

Futura profesora: Era lo único que habíamos visto en clase. Para organizarlos de alguna manera y no dejarlos ahí, o sea, todos los conceptos ahí sueltos. Por organizadores, de alguna manera.

La Noción de Concepto como Criterio de Organización

En una situación relacionada pero diferente a la anterior, una interpretación de la noción de concepto se constituyó en el principal criterio organizador de la estructura conceptual. Los demás criterios de organización dependían de éste.

En el documento 17, el grupo probabilidad presentó un documento que, desde el punto de vista estructural, es sustancialmente diferente del documento correspondiente a la segunda versión de su trabajo. Ubicaron el término “Conceptos” en el centro de la estructura y de allí surgen las demás categorías: contexto, fenomenología y representación (ver Figura 57). Algo similar sucede en el documento 18 del grupo sistemas de ecuaciones lineales. Aparentemente, de acuerdo con lo que mencionaron en la presentación, su estructura conceptual pretendía ser “conceptual”, en el sentido de no usar sistemas de representación, aunque incluyó los sistemas de representación de muchas maneras. La estructura conceptual que propusieron fue bastante compleja y coherente.

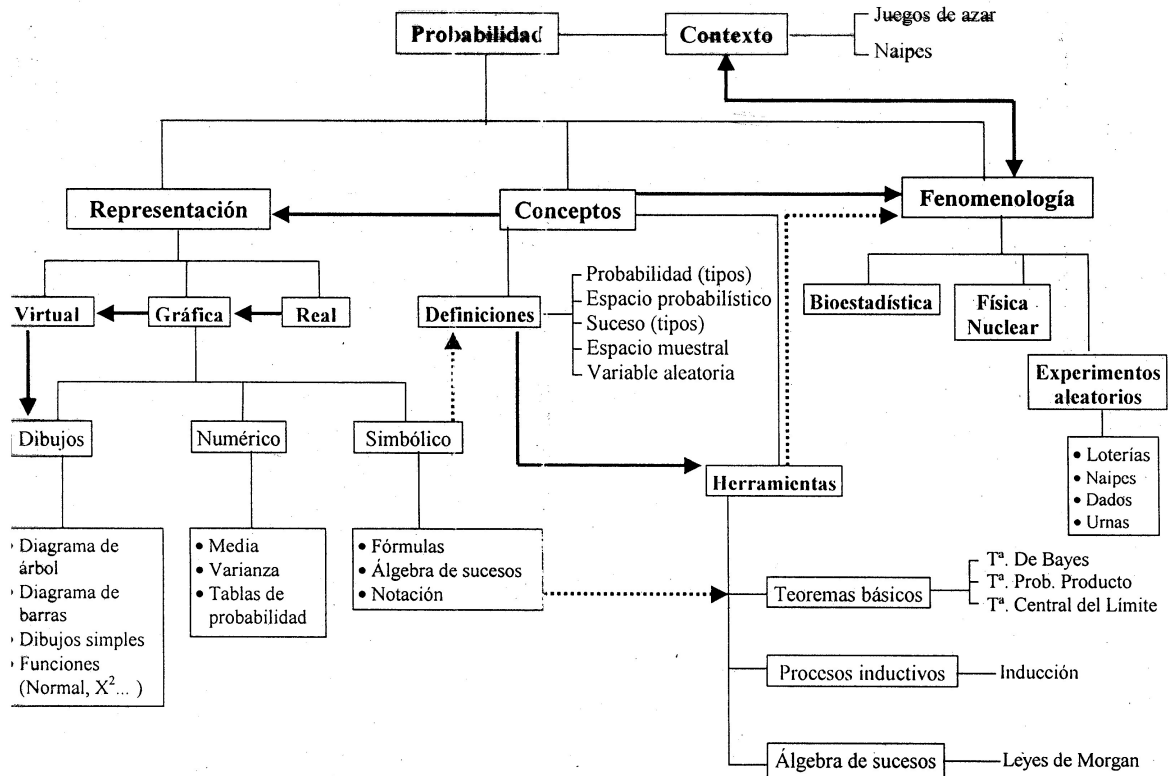


Figura 57. Tercera tarea del grupo probabilidad (documento 17)

Esta aproximación “conceptual” parece surgir naturalmente de la visión formal de las matemáticas que los futuros profesores desarrollaron a lo largo de su formación. La influencia de la experiencia previa como estudiantes en la formación de los futuros profesores ha sido estudiada (Broekman, 2000; Ebby, 2000; Goulding et al., 2003) e hice referencia a ella en el capítulo 5. En la mayoría de los casos, las transparencias de este tipo contienen un conjunto de etiquetas parcialmente conectadas cuya interpretación requiere que el lector ponga en juego su propio conocimiento matemático. Al no tener en cuenta, de manera explícita, los sistemas de representación, no se reconoce su potencial y se les asigna un papel complementario en el análisis de la estructura conceptual¹³⁹. Sin embargo, las etiquetas y relaciones, que surgen de este análisis conceptual, adquieren significado cuando se describen dentro del juego de los sistemas de representación.

La Historia como Criterio de Organización

La historia pudo jugar un papel importante en la construcción y organización de la estructura conceptual. En general, no fue el único criterio organizador. No obstante, como se observa en los ejemplos que presento a continuación, el análisis histórico aportó información relevante para esta tarea.

¹³⁹ En el siguiente apartado, caracterizaré los significados parciales que, sobre la noción de sistema de representación, construyeron los grupos de futuros profesores. La que he mencionado es una de esas características.

En el documento 12, el grupo funciones y gráficas presentó una estructura conceptual que había sido originada y diseñada a partir de la información que este grupo recogió para el análisis histórico del tema (ver Figura 58).

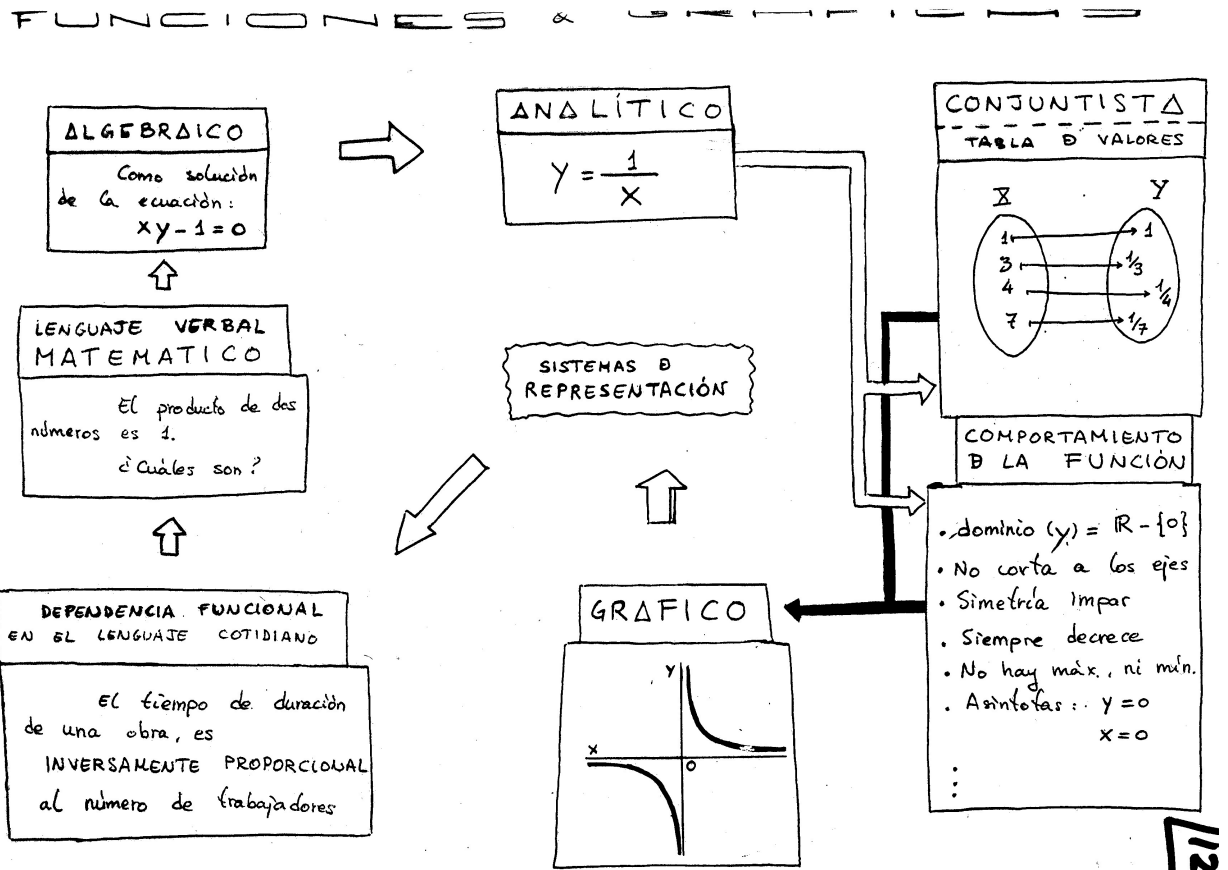


Figura 58. Tercera tarea del grupo funciones (documento 12)

Durante la discusión en clase acerca de esta presentación, Paco sustenta sus argumentos desde la perspectiva histórica (episodio 31):

Carmen: El orden que habéis escogido para () sistemas de representación. ¿No habría que darle la vuelta a todas las flechas? Porque también se puede empezar desde un punto de vista gráfico, o desde un punto de vista algebraico.

Paco: Sí, es que sigue de alguna manera un modo en espiral. Empieza por aquí...

Carmen: Pero es que lo que yo digo es que no hay necesariamente que empezar por el () porque te puede surgir directamente el problema analítico o te puede surgir directamente la tabla conjuntista.

Paco: La historia. El cómo se ha ido elaborando el concepto de función a lo largo del tiempo [vuelve a presentar el ciclo histórico, siguiendo los elementos de la transparencia].

El papel de la historia se aprecia también en otros episodios y en otros grupos. En el episodio 56, Ángel menciona a la historia como elemento que ha contribuido a la mejora de la estructura conceptual:

Ángel: Intentar mejorar la estructura conceptual de los números decimales, conforme lo hicimos (). Bueno pues hemos puesto unos precedentes, también en base a las notas históricas que hemos podido ir leyendo sobre los números decimales.

Vemos entonces que el análisis histórico pudo jugar un papel importante en el desarrollo de la estructura conceptual del tema. La historia aportó aspectos matemáticos que se habrían podido omitir. También contribuyó en la dimensión estructural, como lo sugirió Paco en su trabajo: gracias al análisis histórico lograron establecer relaciones entre los diferentes sistemas de representación.

La Fenomenología como Criterio de Organización

El aspecto fenomenológico apareció sistemáticamente en las primeras producciones de los grupos (ver, por ejemplo, la Figura 56 y la Figura 57). La importancia de lo fenomenológico dentro de la estructura conceptual fue promovida inicialmente por la instrucción con el ejemplo de la derivada (documento 1). Más tarde (episodio 39), la instrucción sugirió que no se tomara la fenomenología como un elemento de la estructura conceptual. No obstante, los grupos tuvieron dificultades para eliminarlo de sus producciones y el cambio fue paulatino. Entre tanto, algunos grupos interpretaron lo fenomenológico como un sistema de representación, situación que fue difícilmente superada. Ejemplifico este proceso a continuación.

En el episodio 35, Carlos afirma que la fenomenología no formaba parte de la estructura conceptual.

Carlos: Nosotros hemos quitado de la estructura conceptual la categoría de fenomenología porque creemos que independientemente de que haya fenómenos que modelizan () para trabajar con ellos, la estructura conceptual es independiente de que haya fenómenos... No lo consideramos dentro de la estructura conceptual.

Por otro lado, y seguramente con motivo de la investigación histórica que estaban realizando, varios futuros profesores reaccionaron, al parecer malinterpretando a Carlos, para afirmar que la fenomenología sí era importante para el concepto, en particular en su génesis.

Futura profesora: Porque la mayoría de las veces, por lo menos para mí la fenomenología está muy ligada con el concepto.

En el episodio 39, LR retomó la propuesta de Carlos e insistió que seguía pendiente de resolver el problema de la pertenencia de lo fenomenológico a la estructura conceptual. No obstante, en el episodio 40, al hacer la presentación de su grupo (documento 16), Antonio insistió en que le parecía importante incluir la fenomenología “dentro del cuadro”.

Antonio: Intentando relacionar todo lo que es analítico, la expresión simbólica, con lo que es la gráfica. Y luego nosotros sí que hemos considerado como importante lo que es la fenomenología dentro del cuadro.

Por otro lado, algunos grupos propusieron abordar lo fenomenológico como un sistema de representación. Es el caso del mismo Carlos, en el documento 18. Dos sesiones más tarde, PG insistió en afirmar que lo fenomenológico no era un sistema de representación. A pesar de esta posición de la instrucción, más tarde el grupo probabilidad presentó una estructura conceptual muy sencilla en la que insistieron en incluir la fenomenología dentro de la estructura conceptual (documento 27). Aparentemente, el tema fue discutido ampliamente por el grupo antes de proponerlo en la producción. De hecho, en la siguiente producción (documento 38) el grupo probabilidad continuó incluyendo la fenomenología dentro de la estructura conceptual (ver Figura 63). Lo mismo sucede en el documento 24 del grupo funciones y gráficas. En producciones posteriores esta problemática se estabilizó y los aspectos fenomenológicos desaparecieron de la estructura conceptual. Esto sucedió para la mayoría de los grupos en la tarea 4 (por ejemplo, el documento 28 del grupo cónicas, el documento 29 del grupo esfera y el documento 30 del grupo función de segundo grado).

Los Sistemas de Representación como Organizadores de la Estructura Conceptual: del Estado 2 al Estado 3

El paso de una estructura conceptual organizada por varios criterios a una estructura conceptual organizada por sistemas de representación se ubica en el paso del estado 2 al estado 3 en la variable sistemas de representación como organizador de la estructura conceptual del estudio del capítulo 8. Esta variable caracteriza el estado 2 con el intervalo [1,2], que significa que los sistemas de representación no aparecen o no se utilizan (valor 1), o aparecen en la estructura conceptual, pero no juegan un papel central en la organización de la misma (valor 2). El estado 3 está caracterizado por el intervalo [2,3]: los sistemas de representación aparecen sin jugar un papel central en la organización de la estructura conceptual (valor 2), o son el criterio central de organización de la misma (valor 3). A continuación describo y ejemplifico el paso del valor 2 al valor 3 de la variable. El valor 3 de la variable caracteriza el estado 4 (su intervalo es [3,3]).

En la Tabla 29, presento los valores de la variable sistemas de representación como organizador de la estructura conceptual para cada una de las nueve producciones de cada grupo. Se observa que hay mucha variedad en el momento en el que cada grupo presentó su primera producción clasificada con el valor 3 de esta variable. Además, éste es un valor poco estable de la variable: varios grupos presentaron retrocesos a otros valores anteriores de la misma.

Grupo / Producción	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	3	3	3	3	3	3
2	1	3	2	2	2	3	3	3	1
3	0	2	2	2	2	3	3	3	2
4	1	1	2	2	2	3	3	3	2

Grupo / Producción	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	1	2	2	2	3	3	2	3	2
6	2	2	2	2	3	3	2	0	1
7	3	2	2	3	3	3	3	3	3
8	1	2	2	2	0	3	0	1	1

Tabla 29. Variable sistemas de representación como organizador de la estructura conceptual

La evidencia de las secciones anteriores hace patente la dificultad de algunos grupos para utilizar los sistemas de representación como criterio organizador de la estructura conceptual. Como lo mostraré más adelante, los sistemas de representación son un elemento complementario a la estructura conceptual. No obstante, al final, la estructura conceptual se organiza a partir de los sistemas de representación y los grupos reconocen su importancia.

Dificultad para Utilizar los Sistemas de Representación como Criterio Organizador de la Estructura Conceptual

Varios grupos tuvieron dificultades para organizar la estructura conceptual en términos de los sistemas de representación. Éste fue el caso del documento 18, del grupo sistemas de ecuaciones lineales (Figura 59). En este documento, aunque la estructura es bastante compleja e incluye conexiones puntuales externas, el grupo se enfrentó claramente a la dificultad de utilizar los sistemas de representación como medio para organizarla. Ésta es tal vez la razón por la cual los sistemas de representación aparecen separados e independientes en un segundo folio.

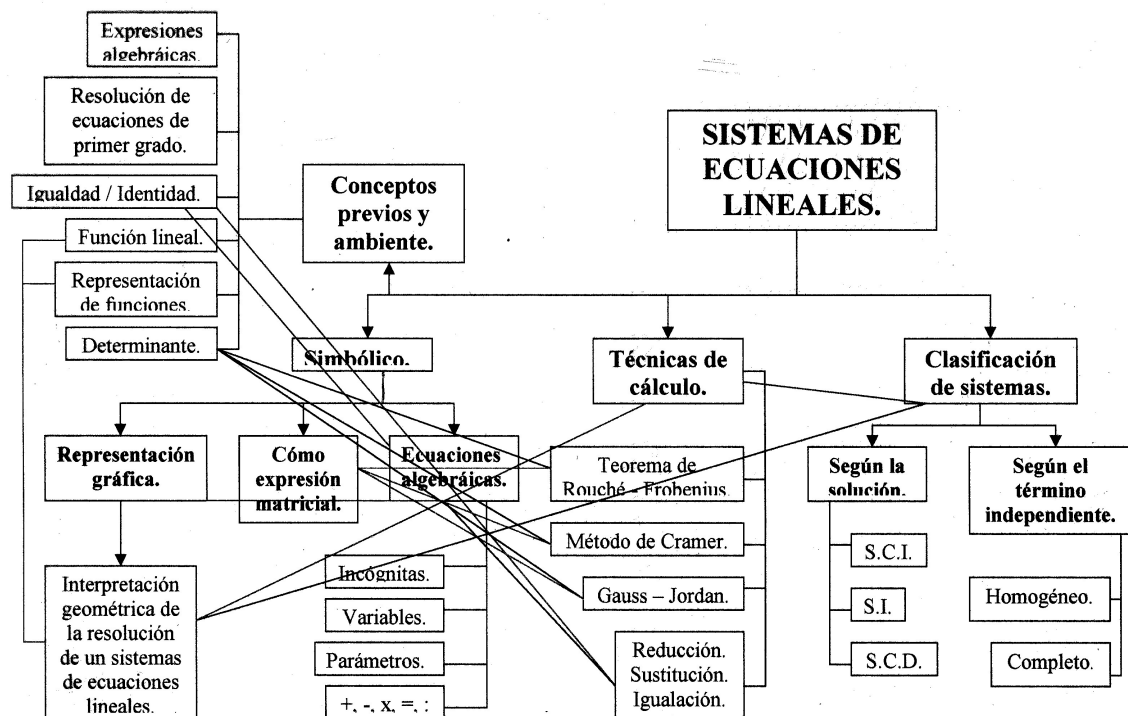


Figura 59. Tercera tarea del grupo sistemas de ecuaciones lineales

Aparentemente, de acuerdo con lo que mencionaron en la presentación, su estructura conceptual, pretendía ser “conceptual” en el sentido de no usar sistemas de representación, aunque incluía los sistemas de representación de muchas maneras (episodio 51).

Carlos: Esto es sólo la estructura conceptual. Nosotros presentamos la transparencia de estructura conceptual y la transparencia de sistemas de representación... Si la estructura conceptual fuera un gran armazón de un edificio, pues los conceptos previos y el ambiente sería el suelo donde se asienta, sería la base.

A pesar de que la instrucción sugirió explícitamente la utilización de los sistemas de representación para organizar la estructura conceptual, varias producciones presentan el análisis de los sistemas de representación como algo aparte y complementario al análisis de la estructura conceptual. Éste es el caso, por ejemplo, del grupo esfera, en el documento 15 y del grupo sistemas de ecuaciones lineales, en el documento 18. Las producciones del grupo probabilidad también son representativas de esta situación. En el documento 27, este grupo presenta una estructura conceptual muy sencilla en la que el análisis “conceptual” toma casi el mismo espacio que los sistemas de representación. En la siguiente producción, el documento 38, se da una tensión entre las representaciones y lo conceptual, aunque sigue siendo evidente que el grupo ve las representaciones como complementarias (Figura 63).

Estas dificultades se aprecian en el episodio 93. Este episodio corresponde a la primera entrevista con el grupo cónicas. En él vemos que todo el grupo, al pasar del documento 10 al documento 14, veía la tarea de analizar el tema desde la perspectiva de los sistemas de representación como algo independiente del análisis de la estructura conceptual.

Sandra: Pero es que esto lo veíamos como aparte.

...

Maite: Que nosotros no veíamos que podíamos hacer el esquema en base a los sistemas de representación, sino que lo veíamos como una parte de.

Ávila: Pero como dijo de hacer los sistemas de representación, pues encima, sólo eso. Pero eso iría metido en el esquema.

...

María Luisa: Pero era como si nosotros hubiéramos hecho la estructura conceptual y ahora, pues hagan los sistemas de representación.

Maite: Lo veíamos como una cosa aparte y luego ya lo meteríamos allí.

En este episodio, se aprecia también la influencia de la interpretación que el grupo hace de las instrucciones dadas por la instrucción. La tarea era hacer el análisis desde la perspectiva de los sistemas de representación, independientemente del significado que esa tarea tuviese. El grupo interpreta la tarea como algo separado y no lo relaciona con el ejemplo dado en clase, en el que los sistemas de representación organizaban completamente la estructura conceptual.

Los Sistemas de Representación Organizan la Estructura Conceptual

Al avanzar en la asignatura, los sistemas de representación asumieron paulatinamente un papel organizador de las estructuras conceptuales presentadas por los diferentes grupos. Esto ocurrió en diferentes momentos, dependiendo del grupo. No obstante, los sistemas de representación comenzaron a aparecer en las estructuras conceptuales, inicialmente compartiendo el rol organizador con otras nociones, para después convertirse en el principal criterio de organización.

En el documento 10, el grupo cónicas presentó una estructura conceptual organizada por diversos criterios: aparecen los errores, hay un comienzo de análisis fenomenológico, se menciona la construcción de las cónicas y hay un análisis de sistemas de representación. En este análisis, se aprecia confusión en la relación entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico. Por ejemplo, dentro del sistema de representación simbólico incluyeron descripciones verbales de elementos gráficos y establecieron las conexiones con los correspondientes elementos en las gráficas de las cuatro cónicas. Las expresiones simbólicas no aparecen. Esta transparencia corresponde, por lo tanto, al valor 2 de la variable sistemas de organización como organizador de la estructura conceptual.

En el siguiente documento, el documento 14, este mismo grupo presenta una estructura diferente. Han desaparecido los errores y la referencia a la construcción de las cónicas. La presentación se estructura en dos dimensiones: las cuatro cónicas y, para cada una de ellas, una descripción en cinco sistemas de representación

y un ejemplo de un fenómeno. La presentación está organizada por sistemas de representación, pero es, en todo caso una organización parcial en la que no se establecen conexiones entre los diferentes elementos presentados (Figura 60). Estas conexiones se establecen con claridad y detalle en el documento 28.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN CÓNICAS

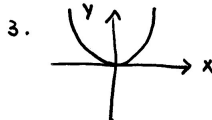
L14

PARÁBOLA

1. Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz



DIRECTRIZ



4. $y = ax^2 + b \quad a, b \in \mathbb{R}$.

5. $f(x, y) = ax^2 + b - y$
 $f(x, y) = 0$.

6.

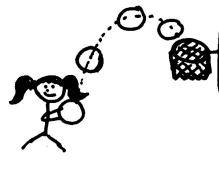


Figura 60. Aspecto parcial de la tercera tarea del grupo cónicas (documento 14)

Más tarde, en retrospectiva y durante la entrevista, este grupo describió el proceso en virtud del cual produjeron esta transparencias (episodio 103):

PG: Entonces, en este momento, ¿cómo es la situación de la pelea entre la estructura conceptual y los sistemas de representación?

María Luisa: Ya lo veíamos como que hiciéramos la estructura conceptual en base a los sistemas de representación. Es que entre otras cosas, nuestro tema, como no lo hagas así, a ver cómo lo haces.

Maite: Visto lo visto, queda mucho más claro así.

El grupo números decimales siguió una progresión similar: pasaron de una estructura conceptual organizada parcialmente por sistemas de representación, pero en la que la fenomenología y el contexto juegan papeles organizadores en el documento 4, a una estructura claramente organizada por sistemas de representación, en la que se menciona también la fenomenología y los precedentes, pero estos elementos no tienen carácter organizador (documento 18, ver Figura 65 más adelante). El carácter organizador de los sistemas de representación se aprecia también con claridad en el paso del documento 15 al documento 29 del grupo esfera. El primero se organiza por una variedad de criterios. En el segundo, los sistemas de representación permiten una presentación estructurada.

En algunos casos, aparece un paso intermedio cuando, teniendo a los sistemas de representación como criterio de organización de la estructura conceptual, hay

elementos de esa estructura conceptual que no se representan en ningún sistema de representación: los sistemas de representación se utilizan parcialmente como medio para representar la estructura matemática. Esta situación se presenta en varias producciones. Por ejemplo, en el documento 29, el grupo esfera presenta una estructura conceptual organizada por sistemas de representación, pero en la que la categoría “propiedades” no se describe en ningún sistema de representación (ver Figura 61).

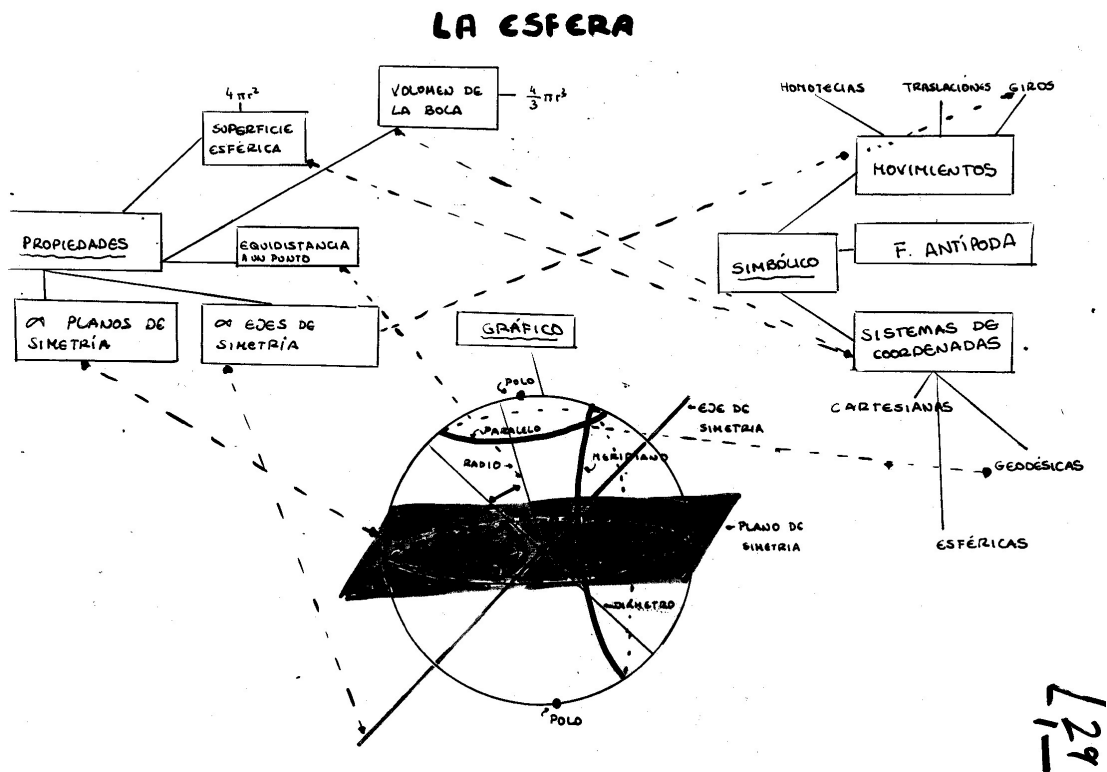


Figura 61. Cuarta tarea del grupo esfera (documento 29)

En la última fase de este proceso, la estructura conceptual queda completamente organizada por los sistemas de representación. Encontramos producciones que utilizan los sistemas de representación como criterio central de organización y, además, toda la estructura conceptual se encuentra representada en ellos. Éste es el caso de las producciones de los grupo cónicas (documento 14, Figura 60), números decimales (documento 19, Figura 62), funciones y gráficas (documento 24), progresiones aritméticas y geométricas (documento 25) y sistemas de ecuaciones lineales (documento 31). En todos los casos, se aprecia un progreso con respecto a su producción anterior.

Papel de los Sistemas de Representación

Los sistemas de representación permiten apreciar nuevos aspectos de la estructura matemática que no sería posible ver si se hiciera un análisis conceptual de corte tradicional. El análisis de la estructura conceptual y de los sistemas de representación permite “descubrir” facetas de la estructura matemática que no se habían tenido en cuenta con anterioridad. Esta faceta de los sistemas de representación fue

reconocida explícitamente por el grupo cónicas en la entrevista. En el episodio 100, el grupo explica que, al buscar establecer relaciones, habían identificado las asíntotas de la hipérbola como aspecto relevante de esa estructura matemática:

Laura: Y a intentar buscar relaciones entre nuevos elementos que no hemos considerado.

PG: A ver, explicame eso.

Laura: Las asíntotas. Por ejemplo, no las habíamos considerado en ninguna parte, pero al buscar las relaciones mediante, para verla aquí. Y eso no se nos había ocurrido.

El potencial organizador de la estructura conceptual se aprecia también cuando se ponen en juego los sistemas de representación. Es el caso del procedimiento para poner las ideas en una estructura de características gráficas, como sucede con el grupo cónicas, en el episodio 81. En este episodio, ellas explican cómo la estructura conceptual les permitió organizar ideas que estaban desordenadas. Esto sucede en el paso de su documento 10.1, en el que las ideas estaban en categorías de organizadores del currículo, al 10.2 en el que comienzan a aparecer los sistemas de representación.

PG: ¿Y ustedes recuerdan de alguna manera si tuvieron alguna sensación cuando terminaron esto?

Maite: Mucho más claro el verlo así que el otro.

PG: ¿Sí sintieron eso que la cosa se había organizado?

Varias futuras profesoras: Sí. Ordenado, sí.

2.2. Conexiones entre Elementos del Mapa Conceptual

En el estudio que presenté en el capítulo 8, la variable con mayor número de discrepancias fue “conexiones entre sistemas de representación” (Tabla 28). Esto significa que varios grupos de futuros profesores lograron progresar en la mayoría de los aspectos de su conocimiento didáctico de la estructura conceptual de su concepto, pero no lograron establecer conexiones entre los elementos de los mapas conceptuales con los que representaban esa estructura conceptual. En esta sección, presento y analizo las producciones de algunos grupos para ejemplificar la evolución de sus significados parciales con respecto a este aspecto de la utilización de la noción de estructura conceptual. En el apartado siguiente, presentaré evidencia que puede explicar esta evolución. Allí sugeriré que algunos grupos no establecieron conexiones entre los elementos del mapa conceptual porque concebían el concepto desde una perspectiva esencialmente simbólica y veían los sistemas de representación no simbólicos como complementarios a la estructura conceptual. A medida que se avanzó en la asignatura, se apreció una clara evolución en los significados parciales de los grupos de futuros profesores. Algunos grupos establecieron conexiones internas y externas entre los elementos del mapa conceptual y reconocieron la importancia de esas conexiones en el análisis de los conceptos. Al final, se construyó una consciencia de que “todo está relacionado”.

En las primeras producciones presentadas por los grupos, las únicas conexiones que se presentan son de tipo jerárquico. No aparecen conexiones internas que

relacionen diferentes elementos dentro de un mismo sistema de representación o relaciones externas que relacionen diferentes representaciones de un mismo elemento. Es el caso, por ejemplo, de la tercera tarea del grupo números decimales que se muestra en la Figura 62 (documento 19).

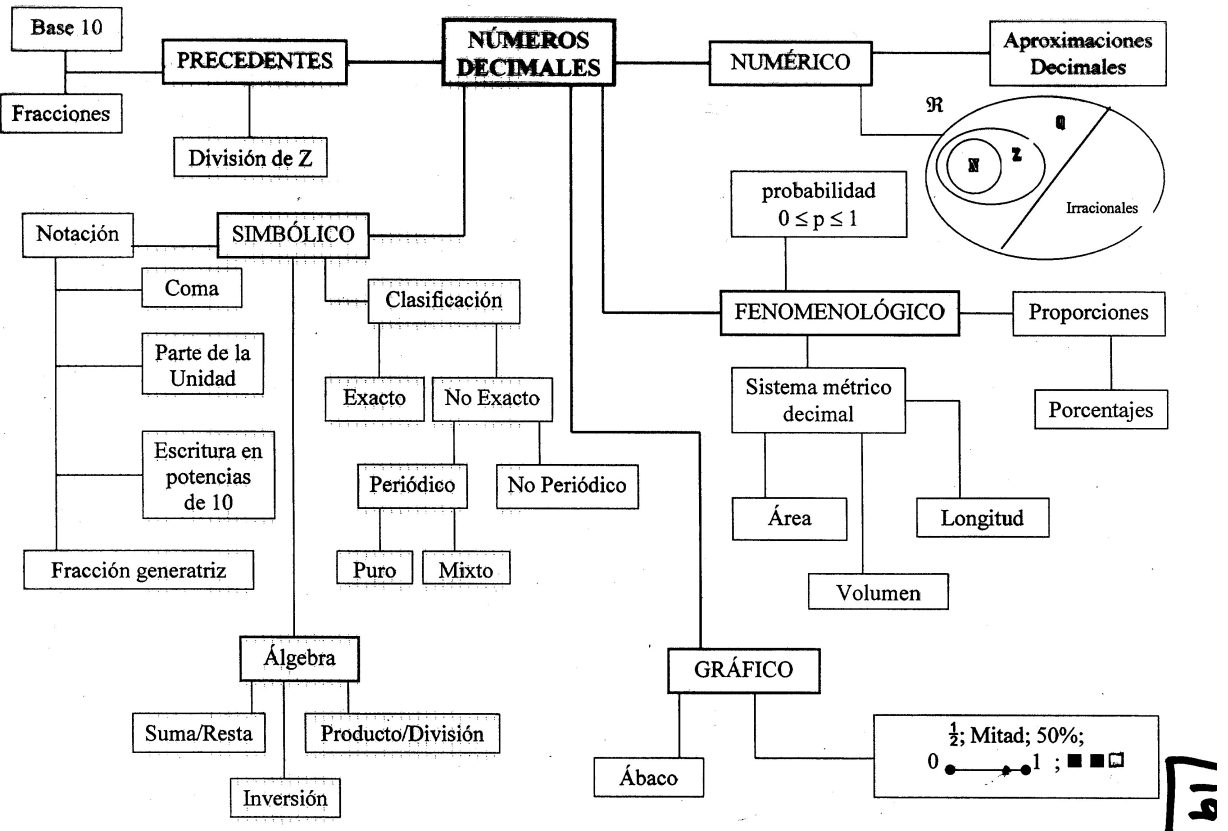


Figura 62. Tercera tarea del grupo números decimales (documento 19)

En el documento 27, el grupo probabilidad presentó una estructura conceptual muy sencilla en la que aparece una única conexión externa global. No hay realmente conexiones internas. Esta estructura conceptual pertenece ya a la tarea 4. Y en el documento 38, de este mismo grupo y correspondiente a la tarea 5, las conexiones que existían desaparecen por completo. La estructura conceptual no tiene conexiones de ningún tipo (ver Figura 63).

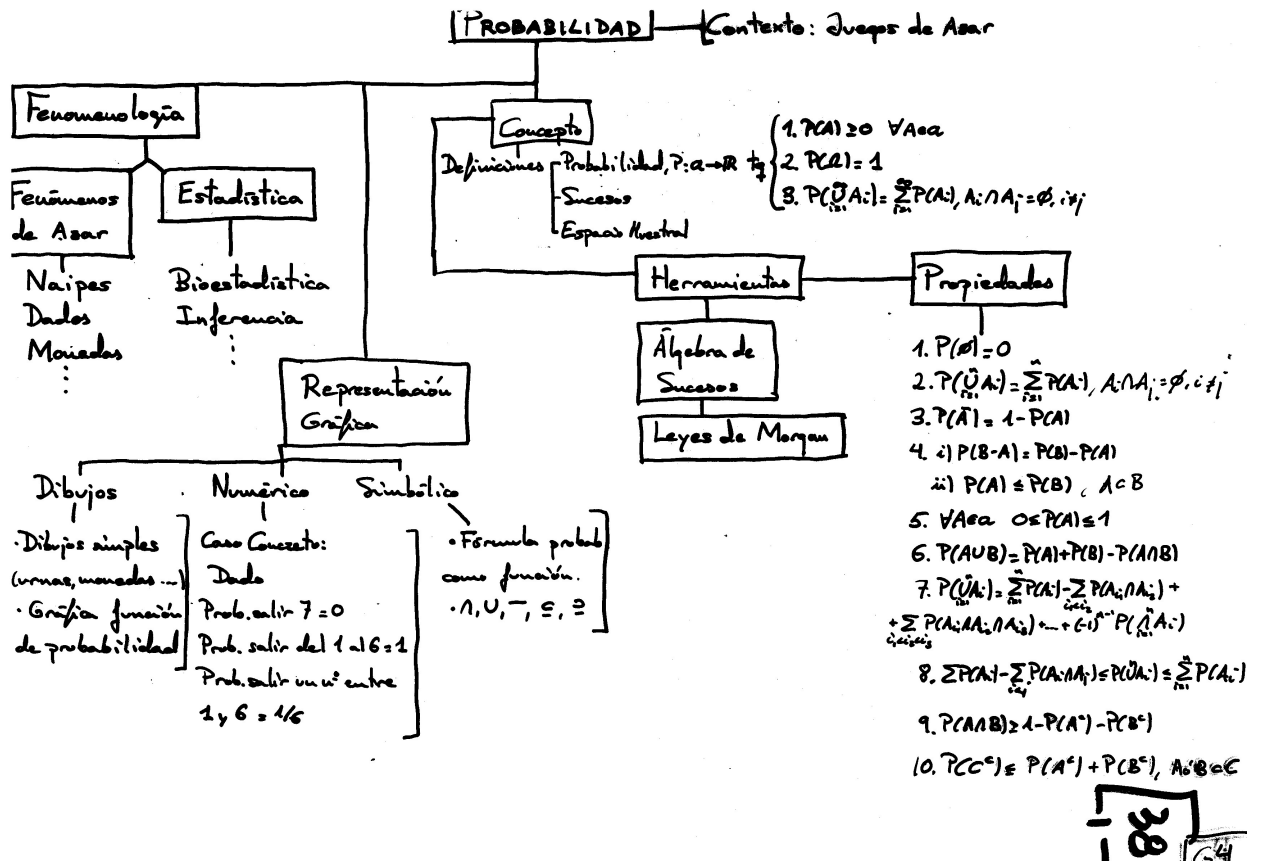


Figura 63. Quinta tarea del grupo probabilidad (documento 38)

Aunque la noción de conexión puntual (interna o externa) generó dificultades en la mayoría de los grupos (como se aprecia en los ejemplos anteriores), algunos grupos presentaron transparencias en las que hicieron explícitas conexiones puntuales entre diferentes elementos del mapa conceptual. Estos fueron los casos del grupo cónicas en la segunda tarea (documento 10) y los grupos esfera y función cuadrática en la tercera tarea (documentos 15 y 16). La Figura 64 presenta la cuarta tarea del grupo función cuadrática en la que se aprecia un esfuerzo por establecer conexiones entre elementos de diferentes sistemas de representación.

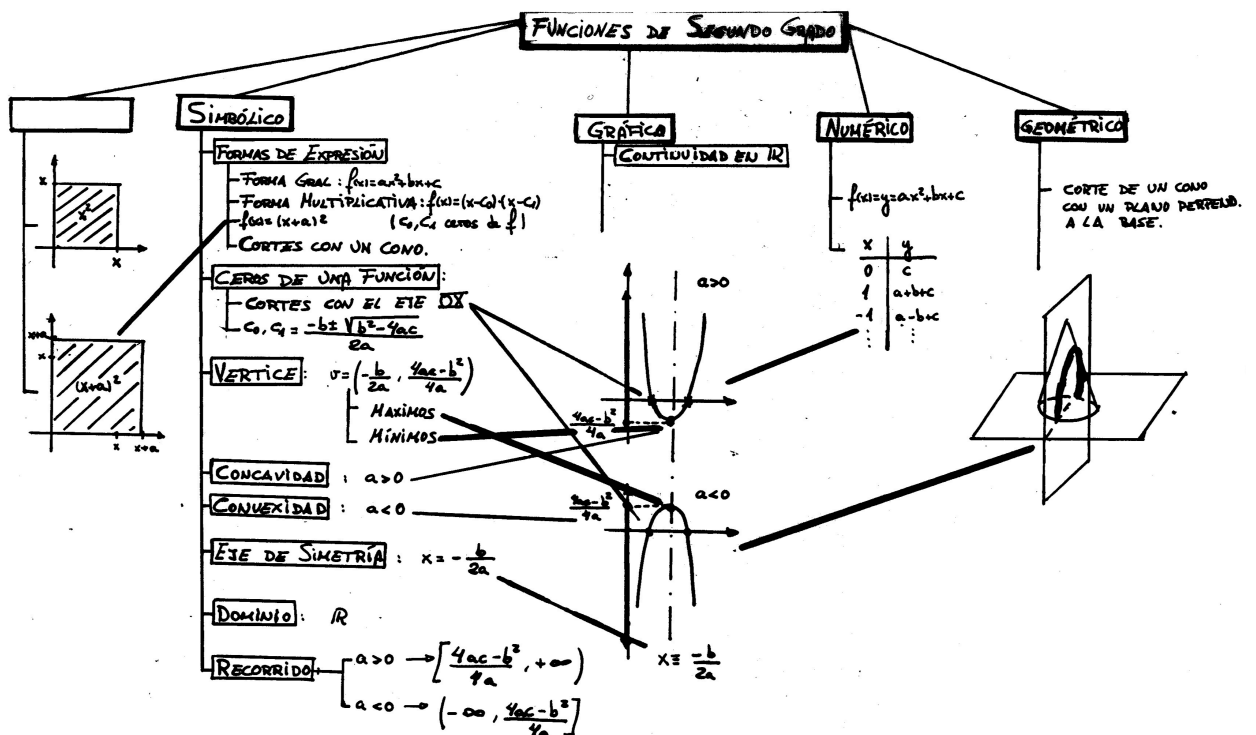


Figura 64. Cuarta tarea del grupo función cuadrática

En el episodio 40, Antonio, miembro de este grupo, puso en evidencia la conciencia que este grupo tenía sobre la posibilidad de establecer conexiones puntuales externas. Se refiere, en este caso, a la relación entre el sistema de representación simbólico y gráfico:

Antonio: Y ahora si hemos querido relacionarlo mucho con el aspecto analítico... El vértice pues es un punto concreto, que analíticamente se ve, tanto aquí como aquí [muestra en la representación gráfica], los cortes con el eje x son los ceros, y también se puede comprobar directamente... Intentando relacionar todo lo que es analítico, la expresión simbólica, con lo que es la gráfica.

En la medida en que trabajaban en sus producciones, recibían comentarios de parte de los formadores, y participaban en las discusiones en clase —con motivo de las críticas de los compañeros a los trabajos expuestos— los grupos se fueron haciendo conscientes de que los elementos de la estructura conceptual estaban relacionados entre sí y reconocieron su importancia en el análisis de los conceptos. Por ejemplo, en el episodio 73, Carmen María expresó que hacía falta la conexión entre la tabla de valores y la representación gráfica en la estructura conceptual de funciones y gráficas para la tarea 5.

Carmen María: Hay una relación entre tabla de valores y representación gráfica porque hay una manera de representar que es dándole valores a la función. Aunque no sea una representación exacta, sí es manera digamos intuitiva de hacer una representación.

Al final, se comenzó a construir una conciencia de que “todo está relacionado” que se aprecia, por ejemplo, en el episodio 38, en el que Ávila reitera la conciencia de que se está representando un mismo objeto matemático de diferentes maneras y que esa es la razón por la cual todo está relacionado: “Es que las seis cosas, al ser lo mismo, van a estar relacionadas. Son distintas definiciones de la misma cosa”¹⁴⁰.

2.3. Complejidad de la Noción de Estructura Conceptual como Instrumento

En las secciones anteriores he caracterizado los significados parciales que los grupos de futuros profesores pusieron de manifiesto en sus transparencias y en sus intervenciones en clase. Se aprecia una evolución en su aproximación a la construcción de mapas conceptuales que representen las principales características de los conceptos sobre los que trabajaron. La evolución de sus significados parciales es una manifestación del proceso de génesis instrumental.

Génesis Instrumental para la Estructura Conceptual

El manejo que los grupos de futuros profesores hicieron de la noción de estructura conceptual y de los mapas conceptuales como instrumentos para describir el tema evolucionó en el tiempo. A medida que se avanzó en la asignatura, los significados parciales de los grupos que se pusieron en evidencia en sus transparencias y en sus intervenciones en clase cambiaron. Algunos grupos comenzaron la descripción de su tema con un listado desordenado; después, este listado tomó forma de mapa conceptual organizado con base en una variedad de criterios. La mayoría de estos criterios de organización surgieron de los organizadores del currículo. A medida que se avanzó en las presentaciones y en la discusión sobre ellas, el número de criterios de organización se redujo y la organización de los mapas conceptuales se centró en los sistemas de representación. El papel organizador de los sistemas de representación también pasó por varias etapas. En un comienzo, compartió ese rol de organización con otras nociones, asumiendo, en muchos casos, un papel complementario. El paso a un mapa conceptual completamente organizado por los sistemas de representación se dio en diferentes momentos de la asignatura, dependiendo del tema. Solamente cuando los sistemas de representación asumieron un papel protagonista en la organización del mapa conceptual, los futuros profesores tomaron conciencia de la posibilidad de establecer relaciones entre sus elementos. El hecho de que esta toma de conciencia no fuese simultánea en los diferentes grupos, generó situaciones de interacción en clase que promovieron la negociación de significados. Al final, la mayoría de los grupos establecieron un cierto número de conexiones en su estructura conceptual, reconocieron que “todo está relacionado” y resaltaron la importancia de estas conexiones.

Aunque, cuando cada grupo escogió su tema, sus miembros supusieron que éste era sencillo matemáticamente hablando, esta visión se fue transformando a medida que profundizaron en él. Este proceso indujo a los futuros profesores a ampliar su visión de lo que era una estructura matemática. Su experiencia como estudiantes de matemáticas y como profesores en clases particulares había seguramente reforzado una visión esencialmente formal de los conceptos matemáticos. Es posible que esta forma de ver las cosas esté en el centro de las dificultades que

¹⁴⁰ En este episodio, Ávila confunde definiciones con representaciones.

ellos tuvieron para apreciar la complejidad detrás de cada tema. Al comienzo, ellos lograron identificar los principales hechos, conceptos y procedimientos que se relacionaban con su tema. Pero, tuvieron dificultades para organizar estos elementos de manera estructurada. Esta dificultad los llevó a utilizar lo que tenían a mano: los organizadores del currículo. En un comienzo, la organización del mapa conceptual apareció forzada: se utilizaron las herramientas vistas en clase, sin que ese uso tuviese sentido desde la perspectiva de la descripción de la estructura matemática. Los grupos de futuros profesores hicieron lo que pudieron para resolver la tarea que se les había impuesto sin que necesariamente tuvieran las herramientas para discernir los criterios de organización que estaban detrás del ejemplo hecho en clase. La diversidad de criterios de organización con la que se organizaron los primeros mapas conceptuales es un indicador del estado incipiente en el que se encontraba el significado de estructura conceptual como instrumento y de la profundidad con la que, hasta ese punto, ellos habían analizado la estructura matemática.

La evolución en las características de las transparencias de los grupos dependió por lo tanto de dos factores: el significado que los grupos fueron construyendo de la noción de estructura conceptual y la profundidad con la que estudiaron y analizaron la estructura matemática que correspondía a su tema. Estos dos factores interactuaron dinámicamente. Un significado preliminar de la noción permitió solamente una descripción general de la estructura matemática. Y el esfuerzo por profundizar en el análisis de la estructura matemática contribuyó al desarrollo del significado del organizador del currículo. Esta dualidad se apreció, por ejemplo, en el proceso de pasar de una variedad de criterios de organización a uno solo de ellos: el significado de la noción se afianzó y la descripción de la estructura matemática mejoró. Se aprecia, por tanto, el juego entre el significado técnico de la noción y su significado práctico. El desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores se fundamentó en este juego entre teoría y práctica, que, en el capítulo 4, caractericé con la teoría de la génesis instrumental: es a través del uso del organizador del currículo (el instrumento), como mediador entre los futuros profesores y el concepto sobre el que se discute, que los futuros profesores construyeron y desarrollaron significados tanto acerca de la noción, como del concepto.

El desarrollo del conocimiento didáctico sobre la noción de estructura conceptual fue un proceso social, dinámico y cíclico. Los grupos de futuros profesores debían abordar un problema específico y debían presentar ante los demás una propuesta de solución que sería comparada y criticada por compañeros y profesores. De esta manera, ellos reconocieron las deficiencias de la solución previa, tuvieron en cuenta las críticas recibidas a ésta, investigaron en la literatura y discutieron nuevas propuestas, hasta llegar a una nueva solución que surgió del acuerdo entre los miembros del grupo. En la medida en que el progreso de grupos y futuros profesores no fue uniforme, los comentarios y críticas generaron, en el discurso de clase, un ambiente de negociación de significados que he puesto en evidencia en varios episodios. Es muy posible que estos episodios de negociación de significados en clase sean un reflejo de la interacción que tuvo lugar dentro del grupo, cuando sus integrantes contrastaron sus opiniones y buscaron llegar a un acuerdo para presentar una solución consensuada a la clase. En los dos casos, se

conformó una comunidad de práctica cuyas miembros se comprometieron mutuamente a negociar significados en la búsqueda de una empresa común.

Aproximaciones Conceptuales, Históricas y Fenomenológicas a la Organización de la Estructura Conceptual

Además de los sistemas de representación, los organizadores historia y fenomenología jugaron papeles importantes en el proceso en virtud del cual los grupos progresaron en su descripción de la estructura matemática con base en la noción de estructura conceptual. El análisis histórico aportó información que, en muchos casos, resultó relevante para la construcción del mapa conceptual. Varios grupos reconocieron que el trabajo que habían hecho en la historia de su tema les permitió identificar elementos de la estructura conceptual que, de otra manera, habrían podido quedar omitidos. En otros casos, el análisis histórico contribuyó a establecer relaciones en la estructura conceptual y a resaltar el papel organizador de los sistemas de representación. Finalmente, el análisis histórico indujo a algunos grupos a reconocer la importancia de la fenomenología en el análisis del tema.

Varios de los futuros profesores resaltaron la importancia de la fenomenología durante las sesiones en las que se discutió sobre la estructura conceptual. El ejemplo que se presentó en clase incluía la fenomenología y esto seguramente los indujo a hacer lo mismo. No obstante, más tarde los formadores sugirieron que se excluyera del análisis, cambio que resultó difícil para algunos grupos. Por otro lado, es posible que esta confusión fuese la causa de que, en algunas de las producciones, se tome la fenomenología como un sistema de representación adicional, una indicación de un estado inicial en la construcción del significado de sistema de representación y de fenomenología.

La noción de fenomenología puede utilizarse como organizador central del mapa conceptual. En el curso en el que realizamos el estudio ningún grupo profundizó en esta posibilidad. Esto es seguramente consecuencia, entre otras razones, del énfasis dado por la instrucción a los sistemas de representación como criterio organizador. En esta aproximación alternativa, el propósito es identificar y relacionar los elementos de la estructura conceptual a partir de sus significados fenomenológicos. Los conceptos y las relaciones entre ellos se organizan de acuerdo con los usos (naturales, sociales y matemáticos) de los mismos. Por ejemplo, en el caso del tema fracciones, es posible organizar la estructura conceptual con base en cuatro categorías: como parte-todo, medida, cociente, operador y razón.

Varios grupos de futuros profesores tienden a organizar los mapas conceptuales que describen la estructura conceptual siguiendo una aproximación “conceptual”. Esta aproximación parece surgir naturalmente de la visión formal de la estructura matemática: un concepto está completamente descrito por su definición. Por lo tanto, para expresar esa descripción en un mapa conceptual basta con identificar los elementos de la definición y aquellos conceptos y procedimientos relacionados con ella. No obstante, la mayoría de las producciones de este tipo carecen de significado: son un conjunto de etiquetas parcialmente conectadas cuya interpretación requiere que el lector ponga en juego su propio conocimiento matemático. El énfasis en la descripción conceptual puede ser una de las razones por las cuales algunos grupos no reconocen el potencial de los sistemas de representa-

ción como herramienta de descripción de la estructura matemática. Para estos grupos, la tarea de analizar el tema con base en los sistemas de representación es una tarea independiente. Los sistemas de representación se convierten, por lo tanto, en algo complementario a la estructura conceptual. En el momento en que los grupos reconocen el papel descriptivo y estructural de los sistemas de representación y estos comienzan a jugar un papel más protagónico en la organización del mapa conceptual, la aproximación conceptual pierde su formalidad y los elementos que antes eran etiquetas comienzan a tener significado. Los elementos del mapa conceptual se representan en diferentes sistemas de representación; esto permite establecer conexiones entre ellos; y estas conexiones logran darles significado (Kieren, 1997).

Las reflexiones anteriores sugieren algunas cuestiones que pueden ser importantes para la instrucción. En los párrafos anteriores he mostrado que, a diferencia de la posición que asumió la instrucción durante el curso en el que se realizó el estudio, los sistemas de representación no son necesariamente el único criterio de organización posible y eficiente de los mapas conceptuales. La fenomenología y la aproximación conceptual son también posibles estrategias para dicha organización.

3. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN: LA IMPORTANCIA DE LO SIMBÓLICO

En este apartado, exploro en profundidad los significados parciales que los grupos de futuros profesores construyeron sobre la noción de sistema de representación y describo cómo, para esta noción, las producciones de los grupos evolucionaron a lo largo de la asignatura. Busco dotar de mayor significado a los estados de desarrollo del conocimiento didáctico que establecí en el estudio del capítulo 8 y explorar algunas de las dificultades que detecté en ese estudio con respecto a la noción de sistema de representación.

En el capítulo 2, describí el significado de referencia que, del organizador del currículo “sistema de representación”, buscábamos desarrollar en la asignatura. Al centrarse en la propuesta de Kaput (1992), la instrucción enfatizó la necesidad de unas normas que regulan los sistemas de representación, las posibilidades de conexiones internas entre elementos de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas), de conexiones externas entre elementos de dos o más sistemas de representación (traducciones) y el equilibrio en importancia entre los diferentes sistemas de representación. En este sentido, el análisis de un concepto basándose en los sistemas de representación tenía como propósito aportar nuevos significados para la descripción de la estructura matemática correspondiente.

De esta manera, cuando en la asignatura, PG propuso la primera tarea sobre sistemas de representación, enfatizó tres cuestiones:

- ◆ la relación entre la estructura conceptual y los sistemas de representación,
- ◆ el papel que los segundos pueden jugar en la organización del mapa conceptual con el que se describe la estructura matemática, y
- ◆ las conexiones entre los elementos de dicho mapa conceptual.

Los grupos de futuros profesores presentaron dos transparencias que tenían como foco principal el análisis del concepto desde la perspectiva de los sistemas de representación. No obstante, los sistemas de representación continuaron jugando un papel en los análisis que ellos realizaron posteriormente. En el estudio del capítulo 8, detecté algunas de las dificultades de los grupos con respecto a la noción de sistema de representación, al constatar que la variable variedad en sistemas de representación fue la tercera variable en número de discrepancias (Tabla 28). ¿Qué características tienen estas dificultades y cómo fueron superadas?

En lo que sigue mostraré que los grupos de futuros profesores establecieron jerarquías en los sistemas de representación, asignando un papel primordial al sistema de representación simbólico, como medio para describir el concepto, y consideraron los sistemas de representación no simbólicos como complementarios. Al avanzar en la asignatura, la variedad en los sistemas de representación aumentó. No obstante, a la hora de ponerlos en juego para los otros análisis del análisis didáctico y para el diseño de la unidad didáctica, los grupos de futuros profesores focalizaron su atención en los sistemas de representación simbólico y gráfico.

Centraré el análisis de los episodios en los siguientes cinco aspectos de los significados parciales de los grupos de futuros profesores con respecto a la noción de sistema de representación:

- ◆ construcción del significado del sistema de representación simbólico y su relación con la “aproximación conceptual” a la estructura conceptual;
- ◆ construcción del significado del sistema de representación gráfico;
- ◆ visiones jerárquicas de los sistemas de representación;
- ◆ evolución en la variedad de sistemas de representación; y
- ◆ relación entre la noción de sistema de representación y la noción de fenomenología.

3.1. La Importancia del Sistema de Representación Simbólico

El significado que, sobre el sistema de representación simbólico, los grupos de futuros profesores pusieron en evidencia en sus producciones y actuaciones evolucionó a lo largo de la asignatura. En una primera fase, los futuros profesores vieron los sistemas de representación como lenguajes: el papel que se asignó a lo simbólico tenía que ver con la posibilidad que brinda de definir los conceptos de manera general, característica que no cumplen las otras representaciones, que se veían como complementarias. Con ellas, según los futuros profesores, sólo se pueden presentar instancias del concepto.

Sistemas de Representación como Lenguajes

En sus primeras transparencias e intervenciones, algunos grupos establecieron una equivalencia entre la idea de sistema de representación y la noción de lenguaje. En el documento 12 (ver Figura 58), el grupo funciones y gráficas presentó un esquema en espiral que pasa sucesivamente por las siguientes etiquetas: dependencia funcional en el lenguaje cotidiano, lenguaje verbal matemático, algebraico, analítico, conjuntista, comportamiento de la función, gráfico y sistemas de representación. Al presentar este documento, el grupo distinguió tres sistemas de representación: lenguaje verbal matemático, algebraico y analítico. Los tres sistemas

tienen como característica común el hecho de que aparecen símbolos matemáticos, aspecto que ellos destacaron (episodio 27).

Paco: Hacemos un recorrido por los sistemas de representación que nosotros creemos en los que se puede de alguna manera iniciar una transición de lo que es el lenguaje cotidiano, pasando por lo que es el lenguaje verbal con cantidades ya matemáticas pero sin utilizar lenguaje algebraico, el lenguaje analítico, el lenguaje conjuntista, () gráfico... En un nivel superior estaría el lenguaje verbal matemático... [El] nombre de inversamente proporcional al número de trabajadores podríamos expresarlo como que el producto de dos números es 1. Que el producto de dos números es 1 ya es un nivel superior porque aparecen los conceptos de número, los conceptos de producto, es una expresión un poco más matemática. () el lenguaje algebraico que es como solución de una ecuación, $xy - 1$ igual a cero... Del lenguaje algebraico pasamos al lenguaje analítico, expresando la variable dependiente... Pues del lenguaje analítico hemos sacado digamos lo que es una, el lenguaje conjuntista y, otra, que es el comportamiento de la función.

Paco no utilizó el término “sistema de representación”. Utilizó el término “lenguaje”. No obstante, aunque la etiqueta “sistemas de representación” aparece en la transparencia, esta etiqueta se refiere exclusivamente a la representación gráfica. Su interpretación de la idea de lenguaje no era clara, puesto que cada lenguaje puede describir solamente una parte de los fenómenos matemáticos involucrados en el concepto de función. De los ejemplos que propusieron se deduce que, para este grupo, el lenguaje verbal matemático permite describir hechos, el lenguaje algebraico, procedimientos, y el lenguaje analítico, conceptos en los sistemas de representación simbólico y gráfico. Apreciamos entonces una dificultad en el manejo de los sistemas de representación en este momento de la asignatura y para este grupo: la identificación y diferenciación de sistemas de representación proviene del contenido de las expresiones matemáticas con las que se describe el concepto y no de las reglas que pueden regular la creación y manipulación de esas expresiones. Aparentemente, para este grupo, una expresión del estilo “la gráfica de la función cuadrática con dilatación positiva es cóncava hacia arriba” formaría parte de ese sistema de representación de lenguaje verbal matemático. Es lenguaje verbal, pero no es algebraico porque no aparecen procedimientos y tampoco es analítico puesto que no involucra símbolos.

Más tarde, en otra presentación (episodio 72), Paco insistió en esta visión de los sistemas de representación, en virtud de la cual algunos aspectos de la estructura matemática pertenecen exclusivamente a un sistema de representación. Paco afirmó enfáticamente que la continuidad de funciones es un elemento analítico, aunque se puede representar gráficamente.

Paco: Los máximos se pueden ver como un elemento gráfico y la continuidad se puede ver como un elemento analítico, es cierto, pero lo que nosotros tratamos de hacer era ubicar la continuidad, lo que es máximos, lo que es mínimos de la manera [que] resulte más fácil y de ahí intentar relacionarlas con el resto. En algún sitio hay que ubicarlas. No puedes ubicar la continuidad en elementos analíticos, en elementos grá-

ficos. Es obvio que la continuidad se representa gráficamente pero () la continuidad es un elemento analítico.

Paco “veía” el concepto de continuidad exclusivamente a partir de su definición en el sistema de representación simbólico. En ese sentido, es un elemento analítico. No obstante, aceptaba que, una vez definida simbólicamente, esta propiedad se puede representar gráficamente.

El Sistema de Representación Simbólico como lo Conceptual

El significado que los futuros profesores construyeron inicialmente sobre el sistema de representación simbólico tiene entonces dos características. Por un lado, está la idea de que lo simbólico forma parte de las herramientas que se necesitan para comunicar aspectos específicos de la estructura matemática. Por otro lado, la visión de que lo simbólico se relaciona con la definición del concepto, mientras que el significado del término sistema de representación se manifiesta exclusivamente en su relación con la representación gráfica, como algo complementario al concepto mismo.

Encontramos estas dos características, expresadas de manera diferente, en el episodio 52, en el que el grupo sistemas de ecuaciones lineales presentó el documento 18 (ver Figura 59). Carlos describió el significado que le daban al término “simbólico” de la siguiente manera:

Carlos: La segunda categoría que hemos puesto es simbólica. ¿Por qué hemos puesto simbólica? () No creemos que los conceptos, están, que existe el mundo de los conceptos, vale. Sino que nosotros creemos que lo simbólico es esencial porque necesitamos transmitir los conceptos. Entonces por eso aparece aquí lo simbólico. Y se resalta. Y dentro de lo simbólico, tenemos tres clasificaciones. Sería la representación gráfica, la expresión matricial y las ecuaciones algebraicas.

Es en este sentido en el que ellos utilizaban el término “simbólico” para referirse a los sistemas de representación. Pero, esta utilización del término tiene que ver con el hecho de que “necesitamos transmitir los conceptos”, necesidad que parece diferente de la de representarlos en sistemas de representación.

El papel de lo simbólico dentro de los sistemas de representación se aprecia también en el caso del paso del documento 25 al documento 35 del grupo progresiones. En el segundo documento aparecen varios sistemas de representación nuevos (e.g., geométricos), pero desaparece el sistema de representación simbólico, que se encontraba en el centro del esquema del documento 25. Las conexiones que se establecían en ese esquema dependían de dicho sistema de representación. En el segundo documento, al desaparecer el sistema de representación simbólico, desaparecen también las conexiones (Figura 65).

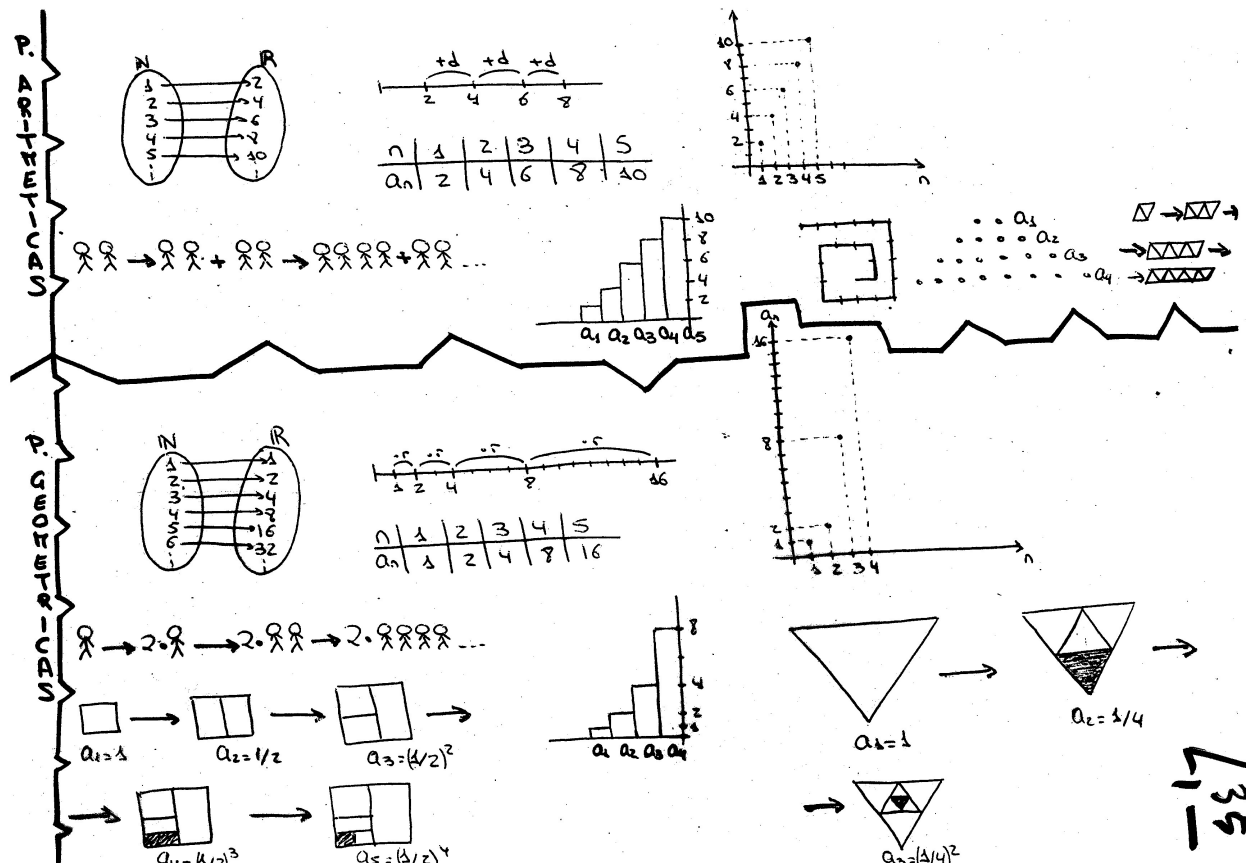


Figura 65. Quinta tarea del grupo progresiones (documento 35)

Esmeralda explicó la desaparición del sistema de representación simbólico de la siguiente manera (episodio 129).

PG: Aquí tengo dos preguntas [documento 35]. Desapareció lo simbólico, ¿por qué?

Esmeralda: No es que desapareció. Es que al hacer las transparencias se nos olvidó ponerlo. Nos dimos cuenta cuando ya estaba lista.

Este “olvido” puede ser un indicador del proceso de construcción del significado de la noción de sistema de representación en ese momento: la idea de representación se centra en los aspectos gráficos. Lo simbólico se relaciona con los aspectos conceptuales y se “olvida” como parte de los sistemas de representación. Este punto se corrobora en el episodio 124 en el que el investigador, refiriéndose al sistema de representación simbólico, les pregunta explícitamente si es un sistema de representación y ellas responden que no:

PG: ¿Pero esto [indicando lo simbólico en el documento 13.1] era una representación?

Esmeralda: Quizás no.

Raquel: No.

La relación entre lo simbólico, las definiciones y lo conceptual se aprecia explícitamente en el documento 17, del grupo probabilidad (Figura 57). En este documento, la noción de concepto se encuentra en el centro de la estructura y las representaciones juegan un papel complementario. Aunque lo simbólico se encuentra dentro de la categoría “representaciones”, su función es la de servir como medio para expresar las definiciones. Las definiciones determinan el concepto (ver episodio 52, transcrito arriba).

3.2. Lo Simbólico y lo Gráfico como Representaciones

He mostrado que los futuros profesores establecieron una fuerte relación entre los aspectos conceptuales y los aspectos simbólicos de la estructura matemática. Lo simbólico no se considera un sistema de representación; sirve, como lenguaje, para describir formalmente el concepto en términos de su definición. Al estar completamente definido de esta manera, las representaciones no simbólicas del concepto son complementarias. De hecho, los futuros profesores tendieron a hacer una equivalencia entre las representaciones gráficas y la noción general de representación: las representaciones sirven para “representar” la estructura matemática, siendo independientes de ésta; el sistema de representación gráfico no forma parte de lo conceptual porque no puede representar el concepto, dado que sólo presenta instancias particulares, ejemplos; y no es riguroso, ni es algo propio del concepto.

La relación de lo simbólico con lo conceptual se expresa indirectamente a través de la importancia y el papel que los futuros profesores asignaron a la representación gráfica. En el episodio 126, los miembros del grupo progresiones explicaron varios aspectos de este fenómeno. Ellas separaron la representación gráfica de lo que es propiamente el concepto:

Raquel: Es que nunca hemos [considerado] lo gráfico como algo propio del concepto.

Esmeralda: Es una idea intuitiva para ver qué sucede, pero nunca una idea rigurosa o parte importante del concepto.

De hecho, ellas consideraron que las representaciones no forman parte del concepto porque no pueden representarlo:

Carmen: Porque hay representaciones que no cubren, que no son capaces de cubrir y de explicar () un concepto. Y yo creo que eso ocurre muchas veces en geometría. Tú no puedes pintar todas las representaciones de algo que estés explicando.

Aparentemente, el problema de las representaciones (no simbólicas) residía en que sólo representan una instancia del concepto y pueden inducir a error:

Carmen: Es que yo creo que la representación conforme uno la explica, es como un ejemplo... Pero es que sólo muestra un caso.

...

Raquel: De todas maneras, yo sigo viendo las representaciones gráficas, no sé, le doy [menos] importancia que a la estructura conceptual. Con el dibujo puedes equivocarte, cualquier cosa, y el dibujo puede engañar...

Esmeralda: Muchas veces... la gráfica, puede llevarte a error.

Al final, lo importante del concepto es su generalidad. Y esto se logra a partir de la definición, basándose en la representación simbólica:

Carmen: Pero lo que se está poniendo de manifiesto es que las representaciones gráficas sólo son una ayuda, pero no es tan importante como que tú pongas "definición de tal". Porque según lo que tú me estás diciendo, una representación es, un ejemplo. Pero no es un instrumento así fuerte para explicar un concepto. Es algo que te ayuda.

Cuando los futuros profesores abordaron la tarea de identificar sistemas de representación alternativos al simbólico, se encontraron, en algunos casos, con dificultades: en su formación previa no se había reconocido el interés o la importancia de esas otras representaciones; los libros de texto no traen un apartado dedicado a la representación gráfica; y en los libros de texto estas representaciones se utilizan únicamente para ejemplificar los conceptos. Además, los futuros profesores, como muchos profesores en ejercicio, esgrimieron el argumento del tiempo: dada la cantidad de temas que hay que tratar, la única manera de hacerlo es con el esquema de definiciones, ejemplos y ejercicios. Las reflexiones del grupo progresiones, en el episodio 89, ejemplifican estos puntos:

PG: En los textos que tú viste ¿no aparecía expresión gráfica?

Raquel: No.

Esmeralda: Lo que vi de gráficas allí. Es que, una cosa es lo ideal, como variara un tema, pero luego en la práctica, hay que tener tiempo, los alumnos también están de prisa... Entonces vamos a la definición de conceptos, ejercicios, ejemplos, así.

Carmen: Lo que yo también creo que cuando nos hicimos las preguntas y las miramos y nos preguntamos ¿cómo se pueden representar las sucesiones? Cuando hicimos esto, como lo pasamos en ESO, a mí nunca se me ocurrió pensar.

Esmeralda: O sea. En la práctica, sí que venían, pero que nosotras lo que estábamos buscando era informaciones, definiciones, variedades. No se nos ocurrió.

Raquel: Aparte es que tampoco viene ningún título que diga representaciones gráficas.

Carmen: Viene en los ejemplos, pero no viene como un apartado.

No obstante, cuando los grupos presentaron progresos en el análisis de la estructura matemática desde la perspectiva de los sistemas de representación, lo hicieron identificando nuevas representaciones gráficas. Éste fue el caso, por ejemplo, de los documentos 26 del grupo números decimales y 35 del grupo progresiones (ver Figura 65).

Al final del periodo en el que se trabajó el análisis de contenido, algunas de las dificultades desaparecieron y se apreció un cambio parcial en las visiones de algunos de los futuros profesores (episodio 131, grupo progresiones):

PG: Y, cuando dices que han ido aprendiendo cosas, ¿qué cosas han ido aprendiendo?

Raquel: No sé, pues eso de asignarle una representación gráfica yo, a mí no se me había pasado por la cabeza, la verdad. Y ahora pues me he dado cuenta de que es una manera... para explicar mejor el concepto.

PG: Otra cosa que hayan sentido ustedes que han como aprendido.

Carmen: Yo creo que las distintas representaciones.

Raquel: [Se refiere a su práctica]. Y si yo hubiese tenido más información, creo que habría sido más ilustrativo para ellos.

3.3. Jerarquía en los Sistemas de Representación

Las reflexiones anteriores insinúan la tendencia de algunos grupos de futuros profesores a imponer una jerarquía en los sistemas de representación. A continuación, presento evidencia que muestra que algunos grupos diferencian los sistemas de representación de acuerdo con la importancia que le asignan. En la mayoría de los casos esta jerarquía tiene una motivación didáctica: los futuros profesores identifican y ordenan los sistemas de representación según la función que pueden jugar en la instrucción. La jerarquía se justifica en diferentes tipos de argumentos: históricos, conceptuales, fenomenológicos y prácticos.

En el episodio 27, transcrito arriba, Paco describe una jerarquía en los sistemas de representación. Por un lado, hay un orden: hay unos sistemas de representación que van “primero” que otros, siendo el llamado de lenguaje cotidiano, el “primario”. Por el otro, hay una manifestación de niveles de importancia. Los comentarios de Paco muestran que ellos consideraban como más importantes aquellos sistemas de representación que contienen características más “algebraicas” y “analíticas”. El grupo hablaba de una “transición” de unos sistemas de representación a otros. Esta idea de transición parece originarse en su trabajo sobre la historia del tema y tiene un carácter didáctico: se va de los sistemas de representación más “sencillos” a sistemas de representación más “complejos” (aquellos con características más matemáticas).

Mientras que el grupo funciones y gráficas resaltó la dimensión de lenguaje para establecer un orden en los sistemas de representación, el grupo probabilidad se centró en la dimensión fenomenológica. En el episodio 47, ellos introdujeron lo que denominaron la “representación real” y se refirieron a los fenómenos que involucran el azar (“sacar una bola de una urna”). Christopher calificó esta “representación” como “la mejor representación”. Una vez que establecieron la prioridad de esta representación, Christopher sugirió también la idea de transición (orden) para pasar primero a la representación gráfica y después a la que llamaron virtual.

Christopher: Para nosotros la representación más importante es la representación real. Nosotros hemos considerado que la representación real, pues, no es ni gráfica, ni (), en el sentido de que no es la que se escribe en un papel. Cuando uno hace probabilidad y saca una bola de una urna, pues la representación real () y sacarlas de la... Ésa es la mejor representación. De esa representación real se pasa a la representa-

ción gráfica, porque es dibujarlo para simplificarlo. Y después de la representación gráfica, pasamos a una que hemos llamado virtual, aquí se incluirían los ordenadores... Entre la representación gráfica hemos distinguido lo simbólico, lo numérico y una cosa que llamamos, es la misma representación gráfica, pero para evitar la redundancia, pusimos la palabra dibujo.

En esta misma presentación (episodio 47), Christopher estableció otra diferencia entre los sistemas de representación. En este caso, propuso una clasificación de los sistemas de representación dependiendo de dónde se utilizan y cuáles se utilizan más.

Christopher: Hacemos más hincapié donde se utilizan las distintas representaciones. Creemos que este tipo simbólico, es mucho más utilizado en las definiciones y el desarrollo de teoría que, por ejemplo, estos de aquí [muestra en la transparencia] () numérico, entonces. Que se utiliza más, no es que sea () que se hace más hincapié.

Algunos grupos destacaron el sistema de representación simbólico sobre el sistema de representación gráfico desde un punto de vista práctico. Es el caso de los argumentos del grupo progresiones que presenté anteriormente. Para este grupo, trabajar con el sistema de representación gráfico requiere tiempo que no se tiene, porque hay prisa. Lo que importa es “la definición de conceptos, ejercicios, ejemplos” (episodio 89).

3.4. Variedad en los Sistemas de Representación

La Figura 66 muestra la evolución en el número de sistemas de representación que aparecen en las transparencias de los grupos de futuros profesores.

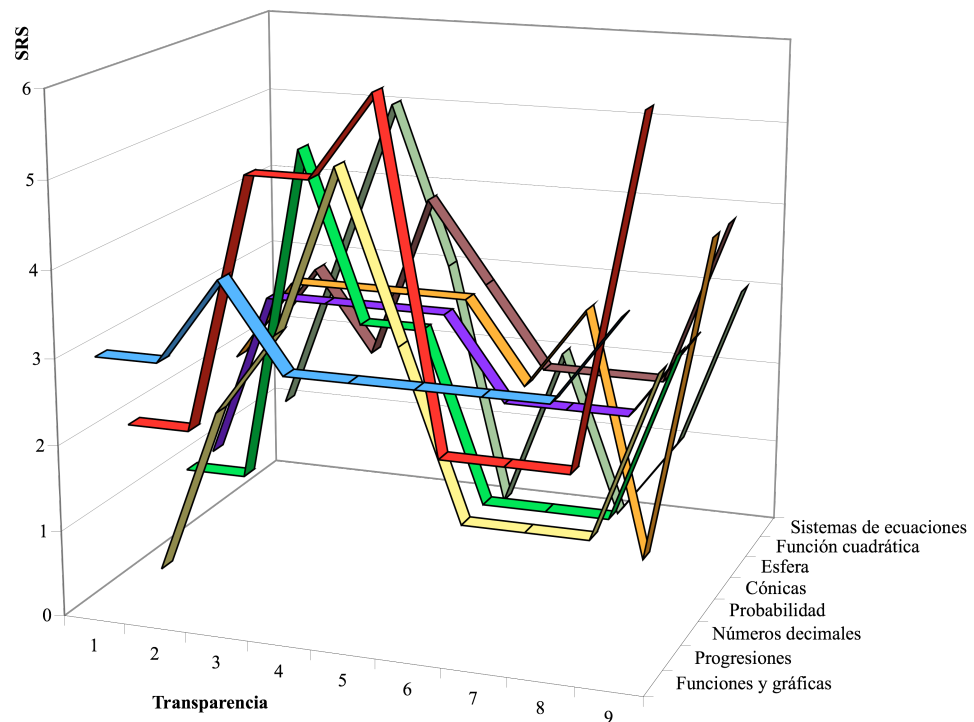


Figura 66. Número de sistemas de representación por transparencia

Las transparencias de la mayoría de los grupos siguen un patrón similar: el número de sistemas de representación aumenta al comienzo, hasta la quinta transparencia, luego disminuye y vuelve a aumentar en la última transparencia. El aumento inicial es seguramente producto de que, en las primeras cinco transparencias, el trabajo se centró en el análisis de contenido: primero se trató la estructura conceptual, después los sistemas de representación y finalmente la fenomenología. La discusión en clase y los comentarios a las tareas se focalizaron en los sistemas de representación y los grupos de futuros profesores se preocuparon por identificar y describir el mayor número de sistemas de representación. A partir de la sexta transparencia, el foco de atención cambió. En ese momento, se trató de identificar errores y dificultades, diseñar una actividad centrada en una dificultad y producir una actividad de evaluación. Para la última transparencia, correspondiente al trabajo final, los grupos de futuros profesores debían presentar un nuevo análisis de contenido. Es dentro de este contexto, que volvieron a aparecer los sistemas de representación que habían desaparecido en las transparencias anteriores. Observamos que en el 85% de las transparencias aparecen máximo tres sistemas de representación. ¿Cuáles son estos sistemas de representación y cómo se expresa este patrón en términos de esos sistemas de representación? Para responder esta pregunta, en la Tabla 30 presento los sistemas de representación utilizados por los grupos.

Grupo	Transparencia								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Funciones	S Gr	Vb mat Al N N	N Gr N	N Gr	N Gr	N Gr	N Gr	N Gr	N Gr N
Progresiones	S Gr	S Gr	S Grs Ns Fgs	S Grs Ns Fgs	S Grs Ns Fgs Ge	S Gr	S Gr	S Gr	S Grs Ns Fgs Ge
Números decimales		S Gr	S Gr N	S Grs N Ge	S Gr N	S	S	S	S Gr N
Probabilidad	Gr	Gr	S Gr N R Vr	S Gr N	S Gr N	S	S	S	S Gr N
Cónicas	S	S Gr Ge	S Gr Ge	S Gr Ge	S Gr Ge	S Gr	S Gr	S Gr	S Gr Ge
Esfera	Gr	S Grs	S Grs	S Grs	S Grs	S Gr	S Grs		S Grs C
Sistemas ecuaciones	S	S Gr N	Gr Al M Vb Fn	Gr Al M		Al Vb		S	S Gr Vb

A: algebraico; C: coordenadas; Fg: figurativo; Fn: fenómenos; Ge: geométrico; Gr: gráfico; M: matricial; N: numérico; R: real; S: simbólico; Vb: verbal; Vr: virtual. Una "s" después de una abreviatura indica que hay más de un sistema de representación de ese tipo.

Tabla 30. Sistemas de representación utilizados por los grupos

El análisis de la Tabla 30 da luces sobre el patrón que mencioné en el párrafo anterior: la mayoría de las primeras transparencias de los grupos incluyen únicamente los sistemas de representación simbólico y gráfico. En las transparencias 3 a 5, aparecen nuevos sistemas de representación de tipos variados. Sin embargo, a la hora de poner en juego esta información para los análisis cognitivo y de instrucción, la mayoría de los grupos regresan a los sistemas de representación básicos. La variedad en los sistemas de representación reaparece en el trabajo final, puesto que en esta tarea se presenta de nuevo el análisis de contenido. Esto significa que, aunque los futuros profesores pudieron identificar y describir una cierta variedad

de sistemas de representación, el manejo que manifestaron de ellos fue parcial: a la hora de poner en práctica esta información, se restringieron a un número reducido de sistemas de representación. Estos son los sistemas de representación *básicos* (simbólico y gráfico), mientras que el sistema de representación numérico apareció y desapareció a partir de la tercera transparencia.

3.5. Fenomenología, Historia y Sistemas de Representación

De la misma manera que lo hicieron con los mapas conceptuales y la estructura conceptual, algunos grupos de futuros profesores se basaron en otros organizadores del currículo para construir sus significados parciales de la noción de sistema de representación. En los primeros intentos de analizar su tema basándose en los sistemas de representación, los grupos de futuros profesores interpretaron la tarea como el problema de encontrar “las diferentes maneras en las que se puede ver el tema”. Este tipo de aproximación llevó a algunos grupos a incluir fenómenos, como sistemas de representación. Por otro lado, algunos grupos de futuros profesores utilizaron la información que recogieron en el trabajo de historia para identificar sistemas de representación.

Por ejemplo, el grupo sistemas de ecuaciones lineales, en el documento 18, incluyó una balanza como sistema de representación. El grupo probabilidad, en el documento 17 (Figura 57), introdujo inclusive un término para referirse a las urnas con bolas: era la “representación real”. En el episodio 61, Christopher y Marina consideraron este fenómeno como un sistema de representación. Marina afirmó que es posible hacer y comunicar probabilidad con este tipo de “representación”.

El grupo cónicas puso de manifiesto esta confusión en el episodio 90, al referirse a su trabajo para el documento 14 (Figura 60), en el que, para cada cónica, presentaron varios sistemas de representación e incluyeron con ellos un fenómeno. En este episodio, Laura utilizó el término “fenómeno” para referirse al tema. Para María Luisa, el hecho de que los fenómenos aparezcan en los libros de texto ya les da carácter de sistema de representación. Ávila reconoció al final que su propósito, en los libros de texto, es como motivación.

Laura: Porque yo pensaba en ese momento que con sistema de representación nos referíamos a todas las posibles maneras con que se representa el fenómeno. Pues, en este caso, las cónicas. Pues, ¿de qué maneras...? ¿Dónde la puedo ver? La puedo ver en la definición geométrica, la puedo ver en la definición analítica, la puedo ver en la vida...

María Luisa: Además, miramos varios libros de bachillerato, y sí que venían, también. Como tiro parabólico,...

Ávila: Venían como motivación.

El papel del análisis histórico en la construcción del significado de la noción de sistema de representación se aprecia en el episodio 89, en el que el grupo cónicas reconoce la utilidad de la información que surgió de ese análisis.

Maite: Porque aquí ya que habíamos leído el trabajo de historia entero. Como lugar geométrico, con las coordenadas...

Laura: Bueno, no, Apolonio fue el primero que lo puso como un lugar geométrico, y luego, con la geometría analítica.

3.6. Complejidad del Significado de la Noción de Sistema de Representación

Los análisis que acabo de presentar dan luces sobre la complejidad del proceso en virtud del cual los grupos de futuros profesores negociaron y construyeron el significado de la noción de sistema de representación. He caracterizado los significados parciales más relevantes que se manifestaron a lo largo de la asignatura. A continuación recojo y organizo estas caracterizaciones.

Algunos grupos de futuros profesores consideraron que lo simbólico formaba parte de la dimensión conceptual del tema y, por lo tanto, no era un sistema de representación. Lo simbólico sirve para describir el concepto a partir de su definición. Al incluir lo simbólico dentro de lo conceptual, varios grupos de futuros profesores consideraron lo gráfico como equivalente a la noción de representación. Sin embargo, estas representaciones juegan un papel secundario y complementario porque no permiten generalidad, al presentar instancias particulares del concepto. Además, algunos futuros profesores sugirieron que estas representaciones pueden inducir a errores. La menor importancia que ellos le dieron a estos sistemas de representación puede explicarse a partir del papel que han jugado en su formación previa, al hecho de que los futuros profesores consideran que en los libros de texto se usan como ejemplos y de que, en la práctica, no hay tiempo para tratarlos con profundidad. No obstante, cuando se aprecia variedad de sistemas de representación en las transparencias, esta variedad surge principalmente entorno a los sistemas de representación gráficos. Esto explica parcialmente la tendencia de los futuros profesores a imponer una jerarquía en los sistemas de representación. Esta jerarquía se sustenta en argumentos históricos, conceptuales, fenomenológicos y prácticos.

En la medida en que se avanzó en el proceso de revisar una tarea y producir una nueva versión del análisis, aparecieron nuevos sistemas de representación. Al comienzo, se tuvieron en cuenta únicamente los básicos (simbólico y gráfico). Después, al final del periodo en el que se trabajó el análisis de contenido, la variedad aumentó. Sin embargo, a la hora de poner en juego esta información en los análisis cognitivo y de instrucción, los grupos de futuros profesores regresaron a los sistemas de representación básicos.

Los sistemas de representación que los grupos de futuros profesores propusieron en sus transparencias se pueden agrupar en varias categorías. Ya he mencionado los sistemas de representación básicos (simbólico y gráfico). Algunos grupos propusieron sistemas de representación que no lo eran, como fue el caso de los fenómenos. Los sistemas de representación numérico y geométrico aparecieron más tarde en aquellos grupos para los que tenía sentido utilizarlo. Finalmente, algunos grupos propusieron sistemas de representación que eran específicos al tema que les correspondió (por ejemplo, el matricial para los sistemas de ecuaciones lineales).

Durante la asignatura, la instrucción pretendió desarrollar una concepción formal de la noción de sistema de representación basada en la propuesta de Kaput (1992). Sin embargo, el significado que los grupos de futuros profesores manifestaron en sus transparencias se acerca más a la concepción propuesta por Castro y Castro (1997). Esta posición enfatiza los aspectos de visualización y clasifica los sistemas de representación en simbólicos y gráficos (p. 102). En todo caso, el significado que se manifestó en las transparencias sobre la noción de sistema de re-

presentación es parcial, confirmando los resultados del análisis que presenté con respecto a la noción de estructura conceptual. Estos análisis pusieron en evidencia el número reducido de conexiones internas a cada sistema de representación y entre sistemas de representación como indicativo de la poca profundidad con la que los grupos de futuros profesores manejaron la noción. En este sentido, el proceso de génesis instrumental ha sido parcial: los grupos de futuros profesores desarrollaron estrategias para utilizar el organizador del currículo como instrumento de análisis de un concepto, pero no lograron profundizar en las estrategias para utilizar la información que surge de ese análisis en las demás fases del análisis didáctico.

4. HETEROGENEIDAD FENOMENOLÓGICA

El análisis de un concepto matemático en términos de sus significados fenomenológicos es un proceso complejo. Esta complejidad se hizo evidente en las transparencias e intervenciones de los grupos de futuros profesores. La mayoría de ellos tuvieron múltiples dificultades para construir significados parciales de esta noción y lograron utilizarlos en la práctica en contadas ocasiones y de manera incompleta.

La fenomenología era la última noción del análisis de contenido. Esta circunstancia, junto con el hecho de que la instrucción centró la atención en aspectos teóricos, implicó que se dedicó poco tiempo para la presentación y la discusión de las propuestas de los grupos de futuros profesores. En consecuencia, la información relacionada con esta noción fue muy escasa en las grabaciones en audio de la interacción en clase. No obstante, las transparencias contenían gran cantidad de información relevante que no fue posible tener en consideración en el estudio del capítulo 8, dada su especificidad a cada uno de los temas matemáticos de los grupos. Esta información pone en evidencia tanto las dificultades que enfrentaron los grupos de futuros profesores, como la heterogeneidad de los significados parciales que ellos construyeron a lo largo de la asignatura. En este apartado identifiqué y caractericé estos significados parciales, describiendo, de esta manera, otro aspecto del desarrollo del conocimiento didáctico con respecto a este organizador del currículo.

La revisión de los significados de referencia de la noción de fenomenología que presenté en el capítulo 2 y el análisis detallado de cada una de las transparencias de los grupos me llevó a considerar dos aspectos de esta información: (a) los criterios que los grupos de futuros profesores utilizaron para organizar los fenómenos propuestos y (b) los tipos de análisis que ellos utilizaron para establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras de la estructura matemática correspondiente. Los resultados ponen en evidencia las dificultades de los grupos de futuros profesores con respecto a la noción de fenomenología y la heterogeneidad de significados parciales que los diversos grupos construyeron para cada tema. Aunque algunos grupos llegaron a producir análisis fenomenológicos detallados, ningún grupo llegó a organizar los fenómenos propuestos en términos de subestructuras, ni utilizó esta información para el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje.

4.1. Codificación y Análisis de los Significados Parciales

En el capítulo 6 (sección 2.3) describí las principales características del desarrollo de la asignatura para el análisis fenomenológico. Allí resalté el énfasis de la instrucción en el proceso de análisis por subestructuras (Figura 11) y el tiempo reducido que se dedicó a este aspecto del análisis de contenido. Por otro lado, en el capítulo 2 (sección 7.5) presenté los significados de referencia para la noción de fenomenología. Estos significados teóricos, técnicos y prácticos concretan el procedimiento *ideal* que un futuro profesor debería realizar al abordar el análisis fenomenológico de un tema. Éste es un procedimiento complejo y, como mostraré en seguida, sólo algunos grupos lograron realizarlo con algún detalle. En otras palabras, mostraré que los significados parciales que los grupos de futuros profesores lograron construir tuvieron, en la mayoría de los casos, sólo algunas de las características del significado de referencia. ¿Cuáles son entonces los significados parciales que se manifiestan en las transparencias y en las intervenciones de los futuros profesores? ¿Cómo se pueden caracterizar estos significados parciales?

La variedad de significados parciales puestos en juego en las transparencias y el reducido número de intervenciones en clase sobre la noción de fenomenología me indujeron a explorar y analizar en detalle cada una de las transparencias de los grupos de futuros profesores. Éste fue un proceso cíclico de análisis en el que, teniendo como guía el significado de referencia del organizador del currículo y observando las características de las transparencias, fui construyendo las variables y sus valores a medida que codificaba la información contenida en dichas transparencias. Al final de un ciclo, revisaba los valores de las variables y volvía a codificar las transparencias. Las variables que presento a continuación son el producto de este proceso.

Construí dos variables. La primera, relacionada con el factor de desarrollo denominado “organización”, identifica y caracteriza los criterios utilizados por los grupos de futuros profesores para organizar los fenómenos propuestos. La variable tiene siete valores posibles (ver Tabla 31).

Valor	Descripción
Listado	Listado sin ningún tipo de organización.
Disciplinas	Por áreas disciplinares (física, química, arquitectura, etcétera.) De acuerdo con su afinidad dentro de su disciplina. Por ejemplo, los fenómenos de caídas verticales de pelotas se agrupan dentro de la familia de fenómenos de movimientos de cuerpos en un campo de fuerza uniforme.
Familias	En naturales, sociales y matemáticos.
Áreas	De acuerdo con los ámbitos en los que se utiliza la estructura matemática.
Usos	De acuerdo con las subestructuras matemáticas que los modelizan.
Subestructuras	En categorías que no corresponden a ninguno de los criterios anteriores
Grupos	

Tabla 31. Valores de la variable criterios de organización de fenómenos

La segunda variable tiene en cuenta el factor de desarrollo denominado “variedad”. En este caso, me refiero a la variedad en el tipo y la profundidad del análisis que se presenta en las transparencias. El significado de referencia de la noción de fenomenología describe un proceso de análisis detallado de un fenómeno o familia de fenómenos. De acuerdo con este proceso, se espera que los grupos de futuros profesores: (a) identifiquen una familia de fenómenos; (b) analicen la familia de fenómenos desde la perspectiva de sus características estructurales; (c) identifiquen, si es el caso, las leyes (naturales, sociales o matemáticas) que rigen el fenómeno; (d) identifiquen la subestructura que modeliza esa familia de fenómenos y establezcan los elementos y relaciones de esa subestructura que permiten construir el modelo; y (e) establezcan la relación entre las características estructurales del fenómeno y los elementos y relaciones de la subestructura.

Los pasos de este proceso ideal dan lugar a los valores de la variable tipo y profundidad del análisis fenomenológico, en el sentido de que, en las transparencias, se pueden manifestar uno o más de los siguientes pasos de este proceso:

- ◆ *análisis estructural* de los fenómenos;
- ◆ identificación de la *subestructura*;
- ◆ identificación de *leyes*; y
- ◆ establecimiento de la *relación*.

Incluí un valor adicional para caracterizar aquellas producciones en las que los futuros profesores identifican y asignan *modelos matemáticos* (fórmulas) a al menos algunos fenómenos.

4.2. Análisis Fenomenológico de los Grupos

Resulta difícil capturar y describir, en unas variables con un número limitado de valores, la complejidad y la heterogeneidad de los significados parciales que, con respecto a la fenomenología, los grupos de futuros profesores manifestaron en sus transparencias. Por esa razón, en el Anexo M presento una descripción detallada del análisis fenomenológico propuesto por cada uno de los grupos de futuros profesores. A continuación, reproduzco, a manera de ejemplo, la descripción detallada del trabajo de un grupo y presento un resumen del trabajo de los otros grupos.

Grupo Funciones y Gráficas

Este grupo presentó tres ideas de análisis fenomenológico en su segunda transparencia (documento 8.2): espacio-tiempo, proporcionalidad y estadística. En la presentación, no dieron más detalles. Se observa que, en la primera idea, hay una relación con las variables involucradas en la función; en la segunda, una referencia a la regla que define la función; y, en la tercera, una referencia a un contexto matemático del que surgen diferentes tipos de funciones.

En la cuarta transparencia (documento 24), el grupo detalló su primera propuesta. La idea de espacio-tiempo se transformó en una categoría que agrupa fenómenos relacionados con la trayectoria que define un cuerpo. El grupo presentó algunos ejemplos, mantuvo la idea de tasas de variación, omitió la idea de proporcionalidad e introdujo una nueva categoría que denominó “modelización de situaciones empíricas” en la que incluyó dos ejemplos de tipo biológico. Este uso del término “modelización” sugiere un significado particular del mismo, restringido aparentemente a fenómenos biológicos. Al parecer, para los fenómenos de tasas

de variación y de trayectorias de cuerpos, ellos presentaron los modelos mismos, en cambio de referirse a los fenómenos. Éste es tal vez el sentido en que se refirieron, por ejemplo, a los perfiles de las etapas de ciclismo.

En la siguiente transparencia (documento 40), el grupo profundizó en su propuesta anterior e incluyó una nueva categoría denominada “fenomenología asociada a familias de funciones”. En la primera parte, las categorías “tasas de variación” y “trayectoria que describe un cuerpo” incluyen nuevos ejemplos y representaciones gráficas. Ya no se habla de “modelización”, sino de “tratamiento de situaciones empíricas”. Aparece una nueva categoría que se refiere a fenómenos discretos, en la que se incluyen ejemplos como el de la “altura de 7 individuos respecto a su edad”. Se observa que el término “modelización” desaparece de la presentación, aunque se mantiene una separación entre los fenómenos biológicos (considerados como “empíricos”) y los fenómenos físicos y económicos. No obstante, los ejemplos que propusieron no se refieren únicamente a modelos, como sucedía en la transparencia anterior. Esto puede ser una consecuencia de las discusiones sobre modelización que tuvieron lugar en clase y puede indicar un cambio en el significado que el grupo le asignó al término. En la segunda parte, encontramos por primera vez una clasificación de fenómenos de acuerdo con subestructuras de la estructura matemática en la que trabaja el grupo. Se trata de algunas familias de funciones. En algunos casos, se presenta un fenómeno específico y se identifica una ley natural con la que se establece una relación implícita entre el fenómeno y la subestructura (por ejemplo, para las funciones exponenciales y la depreciación del precio de un automóvil). No obstante, esta aproximación no es sistemática y las subestructuras no organizan la diversidad de fenómenos.

Las transparencias 6 a 8 (documentos 59, 71 y 91) no hacen ninguna referencia a la fenomenología. En la transparencia 8 se presenta un problema en el que interviene el nivel de líquido dentro de una botella, pero no parece que el grupo fuese consciente de su relación con la fenomenología. En el trabajo final (transparencia 9, documento 112), aparece un nuevo criterio de organización basado en la clasificación de los fenómenos en continuos, discretos y periódicos. Sin embargo, el grupo no entró en detalle en esta descripción y no estableció relaciones entre las subestructuras y los fenómenos. Propuso adicionalmente una clasificación de los fenómenos por áreas.

Las transparencias de este grupo presentan cambios en términos fenomenológicos, pero también evidencian un significado parcial de la noción, que se manifiesta en su puesta en práctica. La construcción de ese significado se inicia con una aparente confusión con el término modelización. Por un lado, parece que el grupo sólo consideraba que se pueden modelizar fenómenos biológicos. Por el otro, presentaron como fenómenos, modelos funcionales de los mismos. En esta primera fase, por lo tanto, no se aprecia ninguna relación entre los fenómenos y la estructura matemática. En la quinta transparencia, se aprecian cambios: ya no se utiliza el término “modelización”; se proponen fenómenos y no solamente modelos funcionales; y se presenta una clasificación de los fenómenos de acuerdo con familias de funciones. Hasta esta transparencia, el grupo mantuvo una clasificación en cuatro categorías: tasas de variación, trayectorias de cuerpos, situaciones empíricas y fenómenos discretos. En el trabajo final, esta clasificación desaparece, junto con la idea de familias de funciones. Allí aparecen nuevas subestructuras

(continuo, discreto, periódico), pero estas subestructuras no organizan la diversidad de fenómenos y no se establecen relaciones claras entre dichos fenómenos y las subestructuras.

El Análisis Fenomenológico en los Otros Grupos

A continuación, presento un resumen de las principales características, con respecto a la fenomenología, de las transparencias de los otros siete grupos. Una descripción detallada se encuentra en el Anexo M.

Grupo progresiones aritméticas y geométricas. Las transparencias de este grupo se caracterizan por la aparición temprana de subestructuras de la estructura matemática que organizan los fenómenos, por la inclusión de los modelos matemáticos correspondientes a algunos de los fenómenos y por la identificación de leyes naturales para algunos de ellos. Sin embargo, ninguna transparencia presenta el análisis estructural del fenómeno, ni la descripción explícita de la relación entre la estructura matemática y el modelo matemático correspondiente. En el trabajo final, el grupo logró organizar los fenómenos por subestructuras y por disciplinas.

Grupo números decimales. Las transparencias de este grupo sugieren un esfuerzo particular por el trabajo en el análisis fenomenológico. La fenomenología aparece desde la primera transparencia en la que ya se identifica (a nivel intuitivo) una familia de fenómenos (medida). Las transparencias también muestran la preocupación del grupo por investigar en la literatura y seguir los ejemplos y los comentarios en clase. Esto se aprecia en la utilización de las ideas de la fenomenología didáctica en la cuarta transparencia y la idea de los usos de la noción en el trabajo final. Las subestructuras aparecen también en la cuarta transparencia y permiten organizar los fenómenos. Estas subestructuras cambian en el trabajo final en el que se da una separación entre el análisis estructural y la organización por usos. En ningún momento aparecen modelos específicos, ni se establecen relaciones explícitas entre fenómenos y subestructuras. Aunque el trabajo presentado por este grupo es rico en información y estructura, no es claro, por el contenido de la transparencia final, que el grupo haya desarrollado un significado muy avanzado del organizador del currículo.

Grupo probabilidad. Las transparencias de este grupo tienen varias características. En primer lugar, se aprecia una confusión en la separación entre la fenomenología y los fenómenos relacionados con los juegos de azar, que el grupo ubicó en el contexto. En las primeras transparencias, no se propone ningún tipo de organización de los fenómenos. En la quinta transparencia, este grupo presentó el análisis de una familia de fenómenos al describir en detalle la tripla fenómeno, subestructura y relación. No obstante, este esfuerzo no se expresó posteriormente en la organización de los fenómenos de acuerdo con subestructuras. De hecho, en la transparencia final, los fenómenos se organizan únicamente por disciplinas.

Grupo cónicas. El trabajo de este grupo presenta una progresión constante. De unos pocos ejemplos de fenómenos en las primeras dos transparencias, se pasa a una organización por subestructuras en la tercera transparencia y a la propuesta de una familia de fenómenos en la cuarta, hasta llegar a la descripción detallada de un fenómeno matemático con su correspondiente modelo matemático, en la quinta. Aunque la organización por subestructuras es opacada por la organización por

disciplinas en el trabajo final, esta última transparencia se caracteriza por su completitud y su profundidad en el análisis de los fenómenos ópticos.

Grupo esfera. Las transparencias de este grupo se caracterizan por tres cuestiones. Primero, desde la tercera transparencia aparece la organización por familias de fenómenos y el establecimiento de relaciones entre elementos de un fenómeno específico (el globo terrestre) y subestructuras de la estructura conceptual general. Esto último se logra incluso antes de que la instrucción lo haya sugerido en clase. Segundo, en la quinta transparencia el grupo realizó un análisis fenomenológico detallado del proceso de localización de puntos. Y tercero, el grupo, al mantener el tema de la tierra como hilo conductor de su trabajo, logró poner en juego los resultados de su análisis fenomenológico en las actividades relacionadas con errores, dificultades y evaluación.

Grupo función de segundo grado. Este grupo organizó muy pronto la fenomenología en familias de fenómenos. Esta organización mantuvo, hasta el trabajo final, una separación entre fenómenos físicos y los otros fenómenos naturales y sociales, y otra separación entre los fenómenos matemáticos y el cálculo de áreas de figuras geométricas. En las últimas transparencias, el grupo introdujo los modelos matemáticos que corresponden a cada fenómeno, pero en ningún momento analizó un fenómeno específico, ni estableció su relación con una subestructura de su estructura matemática. A lo largo de todas las transparencias, se aprecia un uso del término “modelización” que no logra consolidarse en el trabajo final.

Grupo sistemas de ecuaciones lineales. Este grupo presentó un análisis fenomenológico poco desarrollado. Sus propuestas anteriores al trabajo final se restringen a una enumeración de fenómenos que llegaron a clasificar de acuerdo con criterios diversos. No propusieron modelos matemáticos y no hay ningún tipo de análisis fenomenológico.

Las variables que propuse anteriormente me permiten organizar la información que acabo de presentar y caracterizar los significados parciales de los grupos de futuros profesores con respecto a la noción de fenomenología.

4.3. Criterios de Organización de los Fenómenos

La Tabla 32 presenta los criterios de organización de los fenómenos utilizados por los grupos de futuros profesores en cada una de sus transparencias. Cada fila presenta los criterios utilizados por un grupo en sus nueve transparencias. El significado de cada criterio aparece en la Tabla 31. Los fenómenos que se presentan en un transparencia se pueden organizar por áreas, disciplinas, familias, grupos, listado, subestructuras o usos. El orden en que aparecen en cada casilla indica la prioridad con que se utilizan esos criterios. Por ejemplo, se puede organizar por subestructuras y al interior de cada subestructura indicar la disciplina. Cuando un esquema (por ejemplo, el esquema *familias*) aparece en la transparencia, pero no juega un papel organizador de los fenómenos, lo indico en cursiva.

		Transparencia								
G	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1		Grupos		Grupos Familias SubEsts					Familias Discplns Grupos	
2		Listado	Listado SubEsts	SubEsts	SubEsts Discplns				Discplns SubEsts	
3	Listado Usos	Listado Familias	Grupos	SubEsts Grupos	SubEsts Grupos				SubEsts Grupos Usos	
4	Listado	Grupos	Discplns	SubEsts	Discplns SubEsts				Discplns	
5	Listado	Grupos	SubEsts	SubEsts Grupos	SubEsts Grupos				Discplns	
6	Listado	Grupos	Discplns Grupos	Familias	Familias				Discplns	
7	Listado	Listado	Grupos	Grupos Áreas	Grupos Áreas				Áreas Discplns	
8	Listado	Listado		Grupos	Grupos				Grupos Discplns	

G: Grupo; SubEsts: Subestructuras; Discplns: Disciplinas

Tabla 32. Criterios de organización del análisis fenomenológico

No se aprecia un patrón general en la tabla. Todas las transparencias comienzan organizando los fenómenos en un listado y, en el trabajo final, muchos grupos utilizan el esquema de organización por disciplinas. Esto último es seguramente producto de la instrucción, con motivo de los ejemplos de unidades didácticas que fueron presentados en clase. En todo caso, el trabajo de los grupos de futuros profesores se puede agrupar en cuatro patrones generales, dependiendo del criterio de organización que prevalece en sus transparencias. La Tabla 33 presenta esta clasificación de los grupos.

Criterio de organización	Grupos
Subestructuras	Progresiones
	Números decimales
	Cónicas
Familias	Funciones y gráficas
	Esfera
Disciplinas	Probabilidad

Criterio de organización	Grupos
Grupos	Función de segundo grado Sistemas de ecuaciones lineales

Tabla 33. Principal criterio de organización de los fenómenos

4.4. Tipo y Profundidad del Análisis Fenomenológico

En la Tabla 34 presento el tipo de análisis fenomenológico que se manifiesta en las transparencias. Recordemos que, en este caso, una transparencia puede presentar modelos, leyes, subestructuras, análisis estructural de los fenómenos, y la relación entre las características estructurales del fenómeno y elementos y relaciones de la subestructura.

G	Transparencia								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1					Modelos SubEstrs				
2		Modelos Leyes		Modelos Leyes SubEstrs	Modelos Leyes SubEstrs				
3				SubEstrs	SubEstrs				SubEstrs Áreas
4		SubEstrs Estructura- fenómeno Leyes Relación		SubEstrs Estructura- fenómeno Leyes Relación					
5		SubEstrs		SubEstrs Estructura- fenómeno Relación	SubEstrs Estructura- fenómeno Relación				SubEstrs Estructura- fenómeno Leyes Relación
6		SubEstrs Estructura- fenómenos Relación			SubEstrs Estructura- fenómeno Leyes Relación				SubEstrs Estructura- fenómeno Leyes Relación
7		Modelos		Modelos	Modelos				Modelos
8									Leyes

G: Grupo; SubEstrs: Subestructuras

Tabla 34. Papel de las Subestructuras en el análisis fenomenológico

Tres grupos —4 (probabilidad), 5 (cónicas) y 6 (esfera)— presentaron transparencias en las que se desarrolla un análisis fenomenológico detallado, identificando las características estructurales de al menos un fenómeno o familia de fenómenos y estableciendo la relación entre esas características y elementos y relaciones de una subestructura de la estructura matemática que corresponde a su tema. En las transparencias del grupo 2 (progresiones), aparecen subestructuras, leyes y modelos matemáticos, pero no se hace el análisis de las características estructurales de los fenómenos. Las transparencias del grupo 3 (números decimales) presentan subestructuras únicamente y en una del grupo 1 (funciones y gráficas) aparecen modelos matemáticos y subestructuras. Los modelos matemáticos aparecen en casi todas las transparencias del grupo 7 (función de segundo grado). Finalmente, el grupo 8 (sistemas de ecuaciones lineales) sólo hace mención a leyes en el trabajo final.

4.5. Complejidad de la Noción de Fenomenología

En este apartado, he caracterizado los significados parciales que los grupos de futuros profesores manifestaron en sus transparencias. La progresión en estos significados parciales desvela el desarrollo del conocimiento didáctico con respecto a este organizador del currículo. A continuación, sintetizo las principales características de este desarrollo.

Las transparencias de los grupos de futuros profesores presentan una gran variedad de aproximaciones a la noción de fenomenología. La evolución de los significados parciales de los grupos de futuros profesores no siguió patrones estables. Sus transparencias presentan diversas soluciones a las tareas propuestas. Una pequeña proporción de ellas sugiere que esos grupos se acercan al significado de referencia propuesto por la instrucción. Para cada aspecto de este significado de referencia, encontramos transparencias en las que este aspecto se manifiesta. Pero sólo unas pocas sugieren que los grupos de futuros profesores hayan puesto en juego una visión completa y coordinada de ese significado. En términos de la génesis instrumental, los grupos de futuros profesores no lograron desarrollar estrategias de uso de la noción que les permitiera convertirla en un instrumento útil, tanto para el análisis del concepto, como para la puesta en práctica de ese análisis en el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje.

Varios grupos tienen dificultades con el significado del término “modelización” y su relación con la fenomenología. Por ejemplo, las transparencias del grupo funciones y gráficas parecen insinuar que sólo los fenómenos biológicos (y no los físicos) se pueden modelizar. Algo similar sucede con las transparencias del grupo función de segundo grado en las que se aprecia que, cuando se conoce de antemano el modelo matemático, entonces ya no hay lugar a la modelización.

La progresión de las transparencias de los grupos cónicas y esfera muestra que, aunque, con dificultades y de manera parcial, los grupos de futuros profesores pueden avanzar en la construcción del significado de la noción de fenomenología. El trabajo del grupo probabilidad mostró que sí es posible realizar un análisis fenomenológico detallado, como lo requería la instrucción. No obstante, en el caso del trabajo de este grupo, este análisis detallado no implicó una organización de los fenómenos con base en subestructuras. Ése sí fue el caso de las transparencias del grupo cónicas. Por otro lado, las transparencias de varios grupos pusieron

en evidencia que es posible proponer modelos matemáticos e identificar leyes y subestructuras, sin llegar a realizar un análisis fenomenológico detallado en el que se establezcan relaciones entre las características estructurales de los fenómenos y elementos y relaciones de las subestructuras (grupo progresiones).

El trabajo del grupo esfera mostró que el uso de un fenómeno específico como hilo conductor puede ayudar a la construcción del significado de la noción de fenomenología tanto desde el punto de vista teórico, como en su puesta en práctica. Éste fue el único grupo que puso en juego la información producida en el análisis fenomenológico dentro de las actividades de los análisis cognitivo y de instrucción.

Lo anterior sugiere las dificultades que los grupos de futuros profesores tuvieron con este organizador del currículo durante la asignatura. Menos de la mitad de los grupos lograron desarrollar un análisis fenomenológico detallado y, en esos casos, este esfuerzo no revertió en una organización de los fenómenos de acuerdo con las subestructuras correspondientes. De hecho, solamente tres grupos organizaron sus transparencias por subestructuras y sólo uno de ellos mantuvo esa aproximación en el trabajo final. La mayoría de los grupos organizaron el trabajo final de acuerdo con un criterio diferente del utilizado en sus transparencias previas. Esto es posiblemente consecuencia de uno de los ejemplos dados por la instrucción, pero también manifiesta la débil consolidación de los significados construidos por los grupos de futuros profesores.

La noción de fenomenología es una noción compleja. Su puesta en práctica, como instrumento, requiere abordar el análisis de la estructura matemática desde perspectivas más amplias que la puramente formal y simbólica con la que llegan los futuros profesores a la asignatura. La identificación de las subestructuras requiere una descripción suficientemente completa de la estructura matemática que, a su vez, exige un análisis profundo desde la perspectiva de los sistemas de representación. Por otro lado, la identificación de los fenómenos que pueden ser organizados por la estructura matemática no es evidente. Este proceso obliga a los grupos de futuros profesores a investigar en la literatura y organizar esa información.

A la dificultad propia de la noción y de su puesta en práctica, tenemos que agregar el hecho de que para este tema, al contrario de lo sucedido con las nociones de estructura conceptual y sistemas de representación, se dedicó muy poco tiempo dentro de la asignatura. Esta situación sólo permitió una presentación somera de los aspectos teóricos y muy poca profundidad en el desarrollo de ejemplos y en la discusión del trabajo de los grupos de futuros profesores.

5. PUESTA EN PRÁCTICA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

La última actividad de la asignatura consistió en la producción y presentación de un trabajo final. En este documento, los formadores esperábamos que los futuros profesores presentaran, de manera sistemática y organizada, la información que habían recabado sobre los organizadores del currículo y utilizaran esa información

para proponer el diseño de una unidad didáctica sobre el tema en el que habían trabajado a lo largo del curso.

En este apartado, presento el tercer estudio en el que caracterizo los trabajos finales presentados por los grupos de futuros profesores. Lo hago desde la perspectiva de la puesta en juego, dentro de esos documentos, del conocimiento didáctico sobre el análisis de contenido. Para ello, codifiqué y analicé las ocasiones en las que los grupos de futuros profesores utilizaron la información que recogieron y organizaron para el análisis de contenido en los demás apartados del documento. Los resultados ponen en evidencia un grado parcial de coherencia en la puesta en práctica del conocimiento didáctico por parte de los grupos de futuros profesores. La mayoría de los grupos no logró desarrollar técnicas que les permitieran apreciar la importancia de la información que recogieron en el análisis de contenido y les indujeran a utilizarla en los otros análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica. El grado de fundamentación de los diseños curriculares propuestos por los grupos de futuros profesores varió dependiendo de los organizadores del currículo, de los grupos y de los apartados en los que la información se puso en juego.

A continuación, describo el esquema metodológico que utilicé para codificar y analizar los trabajos finales y presento los principales resultados del análisis.

5.1. Uso de la Información que Surge de los Organizadores del Currículo

En el capítulo 4, caractericé las tareas que, en el marco del análisis didáctico, los grupos de futuros profesores realizaron en la asignatura:

- ◆ T₁: recabar, organizar y seleccionar los significados relevantes del concepto;
- ◆ T₂: usar la información que surge en cada fase del análisis del concepto en las otras fases del análisis didáctico; y
- ◆ T₃: usar la información de todos los análisis para el diseño de la unidad didáctica

Por lo tanto, hay dos formas de poner en práctica el conocimiento didáctico de un organizador del currículo. Una, cuando ciertos aspectos de ese conocimiento se utilizan para producir información sobre el concepto (T₁). Éste es el aspecto del desarrollo del conocimiento didáctico que he analizado hasta ahora y que hace referencia a los significados teórico y técnico de los organizadores del currículo. La segunda, se refiere a cómo se utiliza la información que surge de esa tarea para efectos de realizar los otros análisis del análisis didáctico y para diseñar la unidad didáctica (tareas T₂ y T₃). Ésta es la puesta en práctica del conocimiento didáctico que hace referencia al significado práctico de los organizadores del currículo y que estudio en este apartado.

Conceptualizo la puesta en práctica del conocimiento didáctico desde tres perspectivas complementarias. En primer lugar, observo que las tareas T₂ y T₃ se refieren al uso de la información recogida en T₁. Recordemos que la calidad de la información se debe medir por la calidad de las decisiones que permite tomar y se caracteriza en términos de cómo el usuario la percibe y la usa (Miller, 1996). En la Tabla 8 del capítulo 4, este aspecto de la calidad de la información corresponde al indicador relevancia: medida en que el usuario puede utilizar la información para tomar decisiones. Este indicador caracteriza el factor de desarrollo que yo he de-

nominado “papel”. La segunda perspectiva surge de la teoría de la génesis instrumental. Desde esta perspectiva, el proceso de instrumentación —en virtud del cual los organizadores del currículo del análisis de contenido se transforman en instrumentos dentro de la asignatura— tiene lugar en dos vertientes complementarias, que corresponden a las dos formas de poner en práctica el conocimiento didáctico. En la primera, los grupos de futuros profesores construyen razonamientos y procedimientos (técnicas) para analizar un concepto e identificar, organizar y seleccionar sus significados más relevantes para la instrucción (T_1). En la segunda, los grupos de futuros profesores deben desarrollar las técnicas que les permitan apreciar la relevancia de esa información para realizar los otros análisis y diseñar la unidad didáctica y que les induzcan a utilizar esa información para esos propósitos. En esta vertiente, la información que se produce con motivo de la tarea T_1 debe usarse de manera coordinada y coherente (en las tareas T_2 y T_3), buscando integrar orquestadamente los diferentes instrumentos (Kaptelinin, 2003, p. 834). Por otro lado, la puesta en práctica del conocimiento didáctico también se puede analizar desde la perspectiva de la calidad de su resultado, es decir, de la calidad de un diseño curricular, como lo he sugerido en (Gómez, 2002a).

¿Qué implican estas tres perspectivas de la puesta en práctica del conocimiento didáctico para efectos del análisis de los trabajos finales que los grupos de futuros profesores presentaron al final de la asignatura? Recordemos que el trabajo final de la asignatura es el resultado de un proceso secuencial y organizado en el que los grupos de futuros profesores realizan las diferentes fases del análisis didáctico. Para la realización de las tareas correspondientes a una fase dada, la instrucción motivó a los grupos de futuros profesores a poner en juego la información que ellos habían recogido y organizado en las fases anteriores. Por ejemplo, como formadores, nosotros esperábamos que, para producir la información correspondiente al análisis de contenido, los grupos de futuros profesores pusieran en juego las nociones de estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Similarmente, esperábamos que, cuando los grupos de futuros profesores realizaran el diseño de la unidad didáctica, ellos utilizaran sistemática y razonadamente la información recogida en cada uno de los análisis.

Estas expectativas surgen de la conceptualización del análisis didáctico como procedimiento de diseño curricular. De acuerdo con esta conceptualización, la utilización sistemática y razonada de la información permite al profesor justificar el diseño que propone. Su diseño no surge únicamente de la intuición o la experiencia: *el profesor puede justificar el diseño en el sentido de que dicho diseño es coherente con la información que ha producido al realizar el análisis didáctico*. De esta manera, el profesor tiene una base para valorar las posibilidades de éxito del diseño, cuando éste se lleve a la práctica.

La información para realizar este estudio estaba contenida en los trabajos finales de los ocho grupos de futuros profesores. Estos trabajos tenían extensiones diversas, pero la mayoría sobrepasaban los 100 folios. En el capítulo 6 (secciones 2.8 y 2.9), describí el desarrollo de las últimas sesiones de clase de la asignatura en las que la instrucción guió la realización del trabajo final. En estas sesiones, LR hizo una descripción general del diseño curricular al nivel de la planificación del profesor (Rico, 1997d) y presentó una descripción más detallada de cada compo-

nente del currículo, en términos de los organizadores del currículo. En seguida, presentó una unidad didáctica sobre los números naturales.

Todos los trabajos finales presentados por los grupos de futuros profesores siguieron la misma estructura general:

- ◆ información sobre los organizadores del currículo,
- ◆ diseño curricular global de la unidad didáctica y
- ◆ descripción de las sesiones y actividades que conforman la unidad didáctica.

Los grupos de futuros profesores presentaron la información sobre el análisis de contenido en términos de sus tres organizadores del currículo: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Por su parte, el análisis cognitivo se basó en el análisis de los errores y las dificultades, y el análisis de instrucción en la información sobre resolución de problemas y sobre materiales y recursos. La información sobre el diseño curricular de la unidad didáctica venía en general organizada en los siguientes apartados: introducción, objetivos, contenidos, metodología y evaluación. Éstas fueron las categorías que utilicé en la codificación de la información.

En este estudio, mi interés se centró en explorar, en cada uno de estos documentos, (a) qué información, de la propuesta en el análisis de contenido, se utilizó en los análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica y (b) si había información correspondiente al análisis de contenido que se utilizaba en los otros análisis o en el diseño de la unidad didáctica y que no había quedado registrada explícitamente en el apartado del análisis de contenido del documento.

El proceso de codificación de los documentos consistió, por lo tanto, en la identificación de:

- ◆ la información recogida sobre cada una de las nociones del análisis de contenido (que se había incluido explícitamente en el apartado correspondiente del documento o que se había omitido en ese apartado pero que aparecía o se utilizaba en otros lugares del documento) y
- ◆ los lugares del documento en los que esa información se utilizaba: otros organizadores del currículo del análisis de contenido, otros análisis del análisis didáctico (cognitivo, y de instrucción), diseño curricular general de la unidad didáctica y diseño de las sesiones de clase.

5.2. El Análisis de Contenido en la Práctica

La Tabla 35 presenta la organización de los resultados de codificar la información contenida en los documentos. En las columnas aparecen los tres organizadores del currículo del análisis de contenido y, en las filas, cada uno de los apartados en los que la información de esos tres organizadores del currículo se podía poner en juego. Cuando, para un documento dado, había información de una noción del análisis de contenido (por ejemplo, estructura conceptual) que se ponía en juego en uno de los apartados del documento (por ejemplo, errores y dificultades), identifiqué en la celda correspondiente el número que identificaba al grupo que produjo el documento¹⁴¹. Si en un apartado (por ejemplo, objetivos) se usaba información de

¹⁴¹ Utilizo los números que identifican a los grupos, en cambio de los temas en los que trabajaron, para efectos de simplificar la lectura de la tabla (1: funciones y gráficas, 2: progresiones, 3: núme-

un organizador del currículo del análisis de contenido que no se propuso dentro del documento en el apartado correspondiente a esa noción, ubiqué en la celda correspondiente el número del grupo, y lo resalté en negrita. Por ejemplo, el grupo 7 utilizó la información sobre sistemas de representación en el apartado de análisis fenomenológico y el grupo 3 puso en juego, en el apartado de resolución de problemas, información sobre la estructura conceptual, que no registró en el apartado correspondiente del documento.

	Estructura conceptual	Sistemas de representación	Fenomenología
Análisis de contenido			
Estructura conceptual			
Sistemas de representación			
Fenomenología	2 7	7	
Otros organizadores del currículo			
Análisis cognitivo	1 2 3 4 5 7 8	1 2 4 5 6 7	
Materiales y recursos	1 2 3 4 6 7 8	1 2 7	1
Resolución de problemas	3		
Unidad didáctica - diseño curricular			
Introducción	3 5 8	1 5 7	
Objetivos	1 2 5 6	1 2 5 6 7 8	2
Contenidos	1 2 3 4 6 7	1 4 6 7 8	1 6
Metodología			
Evaluación	1 4 5	1 4 5 8	1 5
Unidad didáctica - sesiones			
Sesión 1	1 3 4 5 6 7	1 2 3 4 5 7	1 3 4 6 7
Sesión 2	3 4 5 6 7 8	1 2 7	1 4 6 7
Sesión 3	1 4 5 6 7	1 3 4 5 7	1 3 7
Sesión 4	2 7	1 4 5 6 7	4 6 7
Sesión 5	1 4 7	1 4 5 7	6 7
Sesión 6	1 7	1 4 7 8	4 7

Tabla 35. Número de grupos

A continuación, analizo, desde diferentes perspectivas, los resultados de esta codificación de los trabajos finales.

Frecuencia de Uso de la Información

En la Tabla 36 resumo la codificación de la Tabla 35. La información en las celdas de esta tabla indican la frecuencia (número de grupos) con que la información producida con un organizador del currículo se utilizó en el apartado correspondiente. Por ejemplo, el dato “4 3” en la celda de la cuarta fila y la segunda colum-

ros decimales, 4: probabilidad, 5: cónicas, 6: esfera, 7: función cuadrática y 8: sistemas de ecuaciones lineales).

na indica que hubo cuatro grupos que usaron la información que recogieron para la estructura conceptual en el análisis cognitivo y tres grupos que usaron información relacionada con ese organizador del currículo en ese análisis, sin que registraran esa información en el apartado correspondiente de su documento.

	Estructura conceptual	Sistemas de representación	Fenomenología
Análisis de contenido			
Estructura conceptual			
Sistemas de representación			
Fenomenología	2	1	
Otros organizadores del currículo			
Análisis cognitivo	4 3	6	
Materiales y recursos	5 2	3	1
Resolución de problemas	1		
Unidad didáctica - diseño curricular			
Introducción	1 2	3	
Objetivos	3 1	6	1
Contenidos	5 1	5	2
Metodología			
Evaluación	3	4	2
Unidad didáctica - sesiones			
Sesión 1	6	6	5
Sesión 2	4 2	3	4
Sesión 3	4 1	4 1	2 1
Sesión 4	2	5	3
Sesión 5	3	4	2
Sesión 6	2	3 1	2

Tabla 36. Frecuencia de uso de la información

El análisis de las Tablas 35 y 36, da lugar a los siguientes resultados. La información que se produce para los sistemas de representación es la más utilizada (53 ocasiones), seguida por la de la estructura conceptual (44). La información de la fenomenología es la menos utilizada (24). Para la estructura conceptual, se encuentra el mayor número de ocasiones en las que se utiliza información que no fue propuesta en los apartados correspondientes del análisis de contenido (13). Esto sucedió únicamente dos veces para los sistemas de representación y una vez para la fenomenología. Aparte de las sesiones (en las que se utiliza en 64 ocasiones información propuesta en el análisis de contenido), los apartados en los que con más frecuencia se utiliza esta información son los siguientes: contenidos (12), análisis cognitivo (10), materiales y recursos (9) y objetivos (8). Los lugares en los que se utiliza información que no ha sido presentada en el análisis de contenido se distribuye de manera más o menos uniforme en los diferentes apartados del documento. Mientras que, para la estructura conceptual y los sistemas de representación,

aproximadamente en la mitad de las ocasiones la información propuesta se utiliza en las sesiones, en el caso de la fenomenología esta situación ocurre en un 75% de las ocasiones. Hay poca relación entre los organizadores del currículo del análisis de contenido. Tan sólo se aprecia uso de la información de la estructura conceptual en dos documentos y de los sistemas de representación en uno. La estructura conceptual juega un papel importante en todos los grupos, excepto uno (esfera). Pero hay tres grupos (progresiones, números decimales y sistemas de ecuaciones lineales) que usan información no existente en el análisis de contenido propuesto. Todos los grupos, excepto dos (números decimales y sistemas de ecuaciones lineales) usan información propuesta para los sistemas de representación en el análisis cognitivo. Dentro del diseño general de la unidad didáctica, la estructura conceptual se utiliza más en los contenidos y los sistemas de representación en los objetivos. El uso de la información del análisis de contenido se reduce a medida que se avanza en las sesiones.

Frecuencias por Grupos

También se puede hacer un resumen de la Tabla 35 desde la perspectiva de los grupos. La Tabla 37 presenta el número de ocasiones en las que cada grupo utilizó información del análisis de contenido, tanto la propuesta explícitamente en el documento (existente), como aquella que no (no existente):

Grupo	Existente	No existente
1. Funciones y gráficas	27	
2. Progresiones	12	2
3. Números decimales	3	7
4. Probabilidad	20	
5. Cónicas	13	3
6. Esfera	15	
7. Función cuadrática	26	
8. Sistemas de ecuaciones lineales	4	4

Tabla 37. Frecuencias por grupos

El análisis de la Tabla 37 da lugar a los siguientes resultados. Tres grupos presentan un mayor número de ocasiones en las que utilizan la información propuesta para el análisis de contenido: funciones y gráficas (27), función cuadrática (26) y probabilidad (20). Dos grupos presentan un número reducido de ocasiones: números decimales (3) y sistemas de ecuaciones lineales (4). Los demás grupos se encuentran en un nivel intermedio: progresiones (12), cónicas (13) y esfera (15). Los dos grupos que presentan menor número de ocasiones en las que se utiliza la información propuesta son los grupos que presentan mayor número de ocasiones en las que se utiliza información que no se propuso en el apartado de análisis de contenido: números decimales (7) y sistemas de ecuaciones lineales (4).

Descripción del Trabajo de los Grupos

Complemento el análisis anterior con una breve descripción del documento de cada grupo de futuros profesores.

1. *Funciones y gráficas.* Este grupo utilizó en detalle la información propuesta en el análisis de contenido en materiales y recursos y en el diseño de la unidad didáctica, particularmente en los objetivos y en las sesiones.

2. *Progresiones.* Este grupo presentó una aproximación formal y simbólica al análisis de contenido, tomando las representaciones gráficas como aspecto complementario de la descripción de la estructura matemática. Esta aproximación se expresó en el diseño general de la unidad didáctica. El grupo utilizó poca información en las sesiones y actividades.

3. *Números decimales.* Este grupo presentó un análisis de contenido estructurado, pero poco detallado. Suplieron esta falta de detalle con información adicional que utilizaron en el análisis cognitivo y en el diseño de la unidad didáctica. De hecho, dentro del documento, antes de presentar el diseño de la unidad didáctica, presentaron una nueva estructura conceptual, específica a la parcela de la estructura matemática que desarrollaron en el diseño curricular. Es, por lo tanto, un grupo que, con motivo del trabajo sobre la unidad didáctica, vio la necesidad de profundizar en el análisis de contenido, pero que no regresó a este análisis dentro del documento, para mejorar y complementar la información propuesta.

4. *Probabilidad.* Este grupo, en contraste con el grupo anterior, habiendo hecho un primer trabajo sobre el diseño de la unidad didáctica, regresó al análisis de contenido y mejoró la información recogida allí. De esta manera, en el trabajo de este grupo, la información del análisis de contenido se puso en juego permanentemente. Se aprecia que, por ejemplo, para producir el análisis cognitivo y la descripción de los contenidos, se recorrió paso a paso lo propuesto para la estructura conceptual.

5. *Cónicas.* Este grupo presentó un análisis de contenido detallado y coherente que se puso en juego en el diseño de la unidad didáctica. Sin embargo, en ese diseño aparecieron aspectos importantes de la estructura matemática que no habían sido considerados en el análisis de contenido.

6. *Esfera.* Este grupo expresó explícitamente, en la introducción del trabajo, la utilidad que tuvo la información sobre los organizadores del currículo en el diseño de la unidad didáctica. No obstante, puesto que el diseño curricular que presentaron fue muy general, no fue posible apreciar qué uso le habrían dado a la información (de carácter específico) que recogieron para el análisis de contenido.

7. *Función cuadrática.* Como en el caso del grupo probabilidad, este grupo utilizó la información recogida para el análisis de contenido en la mayoría de los apartados del documento. En particular, hicieron uso de la información sobre la estructura conceptual en el análisis fenomenológico y como guía para el análisis cognitivo y el análisis de los materiales y recursos. El análisis de contenido se aprecia explícitamente en la descripción de los contenidos y de las sesiones de clase. Éste fue el grupo que más utilizó la información fenomenológica en las sesiones de clase.

8. *Sistemas de ecuaciones lineales*. Este grupo presentó un análisis de contenido pobre. Esto los llevó a poner en juego, en el diseño de la unidad didáctica, mucha información que no se encontraba propuesta originalmente. Como el grupo números decimales, este grupo no regresó a mejorar su propuesta de análisis de contenido, sino que presentó, al comienzo de la unidad didáctica, una nueva estructura conceptual.

Se observa que el trabajo en el diseño de la unidad didáctica motiva a la mayoría de los grupos de futuros profesores a profundizar en el análisis de su tema. En algunos casos, los grupos registran esta nueva información sobre el análisis de contenido en el apartado correspondiente del documento. No obstante, en otros casos, los grupos de futuros profesores utilizan esta información sin integrarla explícitamente dentro de su documento. Esta situación se puede interpretar en el sentido de que dichos grupos (progresiones, números decimales, cónicas y sistemas de ecuaciones lineales) no establecieron con claridad el propósito y la función del análisis de contenido en el diseño de la unidad didáctica (ver Tabla 35).

5.3. Complejidad de la Puesta en Práctica del Conocimiento Didáctico

Como formadores, nosotros esperábamos que los grupos de futuros profesores fundamentaran el diseño de su unidad didáctica en la información que habían recogido y organizado al realizar el análisis didáctico de su tema. El análisis de los trabajos finales muestra que estos propósitos no se lograron plenamente. Los trabajos finales de varios grupos de futuros profesores ponen en evidencia una relación débil entre la información recogida para los organizadores del currículo del análisis de contenido y su uso en los otros análisis y en el diseño de la unidad didáctica. También muestran que los grupos de futuros profesores utilizaron la información que surgió del análisis de contenido solamente en algunos aspectos de los otros análisis y del diseño de la unidad didáctica y, por lo tanto, que no lograron desarrollar necesariamente una visión global e integrada del análisis de contenido, en particular, y del análisis didáctico, en general, como herramienta para el diseño de unidades didácticas. Estos resultados resaltan otra dimensión de la complejidad del conocimiento didáctico: el diseño sistemático y fundamentado de una unidad didáctica, a partir de la información que surge de la puesta en juego del conocimiento didáctico, es un proceso complejo.

6. COMPLEJIDAD DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE EL ANÁLISIS DE CONTENIDO

¿Cómo se caracterizan los significados parciales que los grupos de futuros profesores manifestaron en sus transparencias y en sus intervenciones en el aula y cómo evolucionan en el tiempo? Ésta fue la pregunta que formulé al comienzo de este capítulo. Para abordarla, he analizado en detalle cada una de las transparencias de los grupos de futuros profesores, junto con las transcripciones de las grabaciones de la interacción en clase, de las entrevistas a dos grupos de futuros profesores en dos momentos de la asignatura y los trabajos finales. Este análisis cualitativo y en profundidad me ha permitido identificar los diferentes significados parciales que los grupos de futuros profesores manifestaron en sus transparencias e intervencio-

nes en clase con respecto a los organizadores del currículo que componen el análisis de contenido y cómo y en qué medida los pusieron en práctica en el diseño de la unidad didáctica. Los resultados de estos dos estudios ponen en evidencia la complejidad del conocimiento didáctico. Esta complejidad se puede analizar desde diferentes perspectivas.

A continuación presento las principales características de los significados parciales de los grupos de futuros profesores y sugiero conjeturas de explicación para algunos de ellos. Parto de los resultados de estos estudios para reflexionar sobre la complejidad de los organizadores del currículo del análisis de contenido y su relación con el proceso de génesis instrumental; resaltar los cambios en las visiones de los futuros profesores sobre la complejidad de las matemáticas escolares; y revisar el significado de referencia de dichos organizadores del currículo a la luz de los significados parciales manifestados por los futuros profesores. Finalmente, hago algunas observaciones sobre el proceso de aprendizaje de los grupos de futuros profesores y sobre la puesta en práctica del conocimiento didáctico.

6.1. Significados Parciales sobre los Organizadores del Currículo del Análisis de Contenido

El análisis ha mostrado que el manejo que los grupos de futuros profesores hicieron de la noción de estructura conceptual como instrumento para el análisis de un contenido evolucionó en el tiempo. Algunos grupos comenzaron la descripción de su tema con un listado desordenado; después, este listado tomó forma de mapa conceptual, organizado con una variedad de criterios. La mayoría de estos criterios de organización surgieron de los organizadores del currículo. A medida que se avanzó en las presentaciones y en la discusión sobre ellas, el número de criterios de organización se redujo y la organización de los mapas conceptuales se centró en los sistemas de representación. El papel organizador de los sistemas de representación también pasó por varias etapas. En un comienzo, los sistemas de representación compartieron ese rol de organización de los mapas conceptuales con otras nociones, asumiendo, en muchos casos, un papel complementario. El paso a un mapa conceptual completamente organizado por los sistemas de representación se dio en diferentes momentos de la asignatura, dependiendo del grupo. Solamente cuando los sistemas de representación asumieron un papel protagonista en la organización del mapa conceptual, los grupos de futuros profesores tomaron conciencia de la posibilidad de establecer relaciones entre los elementos de ese mapa conceptual. Al final, la mayoría de los grupos estableció un cierto número de conexiones en su estructura conceptual, reconoció que “todo está relacionado” y resaltó la importancia de estas conexiones.

Desde la perspectiva de los sistemas de representación, algunos grupos de futuros profesores consideraron que lo simbólico pertenecía a la dimensión conceptual del tema y no era un sistema de representación. Lo simbólico sirve para describir el concepto a partir de su definición. Al incluir lo simbólico dentro de lo conceptual, varios grupos de futuros profesores consideraron lo gráfico como las representaciones. Estas representaciones juegan un papel complementario como medio para describir la estructura matemática. Algunos futuros profesores pensaron que estas representaciones tenían menos importancia porque no permitían generalidad (al presentar instancias particulares del concepto) y podían inducir a

errores. La menor importancia que ellos le dieron a estos sistemas de representación puede explicarse a partir del papel que han jugado en su formación previa, al hecho de que los grupos de futuros profesores consideraron que en los libros de texto se usan como ejemplos y de que, en la práctica, no hay tiempo para tratarlos con profundidad. No obstante, cuando se apreció variedad de sistemas de representación en las transparencias, esta variedad surgió principalmente entorno a los sistemas de representación gráficos. Las reflexiones anteriores permiten explicar parcialmente la tendencia de los grupos de futuros profesores a imponer una jerarquía en los sistemas de representación. Esta jerarquía se sustenta en argumentos históricos, conceptuales, fenomenológicos y prácticos.

Al poner en juego la noción de fenomenología, las transparencias de los grupos de futuros profesores presentaron gran variedad de soluciones a las tareas propuestas. Una proporción pequeña de ellas sugiere que algunos grupos se acercaron al significado de referencia propuesto por la instrucción. Para cada aspecto de este significado de referencia, encontramos transparencias en las que este aspecto se manifestó. Pero no tenemos evidencia de ningún grupo que haya logrado poner en juego una visión completa y coordinada de ese significado. Menos de la mitad de los grupos lograron desarrollar un análisis fenomenológico detallado y, en esos casos, este esfuerzo no revertió en una organización de los fenómenos de acuerdo con las subestructuras correspondientes. De hecho, solamente tres grupos organizaron sus transparencias por subestructuras y sólo uno de ellos mantuvo esa aproximación en el trabajo final. La mayoría de los grupos organizaron el trabajo final de acuerdo con un criterio diferente del utilizado en sus transparencias previas. Esto es posiblemente consecuencia de uno de los ejemplos dados por la instrucción, pero también manifiesta la débil consolidación de los significados parciales construidos por los grupos de futuros profesores.

6.2. Complejidad de las Nociones del Análisis de Contenido y Génesis Instrumental

Las dificultades manifestadas por los grupos de futuros profesores al trabajar con los organizadores del currículo del análisis de contenido son, al menos parcialmente, consecuencia de la complejidad involucrada en estas nociones. Desde una perspectiva teórica, y como lo puse de manifiesto en el capítulo 2, estas nociones son complejas. Pero el significado teórico de los organizadores del currículo es sólo un aspecto de su complejidad. Esta complejidad se amplifica cuando se tiene en cuenta sus significados técnico y práctico. Para poner en juego estos significados, los futuros profesores deben desarrollar estrategias que les permitan transformar cada organizador del currículo del análisis de contenido en un instrumento útil desde el punto de vista didáctico. Por un lado, los futuros profesores deben construir las estrategias necesarias para analizar un concepto con el propósito de identificar, organizar y seleccionar sus diversos significados. Por el otro lado, ellos deben también construir las estrategias que les permitan utilizar la información que surge de esos análisis en los otros análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica¹⁴².

¹⁴² Me refiero aquí a las tareas que caractericé en el capítulo 4, donde adapté la noción de génesis instrumental al contexto de la asignatura.

La complejidad de los organizadores del currículo del análisis de contenido se apreció en este estudio en los tres aspectos que acabo de mencionar. La insistencia de algunos grupos de futuros profesores en no considerar lo simbólico como sistema de representación o en proponer lo fenomenológico como sistema de representación es una manifestación de sus dificultades para abordar el significado teórico y técnico de los organizadores del currículo. En la mayoría de los casos, los grupos de futuros profesores superan estas dificultades a lo largo de la asignatura. Sin embargo, haber dado este paso no implicó que ellos pudieran poner en juego el organizador del currículo para efectos de identificar los diversos significados del concepto, como lo he puesto de manifiesto en el caso de la noción de fenomenología. En los casos en los que este análisis se realizó con alguna profundidad, como fue el caso de varios grupos con respecto a la noción de sistema de representación, esto no implicó que estos grupos hubiesen desarrollado las técnicas necesarias para utilizar estas estrategias con propósitos didácticos.

Los tres aspectos que acabo de mencionar se relacionan con los tres procesos que articulan la génesis instrumental (ver capítulo 4): la instrumentalización, como proceso en el que el sujeto transforma y adapta el artefacto a sus necesidades y circunstancias; la instrumentación, como el proceso en el que se generan esquemas de acción para la aplicación de la herramienta en la realización de tareas; y la integración orquestada, en virtud de la cual la herramienta se integra a otros artefactos. Los grupos de futuros profesores lograron, al final de la asignatura, el proceso de instrumentalización para las nociones de estructura conceptual y sistemas de representación, y de manera parcial para la noción de fenomenología. La instrumentación se realizó en buena medida en el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación y de manera muy parcial para la fenomenología. La integración orquestada tuvo lugar de manera parcial para las nociones de estructura conceptual y sistemas de representación.

La evidencia que he presentado en este capítulo me permite matizar algunos aspectos del proceso de génesis instrumental para el caso concreto de los organizadores del currículo del análisis de contenido. Esta evidencia muestra que la transformación de un organizador del currículo en instrumento es un proceso dinámico en dos direcciones. El análisis de la estructura matemática y la construcción del significado de cada uno de los organizadores del currículo interactúan dinámicamente. A medida que se avanza en el análisis, se construyen significados más complejos (del organizador del currículo y del concepto) que, a su vez, permiten nuevos análisis más profundos.

Las características de las transparencias de los grupos dependen por lo tanto de dos factores: el significado que los grupos van construyendo de cada organizador del currículo y la profundidad con la que estudian y analizan (utilizando dicho organizador del currículo como instrumento) la estructura matemática que corresponde a su tema. Un significado inicial del organizador del currículo permite solamente una descripción general de la estructura matemática. Y el esfuerzo por profundizar en el análisis de la estructura matemática contribuye al desarrollo del significado del organizador del currículo. Esta dualidad se constata, por ejemplo, en el proceso de pasar de una variedad de criterios de organización a uno solo de ellos: el significado del organizador del currículo se afianza y la descripción de la estructura matemática mejora. Se aprecia, por tanto, el juego entre los significados

teórico, técnico y práctico del organizador del currículo. El desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores se fundamenta en este juego entre teoría y práctica.

Las reflexiones anteriores me permiten matizar y adaptar el modelo de actividad situada con mediación de instrumento de Vérillon (2000, p. 7). En la Figura 67 he adaptado los nombres de los elementos del modelo al contexto de la asignatura. La evidencia que he presentado en este estudio pone de manifiesto que la relación $G(O) \leftrightarrow C$ es cíclica. Con un significado del organizador del currículo como instrumento ($G \rightarrow O$), el grupo puede analizar (con la mediación de O) el concepto con cierta profundidad ($O \rightarrow C$). Al constatar el resultado de este análisis ($G \rightarrow C$), se reconocen nuevos significados del organizador del currículo como instrumento ($C \rightarrow O$) que transforman la práctica del grupo ($O \rightarrow G$) y les permite avanzar en su comprensión del organizador del currículo ($G \rightarrow O$) y del concepto ($G \rightarrow C$). Ésta es entonces una variación de la idea de mediación epistémica sugerida por Rabardel (2003, p. 668) en virtud de la cual el instrumento contribuye a la comprensión del objeto.

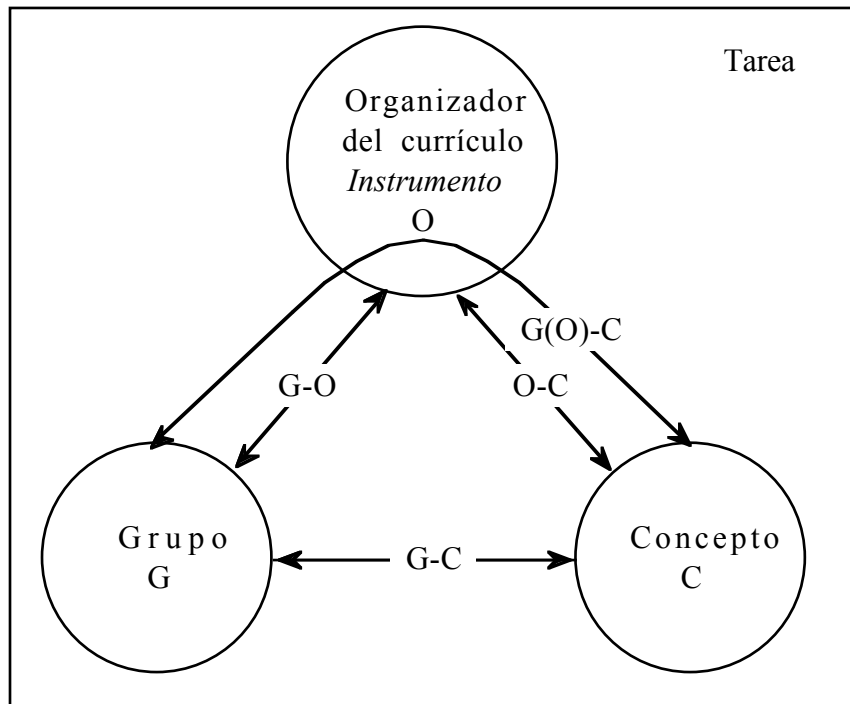


Figura 67. Modelo de actividad situada con mediación de instrumento de Vérillon (2000) adaptado a la asignatura

6.3. Complejidad de las Matemáticas Escolares

Cuando cada grupo escogió su tema, sus miembros supusieron que el tema era sencillo, matemáticamente hablando. Esta visión se transformó a medida que profundizaron en él. Los grupos de futuros profesores ampliaron su visión de lo que era una estructura matemática. Su experiencia como estudiantes de matemáticas y como profesores en clases particulares seguramente había reforzado una visión esencialmente formal de los conceptos matemáticos. Es posible que esta forma de

ver las cosas esté en el centro de las dificultades que ellos tenían para apreciar la complejidad detrás de cada tema. No obstante, en la medida en que la génesis instrumental tuvo lugar y los grupos de futuros profesores progresaron en la identificación y organización de los diversos significados del concepto matemático, ellos se hicieron conscientes de su complejidad. La evidencia que he presentado en este capítulo muestra que la mayoría de los grupos de futuros profesores lograron abordar esta complejidad en sus perspectivas conceptual y representacional. No obstante, en cierta medida, esta complejidad los desbordó a la hora de utilizar los resultados de sus análisis para efectos didácticos. Cuando se esperaba que ellos utilizaran la información recogida para diseñar tareas o actividades de evaluación, los grupos de futuros profesores regresaron a los elementos tradicionales: una visión conceptual que utiliza los sistemas de representación básicos y que no saca provecho del análisis fenomenológico.

6.4. Significado de Referencia y Significados Parciales

El análisis de los significados parciales manifestados por los grupos de futuros profesores en sus transparencias y sus intervenciones en clase me ha llevado a reflexionar sobre el significado de referencia de los organizadores del currículo del análisis de contenido que propuse en el capítulo 2 y sobre su utilización en el diseño y desarrollo de la asignatura tal y como los describí en los capítulos 5 y 6. La instrucción se basó en estos significados de referencia para enfatizar el papel de los sistemas de representación como principal criterio de organización de los mapas conceptuales. No obstante, los significados parciales manifestados por los grupos de futuros profesores y las reflexiones a las que han dado lugar en este capítulo, sugieren que las perspectivas conceptual y fenomenológica también pueden utilizarse como criterios para organizar dichos mapas.

El análisis de las transparencias de los grupos de futuros profesores pone de manifiesto la importancia de los sistemas de representación en la descripción de la estructura matemática. La identificación de los diversos significados de un concepto y, por lo tanto, la complejidad de los mapas conceptuales que los describen dependen en buena medida de las relaciones entre sus elementos. Y una parte importante de estas relaciones se establece a partir de la expresión de estos elementos en sus diversas representaciones. El análisis de las transparencias resalta también la relevancia de los sistemas de representación “básicos” (simbólico, gráfico y numérico). Aunque desde las perspectivas teórica y técnica, todos los sistemas de representación juegan un papel igualmente importante (y complementario) en el análisis de una estructura matemática, es necesario reconocer la tendencia de los grupos de futuros profesores a establecer jerarquías entre ellos, enfatizando particularmente los sistemas de representación simbólico y gráfico.

Algo similar sucedió en el caso de la noción de fenomenología. La instrucción se basó en un significado de referencia con base en el cual se esperaba que los grupos de futuros profesores realizaran el análisis fenomenológico. El análisis de las transparencias me ha permitido identificar pasos intermedios en este procedimiento que, siendo expresión de significados parciales de los grupos de futuros profesores, contribuyen al significado referencia del organizador del currículo.

6.5. Desarrollo del Conocimiento Didáctico y Comunidades de Práctica

La evidencia que he presentado en este capítulo da luces sobre el proceso en virtud del cual los grupos de futuros profesores construyen socialmente los significados de los organizadores del currículo del análisis de contenido con motivo del esquema de trabajo establecido en clase. El análisis sugiere que el desarrollo del conocimiento didáctico es un proceso dinámico y cíclico que puede ser promovido por la instrucción. La asignatura había sido diseñada para inducir a los grupos de futuros profesores a abordar un problema específico y a presentar en clase una propuesta de solución que debía ser comparada y criticada por compañeros y profesores. En este proceso, los futuros profesores pudieron reconocer las deficiencias de su solución inicial, tener en cuenta las críticas recibidas a ésta, investigar en la literatura y discutir nuevas propuestas, hasta llegar a una nueva solución que surgió del acuerdo entre los miembros del grupo.

El análisis ha mostrado que los grupos de futuros profesores negociaron y construyeron el significado de los organizadores del currículo en la medida en que intentaron usarlo en la práctica en un tema específico. Los avances se lograron cuando, habiendo propuesto una solución al problema, los grupos de futuros profesores compararon su solución con las soluciones de los otros grupos y contrastaron su posición con las opiniones, comentarios y críticas de los compañeros y los formadores. En la medida en que el progreso de grupos y futuros profesores no fue uniforme, se dieron comentarios y críticas que generaron, en el discurso de clase, un ambiente de negociación de significados que he puesto en evidencia en varios episodios.

Las reflexiones anteriores resaltan el papel de la comunidad de práctica del aula en el aprendizaje de los grupos de futuros profesores. Éste es, sin duda, un aspecto importante del desarrollo de su conocimiento didáctico en el que no profundizaré en este estudio. Centraré mi atención en la conformación y consolidación de las comunidades de práctica de los grupos cuando trabajan por fuera del aula.

6.6. Puesta en Práctica del Conocimiento Didáctico

Como formadores, nosotros esperábamos que el trabajo final fuese el resultado de un proceso sistemático en el que, a partir de la información recogida y organizada para los organizadores del currículo, cada grupo de futuros profesores propusiera un diseño de unidad didáctica que se encontrase fundamentado en, y se pudiese justificar a partir de esa información básica. Esperábamos, por lo tanto, que se apreciara un cierto grado de coherencia entre la información que cada grupo recogió y organizó en los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción y el diseño que proponía. Igualmente, esperábamos cierto grado de coherencia entre los diversos análisis, de tal manera que la información que cada grupo produjera para un análisis (por ejemplo, el análisis cognitivo) se sustentara a partir de la información recogida en los otros análisis (por ejemplo, el análisis de contenido).

Los resultados del análisis de los trabajos finales sugieren que, para el caso del curso objeto de este estudio, estos propósitos se lograron sólo parcialmente. Los resultados son variados en todos sus aspectos: organizadores del currículo utilizados, apartados del documento en que se utilizaron y producciones de los diferentes grupos. Algunos grupos de futuros profesores presentaron trabajos en los

que se aprecia cierto grado de coherencia entre la información recogida para el análisis de contenido y su uso en los otros análisis y en el diseño de la unidad didáctica. Por lo tanto, el propósito, siendo difícil, no es imposible de lograr. No obstante, en otros trabajos finales se aprecia un grado reducido de coherencia. El análisis sugiere una cierta independencia entre el trabajo sobre los organizadores del currículo del análisis de contenido y el diseño de la unidad didáctica. Esto no significa que el trabajo que algunos grupos de futuros profesores realizaron sobre los organizadores del currículo no les haya sido útil para producir el resto del documento. Varios grupos expresaron explícitamente en el texto esta utilidad.

Desde la perspectiva de los organizadores del currículo del análisis de contenido, se observa que la fenomenología fue utilizada particularmente en las propuestas de las sesiones de clase, pero fue poco utilizada en los otros apartados del documento. Por su parte, la información sobre la estructura conceptual y los sistemas de representación se utilizó especialmente en los apartados de análisis cognitivo, materiales y recursos, objetivos y contenidos. Esto sugiere que la información fue útil, pero solamente en algunos aspectos del proceso y que los grupos de futuros profesores no lograron abordar necesariamente el trabajo con una visión global en la que se manifestaran todas las relaciones descritas en el marco conceptual. En términos de la génesis instrumental, estos resultados sugieren que varios grupos de futuros profesores no pudieron construir y desarrollar las técnicas (razonamientos y procedimientos) que les permitieran apreciar la importancia de la información producida en el análisis de contenido y les indujeran a utilizarla en los otros análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica.

En este proyecto de investigación he conceptualizado la dualidad entre teoría y práctica desde la perspectiva de la génesis instrumental. Considero que esta perspectiva se adapta adecuadamente a los objetivos y a las características de esta investigación. Aunque la asignatura no incluye un *practicum* en el que los futuros profesores interactúen con los escolares en la escuela, sí consideramos que los grupos de futuros profesores viven una experiencia práctica. Esta experiencia se refiere a la realización de una planificación, como competencia fundamental del profesor de matemáticas (Gómez, 2006c). Por lo tanto, los resultados de este estudio se pueden interpretar desde esta perspectiva e ilustran la complejidad del proceso en virtud del cual se espera que los futuros profesores pongan en práctica sus conocimientos teóricos y técnicos. Es evidente que la complejidad de este proceso tiene que ver con la complejidad del conocimiento didáctico que he puesto en evidencia en este capítulo. No obstante, también he mostrado que la puesta en práctica de esos conocimientos requiere del desarrollo de técnicas (razonamientos y procedimientos) que permitan a los grupos de futuros profesores transformar los organizadores del currículo del análisis de contenido (y la información que surge de ellos) en instrumentos. Algunos autores se han referido a estas técnicas, desde otras perspectivas. Por ejemplo, Ebby (2000, p. 69) sugiere la importancia de desarrollar “hábitos mentales” para la práctica, hábitos que Ensor (2001, p. 317) conceptualiza en lo que ella llama las “reglas de reconocimiento y realización”. El desarrollo de estas técnicas no es evidente. Esto puede explicar las dificultades de los futuros profesores para implementar en la práctica sus conocimientos (Brown y Borko, 1992). Los resultados que he obtenido en el estudio de los trabajos fina-

les sugieren que, al menos en el caso del curso en el que se realizó, la instrucción no tuvo éxito en promover adecuadamente el desarrollo de dichas técnicas.

El análisis de los trabajos finales presenta evidencia para confirmar una conjetura que compartimos la mayoría de los formadores de profesores de matemáticas interesados en el desarrollo de la competencia de planificación: el diseño sistemático y fundamentado de una unidad didáctica es un proceso complejo. Los resultados que he presentado en este estudio (a) sugieren algunas de las deficiencias de los diseños curriculares propuestos por los grupos de futuros profesores; (b) resaltan algunas de las dificultades que ellos enfrentaron; y (c) aluden a la necesidad de que la instrucción haga un mayor énfasis en la importancia de que este diseño se fundamente y se justifique a partir de la información que se recoge para los organizadores del currículo.

UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA

En los dos capítulos anteriores he abordado, desde diferentes perspectivas, la última de las cuatro preguntas que formulé al comienzo de este documento:

¿Qué caracteriza los procesos de aprendizaje de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura?

Hasta ahora, he mostrado que el aprendizaje de los grupos de futuros profesores se puede caracterizar en términos de unos estados de desarrollo del conocimiento didáctico y he descrito en detalle esos estados. Los resultados de estos estudios surgieron de la codificación y análisis de las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores para hacer las presentaciones en clase, de los trabajos finales de cada uno de los grupos, de las intervenciones de algunos futuros profesores en las discusiones en clase y de entrevistas con dos grupos de futuros profesores. Las transparencias utilizadas por un grupo para hacer la presentación sobre un tema son, en general, el fruto de varias horas de trabajo y discusión de sus integrantes. Los grupos presentan sus trabajos como un producto terminado en el que no se aprecia el proceso que le dio lugar. Pero, ¿cómo es ese proceso? ¿Cómo tiene lugar el aprendizaje de un grupo de futuros profesores cuando, al trabajar fuera del aula, prepara la presentación que después realizará ante sus compañeros? El análisis de las transparencias de un grupo de futuros profesores ilustra de manera parcial su aprendizaje porque hay muchos aspectos de dicho aprendizaje que no se pueden apreciar en sus producciones. El estudio del conocimiento didáctico es complejo porque es un constructo interno que no se puede observar directamente. Cuando se observan las actuaciones de los futuros profesores, no podemos saber cómo se produjeron esas actuaciones, ni qué se quedó en las discusiones y negociaciones del grupo que no se expresó en su actuación (Baxter y Lederman, 2001). Por lo tanto, hay una problemática que aún queda abierta en este proyecto de investigación: la exploración del proceso en virtud del cual cada grupo de futuros

profesores negocia significados y avanza en su proceso de aprendizaje, cuando trabaja por fuera el aula preparando sus presentaciones.

En este capítulo, abordo esta cuestión al presentar los resultados del análisis detallado de las grabaciones de audio de las reuniones de trabajo por fuera del aula de uno de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. Se trató del grupo que trabajó sobre la función cuadrática. Me fijé dos propósitos con este estudio:

1. describir la evolución del conocimiento didáctico de este grupo de futuros profesores y
2. utilizar esa información para explicar algunos de los resultados obtenidos en los otros análisis.

Mi interés continuó siendo el trabajo del grupo, como “objeto” de estudio. Por lo tanto, me ocupe específicamente de indagar y analizar los procesos de negociación de significados dentro del grupo. Me enfrenté entonces a un problema esencialmente conceptual: ¿cómo describir el aprendizaje del grupo? Para abordar este problema, y teniendo en cuenta las reflexiones y argumentos que presenté en el capítulo 4, fundamenté conceptualmente el estudio en la teoría social del aprendizaje de Wenger (1998). Seleccioné, interpreté y adapté los aspectos más relevantes de esta teoría a las características y los propósitos del estudio. Basándome en esta adaptación de la teoría, diseñé unos instrumentos que me permitieron codificar, analizar e interpretar las transcripciones de las grabaciones de audio de las reuniones del grupo. En un proceso de síntesis, reduje la complejidad de los 950.5 minutos de grabaciones a un conjunto de 32 cuestiones que caracterizan el proceso de aprendizaje del grupo. A partir de un proceso de análisis de la codificación, caractericé cada una de estas cuestiones e identifiqué los episodios que mejor las representaban.

Los resultados de estos procedimientos metodológicos ponen en evidencia que el grupo función cuadrática constituyó una comunidad de práctica caracterizada por procesos sistemáticos de negociación de significados y aprendizaje interdependiente. Algunos de los factores que influyeron de manera más sobresaliente en el desarrollo de esta comunidad de práctica fueron la experiencia docente y el compromiso de los participantes, los comentarios escritos del formador a las transparencias del grupo y la emergencia y el papel de un líder dentro del grupo. No obstante, el principal interés de los resultados de este estudio está en el *detalle*. Cada una de las 32 cuestiones con las que caracterizo sus procesos de negociación de significado se constituye en un foco que ilumina una o más facetas de la complejidad detrás de los procesos de aprendizaje de un grupo de futuros profesores. Por esta razón, éste es el capítulo más extenso de este documento. Aunque he hecho un esfuerzo importante de síntesis, mi contribución radica en el detalle con el que esclarezco unos procesos sociales que permanecen frecuentemente ocultos en la investigación sobre formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

También considero que, con este estudio, he hecho contribuciones a la investigación en el área tanto de tipo conceptual, como metodológico. He dado un significado específico a la teoría social del aprendizaje de Wenger en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Y he diseñado y

puesto a prueba unos instrumentos de codificación y análisis con los que es posible abordar, con los lentes de esta teoría, la complejidad de los procesos de negociación de significado de un grupo de futuros profesores.

A continuación, ubico este estudio en el contexto de la literatura sobre formación de profesores desde un punto de vista sociocultural y destaco los aspectos de la teoría social del aprendizaje de Wenger (1998) que pondré en juego para realizar la indagación. Después, describo los procesos de codificación y análisis que dieron lugar a los resultados. El cuerpo del capítulo lo ocupa la caracterización y fundamentación empírica de las 32 cuestiones que constituyen dichos resultados (ver Tabla 39, más adelante). Al final del capítulo, me baso en estos resultados para caracterizar el grupo función cuadrática como comunidad de práctica y reflexionar sobre algunas de las implicaciones del estudio.

1. COMUNIDADES DE PRÁCTICA Y APRENDIZAJE DE LOS FUTUROS PROFESORES

El diseño y el desarrollo de la asignatura promovieron el trabajo colaborativo entre los futuros profesores. La literatura en formación de profesores indica que este tipo de trabajo fomenta el aprendizaje¹⁴³. Yo también he presentado evidencia a este respecto en los dos capítulos anteriores. Pero, ¿por qué este esquema de trabajo fomenta el aprendizaje? ¿Cómo emerge el aprendizaje con motivo del trabajo que los grupos de futuros profesores realizan por fuera del aula? Éstas son preguntas que los investigadores en formación de profesores están comenzando a formular: “diversos investigadores en educación matemática están creando contextos para promover el aprendizaje de los profesores y describir lo que ellos aprenden en términos sociales, [pero] se ha hecho poco para explicar cómo estos contextos promueven dicho aprendizaje” (Graven y Lerman, 2003, p. 189). Sabemos que el trabajo en grupo y la colaboración fomenta el aprendizaje, pero no se sabemos por qué, ni cómo (Little, 2002, p. 917).

En este capítulo pretendo mostrar que, al menos en el caso del grupo objeto de estudio, el aprendizaje emergió por razones que van más allá del hecho de que el grupo se constituyó en un equipo y trabajó de manera colaborativa. Mostraré que, en este caso, el grupo logró conformar y consolidar paulatinamente una comunidad de práctica. Algunos investigadores han abordado el aprendizaje de los futuros profesores desde esta perspectiva (ver, por ejemplo, el estudio de Graven y Arbaugh, 2003) y sugieren que los programas de formación que se fundamentan en ella promueven el aprendizaje (Kilpatrick, 2003b, p. 7; Lieberman, 2000; Little, 2002, p. 917). El aprendizaje emerge porque los profesores pueden compartir ideas y abordar retos (Butler, Lauscher, Jarvis-Selinger y Beckingham, 2004, p. 438), pueden explorar conjuntamente un contenido matemático concreto (Lachance y Confrey, 2003, p. 38), construir redes, compartir conocimiento y utilizar instrumentos conceptuales y nuevos lenguajes para resolver problemas profesionales

¹⁴³ La literatura sobre esta cuestión es reciente, pero comienza a ser extensa (e.g., Arbaugh, 2003; Beck y Kosnik, 2001; Kazemi y Franke, 2004; Kluth y Straut, 2003; Levin y Rock, 2003; Peter-Koop et al., 2003; Taconis, van der Plas y van der Sanden, 2004; Veenman, van Benthum, Bootsma, van Dieren y van der Kemp, 2002).

(Llinares y Krainer, 2006, p. 438), y porque la discusión entre pares facilita el desarrollo profesoral (Manouchehri, 2002). De esta forma, son cada vez más numerosos los programas de formación de profesores que se basan en esta visión sociocultural del aprendizaje (e.g., Kazemi y Franke, 2004; Lachance y Confrey, 2003; McGraw, Arbaugh, Lynch y Brown, 2003; Pallinscar, Magnusson, Marano y Ford, 1998; Sim, 2006; Sumsion y Patterson, 2004).

Pero, como lo enfatiqué en los capítulos 3, 4, 5 y 6, es conveniente distinguir las diferentes funciones de las teorías de aprendizaje en la formación de profesores. En esos capítulos describí cómo el diseño y el desarrollo de la asignatura se fundamentaron en visiones sociales del aprendizaje de los futuros profesores. En este capítulo, mi interés es de carácter investigativo. Abordaré la exploración del proceso de aprendizaje de un grupo de futuros profesores basándome en una visión sociocultural del aprendizaje, como lo han venido sugiriendo diversos investigadores (e.g., Borko, 2004; Lerman, 2001; Llinares, 1998b; Llinares y Krainer, 2006, p. 439; Peressini et al., 2004). Como lo argumenté en el capítulo 4, esta aproximación permite atender a la complejidad del fenómeno que se estudia (Adler, 1998; Lerman, 2001, p. 45) y permite explorar y caracterizar aspectos del proceso de cambio del profesor que las perspectivas tradicionales psicológicas no permiten, puesto que estas últimas tienden a estudiar el proceso de desarrollo de profesores individuales en contextos altamente estructurados (Stein y Brown, 1997, p. 155). En su revisión de los trabajos presentados en el contexto del PME, Llinares y Krainer (2006) mencionan al menos seis trabajos de investigación en formación de profesores de matemáticas que se basan en una visión sociocultural del aprendizaje (p. 444). Algo similar se aprecia en el conjunto de trabajos presentados al estudio ICMI 15 (Gómez, 2006b).

La aproximación que desarrollé en este proyecto de investigación con respecto al aprendizaje me llevó a tomar como unidad de análisis los grupos de futuros profesores. Hablo, por lo tanto, del aprendizaje de los grupos y no de los individuos. Siguiendo a Stein (1997), “en cambio de centrar la atención en los procesos de aprendizaje de profesores individuales que viven una transformación, el aprendizaje de los profesores se puede conceptualizar como un proceso de ‘transformación de la participación’ en las prácticas de una comunidad” (p. 155). Por lo tanto, ésta es una visión que centra su atención en un punto medio entre el aprendizaje del profesor individual y el aprendizaje de la comunidad de práctica del aula. “Los diferentes grupos desarrollan frecuentemente perspectivas de consenso que no coinciden necesariamente con el consenso que se desarrolla en la comunidad global de la clase... y el pensamiento colectivo de un grupo no es necesariamente compartido por sus miembros como individuos” (Lesh y Yoon, 2004, p. 208).

2. TEORÍA SOCIAL DEL APRENDIZAJE DE WENGER

En el capítulo 4, presenté las principales nociones que configuran la teoría social del aprendizaje de Wenger. Allí también justifiqué la selección de esta teoría como un marco conceptual apropiado para la investigación del aprendizaje en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En este apartado, subrayo aquellos aspectos de esta teoría que son relevantes para el estudio objeto de este capítulo.

La teoría social del aprendizaje de Wenger se basa en cuatro nociones: significado, práctica, comunidad e identidad. Él introduce el *significado* como una manera de hablar acerca de nuestra habilidad (cambiante) —tanto individual, como colectiva— para experimentar nuestra vida y el mundo de manera significativa. La *negociación de significado* emerge de la interacción entre dos procesos: la *participación*, como el proceso en virtud del cual establecemos relaciones con los demás, definimos nuestra manera de pertenecer a aquellas comunidades en las que nos comprometemos con sus empresas, y desarrollamos nuestras identidades; y la *materialización*, como el proceso de darle forma a nuestra experiencia al producir objetos que la materializan. Cada comunidad produce abstracciones, herramientas, símbolos, relatos, términos y conceptos que congelan aspectos de su práctica. La noción de *práctica* se presenta como una manera de hablar acerca de los recursos históricos y sociales compartidos, los esquemas y las perspectivas que apoyan el compromiso mutuo en la acción. La práctica es la fuente de coherencia de las comunidades y el proceso en virtud del cual experimentamos significativamente el mundo. No existe en abstracto; existe porque las personas se comprometen con acciones cuyo significado debe negociarse. La idea de *comunidad de práctica* es la unidad de análisis más pequeña en la que se puede incluir la negociación de significado como mecanismo de aprendizaje. Es una manera de hablar de aquellas configuraciones sociales en las que nuestras empresas se definen como valiosas y nuestra participación se reconoce como competente. La idea de comunidad de práctica se articula alrededor de tres nociones:

- ◆ el *compromiso mutuo*, como el compromiso con acciones cuyo significado se negocia y que genera relaciones entre personas;
- ◆ una *empresa conjunta*, que se negocia colectiva y permanentemente, que genera una responsabilidad mutua y que determina lo que se valora, se discute y se muestra; y
- ◆ un *repertorio compartido*, que incluye los recursos para la negociación de significados, el discurso que permite hacer afirmaciones significativas acerca del mundo y los estilos para expresar formas de membresía e identidad como miembros.

El aprendizaje en la práctica implica el compromiso mutuo en una empresa conjunta con un repertorio compartido. Esto es, el aprendizaje emerge en la medida en que (a) evolucionan diferentes formas de compromiso mutuo; (b) se comprende y se refina la empresa; y (c) se desarrolla el repertorio compartido, el estilo y el discurso.

La evolución de diferentes formas de compromiso mutuo se caracteriza por cómo influye el entorno (qué ayuda y qué molesta), cómo se definen las identidades, cómo se desarrollan las relaciones, y cómo se genera, negocia y materializa el significado. El proceso de comprender y afinar la empresa se caracteriza por el papel de las condiciones externas, las características del discurso (qué se discute, se muestra y se valora) y la definición de la empresa y las responsabilidades. Y el desarrollo del repertorio compartido se caracteriza por los estilos de expresión y las rutinas de trabajo y los recursos de negociación de significado. Profundizaré en la caracterización de cada uno de estos procesos más adelante, cuando aborde el análisis de la información que corresponde a cada una de estas dimensiones.

3. DE UNA TEORÍA A UNOS INSTRUMENTOS DE CODIFICACIÓN, ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

En este apartado, describo cómo diseñé e implementé un esquema de codificación y análisis de las transcripciones. Partí de una primera definición de mi problema de investigación, habiendo recogido una información para abordarlo y habiendo seleccionado una teoría para fundamentar la exploración. E impuse unas condiciones al diseño e implementación de los instrumentos de codificación y análisis. Estos instrumentos debían asegurar, por un lado, la relevancia de las cuestiones que surgieran sobre el aprendizaje del grupo de futuros profesores y, por el otro, la completitud de la exploración y análisis de la información. Además, los instrumentos debían permitirme centrar la interpretación en la teoría seleccionada y “producir afirmaciones bien fundadas sobre la práctica social y el aprendizaje” (Little, 2002, p. 920). A continuación, describo el proceso que realicé para dar respuesta a las preguntas y satisfacer los requisitos anteriores. En primera instancia, reseño el procedimiento en virtud del cual construí unas categorías de análisis basadas en la teoría. Después, presento el sistema de códigos que desarrollé y describo el proceso de codificación de las transcripciones, proceso que dio lugar a la identificación de las 32 cuestiones que caracterizan el aprendizaje del grupo de futuros profesores. Finalmente, explico el proceso de análisis de la codificación que me permitió caracterizar cada una de estas cuestiones y fundamentarlas empíricamente.

3.1. De la Teoría a unas Categorías de Análisis

En la primera fase del proceso, identifiqué y estructuré unas categorías de análisis. Estas categorías serían el enlace entre las nociones centrales de la teoría y los códigos que conformarían el instrumento para explorar, seleccionar y articular la información. Las categorías de análisis surgieron de una lectura detallada e intencionada de la teoría. Habiendo revisado, en una primera instancia, las transcripciones de las grabaciones de audio de las reuniones del grupo de futuros profesores, interpreté y seleccioné nociones y aspectos de la teoría en términos de esa información. De esta manera, fui produciendo diversas versiones de la lista de categorías hasta que consideré que dicha lista era coherente y tenía significado con respecto a la información.

Recordemos que, de acuerdo con la teoría social del aprendizaje de Wenger, el aprendizaje emerge en la medida en que (a) evolucionan diferentes formas de compromiso mutuo; (b) se comprende y se refina la empresa; y (c) se desarrolla el repertorio compartido, el estilo y el discurso. Éstas son las tres dimensiones que articulan las categorías de análisis que caractericé en el último párrafo del apartado anterior y que presento en la Figura 68.

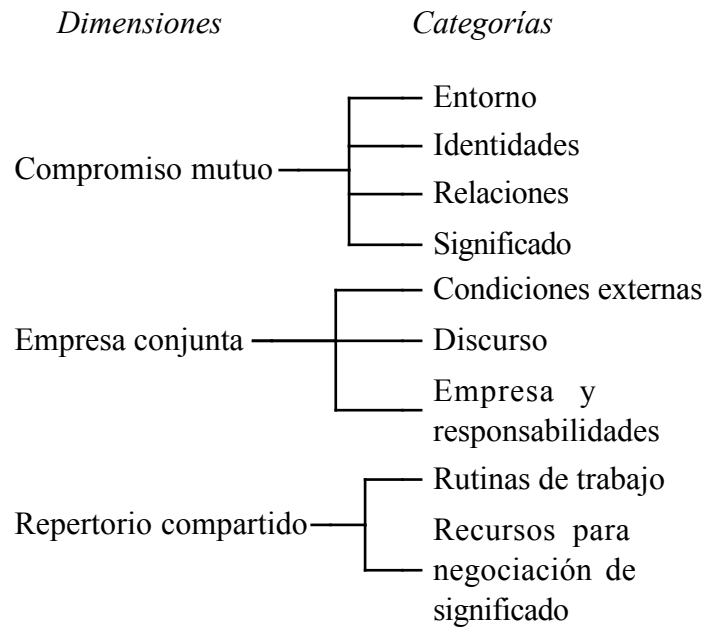


Figura 68. Categorías de análisis

Teniendo en cuenta el significado de cada una de estas categorías dentro de la teoría, identifiqué una serie de preguntas que las caracterizaban y que se adaptaban al fenómeno que quería estudiar y a la información que tenía disponible. Identifiqué y articulé estas preguntas en un proceso cíclico en el que, en la medida que codificaba la información con una versión de las preguntas, corregía, eliminaba y agregaba nuevas preguntas a la lista. En el caso, por ejemplo, de la categoría “significado”, correspondiente a la dimensión compromiso mutuo, formulé las siguientes cinco preguntas:

1. ¿Cómo y qué significados se descubren?
2. ¿Qué dificultades de significado aparecen?
3. ¿Qué eventos de materialización suceden?
4. ¿Qué propuestas de significado se hacen y cómo se hacen?
5. ¿Qué propuestas de significado se adoptan y cómo se adoptan?

Como se aprecia, las preguntas están formuladas en términos de las actuaciones del grupo de futuros profesores objeto de estudio. Estas preguntas estructuran los códigos que presentaré más adelante. En la Figura 69 presento las categorías y las preguntas correspondientes a las tres dimensiones.

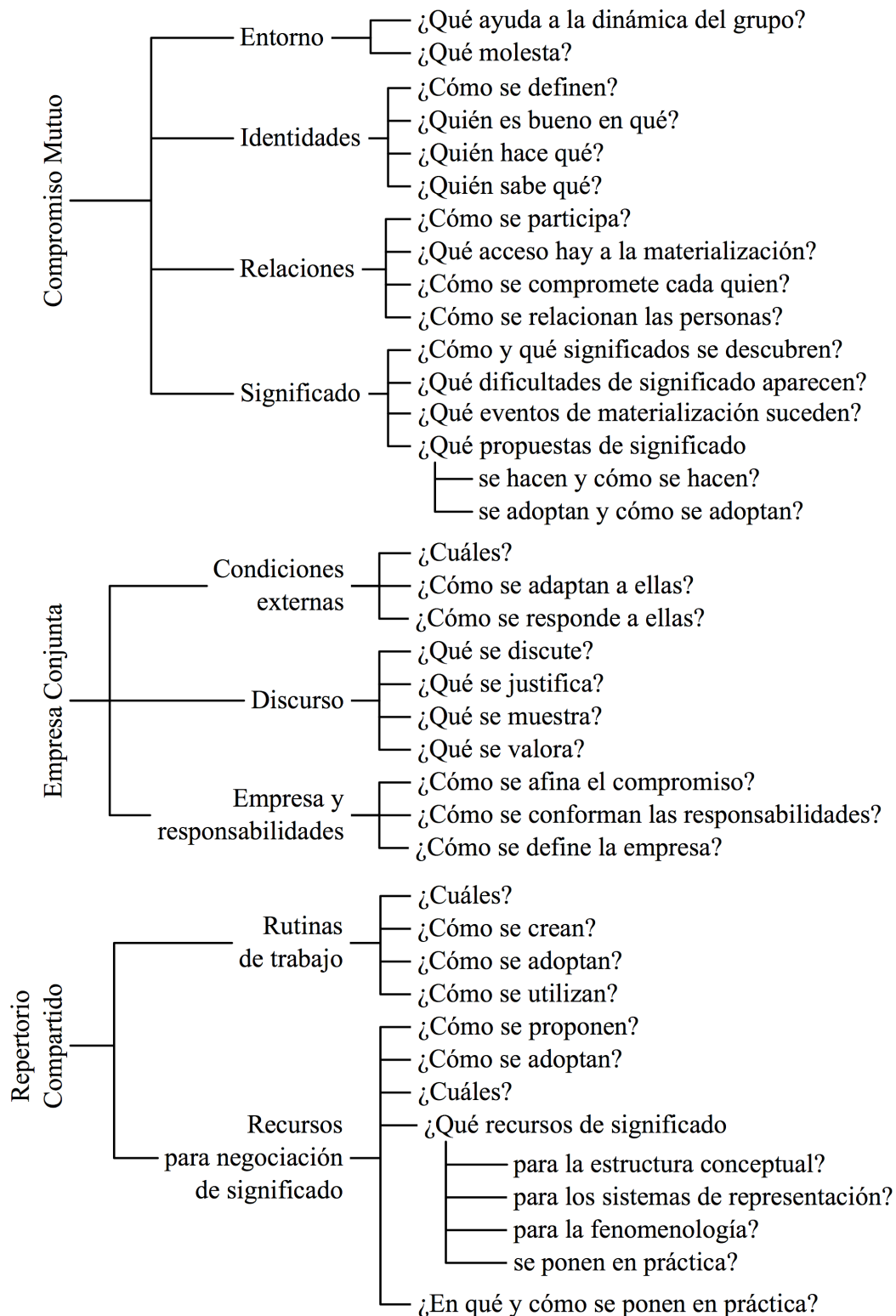


Figura 69. Categorías de análisis y preguntas

3.2. Nueva Definición del Problema

En los párrafos anteriores he caracterizado el aprendizaje de los grupos de futuros profesores como práctica social. Para ello, me he basado en la teoría social del

aprendizaje de Wenger (1998) y he identificado las categorías de análisis que surgen de ella. Adicionalmente, he caracterizado estas categorías al formular unas preguntas que se adaptan al fenómeno objeto de estudio. Este análisis conceptual me permite ahora definir el problema de investigación de este estudio. Se trata de explorar, describir y caracterizar el proceso de aprendizaje como práctica social del grupo función cuadrática de acuerdo con las categorías de análisis y las preguntas propuestas. En otras palabras, puedo concretar el problema de investigación en tres preguntas relacionadas con el aprendizaje del grupo función cuadrática como comunidad de práctica:

- ◆ ¿cómo evolucionan las diferentes formas de compromiso mutuo?;
- ◆ ¿cómo se comprende y se refina la empresa?; y
- ◆ ¿cómo se desarrolla el repertorio compartido, el estilo y el discurso?

3.3. 94 Códigos

Mi fuente de información fueron las grabaciones de una parte de las sesiones de trabajo del grupo. Las sesiones grabadas se distribuyeron a lo largo del periodo en el que el grupo trabajó el análisis didáctico e incluyeron las sesiones de preparación del documento previo y de preparación del documento y la presentación final. Estas grabaciones de audio fueron transcritas. Desde la perspectiva metodológica, mi problema consistía en diseñar y llevar a la práctica unos instrumentos de codificación y análisis de estas transcripciones que me permitieran abordar las preguntas de investigación. Estos instrumentos debían estar basados en el análisis conceptual que propuse anteriormente.

Desarrollé entonces un primer sistema de códigos partiendo de las preguntas que enumeré en la sección anterior. Este sistema de códigos evolucionó en la medida en la que fui codificando las transcripciones y percibía la necesidad de incluir nuevos códigos. Por ejemplo, después de codificar las transcripciones de las dos primeras sesiones, observé que era necesario introducir un código en el aspecto "condiciones externas" de la categoría empresa conjunta. Este código tenía como propósito identificar aquellos episodios en los que se hacía referencia a la formulación de la tarea como una condición externa que afectaba el trabajo del grupo. En este proceso de codificación y revisión de los códigos, introduje 18 nuevos códigos. La lista final contiene 94 códigos. Resulta demasiado dispendioso describir aquí todos y cada uno de ellos. Los presento en el Anexo N. En la Tabla 38 presento algunos ejemplos, con su significado. Para ello, identifiqué las características de los episodios (término que explicaré más adelante) que fueron registrados con el código correspondiente.

Código	Significado
Experiencia docente	Al menos un participante hizo referencia a su experiencia como profesor
¿Quién es bueno en qué?	El grupo identifica a un participante como competente para una tarea o ese participante se propone como tal
Dirección de discusión	Uno de los participantes organiza o dirige la discusión del grupo hacia una cuestión particular
Confusión de significado	Evidencia de confusión de uno o más participantes con respecto al significado de una cuestión
Eventos de materialización	Evidencia de materialización de un significado por parte del grupo
Comentarios a transparencias	Se hace referencia a los comentarios a las transparencias
¿Qué se valora?	Evidencia de aspectos del trabajo o la discusión que el grupo valora
¿Cómo se conforman responsabilidades?	Se definen y conforman responsabilidades dentro del grupo
¿Qué rutinas de trabajo?	Se establecen rutinas de trabajo dentro del grupo
Complejidad de la estructura conceptual	Se hace referencia a la complejidad de la estructura conceptual
Variedad de fenómenos	La interacción se refiere a los fenómenos, desde el punto de vista de su variedad
Conexiones	Se hace referencia a las conexiones entre sistemas de representación
Puesta en práctica de la estructura conceptual	Se pone en práctica la información recogida y organizada para la estructura conceptual en otros aspecto del análisis didáctico.

Tabla 38. Ejemplos de códigos

3.4. Proceso de Codificación

El proceso de codificación de las transcripciones consistió en la identificación, registro y caracterización de episodios. Un episodio es una porción de la transcripción, de longitud variable, que contiene afirmaciones de uno de los participantes o intercambio de afirmaciones entre varios miembros del grupo. Su coherencia se centra en el hecho de que gira en torno una idea o un mensaje. Por lo tanto, puede darse el caso de un episodio que, refiriéndose a una idea específica, forma parte de otro episodio, de mayor longitud, que se refiere a una idea más general. Un episodio puede ser registrado con más de un código.

Como resultado de la codificación, produjo una base de datos en la que cada registro corresponde a un episodio y a un código asignado a ese episodio. Cada registro de la base de datos contenía la siguiente información: (a) código asignado, (b) texto del episodio, (c) comentario asignado al episodio, (d) fichero de la trans-

cripción a la que pertenece el episodio y (e) ubicación del episodio dentro de la transcripción. El comentario de un episodio contiene una descripción resumida de lo sucedido en el mismo. Realicé el proceso de codificación de la transcripción de cada sesión siguiendo el siguiente procedimiento:

1. identificación de los episodios en la transcripción,
2. asignación de códigos y comentario a cada episodio,
3. revisión cíclica de los pasos anteriores,
4. registro de apuntes a la codificación,
5. registro de episodios, códigos y comentarios en la base de datos.

A medida que codificaba las transcripciones y registraba la codificación en la base de datos, produje una serie de apuntes con mi interpretación de las interacciones y la identificación de sus aspectos más relevantes. Éstos son los apuntes a la codificación que se mencionan en el punto 4 de la lista anterior. El siguiente es un ejemplo de un episodio que codifiqué con los códigos correspondientes a relaciones personales, líder y participación complementaria. En este episodio, uno de los participantes cuya actuación representa una participación complementaria¹⁴⁴, se refiere a la actitud autoritaria del líder. El comentario que asigné a este episodio fue el siguiente: “De nuevo hay tensión: critican explícitamente al líder. Lo sabe todo porque da clase” [100,73773,74154]¹⁴⁵:

P1: Es que es especialista ahora. Como él da clase, pues ya se cree que todo el monte es orégano.

En la Figura 70 muestro un ejemplo de un folio de las transcripciones con la respectiva codificación.

¹⁴⁴ Definiré este término más adelante.

¹⁴⁵ En lo que sigue, identifico un episodio dentro las transcripciones con una tripla [a,b,c], donde a es el número que identifica la cinta en la que está grabada esa parte de la sesión y b y c identifican (en número de caracteres) el comienzo y el final del episodio dentro del texto de la transcripción codificada. Así, el episodio [066,27077,27458] se encuentra entre los caracteres 27077 y 27458 de la transcripción codificada de la cinta 66.

P4: () tenemos que trabajar la forma de expresión ().

P1: Pues ya está. Pues entonces, el problema... Nos tenemos que centrar en la forma de expresión de la función de segundo grado.

P4: Sí.

P1: Ahora, cabría pensar: ¿Hay alguna forma de expresarse para que el niño no meta la pata?

P4: ().

P2: (). Verás tú cómo no mete la pata ni de coña ().

P3: Cuatrocientos ejercicios.

P1: Para mañana.

P4: ().

P1: Bueno, venga.

P4: Yo sigo pensando que... (Risas).

P3: Si tú () estás razonando.

P1: ¿Pero qué pensar, tío?

P2: Tú estás durmiendo.

P4: Es que dentro de la forma multiplicativa, está también la (), la de x^2 .

P1: Pero si es que aquí la tenemos (Hablan varios a la vez). Mírala.

P4: Ya lo sé. Pero es que hay dos ().

P3: Pero bueno, es que dentro de la misma forma multiplicativa, está, si tienen dos raíces, es distinto que si tienen sólo una raíz; una doble. ¿Es o no es?

PX: Sí, sí.

P4: Se hace... Se agranda un poco eso y ya está.

P2: pero, ¿qué vais a () más, en la estructura conceptual aquí?

P1: ¡Ah!, otro error que me estoy acordando ahora, de la forma multiplicativa. $(x-2)(x-3)$, por ejemplo, o por $(x+3)=0$. Las raíces son. Varias Personas: Eso es de los ceros.

P1: ¿Eh? Varias Personas: Eso es de los ceros.

P1: Bueno, también. Entonces sería... Una raíz sería $x=2$, y la otra: $x=-3$, y cuando aquí en vez de un 0 hay un 2, pues me cogen y me

Desc. Sig/EE
La reflexión anterior lo ubica dentro de la "forma de expresión" de la EE

400 ejercicios para que el niño no meta la pata.

Pregunta, Ay D, Enseñanza
¿Cómo hacer para que el niño no meta la pata?

Prop Hacia, Enseñanza, Nel Per.
P3 propone, medio en broma, que se le escriba para el manejo de los ceros.

Nel Per, Lidar, Raff Conpl.
P2, Lidar, le dice a otros que está durmiendo

Prog. Sig/EE = sig/EE / Prop Hacia
En la forma multiplicativa hay más formas que la de la diferencia de cuadrados
Raf. Conpl.

de dar vueltas con otros posibles

Prop Hacia, Conpl. Sig, Ey D, Exp DEE.
P1 propone otra error, pero P3 lo acepta como error, y refuta a P1 sin argumentos de peso.

Figura 70. Ejemplo de la codificación de la transcripción

Al final del proceso de codificación, resultaron 7.412 registros en la base de datos. Estos registros corresponden a 2.606 episodios, dado que un mismo episodio puede ser registrado con más de un código y cada pareja de episodio y código corresponde a un registro de la base de datos. La Figura 71 presenta esquemáticamente el proceso de codificación que acabo de describir.

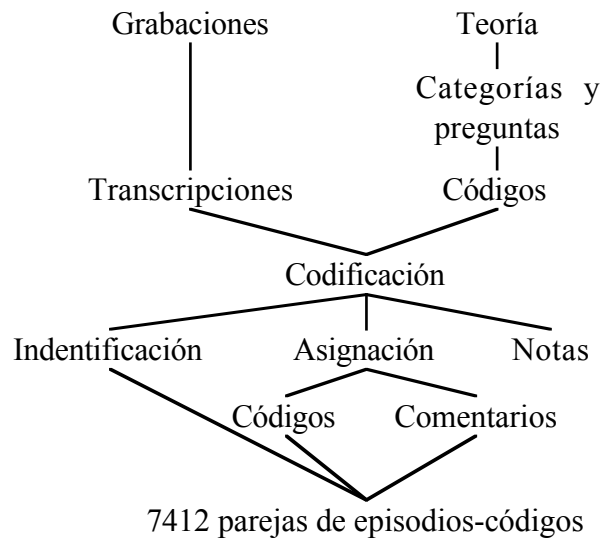


Figura 71. Proceso de codificación

Diseñé varios programas de ordenador dentro de la base datos que me permitieron producir listados y resúmenes de los comentarios a los episodios organizados por diversos criterios. Con estos listados y los apuntes que realicé durante la codificación, produje un resumen del contenido de la transcripción de cada cinta de grabación. Con estos resúmenes construí una nueva base de datos en la que cada registro corresponde a la transcripción de una cinta. Cada registro contenía los siguientes campos: (a) título, (b) descripción general del contenido de la transcripción, (c) temas tratados y (d) cuestiones más relevantes identificadas en la transcripción.

La noción de *cuestión* es central en el análisis de las transcripciones que presentaré en la siguiente sección. Como se desprende de la descripción anterior, las “cuestiones” fueron mi manera de caracterizar el contenido de las transcripciones. Para identificar las cuestiones relevantes dentro de la información contenida en las transcripciones tuve que realizar un proceso de síntesis de las parejas de episodios-códigos. Esta síntesis tuvo en cuenta la teoría (a través de las categorías y las preguntas) y la información adicional que registré durante la codificación (comentarios y notas). La Figura 72 representa esquemáticamente este procedimiento.

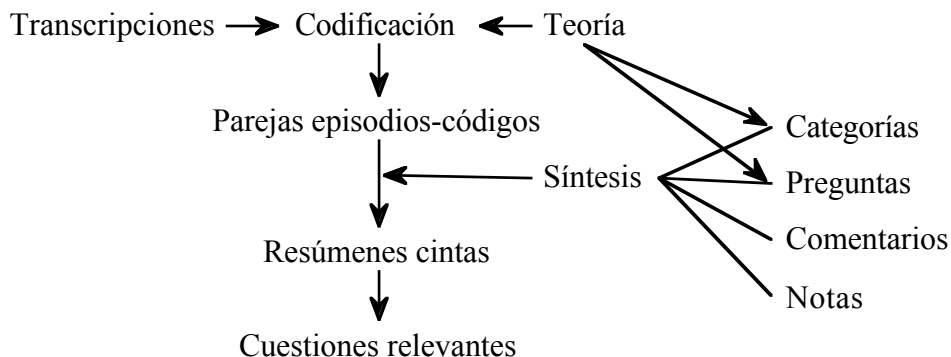


Figura 72. Identificación de las cuestiones relevantes

La Figura 73 presenta, a manera de ejemplo, las cuestiones que aparecen para la categoría compromiso mutuo en el registro de la base de datos correspondiente a la transcripción de la primera hora de la sesión en la que se preparó el documento y la presentación final.

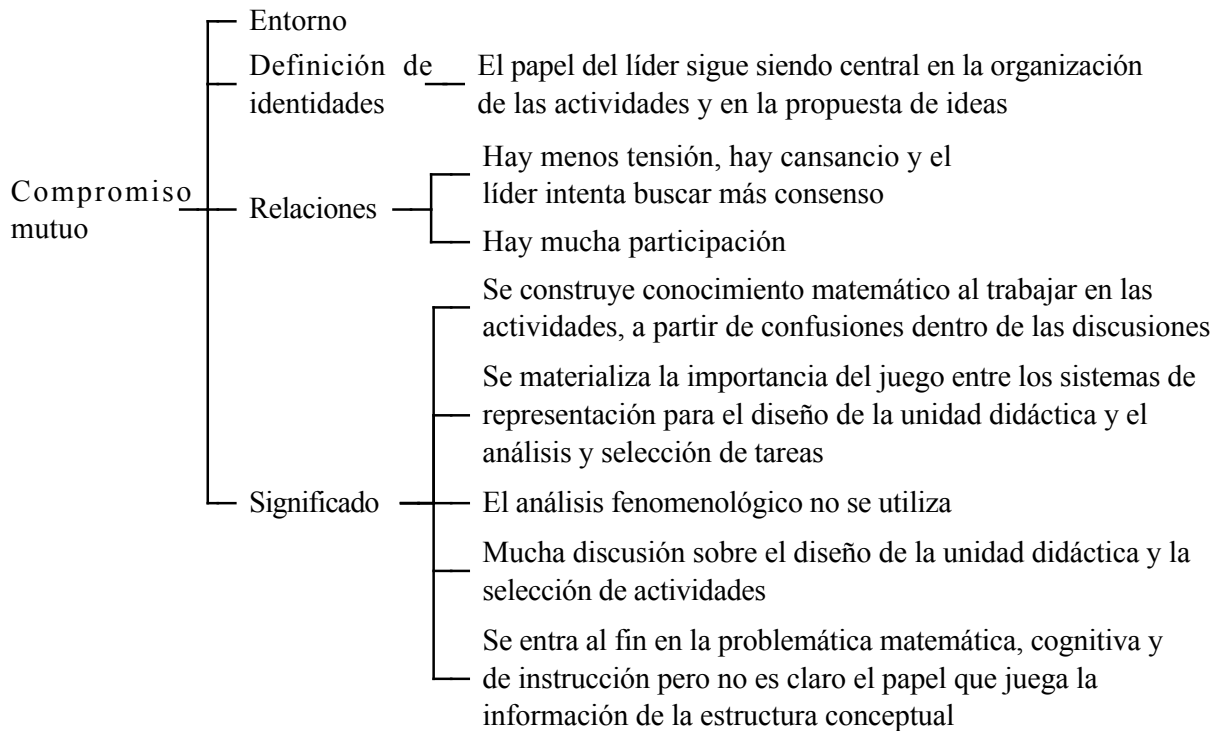


Figura 73. Ejemplo de cuestiones identificadas en la transcripción de una cinta

3.5. Análisis de la Codificación

El análisis de los resúmenes de la codificación de cada cinta me permitió identificar una serie de cuestiones que parecían relevantes para el estudio. Por ejemplo, de este análisis resultó evidente que hubo un líder en el grupo y que su actuación determinó varios aspectos del proceso de aprendizaje que tuvo lugar. Por lo tanto, la caracterización del líder y de su relación con los demás miembros del grupo fue una de las cuestiones que valía la pena registrar y analizar. Este listado de cuestiones concretó y resumió, en una serie de frases (papel del líder, papel de los comentarios a las transparencias, importancia de las conexiones entre los sistemas de representación, etc.), los 950.5 minutos de grabación de los que partí como información inicial para el estudio. La Tabla 39 presenta estas cuestiones organizadas de acuerdo con las categorías de análisis. Este listado representa los elementos centrales de los resultados del estudio que presentaré en los apartados siguientes.

Compromiso mutuo

Entorno

Experiencia docente y asignatura de prácticas

Libros de texto

El líder y su relación con sus compañeros
Caracterización del líder
Participación complementaria
Historia de la tensión en el grupo
Significado
Búsqueda de significado
Confusión de significado
Conflicto de significado y mecanismos de resolución
Evaluación: historia de un conflicto de significado
Descubrimiento de significado
Eventos de materialización

Empresa conjunta
Condiciones externas
Comentarios a las transparencias
Comentarios del formador
Compromiso y responsabilidades
Preocupación por la eficiencia

Repertorio compartido
Rutinas de trabajo
Estructura conceptual
Conexiones dentro de la estructura conceptual
Puesta en práctica de la estructura conceptual
Sistemas de representación
Conexiones entre sistemas de representación
Sistema de representación numérico
Confusión de significado (ecuación-función)
Significado gráfico de los parámetros
Sistemas de representación en el análisis fenomenológico
Puesta en práctica de los sistemas de representación en el análisis cognitivo
Puesta en práctica de los sistemas de representación en el diseño curricular
Análisis fenomenológico
Dificultades con la noción de fenómeno: los fenómenos matemáticos
Actitud hacia la modelización
Procedimiento de análisis fenomenológico
Puesta en práctica del análisis fenomenológico

Tabla 39. Principales cuestiones identificadas en el proceso de síntesis

Este listado fue el producto final de un proceso de *síntesis*. Recogí y organicé la información correspondiente a este listado de cuestiones en una nueva base de da-

tos. En la Figura 74 presento esquemáticamente, en términos de las bases de datos que utilicé, este proceso de síntesis.

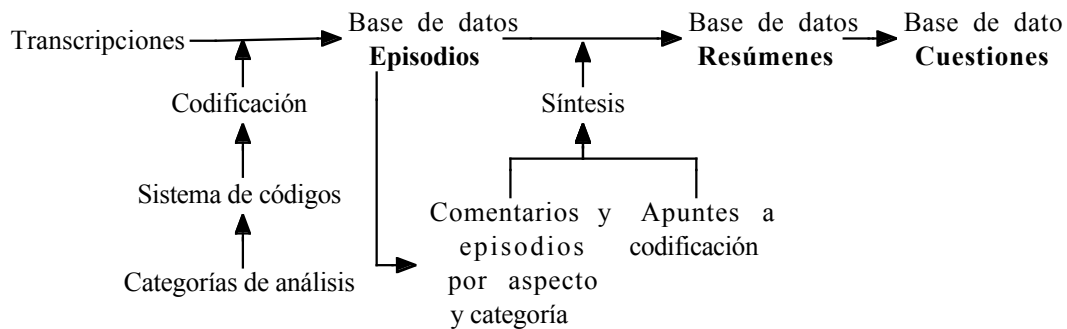


Figura 74. Síntesis: de las transcripciones a las cuestiones

La base de datos *Cuestiones* se convirtió entonces en el punto de inicio de un proceso de *análisis*. En este análisis de la codificación, me impuse, para cada una de las cuestiones identificadas en el proceso de síntesis, dos propósitos:

- ◆ describir cada cuestión, identificando sus principales características e
- ◆ identificar los episodios más representativos de estas características con el propósito de fundamentar con evidencia la caracterización de la cuestión.

Para lograr estos propósitos debía resolver, de nuevo, un problema metodológico. Una cuestión (e.g., la caracterización del líder y de sus relaciones con los otros miembros del grupo) podía involucrar más de un código. Y para cada código podía haber un número importante de registros en la base de datos “Episodios”. Por ejemplo, el código “participación complementaria” fue asignado a 55 episodios y el código “búsqueda de significado” a 475. Durante el proceso de codificación no era posible identificar los episodios que iban a resultar más representativos, dado que, en ese momento, yo no sabía cuáles eran las cuestiones que me podría interesar analizar. Por lo tanto, el problema consistía ahora en diseñar un procedimiento que me permitiera seleccionar sistemáticamente esos episodios.

Diseñé una nueva base de datos con la información de los resúmenes que presenté en la sección anterior. En esta base de datos, creé un registro para cada punto de los resúmenes. Por ejemplo, en el resumen de la transcripción que presenté más arriba, el aspecto “definición de identidades” de la categoría compromiso mutuo contiene la afirmación “el papel del líder sigue siendo central en la organización de las actividades y en la propuesta de ideas”. Para esta afirmación creé un registro que también incluía la categoría y el aspecto al que correspondía, junto con los códigos que estaban relacionados con ella. Se produjeron 754 registros para esta base de datos.

Seguí el siguiente procedimiento para seleccionar los episodios representativos para la caracterización de una cuestión dada (e.g., caracterización del líder y de sus relaciones con los otros miembros del grupo):

1. identificación de las afirmaciones de los resúmenes relacionadas con la cuestión,
2. identificación de los códigos relacionados con la cuestión,

3. búsqueda de todos los episodios relacionados con la cuestión (por código y por comentario),
4. revisión de la lista de episodios a partir de sus comentarios: primera selección y asignación de categorías para su caracterización,
5. revisión del texto de la transcripción de los episodios seleccionados: nueva selección y asignación de categorías,
6. producción de un fichero de texto con los episodios seleccionados,
7. selección final de los episodios representativos,
8. descripción de la cuestión a partir de las características identificadas, y
9. producción del texto para la cuestión, con una primera parte en la que se caracteriza y una segunda parte en la que se presentan los episodios que sustentan esa caracterización.

El procedimiento es complejo. A su vez, este procedimiento está en la base de la validez de los resultados que presentaré en los siguientes apartados. Por esa razón, presento, en la Figura 75, los detalles del mismo.

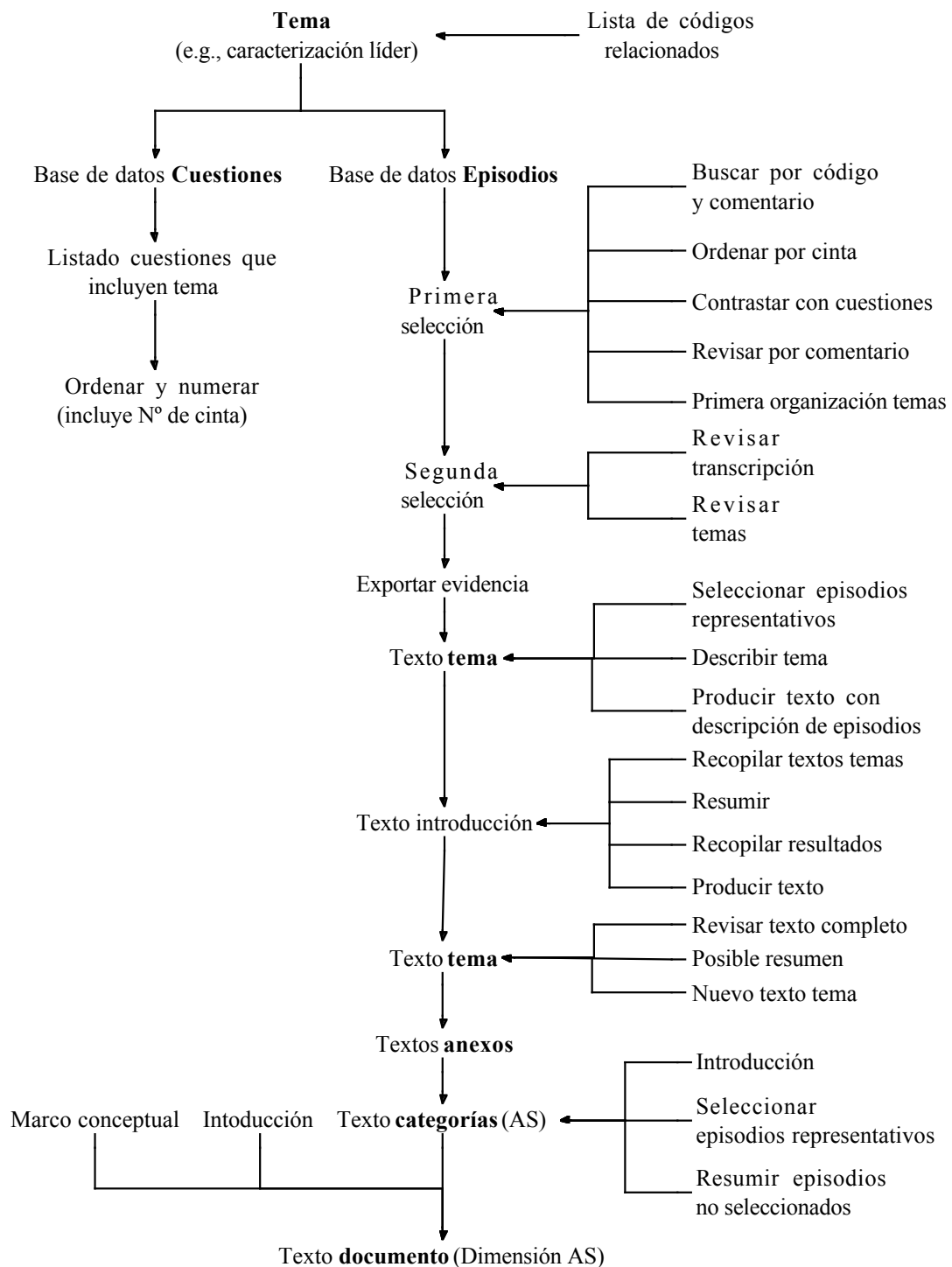


Figura 75. De unas cuestiones a su caracterización, organización y justificación

3.6. Análisis y Producción de los Resultados

Una vez que realicé los nueve pasos del procedimiento anterior para cada cuestión de un aspecto determinado (e.g., “sistemas de representación” en la categoría repertorio compartido), produje un resumen de la caracterización de las cuestiones pertenecientes a ese aspecto, junto con los principales resultados obtenidos. Fi-

nalmente, para cada categoría (compromiso mutuo, empresa conjunta y repertorio compartido) produce un texto introductorio en el que, además de presentar los elementos centrales del marco conceptual que se relacionan con esa categoría, describí, a partir de los resúmenes de los aspectos que la conforman, los matices correspondientes del proceso de aprendizaje social del grupo. El conjunto de textos que acabo describir conforman los resultados del estudio que describo en los siguientes apartados. En la Figura 76 presento un esquema resumido de este procedimiento de análisis.

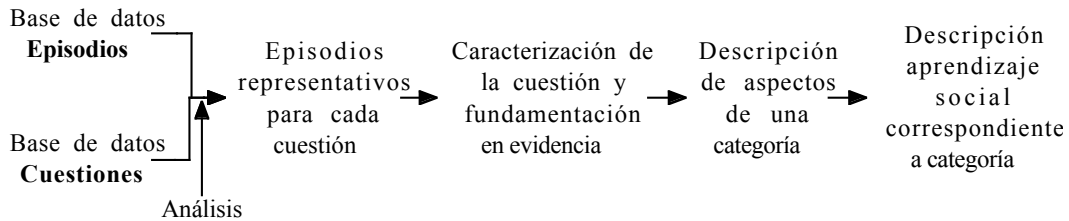


Figura 76. Análisis y producción de resultados

En cada uno de los apartados que siguen, organizo los resultados correspondientes a cada una de las tres dimensiones de análisis.

4. COMPROMISO MUTUO

El compromiso mutuo es la primera de las tres nociones que configuran la idea de comunidad de práctica. El análisis que presento en este apartado se centra principalmente en la caracterización de los procesos de negociación de significado del grupo y de los factores que influyeron en ese proceso: la experiencia docente de los miembros del grupo, el uso de los libros de texto, la existencia de un líder en el grupo y su relación con sus compañeros, y la evolución de las relaciones personales y de trabajo entre los miembros del grupo.

4.1. Compromiso Mutuo y Aprendizaje como Práctica Social

La noción de compromiso mutuo se refiere al compromiso con acciones cuyo significado se negocia y que genera relaciones entre personas. La evolución de diferentes formas de compromiso mutuo es uno de los procesos de los que emerge el aprendizaje. “Para apoyar el aprendizaje, el compromiso requiere un acceso auténtico a los aspectos de participación y materialización de la práctica. En términos de participación, el compromiso requiere acceso a y la interacción con otros participantes a lo largo de su compromiso. El compromiso requiere también la habilidad y la legitimidad para hacer contribuciones en la búsqueda de la empresa, en la negociación de significados y en el desarrollo de la práctica compartida” (Wenger, 1998, p. 184). El desarrollo de la práctica es una cuestión de mantener suficiente compromiso mutuo en la búsqueda de la empresa, junto con compartir un aprendizaje significativo. “La práctica no existe en abstracto. Existe porque la gente se compromete en acciones cuyos significados negocian entre sí” (p. 73). El compromiso mutuo genera relaciones entre las personas y las conecta de maneras diversas y complejas. Un individuo participa en una comunidad de práctica en la

medida en la que se le incluye en aquello que es importante. El compromiso mutuo requiere de la competencia de todos los participantes.

La práctica se mira como el proceso en el que experimentamos significativamente el mundo y se ubica la noción de significado en un proceso de negociación de significado que surge de la interacción entre la participación y la materialización. A través de la participación establecemos relaciones con otras personas, definimos nuestra manera de formar parte de comunidades en las que nos comprometemos con unas empresas, y desarrollamos nuestra identidad. A través de la materialización proyectamos nuestros significados y los percibimos como existentes en el mundo de tal manera que logramos congelar nuestra experiencia en cosas concretas.

Organicé el análisis del compromiso mutuo de acuerdo con cuatro facetas: (a) entorno, (b) identidades, (c) relaciones y (d) significado (ver Figura 69). Centré el análisis en los procesos de negociación de significado (cuarta faceta). Los análisis de las facetas de entorno, identidades y relaciones sirvieron de soporte a los resultados del análisis de la cuarta faceta. En la faceta de entorno incluí aquellos elementos que, formando parte de la comunidad de práctica del grupo, influyeron positiva o negativamente en su funcionamiento. En la faceta de identidades centré mi atención en la caracterización de la actuación del líder del grupo y de la actuación de aquellos miembros del grupo que colaboran con él. Para la faceta de relaciones, describo y caracterizo la historia de las relaciones entre los participantes, resaltando aquellos momentos en los que se generó tensión entre ellos.

Finalmente, describo y caracterizo los procesos de negociación de significado teniendo en cuenta los siguientes aspectos: procesos de búsqueda de significado, eventos de confusión de significado, eventos de conflicto de significado y sus mecanismos de resolución, y procesos de materialización.

4.2. Entorno

En la categoría de entorno incluí aquellos elementos que, formando parte de la comunidad de práctica del grupo, influyeron positiva o negativamente en su funcionamiento. En la codificación de las transcripciones incluí los siguientes: (a) asignaturas que han visto durante la carrera, (b) formación matemática en la carrera, (c) bibliografía consultada, (d) libros de texto utilizados, (e) relación con y referencias a otros grupos de la asignatura, (f) relación con y referencia a compañeros de la asignatura, (g) experiencia docente de algunos de los miembros del grupo, y (h) experiencia en la asignatura de prácticas. Cada uno de estos elementos aparece en las transcripciones. No obstante, el análisis de la codificación mostró que tres de ellos resaltaron sobre los demás, desde el punto de vista del papel que jugaron en los procesos de negociación de significado. Se trató de la experiencia docente, la experiencia en la asignatura de prácticas y el papel de los libros de texto. Los describo en detalle a continuación.

Experiencia Docente y Asignatura de Prácticas

El grupo fue consciente del papel de la experiencia docente en el trabajo que estaban haciendo. No todos habían tenido este tipo de experiencia. Aquellos que la habían tenido asumieron el liderazgo en las discusiones y utilizaron esta experiencia como fuente de validez de sus afirmaciones. Así lo hace P5, cuando, al discutir

con P3, le dice “Ya te darás cuenta cuando des clase.” [065,39037,40512]¹⁴⁶. En la mayoría de las ocasiones, la experiencia docente se manifestó en la negociación de significado en forma de relatos que describían eventos vividos por los participantes en su propia experiencia como profesores o en la experiencia dentro de la asignatura de prácticas.

La experiencia docente les permitió formular conjeturas sobre la influencia de la instrucción en el aprendizaje. En el siguiente episodio, P5 describe su experiencia en relación con la comprensión de los escolares sobre los sistema de representación simbólico y gráfico. En su opinión, se entiende de diferente manera si se explica gráfica o simbólicamente [065,98088,99489]:

P5: Yo comprobé que, si se lo explicas gráficamente, lo entienden de una manera; si se lo explicas analíticamente, lo entienden de otra; pero como intentes mezclarlo, ya no. Ya es que no. O sea, yo, por ejemplo, les puedes decir: “Vamos a resolver un sistema; vamos a dibujar las rectas del sistema”. Las dibujamos; se cortan; pues el punto de corte es la solución; una manera de explicar el sistema. Luego les he explicado: “Venga; sustitución, igualación, reducción”. Bueno, ¿y este punto ¿qué pasa?

Además, algunos miembros del grupo utilizaron el conocimiento que surge de esta experiencia para sustentar sus argumentos. Esto se evidencia en el siguiente episodio en el que P1 reflexiona sobre los errores y las dificultades de los escolares [074,18853,19251].

P1: Eso sí lo hemos visto en las prácticas. Eso nos salió. Que lo pusimos esto. Me parece que fue este mismo: $x^2-4=$. Les salió donde sea, en un examen; y se pusieron a usar la fórmula, les faltaba el término en x .

En otras ocasiones, la asignatura de prácticas (y la evaluación que su profesor hizo del trabajo que algunos miembros del grupo realizaron en ella) se convirtió en autoridad para zanjar diferencias y resolver conflictos [101,4998,5095]¹⁴⁷.

El análisis muestra que la mayoría de los miembros del grupo había tenido alguna experiencia docente en clases particulares, como parte de las actividades de la asignatura de prácticas o como estudiantes en el instituto. El conocimiento que surgió de esta experiencia jugó un papel central en el trabajo que el grupo realizó en el tema de los errores y las dificultades, aunque también apareció en otras sesiones (hay 99 episodios que se refieren a esta cuestión). Hemos llamado a este conocimiento “intuición didáctica” (Gómez, 2001a; Lupiáñez y Gómez, 2003). El grupo puso en juego su intuición didáctica para identificar varios errores y dificultades sobre diversos temas relacionados con la función cuadrática: en el manejo de las transformaciones sintácticas dentro del sistema de representación simbólico, en la relación entre los sistemas de representación simbólico y gráfico, en la

¹⁴⁶ No es posible identificar sistemáticamente a cada uno de los miembros del grupo en las grabaciones. Por lo tanto, en las transcripciones los participantes se denotan con Pi y esta notación, como identificación de los miembros del grupo, se mantiene únicamente al interior de cada episodio.

¹⁴⁷ De aquí en adelante justificaré las cuestiones más relevantes con al menos un episodio, como ejemplo paradigmático de dicha cuestión. En otros casos, solamente presentaré la cuestión e identificaré el episodio que la sustenta (como es el caso de esta afirmación sobre el papel de la experiencia en la asignatura de prácticas como autoridad para resolver conflictos).

resolución de problemas y en la diferencia entre ecuación y función cuadrática. Este conocimiento también les dio luces sobre los efectos de la instrucción en el aprendizaje (en particular, en relación con la enseñanza del manejo de los sistemas de representación).

Libros de Texto

El libro de texto fue la fuente de información (externa a la asignatura) más utilizada por el grupo. Aunque en la asignatura se promovió la revisión de la literatura de investigación en didáctica de la matemática, no hay evidencia en las transcripciones de que este grupo la haya utilizado de manera sistemática. Por otro lado, los libros de texto aparecen en las transcripciones en diversas ocasiones (hay 48 episodios clasificados con este código). El grupo manejó diversos libros de texto, incluidos los que utilizaron en el instituto. Los libros de texto les aportaron información para la construcción de la estructura conceptual. En varias ocasiones, los miembros utilizaron los libros de texto como fuente que validaba algunas de sus afirmaciones y permitía resolver dudas o conflictos entre los miembros. En el análisis cognitivo, ellos conjeturaron que los libros de texto podían estar en el origen de algunas de las dificultades y algunos de los errores de los escolares. Sin embargo, fue en el diseño de actividades cuando la información que sacaron de los libros de texto jugó un papel central. De hecho, el grupo desarrolló una rutina de trabajo en virtud de la cual las actividades que proponían surgían de la selección y transformación de ejercicios que encontraron en los libros de texto. Con este procedimiento ellos utilizaron la información que habían organizado para la estructura conceptual y los sistemas de representación (y parcialmente para el análisis cognitivo) para desarrollar criterios que les permitieron seleccionar y transformar los ejercicios de los libros de texto (en los apartados sobre puesta en práctica de los sistemas de representación y rutinas de trabajo regresaré sobre este punto). En el proceso, la información de los libros de texto les hizo ver que habían olvidado elementos de la estructura conceptual y que no habían tenido suficientemente en cuenta la resolución de problemas.

Por ejemplo, basándose en esta rutina de trabajo, el grupo utilizó las ideas que ya tenían sobre la estructura conceptual y los sistemas de representación para clasificar los ejercicios en “tipos” y, así, poder compararlos, seleccionarlos y organizarlos [106,23320,23715]:

P3: Mira; éste también está muy bien. Mira; es. Les das, por ejemplo, la gráfica de la función x^2-4 . Y () a partir de la gráfica de esa función, representen x^2-4x-5 sin hacer ningún cálculo.

PX: Ya, pero si estos salen del mismo tipo que éste.

4.3. El Líder y su Relación con sus Compañeros

En cada comunidad de práctica se desarrollan y definen identidades. Del análisis de las transcripciones resaltan tres tipos de identidades: un líder, una o dos personas que en algunas ocasiones dialogan con el líder y otras personas (que pueden incluir las anteriores) que siguen las instrucciones del líder. Por razón de la importancia que tuvo en la dinámica del grupo, en esta sección caracterizo dos de estas identidades: la actuación del líder y la actuación de aquellos miembros del grupo que seguían sus instrucciones.

Caracterización del Líder

Desde el comienzo de las sesiones, se percibe la existencia de un líder, cuyo comportamiento condiciona el funcionamiento del grupo. Esto se hace evidente, por ejemplo, en el análisis de la sesión sobre evaluación (que aparece más adelante) en la que el líder estuvo ausente.

El grupo aceptó que un miembro asumiera el papel de líder porque él tenía mucha experiencia docente y un cierto conocimiento que los otros no tenían [100,67046,67652] y [100,73789,74046]. Al parecer, este rol de líder se creó de manera temprana en el funcionamiento del grupo [052,15391,15634]. El líder asumió la responsabilidad de planificar el trabajo a largo plazo y organizar las tareas de los demás. Por ejemplo, en la sesión en la que están preparando el trabajo sobre historia, el líder definió las tareas que había que realizar para la siguiente sesión [044,49182,49425]:

P3: Digo yo: ¿Por qué no el sábado se lo trae cada uno resumido y estructurado de una manera?

Él también se asignó y realizó tareas, además de planificarlas [098,52775,53174]. Pero, no solamente planificó la sesión, sino que dirigió permanentemente la discusión, buscando centrarla en el trabajo que tenían que hacer. Esta actividad contribuyó de manera significativa a la eficacia y eficiencia del grupo. El siguiente episodio es un ejemplo de este tipo de actuación del líder [052,29180,29373]:

P1: Bueno, me parece muy bien, pero que tenemos que hablar de los grupos, dejaros de... Bueno, además de esos dos grandes grupos. El cálculo de área hablamos y ¿eso qué?

Ya veremos, en otro apartado, que, en varias ocasiones, se generó tensión entre el líder y los otros miembros del grupo. No obstante, en otras ocasiones, el líder animó a sus compañeros a realizar el trabajo [066,57576,58180]. El líder también jugó un papel central en la definición del contenido del trabajo que realizó el grupo. Él era quien sugería la mayoría de las ideas y, por lo tanto, determinaba el contenido de las discusiones. Esto se aprecia en el siguiente episodio de la sesión de preparación del trabajo final [103,4369,5009]:

P1: Yo creo que.

P4: Entonces ahora tenemos tres opciones. La primera sería dar las dos clases de. Digamos de características teóricas; aparte, y la cuarta clase, sería de ordenador. Otra opción sería dar un repaso general de características teóricas; segundo, ordenador; y tercero, afianzamiento. Y la tercera opción sería () todo mezclado: en un laboratorio de matemáticas, pues..., cada característica, y luego cómo influyen los coeficientes de esa característica y tal. Y luego, en la tercera clase.

Por otro lado, el líder dio permanentemente instrucciones, verificó el trabajo de los demás y estuvo siempre preocupado por la eficiencia del grupo [044,29842,30027] y [066,61570,62314].

El análisis de las transcripciones me permitió caracterizar la actuación del líder de la siguiente manera. El líder:

- ◆ planifica el trabajo por fuera de las sesiones y organiza las tareas que debe hacer cada miembro del grupo;
- ◆ planifica el trabajo que se realiza durante las sesiones;
- ◆ dirige la discusión, buscando que no se desvíe de los temas centrales;
- ◆ anima a los demás miembros a realizar el trabajo que les corresponde;
- ◆ sugiere ideas y define los contenidos de las discusiones; y
- ◆ da instrucciones y verifica el trabajo de los demás.

Participación Complementaria

Llamo “participación complementaria” a un tipo de participación de algunos de los miembros del grupo, en su relación con el líder. He mostrado que la actuación del líder condicionó en buena medida la dinámica del grupo dentro de las sesiones. Desafortunadamente en las transcripciones no es posible distinguir con claridad a cada uno de los miembros a lo largo de las diferentes grabaciones. En todo caso, se distinguen tres tipos de participaciones: la del líder, la de una o dos personas que en algunas ocasiones dialogan con y aportan a la discusión con él, y la de las otras personas que siguen sus instrucciones. Denomino a este último tipo de participación “participación complementaria”.

En el mismo sentido en el que algunos miembros aceptaron al líder por su conocimiento y experiencia docente, quienes participan de manera complementaria reconocieron que no tenían necesariamente este conocimiento y asumieron una posición tímida en sus aportes a la discusión [085,102521,103129]. Quienes participan de manera complementaria buscaron que el líder les indicara qué era lo que debían hacer. En el episodio a continuación, de la sesión de preparación del borrador de la unidad didáctica, el líder sugiere un propósito y los demás desean saber qué es lo que deben hacer para lograrlo [098,52775,53174]:

P2: Tenemos que terminar esto todavía. La estructura conceptual.

P4: Entonces, ¿yo qué hago mientras entonces?

Una vez que habían recibido tareas para realizar, quienes participaban de manera complementaria reportaban su trabajo al líder, quien lo verificaba [099,30318,31025]. La participación complementaria no fue solamente una manera de contribuir al trabajo del grupo. Para algunos de quienes trabajaron dentro de este esquema la aprobación del líder era importante [099,67642,67862]:

P3: Estamos tratándolo todo igual. Si modelización son todo. Pero que digo: que eso entraría dentro de la función gráfica, de lo del sistema gráfico, ¿verdad, Antonio?

P4: Sí.

En ese mismo sentido, estos miembros del grupo aceptaban sin discusión las correcciones del líder [065,34310,34463].

El análisis de las transcripciones me permitió establecer que quienes asumen una participación complementaria tienen las siguientes características:

- ◆ aceptan que no tienen tanto conocimiento y experiencia como el líder y que se pueden equivocar en sus apreciaciones;
- ◆ buscan que el líder les indique las tareas que deben realizar;
- ◆ reportan al líder el trabajo que hacen, y éste lo verifica;

- ◆ buscan la aprobación del líder; y
- ◆ aceptan las correcciones que él les hace.

4.4. Significado

En esta sección analizo la “experiencia de significado” vivida por el grupo y reflejada en las transcripciones. Mi interés se centra en describir y caracterizar los procesos de negociación de significado desarrollados y puestos en práctica por los miembros del grupo. De acuerdo con el marco conceptual en el que me baso (Wenger, 1998), el significado se ubica en un proceso de negociación de significado; la negociación de significado involucra dos procesos constituyentes: la participación y la materialización. La participación y la materialización forman una dualidad que es fundamental para la experiencia humana del significado y, por lo tanto, para la naturaleza de la práctica.

“La participación se refiere al proceso de tomar parte y también a las relaciones con otros que se reflejan en este proceso. Sugiere tanto acción como conexión... describe la experiencia social de vivir en el mundo en términos de comunidades sociales y compromiso activo en empresas sociales” (p. 55). La participación no es equivalente a colaboración. La participación en las comunidades configura nuestra experiencia pero también configura esas comunidades. La participación es más que el compromiso con la práctica.

Por otra parte, con el término “materialización” Wenger se refiere “al proceso de dar forma a nuestra experiencia al producir objetos que congelan nuestra experiencia en ‘cosas’” (p. 58).

El proceso de materialización es central para toda práctica. Toda comunidad de práctica produce abstracciones, herramientas, símbolos, relatos, términos y conceptos que materializan algo de esa práctica en forma congelada... pero ninguna abstracción, herramienta o símbolo captura completamente en su forma las prácticas en el contexto en el que contribuyen a una experiencia de significado... Con el término materialización pretendo cubrir un rango amplio de procesos que incluyen hacer, diseñar, representar, nombrar, codificar y describir, como también percibir, interpretar, usar, reutilizar, descodificar y reformar” (p. 59).

La materialización puede referirse tanto al proceso, como al producto. Participación y materialización no se pueden considerar aisladamente: son una pareja. El significado se distribuye en esa dualidad. “Esta dualidad es un aspecto fundamental de la constitución de las comunidades de práctica, de su evolución en el tiempo, de las relaciones entre las prácticas, de las identidades de los participantes, y de las organizaciones más amplias en las que existen las comunidades de práctica” (p. 65).

Ya he presentado los resultados del análisis de las tres primeras facetas del compromiso mutuo: entorno, identidades y relaciones. Estas tres facetas incluyen los elementos (de la comunidad de práctica bajo estudio) que he considerado más relevantes desde la perspectiva de los procesos de negociación de significado. Estas cuestiones, y otras que mencioné en las secciones anteriores, influyeron en la dinámica dual de los procesos de participación y materialización que conformaron la negociación de significado en el grupo. En esta sección, centro mi atención en

el resto de la evidencia que caracteriza dicha dinámica. En este sentido, me intereso por cómo el grupo, como comunidad de práctica, abordó dificultades (búsqueda de y confusión con respecto a los significados de diversas cuestiones), reconoció y estableció nuevos significados (propuestas de significado que se hacen y se aceptan, descubrimiento), generó posiciones incompatibles y abordó esta incompatibilidad (conflictos de significado y su resolución) y estableció y utilizó nuevos significados (eventos de materialización).

Procedimiento

Desde la perspectiva de la construcción de significado, y teniendo en cuenta lo propuesto en el párrafo anterior, codifiqué los episodios de acuerdo con los siguientes criterios:

- ◆ episodios de *búsqueda de significado*, en los que se hace explícita la actitud exploratoria de los participantes, actitud que se manifestó en la formulación de preguntas relacionadas con el significado de alguna cuestión;
- ◆ episodios de *confusión*, en los que las dudas o el desconocimiento de los participantes sobre el significado de alguna cuestión se manifestaron en el cambio reiterado de opinión sobre dicha cuestión o en la asunción de posiciones que no eran válidas desde la perspectiva del conocimiento técnico correspondiente;
- ◆ episodios en los que se formularon *propuestas de significado*;
- ◆ episodios de *conflicto de significado* y su resolución, en los que dos o más miembros del grupo asumieron posiciones contrarias con respecto a alguna cuestión;
- ◆ episodios de *descubrimiento de significado*, en los que se reconoció explícitamente la resolución de una duda o el desconocimiento por parte de uno o más de los participantes; y
- ◆ episodios de *materialización*, en los que un significado fue adoptado por todo el grupo y comenzó a formar parte del repertorio compartido.

Para cada elemento de la clasificación anterior, revisé todos los episodios de ese tipo. Como producto de esta revisión, produje una organización de esa lista de episodios. Por ejemplo, organicé los episodios de búsqueda de significado de acuerdo con el origen de la pregunta que se encontraba en el centro de esa búsqueda, y los episodios de conflicto de significado de acuerdo con los mecanismos utilizados para su resolución. Adicionalmente, identifiqué los episodios más representativos de los elementos de esta organización. Presento aquí algunos episodios representativos de la experiencia de significado del grupo. Por motivos de espacio, incluyo ejemplos paradigmáticos de solamente algunos de los tipos de episodios que acabo de mencionar.

Búsqueda de Significado

El trabajo de recabar y organizar información sobre los organizadores del currículo y de diseñar una unidad didáctica implicó una actividad permanente de búsqueda de significado en el grupo. Por lo tanto, a lo largo de las transcripciones, identifiqué multitud de episodios relacionados con esta cuestión (475). Los episodios fueron muy variados en su contenido. En algunos casos, la búsqueda de significado se refería al problema mismo que tenían que resolver: surgían dudas sobre el

contenido y el propósito de la tarea misma. También se aprecia con frecuencia la búsqueda de significado enfocada a la organización del grupo, y la discusión sobre la planificación del trabajo. Pero en la mayoría de las ocasiones, la búsqueda se refirió a los significados teóricos y técnicos de los organizadores del currículo, o a la puesta en práctica de estas nociones en el contexto de la función cuadrática (significados prácticos). En esta sección, me centro en aquellos episodios de búsqueda de significado en los que uno o más miembros del grupo formularon explícitamente preguntas a las que estaban buscando respuesta.

Desde el comienzo del trabajo, el grupo asumió una actitud exploratoria. En el caso del siguiente episodio, perteneciente a la sesión sobre historia, el líder sugiere buscar respuestas en los libros de texto [043,25243,25468]:

P3: Bueno, pero eso es buscar algo, por si cae la breva. Por buscar, se busca en un segundo; que eso es mirar el índice analítico de los libros y mirar un momento: función. (Hablan varios a la vez).

En algunos casos, las preguntas surgieron como consecuencia de la curiosidad de algunos de los miembros o con motivo de información que habían recabado. Por ejemplo, P3 se pregunta, para el periodo histórico sobre el que están discutiendo, cómo se podía saber que se tenía la solución a un problema, sin tener una demostración para ello [044,51806,52191]:

P3: O sea, que una cosa es. Todavía hay problemas que se sabe que hay solución, pero no se sabe cuál es. Saber, sabemos que hay solución (). Dicen: mira, ésta es la solución. Ahora, ¿cómo la he sacado? ¿Inspiración divina?

No obstante, en la mayoría de los casos, las preguntas surgieron porque el grupo necesitaba resolver problemas que contribuían a la actividad que estaban realizando en ese momento. En la sesión sobre la estructura conceptual y los sistemas de representación, el grupo se encontró con dificultades para darle nombre a la idea de fenómenos físicos y diferenciarlo de la noción de modelización, situación que generó preguntas en la búsqueda de ese significado [052,33265,34055]. Una proporción importante de las ocasiones en las que surgieron preguntas tuvo lugar cuando dos o más miembros discutieron entre ellos y buscaron resolver sus diferencias. Esto sucedió con mucha frecuencia durante la sesión de evaluación, en el periodo en el que el líder se encontraba ausente [085,104810,105249]:

P4: Pero, ¿cómo evalúas un razonamiento? Eso es lo que te estoy diciendo: ¿Cómo evalúas un razonamiento? ¿Qué es evaluar ese razonamiento? Pues yo te digo que evaluar ese razonamiento es comparar o dar una puntuación; eso es lo que te estoy diciendo yo. ¿O no es eso? O, ¿qué es evaluar el razonamiento?

Al parecer, cuando se tienen intuiciones didácticas sobre un tema, hay diferentes posiciones sobre el mismo, o hay diferentes alternativas de solución para una cuestión, surgen preguntas que se centran en la búsqueda de significado. Lo acabo de mostrar para el caso de la evaluación y también sucedió para el tema de errores y dificultades [074,12077,12851]. En otros casos, las preguntas parecen estar originadas en la constatación, por parte de alguno de los miembros, de las deficiencias en su propio conocimiento. Esto sucede con frecuencia en el tema de las ma-

temáticas escolares, como se aprecia en el siguiente episodio perteneciente a las sesiones de preparación del documento final [103,93778,94156]:

P1: Una semicircunferencia, ¿es una parábola?

P4: ¿Qué?

P2: Una semicircunferencia, ¿es una parábola?

P4: Tú sabrás.

P2: No me acuerdo ahora mismo... (Hablan varios a la vez).

P4: En una semicircunferencia, la curvatura es constante. Y una parábola... (Hablan varios a la vez).

Finalmente, también surgieron preguntas relacionadas con la organización del trabajo y el contenido de las presentaciones y los documentos. Estas preguntas tienen que ver con el diseño curricular en general [105,80660,81044].

Los episodios en los que los miembros se hicieron preguntas se pueden clasificar en cuatro grandes categorías desde la perspectiva del origen de la pregunta: en algunos casos, fue fruto de la mera curiosidad de alguno de los miembros; en otros casos, fue la expresión de su propio desconocimiento sobre el tema en cuestión; en muchas ocasiones, la pregunta surgió de la necesidad de lograr el propósito específico que estaban buscando dentro del trabajo de ese momento; finalmente, las preguntas también surgieron como consecuencia del proceso de negociación de significado entre dos o más miembros del grupo.

Los grandes temas sobre los que surgieron preguntas siguen parcialmente los temas tratados en las sesiones que se han transcrito. No obstante, hay temas con un mayor número de episodios de este tipo. Estos temas son los siguientes: (a) la noción de fenómeno, (b) la noción de fenómeno matemático, (c) la noción de error y de dificultad, (d) la noción de evaluación, (e) la evaluación dentro del contexto específico de la función cuadrática, (f) la organización de la unidad didáctica, y (g) diversos aspectos de las matemáticas escolares.

Parece natural que el número de inquietudes o dudas varíe de acuerdo con el tema que se trate. De hecho, la fenomenología y la evaluación fueron los dos temas que generaron más preguntas por parte de los participantes. Al comienzo de las sesiones, el grupo hizo patente sus dudas y confusiones con respecto al significado teórico y técnico de las nociones de fenomenología y fenómeno matemático. Al final de las sesiones, el grupo tuvo dificultades con la puesta en práctica de un procedimiento que les permitiera identificar los fenómenos relacionados con la función cuadrática. El caso de la evaluación parece diferente. En estas sesiones, se generó el doble de preguntas (por hora de trabajo) que en el resto de las sesiones. Por un lado, la evaluación era un tema sobre el que cada miembro tenía intuiciones didácticas. En las sesiones correspondientes a este tema, dos de los miembros propusieron posiciones opuestas que generaron gran cantidad de preguntas. Además, el estilo del discurso en estas sesiones fue diferente. Es posible que esto fuese consecuencia de la ausencia del líder durante la primera parte de estas sesiones.

Propuestas de Significado que se Hacen

“El compromiso mutuo en la negociación de significado involucra tanto la producción de propuestas de significado, como la adopción de estas propuestas” (Wenger, 1998, p. 202). En esta sección centro mi atención en la producción de propuestas, como punto de inicio del proceso de negociación de significado. Busco caracterizar la “dirección en la negociación de significado” y ejemplificar algunos aspectos de la “experiencia de significado” de los participantes. En las transcripciones aparecen 711 episodios con códigos relacionados con esta cuestión. Estos son episodios en los que uno o más miembros del grupo hacen propuestas que contribuyen al significado del tema que están tratando.

El primer ejemplo corresponde a la sesión sobre errores y dificultades. En él, uno de los miembros del grupo asumió una posición sobre la frecuencia de los errores y la propuso con carácter personal [066,10016,10191]:

P3: Hombre, yo... Donde más errores veo yo, eso: en la relación entre los sistemas de representación.

En algunos casos, se encuentran episodios en los que uno de los miembros propone el significado de un término, por ejemplo, para la expresión “fenómenos físicos” [052,50552,50884]. El segundo tipo de episodios de propuesta de significado es aquel en el que un miembro reitera una propuesta que ha hecho con anterioridad. Estos episodios son indicativos de significados que aún no se han materializado, puesto que, aunque pudieron ser aceptados por el grupo en el momento de su propuesta inicial, sólo quien los propone es consciente del papel que pueden jugar en la actividad. Es el caso, por ejemplo, de una ocasión en la que el líder insistió en su idea de relacionar los sistemas de representación simbólico y gráfico, propuesta que había hecho en el pasado [066,22485,22835].

En otros episodios, un miembro presenta una opinión, introduce una idea nueva, la define o describe, o la identifica a partir de la bibliografía. En el siguiente episodio, perteneciente a la sesión sobre evaluación, un miembro presenta su opinión sobre cómo se deben evaluar diferentes procedimientos de resolución en el caso en que dichos procedimientos produzcan resultados válidos [085,77526,77985]:

P2: Pero si es que tú me estás diciendo que es que yo no lo considero. Yo, el resultado lo veo tan válido como uno, como otro, como el otro.

P4: Entonces, ¿qué quieres?

P2: Que el resultado es válido; pero luego, a mí no me parece lo mismo que me lo haga de una forma o que me lo haga de otra.

El siguiente es un ejemplo de la introducción de una idea nueva dentro de la discusión. Corresponde a la sesión en la que prepararon el borrador de la unidad didáctica. En ella, un miembro del grupo introduce la idea de puesta en común [101,81359,81640]:

P4: Sí, casi. Porque ahora. O sea: luego, después de la actividad 4, hay que poner la puesta en común. ¿O no? Con los alumnos. La puesta en común, en el que el profesor dirija y los alumnos, pues den su opinión y discutan entre ellos. Es que si no.

El papel del líder en la negociación del significado se ejemplifica en la sesión de preparación del borrador de la unidad didáctica, en la que él define la actividad introductoria, mientras que los demás asumen actitudes pasivas [101,102155,103221]. En otros casos, la propuesta de significado proviene de o se sustenta en la bibliografía. Por ejemplo, en una ocasión, el grupo utilizó los libros de texto para identificar un problema que querían incluir en la unidad didáctica [102,40936,41552].

Otro tipo de propuestas de significado corresponde a episodios en los que las propuestas se hacen en forma de preguntas o dudas. Es el caso del siguiente episodio de la sesión sobre estructura conceptual y sistemas de representación en el que un miembro del grupo se pregunta sobre las características esenciales de la función de segundo grado [044,36690,36900]:

P5. Pero vamos a ver. ¿Qué cosas importantes () de la función de segundo grado? Está el () las soluciones, punto de corte, y el () la gráfica, y ya está.

En otras ocasiones, la propuesta de significado parte de afirmaciones para las que no se presentan argumentos [074,37920,38371]. Finalmente, presento un ejemplo de un episodio en el que se proponen argumentos para sustentar la propuesta que se hace. En este caso, se usa el ejemplo para argumentar que el comentario es una evaluación [086,50008,50829]:

P1: Y además, es que () tiene que.

P3: Pues también, pero (Hablan varios a la vez). El comentario es una evaluación. Entonces —y ahí voy, ahí voy—. Un momento (Hablan varios a la vez). Un momento; y ahora lleva razón Jose; y ahora engancho con lo que decía Jose. Dice: ¿Qué estamos puntuando? ¿Qué? ¿Lo que pretendíamos los profesores se ha llegado a conseguir, es decir, el resultado? Es decir: si Pedro. O sea, Pedro, ¿qué puntuaría? ¿Que llegamos a donde él quiere que llegásemos, o...? (Hablan varios a la vez).

El análisis de los episodios que corresponden a esta cuestión me ha permitido identificar varios tipos de propuestas de significado, que ordeno en la Tabla 40 de acuerdo con su frecuencia.

Tipo de episodio	%
Uno o más miembros asumieron una posición y la expresaron al grupo o se presentó una propuesta tentativa a la espera de su aprobación por el grupo	55
Un miembro del grupo insistió sobre una propuesta ya hecha pero que no había sido aceptada o registrada por el grupo	14
Se expuso, introdujo o identificó un significado	10.3
Las propuestas de significado incluían preguntas que se hacían al grupo	8.2

Tipo de episodio	%
Se afirmó con seguridad o se presentó una opinión, pero no se ofrecieron argumentos para sustentarla	7
El líder presentó una propuesta que se aceptó gracias a la autoridad que él tenía dentro del grupo	3.2
Se presentaron argumentos para sustentar una propuesta	2.1

Tabla 40. Tipos de episodio de propuesta de significado

Propuestas de Significado que se Adoptan

La adopción de las propuestas fue un elemento central del proceso de negociación de significado. En otro apartado, analizaré los episodios en los que aparecen conflictos de significado y cómo se resolvieron estos conflictos. Ésta es una manera de adoptar propuestas de significado. En este apartado, exploro y caracterizo otras formas de adopción de propuestas de significado que identifiqué en las transcripciones.

En muchas ocasiones, el ambiente de negociación fue explícito en el grupo. Este fue el caso del siguiente episodio, de la sesión de preparación del borrador de la unidad didáctica, en el que el grupo estaba decidiendo qué incluía en el documento [099,30529,31318]:

P3: No. Yo de ti, lo ponía.

P4: Aquí no. Lo pondría aquí.

P2: En cónicas.

P3: Sí.

P4: Vale. Trato hecho.

En el siguiente ejemplo, la negociación se produjo dentro de una discusión, en la que se propusieron argumentos y se llegó a un acuerdo. Corresponde a la sesión sobre estructura conceptual y sistemas de representación. Aunque uno de los miembros consideraba las áreas de superficies como fenómeno, aceptó los argumentos del grupo para ubicar este fenómeno dentro una familia aparte [052,58902,60109]:

P2: El de áreas se queda ahí también.

P3: Yo estoy por dejarlo ahí.

P1: Yo estoy en que es un campo suficientemente grande como para dejarlo por sí mismo.

P2: Pero yo sigo diciendo que entonces mi ejemplo estaría aquí otra vez. (risas) no, no, la optimización es un área. Una función de segundo grado aunque tú calcules el área, y ahora os voy preguntar: ¿Qué área te gusta más?

P3: Yo lo que estoy diciendo. Vamos a ver, dentro de área lo que tenemos que decir es fórmulas de área. Estamos hablando de fórmulas de áreas y volúmenes.

P3: Es que es el mismo problema que hay entre los fenómenos físicos, es el mismo problema entre fenómenos físicos y la optimización. Pero eso está en la relación. Si es que, no estamos diciendo aquí que no hay relación.

P2: Se queda como área. Cuatro grandes grupos. Pues venga.

En algunos casos, todos los miembros participaron en la negociación y contribuyeron a la adopción del significado [104,68837,69174]. En otros casos, que son la mayoría, la adopción de un significado se logra gracias al acuerdo entre sólo dos miembros del grupo. Vemos en el siguiente episodio una situación en la que uno de los participantes corrobora y apoya la propuesta del otro. El episodio corresponde a la sesión de preparación del trabajo final sobre la unidad didáctica. Han encontrado un nuevo ejercicio en los libros de texto y llegan a un acuerdo sobre su ubicación [106,48702,49359]:

P2: Éste: sin desarrollar los paréntesis, hallar los cortes con los ejes, localizar. (Hablan varios a la vez). No, pero éste.

P4: Bueno, venga, dámelo. Lo copio. Está bien; me gusta. Éste me gusta. (.)

P2: Pero es que quizá sería mejor ponerlo antes, la actividad.

P4: ¿Antes de cuándo?

P2: () Aquí, por donde está con lo de los cortes con los ejes; al principio, en los primeros ejercicios.

P4: () ¡Ah! Con los cortes. Vale, vale, sí, sí. Aquí, en medio. Se le pone aquí la llamada de atención...

En contraposición con los ejemplos anteriores, hay situaciones en las que el significado fue impuesto a al menos uno de los participantes. En el siguiente episodio, perteneciente a la sesión sobre estructura conceptual y sistemas de representación, uno de los miembros insiste en incluir la simetría, pero el líder le obliga a aceptar lo contrario [103,106402,107118]:

P4: Yo creo que habría que poner primero la simetría. (Risas). ()

P1: Pero si eso lo vamos ahora a ver.

...

P2: ¿Antes de poner el ejercicio siquiera?

P2: Mira. Te lo vas a tragar; pero te lo vas a tragar tal que así, tal como va.

Pero, en muchas ocasiones, las propuestas del líder se adoptaron sin que hubiese necesidad de argumentación, negociación o imposición. El peso que él tenía sobre el grupo, con motivo de su conocimiento y experiencia, fue suficiente para que sus propuestas se aceptaran tácitamente. En el siguiente episodio, correspondiente a la sesión sobre estructura conceptual y sistemas de representación, el tono del líder da por sentado que su propuesta va a ser adoptada [044,49513,49945]:

PX: Pero bueno: ya cada parte. Vamos a pensar en las partes que queremos meter y cada uno (). Y el sábado nos ponemos de acuerdo.

En los dos últimos ejemplos de este apartado presento un caso en el que la adopción de la propuesta tiene un carácter lógico (quien la adopta considera que no hay otra alternativa) y otro caso en el que el participante que no la aceptaba, se resigna ante la presión de los demás [099,48642,48804] y [085,107200,107754]:

P1: Yo creo que es que no se puede hacer otra cosa.

...

P4: Es un comentario.

P1: Pero entonces, quieres hacer. Sí, vale (Hablan varios a la vez).

P2: El comentario es una evaluación. () Según a lo que llames tú evaluación.

P4: Bueno, pues ya está. El comentario es una evaluación. Vale, pues ya está (Hablan varios a la vez).

Como era de esperarse, la adopción de propuestas de significado no se produjo siempre como consecuencia de un proceso racional de negociación o del consenso de todos los miembros del grupo. Encontré los siguientes tipos de esquemas en virtud de los cuales se adoptaron propuestas de significado:

- ◆ esquema explícito de negociación de significado, en el que se ofrecen argumentos y se llega a acuerdos,
- ◆ acuerdos entre sólo dos de los miembros del grupo,
- ◆ imposición de un acuerdo a un miembro del grupo por parte de los demás miembros,
- ◆ imposición de propuestas por parte del líder al resto del grupo, y
- ◆ otros esquemas.

Confusión de Significado

Llamo episodios de confusión de significado a aquellos episodios en los que, con respecto a una cuestión particular, uno o más miembros del grupo:

- ◆ no están seguros sobre su significado,
- ◆ cambian de opinión sobre su significado a lo largo de las sesiones, o
- ◆ asumen posiciones no válidas con respecto a dicho significado.

Los episodios de confusión de significado se diferencian de los episodios de conflicto de significado en el sentido de que, en estos últimos, hay dos o más posiciones diferentes con respecto al significado de una cuestión, posiciones éstas que son defendidas por quienes las proponen. A continuación, ejemplifico este aspecto de la negociación de significados con episodios que se refieren a la confusión que el grupo puso en evidencia con respecto a las nociones de ecuación y función.

La confusión apareció en la revisión histórica que ellos realizaron sobre su tema. Al comienzo de ese trabajo, el grupo ya previó que habría confusiones con el significado de las dos nociones. Esperaban utilizar los resultados de la indagación histórica para relacionarlas [043,1012,1554]. Al avanzar en la indagación histórica, el grupo produjo una primera definición del problema: consiste en el pro-

blema de cómo pasar de la ecuación a la función [043,5910,6095]. Uno de los miembros del grupo creyó que tenía clara la diferencia entre ecuación y función. No obstante, esta claridad desapareció cuando intentaron profundizar en esta diferencia. Se pasó por afirmar que la función era la generalización de la ecuación y se terminó en una afirmación enfática: cualquier ecuación de segundo grado era una función [043,8000,10438]. No obstante, el grupo pensó que el problema no era grave porque ellos consideraban que históricamente las dos nociones habían sido la misma [043,11147,11514]. En un momento dado de la discusión, el grupo pareció llegar a un acuerdo sobre significados parciales de los términos [043,11988,12518]:

P4: (). Función de segundo grado, y a mí lo que se me viene a la mente es una parábola. Pero si estoy viendo una ecuación de segundo grado, a mí lo que se me viene es la raíz.

PX: Hallarle los ceros, ¿no?

PX: Claro.

PX: Hasta ahí estamos de acuerdo.

PX: Sí, estamos.

Entonces, los miembros del grupo creyeron tener claridad sobre la diferencia entre las nociones. El problema consistió en que no lograban expresar esa diferencia. No obstante, aparecieron conflictos con afirmaciones que habían hecho anteriormente, porque “una ecuación no es lo mismo que una función” [043,14683,17431]. Esta confusión y las dificultades que conllevaron generaron entusiasmo por la indagación histórica, porque pensaron que podía llegar a resolver algunos aspectos de la cuestión [043,48717,49586]:

P3: Ah, pues eso va a estar genial. Porque, tú sígueles el rastro a las ecuaciones de segundo grado, que veremos a ver si (). Funciones. Y nosotros, por otro lado, buscamos funciones. Y luego vemos las similitudes.

PX: Vale, vale.

P3: ¿Vale?

PX: (Murmullo).

P3: Por ahí está bien. Yo creo que ahí tiene... En algún momento tienen que acercarse. Yo creo que ya está todo repartido, ¿no?

En este punto se terminaron las referencias a la relación entre ecuación y función desde la perspectiva histórica. No obstante, esta dualidad reapareció en las discusiones sobre errores y dificultades. La confusión se concretó en ese momento como dificultad de los escolares [066,20856,21436]. No obstante, al tratar de expresar la dificultad, ellos volvieron a caer en la confusión [100,6435,7622]:

P1: Señores. Yo aquí he hecho cinco grandes dificultades, aquí a cara de perro. Primera dificultad: identificación de una ecuación de segundo grado. Posibles errores.

P2: ¿De una ecuación?

P1: De una ecuación () ecuación; de la expresión de una ecuación de segundo grado. Bueno, o de una función, si quieres. Tomar el coeficiente líder 1; no reconocer la ecuación de segundo grado en la forma multiplicativa: identificar las raíces.

Para terminar, en la sesión de preparación del borrador de la unidad didáctica, la confusión reapareció, esta vez en forma de broma hacia la actitud esencialmente simbólica de uno de los miembros del grupo [101,92686,93099].

Conflicto de Significado y Mecanismos de Resolución

El conflicto de significado (y su resolución) fue uno de los varios procedimientos mediante los cuales el grupo negoció significados y contribuyó al repertorio compartido. Considero que, en una discusión, hay conflicto de significado cuando se hacen explícitas dos o más posiciones diferentes sobre una cuestión. El conflicto de significado no fue una situación frecuente en el trabajo del grupo, puesto que, en muchos casos, sus miembros discutieron sobre cuestiones técnicas acerca de las cuales no podían asumir posiciones que consideraran propias. Además, en muchos casos, la opinión del líder se impuso sin que hubiese lugar al conflicto. En todo caso, registré en las transcripciones 246 episodios con códigos relacionados con el conflicto de significado y su resolución.

En el siguiente episodio se aprecia la resolución de un conflicto por medio de la argumentación. Sucede durante la sesión en que trabajan sobre la estructura conceptual y los sistemas de representación. Aparece un conflicto sobre el significado de los fenómenos matemáticos y sobre lo que se debe enseñar en una unidad didáctica. Uno de los participantes convence al otro proponiendo argumentos técnicos relacionados con la cuestión que se discute y logrando un acuerdo que parece materializarse [053,1248,3329]:

PX: Entonces, ¿tú la unidad didáctica, para qué tienes que enseñarla? ¿Para qué tienes que hacerlo?

P2: ¿Para qué tienes que hacerlo? ¿Para enseñar lo de matemáticas, no? Pero es que hay cosas que te las enseñan porque son matemáticas, porque sí, porque es que hay que darlas, y otras cosas, que es que desde el principio te las están enseñando con... Esto lo vais a usar aquí, aquí y aquí.

PX: Entonces, pues entonces quita los fenómenos matemáticos, porque como ahí no vamos a hablar ni de teoría de grupos ni de cosas de estas raras.

P2: Sí, eso sí, vamos a empezar por los fenómenos matemáticos. ¿Qué me vais a decir puramente matemático donde se use la función de segundo grado?

P3: No, Antonio, no nos estamos refiriendo a puramente matemático, sino a (Hablan varios a la vez). Digamos, más grande que la otra.

P2: Bueno, entonces, por ejemplo.

P3: Pues por ejemplo, las ecuaciones de ().

P1: Y cuádricas.

P2: Bueno, sí, sí. Sí, sí, totalmente de acuerdo.

Hay algunos episodios de conflicto en los que participan todos los miembros del grupo. En algunas de estas situaciones, el conflicto se resuelve “democráticamente”: se hace una votación y se presiona a quien asume una posición diferente de la de la mayoría. Esto se aprecia en un episodio de la misma sesión del episodio anterior [052,51126,51575]:

P4: Es que estamos en matemáticas, tenemos que mirarlo desde esa óptica. Yo, a mí en absoluto me suena a física. Que se pueda utilizar sí, que tenga relación, pues sí.

P1: Pero eso no es matemático.

P4: Yo también te digo lo mismo.

P2: Y yo también. Tres contra uno, y no vamos a seguir. Va a ser (murmullo).

En general, el conflicto de significado se dio entre dos personas. En la mayoría de las ocasiones, los otros miembros del grupo asumieron una actitud pasiva y, en algunos casos, participaron buscando el consenso. La resolución del conflicto, cuando aparece en las transcripciones, se obtuvo por medio de mecanismos diversos:

- ◆ uno de los participantes acepta la posición del otro, sin estar convencido,
- ◆ se llega a un consenso en todo el grupo,
- ◆ se hace una votación y se presiona a quien asume una posición diferente de la de la mayoría,
- ◆ se convence a los demás con argumentos,
- ◆ se impone una posición sin argumentos,
- ◆ se acepta una posición para no molestar a quien la defiende, y
- ◆ se aceptan las dos posiciones contrarias, registrándolas como complementarias.

En la siguiente sección, presentaré un ejemplo detallado de un proceso de negociación de significado basado en conflictos de significado y su resolución. Aquí he presentado algunos ejemplos de episodios en los que se resuelven conflictos, caracterizando algunos de los mecanismos que acabo de mencionar.

Evaluación: Historia de un Conflicto de Significado

Presento a continuación apartes de un proceso de negociación de significado que se basa esencialmente en la existencia de una sucesión de conflictos de significado. Estos episodios tuvieron lugar durante la sesión en la que el grupo preparó el trabajo sobre evaluación. El líder no asistió a esta sesión y ésta puede ser una de las razones por las cuales la discusión tuvo una fluidez y continuidad que no aparece en otras discusiones. Al comienzo de la discusión aparecen dos posiciones claramente enfrentadas, basadas en visiones diferentes sobre la evaluación. Es posible que el tema de la reunión, la evaluación, siendo un elemento cercano de la experiencia como estudiantes de los miembros del grupo, haya también influido para que surgieran la variedad de propuestas y argumentos que encontré en las

transcripciones. Otros temas, al ser más técnicos, no permitieron necesariamente que los miembros del grupo asumieran posiciones que considerasen propias.

En esta sesión se apreció un proceso detallado de construcción de significados sociales a partir de significados individuales. El compromiso mutuo con la empresa conjunta guió el proceso de negociación de significado. La participación fue intensa, y sólo al final se apreciaron eventos claros de materialización. En este sentido, la tarea misma motivó la construcción de significado. Hubo búsqueda de consenso, momentos de tensión, pero también respeto por las opiniones de los otros. En los momentos de tensión, quienes no participaron directamente en la discusión intervinieron y buscaron soluciones de consenso a los conflictos. Sin embargo, estos acuerdos parciales desaparecieron y el conflicto volvió a surgir en seguida. Uno de los dos miembros que participaron directamente en la discusión buscó sustentar sus argumentos con nuevas ideas. Sin embargo, estas nuevas cuestiones tendieron a reavivar el conflicto. Al final se logró un acuerdo parcial.

Dado su interés como ejemplo paradigmático de negociación de significados dentro del grupo, en el Anexo O presento en detalle la sucesión de episodios que lo sustentan. Aquí presento la sucesión de episodios y ejemplifico sólo algunos de ellos. En las transcripciones no es posible identificar con claridad a los participantes. Esto implica que en diferentes episodios hago referencia a cada uno con identificaciones diferentes. Por esta razón, en los comentarios a los episodios, identifico a los dos miembros del grupo que llevan la discusión como A y B y no mantengo sus identificaciones (P1, P2, etc.) dentro de los episodios.

El conflicto apareció al comienzo de la sesión. El grupo había identificado la tarea que tenían que realizar: establecer criterios para la evaluación de actividades. Desde un comienzo, A expuso el conflicto: evaluar no es sólo poner una nota; es también averiguar si los escolares se han enterado [085,17513,18418]. Un poco más tarde, apareció otra versión del conflicto: si están equivocados, no importa cómo lo estén. A quería diferenciar los errores en los que pueden incurrir los escolares. Esta cuestión, que se discutió en ese momento, desapareció por un tiempo y volvió a aparecer al final de la sesión. A le pidió a B que expusiera su argumento y resolvió parcialmente el conflicto: un error razonado es diferente de un error sin razonar [085,57278,57342] y [085,58515,59083]. En seguida, A enfatizó los matices de los errores y B aceptó que se mirasen los fallos en el razonamiento. Éste fue un acuerdo temporal, que desapareció en seguida [085,59638,60062] y [085,60149,60712]. Aunque a B le pareció subjetiva la propuesta, no expresó un desacuerdo explícito. Pero, en este punto de la discusión, se cambió de tema y se pasó de considerar las respuestas erróneas a una larga discusión sobre las respuestas correctas. Aquí apareció el conflicto. B afirmó que “si lo hacen bien, da igual y punto”, mientras que A replicó: “el razonamiento puede dar información” [085,67850,68486] y [085,68560,69109]. En todo caso, A insistió en su posición: lo que se evalúa es la comprensión. Los otros miembros del grupo parecían estar de acuerdo con A [085,71483,72042]. El conflicto continuó apareciendo a lo largo de la discusión. A buscó información sobre la comprensión y B no entendió esa posición. B aceptó el argumento para la actividad anterior, pero no para este ejercicio. A insistió: “hay que evaluar también el razonamiento, no sólo la validez”. Pero B lo vio sólo como “aplicación” [085,72245,72653] y [085,72783,73489]:

P3: Pues ya está. Perfecto (Hablan varios a la vez).

P4: *Aquí, sí. Yo la actividad anterior, vale. Pero aquí no.*

...

P2: *(). Pero si hasta ahí estamos. Pero es que, si nos hemos quedado ahí, en que simplemente que no meta la pata, también puedes pensar... Es que no es sólo evaluar que no meta la pata; sino que es que luego haya personas que tengan un razonamiento mucho mayor sobre los ejercicios o sobre el problema que les hayas puesto, a otras personas que tienen una capacidad para razonar menor. Es que eso tendríais que evaluarlo. ¿Por qué vais a evaluar nada más que, simplemente, el que esté correcto o no sea correcto? (Hablan varios a la vez).*

P4: *(). Porque esto lo veo yo como aplicación.*

P3: *Pero vamos a ver, Bartolo, vamos a ver.*

P4: *Esto lo veo yo como aplicación.*

Poco después, el conflicto sobre las respuestas válidas se hizo aún más claro. Los dos miembros que discutían entre sí no alcanzaron a comprender la posición del otro. A interpretó la posición de B: evaluación implica puntuación. Pero B no estaba de acuerdo con esa interpretación. Él desvió la discusión y le pidió a A que formulara su argumento. A expuso su posición: no es lo mismo que lo haga de una forma o de otra. Entonces, B estableció el conflicto: a él sí le parecía lo mismo. B pensó que A se estaba contradiciendo [085,75636,78277]. A continuó insistiendo en su posición. Los demás parecían tan escépticos que él creyó que los otros no querían entender [085,83791,84383]. La cuestión se volvió más compleja en seguida porque A introdujo la idea de “capacidades” para diferenciar razonamientos diferentes con respuestas igualmente válidas [085,85639,86165]. Poco después reapareció la idea de que evaluar no es sólo puntuar. A B la idea de mirar capacidades le pareció muy subjetiva. Los otros entendieron y aceptaron la idea de capacidades, pero ¿cómo evaluar? B estuvo de acuerdo, pero consideró que había demasiada subjetividad al evaluar de esa manera. Pero A insistió: evaluar no es simplemente puntuar [085,90748,92573]. El conflicto se acentuó. B regresó a su posición: si lo hace bien, ya está. A insistió en que la evaluación no es simplemente la puntuación y B insistió: evaluar es la nota [085,98666,100271]:

P4: *Espérate, vamos a ver. Vamos a aclararnos. Hemos evaluado antes esta actividad. Ahora estamos evaluando el ejercicio $(x-5)^2$. $() (x-5)^2$ y tú te pones a hacer cuadrados... Yo no $()$. Yo lo veo así; yo me voy.*

P2: *Tú no te pones; tú no te pones, pero a lo mejor habrá gente que lo pueda hacer. Y si tú. Y si hay gente que te lo haga $()$.*

P4: *Pues si lo hace bien, pues bien. Ya está.*

P2: *() Alberto. $()$ Que las cosas están bien. Está una cosa tan bien, tan bien, tan bien. Y yo la valoraría con la misma puntuación a lo mejor. Lo que pasa que luego, dentro de la evaluación —la evaluación para mí no es simplemente la puntuación que tú le tengas que dar, aunque haya que ser realistas— (Hablan varios a la vez).*

P4: Evaluar, al fin y al cabo, es la nota. Ya está.

En este punto, B insistió en su posición de mirar la evaluación como puntuación, pero asumió una posición débil: “lo más posible es que esté equivocado” [085,102446,103494]. Al reconocer la actitud de B, A asumió una posición conciliadora y objetiva. Le hizo ver a B que no estaba equivocado [085,103733,104558]. Ésta fue una primera resolución del conflicto. B aceptó, no muy convencido, que el comentario también es evaluación [085,107224,107659]. En seguida, apareció un nuevo tema. Se preguntaron si se evalúa un ejercicio o un curso. Con motivo de este cambio, los otros dos miembros, que habían intervenido poco, asumieron la posición “el comentario es una evaluación” [085,107224,107659]. Poco después, B insistió sobre su posición y se reavivó el conflicto: a él sólo le interesa el resultado. Se había decidido que la respuesta es correcta si el razonamiento es válido, cualquiera que sea. Pero A replicó: se necesita justificación; él no acepta sólo el resultado [086,2148,2519] y [086,2639,3328]. En este punto, se generó mucha discusión. Ya no se sabía qué era lo que se había acordado con anterioridad [086,4023,5188]. La tensión aumentó. A amenazó con salirse de la discusión, porque no quería que se le diera la razón sin argumentos [086,7027,7459]. Pero los otros miembros intervinieron para interpretar las posiciones y buscar un consenso. La tensión subió cuando uno de ellos pensó que se estaban burlando de él [086,8189,9788]. Entonces el conflicto sobre la importancia de las conclusiones a la evaluación de los ejercicios reapareció con fuerza. B insistió en que de un ejercicio no se podían sacar conclusiones. Con el propósito de explicar su argumento, A introdujo la idea de “pareceres” del profesor. Entonces, B trató de dirigir la discusión para hacer la transparencia. Apareció una nueva tensión: B dijo que no se entendían el uno al otro. A reaccionó y buscó el consenso [086,15188,17622]. Esta reaparición del conflicto generó malestar dentro del grupo. A trató de organizar la discusión y regresaron a un consenso previo: hay un criterio para cada razonamiento válido [086,18874,20118]:

P2: Pero vamos a ver, Bartolo. Pero lo de llevar a pensar. Pero lo de llevar a pensar (Hablan varios a la vez).

P3: Vale, pero es que estamos... Pero vamos a ver. Si es que así nunca vamos a llegar a ningún sitio (Hablan varios a la vez). Porque si uno dice: ¿Por qué no?, y el otro, y ¿por qué sí? (Hablan varios a la vez).

P2: Pero bueno, si (Hablan varios a la vez). Si lo que queremos es. Lo que queremos es evaluar ese ejercicio. Pues bueno: ya está. Tenemos, para cada tipo de razonamiento válido, un criterio de evaluación. Y ya está.

P4: Ea, pues yo eso sí lo veo bien (Hablan varios a la vez). Y llevamos media hora diciéndolo.

P1: Pues entonces ya está terminado.

P3: Venga, pues ya está. (Hablan varios a la vez).

P1: Mira (). Se considerará correcto el ejercicio, sea cual sea el razonamiento (Hablan varios a la vez).

P1: Es lo mismo; es lo mismo. Sea cual sea el razonamiento.

Pero el conflicto permaneció y, para aclararlo, A le pidió a B que formulara explícitamente su posición [086,26027,26566]. En este punto, apareció una nueva idea. Se trató de la evaluación continua de un curso. Esta idea introdujo ruido y generó un nuevo evento de tensión dentro del grupo. Los dos miembros que no participaban directamente en la discusión buscaron que el ambiente se tranquilizara, asumiendo como válida la posición de uno de los dos miembros que discutían. Hubo tensión, pero, entre todos, se redujo. A insistió: aunque sea de un ejercicio, se deben hacer comentarios [086,31056 31952]. En este punto, surgió la idea de comparación de comentarios de ejercicios. A logró mostrar que uno de los propósitos de hacer comentarios, es poder compararlos cuando se evalúen varios ejercicios. Esta idea pareció conducir a una resolución temporal del conflicto [086,42271,43406]. Sin embargo, ésta fue una resolución aparente. La tensión volvió a surgir y B sugirió dejar su posición, para “no complicarse la vida”. A replicó que no; la discusión no se podía dejar porque les interesaba hacer el trabajo lo mejor posible [086,46917,47570]. A encontró entonces un nuevo argumento: tomó el esquema utilizado por uno de los formadores de la asignatura como ejemplo del tipo de evaluación que él estaba defendiendo [086,47850,50924]. Los otros miembros del grupo sugirieron entonces una solución al conflicto. Se propusieron dos criterios que se consideraban complementarios: corrección y formas de hacer el ejercicio [086,52289,53321].

Finalmente, se regresó a la cuestión de las respuestas erróneas al ejercicio, cuestión con la que había comenzado la discusión. Al hacerlo, se resolvió el conflicto. El grupo estuvo de acuerdo en que el procedimiento era importante [086,65332,65884]. Lograron entonces un consenso para redactar el resultado de la discusión [086,67178,68846]:

P4: Y añadiríamos.

...

P4: Algún tipo de comentario, ¿no?

P1: Algún tipo de comentario referente a los razonamientos que utiliza cada persona. Y luego lo otro, es que está claro; es lo que dice Jose () lo que hemos dicho antes. Cuando hemos intentado ver lo de los criterios, es lo que hemos dicho antes, lo que hemos dicho antes (Hablan varios a la vez).

P3: Dependiendo del método de resolución ().

...

P4: Si el resultado es incorrecto.

...

P3: Dependerá del método, ¿no?

...

P2: Se valorará cada método individualmente.

P1: Cada método individualmente.

...

P1: *Que se haya cometido.*

P2: *() con el método que se ha utilizado.*

P1: *Claro. Si eso es. Si eso es lo mismo que hemos dicho anteriormente cuando estábamos ().*

P2: *Los tres métodos, no los vamos a describir, ¿no?*

P1: *No. Si no tienes por qué describir los tres métodos.*

P2: *Y si te preguntan (). Ya hemos terminado.*

P4: *Y si la () de cada razonamiento depende del tipo de error (Hablan varios a la vez).*

P4: *Cometido.*

P2: *Es que esta discusión...*

P4: *¿Ya?*

P2: *¿Ya está? ¿Se aprueba la moción?*

P3: *¡Ea! Corta.*

P2: *Ya está. ¡Ale!*

Historia de la Tensión en el Grupo

Las relaciones entre los miembros del grupo fueron, en general, cordiales y hubo un ambiente de compromiso mutuo con la empresa conjunta. No obstante, también aparecieron momentos de tensión entre algunos miembros del grupo.

Desde las primeras sesiones, se apreció un ambiente relajado, en el que había compromiso para realizar las tareas. Ya en la primera sesión del trabajo de historia se hicieron bromas sobre si les tocaría de primeros en la presentación [043,18296,19558]. En todo caso, dentro de ese ambiente relajado, hubo momentos de tensión entre el líder y los demás participantes. No obstante, esta tensión se mantuvo a un nivel que no afectó ni las relaciones entre los miembros, ni el desarrollo del trabajo [066,40044,40547]. La historia de la tensión entre los miembros del grupo tuvo un punto de inflexión durante la sesión sobre evaluación, como lo insinué en la sección anterior. El líder no estuvo presente en la primera parte de esta sesión. Esto indujo a los demás miembros a proponer ideas y buscar un consenso. La discusión giró entorno a las posiciones encontradas de dos de los miembros del grupo que no lograban entender las opiniones del otro, generándose momentos de mucha tensión. Los otros miembros buscaron en varias ocasiones resolver los problemas y llegar a un consenso [086,31056,31682]:

P4: *Pero, ¿cómo que evaluación continua? ¿Qué evaluación continua? Aquí nadie está hablando de curso (Hablan varios a la vez). No, no, no me estoy alterando; estoy bien (Hablan varios a la vez).*

P3: *No, hombre. Pero vamos a tranquilizarnos todos un poco. Por ejemplo, lo que te estoy diciendo. Que no se. Tú me estás diciendo: ¿Pero pa-*

ra qué la evaluación del curso, si? Es verdad. Es que llevas razón. Tenemos que evaluar un ejercicio en concreto.

En las siguientes sesiones, con la presencia del líder, se regresó a una situación parecida a la inicial, en la que había un ambiente claro de compromiso con la empresa conjunta y buenas relaciones entre los miembros del grupo [099,12874,13125]. No obstante, más tarde, en esta misma sesión, apareció el evento de mayor tensión entre el líder y otros miembros del grupo. El primero los agredió verbalmente y ellos reaccionaron de manera airada. A diferencia de la tensión que surgió durante la sesión de evaluación, producto de la diferencia de opinión entre dos de los participantes, en este caso la tensión surgió como consecuencia de la actitud y la actuación del líder a nivel personal [100,63837,64721]. Poco más tarde, esta tensión volvió a surgir, generándose una situación de conflicto a nivel personal [101,41245,41803]:

P4: ¡Joé! Pues ().

...

P4: () el más mejor.

...

P3: Bueno, respétame, tío.

P1: No seas arisco, tío. No seas arisco.

P3: Respétame, tío.

Al parecer, el líder se hizo consciente de esta situación y, en la siguiente sesión, cuando estaban preparando el trabajo final, él asumió una posición más conciliadora, en la que trató de no imponerse, de buscar el consenso entre los participantes y de subsanar las diferencias que aparecieron en la sesión anterior [103,16402,16904]:

P2: Vamos. Yo, el otro día, cuando llegó la parte de historia, (). Pues yo he pensado, perdón, hemos pensado que. (Risas).

P2: Corramos un estúpido velo de esos.

La historia de las relaciones entre los participantes y de esta tensión se dividió en cinco periodos claramente diferenciados. El primero, en el que hubo un ambiente relajado, en el que se hicieron bromas y en el que, aunque hubo momentos de tensión entre el líder y otros participantes, estas diferencias se resolvieron rápidamente. El segundo, correspondiente a una parte de la sesión sobre evaluación, en la que el líder no estuvo presente, y en el que se generó tensión entre dos miembros del grupo como consecuencia de sus diferencias de opinión y de las dificultades que cada uno tenía para comprender la posición del otro. El tercero, en el que se regresó a una situación similar a la inicial. El cuarto, en el que hubo momentos de gran tensión entre el líder y uno de los participantes, diferencias que se llevaron al nivel personal. El último, en el que el líder asumió una posición conciliadora y buscó el consenso y la solución de las diferencias que aparecieron en el periodo anterior.

Descubrimiento de Significado

En el proceso de negociación de significado que tuvo lugar cuando el grupo estuvo realizando las diversas tareas, hubo momentos en los que uno o más de sus miembros descubrieron un nuevo significado. En general, esta situación implicó un cambio en el conocimiento didáctico del grupo. A continuación presento tres ejemplos de episodios en los que se evidencia el descubrimiento de un significado.

En el siguiente episodio, perteneciente a la sesión en la que diseñaron una actividad, el líder descubre, al intentar establecer relaciones dentro de la estructura conceptual, que diferentes errores corresponden a una misma dificultad (aunque él no lo expresa de esta manera) [074,41285,42809]:

P1: Si es que cuando. Lo que yo quería asociar, la idea que yo os daba de la diferencia de cuadrados, asociarla con esto; pero es que no se puede asociar. Porque no. No; porque el problema se plantea aquí, cuando tienen diferencia de cuadrados, y no saben escribirla así, y lo escriben de esta manera. Pero con eso no significa que esto sea la forma. Sí, es la forma multiplicativa, pero que está tirado por los pelos; que no. Que no es ése el error. El error que cometen es la linealidad otra vez (Hablan varios a la vez). Que te ponen a^2-b^2 , y te ponen $(a-b)^2$. Ése es el problema: que no se dan cuenta que es suma por diferencia; que podría ser perfectamente la forma multiplicativa, $()$, pero. Que no. Que yo digo lo que Bartolo en ese sentido: que está un poco tirado por los pelos.

Cuando el grupo estaba diseñando la unidad didáctica, se estableció un nuevo criterio de evaluación de una actividad [085,39607,40009]:

P4: Y ahora nos queda el de la última actividad.

P3: No, que me refería: que ahí ya tenemos un criterio para evaluar el resultado de ésa, completamente distinto al criterio de la otra actividad.

Varias Personas: ¡Ea!

P4: ¡Ah!, y la otra actividad, da igual el razonamiento.

La búsqueda bibliográfica generó también gran número de episodios de descubrimiento de significado, como era de esperarse. En el siguiente episodio, el grupo estableció la fórmula de la aceleración al encontrarla en un libro de texto [053,21646,22094]:

P3: $()$. ¡Ah, mira! La representación de la posición.

PX: La posición.

P3: ¿Ves? La representación de la posición tiene la forma de una parábola.

P2: Sí, mira, recorrido de partículas en el espacio $()$.

Los episodios de descubrimiento de significado surgieron dentro de diferentes circunstancias que clasifiqué de la siguiente manera:

- ◆ dos o más participantes discuten sobre un tema,
- ◆ un participante reflexiona en voz alta sobre un tema,
- ◆ un participante hace una propuesta al grupo,

- ◆ el grupo está decidiendo acerca del contenido de una transparencia o de un documento,
- ◆ uno o más participantes interpretan los comentarios a las transparencias, y
- ◆ uno o más participantes investigan dentro de la bibliografía.

Eventos de Materialización

Los eventos de materialización formaron parte de los procesos de negociación de significado sobre las diversas cuestiones en las que trabajó el grupo. Estos eventos surgieron, en general, de las propuestas individuales de los miembros. Estas propuestas fueron, en algunos casos, aceptadas dentro de la discusión, pero esto no quiso decir que la idea se materializara. En muchas ocasiones, quien hacía la propuesta tenía que reiterarla en ocasiones posteriores, hasta que la idea era aceptada por el grupo y se materializaba como un elemento del repertorio compartido.

En las transcripciones identifiqué múltiples eventos de materialización. No obstante, hay tres temas para los que el proceso descrito en el párrafo anterior se hace evidente en las transcripciones:

- ◆ la conexión entre sistemas de representación,
- ◆ la noción de error y dificultad y el procedimiento para realizar el análisis cognitivo, y
- ◆ la noción de fenomenología y el procedimiento para realizar el análisis fenomenológico.

A continuación presento algunos episodios correspondientes a la evolución de la idea sobre las conexiones entre sistemas de representación y la relación con algunos aspectos de la reflexión del grupo sobre el análisis cognitivo. Esta idea surgió de manera temprana cuando el grupo estaba trabajando en la estructura conceptual y los sistemas de representación. La idea reapareció y se materializó en la sesión sobre errores y dificultades. En las sesiones de preparación del borrador de la unidad didáctica y del trabajo final, la idea se transformó en una idea más potente que llegó a materializarse poco antes de finalizar el trabajo.

Ya, en la sesión en que estaban trabajando sobre sistemas de representación y estructura conceptual, el grupo (con motivo de una propuesta del líder) se hizo consciente que habían descubierto la idea de conexiones entre sistemas de representación [052,4900,5336]. La idea reapareció con fuerza en la sesión sobre errores y dificultades. Hubo un primer paso de “descubrimiento”, en el que se asignó un nombre a la idea [065,82990,83804]:

P2: Eso sería. Eso sería falta de conexión entre sistema de representación gráfica y simbólico.

P5: Tienen un problema entre los dos sistemas de representación. Eso es.

Esta idea se sustentó, desde la perspectiva cognitiva, con la experiencia docente de algunos de ellos [065,98246,98806]. Más tarde, cuando estaban preparando el trabajo final, la idea reapareció. Pero esta vez, el líder se había dado cuenta de que la relación entre los sistemas de representación simbólico y gráfico iba en ambos sentidos [102,47464,48159]. Pero esta idea de la relación en los dos sentidos no se consolidó completamente y el líder insistió en ella [103,38388,38750]:

P1: (). Estás intentando también es que haya una conexión entre la gráfica y la tabla de valores. Y si en la tabla de valores lo saben mirar, también lo sabrán mirar en la gráfica.

Finalmente, dos horas antes de terminar el trabajo final, la idea fue aceptada por el grupo y se materializó [104,68817,69110]:

P2: Usando el. Pues ya está. Pues esta misma idea... ¡Yo qué sé! La idea está bien, ¿no? ¡Yo qué sé! No sé.

PX: A mí me gusta.

P2: Yo la veo bien.

5. EMPRESA CONJUNTA

El proceso de comprender y afinar la empresa conjunta (afinar el compromiso, conformar responsabilidades, definir la empresa y sus interpretaciones) es el segundo elemento que caracteriza el aprendizaje dentro de una comunidad de práctica. En este apartado, describo y caracterizo los principales procesos en virtud de los cuales el grupo constituyó y desarrolló la empresa conjunta. De acuerdo con el marco conceptual del estudio, se espera que la empresa conjunta de una práctica se negocie colectiva y permanentemente y cree relaciones de responsabilidad mutua entre los participantes. La empresa es la respuesta y la adaptación de los participantes, con sus restricciones y recursos, a las condiciones externas, pero no está nunca completamente determinada por mandato externo.

A continuación, presento los resultados del análisis de las transcripciones. Centro la atención en el proceso de definición de la empresa conjunta, en dos condiciones externas (los comentarios a las transparencias y los comentarios del formador), en el compromiso de los participantes y las responsabilidades que ellos asumieron, y en la preocupación del grupo por la eficiencia de su trabajo.

5.1. Definición de la Empresa Conjunta

La comunidad de práctica objeto de este estudio, el grupo función cuadrática, formó parte de otra comunidad de práctica: aquella que se constituyó y desarrolló dentro de la asignatura. La práctica del grupo estuvo condicionada por las tareas que se asignaron dentro de la asignatura. Todas las reuniones del grupo tuvieron como propósito realizar estas tareas, cuyo producto tenían que presentar en clase. En este sentido, hubo una empresa general que estuvo siempre implícita dentro del grupo y que no parecía estar sujeta a negociaciones o interpretaciones: había que realizar una tarea porque formaba parte de las obligaciones que habían asumido dentro de la asignatura.

Aunque la empresa conjunta estuvo condicionada directamente por las tareas que se asignaron dentro de la asignatura, el grupo matizó esta empresa general con el deseo de ser eficientes y lograr un trabajo de calidad [086,46894,47650]. La problemática de la formulación de la tarea y sus interpretaciones fue central en la definición de las empresas específicas de cada reunión. En el episodio a continuación, de la sesión en la que diseñaron una actividad, se aprecian las dificultades del grupo para interpretar la tarea. Tuvieron que leer varias veces el texto para in-

terpretarla en términos del trabajo que ya tenían hecho y del trabajo que tenían que realizar [074,22713,23943]:

P1: Lo que pasa que tampoco está claro. Tenemos que localizar exactamente qué es lo que queremos hacer. Ya tenemos ahí una actividad.

P4: Hay que delimitar el campo conceptual ese. (Hablan varios a la vez).

P1: Lo leo otra vez.

P2: ¿Para qué?

P1: “Concretando tanto como sea posible en nuestro tópico, haciendo una descripción de la dificultad y de los errores de esa dificultad. Y para ello, describir tanto como sea posible la estructura conceptual de esa parcela del tópico”. Dónde estaríamos dentro de esta estructura conceptual. Pues nos estaríamos situando. Pues, si tuviéramos un puntero, por aquí ()

Poco después de comenzar a trabajar en su tema, en la sesión de historia, el grupo reconoció, para su sorpresa, que el tema era más complejo de lo que pensaron inicialmente. Esta complejidad los obligó a concretarlo para poder decidir lo que tenían que hacer [044,61771,62310]. La complejidad de los diferentes aspectos del tema los indujo a dispersarse en las discusiones. Los esfuerzos por regresar al centro de la discusión formaron parte del proceso de afinar la empresa. Esto se aprecia en el siguiente episodio, de la sesión de errores y dificultades, en el que el líder dirige la discusión hacia el problema concreto que quieren resolver [074,55196,55422]:

P2: El caso es que estamos dando vueltas a lo mismo, y lo que hay que () centrarse: error ese (la linealidad). Luego: la dificultad: la linealidad. Errores: que identifican la suma al cuadrado como...

La complejidad del tema se expresó también en su extensión. El grupo reconoció esta situación en la medida en que profundizaron en las diversas tareas. La amplitud del tema los obligó entonces a centrar la discusión en sólo unos aspectos específicos, como se evidencia en el siguiente episodio de la sesión sobre errores y dificultades [065,99760,100051]:

P3: No te vayas... No te vayas a términos generales. Vamos a centrarnos en lo que tenemos que centrarnos, que son funciones de segundo grado.

P5: Pero es que yo estaba hablando de sistemas de ecuaciones de segundo grado.

P3: Es que ya estamos yendo por las ramas.

Paralelamente con la empresa general, en cada reunión del grupo se definieron, afinaron y negociaron empresas específicas. Estas empresas específicas tenían que ver con la interpretación de la tarea que tenían que realizar y con las dificultades que surgían de estas interpretaciones. Estas dificultades fueron producto de

- ◆ las diversas interpretaciones posibles al texto en el que se formulaba la tarea,

- ◆ la toma de consciencia de que las tareas eran más difíciles de lo que parecían inicialmente,
- ◆ la amplitud de los temas que debían tratar, una vez que profundizaban en ellos,
- ◆ la tendencia, dentro de las discusiones, a tocar temas que no estaban directamente relacionados con la tarea,
- ◆ el papel que jugaron los comentarios a las transparencias que habían presentado en sesiones anteriores, y
- ◆ el papel de la interacción del grupo con los formadores.

Vemos, entonces, que la definición de la empresa estuvo condicionada por condiciones intrínsecas a las tareas que tenían que realizar (interpretación de la tarea y dificultad y amplitud del tema a tratar) y por condiciones externas a la comunidad de práctica (comentarios a las transparencias y comentarios de los formadores). He considerado en esta sección las condiciones intrínsecas a las tareas y, dada su importancia en la construcción de significado, dedicaré la siguiente sección a las condiciones externas.

5.2. Condiciones Externas

En condiciones externas incluyo aquellos factores, externos a la comunidad de práctica del grupo, que influyeron en sus procesos de negociación de significado. En la codificación de las transcripciones tuve en cuenta los siguientes factores:

- ◆ la discusión en clase,
- ◆ la forma como se formularon en clase las tareas a realizar por fuera de clase,
- ◆ lo dicho por los formadores en clase,
- ◆ las discusiones con el formador,
- ◆ el contenido de las transparencias utilizadas por el profesor en clase,
- ◆ las discusiones con el investigador, y
- ◆ los comentarios hechos por el formador a las transparencias utilizadas por el grupo en sus presentaciones.

El análisis de la codificación de las transcripciones muestra que, de estos factores, tres jugaron un papel relevante en el trabajo del grupo: los comentarios a las transparencias, lo dicho por el formador en clase y las discusiones con el formador. Hemos visto que, para otros grupos, la interpretación de las tareas generó dificultades y motivó discusiones (ver el capítulo 9). Éste no parece haber sido el caso para este grupo. He mostrado que, en la mayoría de las ocasiones, cuando tuvieron dudas sobre lo que tenían que hacer, el grupo leyó con cuidado el texto de la tarea y lo interpretó sin mayores dificultades.

Tanto los comentarios a las transparencias, como la interacción con el formador influyeron en los procesos de negociación de significado del grupo de varias maneras:

- ◆ sirvieron como guía para cambiar, mejorar y profundizar las propuestas de significado que se hicieron;
- ◆ se utilizaron como referencia para validar propuestas de significado; y
- ◆ se utilizaron para tomar decisiones y resolver conflictos.

Comentarios a las Transparencias

En la sesión siguiente a cada presentación, el investigador-formador entregó a cada grupo un documento con comentarios a esa presentación y a las transparencias usadas en ella (ver capítulo 6). En estos comentarios, el investigador buscó identificar las principales deficiencias de lo propuesto por el grupo y resaltar aquellos puntos interesantes que se habían logrado. He llamado a estos documentos los “comentarios a las transparencias”.

En la primera reunión con los formadores para la preparación de la unidad didáctica, el grupo reconoció explícitamente el papel que habían jugado los comentarios a las transparencias [096,15912,16553]:

P5: El recorrido histórico lo vamos a dejar para lo último (). A ver. En fenomenología, siguiendo también con las recomendaciones que tenemos, hemos..., la primera estructuración que hemos hecho hemos considerado fenómenos matemáticos y fenómenos no matemáticos. Y entonces, pues. Lo que hemos hecho ha sido.

El papel de los comentarios a las transparencias en la construcción de significado se hizo patente en el trabajo sobre fenomenología. El grupo reconoció la importancia y la utilidad de organizar los fenómenos basándose en subestructuras de la estructura de la función de segundo grado gracias a la interpretación y la discusión que tuvieron sobre los comentarios a las transparencias [098,32775,34767]. Los comentarios a las transparencias jugaron un papel como autoridad que permitió resolver confusiones y conflictos de significado. El grupo no comprendió con facilidad los comentarios a las transparencias. En muchas ocasiones tuvieron que hacer un esfuerzo de interpretación que contribuyó a la construcción social de significados. Esto se aprecia en la primera sesión de preparación del borrador de la unidad didáctica, cuando buscan resolver algunos problemas relacionados con el análisis fenomenológico [098,25257,27564]:

P2: Vamos a ver ().

P3: Léelo otra vez; léelo otra vez.

P2: Eso sí. Pero si ahora te leo. “En clase ya se hizo el comentario de que el término modelización de fenómenos es demasiado general y no aporta, necesariamente, al análisis fenomenológico. El problema del análisis fenomenológico es, precisamente, el identificar la familia del fenómeno y clasificarlo de acuerdo a sus estructuras matemáticas que lo organizan. Por ejemplo, la subestructura matemática que organiza los fenómenos de áreas son aquellas funciones de segundo grado de la forma $f(x)=ax^2$ ”. Y ahí hay un montón de... O sea, de ahí, a partir de ese tipo de función de segundo grado, pues salen un montón de fenómenos. Pueden ser fenómenos matemáticos y no matemáticos. Da igual. Se meten todos juntos dentro de que salen de la función $f(x)=ax^2$. Luego te dice: “pero esta subestructura no permite organizar los problemas relacionados con el espacio y el tiempo de los fenómenos de un movimiento...” O sea, un movimiento uniformemente acelerado; porque las funciones de segundo grado que modelizan este tipo de fenómenos son éstas. Y a partir de estas funciones, se sacan: esto, esto, esto y esto.

Y pueden ser matemáticos o no matemáticos. Pero de este tipo de función se sacan todos estos fenómenos.

P2: () que hay que buscar la familia... O sea, las subestructuras matemáticas de la función y, a partir de ahí, sacar los fenómenos, ya sean de un tipo o de otro. O sea, que la organización hay que hacerla partiendo de la estructura conceptual.

P2: Y eso es lo que estoy intentando (), pero no es nada fácil.

En el trabajo hecho por el grupo función cuadrática encontré evidencia que sugiere que los comentarios a las transparencias jugaron un papel importante en la construcción de significado por parte del grupo. Este papel se expresó en el hecho de que los comentarios sirvieron como referencia para validar las propuestas que el grupo había hecho. En varias ocasiones, el grupo aceptó ciegamente estos comentarios, los asumió como autoridad para resolver confusiones y conflictos y reconoció explícitamente su papel. Éste fue el caso de la construcción del significado de la noción de fenomenología. El grupo leyó varias veces los comentarios hasta que uno de sus miembros comprendió la idea del análisis por medio de subestructuras de la estructura matemática de la función cuadrática. Este participante utilizó los comentarios como fuente de autoridad para convencer a los demás de las ideas necesarias para realizar el análisis fenomenológico y elaboró estas ideas paulatinamente para organizar el trabajo en esta área. El papel de los comentarios a las transparencias fue tardío. Solamente en contadas ocasiones el grupo tuvo en cuenta, cuando se encontraba preparando una presentación, los comentarios que se les había hecho a la presentación anterior. Esto era normal, puesto que los temas de dos presentaciones sucesivas, aunque relacionados, eran diferentes. No obstante, los comentarios a las transparencias volvieron a aparecer cuando estaban preparando el trabajo sobre la unidad didáctica. El grupo retomó esta información y la utilizó para cambiar, mejorar y profundizar las propuestas que habían hecho durante el curso.

Comentarios del formador

Como era de esperarse, los comentarios de los formadores al trabajo del grupo influyeron en él. Esto se ve con claridad en el papel jugado por los comentarios a las transparencias que presenté en la sección anterior. En esta sección analizo los comentarios verbales de los formadores. Estos comentarios tuvieron lugar en dos circunstancias: después de las presentaciones del grupo en clase y durante la reunión en la que el grupo presentó el borrador de la unidad didáctica. Los comentarios les sirvieron para tomar decisiones y resolver conflictos, pero en algunos casos también generaron dudas.

En algunas ocasiones, los miembros del grupo recordaron los comentarios que los formadores les hicieron con motivo de sus presentaciones en clase. Estos comentarios se convirtieron en la autoridad que permitía resolver dudas y conflictos. En el siguiente episodio, de la sesión de preparación de la unidad didáctica, uno de los miembros recuerda un comentario del formador y lo utiliza como argumento para resolver un conflicto, aunque tiene dudas sobre el significado del comentario [098,47977,48805]:

P4: Pero es que lo que te quiero decir es que, si os acordáis (Hablan varios a la vez), nosotros pusimos teorema de Pitágoras, y () nos dijo: “mejor tenéis que poner ahí relaciones cuadráticas”. Y yo creo que, si nos dijo eso, fue por algo. Porque ahí también podría estar incluido. ¡Yo qué sé!

En otro episodio, en la sesión sobre estructura conceptual y sistemas de representación, el grupo utilizó los comentarios a la presentación anterior para tomar decisiones sobre el análisis fenomenológico [053,32863,33318]:

P2: De todas maneras. Es que me estoy acordando ahora también. Cuando expusimos... No te acuerdas que nos dijeron también: “¿Y por qué no relacionáis la fenomenología con lo demás?” Luego se va a quitar la fenomenología, pero es que tú no tienes razón con lo de... Que a lo mejor también hay cosas de fenomenología que se pueden colocar. Me estoy acordando ahora.

5.3. Compromiso y Responsabilidades

Los procesos de afinar el compromiso y de conformar responsabilidades formaron parte del procedimiento en virtud del cual el grupo comprendió y definió la empresa conjunta. En el siguiente episodio, de la sesión sobre estructura conceptual y sistemas de representación, el grupo planifica las actividades que deben realizar para preparar la siguiente reunión y cada quien asume las responsabilidades que le corresponde dentro del reparto de tareas [043,19976,21717]:

P2: Pero es eso, que nos puede pillar el toro. Hombre, lo que sí podemos hacer también, aunque sea un rato, el viernes, después del examen, cuando terminemos nosotros.

P3: ¿Por la noche? Vale.

P2: Echar un ratillo, para ya dejarlo todo..., más que conciencia de todo. (Hablan varios a la vez).

P3: Y el sábado liarnos a hacer, hacer. O incluso repartir el viernes por la noche para hacer, y cada uno en casa, el sábado por la mañana. Quien pueda; tú no puedes, pero nosotros el sábado por la mañana, sí: trabajar y llegar aquí ya con cosas hechas. ¿No? O sea, sería... Vamos a dejar ahora claro lo que, más o menos, tenemos que pensar para el viernes.

P2: Para ir cogiendo, más o menos, la idea de todo.

P3: Para, en los ratos libres, pues intentar...

Como ya lo mostré cuando caractericé el papel del líder y su relación con sus compañeros, en muchos casos el compromiso y la conformación de responsabilidades tuvieron un carácter pasivo. Algunos de los miembros estaban dispuestos a hacer lo que se les dijera, pero no participaban en esas decisiones [098,58486,59063]. La planificación de actividades y el reparto de responsabilidades se convirtieron rápidamente en rutinas de trabajo dentro del grupo. Estos procesos contribuyeron al propósito permanente de lograr la mayor eficiencia en

el mismo. Esto generó entusiasmo entre los miembros, como se aprecia en el siguiente episodio, correspondiente a la sesión sobre estructura conceptual y sistemas de representación [043,48764,49345]:

P3: Ah, pues eso va a estar genial. Porque, tú sígueles el rastro a las ecuaciones de segundo grado, que veremos a ver si (). Funciones. Y nosotros, por otro lado, buscamos funciones. Y luego vemos las similitudes.

...

P3: Por ahí está bien. Yo creo que ahí tiene... En algún momento tienen que acercarse. Yo creo que ya está todo repartido, ¿no?

El análisis de las transcripciones pone en evidencia una actitud positiva y permanente por parte de cada miembro del grupo en la búsqueda de la empresa conjunta. Esta actitud se manifestó en su compromiso casi ilimitado con los propósitos que se querían lograr y en su disposición a asumir las responsabilidades que le fueron asignadas o para las que ellos mismo se propusieron. Como ya lo puse en evidencia en otro apartado, el líder jugó un papel central en el desarrollo de este ambiente de trabajo dentro del grupo. Él fue quien, en general, repartió responsabilidades y motivó a sus compañeros a realizar las tareas que les correspondían. De hecho, el reparto de tareas, la conformación de responsabilidades y el compromiso de los miembros fueron procesos que tuvieron lugar simultáneamente.

5.4. Preocupación por la Eficiencia

El grupo manifestó una preocupación permanente por la eficiencia de su trabajo. El grupo fue, de hecho, eficiente. En general, lograron producir las transparencias para las presentaciones en menos de dos horas de reunión. Hay evidencia de que otros grupos tardaban cuatro o más horas para realizar el mismo trabajo. En el siguiente episodio, de la sesión sobre estructura conceptual y sistemas de representación, se aprecia cómo el líder centra la discusión y organiza el trabajo que deben realizar durante la sesión. Además el líder manifiesta su preocupación por que todos los miembros del grupo trabajen, dando ideas sobre posibles fuentes de información [043,5880,8105]:

P3: Más o menos, podemos ir trabajando, trabajando, trabajando. Entonces, propongo: vamos a intentar buscar ahora funciones, volver otra vez a biblioteca, y simplemente; no nos centremos en funciones de segundo grado. No..., las cuatro palabras; no. Vamos a buscar funciones. Y en la medida en que encontremos sobre funciones, pues..., vamos a ver cómo se relacionan.

P2: (). Cuestión de mirarlo.

P3: Sí, lo tiene, me parece que Juan Félix, Paco y toda esta gente. Se puede preguntar también a ellos, a ver qué tienen ellos de funciones, o cómo se llega al concepto de función, o si tienen algo de funciones de grado 2. ¿Por qué no?

La preocupación por realizar las actividades rápidamente, sin perder tiempo, se evidenció en el hecho de que, en las transcripciones, hay 721 episodios en los que algún participante utilizó la expresión “vamos” y 240 episodios en los que se utili-

zó la expresión “venga”. En la mayoría de las ocasiones, estas expresiones provienen del líder, quien buscaba motivar a sus compañeros [101,79582,79694]. Los siguientes dos episodios evidencian la preocupación del grupo por la eficiencia, desde el punto de vista de la rapidez con que se realizaron las actividades. A lo largo de las transcripciones se percibe que el grupo se reúne exclusivamente para hacer el trabajo de la asignatura y que buscan concentrar su trabajo en un plazo determinado de tiempo [074,59462,59834] y [043,45173,46563]:

P2: Es que, o lo hacemos (), vamos haciendo la actividad. Pero lo que no podemos hacer es estar aquí toda la tarde para eso. Y si queremos mirarnos también lo del otro trabajo, pues no veas.

...

P3: El sábado por la tarde prácticamente va a ser hacer el trabajo. Es decir: esto vale, esto no vale, vamos a poner esto, esto no.

P4: Yo de todas maneras, lo que vaya sacando, en vez de escribirlo en boli, lo escribo en el ordenador. (No se entiende. Hablan varios a la vez).

...

P3: También. Allí se puede. Sí, tú hazlo en el ordenador directamente. (Murmullo). Y yo si hago algo el sábado por la mañana, pues a lo mejor, en vez de escribirlo a mano, prefiero escribirlo a ordenador, y traérmelo en un disco.

P2: En un disquete y ya está.

P3: Es lo más rápido. No tenerlo que escribir dos veces.

La eficiencia del grupo fue una de las consecuencias del papel que jugó el líder y fue el producto de la actitud sistemática del grupo por:

- ◆ intentar que la discusión se centrara en el tema de discusión del momento, sin permitir que se desviara innecesariamente;
- ◆ planificar el trabajo de la sesión y revisar periódicamente esa planificación;
- ◆ planificar el trabajo que cada uno de los miembros debía hacer para preparar la siguiente reunión o lo que presentarían en clase;
- ◆ distribuir responsabilidades, de tal manera que se realizaran varias actividades a la vez durante las reuniones; y
- ◆ preocuparse por el tiempo empleado en lo que tenían hecho y el tiempo que necesitaban para terminar lo que querían hacer.

6. REPERTORIO COMPARTIDO

Recordemos que, de acuerdo con el marco conceptual en el que baso este estudio, el aprendizaje emerge en la medida en que: (a) evolucionan diferentes formas de compromiso mutuo; (b) se comprende y se refina la empresa; y (c) se desarrolla el repertorio compartido, el estilo y el discurso. En este apartado, me intereso por el desarrollo del repertorio compartido. El repertorio compartido incluye los recursos

para la negociación de significados, el discurso que permite hacer afirmaciones significativas acerca del mundo y los estilos para expresar formas de membresía e identidad como miembros. Este repertorio comprende rutinas, herramientas, símbolos, acciones o conceptos que la comunidad ha creado o adoptado y que se han convertido en parte de su práctica (Wenger, 1998, p. 83). El desarrollo del repertorio compartido implica la renegociación de significados, la producción y adopción de herramientas, artefactos y representaciones, el registro y recuerdo de eventos, la invención y redefinición de términos, el narrar relatos, y crear y romper rutinas.

Centro el análisis de las transcripciones, desde la perspectiva del desarrollo del repertorio compartido, en dos aspectos: el desarrollo y establecimiento de rutinas de trabajo y la evolución en la construcción de significado de los tres organizadores del currículo que conforman el análisis de contenido: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Para cada uno de estos tres organizadores del currículo, exploro dos aspectos del proceso de construcción de significado: las principales dificultades de significado y sus procesos de resolución y materialización, y la puesta en práctica de estos significados en los otros análisis del análisis didáctico.

6.1. Rutinas de Trabajo

Denomino *rutinas de trabajo* a los procedimientos sistemáticos que el grupo desarrolló para realizar tareas y resolver problemas. Organizo estas rutinas en dos categorías: (a) los procedimientos que el grupo estableció para organizar y sistematizar sus esquemas de trabajo y (b) las técnicas que el grupo desarrolló para resolver problemas específicos a las tareas que estaban realizando. En la primera categoría incluyo, por ejemplo, los procedimientos en virtud de los cuales en el grupo se repartieron responsabilidades tanto para el trabajo durante una sesión, como para el trabajo que cada miembro realizaría como preparación para la siguiente sesión. En la segunda categoría incluyo, por ejemplo, la técnica que el grupo desarrolló para revisar libros de texto, seleccionar problemas y ejercicios y utilizar esta selección en el diseño de las actividades de la unidad didáctica. En este apartado ejemplifico rutinas de trabajo pertenecientes a la primera categoría. Incluiré, en los siguientes apartados, ejemplos de rutinas de trabajo pertenecientes a la segunda categoría.

El líder jugó un papel central en el establecimiento y desarrollo de estas rutinas de trabajo. Él fue quien, en general, definió las actividades a realizar, planificó el trabajo, determinó las actividades individuales, organizó el trabajo en grupo y verificó el desarrollo de la planificación y del trabajo individual. En muchas ocasiones, se preparó una reunión posterior con el trabajo que cada miembro haría por su lado. Se repartieron responsabilidades y se esperaba que, en la siguiente reunión, se recogiera y organizara la información que aportaría cada uno. Esta rutina de trabajo se aprecia en el siguiente episodio de la sesión en la que diseñan una actividad. Se esperaba que cada miembro trajera un ejemplo de una tarea para después escoger entre ellas [075,27320,27661]:

P2: La idea es que, más o menos, cada uno (Hablan varios a la vez).

P1: Eso es.

P4: Pues que cada uno traiga. (Hablan varios a la vez).

P2: () traigo un ejemplo.

P3: Entonces, luego ya lo ponemos en común.

P2: Que te parece bien, bien. Que no te parece bien, pues lo discutimos.

P4: Claro. ¿De acuerdo?

Para el trabajo que se realizó durante las sesiones, el grupo desarrolló rutinas que aportaron a y fueron consecuencia de la búsqueda permanente de la eficiencia del grupo. Se establecieron rutinas de trabajo individuales y de grupo. Por ejemplo, en el siguiente episodio, característico de lo que he llamado “participación complementaria”, el líder indica lo que debe hacer cada quien y los otros miembros aceptan estas sugerencias, estableciéndose una planificación para el corto plazo. El episodio corresponde a la sesión sobre errores y dificultades [066,37432,38045]:

P1: Espérate: ¿Qué vamos a hacer primero?

P2: ¡Coño!, pues ponerlo en forma de esquema.

P4: Clasificarlo; en forma de esquema; en forma de transparencia. Lo que pasa que hay que poner ejemplos, y ponerlo todo esto más centrado. Porque fíjate, con mi letra cómo está.

P1: Simbólico. ¿Pero lo clasifico en algo?

P2: Si está clasificado. Si es eso. Si vamos a seguir la clasificación ésta, pues ya está.

P1: Pues entonces yo, ¿qué voy a hacer?

P3: Copiar los ejemplos.

PX: Hacer la transparencia.

P1: Que luego la paso yo, que luego la hago yo.

En otras ocasiones, el líder observó la necesidad de trabajar en grupo, con el propósito de explorar un tema y generar una lluvia de ideas: “Venga, ... entre todos la fenomenología, a ver si se nos ocurre más” [099,15448,15763]. Este tipo de trabajo en grupo fue guiado, en algunas ocasiones, por preguntas directas de alguno de los miembros.

El grupo desarrolló rutinas de trabajo específicas para cuatro actividades que desarrollaron en las sesiones. Estas rutinas tienen que ver con procedimientos para:

- ◆ realizar el análisis fenomenológico,
- ◆ realizar el análisis cognitivo,
- ◆ establecer los conocimientos previos, y
- ◆ seleccionar actividades para la unidad didáctica.

Profundizaré en estas rutinas en los apartados que siguen, en los que describo el desarrollo del repertorio compartido con respecto a los tres organizadores del currículo del análisis de contenido.

6.2. Estructura Conceptual

El grupo produjo una estructura conceptual inicial al comienzo del análisis de contenido. Esta estructura conceptual se complementó en seguida con la integración de los sistemas de representación. El resultado fueron unos mapas conceptuales que sirvieron de referencia para el análisis cognitivo y el análisis de instrucción y que sólo se modificaron cuando comenzaron a trabajar en la unidad didáctica. En ese momento, el grupo cayó en la cuenta e hizo explícita la importancia de ubicar dentro de la estructura conceptual las nociones y relaciones que no habían identificado con anterioridad.

La estructura conceptual jugó un papel central en el análisis cognitivo: sirvió como referencia para verificar, ubicar y organizar los errores y dificultades. En el análisis de instrucción, el grupo utilizó la estructura conceptual como guía para determinar la secuencia de nociones que debían tratar en la unidad didáctica. La integración de la estructura conceptual con los demás organizadores del currículo y dentro del diseño de la unidad didáctica se logró, de manera parcial, en la última sesión de trabajo.

Ya en sus primeras producciones, el grupo integró la estructura conceptual y los sistemas de representación en los mapas conceptuales que utilizaron para describir la estructura matemática de su tema. Esta integración, aparentemente natural, pudo ser el origen de la dificultad posterior para diferenciar estos dos organizadores del currículo. De hecho, la relación entre estructura conceptual y sistemas de representación (y la dificultad para diferenciarlos) se puso explícitamente de manifiesto incluso cuando estaban preparando el borrador de la unidad didáctica, como se aprecia en el siguiente episodio [099,38473,38799]:

P2: No, que me estaba yo creyendo que era ().

P4: Los sistemas de representación están dentro de las... Están... Es que son la estructura conceptual.

La estructura conceptual jugó un papel central en el análisis cognitivo. El grupo desarrolló un procedimiento (rutina de trabajo) para identificar errores y dificultades que sigue paso a paso los elementos de la estructura conceptual [065,13384,13859]:

P3: Es que vamos a intentar ver, de la estructura conceptual, dónde podemos tratar los errores y dificultades en cada sitio.

P2: Claro. Y siempre (). Podemos buscar las relaciones entre cada uno (cada tipo de error), a ver de dónde puede venir.

La estructura conceptual sirvió entonces como referencia para verificar, ubicar y organizar los errores y dificultades que iban identificando. En el siguiente episodio, por ejemplo, uno de los miembros quiere utilizar la estructura conceptual para encontrar nuevos errores [065,10363,10707]:

P3: Sí así, problemas de ese tipo sí te puedes encontrar. Tienen fallos. Ya te digo: en la memoria tengo... Una de las partes, de los errores que vienen y todo eso, tengo puesto las ecuaciones de segundo grado como cosa que me ocurrió. Pero claro, quería mirar la estructura conceptual y ver, a partir de ahí.

La estructura conceptual también jugó un papel importante en el análisis de instrucción. Sirvió de guía para construir la lista de nociones que ellos querían tratar en la unidad didáctica. En particular, ellos la utilizaron para determinar las propiedades gráficas que querían considerar en su diseño. En el siguiente episodio se pone de manifiesto el uso explícito de la estructura conceptual para estos propósitos [102,13569,14965]:

P1: ¡Coño! Tienes ahí una gráfica, luego tienes... (Hablan varios a la vez). Los puntos de corte, tienes máximo y mínimo. Tienes todo eso, como lo vas... Como en este tema, en esta unidad didáctica lo vamos a relacionar todo con la gráfica.

...

P1: Dame la unidad de..., el mapa conceptual.

P1: Éste. Esto de... Lo de los mapas conceptuales estos.

En el siguiente episodio, uno de los miembros del grupo hace evidente la integración de la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis cognitivo y el papel que estos organizadores del currículo jugaron en el diseño de la unidad didáctica. Se observa que este significado no se había materializado completamente en el grupo, puesto que hay miembros que no comprendían a cabalidad el procedimiento propuesto [102,18556,20357]:

P3: Las relaciones esas que hicimos...

P1: Claro. Las flechas que había aquí.

P3: Eso es; eso es.

P1: Es decir: los ceros de la función, el vértice, los máximos y los mínimos, la concavidad y la convexidad, el eje de simetría, el dominio y el recorrido. Todo eso...

PX: ¿Eso qué tiene que ver?

P1: Todo eso es lo que, supuestamente, hemos visto antes analíticamente, y ahora queremos asociarlo, o sea, unir los sistemas de representación gráfico y analítico, que es uno de los errores que nosotros en el estudio que hicimos vimos: que había muchas., que no se asociaba bien el sistema de representación gráfico con el sistema de representación simbólico. Y con esta unidad didáctica, lo que queremos es suplir ese error, desarrollando... ¡Yo qué sé! Ahora viene..., a ver cómo lo desarrollamos para que quede coherente. ¡Ah, bueno! ().

6.3. Sistemas de Representación

Buena parte del trabajo del grupo giró en torno a los sistemas de representación. Esta noción fue el organizador del currículo predominante en las producciones del grupo. He organizado el análisis de las transcripciones desde la perspectiva de los sistemas de representación en tres temas:

- ◆ sistemas de representación y conexiones,
 - ◆ dificultades de significado relacionadas con los sistemas de representación,
- y

- ◆ puesta en práctica de la información sobre sistemas de representación.

En el trabajo del grupo se enfatizaron los sistemas de representación simbólico y gráfico. De los otros sistemas de representación, sólo el numérico se mencionó sistemáticamente (como herramienta en el procedimiento tradicional para producir la gráfica de la función), mientras que el geométrico y el verbal aparecieron solamente en ocasiones esporádicas, sin que se tuvieran en cuenta en el diseño de la unidad didáctica.

La cuestión de las conexiones entre sistemas de representación fue de especial importancia en el trabajo del grupo. Aunque apareció desde un comienzo, adquirió importancia en el análisis cognitivo y, sólo cuando abordaron el problema de diseñar la unidad didáctica, y con motivo de la revisión que ellos hicieron de los comentarios a las transparencias, los miembros del grupo reconocieron la importancia de las conexiones entre los sistemas de representación simbólico y gráfico. El tema se convirtió en punto central de los objetivos y los contenidos de la unidad didáctica y se llegó a desarrollar la idea de conexión en dos sentidos: de lo simbólico a lo gráfico y de lo gráfico a lo simbólico.

Hubo dos cuestiones relacionadas con los sistemas de representación que generaron dificultades de significado dentro del grupo: la dualidad entre ecuación y función, y el significado gráfico de los parámetros. La confusión entre las nociones de ecuación y función apareció al comienzo de las sesiones y se mantuvo a lo largo de las transcripciones. Sólo se resolvió al final, cuando el grupo logró concretar su tema de trabajo. Ya describí los detalles de este proceso en un apartado anterior. La dificultad con el significado gráfico de los parámetros apareció en la sesión final, con motivo de los esfuerzos del grupo por diseñar actividades que pusieran en juego las conexiones entre los sistemas de representación simbólico y gráfico. Lograron resolver algunos aspectos de esta dificultad, mientras que otros permanecieron hasta el final.

El grupo utilizó la información sobre los sistemas de representación como herramienta de trabajo en tres áreas principalmente: el análisis fenomenológico, el análisis cognitivo y el diseño curricular. La relación entre los sistemas de representación y el análisis fenomenológico se desarrolló gradualmente, siendo de carácter intuitivo al comienzo de las transcripciones. No obstante, cuando abordaron el diseño de la unidad didáctica, los sistemas de representación se convirtieron en una herramienta: el grupo los utilizó como categorías en las que podían clasificar los fenómenos. Por otro lado, los sistemas de representación jugaron un papel central en el análisis cognitivo, dado que el grupo recorrió la estructura conceptual para identificar los errores y dificultades. Ya mencioné que la idea de la conexión entre los sistemas de representación simbólico y gráfico se convirtió en el eje de una de las dificultades propuestas. Finalmente, los sistemas de representación también jugaron un papel en el diseño de la unidad didáctica. No solamente se ubicaron en el centro de sus objetivos y contenidos, sino que el grupo utilizó la información sobre los sistemas de representación como herramienta para seleccionar y organizar los problemas de los libros de texto que les servirían para diseñar las actividades que propondrían en la unidad didáctica.

A continuación analizo cinco aspectos de la construcción que el grupo desarrolló del significado de este organizador del currículo: las conexiones entre los sistemas de representación, el papel del sistema de representación numérico, el

significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas y la puesta en práctica de los sistemas de representación en el análisis cognitivo y el diseño curricular.

Conexiones entre Sistemas de Representación

La idea de establecer las conexiones entre los sistemas de representación y entre elementos de un sistema de representación se promovió en la instrucción. Sin embargo, ésta no fue una idea evidente y la construcción de su significado implicó un proceso paulatino para los futuros profesores. En el caso del grupo de función cuadrática, la idea apareció en las primeras sesiones y reapareció cuando realizaron el análisis cognitivo.

El grupo halló rápidamente la posibilidad de establecer conexiones entre los sistemas de representación. Ellos las llamaron “relaciones” y establecieron las primeras de ellas en la primera sesión en que estaban trabajando en la estructura conceptual y los sistemas de representación [052,4844,5462] y [053,34342,34498]. Las conexiones aparecieron explícitamente en el análisis cognitivo, como consecuencia de la insistencia del líder en que ésta era una de las dificultades que enfrentan los escolares [066,6205,6714]. No obstante, y con motivo de algunos comentarios a las transparencias [099,40934,41456], la idea de establecer conexiones se concretó mucho más tarde, en la sesión de preparación del borrador de la unidad didáctica. En este momento, hubo un primer paso hacia su materialización como parte de su repertorio compartido [099,23574,23745] y [099,28411,29012]:

PX: Pero todo relacionado ().

...

P4: Y esto luego, sería para relacionar. ¿Qué te digo yo? La función de segundo grado que tenemos aquí con la función de la parábola, ¿no?

Ya en la sesión de preparación de la unidad didáctica la idea se materializó y se utilizó en diferentes aspectos del diseño curricular. Las conexiones entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico asumieron un significado específico en la discusión sobre el papel gráfico de los parámetros de las expresiones simbólicas [100,103100,103630]:

P1: Y su repercusión en la fórmula.

P2: Y su relación con los coeficientes de la forma general.

P1: Relación con.

...

P1: Estudio de las transformaciones de una parábola.

P4: Y su repercusión.

P1: () con los coeficientes de la forma general.

P2: Si pones repercusión, es a partir de la ().

PX: Sí, ya, ya.

P2: Y si pones relación es ().

P4: con los coeficientes de la ecuación.

P2: De la función.

La materialización de esta idea se expresó de diversas maneras. Por ejemplo, la conexión entre los sistemas de representación simbólico y gráfico se convirtió en el eje central de los objetivos [096,54316,55084]:

P5: Pues entonces, como objetivos serían: la identificación de una parábola como representación gráfica de la función de segundo grado () sus características; y el estudio de las transformaciones de la parábola y la relación con los coeficientes de la función. Eso sería lo que ().

P1: O sea. Es que claro; los objetivos ahora serían relacionar todo lo analítico con la representación gráfica. Básicamente sería ese el objetivo.

En consecuencia, el tema formó parte de los contenidos de la unidad didáctica. Se diseñó una de las clases para abordarlo [100,68236,69363] y [105,2777,3229]:

P2: () poner las distintas formas de expresión analíticas y sus relaciones..., y las relaciones entre ellas. () contenidos, ¿no?

...

P3: La clase 3 podría ser: relaciones entre los coeficientes y las gráficas.

En el siguiente episodio se aprecia el uso que el grupo hizo de este tema para formular preguntas específicas a los escolares y que incluirían en la unidad didáctica [105,20298,21120]:

P2: Bueno. ¿Qué relación hay entre el término independiente y la gráfica de la función? Utiliza algún ejemplo de funciones.

En general, el grupo se preocupó por la relación entre el sistema de representación gráfico y el sistema de representación simbólico. La mayor parte del tiempo, esta relación se estableció en un único sentido: de lo simbólico a lo gráfico. No obstante, en la última reunión del grupo, cuando estaban preparando el documento final de la unidad didáctica, uno de sus miembros “descubrió” que esa relación podía ir en los dos sentidos y lo propuso [102,47508,48455]:

P1: Es que, una forma sería: que nos den la expresión de la función, y a partir de ella construir la gráfica; luego, otra parte de la unidad didáctica sería, a partir de una gráfica.

P2: A partir de una gráfica.

P1: Sería, darle la vuelta, conseguir..., pues ver los ceros, los vértices y tal, y al final, con todo lo que te den, la expresión de la función. Ahora, la primera parte: para construir la gráfica, pues, sabiendo el vértice... Es que, sin saber el vértice, sin saber los ceros, no puedes construir bien la parábola.

Más tarde, este significado se materializó dentro del grupo [102,54602,55401] y se extendió más tarde al sistema de representación numérico [103,38437,39039].

Sistema de Representación Numérico

El trabajo del grupo se centró en los sistemas de representación simbólico y gráfico. De los otros sistemas de representación, solamente el numérico apareció sistemáticamente en las transcripciones. El significado de este sistema de representación evolucionó en el tiempo. Inicialmente se incluyó en la estructura conceptual buscando establecer una relación específica con el sistema de representación gráfico. Más tarde reapareció en el análisis cognitivo, como elemento sobre el que pivotaba el procedimiento tradicional de producción de gráficas de funciones. Finalmente, a la hora de diseñar la unidad didáctica, el grupo resaltó la importancia de los dos sentidos de su relación con el sistema de representación gráfico.

El sistema de representación numérico apareció ya en las discusiones de la sesión sobre estructura conceptual y sistemas de representación. En ese momento, el grupo se refirió a las tablas de valores, y su papel y su relación con las gráficas [052,1927,2230]:

P2: Bueno, creo que se podría bajar aquí numérico. Se hace una tabla, y también intentamos que estas parábolas coincidan con el dibujo de la parábola que pongamos, que coincida con los valores de la tabla ¿Vale? También hay una relación interna aquí entre la presentación.

El sistema de representación numérico reapareció en la sesión sobre el análisis cognitivo. Allí, uno de los miembros relató su experiencia con escolares que tenían a utilizar sistemáticamente las tablas de valores para hacer la gráfica de una función, sin tener en cuenta la información que tenían disponible sobre puntos clave de la misma [065,81838,82644]. Tal vez por esta razón, a la hora de diseñar la unidad didáctica tuvieron dudas sobre la inclusión de este procedimiento (producción de la gráfica a partir de la tabla de valores) dentro de los objetivos que querían lograr [102,55733,56452]. No obstante, esta duda se resolvió y llegaron a reconocer la importancia de la relación entre los sistemas de representación numérico y gráfico en los dos sentidos [103,38437,39039]:

P1: (). Estás intentando también es que haya una conexión entre la gráfica y la tabla de valores. Y si en la tabla de valores lo saben mirar, también lo sabrán mirar en la gráfica.

Significado Gráfico de los Parámetros

La discusión sobre el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas apareció en la sesión de preparación de la unidad didáctica. Hasta ese momento, el significado de las conexiones entre los sistemas de representación simbólico y gráfico había sido general. La especificidad de estas conexiones (con respecto a los parámetros) surgió con motivo de la necesidad de diseñar en detalle las actividades que se propondrían a los escolares en las sesiones que compondrían la unidad didáctica. Cuando el grupo abordó este problema, se generaron confusiones y se hicieron explícitas algunas de las dificultades que ellos tenían con el manejo matemático de su tema. Estas dificultades se hicieron evidentes en el manejo del significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas. El grupo logró

solventar las dificultades relacionadas con el parámetro a en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$. No obstante, sólo llegaron a proponer una solución parcial al problema del significado gráfico del parámetro b . La evidencia muestra que este esfuerzo implicó un avance en el conocimiento matemático del grupo, aunque no todos los miembros lograron el mismo grado de profundidad.

Las dudas y confusiones del grupo sobre el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas se aprecian en el siguiente episodio en el que se preguntan sobre el papel de los parámetros en la ubicación de los cortes de la función con el eje x [102,121228,122206]:

P4: O sea, los puntos de corte con el eje de las x , ahí influyen los otros coeficientes de la función. ¿No?

...

P4: Bartolo dice... Bartolo dice que, cuando tú hayas visto las características generales que () ordenadores, como, por ejemplo, acabas de ver los intervalos de crecimiento y decrecimiento..., esos dependen del coeficiente líder, pues que ahí se comente. Eso es lo que tú estás diciendo.

...

P4: Entonces, yo digo que lo mismo que ahí se comenta lo del coeficiente líder, cuando ves los puntos de corte, tendrás que comentar cómo influyen todos los demás coeficientes. Porque es que ahí influye. Porque en lo otro, sí que es verdad que influyen todos. En los puntos de corte influyen los tres. ¿O no?

Cuando reflexionaron sobre el papel del parámetro a en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, llegaron a pensar que todas las características de la gráfica de la función dependían de este parámetro [100,89677,90153]. En la discusión que tuvo lugar sobre este tema, llegaron a pensar que este parámetro, por sí solo, no influía en nada [105,14822,15530] y recurrieron a la reflexión algebraica para centrar el significado gráfico del parámetro en su influencia en la ubicación del corte de la función con el eje x [105,95236,96157]. Finalmente, llegaron a establecer que este parámetro influía en la traslación horizontal del vértice, pero no se dieron cuenta que esta influencia era lineal, mientras que el efecto sobre la posición vertical del vértice era de tipo cuadrático [105,98785,99239]:

P2: Cuando el signo del coeficiente de la x es negativo, la esa se traslada..., siempre está a la derecha, me parece.

P3: () sería x -... Vamos a ver; si es negativo, está a la derecha. El positivo... (Hablan varios a la vez).

P2: El positivo a la izquierda. ¡Ea! Pues ya. Pues ya lo tienes. () el b . (Hablan varios a la vez).

P4: Si es negativo, está a la derecha.

Al final, algunos de los miembros no se enteraron de los detalles de la discusión y, por consiguiente, la confusión no se aclaró dentro del grupo, aunque la unidad didáctica contenía actividades que abordaban el problema [103,111313,111426]:

P2: x^2-1 .

P3: Tú entiendes, ¿no?

P1: Yo no entiendo. ().

Puesta en Práctica de los Sistemas de Representación en el Análisis Cognitivo

Al integrarlos dentro de la estructura conceptual, los sistemas de representación jugaron un papel central en el análisis cognitivo. Ya mostré que el grupo recorrió la estructura conceptual para identificar los errores y las dificultades. En ese recorrido fueron identificando errores que se referían a elementos específicos de los sistemas de representación simbólico y gráfico, principalmente. En el caso del sistema de representación simbólico los errores se referían a la resolución de la ecuación cuadrática, la fórmula cuadrática, el signo del discriminante y el conjunto solución. En el caso del sistema de representación gráfico, se referían a los cortes con los ejes, las asíntotas, la forma y ubicación de la parábola, los máximos y mínimos, y el dominio y el recorrido. En esta sección, resalto dos aspectos de esta reflexión: la consciencia por parte de algunos miembros del grupo del papel de los sistemas de representación en la comprensión de los escolares y el papel de la conexión entre los sistemas de representación simbólico y gráfico como eje del análisis cognitivo y del diseño de la unidad didáctica.

Durante la sesión sobre análisis cognitivo y dentro de la actividad de identificar los errores de los escolares, uno de los miembros del grupo se basó en su experiencia docente para argumentar sobre la importancia de los sistemas de representación en los procesos de comprensión de los escolares [065,100459,101548]:

P5: *Pero vamos a ver; te vuelvo a lo mismo. Es decir: una recta; tú les dibujas la recta. "Venga, ¿dónde corta al cero?" Aquí, y eso es un cero de la ecuación, y no lo asocian a que es lo mismo que coger la ecuación, igualarla a cero y resolverla.*

El episodio anterior pone también de manifiesto el otro punto central del papel de los sistemas de representación en el análisis cognitivo: las dificultades de los escolares para establecer conexiones entre los sistemas de representación simbólico y gráfico. Esta idea, que analicé en un apartado anterior, apareció inicialmente en la sesión sobre el análisis cognitivo, como un descubrimiento de significado [066,65276,66250]. Y, en la sesión en la que prepararon la unidad didáctica, la idea se materializó y, como mostraré en la siguiente sección, se convirtió en uno de los ejes para el diseño de la unidad didáctica [100,15412,15784]:

P2: (). *La dificultad sería...*

P1: *Ésa. La dificultad es ésa.*

P2: *La dificultad es: dificultad en la relación entre la representación simbólica y la representación gráfica. Eso sería la dificultad.*

Puesta en Práctica de los Sistemas de Representación en el Diseño Curricular

A pesar de su importancia en el diseño de la unidad didáctica, el grupo utilizó una visión parcial de los diferentes significados representacionales de su tema. Ésta fue una decisión que ellos tomaron con el propósito de concretar el contenido de

la unidad didáctica: decidieron centrarse en el sistema de representación gráfico y su relación con el sistema de representación simbólico. De los otros sistemas de representación con los que se podía estudiar el tema, sólo tuvieron en cuenta superficialmente el sistema de representación numérico. Dentro del mismo análisis gráfico de la función cuadrática, el grupo dejó por fuera elementos centrales de la estructura matemática. Por ejemplo, no consideraron las cuestiones relacionadas con el foco de la parábola. Desde la perspectiva de los sistemas de representación, la actividad de diseño se centró en los siguientes aspectos: (a) elementos gráficos, (b) propiedades gráficas, (c) operaciones gráficas, (d) conexiones entre sistemas de representación y (e) tratamiento algebraico.

El trabajo del grupo en el diseño curricular aportó información sobre los sistemas de representación. Por ejemplo, el significado gráfico de los parámetros de las expresiones simbólicas se menciona superficialmente en las producciones iniciales del grupo. Sin embargo, durante las sesiones de preparación de la unidad didáctica, este tema adquirió más importancia y se desarrolló con profundidad. Por otro lado, la reflexión sobre las operaciones gráficas y, en particular, sobre las traslaciones, apareció por primera vez en estas últimas sesiones. Cuando surgió inicialmente, no se le dio importancia y se llegó a sugerir que no se considerara dentro de la unidad didáctica. Sin embargo, más tarde, cuando se estableció su relación con el significado gráfico de los parámetros, adquirió mayor importancia.

Además de estar en el centro de los objetivos y de los contenidos de la unidad didáctica, los sistemas de representación jugaron un papel en el diseño curricular en al menos otros dos sentidos: (a) el grupo organizó la secuencia de actividades que compusieron la unidad didáctica haciendo un recorrido de la estructura conceptual y, por lo tanto, poniendo en juego la información que habían recogido sobre los sistemas de representación y (b) el grupo utilizó la información sobre los sistemas de representación para generar la idea de “tipos de ejercicios” que les permitió analizar y seleccionar los problemas que encuentran en los libros de texto.

El papel central de los sistemas de representación en el diseño de la unidad didáctica se aprecia en el siguiente episodio en el que se resaltan los sistemas de representación simbólico y gráfico y la relación entre ellos [102,16853,17865]:

P1: Entonces, es que la cosa estaría: Lo que queremos en nuestra unidad didáctica sería las formas de expresión. No; eso ya lo habríamos trabajado. (Hablan varios a la vez). Entonces sería. Entonces sería: con las formas de expresión, asociar la () gráfica, o sea, a una ecuación, asociarle la gráfica por medio de tabla de valores, o bueno... O también, y mediante el estudio que ya, supuestamente ya hemos hecho el estudio de los ceros. (Hablan varios a la vez).

A pesar de la insistencia de la instrucción, el grupo sólo descubrió la idea de las traslaciones en la última sesión de trabajo. Cuando se propuso incluir este punto, no reconoció su importancia y la restricción de tiempo les hizo pensar que habría que evitarlo [102,109062,109823]:

P4: Pero eso es lo que se va a hacer en la cuarta.

P2: Es que en la cuarta, () vas a tratar, además de eso... (Hablan varios a la vez), son transformaciones.

P4: ¿Y eso qué es?

P2: Ya, pero me refiero, más bien, traslación y todo eso.

P4: Es que no da tiempo. Es que no. Entonces, te sobra muchísimo tiempo.

No obstante, más tarde, cuando establecieron explícitamente la relación entre los sistemas de representación simbólico y gráfico a través del significado gráfico de los parámetros, las traslaciones adquirieron mayor importancia y se llegó a hablar de “composición de traslaciones” [105,41755,42803]. Las operaciones en el sistema de representación gráfico y el trabajo con los parámetros de las formas simbólicas formaron parte de la preocupación central de la unidad didáctica: la conexión entre los sistemas de representación simbólico y gráfico que ya he analizado en otra sección. Cuando el grupo organizó la unidad didáctica decidió dedicar una clase completa a esta cuestión [105,2748,3144]. Además de ser el eje de los objetivos y los contenidos de la unidad didáctica, los sistemas de representación jugaron también un papel como herramienta en el diseño y la estructuración de la unidad didáctica. El grupo utilizó su conocimiento sobre el tema para seleccionar, transformar y organizar, a partir de los problemas que encontraron en los libros de texto, la secuencia de actividades de cada clase. El grupo materializó la idea de “tipos de ejercicios”, de acuerdo con los elementos y relaciones representacionales que cada ejercicio ponía en juego [105,78443,78808], [105,93059,94950] y [105,101786,102204]:

P2: No sé. ¿Qué pensáis? () a ver qué tipos de ejercicios veis.

...

P3: Pues se podría poner lo que yo estaba diciendo. Tú pones una función de segundo grado, y un..., un coeficiente, le pones una letra; (). Entonces le dices que te calcule esa..., la ecuación de segundo grado; las soluciones de esa ecuación. Y entonces van a tener que recurrir a la gráfica. Luego, otra pregunta puede ser que te diga cuál es el coeficiente. Entonces, lo que tiene que hacer es () sustituir () sistema. Pone nada que sea un coeficiente con una letra, (). Si les pones dos, pues ya te... ().

6.4. Fenomenología

En la asignatura, se pretende que la fenomenología sirva de herramienta para la recolección y organización sistemática de fenómenos relacionados con la estructura matemática en la que trabaja cada grupo. La instrucción insistió permanentemente en que esta organización debería estar basada en subestructuras de dicha estructura matemática. Este procedimiento debería servir para que el futuro profesor, a la hora de abordar el diseño de una actividad relacionada con esa subestructura, tuviese organizados aquellos fenómenos que pueden ser modelizados por ella. De esta manera, se esperaba que el futuro profesor pudiera seleccionar fenómenos relevantes y diseñar actividades, basadas en esos fenómenos, que pusieran en juego la subestructura en cuestión. El grupo, objeto de este estudio, logró, con

dificultad, materializar un procedimiento sistemático para realizar el análisis fenomenológico a partir de subestructuras. No obstante, a la hora de abordar el problema de diseñar y organizar las actividades que iban formar parte de la unidad didáctica, esta información no se llevó a la práctica.

En esta sección considero los siguientes aspectos de la evolución del proceso de construcción de significado realizado por el grupo con respecto a la fenomenología:

- ◆ dificultades con el significado de las nociones de fenómeno, fenómeno matemático y modelización,
- ◆ procedimiento inicial para la organización de los fenómenos,
- ◆ influencia de los comentarios a las transparencias,
- ◆ propuesta, negociación de significado y materialización de un procedimiento sistemático basado en subestructuras, y
- ◆ puesta en práctica del análisis fenomenológico en el diseño de la unidad didáctica.

Dificultades con la Noción de Fenómeno: los Fenómenos Matemáticos

La idea de los fenómenos matemáticos apareció en la primera sesión (sobre estructura conceptual y sistemas de representación). Ellos vieron que la función cuadrática aparece en muchos lugares de la matemática [052,29501,31299]:

P2: Es que luego estarían también las aplicaciones dentro de la matemática misma.

P4: Eso, eso es. Eso lo que estamos dejando de lado.

P2: Claro, dentro de la propia matemática, dentro de la teoría matemática. Las de segundo grado estamos hartos de verla. Por ejemplo, para luego otras cosas, pero por ejemplo, en cualquier demostración que estás haciendo en análisis, cada dos por tres tienes que formar una función de segundo grado.

No obstante, se encontraron con dificultades a la hora de identificar un fenómeno como matemático. Por ejemplo, no lograron decidir si las superficies de figuras geométricas eran de ese tipo. De hecho, resolvieron este impasse creando una categoría (paralela a la de fenómenos matemáticos) que denominaron “Áreas” [052,36520,37227]. La dificultad para identificar y clasificar los fenómenos matemáticos apareció también cuando consideraron el número de oro [053,13521,14276]:

P2: Eso estaría dentro de lo matemático, ¿no?

P2: ¿O dentro de lo arquitectónico?

PX: (Risas). Bueno.

PX: Matemático.

La confusión sobre el significado de fenómeno matemático se hizo aún más patente en la preparación del borrador de la unidad didáctica, cuando recapitulaban sobre lo hecho con anterioridad [096,17348,17710]. La confusión de significado sobre la noción de fenómeno también se evidenció en las dificultades que tuvieron

para diferenciar entre fenómenos matemáticos, superficies de figuras geométricas y modelización de fenómenos, dificultad que seguramente estaba en el origen de la clasificación que acabo de mencionar [052,41327,42353]:

P4: La única discusión era el de si las áreas y los volúmenes era un fenómeno matemático o...

P2: Es que de todas maneras, en principio, yo... Si es que luego en el fondo también son...

P3: O sea, todos los fenómenos esos son matemáticos porque ()

P2: No, ya, ya. No hombre pero por ejemplo, la modelización esa tiene un... Es lo que tú decías, tiene un área muy concreta de trabajo.

P3: Tiene otro carácter. Si es a eso a lo que me refiero. Tanto la modelización... es que las áreas y los volúmenes tienen un carácter distinto a los fenómenos matemáticos que estamos diciendo de ecuaciones de cónica y del teorema de Pitágoras y...

P1: Que no; yo no encuentro nada, de verdad.

Se aprecia entonces que clasifican la modelización como una categoría en la que se puede ubicar cierto tipo de fenómenos [052,23829,24561]:

P2: Más que economía, sería modelaje, porque lo mismo que hablas de economía, puedes hablar de biología. Es decir, comportamientos. Modelajes de comportamientos de... de la naturaleza tampoco, de... de modelización de fenómenos. No sabía la palabra. Ahí habría otra gran familia.

P3: Sí, y otra familia grande.

P2: Ahora, en lo que se refiere a áreas, volúmenes y eso, que sería... esa que hemos puesto ahí, entraría a formar parte dentro de la adaptación de fenómenos.

Como mostraré más adelante, estas confusiones se resolvieron en las sesiones de preparación de la unidad didáctica, con motivo de los comentarios a las transparencias, cuando el grupo desarrolló un procedimiento para realizar el análisis fenomenológico basado en la clasificación de fenómenos de acuerdo con las subestructuras que los modelizan.

Actitud hacia la Modelización

Aunque el grupo realizó un trabajo detallado de análisis fenomenológico y logró desarrollar un esquema de trabajo basado en el análisis de las subestructuras, se preocupó mucho menos por la modelización. Vieron la modelización como una competencia cognitiva de los escolares: un proceso que los escolares debían realizar al resolver un problema, pero que no implicaba ninguna dificultad. El paso de una situación descrita en términos no matemáticos a su correspondiente modelo matemático les parecía evidente. Ésta puede ser una de las razones por las cuales ellos no utilizaron la información que recogieron para el análisis fenomenológico en el análisis y selección de las tareas que conformaron la unidad didáctica.

En la sesión en la que estaban trabajando sobre errores y dificultades, el grupo discutió sobre la problemática de la modelización, como proceso que debían realizar los escolares. Una vez se ha llegado al modelo matemático, el problema de la modelización parece inmediato [065,94265,95420]:

P5: Y en el momento en que les pones a lo mejor un problema de funciones de segundo grado un poco... A ver cómo me explico. Interdisciplinar, ¿no? Ya fuera del concepto exactamente matemático. Les pones un problema de cualquier cosa en la que, al final, tienen que hallar la función de segundo grado y resolverla.

P3: Para eso ya es para todo.

P5: Sí, pero... Es que no sé; a lo mejor es eso: llegan a la función de segundo grado, pero como ya no es a , b y c , sino que son áreas, hectáreas y yo qué sé... O sea, yo es que vi que llegaban, y no sabían qué hacer ya con la ecuación. Y digo: "Pero si ya habéis llegado, resolvedla". Llegaban y se quedaban parados en la ecuación.

Esta actitud hacia la modelización como competencia cognitiva de los escolares, permaneció durante el curso. Cuando estaban preparando el borrador de la unidad didáctica, discutieron sobre un problema y, de nuevo, no consideraron las dificultades de pasar de la descripción en palabras al modelo matemático. Su preocupación se centró en el conocimiento de los procedimientos simbólicos para resolver el problema matemático [101,32155,33097]:

P2: Pues ponemos eso. Y podemos poner lo del rectángulo.

P4: ¿Cómo es eso?

P2: A ver. Se tiene un rectángulo de lado..., cuyo lado menor es x , y cuyo lado mayor es cinco veces..., cinco unidades más grande. Si se sabe... Se conoce el área, que vale lo que sea. ¿Cuánto vale el lado del..., cada uno de los lados del rectángulo?

...

P3: ¿Y eso cómo lo averiguas?

P4: Haciendo un sistema.

P2: No, ¡qué coño un sistema! Si es una ecuación de segundo grado.

P3: Ya sé que es una ecuación de segundo grado.

P2: Y ¿cómo lo averiguas? Pues resolviéndola.

P3: A ver si saben la fórmula.

P2: Eso es.

P4: Sí ().

P3: Y eso es lo que he dicho yo antes.

Procedimiento de Análisis Fenomenológico

Ya he descrito algunas de las dificultades de significado que el grupo tuvo que afrontar en relación con la noción de fenomenología. Mostré que surgieron confusiones con el significado de las nociones de fenómeno (y, en particular, de la noción de fenómeno matemático) y modelización. Estas confusiones y dificultades los llevaron a proponer una primera organización de los fenómenos en cuatro categorías: fenómenos matemáticos, fenómenos no matemáticos, áreas y modelización. En esta sección, exploro con mayor detalle la resolución de estas dificultades y el proceso de construcción del significado de la noción de fenomenología. En particular, muestro cómo el grupo pasó de la organización de los fenómenos que acabo de describir a una organización basada en subestructuras de la estructura matemática. Esta evolución en la construcción del significado de este organizador del currículo se puede caracterizar por seis etapas:

1. confusiones y dificultades iniciales relacionadas con la noción de fenómeno,
2. organización inicial de los fenómenos en cuatro categorías,
3. lectura y análisis de los comentarios a las transparencias,
4. identificación de un procedimiento para el análisis fenomenológico basado en subestructuras de la estructura matemática,
5. negociación del significado de este procedimiento entre los miembros del grupo, y
6. reconocimiento de la dificultad para poner en práctica el procedimiento en cuestión.

En su primera aproximación a la fenomenología, el grupo organizó los fenómenos en cuatro categorías: fenómenos matemáticos, fenómenos no matemáticos, áreas y modelización. La inclusión de las dos últimas categorías representaba la solución a las dificultades de significado encontradas por el grupo. Estas dificultades tuvieron que ver con el carácter matemático de los fenómenos relacionados con superficies de figuras geométricas y con la noción de modelización. Como formador, en los comentarios a las transparencias, les hice ver las deficiencias de esta aproximación. Sin embargo, el grupo sólo regresó a los comentarios a las transparencias cuando estaban preparando el borrador de la unidad didáctica. Al hacerlo, y analizar cuidadosamente las indicaciones incluidas en estos comentarios, el grupo reconoció dichas deficiencias [098,14195,14893]:

P3: Pero la excentricidad era 1, siempre, vimos.

P2: Bueno, pero que... A lo que voy. Que a la hora de hacer fenomenología, hay que tener en cuenta las familias de donde proceden. Y que la división de fenómenos matemáticos y no matemáticos, no vale. Eso es lo que pone aquí. Hay que hacerlo por familias de estructuras matemáticas.

La reflexión sobre los comentarios a las transparencias generó en algunos de los participantes una primera idea sobre el procedimiento que debían usar para realizar el análisis fenomenológico. Esta idea se centró en la identificación de parcelas de la estructura conceptual (dentro del sistema de representación simbólico) con las que se podían modelizar y organizar ciertos fenómenos [096,18036,19049]:

P1: Haciendo uso de cada... Bueno, cogimos el mapa conceptual y vimos cada tipo de subconjunto matemático del concepto general, eso a qué nos llevaba, ¿no? Es decir: de, por ejemplo, tomar las funciones, dentro de las formas de expresión, las que no tienen ni término en x ni término independiente, no. Las que son $f(x)$, de la forma: ax^2 . Que, por ejemplo, modelizan por las áreas de los cuadrados. Pues, dependiendo de cada trozo, o cada...

La idea anterior les sugirió entonces un procedimiento sistemático para resolver el problema del análisis fenomenológico. Uno de los participantes lo describió de manera resumida de la siguiente manera [098,16303,16724]:

P2: No lo sé. Lo que está claro es eso: que hay que buscar fenómenos... O sea, estructuras matemáticas, y de ahí, qué fenómenos se deducen.

Pero algunos miembros del grupo no entendieron de qué se trataba el procedimiento. Esta situación generó un proceso de negociación de significado en el que unos miembros buscaban explicar (en algunos casos con ejemplos específicos [098,50153,51214]) el procedimiento en cuestión [098,22888,24009]:

P2: Lo que te comenta es: vamos a ver. Tú suponte: funciones de segundo grado. Vamos a quedarnos con la trayectoria de la función de segundo grado. Pues si nos quedamos con la trayectoria, hay un grupo de fenómenos que se explican por la trayectoria de las funciones de segundo grado, ya sea, pues..., la trayectoria de los cometas, trayectorias de móviles. ¿Qué te digo yo?, de caída libre de cuerpos, tal, cual.

P3: Ya, ya.

Este proceso de negociación de significado obligó a algunos miembros a leer de nuevo los comentarios a las transparencias, interpretar estos comentarios y describir en detalle el procedimiento que pretendían realizar, materializándolo dentro del grupo [098,25287,27424]. Una vez que ellos comprendieron el procedimiento, reconocieron que no era fácil llevarlo a la práctica. La materialización del significado del análisis fenomenológico se evidencia en el reconocimiento de su complejidad [098,45199,45360]:

P2: Sí. Es más complicado, y aparte esto es muy sutil, y no sabes si lo has puesto todo, si te has dejado muchas cosas en el tintero.

Puesta en Práctica del Análisis Fenomenológico

A pesar de haber desarrollado y consolidado un procedimiento sistemático para el análisis fenomenológico, basado en el análisis de subestructuras, el grupo no logró poner en práctica esta información dentro del diseño curricular. En las transcripciones de las sesiones de preparación del borrador y de la unidad didáctica aparecen muy pocas referencias a la fenomenología.

La conexión entre la fenomenología y el diseño curricular es débil e intuitiva. Se manifiesta en un cierto interés por incluir “ejercicios verbales” y “situaciones cotidianas” que parece surgir de tres fuentes:

- ◆ mostrar a los escolares que lo que están estudiando tiene alguna aplicación,

- ◆ la existencia de este tipo de ejercicios dentro de los libros de texto, y
- ◆ una aparente sensación de que es algo que hay que hacer en el diseño de la unidad didáctica.

Durante la sesión de preparación del borrador de la unidad didáctica encontramos un episodio en el que se sugiere una relación entre el análisis fenomenológico y la enseñanza de los sistemas de representación. Uno de los miembros hace ver que los fenómenos que han identificado y la manera como los han organizado pueden ser de utilidad a la hora de diseñar actividades relacionadas con una parcela específica del tema (los ceros de la función cuadrática). Éste es el tipo de puesta en práctica del análisis fenomenológico que se esperaba que el grupo realizara. Como mostraré en seguida, esta sugerencia no se materializó dentro del grupo y, cuando entraron de lleno en la selección y diseño de actividades, se olvidó por completo [099,35457,35926]:

P3: Pero bueno. Pero es que así es más operativo, porque tú, cuando vayas a trabajar los ceros de funciones cuadráticas, ya echas mano a esta fenomenología. Sin embargo, desde esta..., desde esta... Este sistema no es operativo; es descriptivo.

La preocupación por incluir “ejercicios verbales” se aprecia en el siguiente episodio, de la sesión de preparación de la unidad didáctica, en el que no se hace referencia a ningún fenómeno. Se caracterizan los “ejercicios verbales” como aquellos que están acompañados de texto [102,11044,11553]:

P1: Eso sí. Eso también, dijimos de poner en este trozo..., poner ejercicios verbales, ¿no? En los que..., bueno, que estén acompañados de un texto, pero..., ejercicios verbales.

El papel de las situaciones cotidianas es esencialmente de motivación. En varias ocasiones, cuando están diseñando la secuencia de actividades y de clases de la unidad didáctica, algunos miembros sugieren utilizar las situaciones cotidianas para introducir un tema o una noción y para mostrar alguna aplicación de lo que se está trabajando [102,103662,104258]. De hecho, el papel de la situación cotidiana parece superficial. Como se evidencia en el siguiente episodio, la idea es comenzar por la situación cotidiana pero pasar enseguida al trabajo analítico tradicional [102,96233,96613]:

P2: (). Una actividad con la, por ejemplo, trabajando con este tipo de (), con la función de la industria. Entonces, luego unas..., unas actividades ya, a lo mejor, más aplicables, más analíticas, y que no tengan que ver, a lo mejor, con un ejemplo cotidiano.

No obstante, la preocupación por incluir actividades relacionadas con situaciones cotidianas no es sistemática. De hecho, cuando estaban terminando el diseño de la unidad didáctica, uno de los miembros cayó en la cuenta de que no las habían incluido [106,57507,58147].

7. EMERGENCIA DE UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA Y DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

En este estudio centré mi atención en la comunidad de práctica de un grupo de alumnos de la asignatura. Mi propósito era explorar, describir y caracterizar el proceso de aprendizaje como práctica social del grupo de futuros profesores que escogieron el tema de la función cuadrática. Éste fue, por lo tanto, un estudio de caso. En los otros estudios de este trabajo (análisis de las transparencias, de las grabaciones y de los trabajos finales) utilicé las producciones de los grupos de futuros profesores como una de las fuentes de información. En este caso, me interesé por explorar el proceso que dio lugar a esas producciones y actuaciones. Buena parte del aprendizaje que realizan los futuros profesores dentro de la asignatura tiene lugar cuando ellos preparan los trabajos que van a presentar en clase o a entregar a los formadores. En este estudio examiné en detalle esta dimensión del aprendizaje de los futuros profesores. Puesto que los trabajos se prepararon y presentaron en grupo, mi interés fue el aprendizaje del grupo. Exploré entonces los procesos de negociación de significado dentro del grupo, como procesos de construcción de unos significados sociales a partir de los significados individuales de cada participante.

He presentado una descripción detallada del proceso de desarrollo del conocimiento didáctico de este grupo de futuros profesores para algunas de las nociones del análisis de contenido. Por ejemplo, he mostrado cómo evolucionaron sus significados de la estructura conceptual y los sistemas de representación, al describir las confusiones, conflictos y resoluciones con respecto a las conexiones entre sistemas de representación. He presentado análisis similares para la fenomenología y la puesta en práctica de los organizadores del currículo del análisis de contenido. Estos análisis no solamente describen la evolución de los significados del grupo, sino que también dan luces sobre los factores que influyeron esa evolución.

El grupo no pareció ser consciente de que los organizadores del currículo que ponían en práctica cuando realizaban las tareas tenían un significado teórico. La preocupación del grupo se focalizó en su interpretación del significado técnico de los organizadores del currículo: la utilización de las nociones para analizar su tema y realizar la tarea del momento. El proceso de negociación de significado que tuvo lugar cuando el grupo realizó las tareas contribuyó a la construcción de los significados tanto técnicos como prácticos de los organizadores del currículo. El conocimiento didáctico se desarrolló en un juego permanente (y en la mayoría de los casos inconsciente) entre el significado técnico y práctico de las nociones implicadas.

El análisis de las transcripciones me permitió caracterizar el aprendizaje del grupo en términos de sus tres dimensiones.

7.1. Negociación de Significados y Compromiso Mutuo

La experiencia docente, la asignatura de prácticas y los libros de texto son los tres elementos del entorno que más influyeron en los procesos de negociación de significado dentro del grupo. El conocimiento intuitivo que los participantes habían desarrollado en sus experiencias como profesores les permitió hacer múltiples

propuestas para el análisis cognitivo. La experiencia de la asignatura de prácticas jugó otro papel: aportó información que permitió fundamentar y validar argumentos dentro de las discusiones del grupo. Los libros de texto aportaron información para la estructura conceptual, y fueron una fuente de información que permitió validar afirmaciones y resolver dudas. También jugaron un papel central en el diseño de la unidad didáctica. Las actividades que el grupo propuso para la unidad didáctica surgieron de la selección y transformación de ejercicios que encontraron en ellos.

Las transcripciones pusieron en evidencia la existencia de un líder dentro del grupo. Él fue quien planificó, dirigió y verificó el trabajo del grupo. También fue quien aportó la mayoría de las ideas. Paralelamente al líder, algunos miembros asumieron un papel de “participación complementaria”. Estos participantes esperaban que el líder les indicara lo que tenían que hacer, para después presentarle reportes de su trabajo y esperar su aprobación.

Aunque el grupo mantuvo en general un ambiente de trabajo relajado, hubo momentos de tensión a lo largo de las sesiones. Estos momentos tuvieron que ver, por un lado, con la sesión de evaluación en la que el líder estuvo ausente y en la que se generaron múltiples conflictos de significado entre dos de los miembros del grupo. Por el otro lado, hubo momentos de gran tensión entre el líder y uno de los participantes, diferencias que se llevaron al nivel personal, pero que más tarde se subsanaron.

En las sesiones se percibió un esfuerzo permanente de búsqueda de significado. La confusión fue un elemento de este proceso de búsqueda y se expresó en situaciones en las que se cambió de opinión sobre un tema o se asumieron posiciones tentativas. Paralelamente a la confusión, aparecieron situaciones de conflicto de significado en las que dos o más miembros asumieron posiciones incompatibles con respecto a una cuestión. Para resolver las confusiones y los conflictos de significado el grupo utilizó diferentes mecanismos. En la mayoría de los casos, estos procesos de resolución dieron lugar a nuevas propuestas de significado que terminaron siendo adoptadas por el grupo. Algunas de las propuestas fueron el producto de procesos de descubrimiento de significado, en los que apareció una nueva idea que contribuyó claramente a la realización de la tarea del momento. Al final, muchos de estos significados se materializaron paulatinamente dentro del grupo.

7.2. Comprender y Afinar la Empresa Conjunta

En el caso de la comunidad de práctica objeto de este estudio, la constitución y desarrollo de la empresa conjunta se basó en dos procesos relacionados entre sí:

- ◆ la definición de la empresa y sus interpretaciones, teniendo en cuenta las condiciones externas que la afectaron y
- ◆ la conformación de responsabilidades y el desarrollo del compromiso, con especial atención a la actitud permanente hacia la eficiencia del trabajo que se realizó.

La definición de la empresa estuvo supeditada a condiciones intrínsecas a las tareas que el grupo tenía que realizar (interpretación de la tarea y dificultad y amplitud del tema a tratar) y por condiciones externas a la comunidad de práctica (comentarios a las transparencias y comentarios de los formadores). Los comentarios

a las transparencias jugaron un papel central en los procesos de negociación de significado.

Todos los miembros del grupo manifestaron una actitud positiva y permanente en la búsqueda de la empresa conjunta. Esta actitud se expresó en su compromiso casi ilimitado con los propósitos que se querían lograr y en su disposición a asumir las responsabilidades que les fueron asignadas o para las que ellos mismos se propusieron.

7.3. Desarrollo del Repertorio Compartido

El grupo, con la dirección del líder, desarrolló y estableció rutinas de trabajo para las actividades en las sesiones, la actividad individual por fuera de las sesiones y las actividades relacionadas con tareas específicas durante las sesiones. Estas rutinas fueron de dos tipos: trabajo individual con puesta en común posterior y trabajo de exploración con lluvia de ideas.

La instrucción insistió sistemáticamente en el tema de las conexiones dentro de la estructura conceptual. En las primeras producciones del grupo aparecieron algunas relaciones entre sistemas de representación. No obstante, el grupo se hizo consciente de la importancia de este aspecto de la estructura conceptual cuando estaban preparando el borrador de la unidad didáctica. En ese momento, el grupo logró diferenciar con claridad la estructura conceptual de los sistemas de representación.

Desde la perspectiva de su puesta en práctica, el grupo desarrolló rutinas de trabajo que pusieron en juego la estructura conceptual tanto en el análisis cognitivo, como en el análisis de instrucción. En el primero, sirvió de referencia para verificar, ubicar y organizar errores y dificultades. En el segundo, sirvió de guía para organizar la secuencia de nociones que se abordaron en la unidad didáctica.

Los sistemas de representación fue el organizador del currículo predominante en las producciones del grupo. El trabajo se centró, con el propósito de concretar el tema, en los sistemas de representación simbólico y gráfico. Las transcripciones evidencian una evolución en la construcción del significado de las conexiones entre los sistemas de representación. Este tema comenzó a ser importante en el análisis cognitivo, cuando el grupo reconoció que podía estar en la base de una de las dificultades de los escolares.

El análisis de las transcripciones ponen de manifiesto dos dificultades del grupo relacionadas con las nociones de estructura conceptual y sistema de representación. Por un lado, y desde la primera sesión, el grupo no logró diferenciar con claridad las nociones de ecuación y función cuadrática (miradas desde una perspectiva exclusivamente simbólica). Por el otro, cuando entraron en el detalle de las conexiones entre los sistemas de representación simbólico y gráfico, el grupo no logró manejar con fluidez los aspectos técnicos del significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática. La primera dificultad se resolvió paulatinamente a lo largo de las sesiones. Para la segunda, el grupo sólo logró una solución parcial.

Los sistemas de representación se pusieron en práctica en el análisis fenomenológico, el análisis cognitivo y el diseño curricular. En el análisis fenomenológico dieron lugar a criterios con los que se organizaron los fenómenos. En el análisis cognitivo, la noción de conexión les permitió identificar una dificultad de los es-

colares. Y, en el diseño de la unidad didáctica, los sistemas de representación fueron un tema central de sus objetivos y sus contenidos. Adicionalmente, el grupo se basó en los sistemas de representación para desarrollar un procedimiento que les permitió seleccionar y organizar los problemas de los libros de texto. El grupo utilizó esta selección y organización para diseñar las actividades que conformaron la unidad didáctica.

En la asignatura se enfatizó el análisis fenomenológico basado en subestructuras. Este tipo de análisis debía servir para que los futuros profesores recogieran y organizaran información sobre los fenómenos que podían ser modelizados por diferentes subestructuras de la estructura matemática en la que trabajaba cada grupo. Se esperaba que cada grupo utilizara esta información a la hora de diseñar actividades que pretendieran poner en juego el conocimiento de los escolares sobre estas subestructuras. Por lo tanto, se pretendía que los futuros profesores construyeran el significado de la fenomenología como procedimiento de recolección y análisis de información y que fueran capaces de utilizar esta información en el diseño curricular. En un comienzo, el grupo se enfrentó a dificultades relacionadas con el significado de las nociones de fenómeno y modelización. Estas dificultades estaban en el origen de una primera organización de los fenómenos en cuatro categorías: fenómenos matemáticos, fenómenos no matemáticos, áreas de figuras geométricas y modelización. Esta organización sólo cambió con motivo de la revisión de los comentarios a las transparencias durante la sesión de preparación del borrador de la unidad didáctica. En ese momento, el grupo descubrió, negoció y materializó el procedimiento de análisis por subestructuras.

No obstante, en el diseño curricular, la relación entre el análisis fenomenológico y el diseño de actividades fue débil e intuitiva. Sólo hay referencias a “ejercicios verbales” y situaciones cotidianas como medios para motivar a los escolares e introducir algunos temas y nociones.

8. COMUNIDAD DE PRÁCTICA: UNA HERRAMIENTA PARA VER, PENSAR Y ACTUAR

En este estudio abordé el desarrollo del conocimiento didáctico dentro de la asignatura desde una perspectiva diferente a la utilizada en los otros estudios que forman parte de este proyecto. Me interesé por explorar en profundidad los procesos que dan lugar a las producciones y las actuaciones de los futuros profesores. Para ello, diseñé un estudio de caso en el que estudié el trabajo de un grupo concreto de futuros profesores. Mi fuente de información fueron las transcripciones de las grabaciones de sus sesiones de trabajo por fuera del aula. Me basé en la teoría social del aprendizaje de Wenger (1998) para fundamentar conceptual y metodológicamente el estudio. Ésta fue una decisión que no estaba exenta de riesgos, puesto que no era claro “en qué medida se puede aplicar esta aproximación al aprendizaje en las escuelas y las universidades y qué implicaciones tiene para la investigación” (Krainer, 2003, p. 96). En este apartado, abordaré estas cuestiones.

Mostraré cómo, para el caso concreto de este estudio, la noción de comunidad de práctica se convirtió en una herramienta para ver, pensar y actuar¹⁴⁸.

8.1. Una Herramienta para “ver”

Con este estudio, he podido caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de un grupo de futuros profesores a partir de resultados que no es posible obtener en los otros estudios de este proyecto. Estos resultados muestran que, detrás de las presentaciones que los grupos de futuros profesores que participan en la asignatura hacen en clase y de los trabajos que entregan a los formadores, hay una complejidad propia del desarrollo de una comunidad de práctica. Al analizar sistemática y detalladamente esta complejidad he identificado y caracterizado múltiples aspectos del aprendizaje social de un grupo de futuros profesores. Considero que estas caracterizaciones, con el nivel de detalle que las he presentado, son interesantes e importantes por sí mismas. Ellas iluminan dimensiones de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que en muchas ocasiones permanecen opacas en la literatura de investigación. También permiten explicar algunos de los resultados de los otros estudios que forman parte de este proyecto. Por ejemplo, permiten comprender los procesos de negociación de significado que se materializaron en las transparencias y el trabajo final del grupo. Asimismo desvelan las diferentes posiciones de los participantes, sus dudas y confusiones, los conflictos que tuvieron que afrontar y resolver y los esquemas y técnicas que desarrollaron para resolver las tareas que les fueron asignadas. En definitiva, el análisis en profundidad de las transcripciones ilumina el progreso del grupo en su compromiso por construir conjuntamente los significados que ellos consideraron necesarios para satisfacer, por un lado, los requisitos de la asignatura y, por el otro, su interés por convertirse en profesores de matemáticas. De esta manera, explico y fundamento con evidencia algunos de los aspectos más importantes del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que establecí en los capítulos anteriores. Analizaré en detalle la relación entre todos los estudios en el siguiente capítulo.

Una gran parte de la investigación sobre el conocimiento del profesor centra su atención en los aspectos cognitivos de un aprendizaje que se supone individual. Sin embargo, la mayoría de los programas de formación de profesores implican procesos sociales en los que los profesores trabajan en grupo y discuten entre ellos, buscando llegar a consensos. En el caso de nuestra asignatura, esta aproximación es clara: los futuros profesores trabajan en grupo y es el grupo el que desarrolla su conocimiento didáctico y presenta el resultado de su trabajo al resto de la clase y a los formadores. Por esta razón, abordé este estudio desde una teoría social del aprendizaje en la que la idea de comunidad de práctica es central. Esta teoría enfatiza aspectos sociales del aprendizaje que las teorías del aprendizaje centradas en el individuo ignoran. El estudio muestra que estos aspectos son importantes a la hora de caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores. No solamente se determina *qué* aprende el grupo, sino *cómo* aprende y *de qué* depende ese aprendizaje. Es, por lo tanto, una visión amplia del noción de aprendizaje en la que el contexto juega un papel central y en la que se

¹⁴⁸ “Un discurso teórico no es una abstracción. Es un conjunto de herramientas conceptuales que nos permite ver, pensar y actuar de maneras innovadoras” (Wenger, 2004, p. 2).

destaca el carácter interdependiente del aprendizaje. El grupo aprende porque sus miembros se comprometen mutuamente con un propósito común. Para ello, negocian significados que se materializan en un repertorio compartido con el que resuelven las tareas que tienen asignadas.

Al realizar el estudio, tuve que codificar y analizar la complejidad contenida en 950.5 minutos de discusiones entre cuatro personas. Existía, por lo tanto, el riesgo de perderme en la complejidad de los datos e ignorar aspectos que podían ser relevantes. Sin embargo, al interpretar, adaptar y hacer operacional para la investigación la teoría social del aprendizaje de Wenger, pude controlar y evitar estos riesgos. Este proceso me permitió construir sistemática y estructuradamente unas categorías de análisis. De esta manera, le di un significado específico a las nociones que articulan el aprendizaje en comunidades de práctica dentro del contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y pude diseñar instrumentos de codificación y análisis de esa complejidad.

El estudio involucró también una complejidad metodológica que se manifestó en la generación de 7.412 registros de codificación. Por esta razón, tuve que sintetizar esa información para reducir los 950.5 minutos de grabación en una serie de cuestiones relevantes. En seguida, realicé un proceso de análisis en el sentido inverso, con el que me fue posible caracterizar estas cuestiones y fundamentarlas sistemáticamente en la evidencia disponible. Este tipo de procedimiento fue dispendioso pero permitió abordar sistemáticamente un cuerpo muy grande de datos y obtener resultados cuya validez se fundamenta en el proceso mismo.

8.2. Una Herramienta para “Pensar”

Los resultados de este estudio muestran que el grupo función cuadrática constituyó y consolidó una comunidad de práctica: en un proceso permanente de búsqueda y negociación de significados, el grupo estableció un compromiso mutuo en la definición de una empresa conjunta para la que produjo un repertorio compartido. El análisis de las transcripciones pone en evidencia que, no solamente los participantes aprendieron y progresaron como individuos, sino que hubo *aprendizaje interdependiente*: el grupo, como entidad, progresó en su capacidad de abordar las tareas a mano y cada participante se preocupó por el aprendizaje de los demás. Éste fue un estudio de caso. Por lo tanto, no se puede concluir que los demás grupos de futuros profesores de la asignatura establecieran y consolidaran comunidades de práctica. Por ejemplo, no necesariamente en todos los grupos emergió un líder. Por otro lado, el análisis de la interacción en clase y de los documentos finales sugieren que algunos grupos se organizaron como equipos: dividían las tareas en sub-tareas, para las que cada miembro asumía una responsabilidad. En seguida, construían las presentaciones como la suma de estas partes. Cuando un grupo se organiza como un equipo, hay aprendizaje (Anderson y Specjk, 1998). Sin embargo, la negociación de significado y el aprendizaje interdependiente no son características propias de los procesos de aprendizaje de un equipo (Krainer, 2003, p. 95). Lo que fue importante en el caso del grupo función cuadrática, objeto de estudio, fue el compromiso mutuo de los miembros en la búsqueda y definición de una empresa conjunta que involucró la preocupación por el aprendizaje de todos los miembros del grupo. No es una cuestión de colaboración versus cooperación (ver, por ejemplo, Beck y Kosnik, 2001; Peter-Koop et al., 2003). Entiendo que, en

contraste con la perspectiva de la comunidad de práctica, la aproximación a la formación de profesores desde la noción de colaboración no logra tener en cuenta la complejidad de las interacciones, ni propone una estructura conceptual suficientemente amplia para describir y analizar los procesos de aprendizaje que involucran la negociación de significado.

El trabajo en grupo es *uno* de los contextos en los que el aprendizaje de los futuros profesores tiene lugar dentro de la asignatura. Por ejemplo, ellos también aprenden, individual y colectivamente, durante las clases, cuando realizan trabajos individuales, en otras asignaturas y al dar clases particulares. No obstante, dado que el esquema de evaluación de la asignatura da mucha importancia a las presentaciones y a los documentos producidos por los grupos, y que esas presentaciones y documentos son el resultado del trabajo en grupo, resulta claro que nosotros valoramos especialmente los procesos de aprendizaje que tienen lugar cuando los grupos trabajan por fuera del aula. Como la enseñanza tiene lugar esencialmente en el aula, uno tiende a pensar que la mayor parte del aprendizaje se realiza en ese contexto. Este estudio muestra que éste no es necesariamente el caso.

Aunque en este estudio he utilizado la noción de comunidad de práctica como una herramienta de investigación, sus resultados ponen en evidencia los posibles beneficios de abordar el diseño y el desarrollo de la asignatura desde esta perspectiva. ¿Es esto posible? ¿Qué implicaciones tendría?

8.3. Una Herramienta para “Actuar”

Wenger (1998) ha resaltado el riesgo de desarrollar una “visión romántica” de la noción de comunidad de práctica (p. 132) y pensar que la noción en sí misma es la solución a problemas de aprendizaje o que toda comunidad de práctica favorece un aprendizaje relevante y significativo. La idea de “comunidad” puede “malinterpretarse y convertirse en un término sin sentido... el lápiz del investigador puede transformar mágicamente un grupo de personas en una comunidad” (Sumsion y Patterson, 2004, p. 943). Yo he presentado un procedimiento de indagación sistemática, criterios y evidencia que muestran cómo el grupo de función cuadrática consolidó una comunidad de práctica que favoreció su aprendizaje. De hecho, la investigación en formación de profesores está dando cada vez más importancia a las comunidades de práctica como espacios destacados para el aprendizaje y el desarrollo de los profesores. Por ejemplo, las comunidades de práctica pueden promover la capacidad de aprendizaje de los futuros profesores (Knight, 2002, p. 240; Wood, 2003, p. 65); desarrollar la consciencia sobre el valor de la colaboración (Beck y Kosnik, 2001, p. 925), ser un contrapeso a la tendencia natural de los futuros profesores hacia una pedagogía de transmisión (p. 945); y motivar la constitución de comunidades profesionales (Lachance y Confrey, 2003, p. 38). El aprendizaje de los profesores no termina en la universidad. Ellos continúan aprendiendo en su práctica docente en la institución escolar. Es allí donde la constitución y la consolidación de comunidades de práctica puede ser aún más importante (Knight, 2002, p. 229).

Si nosotros, como formadores, valoramos el aprendizaje que tiene lugar cuando un grupo trabaja como una comunidad de práctica, ¿cómo podemos promover y cultivar ese tipo de escenario? Para responder esta pregunta, los formadores de profesores debemos preocuparnos no solamente por lo que esperamos que

los futuros profesores aprenden y son capaces de hacer, sino también por cómo ellos aprenden y qué tipo de instrucción es coherente con ese aprendizaje. Por lo tanto, debemos revisar el diseño de los planes de formación desde esta perspectiva. A continuación, considero, a manera de ejemplo, algunas de las cuestiones que surgen de los resultados de este estudio y que pueden tenerse en cuenta para estos propósitos. Me refiero a los comentarios escritos de los formadores, la definición de las tareas que se asignan a los futuros profesores y el asesoramiento de los grupos.

Una de las cuestiones más relevantes que emergió de este estudio fue la caracterización del papel que jugaron los comentarios a las transparencias en los procesos de negociación de significado del grupo. Estos comentarios fueron la principal referencia al significado técnico establecido en la comunidad del aula. En cambio de dar soluciones a las deficiencias detectadas en las transparencias, los comentarios proponían nuevas preguntas y abrían nuevos espacios para la discusión y la reflexión. En este sentido, los comentarios a las transparencias promovieron y guiaron nuevos procesos de negociación de significado y fomentaron el aprendizaje interdependiente dentro del grupo.

Otro aspecto del diseño de la asignatura que influyó en los procesos de negociación de significado y que se evidenció en diversos episodios fue la manera como los formadores definimos y propusimos las tareas que los grupos debían realizar. Los futuros profesores esperan que se les asignen tareas claramente definidas en las que ellos saben qué es lo que se espera que ellos hagan. Si embargo, en el desarrollo de la asignatura se proponían problemas de carácter general (el análisis del tema de un grupo —e.g., la función cuadrática— con una noción —e.g., los sistemas de representación—) que cada grupo debía contextualizar y resolver de acuerdo con las características de su tema, su conocimiento y experiencia previa, la información que ellos recababan de diversas fuentes y el repertorio compartido que habían desarrollado en las reuniones previas. Buscamos que las tareas representaran un reto que los futuros profesores podían afrontar y resolver con las herramientas y el conocimiento que tenían disponibles. En ese sentido, las tareas promovieron el aprendizaje interdependiente.

El diseño de las tareas y los comentarios al trabajo de los grupos pueden promover el aprendizaje interdependiente en un grupo *si éste ya se ha constituido como una comunidad de práctica*. De otra manera, en un grupo que trabaja con el esquema de equipo, sus miembros pueden interpretar los comentarios y la definición de las tareas como dos condicionantes adicionales de las rutinas de trabajo que han establecido, sin que estos factores promuevan necesariamente la negociación de significado. Pero, si valoramos el tipo de aprendizaje que emerge de una comunidad de práctica, ¿cómo fomentamos y cultivamos este tipo de escenario? En el caso de nuestra propia experiencia, vemos que debemos cambiar nuestra actitud como formadores. Hasta el momento, cuando interactuamos con los futuros profesores (en el aula o en las reuniones de tutoría) nuestra preocupación se ha centrado en *qué* han aprendido y en ayudarlos a mejorar su trabajo (transparencias, presentaciones y documentos). Sin embargo, ahora somos conscientes de que debemos tener en cuenta los procesos de aprendizaje que dan lugar a las producciones de los grupos y debemos desarrollar estrategias que promuevan el aprendizaje interdependiente y la negociación de significado. Debemos convertirnos en

“asesores” del trabajo de los grupos. Esto implica que debemos preocuparnos por sus procesos de aprendizaje. Para ello, nuestra atención no debe centrarse exclusivamente en constatar en qué medida han desarrollado un repertorio compartido y corregir sus deficiencias. También debemos atender a los factores que pueden afectar tanto el desarrollo del compromiso mutuo entre sus miembros, como la claridad y validez de su empresa conjunta. El “modelo de proyecto de Aalborg” (Hansen y Jensen, 2004) es un ejemplo de este tipo de aproximación a la formación profesional.

De la propuesta anterior emerge una nueva caracterización del formador de profesores. Si se aborda la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria desde la perspectiva de las comunidades de práctica, entonces debemos cuestionarnos acerca de nuestras competencias como formadores: “Me pregunto si mi conocimiento profesional y mi experiencia como formador son suficientes para apoyar a los futuros profesores que entran en este nuevo escenario” (Doecke, 2004, p. 203). Los formadores debemos desarrollar nuevas competencias y este tipo de aproximación impone nuevos requisitos a nivel institucional (Beck y Kosnik, 2001, p. 925). ¿Cuáles son los factores que afectan la “calidad” de las comunidades de práctica que se pueden promover en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? (Llinares y Krainer, 2006, pp. 444-445) ¿Qué competencias debemos desarrollar los formadores? ¿Qué condiciones se imponen a nivel institucional? Éstas son algunas de las preguntas que debemos abordar de cara al futuro.

UN FENÓMENO, CUATRO PUNTOS DE VISTA

En este capítulo, presento el análisis global e integrado de los resultados de los estudios empíricos realizados dentro de este proyecto de investigación. Mi propósito es dar respuesta a la cuarta pregunta que formulé en el capítulo 1:

¿Qué caracteriza los procesos de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria que participan en un programa de formación inicial?

Abordé esta pregunta en el contexto de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato del curso 2000-2001 y desde la perspectiva del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en ella. Exploré este fenómeno desde cuatro puntos de vista, que corresponden a los cuatro estudios que describí en los tres capítulos anteriores. En este capítulo, recojo los resultados de estos cuatro estudios. Mi intención es integrar estos resultados para caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores y proponer algunas conjeturas de explicación de ese proceso. Para ello, identifico los significados parciales, con respecto a los organizadores del currículo del análisis de contenido, que emergieron en el desarrollo del conocimiento didáctico con motivo de la participación de los grupos de futuros profesores en la asignatura; describo la evolución de estos significados parciales en términos de estados y factores de desarrollo; caracterizo esos estados de desarrollo; y formulo y contrasto algunas conjeturas de explicación de dichos estados de desarrollo, y de los significados parciales asociados, en términos de lo que sucede en la comunidad de aprendizaje del aula y en la comunidad de aprendizaje de uno de los grupos.

Comienzo el capítulo presentando un resumen del diseño de los cuatro estudios. En seguida, presento un análisis de la evolución de los significados de los

grupos de futuros profesores con respecto a cada uno de los tres organizadores del currículo del análisis de contenido. El cuerpo del capítulo se centra en el análisis e integración de los resultados de los cuatro estudios. En primera instancia, recojo sus principales contribuciones a la caracterización del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores y destaco las precisiones que esta perspectiva empírica me permitió aportar a los significados teórico, técnico y práctico de los organizadores del currículo. En seguida, identifiqué aspectos del diseño y desarrollo de la asignatura, y de las visiones, experiencia docente y actuaciones de los futuros profesores que estructuran un conjunto de conjeturas de explicación de ese desarrollo. Destaco el papel que jugaron los esquemas de interacción de la asignatura en la construcción y desarrollo de los significados parciales de los grupos de futuros profesores. Terminé el capítulo con una nueva conceptualización del proceso de génesis instrumental que surge de estos resultados empíricos y esclarece el proceso en virtud del cual los grupos de futuros profesores construyen y desarrollan sus significados teórico, técnico y práctico de los organizadores del currículo.

1. CUATRO DISEÑOS RELACIONADOS

He identificado los cuatro estudios que componen este proyecto de investigación de acuerdo con la fuente de información que utilicé para realizarlos: (a) análisis de presentaciones (transparencias), (b) análisis de producciones (transparencias, grabaciones de clase y entrevistas), (c) análisis de trabajos finales y (d) análisis del trabajo del grupo función cuadrática. Todos los estudios tienen el mismo propósito: explorar, describir y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores con respecto a los organizadores del currículo del análisis de contenido. Por lo tanto, los estudios describen un mismo fenómeno desde perspectivas diferentes y cada uno enfatiza aspectos específicos de dicho fenómeno. El orden en que he presentado los estudios en este documento representa una aproximación que va de lo más general a lo más particular.

En el análisis de las presentaciones, identifiqué unos estados de desarrollo del conocimiento didáctico a partir de los cuales caractericé la evolución de este conocimiento y comparé el progreso y avance de los diferentes grupos. Este estudio tuvo un carácter cuantitativo. En el análisis de las producciones, detallé el significado de los estados de desarrollo y de las variables que caracterizaron a esos estados. Este estudio fue de carácter cualitativo. Sus resultados me permitieron formular conjeturas de explicación de algunos aspectos de la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. En el análisis de los trabajos finales, profundicé en la puesta en práctica de la información que cada grupo recogió para los organizadores del currículo que componen el análisis de contenido. Y, en el análisis del trabajo del grupo función cuadrática, describí y analicé los procesos de negociación de significado que dieron lugar a las producciones de este grupo de futuros profesores. Los resultados de este estudio me permitieron formular conjeturas de explicación de algunos aspectos de la evolución de su conocimiento didáctico.

Los cuatro estudios comparten cuatro aspectos del marco conceptual:

- ◆ una posición con respecto a cómo aprenden los grupos de futuros profesores dentro de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria,
- ◆ la descripción de los significados de referencia (teórico, técnico y práctico) de los tres organizadores del currículo del análisis de contenido,
- ◆ la organización en factores de desarrollo de las características de las producciones y actuaciones de los grupos de futuros profesores cuando analizan su tema utilizando los organizadores del currículo del análisis de contenido y
- ◆ la caracterización, en términos de la génesis instrumental, del proceso en virtud del cual los grupos de futuros profesores transforman las nociones del análisis de contenido en instrumentos con propósitos prácticos.

Con base en estos fundamentos, en cada estudio desarrollé esquemas conceptuales que se adaptaron a sus objetivos específicos y a sus fuentes de información. Estos esquemas conceptuales me permitieron diseñar los instrumentos de codificación y análisis de la información.

En este capítulo, pretendo utilizar los resultados de estos estudios para abordar el segundo objetivo general de este proyecto de investigación. Este análisis transversal tiene dos propósitos:

- ◆ integrar los resultados de los cuatro estudios para cada uno de los factores de desarrollo que caracterizan el conocimiento didáctico de los tres organizadores del currículo del análisis de contenido y
- ◆ formular conjeturas de explicación de los aspectos más relevantes que surgen del análisis.

2. EVOLUCIÓN DE LOS SIGNIFICADOS DE LOS ORGANIZADORES DEL CURRÍCULO

En las secciones que siguen, presento por separado, para cada uno de los tres organizadores del currículo del análisis de contenido, el análisis integrado de los resultados de los cuatro estudios. Busco describir y caracterizar la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores con respecto a cada una de estas nociones.

2.1. Visión Formal de la Estructura Conceptual

A continuación, analizo el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores con respecto a la estructura conceptual, atendiendo a los factores de desarrollo: complejidad, organización y papel.

Estructura Conceptual: Factor Complejidad

En el estudio de las presentaciones, caractericé el factor de desarrollo “complejidad” de las estructuras conceptuales propuestas en las transparencias de acuerdo con el número de niveles en el mapa conceptual y el número de conexiones entre elementos de ese mapa conceptual. Estas dos variables aparecen como problemáticas: al asignar las observaciones a los estados finales, se genera un número importante de discrepancias para ellas. No obstante, estas discrepancias tienen senti-

dos diferentes. La mayoría de las discrepancias para el número de niveles del mapa conceptual son de carácter positivo. Es decir, provienen de observaciones cuyo valor de esta variable corresponde a un estado más avanzado de aquél al que fue asignada la observación. Por su parte, las discrepancias para el número de conexiones son de carácter negativo. Esto significa que se registró un número importante de observaciones para las que el mapa conceptual tenía un número alto de niveles (en relación con el estado al que fueron asignadas), pero un número reducido de conexiones.

Los mapas conceptuales presentan, por lo tanto, un desarrollo temprano de su organización jerárquica y tardío de su organización en términos de las relaciones entre sus elementos. Esto es muy posiblemente consecuencia de la aproximación conceptual que se evidenció en la mayoría de los grupos y a la que me referiré más adelante. Al no dar importancia a los sistemas de representación (y estos no aparecer en el mapa conceptual o no jugar un papel organizador del mismo), los mapas conceptuales se desarrollaron como una representación conceptual y jerárquica de la estructura matemática.

La instrucción insistió sistemáticamente en la importancia de las conexiones dentro de la estructura conceptual. Sin embargo, éstas no aparecieron en las primeras producciones de los grupos de futuros profesores. Cuando estas producciones comenzaron a incluir los sistemas de representación (en muchos casos con carácter complementario), aparecieron algunas conexiones externas, de carácter global. Las conexiones internas y puntuales sólo aparecieron en las últimas producciones. Esto es consecuencia del hecho de que las conexiones puntuales dentro de la estructura conceptual requieren que ésta esté descrita y organizada por los sistemas de representación. Como se evidenció en el análisis de las presentaciones, este tipo de organización sólo se logró en el estado 4, estado al que llegaron algunos grupos con sus últimas producciones.

El análisis del trabajo del grupo función cuadrática me permitió describir lo sucedido con esta variable. Los sistemas de representación aparecieron ya en las primeras producciones de este grupo. Sin embargo, las conexiones que ellos propusieron eran de tipo global. Aunque el grupo reconoció la importancia de las conexiones entre los sistemas de representación cuando realizó la tarea sobre el análisis cognitivo, éstas sólo aparecieron explícitamente cuando abordaron el diseño de la unidad didáctica. En ese momento, reconocieron que la relación entre los sistemas de representación simbólico y gráfico pasaba por el significado gráfico de los parámetros de las expresiones simbólicas. Adicionalmente, en este proceso, el grupo descubrió que las conexiones no solamente iban de lo simbólico a lo gráfico, sino que también podían estudiarse en el sentido inverso.

Organización de la Estructura Conceptual

En el análisis de las producciones, mostré que la evolución de la organización de las estructuras conceptuales propuestas por los grupos de futuros profesores estuvo caracterizada por varias fases: (a) listado sin organización, (b) organización por organizadores del currículo, (c) sistemas de representación como organizador complementario y (d) organización por sistemas de representación.

Desde la perspectiva del análisis de las presentaciones, esta evolución corresponde a las variables complejidad, criterios de organización y sistemas de repre-

sentación como organizador de la estructura conceptual. El hecho de que las dos últimas variables sean significativas en la definición del estado 4 es evidencia de que el proceso de organización de la estructura conceptual fue complejo y no se logró plenamente en todos los grupos. Los grupos de futuros profesores utilizaron, en sus primeras producciones, lo que tenían a mano para organizar la estructura conceptual: los organizadores del currículo. Argumentaré que la visión formal y simbólica con la que la mayoría de ellos llegó a la asignatura los indujo a asumir una aproximación conceptual de los temas matemáticos. La aproximación conceptual fue simplificadora y no permitió que los sistemas de representación jugaran el papel que les correspondía en la descripción y organización de la estructura conceptual. Salir de este impasse tomó tiempo. Las dificultades se superaron cuando los grupos de futuros profesores se hicieron conscientes del papel de los sistemas de representación en la descripción de la estructura conceptual y se redujo el número de criterios de organización: a menor número de criterios, mayor organización y complejidad. Finalmente, los sistemas de representación asumieron un papel protagónico en la organización de la estructura conceptual y los grupos de futuros profesores se hicieron conscientes de las relaciones entre sus elementos.

El grupo función cuadrática no tuvo que abordar estas dificultades. Algunos temas se prestan más fácilmente al análisis por sistemas de representación y éste fue el caso de la función cuadrática. Las producciones de este grupo se organizaron desde un principio por sistemas de representación y en, este sentido, superaron las dos primeras fases de la organización de la estructura conceptual. No obstante, el grupo sí tuvo que abordar la dificultad de establecer las conexiones puntuales entre los elementos de la estructura conceptual y de reconocer su importancia. El grupo superó esta dificultad solamente a la hora de diseñar la unidad didáctica.

Puesta en Práctica de la Estructura Conceptual

El análisis de los trabajos finales mostró que la estructura conceptual fue el organizador del currículo más utilizado. Además, ésta fue la noción para la que, con mayor frecuencia, los grupos de futuros profesores utilizaron información que no quedó registrada, en los documentos, como parte del análisis de contenido. Esto quiere decir que los grupos de futuros profesores se refirieron a información relacionada con la estructura conceptual del tema, pero no la reconocieron como tal. Éste no fue el caso del grupo función cuadrática. En los análisis de las transcripciones aparece evidencia del uso de la estructura conceptual particularmente en el análisis cognitivo y en el diseño de las actividades que componen la unidad didáctica. En el primer caso, ellos recorrieron la estructura conceptual en la búsqueda de errores y dificultades. En el segundo caso, la estructura conceptual les sirvió de guía para determinar la secuencia de contenidos que debían abordar en la unidad didáctica.

Estructura Conceptual: Construcción de Significado

Los análisis que he presentado en esta sección ponen de manifiesto las dificultades que los grupos de futuros profesores evidenciaron en el proceso de construir el significado de la noción de estructura conceptual y de ponerlo en práctica en la descripción de la estructura matemática de su tema. Este significado tiene múltiples facetas y los grupos de futuros profesores tendieron a construirlo en la prácti-

ca en un proceso evolutivo en el que la revisión de una propuesta y su contrastación con las de los demás grupos y con los comentarios de compañeros y formadores dio lugar a nuevas propuestas más complejas y coherentes. Argumentaré que la visión formal y simbólica con la que los futuros profesores llegaron a la asignatura puede estar en el origen de sus dificultades iniciales. También he constatado que los grupos de futuros profesores avanzaron en la construcción del significado de esta noción en la medida que utilizaron los otros organizadores del currículo del análisis de contenido (en particular, los sistemas de representación) para analizar y describir su tema.

2.2. Jerarquía en los Sistemas de Representación

Los cuatro estudios muestran que los grupos de futuros profesores establecieron una jerarquía en la utilización de los sistemas de representación para el análisis de su tema. Esta jerarquía se manifestó en la variedad, organización y puesta en práctica de este organizador del currículo.

Variedad en los Sistemas de Representación

La variable variedad en los sistemas de representación registró un número importante de discrepancias en el análisis de las presentaciones. Este hecho es indicativo de que los grupos de futuros profesores enfrentaron dificultades en este aspecto de la descripción de la estructura matemática de su tema. En esta sección, exploro esta dificultad y describo la evolución en los significados que los grupos de futuros profesores construyeron al respecto.

Los grupos de futuros profesores dieron prelación al sistema de representación simbólico, lo equipararon con lo conceptual y no lo consideraron un sistema de representación. En las primeras producciones, los sistemas de representación se refirieron a los aspectos gráficos de la estructura matemática y no formaron parte de la estructura conceptual: tuvieron un carácter complementario. A medida que avanzaron en sus esfuerzos por mejorar sus producciones, el significado que los grupos de futuros profesores construyeron sobre la noción de sistema de representación evolucionó. Caractericé esta evolución en dos aspectos, que considero a continuación.

En el análisis de las producciones, identifiqué diferentes tipos o categorías de sistemas de representación. Establecí, por un lado, los sistemas de representación simbólico y gráfico, como sistemas de representación básicos. Los sistemas de representación numérico y geométrico se mencionaron explícitamente en algunas de las producciones, pero como alternativos y de menor importancia. Algunos grupos identificaron sistemas de representación que eran específicos a su tema. Finalmente, en algunas de las primeras producciones, se propusieron, como sistemas de representación, aspectos de la estructura matemática que no eran sistemas de representación. Con estas cuatro categorías establecí una tipología que me permitió caracterizar el uso que los grupos hicieron de los sistemas de representación en sus producciones.

El análisis de las presentaciones puso en evidencia un patrón en el número de sistemas de representación utilizados en las producciones. Este número aumentó hasta la quinta producción. Después, disminuyó, para volver a aumentar en el trabajo final. El aumento inicial parece haber sido consecuencia de la insistencia de

la instrucción sobre el tema. Las tareas se centraron en este aspecto de la estructura matemática. Cuando el foco de atención pasó a otros aspectos del análisis didáctico, como el análisis cognitivo o el análisis de instrucción, el número de sistemas de representación disminuyó y los grupos utilizaron únicamente los sistemas de representación básicos. A la hora de preparar el trabajo final el número volvió a aumentar dado que este organizador del currículo era uno de los apartados del documento.

Organización de los Sistemas de Representación

La tipología de los sistemas de representación que acabo de caracterizar está relacionada con otro aspecto del significado que los grupos de futuros profesores le asignaron a este organizador del currículo: la idea de que hay una jerarquía entre ellos. Ya he mostrado cómo, en las primeras producciones, varios grupos de futuros profesores resaltaron la importancia del sistema de representación simbólico sobre los demás. Por otro lado, el análisis de la evolución de las producciones en la variedad de sistemas de representación utilizados da pistas sobre esta jerarquía. El sistema de representación gráfico parece ser el segundo en importancia, mientras que los sistemas de representación numérico y geométrico y aquellos específicos a la estructura matemática aparecen con menor frecuencia. Esta jerarquía en los sistemas de representación se manifestó a la hora de su puesta en práctica. Ésta parece ser la razón de que en las producciones sobre análisis cognitivo y análisis de instrucción sólo aparecieran los sistemas de representación básicos.

Puesta en Práctica de los Sistemas de Representación

En el análisis de los trabajos finales, mostré que la información que se produjo para los sistemas de representación se puso en juego especialmente en la tarea sobre el análisis cognitivo y en la definición de los objetivos de la unidad didáctica. El análisis del trabajo del grupo función cuadrática dio algunas luces sobre este patrón de utilización de la noción. En el caso de este grupo, los sistemas de representación jugaron un papel importante en el análisis cognitivo porque el grupo reconoció que la relación entre los sistemas de representación podía estar en la base de una de las dificultades de los escolares. Este punto, junto con la revisión de los comentarios a las transparencias, les indujo a reconocer su importancia y esta noción se convirtió en el tema central de los objetivos y los contenidos de la unidad didáctica. En el caso de este grupo, los sistemas de representación también se pusieron en práctica en el análisis fenomenológico dando lugar a categorías en las que se organizaron los fenómenos. Finalmente, este grupo utilizó la noción de sistema de representación para desarrollar un procedimiento con el que seleccionaron y organizaron los problemas de los libros de texto.

No obstante, la puesta en práctica de los sistemas de representación fue parcial. El análisis del patrón en la evolución de la variedad de los sistemas de representación mostró que, a la hora de poner en práctica este organizador del currículo en otros aspectos del análisis didáctico, la mayoría de los grupos de futuros profesores se restringieron a los sistemas simbólico y gráfico y no tuvieron en cuenta los otros sistemas de representación.

Sistemas de Representación: Construcción de Significado

Los análisis que he presentado en esta sección reflejan la complejidad de la noción de sistema de representación y describen la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores con respecto a ella. Como en el caso de la noción de estructura conceptual, las primeras producciones de los grupos de futuros profesores revelan la influencia de una visión formal y simbólica de las matemáticas. Esta visión queda parcialmente superada cuando los grupos analizan su tema teniendo en cuenta una variedad de sistemas de representación. No obstante, el significado que se materializa en la mayoría de los grupos y que, por lo tanto, se lleva a la práctica tiende a restringirse a los dos sistemas de representación básicos: el simbólico y el gráfico.

2.3. Heterogeneidad en la Fenomenología

La fenomenología fue el organizador del currículo para el que los grupos de futuros profesores manifestaron mayores dificultades. Estas dificultades se expresaron en una gran heterogeneidad en los significados parciales que los grupos desarrollaron para esta noción y, por consiguiente, en la multiplicidad de aproximaciones que pusieron en práctica al abordar los procedimientos del análisis fenomenológico y al utilizar sus resultados en el diseño de la unidad didáctica.

Variedad en la Fenomenología

Me aproximé a la variedad en la noción de fenomenología desde dos perspectivas complementarias. En el análisis de las transparencias, incluí tres variables que pretendían caracterizar este organizador del currículo: variedad de fenómenos, de disciplinas y de subestructuras. Por otro lado, en el análisis de las producciones, me interesé por la variedad desde el punto de vista de los tipos de análisis utilizados por los grupos de futuros profesores.

Mostré, en el análisis de las presentaciones, que las variables relacionadas con la variedad en la fenomenología tuvieron poca capacidad discriminatoria en la definición de los estados. El reducido carácter discriminatorio de estas variables es un indicador de la variedad y heterogeneidad de sus valores en las producciones de los grupos de futuros profesores. Esta variedad y heterogeneidad fue corroborada en el análisis de las producciones. En ese estudio, abordé esta cuestión desde la perspectiva del tipo de análisis utilizado por los grupos de futuros profesores. Encontré, de nuevo, una gran variedad de aproximaciones. Menos de la mitad de los grupos lograron desarrollar un análisis fenomenológico detallado en el que se identificara y analizara una familia de fenómenos desde la perspectiva de sus características estructurales, junto con la identificación de la subestructura que modeliza esa familia. Aun en estos casos, este esfuerzo no revertió necesariamente en la organización de los fenómenos de acuerdo con las subestructuras correspondientes. Otros grupos identificaron algunos modelos, pero no lograron establecer la relación estructural entre esos modelos y los fenómenos. En otros casos, se identificaron algunas de las leyes (naturales, sociales o matemáticas) que fundamentaban los modelos, pero esto no implicó que los grupos pudieran justificar la relación entre los fenómenos que se rigen por esas leyes y las subestructuras que los modelizan.

Como lo constaté en el análisis de las producciones, las propuestas de los grupos de futuros profesores sobre la fenomenología se caracterizaron por su heterogeneidad. Esta heterogeneidad es un indicador de las dificultades, no superadas, que los grupos de futuros profesores tuvieron que enfrentar con esta noción del análisis de contenido. Estas dificultades se manifestaron más adelante en el hecho de que sólo un grupo utilizó la información que produjo con el análisis fenomenológico en los análisis cognitivo y de instrucción. Y, como se puso en evidencia en el análisis de los trabajos finales, la dificultad permaneció hasta el final, dado que el análisis fenomenológico tampoco se utilizó sistemáticamente en el diseño de la unidad didáctica.

El análisis del grupo función cuadrática dio algunas luces sobre estas dificultades. En ese estudio, describí en detalle el proceso de negociación de significado sobre esta noción. Identifiqué las dificultades que el grupo enfrentó en las primeras producciones (y que analizaré en seguida) y describí las confusiones y conflictos que aparecieron con motivo de la revisión que ellos hicieron, en las sesiones finales, de los comentarios a las transparencias. Esta revisión les permitió identificar el procedimiento de análisis fenomenológico por subestructuras, pero este avance no implicó que utilizaran la información resultante en el diseño de las actividades de la unidad didáctica.

Organización del Análisis Fenomenológico

El análisis de las presentaciones no incluyó variables que consideraran explícitamente la organización del análisis fenomenológico. Consideré indirectamente este factor en el sentido de que incluí dos variables que correspondían a dos maneras de organizar los fenómenos dentro de las producciones (disciplinas y subestructuras). No obstante, en el análisis de las producciones, presenté un análisis más detallado de este factor e identifiqué una gran variedad de criterios de organización de los fenómenos dentro de las producciones de los grupos de futuros profesores: listado, disciplinas, familias, áreas, usos, subestructuras y grupos.

De manera similar a lo constatado con el factor variedad, el análisis de las producciones puso en evidencia la heterogeneidad de esquemas de organización utilizados por los grupos de futuros profesores. La mayoría de los grupos presentaron un listado de fenómenos en sus primeras dos producciones, para después organizarlo por grupos o disciplinas. Sin embargo, a partir de la cuarta producción, cada grupo se aproximó este problema desde su propia perspectiva. Encontré que los criterios de organización más frecuentes fueron grupos, familias, disciplinas y subestructuras. Como lo mencioné anteriormente, esta variedad de aproximaciones parece ser un indicador de las dificultades que los grupos enfrentaron a la hora de realizar el análisis fenomenológico.

Como formadores, nosotros esperábamos que los grupos de futuros profesores desarrollaran los conocimientos y las capacidades necesarios para realizar el análisis fenomenológico de su tema basado en subestructuras de la estructura matemática correspondiente, organizaran los fenómenos relacionados a partir de estas subestructuras y utilizaran la información resultante en el diseño de las actividades de la unidad didáctica. Los resultados de los estudios muestran que estos propósitos no se lograron.

En el análisis del trabajo del grupo función cuadrática, describí algunas de las dificultades de este grupo a la hora de organizar los fenómenos correspondientes a su tema. Este grupo tuvo, desde un comienzo, dificultades con las nociones de fenómeno, fenómeno matemático y modelización. El grupo propuso una organización de los fenómenos en cuatro categorías: fenómenos matemáticos, fenómenos no matemáticos, áreas de figuras geométricas y modelización. Ellos mantuvieron esta organización hasta las sesiones finales. En ese momento, revisaron los comentarios a las transparencias, establecieron el procedimiento de análisis por subestructuras y cambiaron parcialmente la organización que, en todo caso, mantuvo la idea de modelo como criterio principal de organización.

Puesta en Práctica del Análisis Fenomenológico

Las dificultades que los grupos de futuros profesores enfrentaron en relación con la noción de fenomenología, y que he puesto en evidencia en esta sección, se manifestaron a la hora de poner en práctica la información que recogieron para este organizador del currículo. Todos los estudios muestran que los grupos no llegaron a utilizar la información del análisis fenomenológico en el análisis cognitivo, el análisis de instrucción o el diseño de la unidad didáctica. En particular, en el análisis de los trabajos finales, mostré que, de los tres organizadores del currículo del análisis de contenido, la información del análisis fenomenológico fue la menos utilizada. En ese estudio, se aprecia que esta información se utilizó principalmente en el diseño de las sesiones¹⁴⁹.

Resulta natural que, en la medida en que los grupos de futuros profesores no lograron realizar un análisis fenomenológico detallado, ellos no pudieran utilizar este organizador del currículo en la práctica. La puesta en práctica de la información fenomenológica, para efectos del diseño de tareas, requiere establecer la relación entre subestructuras y fenómenos. Es así como el futuro profesor puede asegurarse que una tarea pondrá en juego aquellos aspectos del conocimiento de los escolares que le interesan. En caso contrario, el diseño de tareas puede centrarse exclusivamente en una cierta preocupación por incluir “problemas de palabras”, como se evidenció en el caso del grupo función cuadrática.

Fenomenología: Construcción de Significado

Los análisis que he presentado en los párrafos anteriores revelan la complejidad de la noción de fenomenología y ponen en evidencia las dificultades de los grupos de futuros profesores con este organizador del currículo. La complejidad se refleja en la variedad y heterogeneidad de significados que, en la práctica, los grupos de

¹⁴⁹ No obstante, el análisis del trabajo del grupo función cuadrática sugiere que, en este caso, la codificación de los trabajos finales no fue completamente fiable. Los resultados de los estudios en este punto son contradictorios. El análisis de los trabajos finales indica que el grupo función cuadrática es uno de los grupos que utilizó con mayor frecuencia la información del análisis fenomenológico en el diseño de las sesiones. Sin embargo, el análisis del trabajo del grupo indica lo contrario. A la hora de diseñar las sesiones, este grupo se basó en los problemas de los libros de texto para diseñar las actividades de la unidad didáctica y no utilizó la información que registraron para el análisis fenomenológico. La contradicción surge del hecho de que, en el análisis de los trabajos finales, registré la coherencia entre la información del análisis fenomenológico y las propuestas de actividades. No obstante, en el análisis del trabajo del grupo mostré que esta coherencia fue casual y no fue consecuencia de una puesta en práctica explícita de esta información.

futuros profesores desarrollaron para la noción. Esta heterogeneidad tiene que ver con el número de fenómenos, disciplinas y subestructuras que se pueden proponer (como se evidencia en el análisis de las presentaciones), y con la variedad en el tipo de análisis que se puede hacer y con la variedad en los criterios con los cuales se pueden organizar los fenómenos (como se aprecia en el análisis de las producciones). Las dificultades, producto de esta complejidad, se manifestaron en el desarrollo parcial de su significado por parte de la mayoría de los grupos. Ningún grupo llegó a presentar en sus producciones un trabajo de análisis fenomenológico como el que pretendía la instrucción. No obstante, el análisis de las producciones y del trabajo del grupo función cuadrática también mostró que todos los grupos presentaron una evolución en la construcción de este significado, aunque esta evolución no siguió patrones estables. Tanto el análisis de los trabajos finales, como el del trabajo del grupo función cuadrática mostraron que el hecho de llegar a poner en práctica procedimientos complejos para el análisis y organización de los fenómenos que corresponden a un tema matemático no implica que la información que resulta de ellos se utilice en los otros aspectos del análisis didáctico. En términos de la génesis instrumental, es posible afirmar, por lo tanto, que la mayoría de los grupos de futuros profesores no lograron transformar la noción de fenomenología en un instrumento útil para la práctica.

3. EVOLUCIÓN DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

En este apartado, describo las contribuciones de los cuatro estudios a la caracterización del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. También establezco las contribuciones de esta aproximación empírica a los significados de referencia de los organizadores del currículo del análisis de contenido.

3.1. Patrones de Desarrollo Dentro de la Heterogeneidad

En el estudio de las presentaciones, establecí que el conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores evoluciona de acuerdo con patrones estables que permiten caracterizar cuatro estados de desarrollo. Sin embargo, se evidencia un desfase entre el momento en que los organizadores del currículo del análisis de contenido se discutieron en la asignatura y el momento en el que ellos se manifestaron significativamente en las producciones de los grupos de futuros profesores. Esto da a entender que el proceso de génesis instrumental toma tiempo: requiere que los grupos de futuros profesores negocien significados (del organizador del currículo, de su tema matemático y de sus esquemas de acción) y que estos significados parciales se materialicen (en diferentes formas) en las sucesivas ocasiones en las que los grupos presentan sus producciones en clase. Por otro lado, en este estudio también constaté que las producciones de los grupos presentan variedad tanto en el momento en que las observaciones cambian de estado (ritmo de progreso), como en el estado de máximo avance al que logran llegar (nivel de avance). Estas diferencias pueden ser consecuencia de diferencias en los temas asignados a cada grupo y en sus dinámicas de trabajo por fuera de clase.

El análisis de las producciones me permitió describir y fundamentar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Este análisis

dio cuenta de la complejidad de los significados de referencia (teórico, técnico y práctico) de los organizadores del currículo del análisis de contenido y de la evolución de los significados parciales que los grupos de futuros profesores construyeron sobre estas nociones a lo largo del tiempo (ver el apartado anterior). También me permitió explorar las principales dificultades que ellos tuvieron que abordar y cómo, en muchas ocasiones, lograron superarlas.

En la medida en que los grupos de futuros profesores progresaron en la identificación y organización de los diversos significados de su tema, ellos se hicieron conscientes de su complejidad. La mayoría de los grupos de futuros profesores lograron abordar esta complejidad en sus perspectivas conceptual y representacional. No obstante, en cierta medida, esta complejidad los desbordó a la hora de utilizar los resultados de sus análisis para efectos didácticos. Cuando se esperaba que ellos utilizaran la información recogida para diseñar tareas o actividades de evaluación, los grupos de futuros profesores regresaron a los elementos tradicionales: una visión conceptual que utilizó los sistemas de representación básicos y que no sacó provecho del análisis fenomenológico. Estas dificultades de los grupos de futuros profesores fue uno de los múltiples aspectos del proceso de génesis instrumental de los organizadores del currículo del análisis de contenido.

En el análisis de los trabajos finales, se apreció una cierta independencia entre el trabajo que los grupos de futuros profesores realizaron en el análisis didáctico de su tema y el diseño de la unidad didáctica. Aunque algunos grupos logran manifestar una cierta relación entre la información que presentaron para el análisis de contenido de su tema y su propuesta de unidad didáctica, las aproximaciones fueron variadas. Algunos grupos utilizaron en el diseño de la unidad didáctica información que no registraron como perteneciente al análisis de contenido y la mayoría de los grupos utilizó la información del análisis de contenido solamente en algunos apartados de la unidad didáctica. Esto sugiere que la información fue útil, pero solamente en algunos aspectos del proceso y que los grupos de futuros profesores no lograron abordar necesariamente el trabajo con una visión global en la que se manifestara la relación esperada entre el análisis del tema y la propuesta didáctica correspondiente. Estos resultados ponen en evidencia que los grupos de futuros profesores no pudieron construir y desarrollar las técnicas (razonamientos y procedimientos) que les permitieran apreciar la importancia de la información producida en el análisis de contenido y les indujeran a utilizarla en los otros análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica.

En el análisis del trabajo del grupo función cuadrática, puse en evidencia la complejidad del desarrollo de una comunidad de práctica en el contexto del trabajo que realizan los grupos de futuros profesores en la asignatura. Este grupo hizo patente una búsqueda permanente de significado en la que el compromiso y la experiencia docente de sus participantes, los comentarios a las transparencias y el rol del líder jugaron papeles importantes. Este grupo constituyó y consolidó una comunidad de práctica en la que se desarrolló un compromiso mutuo por el aprendizaje interdependiente.

Aunque el conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores evolucionó de acuerdo con patrones estables, sus producciones y actuaciones también pusieron en evidencia una gran heterogeneidad. Esta heterogeneidad se manifestó

en las diferencias en su ritmo de progreso y nivel de avances y en la variedad de significados parciales que los grupos pusieron de manifiesto en sus producciones.

3.2. Contribuciones al Significado de los Organizadores del Currículo del Análisis de Contenido: Significados Parciales

Los cuatro estudios en general, y el estudio de las producciones en particular, dan luces sobre los diferentes significados parciales que grupos de futuros profesores pueden desarrollar sobre los organizadores del currículo del análisis de contenido. También muestran características de estas nociones de las que no éramos plenamente conscientes al inicio del proyecto o sobre las cuales no insistimos en la instrucción. Considero estas cuestiones aquí.

El marco conceptual de este proyecto presenta el significado técnico de los organizadores del currículo del análisis de contenido que nosotros utilizamos y promovimos dentro de la asignatura (ver capítulo 2). Éste es el significado técnico que nosotros esperábamos que los grupos de futuros profesores desarrollaran a lo largo del curso. Sin embargo, las producciones de los grupos de futuros profesores dan cuenta de una variedad de posibles significados de los organizadores del currículo que no se ajustan a este significado técnico. La caracterización de estos otros significados (parciales) de los organizadores del currículo surgió en el proceso de diseñar e implementar los instrumentos de codificación y análisis. La mayoría de los estudios partió del significado técnico establecido para producir una primera versión de las categorías de análisis. Siguiendo las ideas de la investigación fundada (Corbin y Strauss, 1990), estas categorías de análisis evolucionaron a medida que codifiqué, en cada estudio, las producciones y actuaciones de los grupos de futuros profesores. Este proceso de revisión dio lugar a categorías de análisis (significados parciales) para cada organizador del currículo del análisis de contenido que, estando relacionadas con el significado técnico inicial, me permitieron caracterizar las producciones de los grupos de futuros profesores. Desde la perspectiva del marco conceptual y de los objetivos de este proyecto, estos significados parciales enriquecen los significados iniciales de estas nociones. A continuación, los describo brevemente.

La instrucción insistió en la utilización de los sistemas de representación como principal criterio organizador de la estructura conceptual. Sin embargo, el análisis de dos de las dificultades de los grupos de futuros profesores en relación con este organizador del currículo sugiere otros posibles criterios de organización de la estructura conceptual: la aproximación conceptual y la fenomenología. Ya describí estos criterios en el capítulo 9. Mostré, por ejemplo, que, de acuerdo con la aproximación conceptual, los elementos de la estructura conceptual se pueden organizar si se identifican los hechos y conceptos más relevantes y se relacionan con las destrezas y procedimientos correspondientes. Por otro lado, también mostré que, de acuerdo con la perspectiva fenomenológica, es posible organizar los elementos de la estructura conceptual a partir de los usos (naturales, sociales y matemáticos) de los conceptos y relaciones que la constituyen.

El análisis de las producciones y del trabajo del grupo función cuadrática mostró que los sistemas de representación se pueden clasificar en cuatro categorías y que las producciones de los grupos de futuros profesores pusieron en evidencia una jerarquía de estas categorías. Los sistemas de representación simbólico

y gráfico se identifican como básicos; los sistemas de representación numérico y geométrico son complementarios; aparecen en contadas ocasiones sistemas de representación específicos a la estructura matemática; y, en algunas ocasiones, se hacen propuestas que no son sistemas de representación.

Finalmente, el análisis de las producciones me permitió identificar diversos criterios de organización de los fenómenos: disciplinas, familias, áreas, usos, subestructuras y grupos. Por otro lado, también caractericé el tipo de análisis fenomenológico que se puede poner en evidencia en las producciones de los grupos de futuros profesores: una producción puede presentar modelos, leyes, subestructuras, análisis estructural de los fenómenos, y la relación entre las características estructurales del fenómeno y elementos y relaciones de la subestructura.

4. CONJETURAS DE EXPLICACIÓN DEL DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

Como era de esperarse, el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores emergió como consecuencia de su experiencia previa y de la experiencia que ellos vivieron en la asignatura. Considero, a continuación, el papel que jugaron estos factores en la evolución de sus significados parciales.

4.1. Experiencia y Visiones de los Futuros Profesores

Incluyo en esta sección características de las visiones y de la experiencia de los grupos de futuros profesores que no se refieren específicamente a su conocimiento didáctico, pero que surgen de los diferentes estudios y que, en algunos casos, permiten explicar aspectos de sus producciones y actuaciones. En el apartado 5 y la descripción de la Figura 4 del capítulo 2 hice una primera aproximación a estas características. Aquí me refiero a la experiencia docente de los futuros profesores y a la visión formal y simbólica de las matemáticas con la que ellos llegaron a la asignatura. Analizo el papel de estos factores en su actuación y en sus producciones.

El análisis de las producciones, de las entrevistas y del trabajo del grupo función cuadrática mostró que la mayoría de los futuros profesores llegaron a la asignatura con una visión formal y simbólica de las matemáticas. Ésta es una situación natural dadas las características de su formación como matemáticos dentro de su carrera. De acuerdo con esta visión, la representación simbólica es central para el análisis y la descripción de un tema matemático. El análisis de las producciones mostró que, para algunos de los futuros profesores, lo simbólico era equivalente a lo conceptual, no era un sistema de representación y servía para describir el concepto a partir de su definición. Esta visión formal y simbólica de las matemáticas parece ser el origen de lo que he llamado la aproximación conceptual al análisis y descripción de los temas. Las producciones que surgieron de esta aproximación centraron su atención en la definición del concepto como único medio para describirlo, dentro del sistema de representación simbólico. Los otros sistemas de representación cumplieron un papel complementario y se refirieron exclusivamente a los aspectos gráficos del concepto.

Cuando los grupos de futuros profesores describieron su tema de acuerdo con esta visión, las estructuras conceptuales que propusieron fueron conjuntos de etiquetas (que se referían a conceptos, hechos y procedimientos) parcialmente conectadas. La interpretación de este tipo de estructura conceptual requiere que el lector ponga en juego su conocimiento matemático. A medida que revisó sus producciones, cada grupo, en su momento, reconoció el papel descriptivo y organizativo de los sistemas de representación. Cuando los sistemas de representación asumieron un papel protagónico en la organización de la estructura conceptual, la aproximación conceptual perdió importancia y los elementos que antes eran etiquetas comenzaron a tener significado. El análisis del tema se hizo más profundo y la estructura conceptual más compleja. Esta visión formal y simbólica de las matemáticas, y la aproximación conceptual que se sustenta en ella, permiten explicar, al menos parcialmente, el establecimiento, por parte de la mayoría de los grupos, de una jerarquía en los sistemas de representación.

La visión formal y simbólica de las matemáticas que acabo de mencionar indujo a la mayoría de los grupos a pensar que los temas de las matemáticas de secundaria eran sencillos. Esta visión se reforzó cuando ellos produjeron las primeras estructuras conceptuales desde la perspectiva de la aproximación conceptual a la que ya hice referencia. Al considerar los sistemas de representación como algo independiente de la descripción conceptual de las estructuras matemáticas, estas descripciones presentaron un número reducido de elementos con pocas conexiones entre ellos. No obstante, a medida que se avanzó en la asignatura y que los grupos de futuros profesores analizaron su tema con las diversas nociones propuestas, esta visión de su complejidad evolucionó. Los grupos de futuros profesores constataron que cada estructura matemática se podía describir basándose en múltiples significados y que estos significados estaban relacionados entre sí. Como lo destaque en el análisis del trabajo del grupo función cuadrática, algunos de ellos se sorprendieron al descubrir nuevos significados matemáticos cuando profundizaron en la descripción de la estructura matemática con las herramientas del análisis de contenido. Cuando produjeron el trabajo final, cada grupo logró recoger y organizar gran cantidad de información y, al parecer, en algunos casos esta información los desbordó. A la hora de diseñar la unidad didáctica no la tuvieron en cuenta y prefirieron basarse en otro tipo de información (como los ejercicios de los libros de texto) para diseñar las actividades que compusieron la unidad didáctica.

Una proporción importante de los futuros profesores que participaron en la asignatura habían tenido alguna experiencia docente, ya sea en clases particulares, como profesores en academias o en su participación en la asignatura de prácticas. El 72% de los futuros profesores que participaron en los dos grupos de la asignatura durante el curso en el que se realizó este proyecto habían dado clases particulares antes de comenzar la asignatura. Por otro lado, la mayoría de los futuros profesores cursaban simultáneamente la asignatura de prácticas, donde tuvieron otro tipo de contacto con la enseñanza y vivieron otro tipo de experiencia docente. El análisis del trabajo del grupo función cuadrática mostró que la información que surgió de esta experiencia docente se utilizó en varias de las sesiones de trabajo y jugó, por ejemplo, un papel central en la realización de la tarea sobre el análisis cognitivo. He llamado a este conocimiento “intuiciones didácticas” (Gómez,

2001a). En el caso del grupo función cuadrática, los participantes reconocieron explícitamente el papel de su experiencia docente en el trabajo que realizaron. Las intuiciones didácticas se manifestaron a través de relatos de las experiencias vividas en clase por los participantes. Estas experiencias fueron fuente natural de propuestas de significado y se utilizaron en repetidas ocasiones para fundamentar y validar argumentos dentro de las discusiones del grupo. Adicionalmente, en el caso de este grupo, la experiencia docente fue una de las principales cualidades del líder.

4.2. Dos Comunidades de Práctica

En esta sección, considero dos cuestiones relacionadas con la construcción social de significados en la asignatura. Por un lado, a la luz de los resultados de los estudios, identifico y describo brevemente los dos entornos en los que tuvieron lugar procesos de negociación de significados: la comunidad de práctica de la clase y la comunidad de práctica de cada grupo. Por el otro, analizo la problemática de la dinámica de trabajo de los grupos.

El análisis de las producciones puso en evidencia los procesos de negociación de significado en el aula. Estos procesos surgieron y fueron promovidos por dos factores: la metodología de interacción en clase y la heterogeneidad en el avance de las producciones de los grupos. Para cada organizador del currículo del análisis didáctico, cada grupo debía abordar el problema de utilizar esa noción en el análisis de su tema. En la medida en que el progreso de los grupos no fue homogéneo (como se evidenció en el análisis de las presentaciones) los futuros profesores tendieron a comentar y criticar el trabajo de sus compañeros (actitud que se puso en evidencia en el análisis de las producciones). Esta situación generó un ambiente de negociación de significados en el que los comentarios de compañeros y formadores (junto con los comentarios a las transparencias y la comparación de su trabajo con el de los demás grupos) le permitió a cada grupo reconocer las deficiencias de su propuesta y le indujo a mejorarla.

La revisión y mejora de las propuestas tuvo lugar dentro la comunidad de práctica de cada grupo. El análisis del trabajo del grupo función cuadrática me permitió describir estos procesos de negociación de significado. En el caso del trabajo de este grupo, se apreció una actitud permanente de búsqueda de significado de la que surgieron confusiones y conflictos. En general, estas confusiones y estos conflictos se superaron produciendo, en algunos casos, descubrimientos de significado. El resultado de estos procesos de negociación fueron las propuestas de significado que ellos incluyeron en sus presentaciones y documentos. Algunas de estas propuestas terminaron materializándose dentro del grupo, mientras que otras no lo lograron y no fueron utilizadas en otros lugares del análisis didáctico.

La dinámica de trabajo en los grupos es un posible factor de explicación de las diferencias en las presentaciones y las producciones. Es razonable suponer que los grupos desarrollaron dinámicas de trabajo diferentes. En términos de la teoría social del aprendizaje, cada grupo desarrolló una comunidad de práctica con características propias. En algunos casos su comportamiento fue el de un equipo, más que una comunidad de práctica. El análisis del trabajo del grupo función cuadrática me permitió identificar las principales características de esta comunidad de práctica. Destaqué que en ella se estableció un líder que planificaba, dirigía y veri-

ficaba el trabajo del grupo; algunos de los miembros del grupo asumieron un papel de participación complementaria que contribuyó a la realización de las tareas; se mantuvo un ambiente relajado de trabajo en el que hubo pocos momentos de tensión y estos se superaron rápidamente; todos los participantes manifestaron una actitud positiva permanente en la búsqueda de la empresa conjunta; hubo una preocupación constante por realizar eficientemente el trabajo; y se establecieron rutinas de trabajo y de organización de las tareas individuales y de grupo.

4.3. Diseño y Desarrollo de la Asignatura

En esta sección considero algunos aspectos del diseño y desarrollo de la asignatura que surgieron de los diversos estudios y que se destacan con respecto al desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores. Estos aspectos tienen que ver con la metodología y construcción social de significados, la clase magistral versus trabajo en clase, la influencia de los ejemplos, las diferencias en los temas de los grupos, los comentarios a las transparencias, el papel del trabajo final y el uso de los libros de texto.

Ya insinué, en el apartado anterior, el papel que, sobre los procesos de negociación de significados, jugó la metodología utilizada en la asignatura. Esta metodología tuvo otros efectos sobre el comportamiento y el trabajo de los grupos. Por un lado, no había una sola autoridad que decidía lo que estaba bien y estaba mal en las presentaciones. Las opiniones y críticas de los compañeros también eran relevantes. Por otro lado, la motivación por hacer un buen trabajo y avanzar tanto como fuese posible en las presentaciones no provino exclusivamente del hecho de que éste era un compromiso adquirido por cada grupo en la asignatura, ni de las expectativas que los grupos tenían sobre la valoración que los formadores harían de su trabajo. Los grupos también buscaron hacer un trabajo de calidad porque se preocupaban por la opinión de sus compañeros. Aunque cada grupo trabajó sobre un tema diferente, las presentaciones que se hacían en una sesión eran similares. Todas se referían a la puesta en práctica de un mismo organizador del currículo en el análisis de los temas. Por lo tanto, era posible comparar la calidad de las presentaciones. Se generó entonces un ambiente de sana competencia en el que cada grupo se esforzó para que su trabajo estuviese entre los mejores.

La metodología utilizada asignó un tiempo reducido a la clase magistral. Los formadores utilizamos ese tiempo para introducir los significados teóricos y técnicos de las nociones y para presentar ejemplos. El resto del tiempo se utilizó para las presentaciones de los grupos y para la discusión en clase. Este esquema tuvo dos consecuencias que ya he mencionado. Por un lado, promovió la construcción social de significados y, por el otro, redujo el énfasis en los significados teóricos y formales de las nociones. Este último aspecto puede explicar, al menos parcialmente, el hecho de que (como se puso en evidencia en el análisis del trabajo del grupo función cuadrática) los grupos de futuros profesores no se hicieron conscientes de que las nociones tenían un significado teórico y focalizaran su atención en sus significados técnico y práctico.

Al reducir la importancia de la descripción teórica y formal de las nociones, la instrucción promovió la construcción de significados a través de la presentación de ejemplos. De hecho, la primera aproximación que los grupos hicieron a la utilización de cada uno de los organizadores del currículo surgió de la imitación: ellos buscaron “hacer lo mismo del ejemplo”, pero aplicado a su tema. En muchas

buscaron “hacer lo mismo del ejemplo”, pero aplicado a su tema. En muchas ocasiones, esta imitación fue formal: se hacía algo parecido al ejemplo, sin que se produjera una propuesta con significado. En el análisis de las producciones, presenté evidencia de esta situación para el caso de la estructura conceptual.

He propuesto (en el análisis de las producciones) la diferencia en temas como uno de los factores que pueden explicar la heterogeneidad en las presentaciones y producciones de los grupos. Estas diferencias se refieren a los tres organizadores del currículo del análisis de contenido: identificación de la estructura matemática, análisis con los sistemas de representación y relación con la fenomenología. La identificación de la estructura matemática puede resultar más evidente para temas como la función cuadrática y la esfera, y menos evidente para temas como los números decimales, los sistemas de ecuaciones lineales o los movimientos en el plano. Algunos temas tienden a ser más fáciles de analizar desde la perspectiva de los sistemas de representación. Éste puede ser el caso de la función cuadrática, esfera o cónicas. Otros temas resultan menos evidentes, como progresiones o números decimales. Finalmente, hay temas, como la probabilidad, que sugieren una relación más clara con la fenomenología. Otros temas, por ejemplo, polinomios, involucran, de partida, una cierta dificultad en este aspecto.

Los comentarios a las transparencias jugaron un papel central en los procesos de negociación de significado dentro del grupo función cuadrática. La evidencia que surge del análisis del trabajo de este grupo muestra que la información incluida en los comentarios a las transparencias se utilizó para cambiar, mejorar y profundizar las propuestas del grupo. En algunas ocasiones, los miembros del grupo utilizaron los comentarios a las transparencias para validar sus propuestas de significado. En otras ocasiones, estos comentarios les permitieron superar dificultades, confusiones y conflictos. Mostré, por ejemplo, que este grupo logró identificar, desarrollar y llevar a la práctica el procedimiento de análisis fenomenológico basado en subestructuras gracias a la lectura cuidadosa y repetida y a la discusión de los comentarios a las transparencias. Algo similar sucedió con la problemática de las conexiones dentro de la estructura conceptual. Estas dos cuestiones se resolvieron en este grupo solamente en las últimas sesiones, dado que ese fue el momento en el que revisaron dichos comentarios.

El trabajo final jugó un papel importante en la asignatura. Se esperaba que los grupos de futuros profesores organizaran la información que habían recogido sobre los organizadores del currículo y la utilizaran sistemática y justificadamente en el diseño de la unidad didáctica. El análisis de los trabajos finales mostró que estos propósitos sólo se lograron parcialmente. En la mayoría de los trabajos finales no se apreció la relación esperada entre la información sobre los organizadores del currículo y el diseño de la unidad didáctica. Esto sugiere una cierta independencia entre estos dos aspectos del análisis didáctico. No obstante, el trabajo final contribuyó de manera significativa a la construcción y consolidación de los significados que se trabajaron en la asignatura. El análisis del trabajo del grupo función cuadrática mostró que este grupo resolvió varias dudas y superó varias dificultades relacionadas con los organizadores del currículo del análisis de contenido cuando abordaron el problema de producir el trabajo final. Mostré que, al menos en el caso de este grupo, el trabajo final los indujo a revisar y organizar lo que habían hecho hasta ese momento. Esta revisión incluyó el análisis de los comenta-

rios a las transparencias, actividad que contribuyó significativamente a la calidad de su propuesta final.

Los futuros profesores, como lo acostumbran los profesores en ejercicio, utilizaron sistemáticamente los libros de texto en el diseño de la unidad didáctica. Los libros de texto fueron una fuente clave de información para los grupos de futuros profesores, como se apreció en el caso del grupo función cuadrática. Ellos utilizaron esta información, por ejemplo, para mejorar su estructura conceptual. En repetidas ocasiones, la información de los libros de texto les permitió resolver dudas y superar conflictos. No obstante, la principal función de los libros de texto se evidenció en el diseño de actividades para las sesiones de la unidad didáctica. El grupo desarrolló una rutina de trabajo en virtud de la cual utilizaron información del análisis de contenido (estructura conceptual y sistemas de representación) y, parcialmente, del análisis cognitivo, para seleccionar y transformar ejercicios de los libros de texto y diseñar las tareas que propusieron en la unidad didáctica.

5. GÉNESIS INSTRUMENTAL EN LA PRÁCTICA DE LA ASIGNATURA

En la sección 6.2 del capítulo 9 propuse una adaptación a la asignatura del modelo de actividad situada de Vérillon (Figura 67). Este modelo alternativo permite, desde la perspectiva teórica, precisar y conceptualizar el proceso general de negociación de significados propuesto por Wenger en un proceso específico a cada organizador del currículo. ¿Cómo se puede detallar el proceso de génesis instrumental que se esquematiza en este modelo de actividad situada? En otras palabras, ¿qué nos informan los resultados empíricos sobre el proceso de transformación de un organizador del currículo en un instrumento con propósitos didácticos? ¿Es posible conceptualizar, de nuevo, este proceso, a partir de los resultados obtenidos y teniendo en cuenta las nociones de significado teórico, técnico y práctico de los organizadores del currículo? ¿Qué papel jugó el diseño y desarrollo de la asignatura en este proceso? En este apartado, sugiero una aproximación a estas preguntas.

5.1. Negociación de Significados en el Aula

Los resultados que he integrado en este capítulo dan luces sobre el papel que jugaron el diseño y el desarrollo de la asignatura en la construcción de los significados parciales de los grupos de futuros profesores. El diseño de la asignatura (capítulo 5), en su dimensión metodológica, pretendía fomentar la negociación y construcción social de significados. La evidencia muestra que estos procesos tuvieron lugar en la práctica y permite identificar las características de los esquemas metodológicos que influyeron de manera más destacada en dichos procesos.

Cada grupo trabajó sobre un tema matemático concreto a lo largo de la asignatura. El tratamiento de los organizadores del currículo fue cíclico: cada organizador ocupó dos a tres sesiones de clase y, en ellas, los grupos presentaron su trabajo y comentaron y criticaron el trabajo de los otros grupos. Se pretendió que el trabajo de cada grupo con cada organizador del currículo fuese ininterrumpido. Comenzó con la presentación de sus significados teórico y técnico por parte de la

instrucción y con la introducción de un ejemplo del significado técnico para un tema concreto. Después de trabajar por fuera del aula, cada grupo presentó en clase un primer análisis de su tema. Cada presentación fue comentada y criticada. Con esta información, cada grupo hizo un segundo intento de análisis de su tema y produjo una segunda presentación. Al comenzar a trabajar con un nuevo organizador del currículo, se mantuvieron las referencias a aquéllos ya trabajados: se esperaba y se requería que los grupos utilizaran la información recogida previamente para fundamentar el análisis que hacían con el nuevo organizador del currículo. En otras palabras, se requirió que los grupos utilizaran la información que surgía de un análisis particular en los demás análisis del análisis didáctico. También se requirió que utilizaran esa información en el diseño de la unidad didáctica.

La negociación de significados en el aula fue promovida por la instrucción y se manifestó en los comentarios y críticas que los futuros profesores y los formadores hicieron a las presentaciones de los grupos. Los comentarios y críticas de los futuros profesores surgieron por diversas razones. Un grupo dado (e.g., esfera) podía comentar y criticar la presentación de otro grupo (e.g., probabilidad) porque los dos grupos habían hecho el mismo tipo análisis. Aunque los temas matemáticos eran diferentes, el problema era el mismo y los grupos lograron, en muchas ocasiones, adaptar las reflexiones, ideas y dudas que tuvieron al analizar su tema a los temas de los otros grupos. Además, el progreso y avance de los grupos fue heterogéneo. Por lo tanto, en muchas ocasiones, algunos grupos habían desarrollado ideas que otros grupos no habían vislumbrado aún y lograron adaptarlas a los temas de esos grupos. Finalmente, en algunos casos, el ambiente de sana competencia que mencioné en el apartado anterior motivó a algunos grupos a mostrar las virtudes de su trabajo al compararlo con el trabajo de los demás.

Las circunstancias anteriores dieron lugar a que cada grupo viviera periódica y sistemáticamente una experiencia que le generó dudas y le permitió consolidar ideas, identificar dificultades y concretar posibles caminos de mejora de su trabajo. Estas dudas, ideas, dificultades y caminos de mejora surgieron de su interpretación de los comentarios y críticas de los compañeros y los formadores, de los comentarios a las transparencias y de la comparación que ellos hacían de su trabajo con el trabajo de los demás grupos. Estas interpretaciones promovieron los procesos de negociación de significado dentro de cada grupo cuando trabajaron por fuera del aula.

5.2. Génesis Instrumental en el Grupo

La construcción y negociación de los significados parciales de un organizador del currículo en el seno de un grupo fue un proceso evolutivo. A continuación, identifico, a partir de los análisis anteriores, los principales patrones que caracterizan este proceso.

En muchas ocasiones, el primer problema que el grupo tuvo que enfrentar consistió en comprender los requerimientos de la tarea. Dado que aún no tenían un significado para el organizador del currículo, les resultaba difícil comprender qué significaba analizar su tema con esa noción. La evidencia muestra que algunos grupos dedicaron tiempo para decidir lo que debían hacer. En esta primera aproximación al análisis de su tema, muchos grupos resolvieron el problema imitando el ejemplo que la instrucción había presentado en clase y utilizando las

herramientas que tenían disponibles (e.g., la lista de organizadores del currículo para describir la estructura conceptual, o los libros de texto para los sistemas de representación y el diseño de tareas).

Una vez que hicieron la presentación de su primera aproximación, los grupos reiniciaron el análisis de su tema partiendo de las ideas, dudas, dificultades y posibles caminos de mejora que surgieron de los comentarios y críticas que habían recibido, del análisis y comparación de su trabajo con el trabajo de los otros grupos y de la información que encontraban en la literatura (principalmente los libros de texto). Esta situación promovió, en general, un proceso intenso de negociación de significados dentro de cada grupo. En este proceso, los grupos comenzaron a construir esquemas de acción (razonamientos y procedimientos) para el análisis de su tema con el organizador del currículo. La noción comenzó a transformarse en instrumento, desde la perspectiva de su significado técnico, en el sentido de que los grupos avanzaron en su capacidad de producir y organizar la información que surgía de dicho análisis.

Esta segunda fase del proceso de génesis instrumental se caracterizó por dos cuestiones: (a) la relación entre el desarrollo del significado técnico del organizador del currículo por parte de los futuros profesores y la profundidad con la que analizaban su tema y (b) la relación entre la construcción de ese significado técnico y su puesta en práctica.

En el proceso de transformación de un organizador del currículo en instrumento, el análisis de la estructura matemática y la construcción del significado técnico de la noción interactuaron dinámicamente. A medida que se avanzó en el análisis, se construyeron significados más complejos (del organizador del currículo y del concepto) que, a su vez, permitieron nuevos análisis más profundos. Las características de las transparencias de los grupos dependieron por lo tanto de dos factores: el significado técnico que los grupos iban construyendo de cada organizador del currículo y la profundidad con la que estudiaban y analizaban (utilizando dicha noción como instrumento) la estructura matemática que correspondía a su tema. Un significado técnico inicial del organizador del currículo permitió solamente una descripción general de la estructura matemática. Y el esfuerzo por profundizar en el análisis de la estructura matemática contribuyó al desarrollo del significado técnico de la noción. Por ejemplo, en las primeras producciones de la estructura conceptual, cuando el significado de este organizador del currículo apenas se estaba comenzando a construir, los grupos de futuros profesores presentaron producciones que describían de manera general y poco organizada la estructura matemática. Sin embargo, este esfuerzo los llevó a conocer mejor esta estructura matemática y, paralelamente, a progresar en el desarrollo del significado del organizador del currículo con la que la analizaron (en este caso, la estructura conceptual). De esta manera, los grupos de futuros profesores pasaron de utilizar una multiplicidad de criterios de organización a organizar la estructura conceptual basándose en los sistemas de representación. Esto les permitió describir y conocer con mayor detalle la estructura matemática, lo que los llevó, por ejemplo, a reconocer la importancia de las conexiones entre los sistemas de representación.

Los grupos también avanzaron en la construcción del significado técnico de cada organizador del currículo al tratar de poner en práctica la información que

surgía de su análisis. Éste fue el caso, por ejemplo, de la idea de conexiones en el trabajo del grupo función cuadrática. Este grupo no reconoció la importancia de esta noción en el momento de producir la estructura conceptual. La idea apareció explícitamente por primera vez cuando realizaron el análisis cognitivo. Pero, fue con motivo de la negociación de significados que surgió de la revisión de los comentarios a las transparencias, a la hora de diseñar la unidad didáctica, que el grupo materializó el significado de esta idea y lo plasmó explícitamente en sus producciones. Es decir, fue con motivo de poner en práctica el resultado del análisis de su tema que el grupo logró materializar su significado técnico. Por lo tanto, los significados técnico y práctico de un organizador del currículo interactúan en dos sentidos: por un lado, el significado práctico se desarrolla cuando se pone en juego la información que surge del análisis del tema con el organizador del currículo (significado técnico); por el otro lado, los grupos avanzan en la materialización del significado técnico del organizador del currículo cuando construyen su significado práctico.

Que un grupo haya desarrollado y materializado el significado técnico de un organizador del currículo no implica necesariamente que haya avanzado en la construcción de su significado práctico. Todos los estudios presentan evidencia de que éste fue el caso para la noción de fenomenología. En el análisis del trabajo del grupo función cuadrática presenté una descripción detallada de esta situación. Allí mostré que el grupo tuvo dificultades para identificar el procedimiento de análisis fenomenológico en virtud del cual se identifican subestructuras y se establecen relaciones entre estas subestructuras y los fenómenos correspondientes. No obstante, la lectura cuidadosa de los comentarios a las transparencias les permitió, al final, identificar y llevar a la práctica el procedimiento. Esto sugirió un avance importante en la construcción del significado técnico de la noción de fenomenología. Sin embargo, este significado no se materializó desde el punto de vista práctico. A la hora de diseñar las actividades para la unidad didáctica, el grupo no utilizó la información que recogió y organizó para esta noción.

Las deficiencias en el desarrollo del significado práctico de los organizadores del currículo por parte de los grupos de futuros profesores también se evidenció en la independencia entre el trabajo que los grupos realizaron con los organizadores del currículo del análisis de contenido y el diseño de su unidad didáctica. Esto se puso de manifiesto en el análisis de los trabajos finales. Allí mostré que la mayoría de los grupos utilizó en el diseño de la unidad didáctica información que no quedó registrada en el lugar que le correspondía dentro del análisis didáctico. Esto significa que los grupos constataron que esta información era relevante para el diseño, pero no reconocieron que formaba parte de la información correspondiente a cada uno de los organizadores del currículo.

5.3. Teoría, Técnica y Práctica en la Génesis Instrumental de los Organizadores del Currículo

Los análisis anteriores sugieren la posibilidad de precisar el proceso de génesis instrumental en el contexto del desarrollo del conocimiento didáctico de los organizadores del currículo. He identificado etapas y relaciones en el desarrollo de los significados de estas nociones por parte de los grupos de futuros profesores.

El desarrollo del conocimiento didáctico de un grupo sobre un organizador del currículo comienza por la negociación del significado de los requerimientos involucrados en las tareas que se les asignan (análisis de su tema con la noción). En muchas ocasiones, la primera aproximación surge de la imitación: adaptan el ejemplo de la instrucción a su tema y lo complementan con la información que encuentran en los libros de texto. En una segunda etapa, y con motivo de los comentarios y críticas que surgen de su presentación y de la comparación de su trabajo con el de los otros grupos, se avanza en la construcción del significado técnico. Hay dos catalizadores de este progreso. Por un lado, en la medida en que se profundiza en el análisis de la estructura matemática, se avanza en la construcción del significado técnico. Por el otro lado, este significado técnico también se desarrolla con motivo de su puesta en práctica en los otros análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica. En una tercera etapa, se logran establecer esquemas de acción para el análisis técnico del tema con el organizador del currículo. El desarrollo del significado práctico de la noción constituye la cuarta etapa. Finalmente, la quinta etapa consiste en el desarrollo de técnicas para la utilización de ese significado práctico.

Los grupos no fueron necesariamente conscientes del significado teórico de los organizadores del currículo. Esto no quiere decir que no llegaran a desarrollarlo en alguna medida. El hecho de que los grupos lograran interpretar y adaptar las producciones de los otros grupos al caso concreto de su tema matemático, indica que su conocimiento del organizador del currículo fue más allá de las características que le eran específicas a su tema. En este sentido, los grupos lograron generalizar el significado técnico del organizador del currículo y, por lo tanto, construir versiones preliminares de su significado teórico. No obstante, en la práctica, los grupos focalizaron su atención en la construcción de los significados técnico y práctico de las nociones. El conocimiento didáctico se construye, por lo tanto, en un juego permanente (y en la mayoría de los casos inconsciente) entre el significado teórico, técnico y práctico de las nociones implicadas.

La interacción entre técnica y práctica se caracteriza por el papel que juega la práctica en el desarrollo del significado técnico y por el papel que juega la información que surge del análisis técnico del tema en la práctica. En el caso del desarrollo de la asignatura que analicé en este proyecto de investigación, los grupos lograron desarrollar el significado técnico de la estructura conceptual y los sistemas de representación y parcialmente del análisis fenomenológico. También lograron, en algunos casos, desarrollar técnicas para el análisis del tema con los tres organizadores del currículo. Sin embargo, no llegaron a desarrollar técnicas para su puesta en práctica.

En la Figura 77 esquematizo una conjetura preliminar sobre el proceso de génesis instrumental de los organizadores del currículo en el contexto de la asignatura. Un grupo de futuros profesores transforma un organizador del currículo en un instrumento (y, por consiguiente, avanza en el desarrollo de su conocimiento didáctico sobre la noción) en la medida que negocia y construye sus significados teórico, técnico y práctico. El proceso se inicia con la construcción de un significado técnico inicial de la noción que se motiva en la imitación y se alimenta con la información de los libros de texto. Es el inicio del proceso de instrumentalización (técnica). La instrumentación tiene lugar cuando el significado técnico se desarro-

lla, con motivo de los comentarios y las críticas, en su interacción con la profundidad de análisis de la estructura matemática y en su puesta en práctica en otros análisis y en el diseño de la unidad didáctica (orquestración). Este desarrollo da lugar a la construcción de esquemas de acción para el análisis técnico de la estructura matemática. En la medida en que se desarrolla la capacidad para comparar e interpretar los análisis técnicos de diferentes temas matemáticos, se construye el significado teórico de la noción. El desarrollo del significado práctico requiere de un nuevo proceso de génesis instrumental. Parte de la información que surge del análisis técnico del tema y apela a la orquestración de los diversos instrumentos (los organizadores del currículo) para la construcción de esquemas de acción que dan lugar a la puesta en práctica del organizador del currículo con propósitos didácticos.

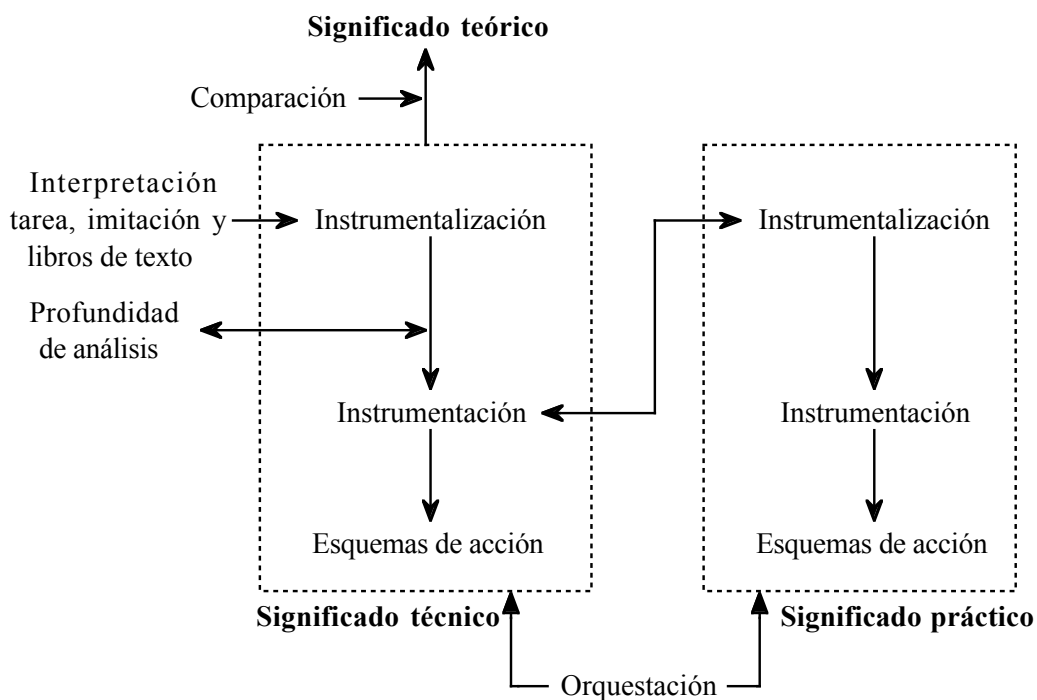


Figura 77. Conjetura de la génesis instrumental de los organizadores del currículo

6. COMPLEJIDAD DE LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

En este capítulo, integré los resultados de los cuatro estudios empíricos que componen este proyecto de investigación. Para ello, presenté inicialmente un resumen esquemático de dichos estudios y resalté el hecho de que abordan un mismo fenómeno, desde perspectivas diferentes. Organicé las contribuciones de los cuatro estudios a la caracterización del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores y destacué las precisiones que los resultados de dichos estudios aportaron a los significados de los organizadores del currículo. Identifiqué aquellos aspectos del diseño y desarrollo de la asignatura y de las visiones y

experiencia de los futuros profesores que me permitieron formular conjeturas de explicación del desarrollo de su conocimiento didáctico. Finalmente, me basé en los análisis anteriores para destacar el papel de los esquemas metodológicos utilizados a lo largo del curso y para proponer avances en la conceptualización del proceso de génesis instrumental de los organizadores del currículo.

Los resultados de estos estudios empíricos dan luces sobre el proceso de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria que participan en programas de formación inicial. Me he basado en ellos para caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores desde diferentes perspectivas. Identifiqué cuatro estados desarrollados. Pormenoricé esos estados de desarrollo al identificar y caracterizar los significados parciales que los grupos de futuros profesores pusieron de manifiesto en sus producciones y actuaciones. Puse en evidencia el carácter evolutivo de esos significados parciales para cada uno de los organizadores del currículo del análisis de contenido. Y propuse una conceptualización de la génesis instrumental de los organizadores del currículo en la que se especifica un proceso evolutivo por etapas y se destaca la interacción en el desarrollo de los significados teórico, técnico y práctico de las nociones.

El conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura evolucionó de manera paulatina, desfasada con respecto a la instrucción y heterogénea. Los grupos de futuros profesores enfrentaron dificultades cuando analizaron su tema con cada uno de los organizadores del currículo del análisis de contenido. Estas dificultades se reflejaron en sus producciones y actuaciones a través de una variedad de significados parciales que ellos pusieron en juego al analizar su tema con cada una de las nociones. Algunos de los grupos de futuros profesores lograron superar la mayoría de las dificultades. No obstante, algunos de los propósitos de la instrucción no se satisficieron, en particular con respecto a la noción de fenomenología. Estas dificultades ponen de manifiesto la complejidad del proceso de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que tuvo lugar dentro de la asignatura. He analizado esta complejidad basándome en la identificación y caracterización de diversos aspectos del desarrollo de la asignatura que se revelaron como más relevantes con motivo de los resultados de los estudios.

Estas caracterizaciones del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores indican posibles caminos a seguir para revisar el diseño curricular de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato y para sustentar la conceptualización de programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Por ejemplo, los estudios ponen en evidencia la complejidad de organizadores del currículo como estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Esta complejidad se manifiesta en múltiples dimensiones. He destacado la relación entre los significados teórico, técnico y práctico de las nociones y sus implicaciones en el aprendizaje de los futuros profesores. El análisis detallado de la evolución de los significados parciales manifestados por los grupos en los estudios sugiere vías para la revisión de los significados técnico y práctico que se proponen en la asignatura. Desde la perspectiva metodológica, los resultados de los estudios tienen múltiples implicaciones. He mostrado que el diseño metodológico de la

asignatura promueve la construcción social de significados en virtud de la cual los grupos de futuros profesores transforman las nociones del análisis de contenido en instrumentos con propósitos prácticos. Pero los resultados de estos procesos son parciales. Los estudios han mostrado que la asignatura carece de esquemas explícitos para promover el desarrollo del conocimiento práctico y para fomentar la constitución y consolidación de comunidades de práctica. La identificación y caracterización de los significados parciales que los grupos de futuros profesores manifiestan en sus producciones y actuaciones, de las dificultades que enfrentan al realizar las tareas y de las soluciones que desarrollan para esas dificultades constituyen una “base conocimiento” para el diseño de la asignatura y para la actuación de los formadores de profesores.

UNA ETAPA EN MI REFLEXIÓN SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Enmarqué este proyecto de investigación en el contexto de cuatro preguntas generales sobre el profesor de matemáticas (capítulo 1) que se referían a su actuación, a su conocimiento, al diseño y desarrollo de programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y a los procesos de aprendizaje de los futuros profesores que participan en dichos programas. Concreté estas preguntas en dos objetivos generales para este proyecto: (a) avanzar en la conceptualización de las actividades y el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas de secundaria y del diseño de planes de formación inicial y (b) describir y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada del curso 2000-2001.

El primer objetivo era de carácter conceptual e implicaba, basándose en una visión funcional de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y de su conocimiento didáctico, tres objetivos específicos: (a) introducir y caracterizar un significado de la expresión análisis didáctico, como conceptualización de la actuación del profesor en sus actividades de diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas; (b) incorporar un significado del término conocimiento didáctico; y (c) avanzar en la conceptualización y la fundamentación del diseño curricular de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato. He abordado estos objetivos específicos en los capítulos 2, 3 y 5, respectivamente.

El segundo objetivo era de carácter empírico y partía de dos conjeturas. La primera, que era posible organizar y caracterizar el desarrollo del conocimiento

didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. Y, la segunda, que era posible abordar el aprendizaje de un grupo de futuros profesores desde la perspectiva sociocultural. Delimité la indagación al desarrollo del conocimiento didáctico de los organizadores del currículo del análisis de contenido y concreté este objetivo general en dos objetivos específicos: (a) describir y caracterizar los significados parciales que los grupos de futuros profesores desarrollan a lo largo de la asignatura y la evolución de su conocimiento didáctico en términos de estados y factores de desarrollo y (b) formular y contrastar conjeturas que permitieran explicar dicha evolución. Precisé el marco conceptual que me permitió abordar estos objetivos específicos en el capítulo 4. Detallé el contexto en el que realicé la indagación empírica (el diseño y desarrollo de la asignatura) en los capítulos 5 y 6. Abordé los objetivos específicos con cuatro estudios que presenté en los capítulos 8, 9 y 10. Integré los resultados de estos estudios en el capítulo 11.

En estos estudios, analicé las presentaciones, las producciones, las actuaciones y los trabajos finales de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura y examiné las actuaciones de un grupo concreto en su trabajo por fuera del aula. Considero que he propuesto respuestas concretas a las cuatro preguntas generales que estructuraron este proyecto, al contrastar las hipótesis y abordar los objetivos generales y específicos que articularon la indagación sistemática que he reportado en este documento. A continuación, con el propósito de justificar e ilustrar esta consideración, preciso las cuestiones que considero más relevantes de la reflexión y la indagación que realicé. Para ello, identifico sus principales contribuciones, establezco algunas de sus implicaciones, determino sus limitaciones y distingo las cuestiones que quedan abiertas. Finalizo el capítulo con una reflexión sobre mi experiencia como diseñador, formador e investigador al realizar este proyecto.

1. CONTRIBUCIONES A LA REFLEXIÓN SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Considero que, con este proyecto de investigación, contribuyo a la reflexión sobre el profesor de matemáticas de secundaria, en general, y sobre la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en particular. Estas contribuciones son de tipo teórico, metodológico, empírico y curricular.

1.1. Contribuciones Teóricas

Propuse el análisis didáctico como un nivel currículo (§ 2.1.1)¹⁵⁰. Con esta noción, estructuré conceptualmente los organizadores del currículo propuestos por Rico (Rico, 1997a)(§ 2.11.2). Presenté avances en la conceptualización de la noción de “organizador del currículo” al darle, a partir de la teoría de la génesis instrumental, un significado concreto a la idea de “herramienta conceptual y metodológica” (§ 4.5.2).

¹⁵⁰ Para facilitar la lectura de las referencias cruzadas a otros lugares del documento, en este capítulo utilicé la notación § c.a.s, donde c se refiere al capítulo, a al apartado y s a la sección. De esta manera, la referencia § 2.1.1 se refiere a la primera sección, del primer apartado del segundo capítulo.

En la descripción del análisis de contenido, introduje la noción de estructura conceptual como organizador del currículo (§ 2.7.4), concretando uno de los aspectos del significado de los conceptos de las matemáticas escolares, sin tener que hacer referencia a cuestiones cognitivas (§ 2.3.3). Al resaltar las operaciones que se realizan sobre los signos (§ 2.7.3), establecí el vínculo entre la estructura conceptual y los sistemas de representación (§ 2.3.3). Esta distinción me permitió caracterizar las conexiones que se pueden establecer entre los elementos de una estructura matemática, cuando ésta se representa por medio de mapas conceptuales (§ 2.3.3). Profundicé en la reflexión sobre la fenomenología como dimensión del significado de un concepto, al aclarar, por medio de una formulación concreta y operacional de la noción de modelo matemático, el vínculo entre subestructuras de una estructura matemática y los fenómenos que estas subestructuras organizan (§ 2.7.5).

La fundamentación de las tres dimensiones del significado de un concepto de las matemáticas escolares que articulan el análisis de contenido se basa en las contribuciones de Luis Rico a la interpretación y adaptación de la noción de significado de Frege en ese contexto (§ 2.3.1). Las contribuciones de Luis Rico también me permitieron estructurar y detallar la noción de contenido como elemento curricular (§ 2.7.1).

Introduje la noción de “camino de aprendizaje” (§ 2.8.6), como adaptación de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje a la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (§ 2.8.1). Conceptualicé la relación entre las nociones de objetivo de aprendizaje, capacidad, tarea, camino de aprendizaje y competencia (§ 2.9.3). Esta conceptualización dio lugar a la formulación de un procedimiento que permite caracterizar un objetivo de aprendizaje en términos de sus caminos de aprendizaje (§ 2.8.6), y otro procedimiento en virtud del cual es posible analizar y seleccionar tareas que contribuyan al logro de dicho objetivo (§ 2.9.6). De esta manera, resalté el vínculo entre el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción (§ 2.9.11).

Con base en la noción de análisis didáctico, y partiendo de una visión funcional de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (§ 3.2.2), establecí un significado concreto para el término “conocimiento didáctico” (§ 3.2.4) y puse en evidencia su relación con la noción de conocimiento pedagógico de contenido (§ 3.2.1). Introduje las nociones de significado teórico, técnico y práctico de los organizadores del currículo, desde la perspectiva del conocimiento didáctico de referencia y adapté estas nociones al contexto del conocimiento didáctico de los futuros profesores (§ 3.2.3), basándome en la noción de significado parcial de un grupo de futuros profesores (§ 4.4). Las propuestas para las nociones de análisis didáctico y conocimiento didáctico me permitieron caracterizar, en términos de capacidades, la competencia de planificación del profesor de matemáticas (§ 3.4.1). Considero que dichas conceptualizaciones sustentan posibles respuestas tanto a la paradoja de la planificación, como a la problemática de la brecha entre la planificación global y la planificación local y representan un avance en la reflexión sobre la noción de conocimiento pedagógico de contenido (§ 2.11.1 y 3.1).

Aunque no se pueden calificar como contribuciones teóricas, entiendo que, en este proyecto de investigación, introduje innovaciones conceptuales que contribu-

yen a la reflexión e investigación sobre el profesor de matemáticas. Adapté la teoría de la génesis instrumental a la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en general, y al estudio del desarrollo del conocimiento didáctico de los organizadores del currículo, en particular (§ 4.5.2, 9.6.2 y 11.5.3). Utilicé la teoría de la calidad de la información para justificar una metodología de análisis de las producciones de los futuros profesores y para introducir la noción de “factor desarrollo” (§ 4.7). Abordé la problemática del aprendizaje del futuro profesor de matemáticas desde la perspectiva de la teoría social del aprendizaje de Wenger (§ 4.3 y 10.3). Mi interpretación y adaptación de estas tres teorías al contexto de este proyecto, me permitió establecer un significado para la idea de “desarrollo del conocimiento didáctico” que hice metodológicamente operacional (§ 4.6).

1.2. Contribuciones Metodológicas

En el contexto de la línea de investigación sobre formación de profesores del Grupo Pensamiento Numérico, introduje varias innovaciones en el diseño de los estudios empíricos que configuran este proyecto de investigación. Asumí un posición sociocultural del aprendizaje (§ 4.2) y centré la indagación en el aprendizaje de los grupos de profesores, dejando en un segundo plano el análisis de las actuaciones y producciones de los futuros profesores, como individuos (§ 7.2.3). Decidí estudiar los procesos de aprendizaje (desarrollo del conocimiento didáctico), más que los resultados (§ 7.2). Y realicé la investigación dentro del contexto de la asignatura (§ 7.2).

En el análisis de las producciones, diseñé y puse en práctica un esquema de análisis de las observaciones, el análisis de discrepancias (§ 8.1.5), que me permitió establecer y caracterizar cuatro estados de desarrollo del conocimiento didáctico y asignar cada observación a uno de esos estados (§ 8.2). Éste es un procedimiento no estándar para el agrupamiento de observaciones que puede utilizarse cuando la información disponible no satisface las condiciones impuestas por métodos estándar de agrupamiento, como el análisis clúster (§ 8.2). Diseñé una hoja de cálculo que permite automatizar su uso (Anexo J) e identifiqué sus virtudes y defectos (§ 8.1.5). Para el análisis de las producciones, diseñé un sistema interconectado de bases de datos que permite navegar dinámicamente por la evidencia incluida en las transparencias de los grupos de futuros profesores y en las transcripciones de las grabaciones de la interacción en clase (Anexo G).

Para el análisis del trabajo del grupo función cuadrática, diseñé y puse en práctica unos instrumentos de codificación, análisis e interpretación de las transcripciones que hacen operacional, en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, la teoría social del aprendizaje de Wenger (§ 10.3). Mostré que, con esta adaptación de la teoría, la noción de comunidad de práctica se constituye en una herramienta para “ver, pensar y actuar” en el ámbito de la formación de profesores (§ 10.8).

Al ser un análisis sistemático de las matemáticas escolares, considero que el análisis didáctico puede ser útil conceptual y metodológicamente en aquellos estudios sobre la comprensión y el aprendizaje de temas matemáticos en los que es necesario diseñar pruebas y esquemas de análisis de las actuaciones de los sujetos cuando abordan las tareas. El análisis didáctico (en particular, el análisis de conte-

nido) ya ha sido utilizado en investigaciones relacionadas con esta problemática y con el análisis histórico de libros de texto (§ 2.11.4).

1.3. Contribuciones Empíricas

El propósito de los estudios empíricos que configuraron este proyecto de investigación fue el de dar una “prueba de existencia”, es decir, el de presentar sistemáticamente evidencias de un caso en el que una estrategia (de formación) produce unos resultados. Una prueba de existencia es una contribución al conocimiento de la Didáctica de la Matemática, puesto que cada investigador y cada formador de profesores puede interpretar y adaptar los resultados de estos estudios empíricos a su contexto específico y a los problemas que se articulan en ese contexto. Enumero a continuación las principales contribuciones de dichos estudios.

Establecí que el conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores evoluciona de acuerdo con patrones estables que permiten caracterizar cuatro estados de desarrollo (§ 8.3.1). Mostré que el proceso de génesis instrumental toma tiempo: requiere que los grupos de futuros profesores negocien significados (del organizador del currículo, de su tema matemático y de sus esquemas de acción) y que estos significados parciales se materialicen (en diferentes formas) en las sucesivas ocasiones en las que los grupos presentan sus producciones en clase (§ 8.3.2).

Profundicé en la descripción de dichos estados de desarrollo, al identificar y pormenorizar los significados parciales que los grupos de futuros profesores construyeron a lo largo de la asignatura (§ 9.2, 9.3 y 9.4), contribuyendo, así, a la caracterización de los organizadores del currículo desde una perspectiva empírica (§ 9.6.1). Puse en evidencia la evolución de estos significados parciales en términos de los factores de desarrollo, identifiqué las dificultades que los grupos de futuros profesores manifestaron en diversos momentos, y reseñé los modos y estrategias en virtud de los cuales, en variadas ocasiones, lograron superarlas (§ 9.2, 9.3 y 9.4). Puse de manifiesto el papel, en el desarrollo de su conocimiento didáctico, de la experiencia docente y de las visiones de los futuros profesores cuando llegan a la asignatura (§ 9.6.2).

Establecí en qué medida y de qué forma los grupos de futuros profesores pusieron en juego la información que recabaron para los organizadores del currículo en el diseño de la unidad didáctica (§ 9.5.2). Puse en evidencia que varios grupos de futuros profesores no lograron desarrollar necesariamente una visión global e integrada del análisis de contenido como herramienta para el diseño de unidades didácticas (§ 9.5.3).

Pormenoricé el proceso en virtud del cual un grupo de futuros profesores constituyó una comunidad de práctica (§ 10.7), al mostrar cómo evolucionó su compromiso mutuo (§ 10.7.1), cómo definieron y afinaron su empresa conjunta (§ 10.7.2) y cómo desarrollaron su repertorio compartido (§ 10.7.3). Caractericé, desde una perspectiva sociocultural, el aprendizaje de un grupo de futuros profesores, al poner en evidencia los procesos de negociación de significados que dieron lugar a sus producciones y actuaciones (§ 10.4.4). Identifiqué y describí las principales cuestiones que influyeron en ese proceso de negociación de significados (§ 10.3.5).

Con base en los resultados anteriores, profundicé y precisé, desde una perspectiva empírica, las nociones de significado teórico, técnico y práctico de los organizadores del currículo (§ 11.2) y detallé el proceso de génesis instrumental en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. De esta manera, caractericé el juego entre el conocimiento teórico, técnico y práctico de los futuros profesores que fundamenta la transformación de un organizador del currículo en instrumento con utilidad práctica (§ 11.5.3 y 11.5). Identifiqué unas fases de este proceso de transformación (§ 11.5.2), como contribución a la comprensión y conceptualización del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores (§ 11.3). Mostré el papel que el diseño y desarrollo la asignatura jugaron en este proceso (§ 11.5.1 y 11.5.1) e identifiqué otras características de la asignatura y de los futuros profesores que influyeron en el desarrollo de su conocimiento didáctico (§ 11.4).

1.4. Contribuciones Curriculares

Considero que he contribuido a la conceptualización y la fundamentación de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, en particular, y de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en general (§ 5.5). Estas contribuciones se basan en mis aportes a la concreción de significado para las nociones de análisis didáctico (§ 2.4) y conocimiento didáctico (§ 3.2) y a la caracterización de la competencia de planificación del profesor de matemáticas que surge de ellos (§ 3.1). Mostré cómo estas nociones permiten llevar a la práctica curricular nuestra visión funcional de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (§ 3.2.2).

Por otro lado, considero que también he contribuido al diseño de la asignatura desde el punto de vista metodológico al proponer y contrastar empíricamente un esquema de trabajo para el tratamiento del análisis didáctico en dicho plan de formación (§ 5.4.1 y 11.5.1).

2. DE LA INVESTIGACIÓN A LA PRÁCTICA

¿Cómo puede la “prueba de existencia” que acabo de describir contribuir a la práctica de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? Entiendo que estos resultados pueden ser interpretados y adaptados en dos dominios: la evaluación y mejora del diseño y desarrollo de programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y la reflexión sobre la actuación de los formadores de profesores.

Mi intención en este proyecto no fue la de evaluar un modelo de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Por consiguiente, no busqué responder a preguntas del estilo “¿qué es lo que funciona en el aula?” o “¿qué método es mejor?”. Más bien, argumenté que la caracterización del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura aporta luces sobre sus dificultades y logros al realizar las tareas y sobre las posibles causas de estas dificultades y logros. Entiendo que esta información es relevante tanto para la revisión del diseño de la asignatura, como, sujeta a la interpretación correspondiente, para otros formadores y otras asignaturas que, en alguna medida, fundamentan la formación inicial de profesores de matemáticas de

secundaria en un modelo similar al nuestro. En el caso de nuestra asignatura, los resultados destacan dos cuestiones claves donde es necesario mejorar: el tratamiento del análisis fenomenológico y la presentación del significado práctico de los organizadores del currículo y su relación con su significado técnico. Por otro lado, resaltan el papel positivo que jugaron los esquemas metodológicos utilizados y los comentarios a las producciones de los futuros profesores.

Considero que la descripción pormenorizada del proceso en virtud del cual los grupos de futuros profesores construyen sus significados parciales sobre los organizadores del currículo del análisis de contenido es una información valiosa para aquellos formadores de profesores que pretendan promover dichos significados en sus estudiantes. Esta información puede permitir, en muchos casos, la previsión de las actuaciones de los grupos de futuros profesores y, por lo tanto, una adecuada planificación de la instrucción.

El análisis del proceso en virtud del cual un grupo de futuros profesores emergió como comunidad de práctica destacó el papel de los formadores como promotores del aprendizaje interdependiente y de la negociación de significados. He sugerido que los formadores debemos asumir un rol de “asesores”, de tal forma que nuestra preocupación no sólo se centre en qué aprende un grupo de futuros profesores, sino que también atienda a los factores que puedan influir tanto en el desarrollo del compromiso mutuo entre sus miembros, como en la claridad y validez de su empresa conjunta.

3. LIMITACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

En este apartado, identifico las principales limitaciones de este proyecto y establezco algunas de las cuestiones que quedan abiertas hacia el futuro.

El análisis didáctico es una visión (conceptualización) parcial e ideal de la actividad (de planificación) del profesor. Es una visión parcial porque focaliza la atención en la dimensión local de la planificación. El hecho de que haya otros aspectos de esa actividad que no considero dentro del análisis didáctico, no quiere decir que estos aspectos no sean importantes o relevantes o que sean menos importantes que los que exploré en este documento. Como procedimiento ideal, me sirvió para conceptualizar el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y detallar, en términos de capacidades, algunos aspectos de su competencia de planificación. Pero no espero que ningún profesor de matemáticas concreto realice sistemáticamente todos y cada uno de los procedimientos que conforman el análisis didáctico. No obstante, mostré que, a la hora de planificar su clase, el profesor puede utilizar el análisis didáctico como guía, al nivel detalle que corresponda al tiempo que tenga disponible.

Aunque hice un esfuerzo por fundamentar conceptualmente el análisis de contenido, no considero que este trabajo esté cerrado. La claridad y utilidad del significado técnico de los organizadores del currículo depende de la profundidad y claridad con que se estructure su significado teórico. Por otro lado, los estudios empíricos pusieron de manifiesto la necesidad de explorar y desarrollar estrategias para la descripción y el tratamiento curricular del significado práctico de los organizadores del currículo. La presentación que hago de los análisis cognitivo, de instrucción y de actuación tiene un carácter restringido y aborda solamente algunos

de sus múltiples aspectos. De hecho, los dos primeros son actualmente objeto de trabajo en nuestro grupo de investigación. De la misma manera, nos encontramos actualmente explorando los vínculos entre el análisis didáctico, como fundamentación de un programa de formación de profesores, y la formación de los escolares, en particular, desde la perspectiva de la alfabetización matemática.

He propuesto una conjetura preliminar para el proceso de génesis instrumental de los organizadores del currículo en el contexto de la asignatura. Esta conjetura requiere una mayor estructuración y fundamentación teórica y una sustentación empírica más amplia. En particular, resulta necesario explorar con mayor profundidad cómo, en la práctica, los grupos de futuros profesores exitosos construyen el significado práctico de los organizadores del currículo.

Centré los esfuerzos conceptuales y metodológicos de este proyecto en la competencia de planificación del profesor. No obstante, el análisis didáctico incluye el ciclo completo de planificación, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas. Surgen entonces dos cuestiones en las que es posible indagar. Por un lado, cabe preguntarse cómo se debe avanzar en una descripción del análisis didáctico que pueda ser utilizada para la fundamentación de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que incluya la posibilidad de que los grupos de futuros profesores lleven a la práctica sus propuestas de unidad didáctica. Por otro lado, también resulta relevante cuestionarse sobre cómo podría adaptarse el análisis didáctico como fundamento para programas de formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria.

Como lo mencioné en el apartado anterior, el área de las competencias del formador de profesores de matemáticas es un terreno relevante y poco explorado. Los resultados de los estudios ponen en evidencia la necesidad de indagar qué competencias deben desarrollar los formadores si se adopta una visión sociocultural del aprendizaje de los futuros profesores.

4. EL FINAL DE UNA ETAPA; EL COMIENZO DE OTRA

En este documento reporto las actividades y los resultados de un trabajo colectivo. En diversos lugares del mismo, indico cómo las actividades de diseño, desarrollo e investigación se realizaron en equipo y cómo este proyecto se enmarcó y se apoyó en las actividades y resultados de la línea de investigación en formación de profesores del Grupo Pensamiento Numérico, que Luis Rico ha venido dirigiendo, promoviendo y desarrollando desde finales de la década de los ochenta. Los logros de este proyecto contribuyen a un proceso colectivo de investigación a largo plazo y son consecuencia de su visión y capacidad para encaminar dicho proceso y dirigir este proyecto de investigación.

Desde la perspectiva personal, este reporte describe el camino que, como diseñador, formador e investigador, recorrí durante siete años, en mi relación con la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en general, y con un programa de formación, en particular¹⁵¹. En este sentido, reporto una investigación sobre mi propia práctica. La conceptualización y el diseño de la investigación habla sobre mis creencias, valores y actitudes como diseñador e investigador.

¹⁵¹ En el Anexo P presento mi producción académica durante el periodo 2000-2007.

Los resultados empíricos revelan aspectos de mis competencias y actitudes como formador de profesores de matemáticas.

Mis creencias, valores y actitudes como diseñador e investigador se expresaron en la selección de unas opciones que configuraron el marco en el que desarrollé el esquema conceptual del proyecto y realicé sus estudios empíricos. Estas opciones se refieren a una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas (el análisis didáctico); a una visión funcional del conocimiento del profesor (conocimiento didáctico y competencia de planificación); a una posición (sociocultural) acerca de cómo se construye y desarrolla ese conocimiento; a una contribución a la fundamentación y diseño de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria; a una descripción detallada de cómo se desarrolló ese plan de formación y, por lo tanto, de cómo realizamos nuestro papel de formadores; a un interés por comprender el proceso de aprendizaje de los grupos de futuros profesores en el contexto real de su formación, y no restringirme al establecimiento de los resultados de ese proceso; y una atención singular al detalle y a la trascendencia de los procedimientos metodológicos.

Los resultados de los estudios empíricos hablan también (parcialmente) sobre mis competencias y actitudes como formador. Ponen de manifiesto cualidades y defectos del diseño y desarrollo del plan de formación en el que participé. Considero que mi experiencia previa como formador de profesores en “una empresa docente” me permitió contribuir al diseño y desarrollo de los esquemas de interacción (entre futuros profesores y entre futuros profesores y formadores) que promovieron la negociación de significados en la asignatura. Mis limitaciones como formador condicionaron el tratamiento que le di a cuestiones que, como el análisis fenomenológico o el significado práctico de los organizadores del currículo, restringieron parcialmente el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores.

Mi experiencia, al terminar esta nueva etapa en mi recorrido como diseñador, formador de profesores e investigador, me deja clara una cuestión: la complejidad de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Esta experiencia me ha permitido percibir y abordar parcialmente la multiplicidad de dimensiones involucradas en ella. A nivel conceptual, en mi aproximación al análisis didáctico, al conocimiento didáctico y al aprendizaje de los futuros profesores. A nivel curricular, en mi indagación sobre el diseño y desarrollo de planes de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y sobre el papel de los formadores en ellos. Y a nivel investigativo, en la importancia de la indagación sobre los procesos de donde emerge el aprendizaje de los futuros profesores. Mi conciencia de la complejidad y de la trascendencia de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria me induce a considerar este documento como el inicio de una nueva etapa en mi reflexión sobre el profesor de matemáticas.

RESUMEN EJECUTIVO

A continuación presento un resumen de este documento.

1. UNA APROXIMACIÓN A CUATRO CUESTIONES GENERALES SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

La formación de profesores se ha convertido en uno de los principales focos de investigación de la educación matemática en los últimos quince años. El interés se focaliza en cuatro cuestiones centrales:

1. ¿Qué caracteriza la actuación eficaz y eficiente del profesor en el aula de matemáticas?
2. ¿Cuáles deben ser los conocimientos, capacidades y actitudes de un profesor que actúa eficaz y eficientemente?
3. ¿Cómo se deben diseñar e implantar los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria de tal forma que se apoye y fomente el desarrollo de estos conocimientos, capacidades y actitudes?
4. ¿Qué caracteriza los procesos de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria que participan en este tipo de programas de formación inicial?

Este trabajo se enmarca dentro de la esfera de acción de estas cuatro preguntas. Para cada una de ellas, determino un contexto concreto de trabajo. Con respecto a la primera pregunta, propongo, desde una perspectiva conceptual, una descripción del procedimiento ideal que el profesor de matemáticas debería realizar a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas (el análisis didáctico). En segundo lugar, establezco los conocimientos y habilidades que el profesor de-

bería tener y desarrollar para realizar el análisis didáctico (el conocimiento didáctico). En lo que respecta a los planes de formación, centro la atención en el proceso de diseño curricular (planificación de unidades didácticas). Adicionalmente, circunscribo el trabajo al entorno de la asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato* de la Universidad de Granada. Esto implica poner el foco de atención en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en el contexto español. Finalmente, estudio y caracterizo el aprendizaje (desde una perspectiva evolutiva y sociocultural) de los futuros profesores que cursaron esta asignatura durante el curso 2000-2001.

El problema que abordo en este proyecto surge del encuentro de dos vertientes en la formación de profesores de matemáticas de secundaria que se venían realizando durante el final de la década de los ochenta y la década de los noventa. La primera vertiente tenía lugar en Granada, España, en el contexto de la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas en la Universidad de Granada. La segunda vertiente tenía lugar en Bogotá, Colombia, en el contexto de los proyectos de formación permanente de profesores de secundaria que desarrolló "una empresa docente", centro de investigación en educación matemática de la Universidad de los Andes.

Al final de la década de los noventa, Luis Rico había iniciado una línea de investigación en formación de profesores cuyo foco principal era la "evaluación del modelo de los organizadores del currículo". Este modelo era la base conceptual del diseño de la segunda parte de la asignatura. Dado que la idea de "evaluar el modelo" era bastante compleja y general, se diseñaron y desarrollaron estrategias de concreción que se utilizaron en las tesis doctorales de Evelio Bedoya (2002) y José Ortiz (2002). La delimitación del problema se ejecutó en varias dimensiones: se seleccionó una parte del modelo, la experiencia de investigación se realizó fuera del contexto de la asignatura y se propusieron objetivos y diseños específicos.

Por mi parte, yo decidí abordar el problema desde otra perspectiva que se caracterizó por: (a) concretar un significado para la noción de "modelo de los organizadores del currículo"; (b) centrar la investigación en el aprendizaje de los grupos de futuros profesores; (c) focalizar el trabajo en uno de los análisis del análisis didáctico; (d) estudiar los procesos de aprendizaje, más que los resultados; (e) explorar el aprendizaje de los grupos de profesores; (f) asumir una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores; y (g) realizar la investigación dentro del contexto de la asignatura. Yo asumí tres roles a lo largo del proyecto: como diseñador de currículo, formador e investigador.

Desarrollé el proyecto en tres períodos, que corresponden a estos tres roles. En el contexto que he delimitado, establecí dos objetivos generales para este proyecto:

1. avanzar en la conceptualización de las actividades del profesor de matemáticas de secundaria, de su conocimiento didáctico y del diseño de planes de formación inicial, y
2. describir y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato* del curso 2000-2001 con respecto a los organizadores del currículo correspondientes al análisis de contenido.

Partí de la conjetura de que es posible lograr el primer objetivo a partir de una visión funcional de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y de su conocimiento didáctico. Establecí los siguientes objetivos específicos que desarrollaré con más detalle a lo largo de este documento:

- ◆ introducir y caracterizar un significado de la expresión *análisis didáctico*, como conceptualización de la actuación del profesor en sus actividades de diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas;
- ◆ incorporar un significado del término *conocimiento didáctico*, como una herramienta conceptual para abordar la problemática del conocimiento del profesor de matemáticas; y
- ◆ avanzar en la conceptualización y la fundamentación del diseño curricular de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada.

Para el planteamiento empírico que establecí en el segundo objetivo general, partí de dos conjeturas. La primera, que es posible organizar y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. La segunda, que es posible abordar el aprendizaje de un grupo de futuros profesores desde la perspectiva sociocultural. Establecí entonces dos objetivos específicos:

- ◆ describir, caracterizar y explicar el *desarrollo del conocimiento didáctico* de los grupos de futuros profesores que participaron en una versión de la asignatura y
- ◆ describir y caracterizar las actividades por fuera del aula de un grupo de futuros profesores cuando preparan su trabajo para la asignatura.

Este documento se organiza alrededor de esas dimensiones y tiene tres partes. En la primera parte describo y fundamento el diseño y el desarrollo de la asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato*. En la segunda parte, abordo la problemática de investigación que surge con respecto al aprendizaje de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. Esta aproximación empírica está compuesta de cuatro estudios en los que identifiqué unos estados de desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores, caracterizo la evolución de los significados parciales que ellos desarrollaron a lo largo del curso, exploro y caracterizo la puesta en práctica del conocimiento didáctico en sus trabajos finales y caracterizo los procesos de negociación de significado de un grupo de futuros profesores. En la tercera parte recojo los resultados de las dos primeras partes con el propósito de exponer y justificar mis contribuciones a las cuatro preguntas generales con las que se inicia este capítulo.

2. ANÁLISIS DIDÁCTICO

Doy respuesta a la primera de las preguntas que formulé en el apartado anterior, al proponer el análisis didáctico como procedimiento ideal que el profesor puede utilizar a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas. Centro la atención en la planificación, como actividad diaria del profesor. Abordo dos problemas que el profesor enfrenta en su labor de planificación. Por un lado, la brecha entre la planificación a nivel global y a nivel local (Rico, 1997a), en virtud

de la cual se postula que muchos profesores tienden a ver la planificación como la secuenciación de contenidos matemáticos y a considerar la enseñanza como el cubrimiento de esos contenidos. Por el otro, la paradoja de la planificación, en virtud de la cual, si un profesor asume una posición constructivista con respecto al aprendizaje de los escolares, entonces él debe conjugar su intención de lograr unos objetivos a través de tareas concretas y estructuradas con su deseo de diseñar tareas que induzcan a los escolares a crear sus propias construcciones y que fomenten un ambiente de negociación en el aula (Simon y Tzur, 2004).

2.1. Procedimiento de Análisis Didáctico

El análisis didáctico, como procedimiento de planificación local, es un nivel del currículo. Con él, el profesor puede concretar (y diferenciar) los objetivos, el contenido, la metodología y la evaluación de cada tema en su planificación. Asumo una visión funcional del currículo de matemáticas, en virtud de la cual el escolar pone en juego su conocimiento al utilizar herramientas conceptuales para resolver problemas. Cuando la planificación es local, el foco de atención del profesor es un tema matemático específico. En este nivel, la planificación del profesor debe tener en cuenta la complejidad del contenido matemático desde diversos puntos de vista. De hecho, la negociación y construcción de la multiplicidad de significados de los conceptos matemáticos debe ser uno de los propósitos centrales de la interacción en el aula. La planificación de una unidad didáctica o de una hora de clase se debe fundamentar en la exploración y estructuración de los diversos significados de la estructura matemática objeto de esa planificación.

Mi propuesta aborda el significado de un concepto matemático atendiendo a tres dimensiones que denomino sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología:

- ◆ En los *sistemas de representación* incluyo las diferentes maneras en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos.
- ◆ En la *estructura conceptual* incluyo las relaciones del concepto con otros conceptos, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura.
- ◆ En la *fenomenología* incluyo aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto.

Estas tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar ponen en evidencia y organizan una de las cuestiones centrales de la problemática de la planificación de clase: la multiplicidad de significados de un concepto en las matemáticas escolares¹⁵².

Esta multiplicidad de significados implica que, para efectos de planificar una hora de clase o una unidad didáctica, sería deseable que el profesor:

¹⁵² En este trabajo me centro en el análisis de un concepto y de las estructuras matemáticas relacionadas con él. Los temas de la educación secundaria no son solamente conceptos. Incluyen, por ejemplo, operaciones entre conceptos, propiedades de conceptos, resultados, procedimientos o sistemas de representación. Todos estos temas se enmarcan dentro de una estructura matemática y, por lo tanto, pueden ser abordados con las herramientas del análisis didáctico.

1. conociera las tres dimensiones que caracterizan el significado de un concepto en la matemática escolar

y fuera capaz de:

2. recabar la información necesaria que le permita identificar dichos significados y organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación;
3. seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considere relevantes para la instrucción; y
4. utilizar la información que surge de los diversos significados del concepto para el diseño de unidades didácticas.

En el contexto concreto de la planificación de una hora de clase o una unidad didáctica, el profesor puede organizar la enseñanza basándose en cuatro análisis (Gómez, 2002b):

1. el *análisis de contenido*, como procedimiento en virtud del cual el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto;
2. el *análisis cognitivo*, en el que el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje;
3. el *análisis de instrucción*, en el que el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción; y
4. el *análisis de actuación*, en el que el profesor determina las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.

Denomino *análisis didáctico* a un procedimiento cíclico que incluye estos cuatro análisis, atiende a los condicionantes del contexto e identifica las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto. La descripción de un ciclo del análisis didáctico sigue la secuencia propuesta en la Figura 78.

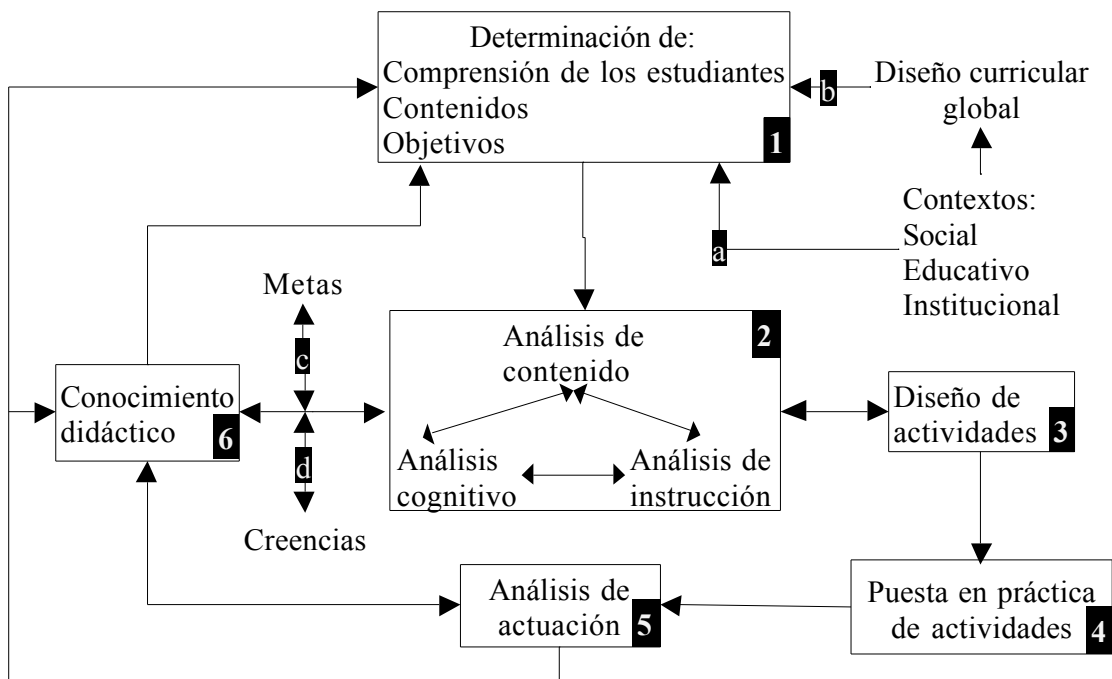


Figura 78. Ciclo de análisis didáctico y sus condicionantes

El ciclo del análisis didáctico se inicia con la determinación del contenido que se va a tratar y de los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr, a partir de la percepción que el profesor tiene de la comprensión de los escolares con motivo de los resultados del análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional en los que se enmarca la instrucción (cuadro 1 de la Figura 78). A partir de esta información, el profesor inicia la planificación con el análisis de contenido. La información que surge del análisis de contenido sustenta el análisis cognitivo, al identificar y organizar los múltiples significados del concepto objeto de la instrucción. A su vez, la realización del análisis cognitivo puede dar lugar a la revisión del análisis de contenido. Esta relación entre los análisis también se establece con el análisis de instrucción. Su formulación depende y debe ser compatible con los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, pero, a su vez, su realización puede generar la necesidad de corregir las versiones previas de estos análisis (cuadro 2). En el análisis cognitivo, el profesor selecciona unos significados de referencia y, con base en ellos y en los objetivos de aprendizaje que se ha impuesto, identifica las capacidades que pretende desarrollar en los escolares. También formula conjeturas sobre los posibles caminos por los que se puede desarrollar su aprendizaje cuando ellos aborden las tareas que conforman la instrucción. El profesor utiliza esta información para diseñar, evaluar y seleccionar estas tareas. Por consiguiente, la selección de tareas que componen las actividades debe ser coherente con los resultados de los tres análisis y la evaluación de esas tareas a la luz de los análisis puede llevar al profesor a realizar un nuevo ciclo de análisis, antes de seleccionar definitivamente las tareas que componen las actividades de enseñanza y aprendizaje (relación entre cuadros 2 y 3). El profesor pone en práctica estas actividades (cuadro 4) y, al hacerlo, analiza las actuaciones de los escolares para obtener información que sirve como punto de

inicio de un nuevo ciclo (cuadro 5). El conocimiento didáctico (cuadro 6) es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso.

Cada uno de los análisis se articula alrededor de unas nociones, los *organizadores del currículo*. Por ejemplo, el análisis de contenido incluye las nociones de sistema de representación, estructura conceptual y fenomenología, que corresponden a las tres dimensiones del significado de un concepto en el contexto de las matemáticas escolares. Para cada noción, adopto un significado teórico, un significado técnico y un significado práctico que especificaré en el siguiente apartado. El carácter local del análisis didáctico implica que éste se realiza en una asignatura que se encuentra en marcha y que tiene definidos, en su diseño curricular global, unos objetivos y unos contenidos. Debemos entonces imaginar que, como profesores, acabamos de terminar el tratamiento de un tema (e.g., la función lineal) y vamos a comenzar un nuevo tema (e.g., la función cuadrática), tal y como se indica en el diseño curricular global de la asignatura. El ciclo se inicia con la determinación, por parte del profesor, de la comprensión que los estudiantes tienen en ese momento sobre las bases o nociones necesarias para abordar el nuevo tema, de los contenidos que se pretenden tratar y de los objetivos de aprendizaje que se quieren lograr. Es decir, el profesor debe determinar, desde la perspectiva del aprendizaje de los escolares, el punto inicial (lo que los escolares ya saben antes de comenzar el ciclo) y el punto final (lo que el profesor espera que los escolares sepan después de la instrucción).

2.2. Análisis de Contenido

El análisis de contenido es el procedimiento en virtud del cual el profesor puede identificar, organizar y seleccionar los significados de un concepto o estructura matemática dentro del contenido de las matemáticas escolares. El procedimiento se realiza atendiendo a tres dimensiones: sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología.

Sistemas de Representación

Siguiendo una de las tradiciones de la literatura en didáctica de la matemática utilizaré de aquí en adelante la expresión “sistemas de representación” para referirme a los sistemas de signos por medio de los cuales se designa un concepto. La importancia de los sistemas de representación en el análisis de contenido radica en que: (a) los sistemas de representación organizan los símbolos mediante los que se hacen presentes los conceptos matemáticos; (b) los distintos sistemas de representación aportan distintos significados para cada concepto; y, por lo tanto, (c) un mismo concepto admite y necesita de varios sistemas de representación complementarios. Utilizo la definición de Kaput (1992), en virtud de la cual, un sistema de representación es “un sistema de reglas para (i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (p. 523).

Dado que un mismo concepto o estructura matemática se puede representar en diferentes sistemas de representación, es posible agrupar y caracterizar las operaciones que se pueden realizar en cuatro categorías:

1. *Creación y presentación de signos o expresiones*. Esta operación permite determinar expresiones válidas e inválidas ($(x)f = 3x^2 + 2$ es un ejemplo de una

expresión inválida en el sistema de representación simbólico para las funciones).

2. *Transformaciones sintácticas invariantes.* Son las transformaciones de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el objeto matemático designado por esos signos cambie. Es el caso, por ejemplo, de los procedimientos de completación de cuadrados, expansión y factorización que se muestran en la Figura 79.
3. *Transformaciones sintácticas variantes.* Son las transformaciones de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, en la que el objeto matemático designado cambia. Es el caso, por ejemplo, de las traslaciones horizontal y vertical que se muestran en la Figura 79.

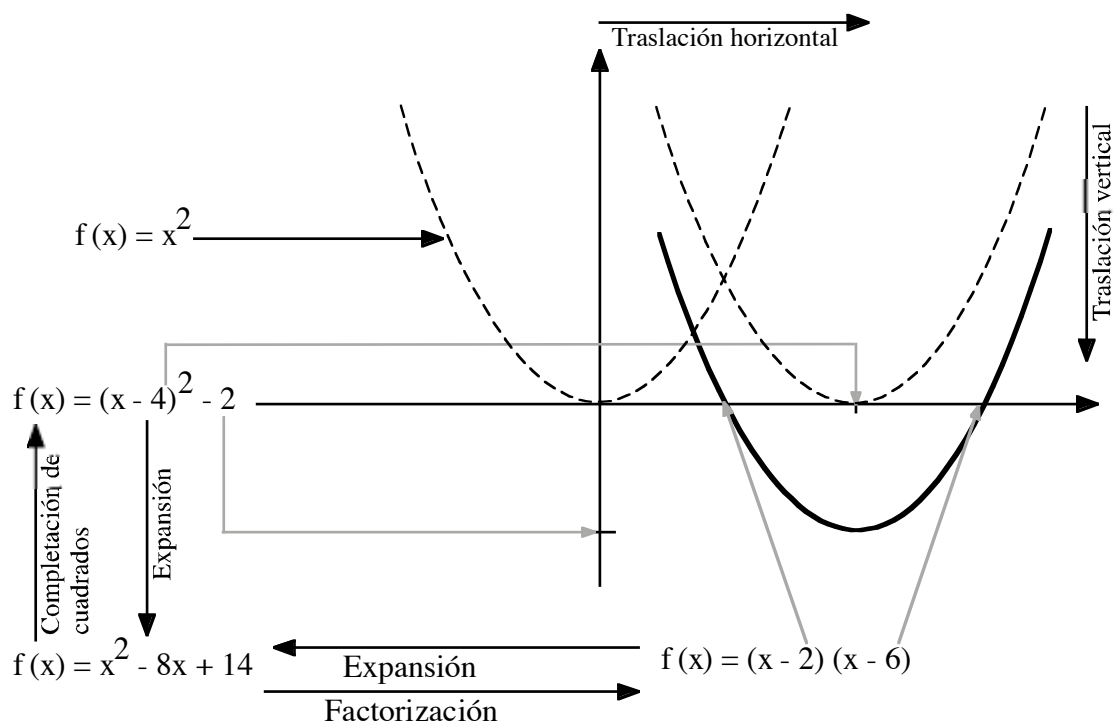


Figura 79. Operaciones en los sistemas de representación

4. *Traducción entre sistemas de representación.* Esta operación se refiere al procedimiento en virtud del cual se establece la relación entre dos signos que designan un mismo objeto pero que pertenecen a diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, las relaciones entre los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática y sus representaciones gráficas en la parábola de la Figura 79.

Estructura Conceptual

Los sistemas de representación permiten apreciar la complejidad del sistema de significados de un concepto matemático. Esta complejidad tiene su origen en el carácter estructural de los conceptos matemáticos: cada concepto configura una estructura matemática y forma parte de otras estructuras matemáticas.

Utilizaré la expresión “estructura conceptual” para referirme a tres aspectos de todo concepto matemático del contenido matemático escolar:

1. *Estructuras matemáticas involucradas.* Supondré que todo concepto matemático está relacionado con al menos dos estructuras matemáticas:
 - ◆ la estructura matemática que el concepto configura y
 - ◆ las estructuras matemáticas de las que él forma parte.
2. *Relaciones conceptuales.* Resaltaré las relaciones que se establecen entre el concepto y
 - ◆ los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura (e.g., la relación entre la función cuadrática y la ecuación cuadrática),
 - ◆ los objetos que son casos particulares de dicho concepto (los objetos que saturan el predicado; e.g., $f(x) = 3x^2 - 4$ como caso particular de las funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + c$), y
 - ◆ los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte (e.g., la relación entre la función cuadrática y las funciones continuas).
3. *Relaciones de representaciones.* La exploración de los significados de un concepto requiere de los sistemas de representación, puesto que con ellos es posible identificar los modos en que el concepto se presenta. Al tener en cuenta los sistemas de representación, se pueden destacar las relaciones que surgen de las operaciones en los sistemas de representación: transformaciones sintácticas invariantes, traducción entre sistemas de representación y transformaciones sintácticas variantes.

Por lo tanto, cuando el profesor explora la estructura conceptual de un concepto en las matemáticas escolares, debe tener en cuenta tres tipos de “elementos” y dos grupos de relaciones entre esos elementos. Los elementos son:

- ◆ los *objetos*, como casos particulares de un concepto y que conforman la extensión del concepto,
- ◆ los *conceptos*, como predicados que son saturados por los objetos y, a su vez, conforman estructuras matemáticas, y
- ◆ las *estructuras matemáticas*, que están conformadas por conceptos.

Por otro lado, las relaciones descritas en los puntos 2 y 3 anteriores se pueden agrupar en dos categorías que denomino *relaciones verticales* y *relaciones horizontales*. Las relaciones verticales se refieren a las relaciones entre los tres tipos de elementos: objeto \rightarrow concepto \rightarrow estructura matemática. Por otra parte, las relaciones horizontales se refieren a las relaciones entre los signos en sus diferentes sistemas de representación (relaciones entre representaciones).

Propongo que el profesor utilice mapas conceptuales como herramienta para recoger, organizar, representar y compartir la información correspondiente a los significados de un concepto matemático. Desde la perspectiva del contenido matemático, en un mapa conceptual se pueden identificar diferentes tipos de conexiones que se corresponden parcialmente con las relaciones verticales y horizontales que describí arriba:

- ◆ conexiones que establecen relaciones entre diferentes elementos de la estructura matemática (por ejemplo, entre las diferentes formas simbólicas y sus parámetros),

- ◆ conexiones que asocian las diferentes representaciones de un mismo elemento (por ejemplo, los parámetros de la forma multiplicativa y las raíces de la parábola),
- ◆ conexiones que muestran transformaciones de un elemento en otro dentro de un sistema de representación (por ejemplo, el procedimiento de factorización para pasar de la forma simbólica estándar a la forma simbólica multiplicativa), y
- ◆ conexiones que muestran la relación entre categorías de fenómenos y las subestructuras con las que es posible organizarlos (por ejemplo, la relación entre las propiedades del foco de la parábola y los fenómenos de óptica que utilizan estas propiedades —que no se muestra en la figura).

Fenomenología

Utilizaré el término *fenomenología*, como dimensión del significado de un concepto, para referirme a los fenómenos que dan sentido a dicho concepto. El concepto adquiere sentido con respecto a los fenómenos correspondientes, cuando los fenómenos están vinculados con situaciones que el concepto permite describir o con cuestiones que el concepto permite plantear. Una misma subestructura se puede relacionar con diversos fenómenos. Podemos, por lo tanto, establecer una relación entre subestructuras y fenómenos en la que a cada fenómeno le asignamos la subestructura que le sirve de modelo. Se pueden establecer parejas (Subestructura_i, Fenómeno_j), en las que la Subestructura_i es un modelo del Fenómeno_j. La Figura 80 muestra un esquema de estas relaciones.

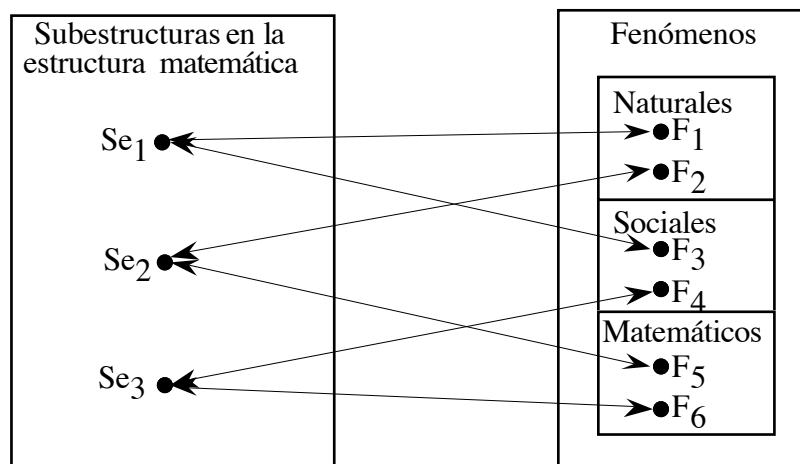


Figura 80. Análisis fenomenológico y modelos

Entonces, el análisis fenomenológico de una estructura matemática implica la identificación de:

1. las subestructuras correspondientes a esa estructura,
2. los fenómenos organizados por cada una de ellas y
3. la relación entre subestructuras y fenómenos.

De esta manera se puede establecer una relación de equivalencia en la que cada clase de equivalencia, representada por una subestructura dada, organiza todos aquellos fenómenos de los cuales es un modelo. Denomino *modelo matemático* a

la tripla (subestructura, fenómeno, relación) en la que la subestructura es un modelo del fenómeno de acuerdo con una relación. Esta relación identifica aquellas características estructurales del fenómeno que se pueden representar con elementos y propiedades de la subestructura en cuestión. En el análisis fenomenológico se identifican, por un lado, aquellas características del fenómeno (o de una situación o cuestión relacionada con el fenómeno) que son relevantes desde el punto de vista matemático y, por el otro lado, se relacionan con elementos y propiedades de la estructura matemática en uno o más sistemas de representación (ver Figura 81).

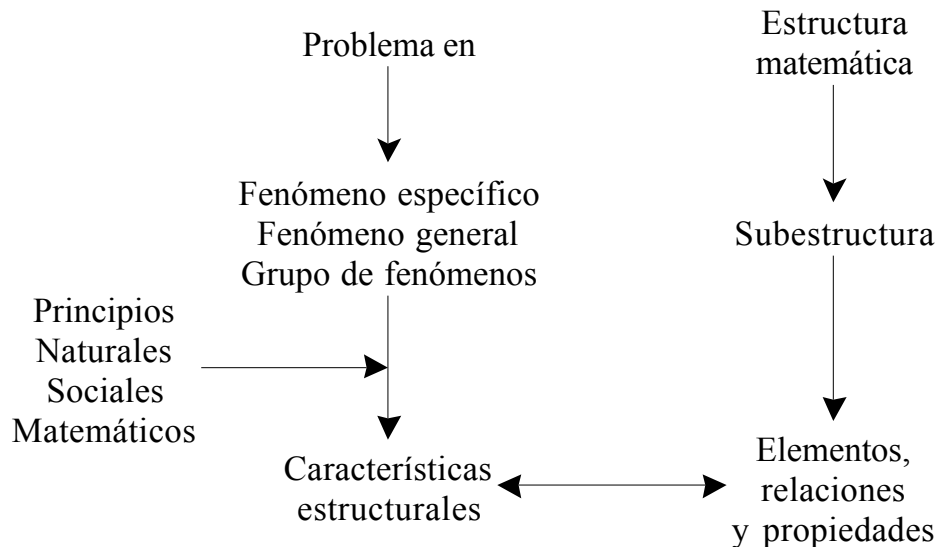


Figura 81. Análisis fenomenológico

2.3. Análisis Cognitivo

En el análisis cognitivo, “el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, 2002b, p. 271). Para ello, él tiene que tener en cuenta su percepción de la comprensión de los estudiantes al final del ciclo anterior del análisis didáctico, los objetivos que se ha propuesto para el siguiente ciclo, el contenido que pretende tratar, y el contexto, entre otros. El análisis cognitivo es un análisis *a priori*. Con él, el profesor pretende prever las actuaciones de los escolares en la fase posterior del ciclo en la que se ponen en juego las actividades de enseñanza y aprendizaje que él ha diseñado. Estas hipótesis deben estar sustentadas por una descripción de aquellos aspectos cognitivos que se relacionan directamente con la estructura matemática sobre la cual se trabaja en dichas actividades.

Adapto la noción de *trayectoria hipotética de aprendizaje* (Simon, 1995a) a la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, al proponer dos procedimientos con los que el futuro profesor puede realizar el análisis cognitivo. El primero, que denomino *Tabla de Capacidades–Competencias*, con el que se organizan las capacidades en términos de competencias, permite describir y caracterizar el conocimiento y pensamiento matemático de los escolares antes y después de la instrucción. El segundo, basado en la noción de *camino de aprendizaje*,

es un procedimiento, que utilizando los resultados del primero, permite al profesor describir sus hipótesis acerca de los caminos por los que el aprendizaje se puede desarrollar entre esos dos puntos. Estos significados cognitivos de las matemáticas escolares se basan en tres nociones: capacidades, competencias y dificultades.

Siguiendo las ideas que fundamentan la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje y que no desarrollo en este resumen¹⁵³, y teniendo en cuenta las condiciones en las que se realiza la formación inicial, el procedimiento que propongo para describir el progreso de los escolares se fundamenta en la identificación, descripción y relación de cinco elementos:

1. las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción;
2. las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción y que configuran los objetivos de aprendizaje;
3. las tareas que conforman la instrucción;
4. las dificultades que los escolares pueden encontrar al abordar estas tareas; y
5. las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje.

Parto, por tanto, de la noción de *capacidad*. En el contexto de las matemáticas escolares, utilizo este término para referirme a la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo tarea (por ejemplo, los problemas de transformar una forma simbólica de la función cuadrática —la estándar— en otra —la canónica). Afirmaré que un individuo ha desarrollado una cierta capacidad cuando él pueda resolver tareas que la requieren.

Los primeros dos puntos del procedimiento que sugiero requieren que el futuro profesor organice información sobre: (a) lo que los escolares son capaces de hacer antes de la instrucción y (b) lo que se espera que ellos sean capaces de hacer después de la instrucción. Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín (2005) han desarrollado un procedimiento para organizar esta información, basado en la noción de competencia. Esta noción permite establecer un vínculo entre la planificación a nivel local (de unas actividades específicas en un tema concreto) y el diseño curricular global (de una asignatura). Por ejemplo, se puede hacer el análisis con base en las siete competencias propuestas por el estudio PISA (OCDE, 2004).

La información que surge del análisis de contenido debe permitirle al profesor identificar aquellos *focos* sobre los que va a centrar su trabajo. Las capacidades se identifican y organizan dentro de esos focos específicos. El procedimiento se realiza con la ayuda de una tabla en la que se ubican las competencias en las columnas y las capacidades en las filas. Esta tabla le permite al profesor determinar (decidir) a qué competencias puede contribuir cada una de las capacidades. Para cada uno de los focos puede calcular la medida en la que las capacidades que se incluyen en él contribuyen a cada una de las competencias.

La tabla de Capacidades–Competencias es una herramienta apropiada para describir y caracterizar los puntos inicial y final que determinan los extremos de los caminos por los que el aprendizaje se puede desarrollar cuando los escolares enfrenten las actividades que les proponga el profesor. La información para pro-

¹⁵³ Ver el número de *Mathematics Thinking and Learning* dedicado a este tema (Clements y Sarama, 2004).

ducirla debe provenir del análisis de contenido (punto final) y del análisis de actuación (punto inicial). El núcleo de la información en esta tabla es la lista de las capacidades que se incluyen en cada uno de los focos escogidos.

A continuación, presento un ejemplo de los procedimientos involucrados en el análisis cognitivo. Supongamos que el profesor ha decidido que desea trabajar en una cuestión que, por su experiencia o como consecuencia de la información que surge del análisis de contenido, es importante dentro del tema de la función cuadrática. Se trata de desarrollar las capacidades necesarias para que los escolares puedan resolver problemas que involucran el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática (ver Figura 79).

El análisis de contenido proporciona la mayor parte de la información necesaria para identificar las capacidades que se pretenden desarrollar. En la Figura 79, he incluido algunos de los procedimientos simbólicos y gráficos que pueden estar involucrados en el análisis. Este análisis detallado muestra que el manejo del significado gráfico de los parámetros de la función cuadrática debe involucrar el manejo de los procedimientos para transformar una forma simbólica en otra, los procedimientos simbólicos y gráficos que establecen la relación entre los parámetros de la forma canónica, y las transformaciones gráficas a partir de la forma simbólica estándar.

En la Tabla 41 he identificado algunas de las capacidades que están implicadas en este problema.

<i>Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de transformaciones simbólicas</i>	
C1	Completación de cuadrados
C2	Expansión
C3	Factorización
<i>Identificar, mostrar y justificar los parámetros</i>	
C4	Forma canónica (a, h, k)
C5	Forma foco (p, h, k)
C6	Forma estándar (a, b, c)
C7	Forma multiplicativa (a, r1, r2)
<i>Identificar, mostrar y justificar los siguientes elementos gráficos</i>	
C8	Coordenadas del vértice
C9	Puntos de corte con el eje Y
C10	Puntos de corte con el eje X
C11	Coordenadas del foco
C12	Ubicación de la directriz
C13	Ubicación del eje de simetría
<i>Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de transformaciones gráficas</i>	
C14	Traslación horizontal
C15	Traslación vertical
C16	Dilatación

Tabla 41. Capacidades para el manejo del significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas

Un *camino de aprendizaje de una tarea* es una secuencia de capacidades que los escolares pueden poner en juego para resolverla. Los caminos de aprendizaje de una tarea se pueden representar en un grafo en el que se agrupan las capacidades correspondientes al objetivo de aprendizaje y se establece la secuencia de capacidades mediante vínculos entre ellas. La Figura 82 muestra un camino de aprendizaje para la tarea T_1 , “dado que 2 y 6 son los cortes con el eje X de una parábola con dilatación 1, encontrar las coordenadas del vértice”: reconocer los cortes en el eje X como elemento gráfico (C10), reconocer que esos cortes corresponden a los valores de r_1 y r_2 en la forma multiplicativa de la función cuadrática (C7), utilizar el procedimiento de expansión (C2) para obtener la forma estándar y reconocerla (C6), utilizar el procedimiento de completación de cuadrados (C1) para obtener la forma canónica e identificar y reconocer sus parámetros h y k (C4) y reconocer los valores de esos parámetros como las coordenadas del vértice en la representación gráfica (C8).

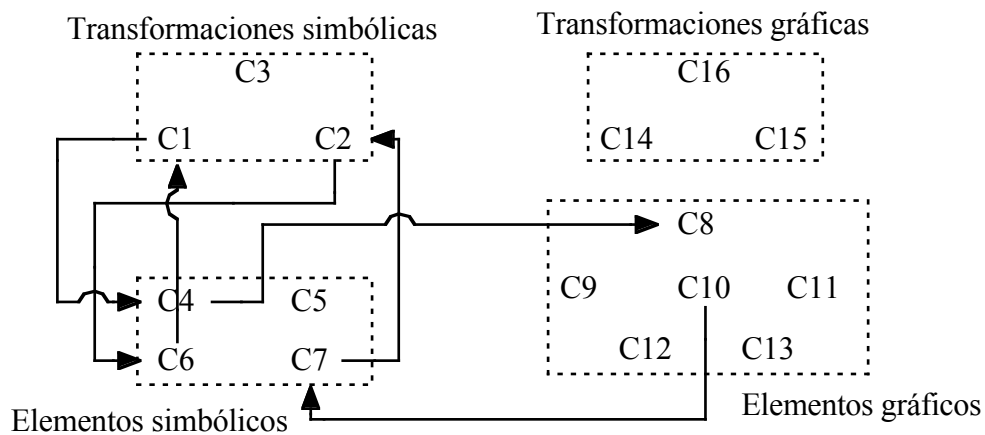


Figura 82. Camino de aprendizaje para la tarea T_1

El camino de aprendizaje para la tarea T_1 que represento en la Figura 82 informa al profesor sobre una secuencia *ideal* de capacidades que los escolares podrían poner en juego al abordar la tarea. La denomino *ideal* porque es la secuencia que surge de las condiciones que imponen la tarea y el núcleo de contenido que corresponde al objetivo de aprendizaje. Desde esta perspectiva ideal, es posible hablar de los caminos de aprendizaje que corresponden a un objetivo de aprendizaje. Para ello, el profesor puede definir el conjunto de tareas (o tipos de tareas) que caracterizan el objetivo, en el sentido de que el profesor considera que un individuo ha logrado el objetivo cuando es capaz de resolver dichas tareas¹⁵⁴. Los caminos de aprendizaje de un objetivo son entonces aquellos que corresponden a esas tareas. Un camino de aprendizaje es más que las capacidades que lo componen: es la secuencia de capacidades que permiten resolver un cierto tipo de tareas.

Al caracterizar un objetivo de aprendizaje en términos de sus caminos de aprendizaje, el profesor debe tener en cuenta su conocimiento sobre los errores y

¹⁵⁴ Me refiero aquí a tareas *no* rutinarias para las que los escolares, antes de la instrucción, no conocen procedimientos preestablecidos. Por lo tanto, en el contexto de una planificación concreta, las tareas que caracterizan un objetivo son, desde la perspectiva de los escolares, diferentes de las tareas que caracterizan las capacidades. Éstas últimas son tareas rutinarias.

dificultades de los escolares. El profesor puede entonces incluir esta información en su análisis de los caminos de aprendizaje para un objetivo. La enumeración y descripción de dificultades tiene sentido cuando ya se han identificado y caracterizado las capacidades correspondientes al núcleo de contenido al que se refiere el objetivo de aprendizaje para el que el profesor desea producir una planificación. El análisis de las dificultades indica las cuestiones claves que hay que tener en cuenta dentro de ese proceso. Son secuencias de capacidades de la red de caminos de aprendizaje sobre los que el profesor debe insistir.

Qué caminos recorran los escolares dependerá de las tareas que se les proponga. La descripción de las capacidades y de los posibles caminos de aprendizaje le permite al profesor producir conjeturas sobre esos caminos y, al hacerlo, revisar las tareas que puede proponer en su diseño. Dado que, en el caso de la formación inicial, las tareas no se llevarán a la práctica, el proceso es hipotético.

2.4. Análisis de Instrucción

La separación entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción es analítica: estos dos análisis dependen el uno del otro. En lo que sigue, utilizaré el término *tarea* para referirme a las instrucciones que el profesor da a los escolares; y me referiré, por otro lado, a las *actividades* de los escolares y del profesor, con motivo de una tarea. En los dos puntos anteriores se encuentran implícitas varias cuestiones que conviene hacer explícitas:

- ◆ al asignar una tarea, el profesor tiene un propósito con respecto al aprendizaje de los escolares que puede enunciarse en términos de competencias;
- ◆ al abordar una tarea, los escolares tienen un propósito (resolverla);
- ◆ las actividades de los escolares y del profesor se componen de acciones que pretenden lograr los propósitos correspondientes;
- ◆ al ejecutar dichas acciones, tanto escolares, como profesor, ponen en juego una colección de capacidades (que contribuyen al desarrollo de las competencias);
- ◆ la planificación del profesor, debe incluir, no solamente el análisis y selección de las tareas, sino también la previsión de las posibles acciones de los escolares al abordar una tarea y de las capacidades que ellos pueden poner en juego al realizarlas.

Ilustro gráficamente estas relaciones en la Figura 83, en la que se observa la estrecha relación entre la noción de tarea y las nociones de capacidad y competencia en las que basé el análisis cognitivo.

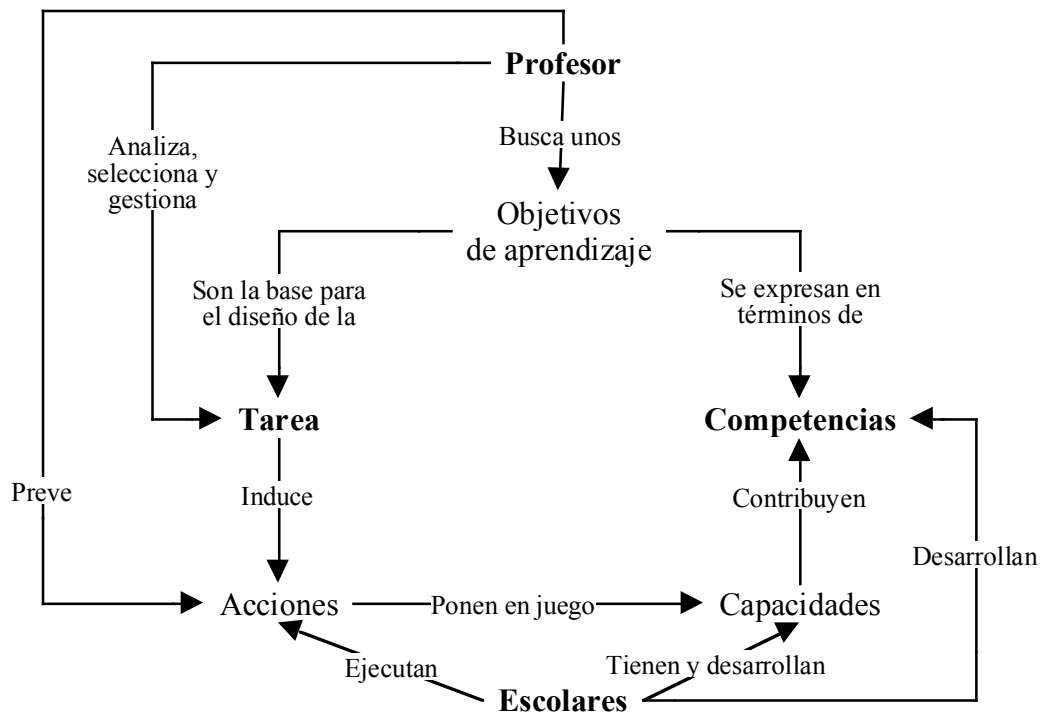


Figura 83. Tarea y competencias

El foco de mi interés se centra en el análisis de tareas como recurso para el logro de los objetivos de aprendizaje. En este sentido, el criterio central para clasificar una tarea es su relación con las competencias en virtud de las cuales el profesor establece los objetivos de aprendizaje y con las capacidades que contribuyen a esas competencias. Entonces, en cambio de hablar de clasificación de tareas, hablaré de análisis y evaluación de tareas.

El modelo de la Figura 83 sienta las bases para este propósito. El análisis de una tarea parte de la caracterización del objetivo de aprendizaje en términos de su contribución a las competencias y sus caminos de aprendizaje y debe ser un procedimiento que permita:

1. identificar las capacidades (y los posibles vínculos entre ellas) que se pueden poner en juego cuando los escolares la aborden;
2. construir el grafo de los caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando aborden la tarea;
3. identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir y en qué medida; y
4. evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información.

Hasta ahora, en este apartado, he sugerido un procedimiento que, para una tarea ya diseñada, permite analizarla y evaluarla. Pero, ¿cómo seleccionar, diseñar o adaptar tareas? Las tareas a las que me refiero son tareas no rutinarias. Me refiero, por lo tanto, a lo que en la literatura se conoce como “problemas” y al correspondiente proceso de resolución de problemas.

Esto me lleva a resaltar la modelización de fenómenos en la selección de las tareas. En el marco del análisis de contenido, describí la idea de modelo como una

relación biunívoca entre elementos y propiedades de una subestructura de la estructura matemática y características estructurales de fenómenos sociales, naturales y matemáticos y establecí su relación con el análisis fenomenológico. Estas relaciones entre estructura matemática y fenómenos se expresan, por parte de los escolares a la hora de abordar una tarea, en el proceso de modelización y en las destrezas, los razonamientos y las estrategias que ellos deben desarrollar para identificar el modelo matemático que corresponde a un fenómeno (o a un problema que se refiere a un fenómeno), para expresar ese fenómeno o problema en términos de uno o más sistemas de representación, para resolver el problema o interpretar el fenómeno dentro de esos sistemas de representación, para traducir la solución o la interpretación en términos del fenómeno, y para verificar esa solución o interpretación. En consecuencia, el profesor debe realizar dos procedimientos a la hora de analizar o diseñar una tarea: el análisis fenomenológico, como el procedimiento que le permite establecer la relación entre fenómenos (y los problemas que se refieren a ellos) y la estructura matemática; y la simplificación del fenómeno o problema, es decir, la transformación que el profesor debe hacer del problema del mundo real a un texto del tipo que comúnmente se conoce como problema de palabras (Ortíz, 2000, p. 15).

El universo de tareas disponibles puede ampliarse si el profesor tiene en cuenta los materiales y recursos disponibles y la manera como estos materiales y recursos permiten diseñar experiencias matemáticas complementarias a aquellas que es posible proponer con papel y lápiz. Los materiales y recursos pueden transformar las estrategias que profesor y escolares utilizan para representar los conceptos y estructuras conceptuales que forman parte de la estructura matemática (Gómez, 1997). Al introducir un recurso y utilizarlo en el diseño de las tareas, el profesor puede inducir a los escolares a poner en juego capacidades que no aparecerían si el recurso no estuviese disponible. Es en este sentido que los recursos (y, en particular, la tecnología) permite a los escolares vivir nuevas “experiencias matemáticas”. No obstante, esta situación no afecta el procedimiento de análisis de tareas que he propuesto en esta sección. El profesor tendrán que formular conjeturas sobre las acciones que realizarán los escolares, sobre las capacidades que ellos pondrán en juego para ejecutarlas y sobre las competencias a las que estas capacidades contribuyen (ver Figura 83). Tanto la tabla de Capacidades–Competencias, como el grafo de caminos de aprendizaje cambiarán. Por lo tanto, la pertinencia del uso de un recurso en una tarea será una función de su contribución a los objetivos de aprendizaje y de comparar esta contribución con el resultado del análisis de tareas alternativas.

2.5. Análisis de Actuación

El propósito del análisis de actuación es producir información que permita determinar la comprensión de los escolares en ese momento, los contenidos a tratar en el aula y los objetivos de aprendizaje que se deben buscar. En una primera fase, el profesor puede comparar sus previsiones sobre lo que iba a suceder en el aula con lo que realmente sucedió. Para ello, él puede:

- ◆ establecer en qué medida se lograron los objetivos de aprendizaje, al identificar qué capacidades se pusieron en juego y en qué medida estas capacidades contribuyeron a las competencias que consideraba pertinentes;

- ◆ revisar si las tareas pusieron en juego aquellas capacidades para las que el profesor preveía que los escolares pudieran manifestar dificultades, si esas dificultades se manifestaron (los escolares incurrieron en errores al poner en juego esas capacidades) y si se logró algún progreso en la superación de dichas dificultades;
- ◆ identificar aquellas capacidades que se pusieron en juego y aquéllas que no; y
- ◆ reconocer aquellas capacidades, dificultades y estrategias no previstas y que se manifestaron en la práctica.

En resumen, el profesor puede producir la tabla de Capacidades–Competencias y los caminos de aprendizaje que se deducen de la actuación de los escolares y compararlos con los que él había previsto. La información que resulta de este análisis es relevante, en una segunda fase del análisis de actuación, para:

- ◆ revisar la pertinencia de las tareas que utilizó en el aula;
- ◆ producir la tabla de Capacidades–Competencias para el nuevo ciclo;
- ◆ expresar, en posibles caminos de aprendizaje, sus conjeturas sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje de los escolares; y
- ◆ diseñar, analizar y seleccionar las tareas que conformarán las actividades de enseñanza y aprendizaje.

3. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

En este apartado, abordo la segunda pregunta:

¿Cuáles deben ser los conocimientos, capacidades y actitudes de un profesor que actúa eficaz y eficientemente?

La literatura de investigación sobre el conocimiento del profesor en general y del profesor de matemáticas en particular es extensa y variada. Se han formulado diversas respuestas a esta pregunta (o a preguntas relacionadas). En particular, la noción de conocimiento pedagógico de contenido propuesta por Shulman (1986) ha sido una de las contribuciones más importantes a la reflexión sobre el tema. No obstante, el carácter general de la propuesta original de Shulman no permite explorar con detalle la problemática del conocimiento del profesor de matemáticas. La mayor parte de las taxonomías del conocimiento del profesor se basan en o utilizan esta noción y dividen en compartimentos estancos un conocimiento que, en la práctica, se pone en juego de manera integrada. Establezco el significado que le daré en este documento a la expresión “conocimiento didáctico” y concreto algunas de sus características. Sostengo que la reflexión sobre el conocimiento del profesor debe partir de un visión funcional de tal forma que los conocimientos del profesor sean una consecuencia del análisis y descripción de las actividades que él debe realizar para planificar, gestionar y evaluar la instrucción. Por lo tanto, la problemática del conocimiento del profesor se debe considerar, más bien, como la integración de conocimientos, habilidades y actitudes para la acción. Esta aproximación da lugar a la noción de competencias profesionales del profesor, noción que ha adquirido gran importancia recientemente, con motivo de la creación de un área integrada de educación superior en Europa. No obstante, las propuestas sobre competencias del profesor de matemáticas son, por ahora, listados de competen-

cias genéricas y específicas en las que no es posible identificar la relación entre ellas, ni su función en la actuación del profesor de matemáticas. Por esa razón, sugiero que, al utilizar el análisis didáctico como referencia para la actuación del profesor, es posible determinar sistemáticamente y organizar estructuradamente las capacidades que contribuyen a las competencias del profesor de matemáticas. Desarrollo esta idea con respecto a la competencia de planificación del profesor de matemáticas.

3.1. Conocimiento Pedagógico de Contenido: una Noción Potente

Hasta comienzos de la década de los ochenta, se aceptó, de manera más o menos generalizada, que el conocimiento del profesor se podía caracterizar por dos componentes independientes y complementarias: un conocimiento de la disciplina (contenido) y un conocimiento de aspectos pedagógicos generales. Al mismo tiempo que criticó esta visión, Shulman (1987) produjo una clasificación más extendida de los conocimientos del profesor que ha sido mantenida, con algunas modificaciones, por la mayoría de los investigadores. Esta clasificación incluye siete categorías del conocimiento del profesor: temático de contenido, pedagógico de contenido, de otras áreas, del currículo, de los aprendices, de las metas educativas, y pedagógico general (p. 8). Clasificaciones como las de Shulman y Bromme (1994) implican necesariamente una separación (al menos analítica) entre los diferentes conocimientos del profesor.

El significado de la noción de conocimiento pedagógico de contenido no ha evolucionado de manera relevante en la literatura de investigación en educación matemática, en particular, y de la educación, en general, durante la última década y media. Con algunas excepciones (e.g., Ball et al., 2005; Geddis y Wood, 1997; Morine-Dershimer y Kent, 2001), la mayoría de los trabajos que mencionan la noción la siguen utilizando con el significado general propuesto por Shulman, como el conocimiento necesario para transformar un contenido para la enseñanza (Kinach, 2002, p. 53). La preocupación de Shulman se centraba en la brecha entre el conocimiento académico y disciplinar que puede tener el profesor sobre un tema específico y la forma que debe asumir ese conocimiento para ser transmitido en el aula. Se refería, por lo tanto, a la transformación de un contenido prescrito en unos contenidos propuestos. Pero, si asumimos una posición constructivista del aprendizaje, entonces el problema no es producir un *discurso* para transmitir un conocimiento, sino diseñar y gestionar unas *actividades* con las que los escolares puedan construir su conocimiento y el profesor pueda lograr los objetivos de aprendizaje que se ha impuesto. Por lo tanto, es necesario extender la idea de una transformación del contenido prescrito en un contenido propuesto. *El producto de la transformación no es, en sí mismo, un contenido, sino unas actividades.* Pero el diseño y gestión de esas actividades de enseñanza y aprendizaje requieren de la identificación, organización y selección de los significados de referencia del concepto objeto de la instrucción, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar las actividades de enseñanza y aprendizaje correspondientes. Este análisis — el análisis didáctico— está sujeto a unos procedimientos y herramientas, y se encuentra condicionado tanto por las creencias y metas del profesor, como por las características de los contextos sociales, educativos, institucionales y del aula. En otras palabras, cuando queremos hablar de un “profesor eficiente” [como lo hacen

Cooney (1994) y otros] o de “formas pedagógicamente potentes” (como lo hace Shulman), no podemos pensar, como lo sugiere Carlsen (2001), en un conocimiento preestablecido, estático y neutro. Estamos más bien hablando de *una integración de conocimientos, habilidades y actitudes para la acción*. En nuestro caso, estamos hablando de las competencias del profesor para planificar unidades didácticas.

3.2. Conocimiento Didáctico en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria

Utilizaré la expresión *conocimiento didáctico* para referirme a los conocimientos y destrezas que son necesarios para realizar el análisis didáctico de un tema matemático. El análisis didáctico está compuesto por un conjunto de procedimientos que permiten analizar una estructura matemática concreta desde varias perspectivas (del contenido, cognitiva, de instrucción y de actuación). Estos procedimientos se fundamentan en unas nociones, los organizadores del currículo, que surgen de la disciplina de la Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, el procedimiento para realizar el análisis de contenido de una estructura matemática se basa en los organizadores del currículo que he identificado como sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología. En la literatura en Didáctica de la Matemática se encuentra una variedad de posibles significados para las nociones (los organizadores del currículo) que se ponen en juego en el análisis didáctico. Identifico a este conocimiento como el *conocimiento didáctico disciplinar de referencia*.

Para efectos de diseñar la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, hemos hecho una interpretación del conocimiento didáctico disciplinar de referencia y hemos seleccionado unos significados singulares para cada uno de los organizadores del currículo. Éste es el *conocimiento didáctico de referencia para la asignatura*. Esto es, el conjunto de conocimientos y destrezas que, como diseñadores de este plan de formación, hemos tomado como opción dentro del conocimiento didáctico disciplinar de referencia y que esperamos que los futuros profesores interpreten y construyan como uno de los resultados de su formación.

Al participar en un plan de formación inicial (en particular, la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato) los futuros profesores (y los grupos de futuros profesores) interpretan el conocimiento didáctico de referencia y construyen un conocimiento (individual o del grupo). Éste es el *conocimiento didáctico del futuro profesor o del grupo de futuros profesores*. Es un conocimiento en permanente evolución y, de hecho, mi interés empírico en este proyecto de investigación se centra en describir, caracterizar y explicar (parcialmente) los procesos en virtud de los cuales los grupos de futuros profesores desarrollaron su conocimiento didáctico. Haré por tanto referencia al *significado que un futuro profesor o un grupo de futuros profesores tiene (o desarrolla) con respecto a un organizador del currículo*. En este proyecto de investigación, centro mi atención en el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores sobre los organizadores del currículo del análisis de contenido.

El significado de referencia de cada organizador del currículo se puede considerar atendiendo a tres aspectos diferentes, pero relacionados. Estos son los significados teórico, técnico y práctico de cada organizador del currículo. El *significa-*

*do teórico*¹⁵⁵ de un organizador del currículo se refiere a la opción que, como formadores, hemos tomado para el significado del organizador del currículo dentro de la variedad de posibles significados que existen en la literatura en Didáctica de la Matemática. Este significado teórico fundamenta un conjunto de estrategias ideales de análisis de un concepto matemático que configuran el *significado técnico* de cada organizador del currículo. Estos significados técnicos, aunque basados en los significados teóricos, los sobrepasan, al destacar el carácter de herramienta analítica que asume cada una de las nociones.

El análisis de la estructura matemática por medio de cada organizador del currículo tiene un propósito práctico: la información que surge de estos análisis debe sustentar la planificación que esperamos que realicen los grupos de futuros profesores. Llamo *significado práctico* de un organizador del currículo al conjunto de estrategias y técnicas necesarias para utilizar la información que surge del análisis de la estructura matemática con ese organizador del currículo en los demás análisis que conforman el análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica.

Entiendo el conocimiento didáctico de un grupo de futuros profesores como el conjunto de conocimientos y habilidades que los facultan para abordar el análisis de una estructura matemática con el propósito de producir y justificar una planificación. Desde esta perspectiva, el conocimiento didáctico de un grupo de futuros profesores se configura alrededor de un conjunto estructurado de capacidades que caracterizan su competencia de planificación.

3.3. Análisis Didáctico y Capacidades y Competencias del Profesor de Matemáticas

El significado de la noción de competencia y de sus implicaciones para una educación basada en la competencia han evolucionado en el tiempo. La mayoría de las definiciones recientes de esta noción tienen rasgos comunes:

El ser competente involucra una combinación de atributos (conocimiento, capacidades, habilidades, actitudes) estructurados en competencias que le permiten a un individuo o a un grupo asumir un papel o realizar una colección de tareas a un nivel o grado de calidad adecuado (esto es, un estándar adecuado) en una situación particular y, por lo tanto, hacen que ese individuo o grupo sea competente en ese papel... (Preston y Walker, 1993, p. 118, en bastardilla en el original)

En el contexto europeo de formación superior, la noción de competencia ha adquirido importancia con motivo del proyecto *Tuning*. Este proyecto se centra en la caracterización de competencias genéricas y específicas para los graduandos de primer y segundo ciclos. En este marco y, dentro del contexto de la definición de competencias para la licenciatura de matemáticas en España, la Subcomisión Española del ICMI, durante el Seminario Itermat (Recio, 2004), estableció unas competencias generales y específicas para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (Rico, 2004c, pp. 8-9).

Busco explorar la descripción de las competencias del profesor de matemáticas desde una perspectiva analítica. Utilizaré la descripción del análisis didáctico para identificar las *capacidades* que pueden contribuir al desarrollo de algunas de

¹⁵⁵ De nuevo, aquí debería usar la expresión “significado teórico de referencia para la asignatura”.

las competencias del profesor de matemáticas. Enumeraré y organizaré estas capacidades de acuerdo con los cuatro análisis que conforman el análisis didáctico. Éstas son, por lo tanto, las capacidades que considero necesarias para planificar, llevar a la práctica y evaluar una unidad didáctica sobre un tema matemático concreto. En el caso del análisis de contenido, los procedimientos que conforman el análisis didáctico indican que, para las tres dimensiones del significado de un concepto, el profesor debe ser capaz de:

- ◆ recabar la información necesaria que le permita identificar los significados del concepto;
- ◆ organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación;
- ◆ seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción, al tener en cuenta las condiciones de los contextos sociales, educativos e institucionales; y
- ◆ seleccionar los significados de referencia al tener en cuenta las condiciones del contexto del aula (que surgen de la información que se obtiene del análisis cognitivo).

Si se tienen en cuenta los procedimientos que conforman el análisis didáctico, entonces es posible desarrollar en detalle las capacidades básicas que surgen de cada análisis. Por ejemplo, las dos primeras capacidades del análisis de contenido se refieren a la identificación y organización de los significados de un concepto matemático. Si consideramos las dimensiones de sistemas de representación y estructura conceptual de estos significados, entonces, para realizar estos procedimientos, el profesor debe ser capaz, para el concepto correspondiente, de:

1. identificar sus elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas),
2. determinar las diferentes representaciones de esos elementos y
3. establecer las relaciones entre los elementos y entre sus representaciones.

Si profundizamos en el detalle de la capacidad 3, observamos que esta capacidad implica que el profesor debe ser capaz de establecer las relaciones:

- ◆ entre el concepto y los conceptos de la estructura matemática que dicho concepto configura,
- ◆ entre el concepto y los objetos que son casos particulares de dicho concepto,
- ◆ entre el concepto y los conceptos que pertenecen a la estructura matemática de la que el concepto forma parte,
- ◆ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto, dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas invariantes),
- ◆ entre pares de signos que designan el mismo objeto o concepto pertenecientes a sistemas de representación diferentes (traducción entre sistemas de representación) y
- ◆ entre pares de signos que designan dos objetos o conceptos diferentes dentro de un mismo sistema de representación (transformaciones sintácticas variantes).

En el ejemplo que acabo de presentar se aprecia la estructura de las capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas.

Es posible identificar unas capacidades básicas que contribuyen a esta competencia y estructurarlas de acuerdo con los análisis que conforman el análisis didáctico. Sólo he analizado una de las capacidades básicas correspondientes al análisis de contenido, como ejemplo de cómo se podría caracterizar en detalle las competencias del profesor de matemáticas. El conjunto de todas las capacidades y de las relaciones entre ellas conforma lo que denomino *conocimiento didáctico*: los conocimientos y destrezas (tanto teóricos, como técnicos y prácticos) necesarios para realizar el análisis didáctico de un tema matemático. En realidad, “la mezcla de contenido y pedagogía en la comprensión de cómo se organizan, representan y adaptan tópicos, problemas o cuestiones particulares a los diversos intereses y capacidades de los estudiantes y cómo se presentan para la instrucción” (Shulman, 1987, p. 8) que se encuentra en el núcleo de la noción de conocimiento pedagógico de contenido es más que una mezcla: es una estructura compleja de conocimientos y capacidades que surge cuando, al considerar la especificidad de un tema, se explora la problemática de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas.

4. APRENDIZAJE DE LOS FUTUROS PROFESORES

En este apartado, presento el marco conceptual de los estudios empíricos que conforman el proyecto de investigación objeto de este documento. Para ello, asumo un posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores, en el contexto del desarrollo de la asignatura. Con base en esta posición, preciso el significado con el que utilizaré los términos claves de dichos estudios: significados que construyen los grupos de futuros profesores, desarrollo del conocimiento didáctico, estados de desarrollo y factores de desarrollo, entre otros. Para identificar las nociones centrales y las teorías que les dan significado, tengo en cuenta, tanto los objetivos generales y específicos de los estudios empíricos, como las condiciones en las que se realizaron. Adelanto algunos aspectos del diseño de dichos estudios con el propósito de delimitar el ámbito de la discusión.

El diseño de la asignatura impuso condiciones para la realización de los estudios empíricos. En dicho diseño, se buscó que los profesores desarrollaran competencias para el diseño de unidades didácticas. Estas competencias tenían como marco de referencia el análisis didáctico y las nociones que éste organiza. En particular, con respecto al análisis de contenido, en la asignatura se buscó que los futuros profesores desarrollaran un conocimiento sobre las nociones de sistemas de representación, estructura conceptual y fenomenología y que desarrollaran las capacidades necesarias para poner en juego dicho conocimiento a efectos de recabar y organizar información sobre un concepto concreto y utilizar esa información para producir y justificar el diseño de una unidad didáctica. Los futuros profesores trabajaron en grupo y en la asignatura se promovió la interacción entre ellos. La información disponible para los estudios empíricos fue aquella que surgió naturalmente del desarrollo normal de la asignatura (las producciones y las actuaciones de los futuros profesores cuando abordaron y realizaron las tareas que se les requirió).

4.1. Aprendizaje de los Futuros Profesores

Las diferentes teorías sobre el aprendizaje no son necesariamente contradictorias entre sí. El aprendizaje es un fenómeno multidimensional. Cada teoría tiene sus focos de interés y sus esquemas de investigación con los que ilumina diferentes aspectos de dicho fenómeno (Anderson et al., 2000). Por ejemplo, diferentes visiones acerca de la naturaleza del conocimiento implican posiciones diferentes con respecto al aprendizaje (Putnam y Borko, 2000). No obstante, en el caso de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, debemos constatar que los profesores no trabajan, ni aprenden solos. Enseñar y aprender a enseñar son prácticas sociales que requieren colaboración entre pares (Secada y Adajian, 1997). La formación inicial de profesores de matemáticas es una práctica social compleja. La aproximación sociocultural atiende a esta complejidad (Adler, 1998; Lerman, 2001, p. 45). La investigación en la formación de profesores desde esta perspectiva permite explorar y caracterizar aspectos del proceso de cambio del profesor que las perspectivas tradicionales psicológicas no permiten ver (Stein y Brown, 1997, p. 155), puesto que estas últimas tienden a estudiar el proceso de desarrollo de profesores individuales en contextos altamente estructurados.

Al tener en cuenta los argumentos anteriores y constatar los objetivos de los estudios empíricos y la información recogida para ellos, he seleccionado la teoría social del aprendizaje de Wenger (1998) como fundamento conceptual sobre el aprendizaje de los futuros profesores. En esta teoría, se mira el aprendizaje como un fenómeno social que forma parte de la experiencia de participar socialmente en el mundo. La idea de participación se refiere a un “proceso amplio de ser participante activo en las prácticas de comunidades sociales y de construir identidades en relación con esas comunidades” (p. 4). El aprendizaje como participación social se basa en cuatro nociones:

- ◆ *significado*, como nuestra habilidad cambiante (individual y colectiva) para experimentar de manera significativa nuestra vida y el mundo;
- ◆ *práctica*, como nuestros recursos, esquemas y perspectivas históricas y sociales compartidas que pueden soportar el compromiso mutuo en la acción;
- ◆ *comunidad*, como las configuraciones sociales en las que nuestras empresas se definen como valiosas y nuestra participación se reconoce como competente; e
- ◆ *identidad*, como expresión de cómo el aprendizaje cambia quiénes somos y la creación de historias personales de convertirse en el contexto de nuestras comunidades.

Se ubica la noción de significado en un proceso de negociación de significado que surge de la interacción entre otros dos procesos: la participación y la materialización. A través de la participación establecemos relaciones con otras personas, definimos nuestra manera de formar parte de comunidades en las que nos comprometemos con unas empresas, y desarrollamos nuestra identidad. A través de la materialización proyectamos nuestros significados y los percibimos como existentes en el mundo de tal manera que logramos congelar nuestra experiencia en cosas concretas.

La noción de comunidad se configura basándose en tres nociones:

- ◆ el *compromiso mutuo*, como el compromiso con acciones cuyo significado se negocia y que genera relaciones entre personas;
- ◆ una *empresa conjunta*, que se negocia colectiva y permanentemente, que genera una responsabilidad mutua y que determina lo que se valora, se discute y se muestra; y
- ◆ un *repertorio compartido*, que incluye los recursos para la negociación de significados, el discurso que permite hacer afirmaciones significativas acerca del mundo y los estilos para expresar formas de membresía e identidad como miembros.

La práctica es una estructura emergente inestable y el aprendizaje en la práctica implica un compromiso mutuo en la búsqueda de una empresa con un repertorio compartido. Por lo tanto, el aprendizaje emerge en la medida en que:

- ◆ evolucionan diferentes formas de compromiso mutuo;
- ◆ se comprende y se refina la empresa; y
- ◆ se desarrolla el repertorio compartido.

El compromiso mutuo genera relaciones entre las personas y las conecta de maneras diversas y complejas. El desarrollo de la práctica implica mantener suficiente compromiso mutuo en la búsqueda de la empresa, junto con compartir un aprendizaje significativo. La evolución de diferentes formas de compromiso mutuo se caracteriza por:

- ◆ cómo influye el entorno (qué ayuda y qué molesta),
- ◆ cómo se definen las identidades,
- ◆ cómo se desarrollan las relaciones, y
- ◆ cómo se genera, negocia y materializa el significado.

La empresa conjunta de una práctica se negocia colectiva y permanentemente y crea relaciones de responsabilidad mutua entre los participantes que determinan lo que se valora, lo que se discute, lo que se justifica y lo que se muestra. El régimen de responsabilidad mutua se convierte en una parte integral de la práctica. El proceso de comprender y afinar la empresa se caracteriza por:

- ◆ el papel de las condiciones externas,
- ◆ las características del discurso (qué se discute, se muestra y se valora), y
- ◆ la definición de la empresa y las responsabilidades.

La búsqueda conjunta de la empresa crea recursos para la negociación de significado. Estos recursos, son el repertorio compartido: incluye rutinas, herramientas, símbolos, acciones o conceptos que la comunidad ha creado o adoptado y que se han convertido en parte de su práctica. “El repertorio incluye el discurso en virtud del cual los miembros crean afirmaciones significativas acerca del mundo, como también los estilos mediante los cuales ellos expresan su formas de membresía y su identidad como miembros” (p. 83). El repertorio refleja la historia de la responsabilidad mutua y permanece inherentemente ambiguo. Tanto la historia como la ambigüedad aportan a la creación de significado, pero también pueden generar obstáculos. El desarrollo del repertorio compartido se caracteriza por:

- ◆ los estilos de expresión y las rutinas de trabajo y
- ◆ los recursos de negociación de significado.

4.2. Dos Comunidades de Práctica. Significados Parciales, Teóricos, Técnicos y Prácticos

En el contexto de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, conceptualizo dos entornos de trabajo como comunidades de práctica:

- ◆ la *comunidad de práctica del aula*, en la que se comentan y critican las producciones de los grupos de futuros profesores, y se negocia y se decide sobre los significados puestos en juego (en muchas ocasiones sin referencia a un tema específico); y
- ◆ la *comunidad de práctica de cada grupo de futuros profesores*, en la que se negocian y se decide sobre los significados (en la mayoría de las ocasiones específicos al tema del grupo) que se ponen en juego al elaborar las producciones que el grupo presentará a sus compañeros y a los formadores.

Mi interés en este proyecto de investigación se centra en los procesos de aprendizaje que tienen lugar en las comunidades de práctica de cada uno de los grupos. Dada la metodología de trabajo de la asignatura, los resultados de estos procesos de aprendizaje se hacen explícitos en la comunidad de práctica del aula, cuando cada grupo, de manera periódica y sistemática, realiza sus presentaciones ante los demás. Por lo tanto, la comunidad de práctica del aula condiciona las actividades de las comunidades de práctica de los grupos: para cada presentación, cada grupo debe llegar a un consenso acerca de la tarea en cuestión. Este consenso se hace explícito en la información contenida en las transparencias que el grupo utiliza para hacer su presentación y en las actuaciones de los miembros del grupo en el aula.

Considero, por lo tanto, que la información contenida en las transparencias y las actuaciones en el aula de los miembros de un grupo son manifestaciones de los significados que dicho grupo ha construido hasta ese momento. Utilizo el término *significados parciales* para referirme a estos significados. Los denomino “parciales” porque quiero dar a entender que los significados que un grupo ha construido en un momento dado de la asignatura están siempre sujetos a mejora. Son el resultado de lo que el grupo ha aprendido hasta ese momento, como consecuencia de un proceso permanente y dinámico de negociación de significados dentro de la comunidad de práctica del grupo. En otras palabras, para cada presentación, cada grupo ha logrado un cierto desarrollo de su repertorio compartido y sus producciones (transparencias y actuaciones) son expresiones de dicho repertorio compartido.

La exploración y descripción del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores implica, por lo tanto, la caracterización de sus significados parciales, tal y como estos significados se expresan en sus producciones y actuaciones. Recordemos que cada organizador del currículo del análisis de contenido (por ejemplo, la noción de sistemas de representación) tiene diferentes significados. Caracterizo estos significados en términos de las acciones, capacidades y conocimientos que esperamos que el futuro profesor desarrolle al abordar el análisis de un tema matemático concreto. En el contexto de la asignatura, nosotros esperamos que, para cada uno de los organizadores del currículo del análisis didáctico y para un concepto matemático concreto, el futuro profesor:

1. conozca el significado del organizador del currículo;
2. recabe y organice información sobre los significados del concepto en términos del organizador del currículo;
3. use la información obtenida para realizar los otros análisis del análisis didáctico; y
4. use la información de todos los análisis para el diseño de la unidad didáctica.

Estas actividades del profesor corresponden a los significados teórico (1), técnico (2) y práctico (3 y 4) de las nociones que conforman el análisis didáctico y configuran, a su vez, tres tipos de conocimientos del futuro profesor. En este contexto, el *conocimiento teórico* es declarativo e implica la capacidad para describir, en abstracto, la noción. Denomino como *técnico* al conocimiento y a las capacidades para analizar un concepto matemático en términos de un organizador del currículo dado. Por ejemplo, la identificación de las diferentes representaciones de un concepto forma parte del conocimiento técnico. Finalmente, en este contexto, el *conocimiento práctico* involucra las capacidades necesarias para usar, de manera orquestada, una información técnica con un propósito práctico (e.g., la planificación de unidad didáctica).

La relación entre las actividades que se espera que realice el futuro profesor, los significados de los organizadores del currículo del análisis didáctico y los tipos de conocimientos que están implicados pone de manifiesto la complejidad del conocimiento didáctico y de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. El conocimiento didáctico, como el conocimiento que se pone en juego y se desarrolla al realizar el análisis didáctico, es un *conocimiento para la acción*, tal y como lo caractericé al describirlo en términos de competencias. El desarrollo de este conocimiento requiere que los futuros profesores puedan transformar las nociones que conforman el análisis didáctico en instrumentos. El desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores se fundamenta en un juego entre teoría y práctica, que se puede caracterizar con una adaptación de la teoría de la génesis instrumental (Rabardel, 2003; Rabardel y Bourmaud, 2003; Vérillon, 2000): es a través del uso del organizador del currículo (el instrumento), como mediador entre los futuros profesores y el concepto sobre el que se trabaja, que ellos construyen y desarrollan significados tanto acerca de la noción, como del concepto. La idea de génesis instrumental surge al constatar que un artefacto se convierte en un instrumento en la medida que tienen lugar tres procesos:

1. La *instrumentalización*, como proceso en el que el sujeto transforma y adapta el artefacto a sus necesidades y circunstancias (Rabardel y Bourmaud, 2003, p. 673).
2. La *instrumentación*, como el proceso en el que se generan esquemas de acción (p. 673). Éstas son habilidades de aplicación de la herramienta para realizar tareas significativas (Kaptelinin, 2003, p. 834) que se transforman en técnicas (Artigue, 2002, p. 250). Una técnica es una amalgama de razonamiento y procedimientos rutinarios que permiten resolver una tarea (p. 248).
3. La *integración orquestada*, en virtud de la cual la herramienta se integra a otros artefactos (Kaptelinin, 2003, p. 834).

Estas ideas me permiten conceptualizar los principales aspectos de la actividad de un grupo de futuros profesores, en una fase del ciclo metodológico de tratamiento del análisis didáctico, cuando aborda la tarea de analizar su concepto con la ayuda de un organizador del currículo, o cuando utiliza la información que surge de ese análisis para realizar otros análisis o diseñar la unidad didáctica.

Al realizar las tareas, el grupo desarrolla los procesos de instrumentalización, instrumentación e integración orquestada. Es decir, ellos transforman y adaptan el significado que le asignan al organizador del currículo (instrumento), desarrollan esquemas de aplicación de la herramienta con el propósito, ya sea de recabar información sobre los significados del concepto (objeto), o para usar esa información en los otros análisis, e integran el uso de un instrumento específico (e.g., los sistemas de representación) con los otros instrumentos, para el diseño de la unidad didáctica. *Es a través del uso del instrumento (el organizador del currículo) como mediador entre el grupo de futuros profesores (sujeto) y el concepto sobre el que trabajan (objeto) que el grupo construye y desarrolla significados tanto acerca del organizador del currículo, como del concepto.* Esta actividad, que implica la generación de esquemas de acción, transforma la práctica del grupo.

La génesis instrumental tiene lugar en este proceso de realizar tareas: el artefacto (el organizador del currículo, en su concepción teórica) se transforma en instrumento, en la medida en que el grupo de futuros profesores desarrolla esquemas para resolver la tarea con la ayuda del instrumento. Y es, en este proceso de génesis instrumental, que el grupo negocia significados (del organizador del currículo, del objeto y de los esquemas) que se ponen en juego en la actividad, se materializan en el repertorio compartido y se manifiestan en sus producciones y actuaciones en el aula. Por consiguiente, la noción de génesis instrumental me permite — para el contexto concreto de este proyecto de investigación— precisar y conceptualizar el proceso general de negociación de significados propuesto por Wenger en un proceso más específico que caracteriza las actividades que los grupos de futuros profesores realizan por fuera del aula.

4.3. Desarrollo del Conocimiento Didáctico y Factores de Desarrollo

En el contexto de la teoría social del aprendizaje de Wenger (1998), la noción de desarrollo asume un significado que yo concretaré en un aspecto específico: el desarrollo del repertorio compartido. Al concretar la idea de desarrollo del conocimiento didáctico en el desarrollo del repertorio compartido de cada grupo de futuros profesores puedo relacionar, dentro de un mismo marco conceptual, las nociones de desarrollo y de significado. Siguiendo a Wenger, utilizo la expresión “repertorio compartido” como la materialización de los procesos de negociación de significados que tiene lugar cuando los grupos de futuros profesores, como comunidades de práctica, abordan las tareas de la asignatura. Es entonces el repertorio compartido el que se *desarrolla*. Dado que, cada vez que los grupos de futuros profesores hacen una presentación en clase, ellos deben llegar a un consenso sobre lo que van a proponer, los procesos de negociación de significados se concretan (materializan) sistemática y periódicamente. Esta materialización se expresa en la información contenida en las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores para hacer sus presentaciones y en las intervenciones de los miembros del grupo sustentando sus propuestas.

Abordo la exploración del aprendizaje de los grupos de futuros profesores, en la perspectiva del desarrollo de su conocimiento didáctico, desde dos vertientes:

1. la descripción y caracterización de las producciones y las actuaciones de los grupos de futuros profesores en su trabajo dentro de la comunidad de aprendizaje del aula y
2. la descripción y caracterización de los procesos de negociación de significado que tienen lugar dentro de la comunidad de aprendizaje de uno de los grupos de futuros profesores.

En la primera vertiente, centro mi interés en las producciones de los grupos de futuros profesores y en algunos aspectos de los procesos de negociación de significado que surgen con motivo de la presentación en el aula de estas producciones. Mi propósito es describir y caracterizar lo que resulta de los procesos de negociación de significado dentro de cada grupo de futuros profesores. En particular, me interesa estudiar cómo las producciones y las actuaciones de cada grupo cambian (evolucionan) en el tiempo, como reflejo de la evolución en los significados puestos en juego por cada grupo al elaborar cada producción y, por lo tanto, como expresión del desarrollo de su repertorio compartido.

En la segunda vertiente, profundizo, para el caso de un grupo concreto de futuros profesores, en los procesos de negociación de significados que dan lugar a esas producciones. En esta segunda vertiente, analizo la constitución y desarrollo de la comunidad de aprendizaje del grupo, siguiendo las pautas de la teoría social del aprendizaje de Wenger.

Conjeturo que es posible identificar patrones en dos aspectos de las producciones de los grupos de profesores. Por un lado, resulta natural pensar que las diferencias (con respecto a un organizador del currículo) en las producciones de los grupos son consecuencia de un número limitado de significados parciales de los grupos. Por lo tanto, espero identificar patrones (categorías) que organicen los significados parciales de los grupos. Estos patrones en los significados parciales deberían expresarse en un número limitado de *atributos* de las producciones. Estos atributos caracterizarían la puesta en juego de esos significados en el análisis y descripción una estructura matemática.

El segundo tipo de patrón tiene que ver con el proceso de cambio en las producciones de los grupos. Conjeturo que, de la misma forma (pero no por las mismas razones) que, para el desarrollo cognitivo del individuo, es posible, en muchas ocasiones, identificar estados que caracterizan ese desarrollo, también es posible pensar que el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores se puede caracterizar en términos de unos *estados de desarrollo*. Cada estado de desarrollo estaría determinado por unos patrones en la evolución de los significados parciales de los grupos de futuros profesores. Si es posible identificar estos estados de desarrollo, entonces mi interés se centrará en explorar cómo los cambios en las producciones de los grupos de futuros profesores pueden ser representativos de, y ser representados por esos estados. De esta manera, lograría una primera aproximación al estudio del desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores.

La idea de estado de desarrollo, como representación de patrones en los significados parciales que los grupos de futuros profesores ponen en juego al elaborar

sus producciones y al interactuar en el aula, me permite concretar la idea de dificultad y progreso de un grupo de futuros profesores. Diré que las producciones o actuaciones de un grupo evidencian una *dificultad* con respecto a una noción cuando producciones sucesivas del grupo no evolucionan, permaneciendo en un mismo estado. En el mismo sentido, hablaré de *progreso y avance* de las producciones de un grupo cuando éstas pasan de estados iniciales a estados más avanzados. En términos de los significados de los grupos de futuros profesores, las dificultades se manifiestan en significados parciales que permanecen a pesar de los esfuerzos de la instrucción para cambiarlos. Los progresos representan la reorganización de esos significados parciales en otros más cercanos a los significados de referencia promovidos por la instrucción.

Me inspiro en la noción de “calidad de la información” que se ha venido desarrollando en la disciplina de manejo de organizaciones para reformular y organizar los atributos de la calidad de la información contenida en las transparencias de los grupos de futuros profesores y expresada en sus intervenciones en clase en tres dimensiones que denomino *factores de desarrollo*: variedad, organización y papel. El factor *variedad* pretende recoger la idea de que, para cada organizador del currículo del análisis de contenido, la descripción de una estructura matemática se puede hacer con mayor o menor cantidad de información, profundidad o complejidad¹⁵⁶. El factor *organización* se refiere a cómo, dentro de una producción, se organiza la información recogida para uno o más organizadores del currículo del análisis de contenido. Finalmente, el tercer factor organizador de los atributos de una producción se refiere a la puesta en práctica de la información recogida para un organizador del currículo dado. Denomino a este factor *papel*, puesto que pretende reflejar el papel que juega cada organizador del currículo del análisis de contenido en los otros aspectos del análisis didáctico.

En resumen, los atributos que, en una producción y para cada organizador del currículo del análisis de contenido, reflejan los significados que un grupo ha puesto en juego para realizarla, se pueden organizar en tres factores: variedad (o complejidad), organización y papel. Estos factores se encuentran relacionados como se muestra en la Figura 84.

¹⁵⁶ Dado que el número de niveles de un mapa conceptual no solamente representa variedad, sino que también es un indicador de su complejidad estructural, denomino a este factor, para el caso concreto de la estructura conceptual, como *complejidad*. El factor organización de la estructura conceptual explora otro aspecto de esta complejidad estructural.

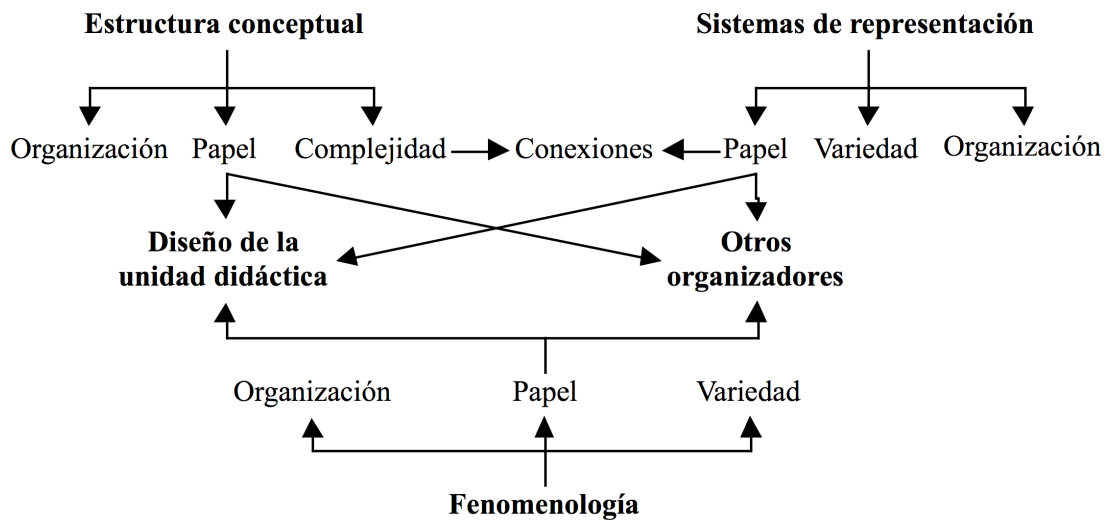


Figura 84. Factores del desarrollo del conocimiento didáctico

Las nociones de significado parcial y conocimiento didáctico se refieren a atributos no observables de los grupos. Para hablar sobre ellos, es necesario referirse a las producciones y actuaciones de los grupos, como expresiones de esos significados y de ese conocimiento. Para precisar la relación entre estos dos aspectos del problema de investigación, establezco los vínculos entre los diferentes elementos que he descrito en este apartado (ver Figura 85).

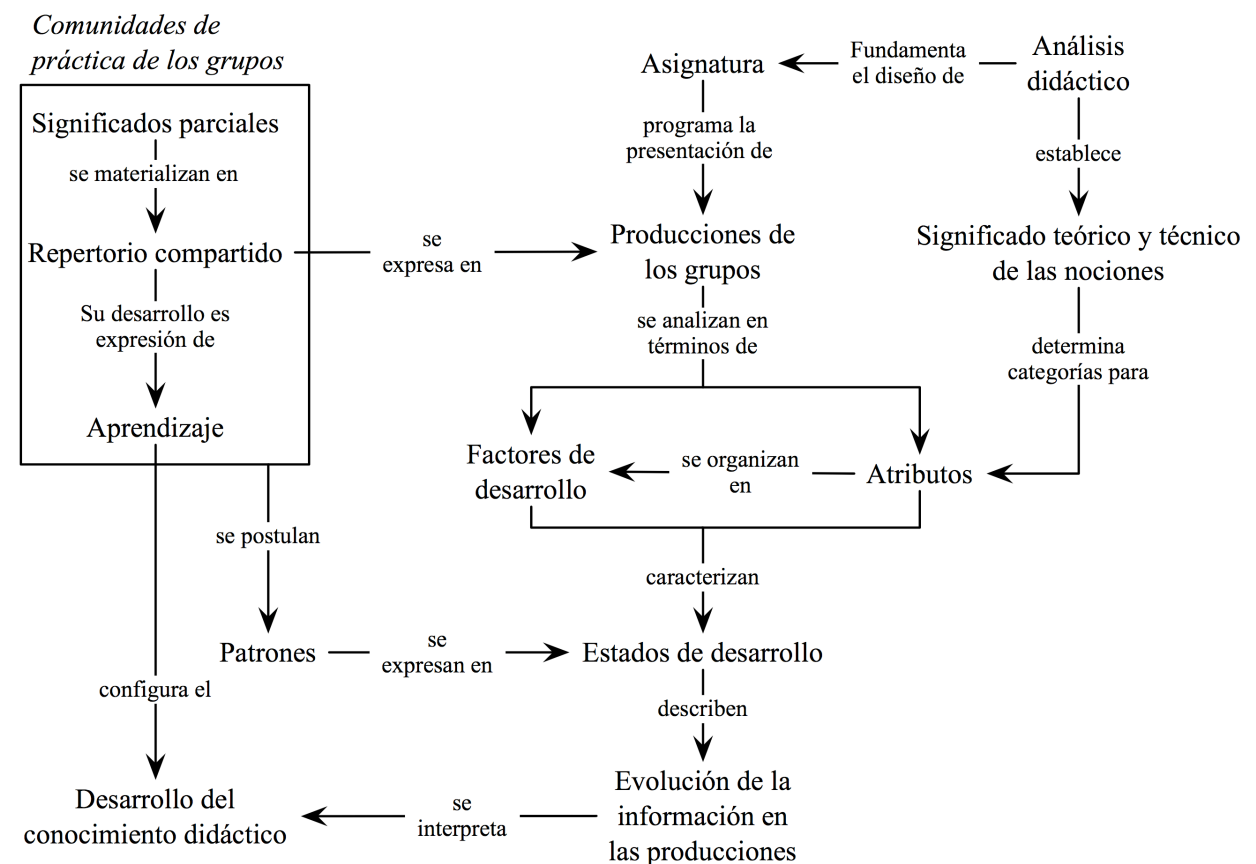


Figura 85. Aprendizaje, producciones y desarrollo del conocimiento didáctico

Comienzo asumiendo una posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores. Ésta es una visión sociocultural del aprendizaje en virtud de la cual cada grupo se conceptualiza como una comunidad de práctica en la que sus miembros negocian significados. Estos significados, que he denominado parciales puesto que están permanentemente sujetos a mejora, se materializan en el repertorio compartido de cada grupo. Las producciones y actuaciones de un grupo al resolver una tarea son la expresión del desarrollo de su repertorio compartido hasta ese momento. El diseño de la asignatura prevé la presentación periódica de estas producciones. El análisis didáctico, como conceptualización de la enseñanza de las matemáticas de secundaria, fundamenta el diseño de la asignatura y establece los significados teóricos, técnicos y prácticos de los organizadores del currículo del análisis de contenido. Estos significados determinan las categorías que se utilizarán para analizar las producciones en términos de unos atributos. Estos atributos se organizan en factores de desarrollo. Se postulan regularidades en el desarrollo del repertorio compartido de los diversos grupos y se supone, por lo tanto, la existencia de patrones que se expresan en unos estados de desarrollo. Se conjetura que los cambios en las producciones de los grupos de futuros profesores pueden ser representativos de, y ser representados por esos estados. En caso de que se puedan caracterizar, estos estados describen un proceso de evolución en la información contenida en las producciones de los grupos. Este proceso puede entonces interpretarse en términos del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores, como expresión del desarrollo de su repertorio compartido.

5. DISEÑO DE LA ASIGNATURA

Mis propósitos en este apartado son mostrar el papel de mi propuesta sobre el análisis didáctico y el conocimiento didáctico para fundamentar y conceptualizar la asignatura y describirla como contexto en el que se realizaron los estudios empíricos.

5.1. La Asignatura

Describo la asignatura en el 2000 atendiendo a tres aspectos: el contexto, su fundamentación y su diseño curricular.

Contexto

La política educativa vigente cuando se realizó este proyecto de investigación provenía de la Ley de Reforma Universitaria de 1983 (Boletín Oficial del Estado, 1983), conocida como “la LRU” y la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo de 1990 (Boletín Oficial del Estado, 1990), conocida como “la LOGSE”. En la LOGSE se establecen las condiciones básicas para acceder a la función docente: título de licenciado, ingeniero o arquitecto y el Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP). Las universidades ofrecen cursos de post-grado que otorgan este certificado. En el caso de la Universidad de Granada, quienes cursan la Especialidad de Metodología, que describiré en seguida, convalidan el CAP. Habiendo satisfecho estas dos condiciones básicas, quien opta por una plaza de profesor de matemáticas de secundaria debe aprobar las “oposiciones”.

En el 2000, existía un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la Universidad de Granada. Este plan formaba parte de la licenciatura de matemáticas de esta universidad. La licenciatura ofrecía tres especialidades, denominadas Matemáticas Fundamentales, Estadística y Metodología. Los estudiantes escogían una de ellas al comienzo del cuarto curso. La primera buscaba formar investigadores en matemáticas, la segunda matemáticos con capacidad para desempeñarse en el sector productivo y de servicios y la tercera profesores de matemáticas de secundaria. El plan se configuraba con base en la Especialidad de Metodología.

En la Universidad de Granada, y en la universidad española en general, existe una cultura académica que se puede resumir en un esquema de evaluación sustentado en muy pocos exámenes en los que los estudiantes se “juegan” el éxito en cada asignatura y en un esquema de enseñanza en el que no existen libros de texto y el profesor presenta a manera de cátedra el contenido correspondiente. Como consecuencia, los estudiantes desarrollan un esquema de estudio que se centra en tomar notas durante la clase, organizarlas en casa y estudiarlas, en la mayoría de los casos, con poca anterioridad a los exámenes.

La mayoría de los futuros profesores que participan en la asignatura consideran que tienen una formación matemática sólida. Su principal preocupación cuando comienzan el plan de formación como profesores tiene que ver con la gestión de clase, aspecto de la enseñanza que les genera mayor intranquilidad. Ellos esperan que el plan les proporcione soluciones a lo que ellos perciben como los problemas prácticos que se encontrarán en el aula (Gómez et al., 2002). Por otro lado, dos terceras partes de los futuros profesores tienen alguna experiencia docente anterior al plan de formación, consecuencia de su trabajo en clases particulares o en academias de bachillerato. Esta experiencia docente da lugar a “intuiciones didácticas” que sustentan, con frecuencia, su actuación a la hora de abordar las tareas que realizan en clase (Gómez, 2001a).

Fundamentación

La noción de análisis didáctico se encuentra en el centro de la fundamentación del segundo bloque de la asignatura. Al destacar el papel del análisis didáctico en las actividades del profesor y en la formación inicial de profesores, tomamos partido: partimos de una posición con respecto a cómo los escolares aprenden matemáticas en el aula y proponemos una visión ideal de cómo se debería desarrollar la enseñanza. Establecemos uno de los pivotes de nuestra concepción de la formación de profesores de matemáticas de secundaria: contribuir al desarrollo de las competencias y capacidades necesarias para realizar el análisis didáctico. Nuestra visión sobre el aprendizaje de los futuros profesores es el segundo pivote de la concepción de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la que se basa el diseño de la asignatura. Hemos asumido una posición de constructivismo social.

La caracterización de los procedimientos que conforman el análisis didáctico y de los significados de referencia de las nociones implicadas en esos procedimientos me permitió identificar y estructurar las capacidades necesarias para la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria y, por consiguiente, concretar el conocimiento didáctico que esperamos que los futuros

profesores desarrollen dentro de la asignatura. De esta manera, al asumir una visión funcional de la formación inicial de profesores, fundamento los objetivos y los contenidos del segundo bloque de la asignatura. Por otro lado, los esquemas metodológicos y de evaluación propuestos en el diseño se fundamentan en nuestra posición con respecto al aprendizaje de los futuros profesores.

5.2. Diseño de la Asignatura

Para describir el diseño de la asignatura sigo un esquema curricular y describo brevemente sus finalidades, objetivos, contenidos, metodología y esquema de evaluación.

Finalidades y Objetivos

La finalidad de la asignatura es la de contribuir a la iniciación de la formación del futuro profesor de matemáticas mediante la didáctica de la matemática. En la asignatura se busca contribuir a la formación del futuro profesor en dos dimensiones: el inicio de su participación en las prácticas de la comunidad de educadores matemáticos y el desarrollo de los conocimientos y capacidades necesarias para la planificación de unidades didácticas. Al considerar que la asignatura, como esquema de formación en los procesos de planificación de unidades didácticas, es también una comunidad de práctica, se busca que los futuros profesores desarrollen su capacidad de participación en ella, a través de la construcción de los conocimientos y capacidades necesarios para realizar el análisis didáctico. Estos conocimientos y capacidades se concretan en la construcción social de significados sobre la noción currículo, sobre los fundamentos de las matemáticas escolares y sobre los organizadores del currículo.

Contenidos

Los contenidos de la asignatura se organizan de acuerdo con el esquema de la Figura 86. La asignatura se inicia con un análisis y reflexión sobre la historia de las matemáticas y de la educación matemática en España, que sirve de contexto para la discusión sobre los antecedentes del currículo de matemáticas en el país. La noción de currículo es la idea de base sobre la que se apoyan la mayor parte de los contenidos. Se discute sobre los fines de la educación matemática y se reflexiona sobre los niveles y dimensiones del currículo. Con esta referencia conceptual, se analizan algunos estudios y proyectos curriculares españoles e internacionales, se reflexiona sobre los antecedentes del currículo de matemáticas en España, y se estudia la organización general, los niveles de concreción y los contenidos del currículo de matemáticas para secundaria que se encuentra en vigor en la actualidad.

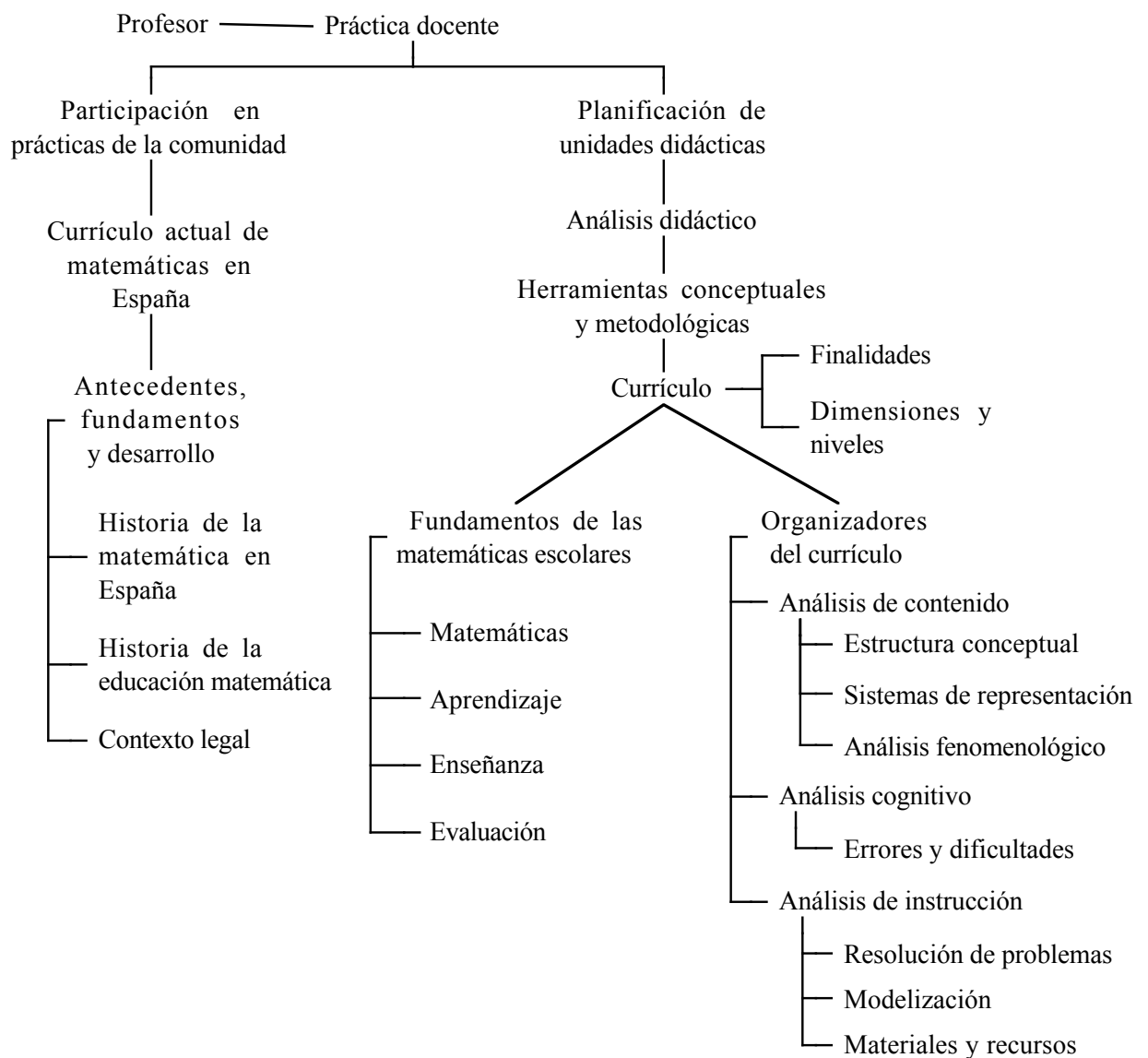


Figura 86. Estructura de contenidos de la asignatura

El análisis didáctico organiza el tratamiento de los organizadores del currículo. Se considera un análisis conceptual general de cada uno de los organizadores del currículo, pero también se estudian las maneras como estas nociones adquieren significados técnicos y prácticos cuando se utilizan para analizar estructuras matemáticas concretas. La asignatura tiene por lo tanto un contenido matemático específico que se manifiesta en las estructuras matemáticas para las que se realiza el análisis didáctico.

Metodología

En la asignatura utilizamos diversos esquemas metodológicos. Describo a continuación aquel que se utiliza de manera sistemática en la simulación del proceso de planificación de una unidad didáctica. Cada grupo de futuros profesores escoge un tema matemático sobre el que realiza el análisis didáctico y diseña una unidad didáctica. El esquema es cíclico. Cada ciclo corresponde a un

organizador del currículo. El orden secuencial en el que se tratan los organizadores del currículo sigue el esquema presentado en la Figura 86.

El ciclo parte de la discusión con la que finaliza el ciclo anterior. En general, esta discusión (por ejemplo, sobre los sistemas de representación) da lugar a la introducción de una nueva noción (por ejemplo, la noción de fenomenología). A partir de esta introducción, proponemos un ejercicio en clase, que consiste en la utilización de dicha noción a una estructura matemática predeterminada o a la estructura matemática en la que cada grupo está trabajando. Los grupos presentan sus propuestas y se discuten posibles significados de la noción en su aplicación práctica. A continuación, los formadores presentamos un ejemplo de la utilización de la noción a una estructura matemática específica (diferente de las que tienen asignadas los grupos) y les pedimos que, para la siguiente sesión de clase, pongan en juego esta noción (y las que se han considerado hasta ese momento) a su estructura matemática. En la siguiente sesión, cada grupo presenta los resultados de su trabajo al resto de la clase. Compañeros y profesores comentan y critican cada presentación. Al final, los formadores promovemos una discusión en la que buscamos formular preguntas y actividades que aborden los errores y dificultades detectados en las presentaciones. En algunas ocasiones, los formadores sugerimos aspectos del significado de referencia del organizador del currículo con el que se está trabajando. El final del ciclo tiene dos partes. Por un lado, los formadores partimos de la discusión anterior para motivar la introducción de una nueva noción. Por el otro, uno de los formadores revisa cada una de las producciones y produce un documento con sus comentarios y sugerencias. Los futuros profesores reciben ese documento durante la siguiente sesión.

Evaluación

Cuando miramos el aula como una comunidad de práctica y consideramos el aprendizaje como el progreso en la participación en esa comunidad, la evaluación se expresa como un componente curricular que está presente permanentemente en todos los aspectos del proceso de formación. Al aceptar que hay un problema común que se busca resolver y que hay herramientas conceptuales y metodológicas que permiten abordarlo, y al compartir sus producciones con el resto de la clase y negociar los significados sociales que rigen el discurso del aula, individuos y grupos pueden reconocer las cualidades y deficiencias de sus contribuciones. El discurso del aula gira alrededor de los significados que individuos y grupos movilizan para resolver los problemas. Por lo tanto, estos significados se encuentran permanentemente evaluados, comentados y criticados. Esta evaluación tiene lugar en las dos comunidades de práctica. Como formadores, guiamos el discurso del aula para resaltar los logros y las deficiencias de las contribuciones propuestas, teniendo en cuenta los conocimientos disciplinares que sirven de referencia al conocimiento didáctico. Por otra parte, para cada producción escrita de los futuros profesores (documento o transparencia de una presentación) producimos un documento en el que formulamos nuestros comentarios, críticas y sugerencias.

La valoración del trabajo de los futuros profesores es el resultado de la valoración de todas sus producciones y de la apreciación de los formadores de la manera como cada futuro profesor progresa en su participación en la comunidad

de práctica del aula. Damos especial atención al trabajo y la presentación final en la que cada grupo presenta y justifica el diseño de la unidad didáctica en su tema.

6. DESARROLLO DE LA ASIGNATURA

El propósito de este apartado es describir el desarrollo de la asignatura durante el curso 2000-2001. Éste fue el periodo en el que se recogió la información para los estudios que conforman la dimensión empírica de este proyecto de investigación. El proceso de aprendizaje de los grupos de futuros profesores dependió, como era de esperarse, de las experiencias que ellos vivieron durante el curso académico, con motivo de haber asistido y realizado las actividades que tuvieron lugar en la asignatura. Por lo tanto, el desarrollo de la asignatura es una información central para el logro de los objetivos de este proyecto de investigación. Pero no es posible (y no tiene sentido) reproducir aquí cada uno de los eventos que, a priori, pudieron tener algún efecto en el aprendizaje de los futuros profesores. Identificaré dichos eventos en los estudios empíricos que presento en apartados posteriores. En este apartado presento una visión general de la secuencia en que se trataron los contenidos y describo las sesiones de clase en las que se trabajó en el análisis didáctico. Y, para este bloque de la asignatura, presento un ejemplo de las producciones de uno de los grupos de futuros profesores y de los comentarios que hice a estas producciones.

6.1. Organización y Desarrollo de la Asignatura

En el curso 2000-2001 se inscribieron 36 futuros profesores en la asignatura, de los cuales 25 eran mujeres y 11 hombres. Todos ellos eran estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada y cursaban cuarto o quinto curso de la Especialidad de Metodología. A lo largo de las primeras semanas, los futuros profesores se organizaron en ocho grupos: cinco grupos de cinco, dos grupos de cuatro y un grupo de tres integrantes. Estos grupos permanecieron estables a lo largo del desarrollo de la asignatura. Al inicio del segundo trimestre, cada grupo escogió un tema matemático sobre el que iba a desarrollar el análisis didáctico y producir el diseño de una unidad didáctica. Los temas escogidos fueron los siguientes: gráficas y funciones, progresiones, números decimales, probabilidad, cónicas, esfera, función cuadrática y sistemas de ecuaciones lineales.

El programa de la asignatura se siguió de manera estricta con retrasos que sólo llegaron a ser de una hora de clase. El esquema de módulos que presenté en el apartado anterior y en virtud del cual los organizadores del currículo se trabajan de manera similar, se siguió estrictamente en el desarrollo del análisis de contenido (ver Figura 88 más adelante). En los otros análisis del análisis didáctico el esquema se combinó con presentaciones de los formadores sobre teorías del aprendizaje, dificultades y errores, resolución de problemas y evaluación.

6.2. Sesiones del Análisis de Contenido

A continuación, describo brevemente las sesiones de clase correspondientes al análisis de contenido.

Estructura Conceptual

La sesión comenzó con una revisión sobre los temas vistos en las sesiones anteriores. El formador propuso un ejercicio, con el que buscaba que los futuros profesores expusieran sus ideas sobre el concepto de derivada. El formador observó el trabajo de los grupos, resolvió dudas y propuso organizar las ideas que habían surgido. Los futuros profesores participaron activamente con propuestas diversas. Varios futuros profesores manifestaron su preocupación por la enseñanza, pero el formador concretó el ejercicio en sus aspectos matemáticos. Apareció el interés por explorar las relaciones del concepto de derivada. Un futuro profesor observó que “tiene que estar todo relacionado porque tiene que ver con el concepto de derivada”. Otro futuro profesor estableció la diferencia entre el concepto de derivada y sus aplicaciones. Esta observación generó una discusión entre varios futuros profesores en la que se mencionaron aspectos didácticos e históricos del concepto. El formador insistió en la necesidad de centrarse en los aspectos matemáticos del concepto y en buscar organizar la información que se había obtenido. Se llegó al final de la sesión y el formador formuló el trabajo que había que realizar para la siguiente sesión.

En el comienzo de la siguiente sesión algunos futuros profesores hicieron comentarios y mencionaron dudas sobre la noción de concepto y de estructura conceptual. En particular, varios comentarios se centraron en el papel de la definición como medio para “dar a entender” un concepto. El formador les presentó una propuesta de estructura conceptual para la noción de derivada. El formador sugirió a los grupos de futuros profesores que mejoraran lo que habían hecho como estructuras conceptuales de su tema. Los grupos de futuros profesores trabajaron en clase. En la segunda parte de la sesión, ellos presentaron el resultado de su trabajo. Se identificó la noción de sistemas de representación como otro organizador del currículo. En la siguiente hora de clase, los grupos de futuros profesores presentaron sus propuestas para la estructura conceptual de su tema.

Estructura Conceptual y Sistemas de Representación

La noción de sistema de representación se introdujo en la siguiente sesión a partir del trabajo que los futuros profesores realizaron en la sesión anterior. Las intervenciones de los futuros profesores insinuaron algunas de sus dificultades con esta noción: no veían los sistemas de representación como medio organizador de la estructura conceptual y no lograban centrar su atención en los aspectos matemáticos del concepto: insistían en su preocupación por las cuestiones didácticas. No obstante, surgió una idea central: se estaba representando un mismo objeto (concepto) y, por lo tanto, los elementos de diferentes representaciones debían estar relacionados. Al final de la sesión, el formador formuló la siguiente tarea:

De hoy en ocho días vamos a seguir con el tema de los sistemas de representación. Y la tarea para de hoy en ocho días... es tratar de mejorar, detallar, profundizar, la estructura conceptual de cada tema, tratando de hacer énfasis, tratando de reflexionar, en el papel que pueden jugar los sistemas de representación para describir el esquema... Entonces lo que queremos es ver hasta dónde llegamos en profundidad... tratando de resaltar no solamente que hay una gran cantidad de elementos, sino tratando de resaltar cómo están relacionados esos elementos, como están estruc-

turados. Una de las maneras con la que podemos tener criterios para estructurarlos, es tratando de ver cómo puede aportar a esa estructura, la idea de sistemas de representación... [42-B192]

En las siguientes dos sesiones, los grupos de futuros profesores presentaron su trabajo. En esta ocasión, se dio lugar a que cada grupo recibiera comentarios y críticas inmediatamente después de su presentación. Esto generó discusiones y explicaciones entre los futuros profesores.

En la Figura 87, presento la transparencia utilizada por el grupo función cuadrática para hacer su presentación. Está organizada en tres categorías: simbólico, gráfica y fenomenología. En el sistema de representación simbólico se encuentran las siguientes categorías: formas de expresión, ceros de la función, vértices, concavidad, convexidad, eje de simetría, dominio, recorrido. Aparece por primera vez la forma simbólica multiplicativa. En el sistema de representación gráfico, introducen la idea de cuádricas. En la fenomenología desarrollan con detalle fenómenos matemáticos como áreas y volúmenes. Establecen conexiones puntuales externas muy claras, al identificar las coordenadas de puntos como el vértice y los cortes con el eje x. También establecen conexiones para la dilatación, la concavidad y el eje de simetría.

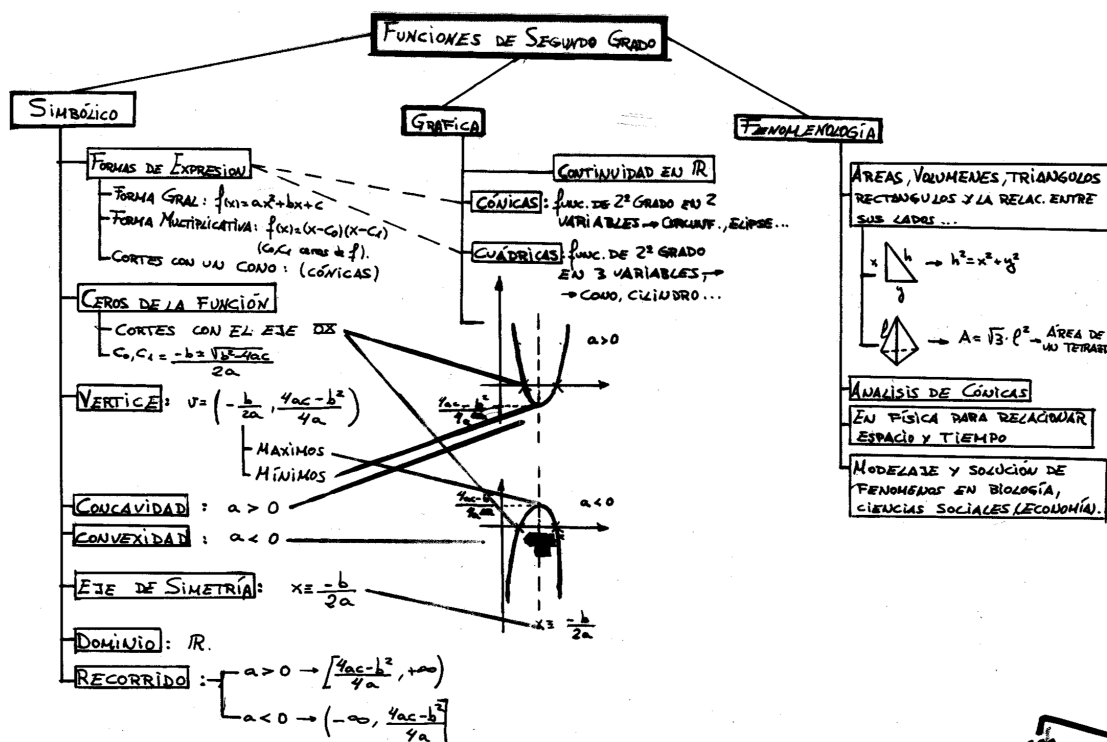


Figura 87. Estructura conceptual y sistemas de representación del grupo función cuadrática

Esta versión no presentó cambios muy radicales con respecto a la versión anterior. El aspecto más interesante fue la aparición de una serie de conexiones puntuales externas muy claras, junto con la aparición de la forma multiplicativa dentro del sistema de representación simbólico. Desapareció la mención a lo numérico (en la

versión anterior estaba la tabla de valores). Las conexiones internas dentro del sistema de representación eran implícitas al expresar algunas propiedades en función de los parámetros de la forma general. No aparecieron aún los procedimientos de tratamiento simbólico, con excepción de la ecuación cuadrática para relacionar las dos formas simbólicas que se presentan. En resumen, el grupo mantuvo la estructura que tenían anteriormente y la detallaron parcialmente.

El siguiente texto corresponde a apartes de los comentarios que, como formador, hice a la presentación y las transparencias del grupo función cuadrática que acabo de presentar.

... ¿Cuáles son los elementos de cada sistema de representación y cuáles son las propiedades? ¿Cómo se relacionan entre sí?

...

En el caso del sistema de representación simbólico, resulta interesante que haya aparecido la forma multiplicativa y que ustedes hayan insinuado una relación entre esa forma y la forma general a través de la ecuación cuadrática. ¿Hay más formas simbólicas? Y si las hay, ¿cómo se relacionan entre sí? ¿Qué elementos tienen y qué propiedades se resaltan en ellas? ¿Cómo se relacionan estos elementos y propiedades con los elementos y propiedades de otros sistemas de representación, como el geométrico del plano cartesiano?

Sistemas de Representación y Análisis Fenomenológico

En las siguientes dos sesiones el formador, basándose en el trabajo previo de los grupos de futuros profesores, concretó el significado de las nociones de estructura conceptual y sistema de representación e introdujo la idea de fenomenología. En seguida, y durante dos sesiones, los grupos de futuros profesores presentaron sus trabajos. Estos incluían una mejora de la estructura conceptual, teniendo en cuenta los sistemas de representación, y una primera aproximación al análisis fenomenológico del tema.

Fenomenología

Con motivo de los comentarios y de la discusión generada por las presentaciones anteriores, el formador indujo a los grupos de futuros profesores a mejorar su trabajo sobre el fenomenología de cada tema. En la siguiente sesión se presentaron estos trabajos.

6.3. Las Demás Sesiones del Análisis Didáctico

En el resto de las sesiones de la asignatura se trabajó en el análisis cognitivo y el análisis de instrucción. Los formadores introdujeron las nociones de modelización, errores y dificultades e hicieron una presentación sobre teorías de aprendizaje. Los futuros profesores analizaron su tema desde esta perspectiva. En el análisis de instrucción se reflexionó sobre la resolución de problemas y se discutió sobre los materiales y recursos. Se pidió a los grupos de futuros profesores que identificaran una dificultad relacionada con su tema y que diseñaran una actividad que pretendiera abordar esa dificultad. Los formadores hicieron una presentación sobre evaluación y los grupos de futuros profesores diseñaron y presentaron una ac-

tividad de evaluación para su tema. Las últimas sesiones de clase correspondieron a la presentación, por parte de uno de los formadores, de un ejemplo de análisis didáctico y del diseño de una unidad didáctica para los números naturales. La última actividad de la asignatura fue la presentación de los trabajos finales de los diferentes grupos de futuros profesores.

7. DISEÑO DE LOS ESTUDIOS EMPÍRICOS

En este apartado, describo el diseño de los estudios empíricos con los que pretendo abordar la cuarta pregunta: ¿qué caracteriza los procesos de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria que participan en este tipo de programas de formación inicial?

7.1. De una Pregunta General a unos Objetivos de Investigación

En los apartados anteriores, he concretado esta pregunta general al delimitar el contexto de investigación y precisar los conceptos y teorías que me permitirán dar significado a la expresión “caracterizar los procesos de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria”. De esta manera, puedo formular unas preguntas de investigación específicas:

1. ¿Cuáles son los significados parciales, con respecto a las nociones del análisis de contenido, que emergen en el desarrollo del conocimiento didáctico cuando los grupos de futuros profesores participan en la asignatura?
2. ¿Cómo se puede describir la evolución de estos significados parciales en términos de estados y factores de desarrollo?
3. ¿Cómo se pueden caracterizar los estados de desarrollo, en caso de que estos se puedan determinar?
4. ¿Es posible explicar estos estados de desarrollo, y los significados parciales asociados, en términos de lo que sucede en la comunidad de aprendizaje del aula y en la comunidad de aprendizaje de uno de los grupos?

También puedo enunciar el objetivo general de investigación. Se trata de

describir y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato del curso 2000-2001 con respecto a las nociones que componen el análisis de contenido.

Preciso este objetivo general en los siguientes objetivos específicos.

1. Para cada una de las nociones consideradas y para las relaciones entre ellas, describir y caracterizar
 - ◆ los significados parciales que los grupos de futuros profesores desarrollan a lo largo de la asignatura y
 - ◆ la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores en términos de estados y factores de desarrollo.
2. Por otro lado, también busco
 - ◆ proponer conjeturas que permitan explicar la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores, y

- ◆ contrastar algunas de estas conjeturas.

7.2. Metodología: Selección de unas Opciones

Este reporte describe el camino que, como diseñador, formador e investigador, recorrí durante varios años en mi relación con la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en general, y con un programa de formación, en particular. Yo no fui el foco de la investigación, pero su diseño y sus resultados hablan sobre mis creencias, valores y actitudes, por un lado, y sobre mi actuación como formador e investigador, por el otro.

Mis creencias y valores se expresan, en primera instancia, en las opciones conceptuales que he asumido y que he presentado en los apartados anteriores. Estas opciones se refieren a una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas, una visión funcional del conocimiento del profesor, una posición acerca de cómo se construye y desarrolla ese conocimiento, una propuesta acerca de cómo se debe realizar la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y una descripción detallada de cómo se desarrolló la asignatura.

Dentro de los límites que establece el marco conceptual que acabo de describir, es posible pensar en múltiples estrategias metodológicas para abordar el problema de investigación. La selección de métodos estuvo delimitada por dos cuestiones: la intención de que la realización de la investigación afectará en la menor medida posible el desarrollo de la asignatura, y la decisión de centrar la atención en el trabajo y producciones de los grupos de futuros profesores, dejando en un segundo plano el análisis de las actuaciones y producciones de los futuros profesores, como individuos. Estas opciones implicaron mi intención de realizar la investigación utilizando la información que surge naturalmente de la asignatura y mi interés por explorar los procesos de negociación de significado de un grupo de futuros profesores cuando ellos trabajaban por fuera del aula realizando las tareas que se les había asignado en clase.

Esta investigación es un estudio de caso: el caso del desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores en una asignatura concreta en un momento específico. Su propósito es dar una “prueba de existencia”; es decir, presentar evidencias de un caso en el que una estrategia (de formación) produce unos resultados.

7.3. Fuentes de Información

En el bloque temático correspondiente al análisis didáctico, utilizamos un esquema cíclico de trabajo que describo en la Figura 88.

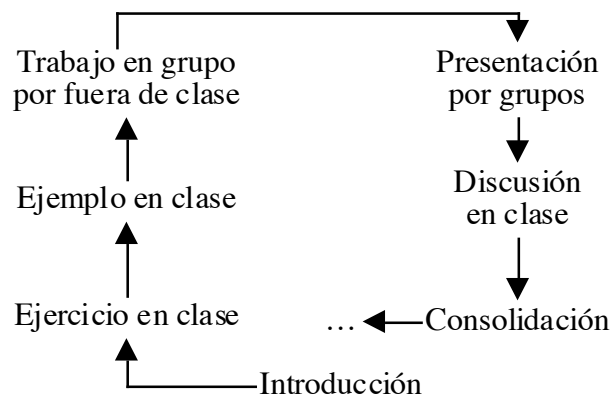


Figura 88. Ciclo metodológico de tratamiento del análisis didáctico

Este esquema de trabajo dio lugar a tres tipos de información que utilicé en los estudios empíricos:

1. la información contenida en las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores y por los formadores para hacer sus presentaciones en clase,
2. la información contenida en las transcripciones de las grabaciones de audio de las sesiones de clase y
3. la información contenida en los trabajos finales presentados por los grupos de futuros profesores.

Utilicé dos fuentes de información adicionales:

4. las transcripciones de las grabaciones de audio de entrevistas semi-estructuradas a los grupos cónicas y progresiones aritméticas y geométricas al finalizar el análisis didáctico y al final de la asignatura y
5. las transcripciones de las grabaciones de audio de las sesiones de trabajo fuera del aula del grupo función cuadrática en su proceso de elaboración de sus presentaciones y del trabajo final.

7.4. Cuatro Estudios

Con el propósito de abordar el problema de investigación y lograr los objetivos, organicé el proyecto en cuatro estudios. Identifiqué cada estudio con su fuente principal de información:

- ◆ análisis de las presentaciones,
- ◆ análisis de las producciones y actuaciones de los grupos de futuros profesores en el aula y en las entrevistas a dos grupos de futuros profesores,
- ◆ análisis de los trabajos finales y
- ◆ análisis de las actuaciones del grupo función cuadrática en su trabajo por fuera del aula.

En lo que sigue, denominaré estos estudios *presentaciones*, *producciones*, *trabajos finales* y *grupo función cuadrática*, respectivamente. Describo estos estudios en los apartados que siguen.

8. CUATRO ESTADOS DE DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

En este capítulo, presento la primera aproximación a la caracterización del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. Para ello, utilizo la información contenida en las transparencias que ellos utilizaron para hacer sus presentaciones periódicas en clase¹⁵⁷. Utilicé la noción de factor de desarrollo para interpretar la información contenida en las transparencias en términos de la evolución de los significados parciales de los grupos de futuros profesores con respecto a cada uno de los organizadores del currículo del análisis de contenido. De esta manera, me impuse unas metas concretas: (a) identificar los atributos más representativos de las transparencias de los grupos de futuros profesores; (b) definir unas variables de análisis a partir de estos atributos; (c) verificar que estas variables siguen patrones estables en el tiempo; (d) identificar y caracterizar unos estados de desarrollo a partir de estas variables; y (e) describir y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico a partir de esos estados de desarrollo.

8.1. De 72 Transparencias a Cuatro Estados de Desarrollo

Aunque cada grupo trabajó, a lo largo de la asignatura, en un tema matemático concreto, yo estaba interesado en producir una caracterización de la evolución de los significados parciales de los diferentes grupos de futuros profesores que fuese independiente de los temas. En otras palabras, me interesaba comparar el progreso de los diferentes grupos. ¿Cómo codificar las 72 transparencias para lograr estos propósitos? Una transparencia de un grupo presenta información esquemática sobre el análisis que ese grupo ha hecho de su tema. Cada análisis utiliza como herramienta uno o más organizadores del currículo. Mi propósito era entonces definir un conjunto de variables de codificación con el que pudiera caracterizar los atributos de las 72 transparencias. Dado que cada transparencia era la expresión de los significados parciales de un grupo en un momento dado, su codificación debía fundamentarse en los significados técnicos y prácticos de los organizadores del currículo.

Por ejemplo, decidí considerar los siguientes sistemas de representación: simbólico, gráfico, numérico, geométrico, figurativo, verbal y otros. Con cada variable se establece si en la transparencia aparece o no el sistema de representación correspondiente. El proceso de identificación y definición de las variables de codificación fue cíclico. Partiendo de los significados técnicos y prácticos de los organizadores del currículo del análisis de contenido, produje una lista de variables con la que hice una primera codificación de las 72 transparencias. En seguida, matité y extendí el listado inicial teniendo en cuenta los factores de desarrollo: organización, complejidad y papel. Con estos criterios, realicé varios ciclos de codificación, buscando, en cada ciclo, afinar la selección y definición de las variables de codificación. Obtuve una lista final de 120 variables de codificación. Las variables caracterizan las transparencias de acuerdo con diversos criterios. Por ejemplo,

¹⁵⁷ Para efectos de facilitar la lectura, utilizaré frecuentemente el término “transparencia” para referirme a la información contenida en estos documentos.

desde la perspectiva del factor de desarrollo complejidad, se tiene en cuenta, entre otros, el número de niveles de los mapas conceptuales, el número de sistemas de representación que se utilizan, el número de los diversos tipos de conexiones, el número de fenómenos de diferentes tipos y el número de subestructuras.

A partir de las variables de codificación, definí (de nuevo, en un proceso cíclico) 12 variables de análisis teniendo en cuenta lo que nuestra experiencia como formadores nos indicaba sobre cómo los grupos de futuros profesores avanzan en su aprendizaje; la revisión y el análisis sistemático de las transparencias y de su codificación; los significados técnicos y prácticos de los organizadores del currículo del análisis de contenido; y el análisis de los factores de desarrollo y su significado. Los factores de desarrollo fueron el hilo conductor en el proceso de transformar y resumir los datos básicos (que surgen de las variables de codificación) en las variables de análisis. Las variables resultantes fueron las siguientes: (a) número de niveles del mapa conceptual que describe el tema, (b) existencia de las nociones centrales del tema en la estructura conceptual, (c) número de criterios de organización de la estructura conceptual, (d) uso coherente de los criterios de organización, (e) número de conexiones, (f) número de sistemas de representación, (g) papel de los sistemas de representación como organizadores de la estructura conceptual, (h) número de contextos (matemático, natural, social) a los que pertenecen los fenómenos presentados, (i) número de disciplinas a los que pertenecen los fenómenos presentados, (j) número de subestructuras utilizadas para organizar los fenómenos, (k) papel de los tres organizadores del currículo del análisis de contenido en el uso de los otros organizadores del currículo y en el diseño de la unidad didáctica, y (l) coherencia entre lo propuesto en la estructura conceptual y el uso que de ella se hace en las otras fases de la asignatura.

Los valores de estas variables se obtienen a partir de los valores de las variables de codificación. En lo que sigue, utilizaré el término *observación* para referirme a la información contenida en una transparencia y a su interpretación en términos de las variables de análisis que acabo de presentar. Un primer análisis de las observaciones me permitió verificar que ellas seguían un patrón de evolución y establecer que estos patrones se podían caracterizar con cuatro estados de desarrollo. Habiendo caracterizado el conjunto de variables de análisis y decidido el número de estados, el problema consistía entonces en caracterizar esos estados en términos de combinaciones de valores de esas variables de tal forma que la sucesión de estados fuesen representativos de una evolución y las observaciones se ajustaran tanto como fuera posible a los estados a los que eran asignadas. El primer paso en esta búsqueda se centró en la formulación de una definición inicial de los estados que fuese coherente con el marco conceptual (el significado técnico y práctico de los organizadores del currículo del análisis de contenido) y con mi experiencia como formador. Para cada variable identifiqué cuatro rangos de sus valores, correspondiendo cada rango a uno de los cuatro estados, sucesivamente. Impuse dos condiciones a la definición de los rangos: la unión de los cuatro rangos debía ser igual al rango total de los valores que podía asumir la variable; y dos rangos sucesivos de una variable podían compartir máximo un valor —a menos que el rango fuese del tipo $[n, \infty)$ —. La Tabla 42 muestra los rangos que asigné a cada una de las variables en virtud de los cuales definí la primera versión de los estados.

Variables	Estados			
	1	2	3	4
1 Complejidad EC	[0, 0]	[1, 1]	[2, 2]	[3, ∞)
2 Nociones centrales	[0, 0]	[0, 0]	[1, 1]	[1, 1]
3 Criterios de organización	[3, ∞)	[2, 3]	[1, 2]	[0, 1]
4 Uso coherente criterios	[0, 0]	[0, 1]	[1, 1]	[1, 1]
5 Conexiones	[0, 0]	[1, 2]	[2, ∞)	[3, ∞)
6 Variedad SRS	[0, 1]	[1, 2]	[2, ∞)	[3, ∞)
7 SRS como organizador	[0, 1]	[2, 2]	[2, 3]	[3, 3]
8 Variedad fenómenos	[0, 1]	[1, 2]	[2, ∞)	[2, ∞)
9 Variedad disciplinas	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, ∞)
10 Variedad subestructuras	[0, 0]	[0, 1]	[1, 2]	[2, ∞)
11 Papel	[0, 0]	[0, 0]	[0, 5]	[6, ∞)
12 Coherencia EC	[0, 0]	[0, 0]	[1, 1]	[1, ∞)

Tabla 42. Primera definición de estados

Para establecer los estados de desarrollo, utilicé un procedimiento que denominé *análisis de discrepancias* y que describo a continuación. El propósito es obtener una definición de los estados, en términos de las variables, que se ajuste lo mejor posible a las observaciones. Al asignar observaciones a estados, aparecen discrepancias. Esto sucede cuando, para al menos una variable y un estado, hay una observación asignada a ese estado que asume valores que no pertenecen al rango establecido para esa variable en ese estado. El problema se traduce entonces en obtener una definición de estados que minimice el número de discrepancias, con un grado aceptable de discriminación entre ellos.

El proceso para obtener la definición de esos estados es cíclico. Cada ciclo está compuesto por dos pasos: asignación de observaciones a estados y cambio en la definición de rangos de algunas de las variables para algunos de los estados. En el primer paso, la asignación se hace de tal forma que el estado escogido para una observación sea aquel que genera el mínimo número de discrepancias. En el segundo paso, se identifican las variables que generan mayor número de discrepancias y los estados en los que se generan. A continuación, se analizan las consecuencias de cambiar la definición de esos estados (y posiblemente de los estados contiguos) en términos de esas variables. El cambio en los rangos se rige por un criterio doble: reducir el número de discrepancias, manteniendo un nivel aceptable de discriminación entre estados. Una vez que se han cambiado los rangos de las variables que generan mayor número de discrepancias (en aquellos estados en que se generan), es necesario revisar la asignación de observaciones a estados. Se inicia un nuevo ciclo. En el caso de los datos de este estudio, fueron necesarios tres ciclos. Cuando revisé por cuarta vez la definición de los estados en términos de las variables, observé que los cambios que permitían reducir discrepancias implicaban una pérdida demasiado importante en el grado de discriminación. Por lo tanto, detuve el proceso allí.

8.2. Cuatro Estados de Desarrollo del Conocimiento Didáctico

Utilicé el procedimiento que acabo de describir para analizar las observaciones. La Tabla 43 presenta la definición de los estados que obtuve al final de tres ciclos del procedimiento.

	Variables	Estados			
		1	2	3	4
1	Complejidad EC	[0,0]	[1,2]	[2,∞)	[2,∞)
2	Nociones centrales	[0,0]	[0,1]	[1,1]	[1,1]
3	Criterios de organización	[3,∞)	[2,3]	[1,2]	[0,1]
4	Uso coherente criterios	[0,0]	[0,1]	[1,1]	[1,1]
5	Conexiones	[0,0]	[1,3]	[3,∞)	[3,∞)
6	Variedad SRS	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)	[3,∞)
7	SRS como organizador	[0,1]	[1,2]	[2,3]	[3,3]
8	Variedad fenómenos	[0,1]	[1,2]	[2,∞)	[2,∞)
9	Variedad disciplinas	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)	[3,∞)
10	Variedad subestructuras	[0,0]	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)
11	Papel	[0,0]	[0,5]	[0,5]	[6,∞)
12	Coherencia EC	[0,0]	[0,0]	[0,0]	[1, ∞)

Tabla 43. Definición final de estados

En la Tabla 44, presento la asignación final de observaciones a estados. Cada fila representa un grupo de futuros profesores y sus correspondientes observaciones, organizadas cronológicamente. Entonces, por ejemplo, las observaciones correspondientes al grupo 7 quedaron asignadas sucesivamente a los siguientes estados: 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 3 y 4.

Grupo	Observación								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	2	2	3	3	4	3	4	4
2	1	2	3	3	3	3	3	3	4
3	1	2	2	3	3	3	3	3	3
4	2	2	2	2	2	3	3	3	3
5	2	2	3	3	3	3	3	4	4
6	2	2	2	3	3	3	2	3	4
7	2	2	3	3	3	3	4	4	4
8	1	2	2	2	3	3	3	2	2

Tabla 44. Asignación final de observaciones a estados

Finalmente, la Tabla 45 presenta el número de discrepancias por grupo y observación.

Grupo	Observación									Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1 Funciones y gráficas	1	1	2	0	0	0	1	1	0	6
2 Progresiones	3	3	0	0	1	1	1	2	2	13
3 Números decimales	1	2	2	2	1	1	1	0	1	11
4 Probabilidad	3	0	2	1	2	1	1	1	5	16
5 Cónicas	3	1	2	0	1	1	3	2	3	16
6 Esfera	2	1	1	1	1	2	2	4	3	17
7 Función de segundo grado	2	1	0	0	0	2	2	3	0	10
8 Sistemas de ecuaciones lineales	2	1	1	0	3	1	5	3	4	20
Total	17	10	10	4	9	9	16	16	18	109

Tabla 45. Discrepancias por grupo y observación

La definición de las variables y las observaciones correspondientes no satisfacen las condiciones de métodos estándar de agrupamiento, como el análisis clúster. Por esta razón, desarrollé el análisis de discrepancias. No obstante, la definición de estados que surgen de dicho análisis agrupa los valores de cada variable en máximo cuatro rangos. Utilicé estos rangos para definir unas nuevas variables, de tal manera que, para una variable dada, asigné el valor 1 para el primer rango, el valor 2 para el segundo, y así sucesivamente. Con estas nuevas variables, realicé un análisis clúster de las observaciones y confirmé que sus resultados son coherentes con los resultados del análisis de discrepancias.

8.3. Estados de Desarrollo, Evolución y Progreso de los Grupos

El esquema de codificación y análisis de la información con el que obtuve los resultados se basa en un proceso cíclico que busca minimizar discrepancias. Por consiguiente, los estados de desarrollo que surgen de ese proceso identifican las combinaciones de valores (o rangos de valores) de las variables a las que, en conjunto, mejor se adaptan las observaciones para una tarea dada. Entonces, estas combinaciones de valores de variables se pueden considerar como representativas de los estados más significativos del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. A partir de la información de la Tabla 43, puedo caracterizar estos cuatro estados en términos de los organizadores del currículo del análisis de contenido y de los factores de desarrollo de la siguiente manera:

El *estado 1* es un estado básico en el que la estructura conceptual no tiene complejidad, se utilizan varios criterios de organización sin coherencia, se utiliza máximo un sistema de representación, sin conexiones, y no hay variedad en el análisis fenomenológico. En la Tabla 44, se aprecia que sólo tres grupos tienen observaciones clasificadas en este estado. Esto sugiere que es un estado que se puede superar con el conocimiento previo y las intuiciones didácticas con las que los futuros profesores afrontan inicialmente la tarea.

El *estado 2* es un estado de transición. Hay algo de complejidad en la estructura conceptual y comienza a aparecer variedad en los sistemas de representación, aunque aún no hay variedad en el análisis fenomenológico.

En el *estado 3* hay un avance en todas las variables, excepto las variables papel y coherencia. La estructura conceptual es compleja, con un nivel intermedio de organización. Hay variedad en los sistemas de representación y en el número de conexiones. Aparece algo de variedad en el análisis fenomenológico.

En el *estado 4* se logra plena complejidad en el análisis fenomenológico y se aprecia la utilización coherente de la información para la realización de las tareas.

8.4. Una Primera Aproximación al Desarrollo del Conocimiento Didáctico

La caracterización de los estados y la asignación de las observaciones a ellos es el principal resultado de este estudio. Este resultado corrobora mi conjetura de partida: el conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores evoluciona de acuerdo con patrones estables. Ésta es una evolución paulatina que parte de un estado básico fundamentado posiblemente en los conocimientos previos y las intuiciones didácticas de los grupos de futuros profesores. El desarrollo es coherente con el orden en el que se presentan las diferentes nociones en la instrucción. No obstante, hay un desfase entre el momento en el que se presentan los temas y el momento en el que los significados parciales de los grupos de futuros profesores se materializan en el repertorio compartido y se expresan en sus producciones. En este sentido, la noción de sistemas de representación, por ejemplo, no se consolida en el momento en el que este organizador del currículo se presenta en clase y se pide a los grupos de futuros profesores que analicen su tema desde esta perspectiva. Éste es solamente el primer paso.

Los significados parciales de los grupos de futuros profesores con respecto a este organizador del currículo sufren diversas transformaciones y se consolidan en la medida en que tareas posteriores inducen a los grupos de futuros profesores a poner en juego su conocimiento de esta noción para efectos de resolver otros problemas (por ejemplo, realizar el análisis fenomenológico, o diseñar una actividad de evaluación). En términos de la teoría de la génesis instrumental, el artefacto (el organizador del currículo) se transforma en instrumento, en la medida en que los grupos de futuros profesores desarrollan esquemas para resolver las tareas con la ayuda del instrumento. El proceso de génesis instrumental toma tiempo: requiere que los grupos de futuros profesores negocien significados (del organizador del currículo, de su tema matemático y de sus esquemas de acción) y que estos significados parciales se materialicen (en diferentes formas) en las sucesivas ocasiones en las que los grupos presentan sus producciones en clase. Este proceso explica algunas de las diferencias entre las observaciones y el patrón esperado de clasificación a los cuatro estados.

Los grupos progresan en el desarrollo de su conocimiento didáctico con diferentes ritmos. El paso del estado 2 al estado 3 sucede en diferentes momentos (desde la tercera observación para tres grupos, hasta la sexta para el grupo 4). Dos grupos estabilizan sus producciones en el estado 3 y, de los cinco grupos que presentan producciones clasificadas en el estado 4, dos lo logran solamente en la última observación (el trabajo final). Hay un grupo que presenta un retroceso al estado 2 en las últimas dos producciones.

Estos ritmos de progreso y niveles de avance variados pueden tener diferentes causas. La variedad de los momentos en los que se da el paso del estado 2 al estado 3 puede ser indicativo de una cierta dificultad para poner en juego y desarrollar

las nociones de sistemas de representación y fenomenología. No obstante, la totalidad de los grupos logra superar esta dificultad. El paso del estado 3 al estado 4 es más complejo. Por un lado, hay grupos que no lo logran y otros que sólo lo alcanzan en el trabajo final.

Hay una coherencia parcial entre el ritmo de progreso y el nivel de avance de los diferentes grupos, por un lado, y el número total de discrepancias que presentan, por el otro. Los grupos con mayor ritmo de progreso y nivel de avance (1 y 7) son también los grupos con menor número de discrepancias. Dos de los tres grupos con mayor número de discrepancias son los grupos con menor ritmo de progreso y nivel de avance. Esta situación puede corroborar la idea de que las discrepancias son una medida de la coherencia con la que cada grupo avanza en cada una de las dimensiones de su conocimiento didáctico (las variables).

El análisis de las discrepancias en cada variable dio luces sobre aquellas nociones que presentaron más dificultades a los grupos de futuros profesores. En este sentido, la noción de conexión presenta un número alto de discrepancias con diferencia positiva. A pesar de reiterados esfuerzos de la instrucción, las producciones de los grupos de futuros profesores tienen un nivel de conexiones inferior al que debería esperarse. Algo similar, pero en menor medida, sucede con las nociones de variedad de fenómenos, variedad en sistemas de representación, complejidad y sistemas de representación como organizador de la estructura conceptual. Éstas son las nociones que presentan mayores dificultades para los grupos de futuros profesores.

8.5. Cuestiones Abiertas

El análisis de los resultados obtenidos da parcialmente respuesta a una de las preguntas que formulé anteriormente. Me refiero a la pregunta “¿Cómo se pueden caracterizar los estados de desarrollo, en caso de que estos se puedan determinar?”. Al mismo tiempo, estos resultados generan nuevas cuestiones que deben ser exploradas. La información contenida en las transparencias es la expresión de los significados parciales que los grupos de futuros profesores han desarrollado hasta ese momento. Estos significados parciales son la materialización de los procesos de negociación de significado que tienen lugar en las dos comunidades de práctica que he identificado: la comunidad de práctica del aula y la comunidad de práctica de cada grupo. ¿Cómo se caracterizan estos significados parciales y en qué grado dependen de los temas específicos que trabajan los diferentes grupos de futuros profesores? Ésta es otra de las preguntas que he formulado. Para responderla es necesario: (a) profundizar en el significado de los atributos y las variables que caracterizan las transparencias y que establecen los patrones en los significados parciales de los grupos de futuros profesores, y (b) a partir de lo anterior, profundizar en el significado de los estados de desarrollo que caracterizan la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Por otro lado, se deben formular y contrastar conjeturas que expliquen: (a) el carácter paulatino y desfase de la evolución del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores; (b) las diferencias entre los grupos; y (c) las dificultades que los grupos de futuros profesores tienen que enfrentar con respecto a algunas de las nociones.

La búsqueda de respuestas a estas cuestiones me induce a la exploración en la complejidad del conocimiento didáctico, objeto de los dos apartados siguientes.

9. COMPLEJIDAD DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

En este apartado, presento el estudio en el que analizo las transparencias y las intervenciones en clase de los futuros profesores y tengo en cuenta la especificidad de la información con respecto al tema de cada grupo. Mi propósito es identificar y caracterizar los significados parciales que, con respecto a las nociones del análisis de contenido, manifestaron los grupos de futuros profesores, y describir la evolución de esos significados a lo largo de la asignatura. En otras palabras, en este apartado, me propongo abordar la pregunta:

¿Cómo se caracterizan los significados parciales que los grupos de futuros profesores manifestaron en sus transparencias y en sus intervenciones en el aula y cómo evolucionan en el tiempo?

A continuación, describo el esquema metodológico que utilicé para realizar este estudio. Después, presento los resultados del mismo para cada una de los tres organizadores del currículo que conforman el análisis de contenido. En las últimas secciones interpreto estos resultados en términos de la complejidad del conocimiento didáctico.

9.1. Identificación y Caracterización de los Significados Parciales

Para realizar este estudio, utilicé tres fuentes de información: (a) la información propuesta por los grupos de futuros profesores en sus transparencias; (b) las transcripciones de la grabación en audio de la interacción que tuvo lugar durante las sesiones de clase; y (c) las transcripciones de la grabación en audio de las entrevistas con dos grupos de futuros profesores (cónicas y progresiones aritméticas y geométricas) al final de las sesiones correspondientes al análisis de contenido y al final de la asignatura.

La identificación y caracterización de los significados parciales de los grupos de futuros profesores fue el resultado de un proceso exploratorio y cíclico en el que codifiqué y analicé la información que tenía disponible de las tres fuentes anteriores. El proceso se basó en el análisis simultáneo de las transparencias de los grupos de futuros profesores y de las transcripciones de las grabaciones de la interacción en clase y de las entrevistas con los dos grupos. Fue exploratorio dado que, teniendo en cuenta los significados de referencia de los organizadores del currículo del análisis de contenido y tomando como guía los factores de desarrollo, identifiqué aquella información contenida en las transparencias y en las transcripciones que consideré significativa desde el punto de vista del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Codifiqué esta información y organicé y revisé esta codificación varias veces a medida que el esquema de codificación y análisis fue evolucionando. Para ello, desarrollé un sistema interconectado de bases de datos.

Mi interés se centró en identificar aspectos de la información contenida en las transparencias y en las transcripciones que permitiera caracterizar manifestaciones de los significados parciales de los grupos de futuros profesores. En su momento, denominé a esos registros como “caracterizaciones”. Cada caracterización podía estar vinculada a varias transparencias y episodios, siendo todos ellos manifestaciones de un mismo significado parcial. El procedimiento de análisis consistió en

identificar aquellos episodios y documentos más representativos del desarrollo del conocimiento didáctico de los organizadores del currículo del análisis de contenido, y establecer caracterizaciones para cada una de ellas. El esquema interactivo y coordinado de las bases de datos me permitió identificar, para cada caracterización, la evidencia (episodios y documentos) que la sustentaba más adecuadamente.

A continuación presento los resultados de este análisis. La extensión de este resumen no me permite presentar ni la evidencia (transparencias de los grupos de futuros profesores o transcripciones de intervenciones en el aula o en las entrevistas), ni los detalles metodológicos del análisis.

9.2. Complejidad de la Noción de Estructura Conceptual como Instrumento

El análisis me permitió caracterizar los significados parciales con respecto a la noción de estructura conceptual que los grupos de futuros profesores pusieron de manifiesto en sus transparencias y en sus intervenciones en clase.

Génesis Instrumental para la Estructura Conceptual

El manejo que los grupos de futuros profesores hicieron de la noción de estructura conceptual y de los mapas conceptuales como instrumentos para describir el tema evolucionó en el tiempo. Algunos grupos comenzaron la descripción de su tema con un listado desordenado; después, este listado tomó forma de mapa conceptual organizado con base en una variedad de criterios. La mayoría de estos criterios de organización surgieron de los organizadores del currículo. A medida que se avanzó en las presentaciones y en la discusión sobre ellas, el número de criterios de organización se redujo y la organización de los mapas conceptuales se centró en los sistemas de representación. El papel organizador de los sistemas de representación también pasó por varias etapas. En un comienzo, compartió ese rol de organización con otras nociones, asumiendo, en muchos casos, un papel complementario. El paso a un mapa conceptual completamente organizado por los sistemas de representación se dio en diferentes momentos de la asignatura, dependiendo del tema. Solamente cuando los sistemas de representación asumieron un papel protagonista en la organización del mapa conceptual, los futuros profesores tomaron conciencia de la posibilidad de establecer relaciones entre sus elementos. El hecho de que esta toma de conciencia no fuese simultánea en los diferentes grupos, generó situaciones de interacción en clase que promovieron la negociación de significados. Al final, la mayoría de los grupos estableció un cierto número de conexiones en su estructura conceptual, reconoció que “todo está relacionado” y resaltó la importancia de estas conexiones.

Aproximaciones Conceptuales, Históricas y Fenomenológicas a la Organización de la Estructura Conceptual

Además de los sistemas de representación, los organizadores historia y fenomenología jugaron papeles importantes en el proceso en virtud del cual los grupos progresaron en su descripción de la estructura matemática con base en la noción de estructura conceptual. El análisis histórico aportó información que, en muchos casos, resultó relevante para la construcción del mapa conceptual.

La noción de fenomenología puede utilizarse como organizador del mapa conceptual. En el curso en el que realizamos el estudio ningún grupo profundizó

en esta posibilidad. Esto es seguramente consecuencia, entre otras razones, del énfasis dado por la instrucción a los sistemas de representación como principal criterio organizador. En esta aproximación alternativa, el propósito es identificar y relacionar los elementos de la estructura conceptual a partir de sus significados fenomenológicos. Los conceptos y las relaciones entre ellos se organizan de acuerdo con los usos (naturales, sociales y matemáticos) de los mismos. Por ejemplo, en el caso del tema fracciones, es posible organizar la estructura conceptual con base en cuatro categorías: como parte-todo, medida, cociente, operador y razón.

Varios grupos de futuros profesores tendieron a organizar los mapas conceptuales siguiendo una aproximación “conceptual”. Esta aproximación pareció surgir naturalmente de la visión formal de la estructura matemática: un concepto está completamente descrito por su definición. Por lo tanto, para expresar esa descripción en un mapa conceptual basta con identificar los elementos de la definición y aquellos conceptos y procedimientos relacionados con ella. No obstante, la mayoría de las producciones de este tipo carecen de significado: son un conjunto de etiquetas parcialmente conectadas cuya interpretación requiere que el lector ponga en juego su propio conocimiento matemático. El énfasis en la descripción conceptual puede ser una de las razones por las cuales algunos grupos no reconocieron el potencial de los sistemas de representación como herramienta de descripción de la estructura matemática. Para estos grupos, la tarea de analizar el tema con base en los sistemas de representación era una tarea independiente. Los sistemas de representación se convirtieron, por lo tanto, en algo complementario a la estructura conceptual. En el momento en que los grupos reconocieron el papel descriptivo y estructural de los sistemas de representación y estos comenzaron a jugar un papel más protagónico en la organización del mapa conceptual, la aproximación conceptual perdió su formalidad y los elementos que antes eran etiquetas comenzaron a tener significado. Los elementos del mapa conceptual se pudieron representar en diferentes sistemas de representación. Esto permitió establecer conexiones entre ellos y estas conexiones lograron darles significado.

9.3. Complejidad del Significado de la Noción de Sistema de Representación

Los grupos de futuros profesores presentaron dos transparencias que tenían como foco principal el análisis del concepto desde la perspectiva de los sistemas de representación. No obstante, los sistemas de representación continuaron jugando un papel en los análisis que ellos realizaron posteriormente. En el estudio que presenté en el apartado anterior, detecté algunas de las dificultades de los grupos con respecto a este organizador del currículo, al constatar que la variable variedad en sistemas de representación fue la tercera variable en número de discrepancias. ¿Qué características tienen estas dificultades y cómo fueron superadas? ¿Cómo se caracteriza el proceso en virtud del cual los grupos de futuros profesores negociaron y construyeron el significado de la noción de sistema de representación?

Algunos grupos de futuros profesores consideraron que lo simbólico formaba parte de la dimensión conceptual del tema y, por lo tanto, no era un sistema de representación. En su opinión, lo simbólico sirve para describir el concepto a partir de su definición. Al incluir lo simbólico dentro de lo conceptual, varios grupos de futuros profesores consideraron lo gráfico como equivalente a la noción de re-

presentación. Sin embargo, estas representaciones jugaron un papel secundario y complementario porque, según ellos, no permitían generalidad, al presentar instancias particulares del concepto. Además, algunos futuros profesores sugirieron que estas representaciones podían inducir a errores. La menor importancia que ellos le dieron a estos sistemas de representación puede explicarse a partir del papel que habían jugado en su formación previa, al hecho de que los futuros profesores consideraban que en los libros de texto se usan como ejemplos y de que, en la práctica, no hay tiempo para tratarlos con profundidad. No obstante, cuando se apreció variedad de sistemas de representación en las transparencias, esta variedad surgió principalmente entorno a los sistemas de representación gráficos. Esto explica parcialmente la tendencia de los futuros profesores a imponer una jerarquía en los sistemas de representación. Esta jerarquía se sustentó en argumentos históricos, conceptuales, fenomenológicos y prácticos.

En la medida en que se avanzó en el proceso de revisar una tarea y producir una nueva versión del análisis, aparecieron nuevos sistemas de representación. Al comienzo, se tuvieron en cuenta únicamente los básicos (simbólico y gráfico). Después, al final del periodo en el que se trabajó el análisis de contenido, apareció una gran variedad de sistemas de representación. Sin embargo, a la hora de poner en juego esta información en los análisis cognitivo y de instrucción, los grupos de futuros profesores regresaron a los sistemas de representación básicos.

Los sistemas de representación que los grupos de futuros profesores propusieron en sus transparencias se pueden agrupar en varias categorías. Ya he mencionado los sistemas de representación básicos (simbólico y gráfico). Algunos grupos propusieron sistemas de representación que no eran realmente sistemas de representación (e.g., fenómenos). Los sistemas de representación numérico y geométrico aparecieron más tarde en aquellos grupos para los que tenía sentido utilizarlo. Finalmente, algunos grupos propusieron sistemas de representación que eran específicos al tema que les correspondió (por ejemplo, el matricial para los sistemas de ecuaciones lineales).

Durante la asignatura, la instrucción pretendió desarrollar una concepción formal de la noción de sistema de representación basada en la propuesta de Kaput (1992). Sin embargo, el significado que los grupos de futuros profesores manifestaron en sus transparencias se acercó más a la concepción propuesta por Castro y Castro (1997). Esta posición enfatiza los aspectos de visualización y clasifica los sistemas de representación en simbólicos y gráficos (p. 102). En todo caso, el significado que se manifestó en las transparencias sobre la noción de sistema de representación fue parcial, confirmando los resultados del análisis que presenté con respecto a la noción de estructura conceptual. Estos análisis pusieron en evidencia el número reducido de conexiones internas a cada sistema de representación y entre sistemas de representación como indicativo de la poca profundidad con la que los grupos de futuros profesores manejaron este organizador del currículo. En este sentido, el proceso de génesis instrumental fue parcial: los grupos de futuros profesores desarrollaron estrategias para utilizar el organizador del currículo como instrumento de análisis de un concepto, pero no lograron profundizar en las estrategias para utilizar la información que surge de ese análisis en las demás fases del análisis didáctico.

9.4. Heterogeneidad Fenomenológica

El análisis de un concepto matemático en términos de sus significados fenomenológicos es un proceso complejo. Esta complejidad se hizo evidente en las transparencias e intervenciones de los grupos de futuros profesores. La mayoría de ellos tuvieron múltiples dificultades para construir el significado de este organizador del currículo y lograron utilizarlo en la práctica en contadas ocasiones y de manera incompleta.

Las transparencias de los grupos de futuros profesores presentan una gran variedad de aproximaciones a la noción de fenomenología. La evolución de los significados parciales de los grupos de futuros profesores no siguió patrones estables. Sus transparencias presentan diversas soluciones a las tareas propuestas. Una pequeña proporción de ellas sugiere que esos grupos se acercaron al significado de referencia propuesto por la instrucción. Para cada aspecto de este significado de referencia, hay transparencias en las que este aspecto se manifiesta. Pero sólo unas pocas sugieren que los grupos de futuros profesores hayan puesto en juego una visión completa y coordinada de ese significado. En términos de la génesis instrumental, los grupos de futuros profesores no lograron desarrollar estrategias de uso del organizador del currículo que les permitiera convertirlo en un instrumento útil, tanto para el análisis del concepto, como para la puesta en práctica de ese análisis en el diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje.

La progresión de las transparencias de los grupos cónicas y esfera muestra que, aunque, con dificultades y de manera parcial, los grupos de futuros profesores pueden avanzar en la construcción del significado de la noción de fenomenología. El trabajo del grupo probabilidad mostró que sí es posible realizar un análisis fenomenológico detallado, como lo requería la instrucción. Por otro lado, las transparencias de varios grupos pusieron en evidencia que es posible proponer modelos matemáticos e identificar leyes y subestructuras, sin llegar a realizar un análisis fenomenológico detallado en el que se establezcan relaciones entre las características estructurales de los fenómenos y elementos y relaciones de las subestructuras.

Menos de la mitad de los grupos lograron desarrollar un análisis fenomenológico detallado y, en esos casos, este esfuerzo no revertió en una organización de los fenómenos de acuerdo con las subestructuras correspondientes. De hecho, solamente tres grupos organizaron sus transparencias por subestructuras y sólo uno de ellos mantuvo esa aproximación en el trabajo final. La mayoría de los grupos organizaron el trabajo final de acuerdo con un criterio diferente del utilizado en sus transparencias previas. Esto es posiblemente consecuencia de uno de los ejemplos dados por la instrucción, pero también manifiesta la débil consolidación de los significados construidos por los grupos de futuros profesores.

A la dificultad propia del organizador del currículo y de su puesta en práctica, tenemos que agregar el hecho de que para este tema, al contrario de lo sucedido con las nociones de estructura conceptual y sistemas de representación, se dedicó muy poco tiempo dentro de la asignatura. Esta situación sólo permitió una presentación somera de los aspectos teóricos y muy poca profundidad en el desarrollo de ejemplos y en la discusión del trabajo de los grupos de futuros profesores.

9.5. Complejidad de las Nociones del Análisis de Contenido y Génesis Instrumental

Las dificultades manifestadas por los grupos de futuros profesores al trabajar con los organizadores del currículo del análisis de contenido son, al menos parcialmente, consecuencia de la complejidad involucrada en estas nociones. Desde una perspectiva teórica, y como lo puse de manifiesto anteriormente, estas nociones son complejas. Pero el significado teórico de las nociones es sólo un aspecto de su complejidad. Esta complejidad se amplifica cuando se tiene en cuenta sus significados técnico y práctico. Para poner en juego estos significados, los futuros profesores deben desarrollar estrategias que les permitan transformar cada organizador del currículo del análisis de contenido en un instrumento útil desde el punto de vista didáctico. Por un lado, los futuros profesores deben construir las estrategias necesarias para analizar un concepto con el propósito de identificar, organizar y seleccionar sus diversos significados. Por el otro lado, ellos deben también construir las estrategias que les permitan utilizar la información que surge de esos análisis en los otros análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica.

La complejidad de las nociones del análisis de contenido se apreció en este estudio en los tres aspectos que acabo de mencionar. La insistencia de algunos grupos de futuros profesores en no considerar lo simbólico como sistema de representación o en proponer lo fenomenológico como sistema de representación es una manifestación de sus dificultades para abordar el significado teórico de las nociones. En la mayoría de los casos, los grupos de futuros profesores superaron estas dificultades a lo largo de la asignatura. Sin embargo, haber dado este paso no implicó que ellos pudieran poner en juego la noción para efectos de identificar los diversos significados del concepto, como lo he puesto de manifiesto en el caso de la noción de fenomenología. En los casos en los que este análisis se realizó con alguna profundidad, como fue el caso de varios grupos con respecto a la noción de sistema de representación, esto no implicó que estos grupos hubiesen desarrollado las estrategias necesarias para utilizar esta información con propósitos didácticos.

Los tres aspectos que acabo de mencionar se relacionan con los tres procesos que articulan la génesis instrumental. Los grupos de futuros profesores lograron, al final de la asignatura, el proceso de instrumentalización para las nociones de estructura conceptual y sistemas de representación, y de manera parcial para la noción de fenomenología. La instrumentación se realizó en buena medida en el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación y de manera muy parcial para la fenomenología. La integración orquestada tuvo lugar de manera parcial para las nociones de estructura conceptual y sistemas de representación.

Los resultados que he presentado en este apartado me permiten matizar algunos aspectos del proceso de génesis instrumental para el caso concreto de los organizadores del currículo del análisis de contenido. Esta evidencia muestra que la transformación de un organizador del currículo en instrumento es un proceso dinámico en dos direcciones. El análisis de la estructura matemática y la construcción del significado de cada una de los organizadores del currículo interactúan dinámicamente. A medida que se avanza en el análisis, se construyen significados más complejos (del organizador del currículo y del concepto) que, a su vez, permiten nuevos análisis más profundos.

Las características de las transparencias de los grupos dependen por lo tanto de dos factores: el significado que los grupos van construyendo de cada organizador del currículo y la profundidad con la que estudian y analizan (utilizando dicha noción como instrumento) la estructura matemática que corresponde a su tema. Un significado inicial del organizador del currículo permite solamente una descripción general de la estructura matemática. Y el esfuerzo por profundizar en el análisis de la estructura matemática contribuye al desarrollo del significado de la noción. Esta dualidad se aprecia por ejemplo en el proceso de pasar de una variedad de criterios de organización a uno solo de ellos: el significado de la noción se afianza y la descripción de la estructura matemática mejora. Se aprecia, por tanto, el juego entre los significados teórico, técnico y práctico del organizador del currículo. El desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores se fundamenta en este juego entre teoría y práctica.

Las reflexiones anteriores me permiten matizar y adaptar el modelo de actividad situada con mediación de instrumento de Vérillon (2000, p. 7). En la Figura 89 he adaptado los nombres de los elementos del modelo al contexto de la asignatura. La evidencia que he presentado en este estudio pone de manifiesto que la relación $G(O) \leftrightarrow C$ es cíclica. Con un significado del organizador del currículo como instrumento ($G \rightarrow O$), el grupo puede analizar (con la mediación de O) el concepto con cierta profundidad ($O \rightarrow C$). Al constatar el resultado de este análisis ($G \rightarrow C$), se reconocen nuevos significados del organizador del currículo como instrumento ($C \rightarrow O$) que transforman la práctica del grupo ($O \rightarrow G$) y les permite avanzar en su comprensión del organizador del currículo ($G \rightarrow O$) y del concepto ($G \rightarrow C$). Ésta es entonces una variación de la idea de mediación epistémica sugerida por Rabardel (2003, p. 668) en virtud de la cual el instrumento contribuye a la comprensión del objeto.

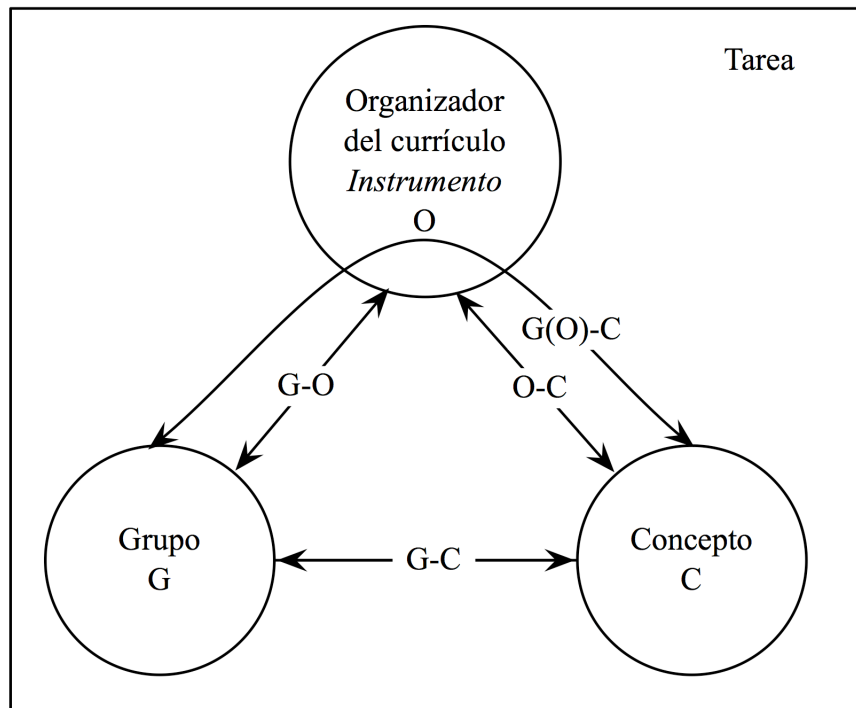


Figura 89. Modelo de actividad situada con mediación de instrumento de Vérillon (2000) adaptado a la asignatura

9.6. Complejidad de las Matemáticas Escolares

Cuando cada grupo escogió su tema, sus miembros supusieron que el tema era sencillo, matemáticamente hablando. Esta visión se transformó a medida que profundizaron en él. Los grupos de futuros profesores ampliaron su visión de lo que era una estructura matemática. Su experiencia como estudiantes de matemáticas y como profesores en clases particulares seguramente había reforzado una visión esencialmente formal de los conceptos matemáticos. Es posible que esta forma de ver las cosas estuviera en el centro de las dificultades que ellos tuvieron para apreciar la complejidad detrás de cada tema. No obstante, en la medida en que la génesis instrumental tuvo lugar y los grupos de futuros profesores progresaron en la identificación y organización de los diversos significados del concepto matemático, ellos se hicieron conscientes de su complejidad. Los resultados de este estudio muestran que la mayoría de los grupos de futuros profesores lograron abordar esta complejidad en sus perspectivas conceptual y representacional. No obstante, en cierta medida, esta complejidad los desbordó a la hora de utilizar los resultados de sus análisis para efectos didácticos. Cuando se esperaba que ellos utilizaran la información recogida para diseñar tareas o actividades de evaluación, los grupos de futuros profesores regresaron a los elementos tradicionales: una visión conceptual que utiliza los sistemas de representación básicos y que no saca provecho del análisis fenomenológico.

9.7. Desarrollo del Conocimiento Didáctico y Comunidades de Práctica

Los resultados de este estudio dan luces sobre el proceso en virtud del cual los grupos de futuros profesores construyeron socialmente los significados de los organizadores del currículo del análisis de contenido con motivo del esquema de

trabajo establecido en clase. El análisis sugiere que el desarrollo del conocimiento didáctico es un proceso dinámico y cíclico que puede ser promovido por la instrucción.

El análisis ha mostrado que los grupos de futuros profesores negociaron y construyeron el significado de los organizadores del currículo en la medida en que intentaron usarlo en la práctica en un tema específico. Los avances se lograron cuando, habiendo propuesto una solución al problema, los grupos de futuros profesores compararon su solución con las soluciones de los otros grupos y contrastaron su posición con las opiniones, comentarios y críticas de los compañeros y los formadores. En este proceso, los futuros profesores pudieron reconocer las deficiencias de su solución inicial, tener en cuenta las críticas recibidas a ésta, investigar en la literatura y discutir nuevas propuestas, hasta llegar a una nueva solución que surgió del acuerdo entre los miembros del grupo.

Las reflexiones anteriores resaltan el papel de la comunidad de práctica del aula en el aprendizaje de los grupos de futuros profesores. Éste es, sin duda, un aspecto importante del desarrollo de su conocimiento didáctico en el que no profundizaré en este estudio. Centraré mi atención en la conformación y consolidación de las comunidades de práctica de los grupos cuando trabajan por fuera del aula.

10. PUESTA EN PRÁCTICA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO

En el tercer estudio, que presento en este apartado, caractericé los trabajos finales presentados por los grupos de futuros profesores. Lo hice desde la perspectiva de la puesta en juego, dentro de esos documentos, del conocimiento didáctico sobre el análisis de contenido.

10.1. Uso de la Información que Surge de los Organizadores del Currículo

La última actividad de la asignatura consistió en la producción y presentación de un trabajo final. En este documento, los formadores esperábamos que los futuros profesores presentaran, de manera sistemática y organizada, la información que habían recabado sobre los organizadores del currículo y utilizaran esa información para proponer el diseño de una unidad didáctica sobre el tema en el que habían trabajado a lo largo del curso.

Estas expectativas surgían de la conceptualización del análisis didáctico como procedimiento de diseño curricular. De acuerdo con esta conceptualización, la utilización sistemática y razonada de la información permite al profesor justificar el diseño que propone. Su diseño no surge únicamente de la intuición o la experiencia: el profesor puede justificar el diseño en el sentido de que dicho diseño es coherente con la información que ha producido al realizar el análisis didáctico. De esta manera, el profesor tiene una base para valorar las posibilidades de éxito del diseño, cuando éste se lleve a la práctica.

En este estudio, mi interés se centró en explorar, en cada uno de estos documentos, (a) qué información, de la propuesta en el análisis de contenido, se utilizó en los análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica y (b) si

había información correspondiente al análisis de contenido que se utilizaba en los otros análisis o en el diseño de la unidad didáctica y que no había quedado registrada explícitamente en el apartado del análisis de contenido del documento.

10.2. El Análisis de Contenido en la Práctica

Como formadores, nosotros esperábamos que se apreciara una relación entre la información que cada grupo recogió y organizó en los análisis de contenido, cognitivo y de instrucción y el diseño que proponía. Igualmente, esperábamos también cierto vínculo entre los diversos análisis, de tal manera que la información que cada grupo produjera para un análisis (por ejemplo, el cognitivo) se sustentara a partir de la información recogida en los otros análisis (por ejemplo, el análisis de contenido).

El análisis de los trabajos finales muestra que estos propósitos no se lograron plenamente. Los trabajos finales de varios grupos de futuros profesores ponen en evidencia una relación débil entre la información recogida para los organizadores del currículo del análisis de contenido y su uso en los otros análisis y en el diseño de la unidad didáctica. También muestran que los grupos de futuros profesores utilizaron la información que surgió del análisis de contenido solamente en algunos aspectos de los otros análisis y del diseño de la unidad didáctica y, por lo tanto, que no lograron desarrollar necesariamente una visión global e integrada del análisis de contenido, en particular, y del análisis didáctico, en general, como herramienta para el diseño de unidades didácticas.

Desde la perspectiva de los organizadores del currículo del análisis de contenido, se observa que la fenomenología fue utilizada particularmente en las propuestas de las sesiones de clase, pero fue poco utilizada en los otros apartados del documento. Por su parte, la información sobre la estructura conceptual y los sistemas de representación se utilizó especialmente en los apartados de análisis cognitivo, materiales y recursos, objetivos y contenidos. Esto sugiere que la información fue útil, pero solamente en algunos aspectos del proceso. En términos de la génesis instrumental, estos resultados sugieren que varios grupos de futuros profesores no pudieron construir y desarrollar las técnicas (razonamientos y procedimientos) que les permitieran apreciar la importancia de la información producida en el análisis de contenido y les indujeran a utilizarla en los otros análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica.

Este estudio presenta evidencia para confirmar una conjetura que compartimos la mayoría de los formadores de profesores de matemáticas interesados en el desarrollo de la competencia de planificación: el diseño sistemático y fundamentado de una unidad didáctica es un proceso complejo. Los resultados que he presentado en este estudio (a) muestran que los diseños curriculares propuestos por los grupos de futuros profesores no se pueden calificar como “de calidad”, (b) resaltan algunas de las dificultades que ellos enfrentaron y (c) sugieren la necesidad de que la instrucción haga un mayor énfasis en la importancia de que este diseño se fundamente y se justifique a partir de la información que se recoge para los organizadores del currículo.

11. UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA

En los tres apartados anteriores he abordado, desde diferentes perspectivas, la última de las cuatro preguntas que formulé al comienzo de este documento:

¿Qué caracteriza los procesos de aprendizaje de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura?

Hasta ahora, he mostrado que el aprendizaje de los grupos de futuros profesores se puede caracterizar en términos de unos estados de desarrollo del conocimiento didáctico y he descrito esos estados. Los resultados de estos estudios surgieron de la codificación y análisis de las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores. Las transparencias utilizadas por un grupo para hacer la presentación sobre un tema son, en general, el fruto de varias horas de trabajo y discusión de sus integrantes. Los grupos presentan sus trabajos como un producto terminado en el que no se aprecia el proceso que le dio lugar. Pero, ¿cómo es ese proceso? ¿Cómo tiene lugar el aprendizaje de un grupo de futuros profesores cuando, al trabajar fuera del aula, prepara la presentación que después realizará ante sus compañeros? El análisis de las transparencias de un grupo de futuros profesores ilustra de manera parcial su aprendizaje porque hay muchos aspectos del aprendizaje de un grupo que no se pueden apreciar en sus producciones. Cuando se observan las actuaciones de los futuros profesores, no podemos saber cómo se produjeron esas actuaciones, ni qué se quedó en las discusiones y negociaciones del grupo que no se expresó en su actuación. Al final del apartado anterior, caractericé esta problemática como una de las cuestiones que quedaban abiertas en este proyecto de investigación: la exploración del proceso en virtud del cual cada grupo de futuros profesores negocia significados y avanza en su proceso de aprendizaje, cuando trabaja por fuera el aula preparando sus presentaciones.

En este apartado abordo esta cuestión al presentar los resultados del análisis de las grabaciones de audio de las reuniones de trabajo por fuera del aula de uno de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura. Se trató del grupo que trabajó sobre la función cuadrática. Me fijé dos propósitos con este estudio: (a) describir la evolución del conocimiento didáctico de este grupo de futuros profesores y (b) utilizar esa información para explicar algunos de los resultados obtenidos en los otros análisis.

Fundamenté conceptualmente el estudio en la teoría social del aprendizaje de Wenger (1998). Seleccioné, interpreté y adapté los aspectos más relevantes de esta teoría a las características y los propósitos del estudio. Basándome en esta adaptación de la teoría, diseñé unos instrumentos que me permitieron codificar, analizar e interpretar las transcripciones de las grabaciones de audio de las reuniones del grupo. A continuación, describo los procesos de codificación y análisis que diseñé para abordar el problema. El cuerpo del apartado lo ocupa la caracterización y fundamentación empírica de las 32 cuestiones que constituyen los resultados. Al final del apartado, me baso en estos resultados para caracterizar el grupo función cuadrática como comunidad de práctica y reflexionar sobre algunas de las implicaciones del estudio.

11.1. De una Teoría a unos Instrumentos de Codificación, Análisis e Interpretación

Recordemos que el aprendizaje en la práctica implica el compromiso mutuo en una empresa conjunta con un repertorio compartido. Esto es, el aprendizaje emerge en la medida en que (a) evolucionan diferentes formas de compromiso mutuo; (b) se comprende y se refina la empresa; y (c) se desarrolla el repertorio compartido, el estilo y el discurso.

La evolución de diferentes formas de compromiso mutuo se caracteriza por cómo influye el entorno (qué ayuda y qué molesta), cómo se definen las identidades, cómo se desarrollan las relaciones, y cómo se genera, negocia y materializa el significado. El proceso de comprender y afinar la empresa se caracteriza por el papel de las condiciones externas, las características del discurso (qué se discute, se muestra y se valora) y la definición de la empresa y las responsabilidades. Y el desarrollo del repertorio compartido se caracteriza por los estilos de expresión, las rutinas de trabajo y los recursos de negociación de significado. Profundizaré en la caracterización de cada uno de estos procesos más adelante, cuando aborde el análisis de la información que corresponde a cada una de estas dimensiones.

La teoría social del aprendizaje de Wenger no tiene un carácter operacional. Mi problema era entonces conceptual y metodológico: ¿cómo codificar y analizar la información para caracterizar el fenómeno en términos de la teoría? Es decir, ¿cómo establecer categorías y valores de codificación y análisis que, fundamentados en la teoría, me permitieran seleccionar y estructurar la información relevante e identificar las cuestiones más significativas con respecto al aprendizaje del grupo de futuros profesores? En la primera fase del proceso, identifiqué y estructuré unas categorías de análisis. Estas categorías serían el enlace entre las nociones centrales de la teoría y los códigos que conformarían el instrumento para explorar, seleccionar y articular la información. Las categorías de análisis surgieron de una lectura detallada e intencionada de la teoría. Habiendo revisado, en una primera instancia, las transcripciones de las grabaciones de audio de las reuniones del grupo de futuros profesores, interpreté y seleccioné nociones y aspectos de la teoría en términos de esa información. De esta manera, fui produciendo diversas versiones de la lista de categorías hasta que consideré que dicha lista era coherente y tenía significado con respecto a la información.

Organicé estas categorías atendiendo a las tres dimensiones que caracterizan el aprendizaje en una comunidad de práctica: compromiso mutuo, empresa conjunta y repertorio compartido. Teniendo en cuenta el significado de cada una de estas categorías dentro de la teoría, identifiqué una serie de preguntas que las caracterizaba y que se adaptaban al fenómeno que quería estudiar y a la información que tenía disponible. Por ejemplo, para la categoría significado de la dimensión compromiso mutuo, formulé las siguientes preguntas: (a) ¿Cómo y qué significados se descubren? (b) ¿Qué dificultades de significado aparecen? (c) ¿Qué eventos de materialización suceden? (d) ¿Qué propuestas de significado se hacen y cómo se hacen? y (e) ¿Qué propuestas de significado se adoptan y cómo se adoptan?

Mi fuente de información fueron las grabaciones de una parte de las sesiones de trabajo del grupo. Las sesiones grabadas se distribuyeron a lo largo del periodo en el que el grupo trabajó el análisis didáctico e incluyeron las sesiones de preparación del documento previo y de preparación del documento y la presentación

final. Estas grabaciones de audio fueron transcritas. Desde la perspectiva metodológica, mi problema consistía en diseñar y llevar a la práctica unos instrumentos de codificación y análisis de estas transcripciones que me permitieran abordar las preguntas de investigación. Estos instrumentos debían estar basados en el análisis conceptual que acabo de presentar.

Desarrollé entonces un primer sistema de códigos partiendo de las preguntas que enumeré en la sección anterior. Este sistema de códigos evolucionó en la medida en la que fui codificando las transcripciones y percibía la necesidad de incluir nuevos códigos. La lista final contiene 94 códigos. Por ejemplo, establecí códigos para identificar aquellos episodios en los que se hacía referencia a los comentarios a las transparencias, se definían y conformaban responsabilidades, o se establecían rutinas de trabajo dentro del grupo.

El proceso de codificación de las transcripciones consistió en la identificación, registro y caracterización de episodios. Un episodio es una porción de la transcripción, de longitud variable, que contiene afirmaciones de uno de los participantes o intercambio de afirmaciones entre varios miembros del grupo. Su coherencia se centra en el hecho de que gira en torno a una idea o un mensaje. Como resultado de la codificación, produje una base de datos en la que cada registro corresponde a un episodio y a un código asignado a ese episodio. Cada registro incluye apuntes con mi interpretación de las interacciones y la identificación de sus aspectos más relevantes. El siguiente es un ejemplo de un episodio que codifiqué con los códigos correspondientes a relaciones personales, líder y participación complementaria. En este episodio, uno de los participantes cuya actuación representa una participación complementaria, se refiere a la actitud autoritaria del líder. El comentario que asigné a este episodio fue el siguiente: “De nuevo hay tensión: critican explícitamente al líder. Lo sabe todo porque da clase” [100,73773,74154]¹⁵⁸:

P1: Es que es especialista ahora. Como él da clase, pues ya se cree que todo el monte es orégano.

Al final del proceso de codificación, resultaron 7.412 registros en la base de datos. Estos registros corresponden a 2.606 episodios, dado que un mismo episodio puede ser registrado con más de un código y cada pareja de episodio y código corresponde a un registro de la base de datos.

Era evidente que se necesitaba resumir la información que surgió de la codificación de la información. En este proceso de síntesis tuve en cuenta la teoría (a través de las categorías y las preguntas) y la información adicional que registré durante la codificación (comentarios y notas). Diseñé varios programas de ordenador que me permitieron producir un resumen del contenido de la transcripción de cada cinta de grabación.

El análisis de los resúmenes de la codificación de cada cinta me permitió identificar una serie de cuestiones que parecían relevantes para el estudio. Por

¹⁵⁸ En lo que sigue, identifico un episodio dentro las transcripciones con una tripla [a,b,c], donde a es el número que identifica la cinta en la que está grabada esa parte de la sesión y b y c identifican (en número de caracteres) el comienzo y el final del episodio dentro del texto de la transcripción codificada. Así, el episodio [066,27077,27458] se encuentra entre los caracteres 27077 y 27458 de la transcripción codificada de la cinta 66.

ejemplo, de este análisis resultó evidente que hubo un líder en el grupo y que su actuación determinó varios aspectos del proceso de aprendizaje que tuvo lugar. Por lo tanto, la caracterización del líder y de su relación con los demás miembros del grupo fue una de las cuestiones que valía la pena registrar y analizar. Este listado de cuestiones concretó y resumió, en una serie de frases (papel del líder, papel de los comentarios a las transparencias, importancia de las conexiones entre los sistemas de representación, etc.), los 950.5 minutos de grabación de los que partí como información inicial para el estudio. Identificaré y caracterizaré estas cuestiones en las siguientes secciones.

Este listado fue el producto final de un proceso de *síntesis*. Recogí y organicé la información correspondiente a este listado de cuestiones en una nueva base de datos, que se convirtió entonces en el punto de inicio de un proceso de *análisis*. En este análisis de la codificación, me impuse, para cada una de las cuestiones identificadas en el proceso de síntesis, dos propósitos: (a) describir cada cuestión, identificando sus principales características e (b) identificar los episodios más representativos de estas características con el propósito de fundamentar con evidencia la caracterización de la cuestión.

Una vez que realicé dicho procedimiento para cada cuestión de un aspecto determinado (e.g., “sistemas de representación” en la categoría repertorio compartido), produje un resumen de la caracterización de las cuestiones pertenecientes a ese aspecto, junto con los principales resultados obtenidos. En cada una de las secciones que siguen, organizo los resultados correspondientes a cada una de las tres dimensiones de análisis.

11.2. Compromiso Mutuo

Organicé el análisis de las transcripciones con respecto al compromiso mutuo de acuerdo con cuatro dimensiones: entorno, identidades, relaciones y significado. El análisis se centra principalmente en la caracterización de los procesos de negociación de significado del grupo y de los factores que influyeron en ese proceso.

Procesos de Negociación de Significado, Entorno, Identidades y Relaciones

La experiencia docente, la asignatura de prácticas y los libros de texto son los tres elementos del entorno que más influyeron en los procesos de negociación de significado dentro del grupo. El conocimiento intuitivo que los participantes habían desarrollado en sus experiencias como profesores les permitió hacer múltiples propuestas para el análisis cognitivo. La experiencia de la asignatura de prácticas jugó otro papel: aportó información que permitió fundamentar y validar argumentos dentro de las discusiones del grupo. Los libros de texto aportaron información para la estructura conceptual y fueron una fuente de información que permitió validar afirmaciones y resolver dudas. También jugaron un papel central en el diseño de la unidad didáctica. Las actividades que el grupo propuso para la unidad didáctica surgieron de la selección y transformación de ejercicios que encontraron en ellos.

Las transcripciones pusieron en evidencia la existencia de un líder. Él fue quien planificó, dirigió y verificó el trabajo del grupo. También fue quien aportó la mayoría de las ideas. Paralelamente al líder, algunos miembros asumieron un

papel complementario: esperaban que el líder les indicara lo que tenían que hacer, para después presentarle reportes de su trabajo y esperar su aprobación.

Aunque el grupo mantuvo en general un ambiente de trabajo relajado, hubo momentos de tensión a lo largo de las sesiones. Estos momentos tuvieron que ver, por un lado, con la sesión de evaluación en la que el líder estuvo ausente y en la que se generaron múltiples conflictos de significado entre dos de los miembros del grupo. Por el otro lado, hubo momentos de gran tensión entre el líder y uno de los participantes, diferencias que se llevaron al nivel personal, pero que más tarde se subsanaron.

En las sesiones se percibió un esfuerzo permanente de búsqueda de significado. La confusión fue un elemento de este proceso de búsqueda y se expresó en situaciones en las que se cambió de opinión sobre un tema o se asumieron posiciones tentativas. Paralelamente a la confusión, aparecieron situaciones de conflicto de significado en las que dos o más miembros asumieron posiciones incompatibles con respecto a una cuestión. Para resolver las confusiones y los conflictos de significado el grupo utilizó diferentes mecanismos. En la mayoría de los casos, estos procesos de resolución dieron lugar a nuevas propuestas de significado que terminaron siendo adoptadas por el grupo. Algunas de las propuestas fueron el producto de procesos de descubrimiento de significado, en los que apareció una nueva idea que contribuyó claramente a la realización de la tarea del momento. Al final, muchos de estos significados se materializaron paulatinamente dentro del grupo.

A continuación, presento un ejemplo resumido de uno de los resultados anteriores: los episodios de confusión de significado.

Confusión de Significado

Llamo episodios de confusión de significado a aquellos episodios en los que, con respecto a una cuestión particular, uno o más miembros del grupo: (a) no están seguros sobre su significado, (b) cambian de opinión sobre su significado a lo largo de las sesiones, o (c) asumen posiciones no válidas con respecto a dicho significado.

En esta sección centro mi atención en una cuestión que se ubica principalmente en las dos primeras categorías. Se trata de la confusión entre las nociones de ecuación y función. La confusión apareció en la revisión histórica que ellos realizaron sobre su tema. Al comienzo de ese trabajo, el grupo ya previó que habría confusiones con el significado de las dos nociones. Esperaban utilizar los resultados de la indagación histórica para relacionarlas [043,1012,1554]. Al avanzar en dicha indagación, el grupo produjo una primera definición del problema: consiste en el problema de cómo pasar de la ecuación a la función [043,5910,6095]. Uno de los miembros del grupo creyó que tenía clara la diferencia entre ecuación y función. No obstante, esta claridad desapareció cuando trataron de establecer las diferencias entre las dos nociones. Se pasó por afirmar que la función era la generalización de la ecuación y se terminó en una afirmación enfática: cualquier ecuación de segundo grado era una función [043,8000,10438]:

P3: No, pero si estoy hablando ya de nosotros. ¿Por qué todo este lío? Porque pensamos de una manera. Ecuación y función. Es decir: función, ¿cuándo se usa el término función? Cuando hay que dar...

P2: Una relación entre unas variables, unas magnitudes...

P3: Una relación entre una variable y otra; entre una magnitud y otra. Pero la ecuación estaba ahí desde el principio. Y ecuación de segundo grado, simplemente es variar una cosa con respecto de otra; con la ecuación de segundo grado. Eso es una función de segundo grado. Entonces, vamos a hablar de ecuaciones de segundo grado, y luego les decimos...

...

PX: Es que para mí, la generalización de una ecuación de segundo grado, ya es una función.

P3: Ya es una función; también puede ser.

PX: No, puede ser no; es que es.

P3: Bueno, puede ser, no.

PX: Y es que, cualquier ecuación de segundo grado es una función.

No obstante, el grupo pensó que el problema no era grave porque ellos consideraban que históricamente las dos nociones habían sido la misma [043,11147,11514]. En un momento dado de la discusión, el grupo pareció llegar a un acuerdo sobre significados parciales de los términos [043,11988,12518]:

P4: (). Función de segundo grado, y a mí lo que se me viene a la mente es una parábola. Pero si estoy viendo una ecuación de segundo grado, a mí lo que se me viene es la raíz.

PX: Hallarle los ceros, ¿no?

PX: Claro.

PX: Hasta ahí estamos de acuerdo.

PX: Sí, estamos.

Entonces, los miembros del grupo creyeron tener claridad sobre la diferencia entre las nociones. El problema consistió en que no lograban expresar esa diferencia. No obstante, aparecieron conflictos con afirmaciones que habían hecho anteriormente, porque “una ecuación no es lo mismo que una función” [043,14683,17431]. Esta confusión y las dificultades que conllevaron generaron entusiasmo por la indagación histórica, porque pensaron que podía llegar a resolver algunos aspectos de la cuestión [043,48717,49586]. En este punto se terminaron las referencias a la relación entre ecuación y función desde la perspectiva histórica. No obstante, esta dualidad reapareció en las discusiones sobre errores y dificultades. La confusión se concretó en ese momento como dificultad de los escolares [066,20856,21436]. No obstante, al tratar de expresar la dificultad, ellos volvieron a caer en la confusión [100,6435,7622]:

P1: Señores. Yo aquí he hecho cinco grandes dificultades, aquí a cara de perro. Primera dificultad: identificación de una ecuación de segundo grado. Posibles errores.

P2: ¿De una ecuación?

P1: De una ecuación () ecuación; de la expresión de una ecuación de segundo grado. Bueno, o de una función, si quieres. Tomar el coeficiente líder 1; no reconocer la ecuación de segundo grado en la forma multiplicativa: identificar las raíces.

Para terminar, en la sesión de preparación del borrador de la unidad didáctica, la confusión reapareció, esta vez en forma de broma hacia la actitud esencialmente simbólica de uno de los miembros del grupo [101,92686,93099]:

P2: () ¿Y qué vas a decir de funciones de segundo grado? Son aquellas que son como las ecuaciones, pero sin el cero; y donde está el cero, pones $f(x)$.

P4: () (Risas).

P1: () No, hombre.

11.3. Empresa Conjunta

El proceso de comprender y afinar la empresa conjunta (afinar el compromiso, conformar responsabilidades, definir la empresa y sus interpretaciones) es el segundo elemento que caracteriza el aprendizaje dentro de una comunidad de práctica. En esta sección, describo y caracterizo los principales procesos en virtud de los cuales el grupo constituyó y desarrolló la empresa conjunta. De acuerdo con el marco conceptual del estudio, se espera que la empresa conjunta de una práctica se negocie colectiva y permanentemente y cree relaciones de responsabilidad mutua entre los participantes. La empresa es la respuesta y la adaptación de los participantes, con sus restricciones y recursos, a las condiciones externas, pero no está nunca completamente determinada por mandato externo. En el caso de la comunidad de práctica objeto de este estudio, la constitución y desarrollo de la empresa conjunta se basó en dos procesos relacionados entre sí: (a) la definición de la empresa y sus interpretaciones, teniendo en cuenta las condiciones externas que la afectaron y (b) la conformación de responsabilidades y el desarrollo del compromiso, con especial atención a la actitud permanente hacia la eficiencia del trabajo que se realizó.

La definición de la empresa estuvo condicionada por condiciones intrínsecas a las tareas que el grupo tenía que realizar (interpretación de la tarea y dificultad y amplitud del tema a tratar) y por condiciones externas a la comunidad de práctica (comentarios a las transparencias y comentarios de los formadores). A continuación, presento un ejemplo resumido de uno de los resultados anteriores: el papel de los comentarios a las transparencias.

Comentarios a las Transparencias

En el trabajo hecho por el grupo función cuadrática encontré evidencia que sugiere que los comentarios a las transparencias jugaron un papel importante en la construcción de significados por parte del grupo. Este papel se expresó en el hecho de que los comentarios sirvieron como referencia para validar las propuestas que el grupo había hecho. En varias ocasiones, el grupo aceptó ciegamente estos comentarios, los asumió como autoridad para resolver confusiones y conflictos

y reconoció explícitamente su papel. Éste fue el caso de la construcción del significado de la noción de fenomenología. El grupo leyó varias veces los comentarios hasta que uno de sus miembros comprendió la idea del análisis por medio de subestructuras de la estructura matemática de la función cuadrática. Este participante utilizó los comentarios como fuente de autoridad para convencer a los demás de las ideas necesarias para realizar el análisis fenomenológico y elaboró estas ideas paulatinamente para organizar el trabajo en esta área. El papel de los comentarios a las transparencias fue tardío. Solamente en contadas ocasiones el grupo tuvo en cuenta, cuando se encontraba preparando una presentación, los comentarios que se les había hecho a la presentación anterior. Esto era normal, puesto que los temas de dos presentaciones sucesivas, aunque relacionados, eran diferentes. No obstante, los comentarios a las transparencias volvieron a aparecer cuando estaban preparando el trabajo sobre la unidad didáctica. El grupo retomó esta información y la utilizó para cambiar, mejorar y profundizar las propuestas que habían hecho durante el curso.

En la primera reunión con los formadores para la preparación de la unidad didáctica, el grupo reconoció explícitamente el papel que habían jugado los comentarios a las transparencias [096,15912,16553]:

P5: El recorrido histórico lo vamos a dejar para lo último (.). A ver. En fenomenología, siguiendo también con las recomendaciones que tenemos, hemos..., la primera estructuración que hemos hecho hemos considerado fenómenos matemáticos y fenómenos no matemáticos.

El grupo reconoció la importancia y la utilidad de organizar los fenómenos basándose en subestructuras de la estructura de la función de segundo grado gracias a la interpretación y la discusión que tuvieron sobre los comentarios a las transparencias. En el siguiente episodio, P2 reconoce explícitamente que los comentarios le han “dado una pista” para solucionar la tarea [098,32775,34767]:

P1: Volvemos a lo mismo. Dice: “la clasificación de los fenómenos no matemáticos en físicos y no físicos es un poco artificial, desde la perspectiva de la estructura matemática en cuestión. Todos esos fenómenos son, sencillamente, fenómenos no matemáticos”, que es lo que yo te dije a ti. “Dentro de esa gran familia de fenómenos no matemáticos, hacéis una clasificación por áreas de conocimiento: física, química, biología, económica y (.). Pero este tipo de clasificación no permite establecer una relación entre las características estructurales de los fenómenos...”

...

P1: Si ahora lo que se trata es de hacerlo.

P2: Ya, pero (.) me ha dado una pista.

El papel de los comentarios a las transparencias como autoridad que permitió resolver confusiones y conflictos de significado se aprecia en el siguiente episodio. El grupo no comprendió con facilidad los comentarios a las transparencias. En muchas ocasiones tuvieron que hacer un esfuerzo de interpretación que contribuyó a la construcción social de significados. Esto se aprecia en la primera sesión de

preparación del borrador de la unidad didáctica, cuando buscan resolver algunos problemas relacionados con el análisis fenomenológico [098,25257,27564]:

P2: Vamos a ver ().

P3: Léelo otra vez; léelo otra vez.

P2: Eso sí. Pero si ahora te leo. “En clase ya se hizo el comentario de que el término modelización de fenómenos es demasiado general y no aporta, necesariamente, al análisis fenomenológico. El problema del análisis fenomenológico es, precisamente, el identificar la familia del fenómeno y clasificarlo de acuerdo a sus estructuras matemáticas que lo organizan. Por ejemplo, la subestructura matemática que organiza los fenómenos de áreas son aquellas funciones de segundo grado de la forma $f(x)=ax^2$ ”. Y ahí hay un montón de... O sea, de ahí, a partir de ese tipo de función de segundo grado, pues salen un montón de fenómenos. Pueden ser fenómenos matemáticos y no matemáticos. Da igual. Se meten todos juntos dentro de que salen de la función $f(x)=ax^2$. Luego te dice: “pero esta subestructura no permite organizar los problemas relacionados con el espacio y el tiempo de los fenómenos de un movimiento...” O sea, un movimiento uniformemente acelerado; porque las funciones de segundo grado que modelizan este tipo de fenómenos son éstas. Y a partir de estas funciones, se sacan: esto, esto, esto y esto. Y pueden ser matemáticos o no matemáticos. Pero de este tipo de función se sacan todos estos fenómenos.

P3: ().

P2: () que hay que buscar la familia... O sea, las subestructuras matemáticas de la función y, a partir de ahí, sacar los fenómenos, ya sean de un tipo o de otro. O sea, que la organización hay que hacerla partiendo de la estructura conceptual.

P3: ().

P2: Y eso es lo que estoy intentando (), pero no es nada fácil.

11.4. Repertorio Compartido

Centro el análisis de las transcripciones, desde la perspectiva del desarrollo del repertorio compartido, en dos aspectos: el desarrollo y establecimiento de rutinas de trabajo y la evolución en la construcción de significado de las tres nociones que conforman el análisis de contenido: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. Para cada una de estas nociones, exploro dos aspectos del proceso de construcción de significado: las principales dificultades de significado y sus procesos de resolución y materialización, y la puesta en práctica de estos significados en los otros análisis del análisis didáctico. A continuación presento un breve resumen de los resultados obtenidos.

Rutinas de trabajo. El grupo, con la dirección del líder, desarrolló y estableció rutinas de trabajo para las actividades en las sesiones, la actividad individual por fuera de las sesiones y las actividades relacionadas con tareas específicas durante

las sesiones. Estas rutinas fueron de dos tipos: trabajo individual con puesta en común posterior y trabajo de exploración con lluvia de ideas.

Estructura conceptual. La instrucción insistió sistemáticamente en el tema de las conexiones dentro de la estructura conceptual. En las primeras producciones del grupo aparecieron algunas relaciones entre sistemas de representación. No obstante, el grupo se hizo consciente de la importancia de este aspecto de la estructura conceptual cuando estaban preparando el borrador de la unidad didáctica. En ese momento, el grupo logró diferenciar con claridad la estructura conceptual de los sistemas de representación.

Desde la perspectiva de su puesta en práctica, la estructura conceptual jugó un papel tanto en el análisis cognitivo, como en el análisis de instrucción. En el primero, sirvió de referencia para verificar, ubicar y organizar errores y dificultades. En el segundo, sirvió de guía para organizar la secuencia de nociones que se abordaron en la unidad didáctica.

Sistemas de representación. Los sistemas de representación fue el organizador del currículo predominante en las producciones del grupo. El trabajo se centró, con el propósito de concretar el tema, en los sistemas de representación simbólico y gráfico. Las transcripciones evidencian una evolución en la construcción del significado de las conexiones entre los sistemas de representación. Este tema comenzó a ser importante en el análisis cognitivo, cuando el grupo reconoció que podía estar en la base de una de las dificultades de los escolares. Aunque no hay evidencia de que el grupo haya tenido dificultades con la noción de sistema de representación, sí aparecen dos dificultades relacionadas con la noción. Por un lado, y desde la primera sesión, el grupo no logró diferenciar con claridad las nociones de ecuación y función cuadrática (miradas desde una perspectiva exclusivamente simbólica). Por el otro, cuando entraron en el detalle de las conexiones entre los sistemas de representación simbólico y gráfico, el grupo no logró manejar con fluidez los aspectos técnicos del significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática. La primera dificultad se resolvió paulatinamente a lo largo de las sesiones. Para la segunda, el grupo sólo logró una solución parcial.

Los sistemas de representación se pusieron en práctica en el análisis fenomenológico, el análisis cognitivo y el diseño curricular. En el análisis fenomenológico dieron lugar a categorías con las que se organizaron los fenómenos. En el análisis cognitivo, la noción de conexión les permitió identificar una dificultad de los escolares. Y, en el diseño de la unidad didáctica, los sistemas de representación fueron un tema central de sus objetivos y sus contenidos. Adicionalmente, el grupo se basó en los sistemas de representación para desarrollar un procedimiento que les permitió seleccionar y organizar los problemas de los libros de texto. El grupo utilizó esta selección y organización para diseñar las actividades que conformaron la unidad didáctica.

Análisis fenomenológico. En un comienzo, el grupo se enfrentó a dificultades relacionadas con el significado de las nociones de fenómeno y modelización. Estas dificultades estaban en el origen de una primera organización de los fenómenos en cuatro categorías: fenómenos matemáticos, fenómenos no

matemáticos, áreas de figuras geométricas y modelización. Esta organización sólo cambió con motivo de la revisión de los comentarios a las transparencias durante la sesión de preparación del borrador de la unidad didáctica. En ese momento, el grupo descubrió, negoció y materializó el procedimiento de análisis por subestructuras.

No obstante, en el diseño curricular, la relación entre el análisis fenomenológico y el diseño de actividades fue débil e intuitiva. Sólo hay referencias a “ejercicios verbales” y situaciones cotidianas como medios para motivar a los escolares e introducir algunos temas y nociones.

A continuación, presento un ejemplo resumido de uno de los resultados anteriores: la discusión sobre el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas de la función cuadrática.

Significado Gráfico de los Parámetros

La discusión sobre el significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas apareció en la sesión de preparación de la unidad didáctica. Hasta ese momento, el significado de las conexiones entre los sistemas de representación simbólico y gráfico había sido general. La especificidad de estas conexiones (con respecto a los parámetros) surgió con motivo de la necesidad de diseñar en detalle las actividades que se propondrían a los escolares en las sesiones que compondrían la unidad didáctica. Cuando el grupo abordó este problema, se generaron confusiones y se hicieron explícitas algunas de las dificultades que ellos tenían con el manejo matemático de su tema. Estas dificultades se hicieron evidentes en el manejo del significado gráfico de los parámetros de las formas simbólicas.

Las dudas y confusiones en este tema se aprecian en el siguiente episodio en el que se preguntan sobre el papel de los parámetros en la ubicación de los cortes de la función con el eje x [102,121228,122206]:

P4: O sea, los puntos de corte con el eje de las x , ahí influyen los otros coeficientes de la función. ¿No?

P2: Sí, pero.

P3: Espérate.

P4: Vamos a ver.

P3: ¿Qué es lo que pretendéis?

P4: Bartolo dice... Bartolo dice que, cuando tú hayas visto las características generales..., como, por ejemplo, acabas de ver los intervalos de crecimiento y decrecimiento..., esos dependen del coeficiente líder, pues que ahí se comente. Eso es lo que tú estás diciendo.

P4: Entonces, yo digo que lo mismo que ahí se comenta lo del coeficiente líder, cuando ves los puntos de corte, tendrás que comentar cómo influyen todos los demás coeficientes. Porque es que ahí influye. Porque en lo otro, sí que es verdad que influyen todos. En los puntos de corte influyen los tres. ¿O no?

Cuando reflexionaron sobre el papel del parámetro a en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$, llegaron a pensar que todas las características de la gráfica de

la función dependían de este parámetro [100,89677,90153]. Pero, como es natural, las mayores dificultades se encontraron con el significado del parámetro b . Estas dificultades aparecieron al comienzo de la sesión, cuando uno de los miembros preguntó explícitamente sobre el significado gráfico de este parámetro [105,4318,4424]. En la discusión que tuvo lugar sobre este tema, llegaron a pensar que este parámetro, por sí solo, no influía en nada [105,14822,15530] y recurrieron a la reflexión algebraica para centrar el significado gráfico del parámetro en su influencia en la ubicación del corte de la función con el eje x [105,95236,96157]. Finalmente, llegaron a establecer que este parámetro influía en la traslación horizontal del vértice, pero no se dieron cuenta que esta influencia era lineal, mientras que el efecto sobre la posición vertical del vértice era de tipo cuadrático [105,98785,99239]:

P2: Cuando el signo del coeficiente de la x es negativo, la a se traslada..., siempre está a la derecha, me parece.

P3: () sería $x - \dots$. Vamos a ver; si es negativo, está a la derecha. El positivo... (Hablan varios a la vez).

P2: El positivo a la izquierda. ¡Ea! Pues ya. Pues ya lo tienes. () el b . (Hablan varios a la vez).

P4: Si es negativo, está a la derecha.

Al final, algunos de los miembros no se enteraron de los detalles de la discusión y, por consiguiente, la confusión no se aclaró dentro del grupo, aunque la unidad didáctica contenía actividades que abordaban el problema [103,111313,111426]:

P2: $x^2 - 1$.

P3: Tú entiendes, ¿no?

P1: Yo no entiendo. ().

11.5. Desarrollo del Conocimiento Didáctico: Significados Técnico y Práctico

El grupo no pareció ser consciente de que las nociones que ponían en práctica cuando realizaban las tareas tenían un significado teórico. La preocupación del grupo se focalizó en su interpretación del significado técnico de las nociones: la utilización de las nociones para analizar su tema y realizar la tarea del momento. El proceso de negociación de significado que tuvo lugar cuando el grupo realizó las tareas contribuyó a la construcción de los significados tanto técnicos como prácticos de las nociones. El conocimiento didáctico se construyó en un juego permanente (y en la mayoría de los casos inconsciente) entre el significado técnico y práctico de las nociones implicadas.

El análisis de los resultados indica que hubo algunos aspectos de la comunidad de práctica estudiada que parecieron influir sistemáticamente en su proceso de aprendizaje. Estos aspectos son los siguientes: (a) la experiencia docente de los participantes, (b) la experiencia en la asignatura de prácticas, (c) los comentarios a las transparencias, (d) la existencia y el papel del líder y (e) el compromiso de los participantes.

11.6. Comunidad de Práctica: una Herramienta para Ver, Pensar y Actuar

Al basarme en la teoría social del aprendizaje de Wenger (1998) para fundamentar conceptual y metodológicamente el estudio, tomé una decisión que no estaba exenta de riesgos, puesto que no era claro “en qué medida se puede aplicar esta aproximación al aprendizaje en las escuelas y las universidades y qué implicaciones tiene para la investigación” (Krainer, 2003, p. 96). En esta sección, abordaré estas cuestiones. Mostraré cómo, para el caso concreto de este estudio, la noción de comunidad de práctica se convirtió en una herramienta para ver, pensar y actuar¹⁵⁹.

Una Herramienta para “ver”

Con este estudio, he podido caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de un grupo de futuros profesores a partir de resultados que no es posible obtener en los otros estudios de este proyecto. Estos resultados muestran que, detrás de las presentaciones que los grupos de futuros profesores que participan en la asignatura hacen en clase y de los trabajos que entregan a los formadores, hay una complejidad propia del desarrollo de una comunidad de práctica. Al analizar sistemática y detalladamente esta complejidad he identificado y caracterizado múltiples aspectos del aprendizaje social de un grupo de futuros profesores. Considero que estas caracterizaciones, con el nivel de detalle que las he presentado, son interesantes e importantes por sí mismas. Ellas iluminan dimensiones de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que en muchas ocasiones permanecen opacas en la literatura de investigación. También permiten explicar algunos de los resultados de los otros estudios que forman parte de este proyecto. Por ejemplo, permiten comprender los procesos de negociación de significado que se materializaron en las transparencias y el trabajo final del grupo. Asimismo desvelan las diferentes posiciones de los participantes, sus dudas y confusiones, los conflictos que tuvieron que afrontar y resolver y los esquemas y técnicas que desarrollaron para resolver las tareas que les fueron asignadas. En definitiva, el análisis en profundidad de las transcripciones ilumina el progreso del grupo en su compromiso por construir conjuntamente los significados que ellos consideraron necesarios para satisfacer, por un lado, los requisitos de la asignatura y, por el otro, su interés por convertirse en profesores de matemáticas. De esta manera, explico y fundamento con evidencia algunos de los aspectos más importantes del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que establecí en los apartados anteriores. Analizaré en detalle la relación entre todos los estudios en el siguiente apartado.

Abordé este estudio desde una teoría social del aprendizaje en la que la idea de comunidad de práctica es central. Esta teoría enfatiza aspectos del aprendizaje que las teorías del aprendizaje centradas en el individuo ignoran. El estudio muestra que estos aspectos son importantes a la hora de caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores. No solamente se determina *qué* aprende el grupo, sino *cómo* aprende y *de qué* depende ese aprendizaje. Es, por lo tanto, una visión amplia del noción de aprendizaje en la que el contexto juega un papel central y en la que se destaca el carácter interdependiente del aprendizaje. El

¹⁵⁹ “Un discurso teórico no es una abstracción. Es un conjunto de herramientas conceptuales que nos permite ver, pensar y actuar de maneras innovadoras” (Wenger, 2004, p. 2).

grupo aprende porque sus miembros se comprometen mutuamente con un propósito común. Para ello, negocian significados que se materializan en un repertorio compartido con el que resuelven las tareas que tienen asignadas.

Desde la perspectiva conceptual, di un significado específico a las nociones que articulan el aprendizaje en comunidades de práctica dentro del contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y pude diseñar instrumentos de codificación y análisis de esa complejidad. Este tipo de procedimiento fue dispendioso pero permitió abordar sistemáticamente un cuerpo muy grande de datos y obtener resultados cuya validez se fundamenta en el proceso mismo.

Una Herramienta para “Pensar”

Los resultados de este estudio muestran que el grupo función cuadrática constituyó y consolidó una comunidad de práctica: en un proceso permanente de búsqueda y negociación de significados, el grupo estableció un compromiso mutuo en la definición de una empresa conjunta para la que produjo un repertorio compartido. El análisis de las transcripciones pone en evidencia que, no solamente los participantes aprendieron y progresaron como individuos, sino que hubo *aprendizaje interdependiente*: el grupo, como entidad, progresó en su capacidad de abordar las tareas a mano y cada participante se preocupó por el aprendizaje de los demás. Éste fue un estudio de caso. Por lo tanto, no se puede concluir que los demás grupos de futuros profesores de la asignatura establecieran y consolidaran comunidades de práctica. Por ejemplo, no necesariamente en todos los grupos emergió un líder. Por otro lado, el análisis de la interacción en clase y de los documentos finales sugieren que algunos grupos se organizaron como equipos: dividían las tareas en sub-tareas, para las que cada miembro asumía una responsabilidad. En seguida, construían las presentaciones como la suma de estas partes. Cuando un grupo se organiza como un equipo, hay aprendizaje (Anderson y Specjk, 1998). Sin embargo, la negociación de significado y el aprendizaje interdependiente no son características propias de los procesos de aprendizaje de un equipo (Krainer, 2003, p. 95). Lo que fue importante en el caso del grupo función cuadrática, objeto de estudio, fue el compromiso mutuo de los miembros en la búsqueda y definición de una empresa conjunta que involucró la preocupación por el aprendizaje de todos los miembros del grupo.

El trabajo en grupo es *uno* de los contextos en los que el aprendizaje de los futuros profesores tiene lugar dentro de la asignatura. Por ejemplo, ellos también aprenden, individual y colectivamente, durante las clases, cuando realizan trabajos individuales, en otras asignaturas y al dar clases particulares. No obstante, dado que el esquema de evaluación de la asignatura da mucha importancia a las presentaciones y a los documentos producidos por los grupos, y que esas presentaciones y documentos son el resultado del trabajo en grupo, resulta claro que nosotros valoramos especialmente los procesos de aprendizaje que tienen lugar cuando los grupos trabajan por fuera del aula. Como la enseñanza tiene lugar esencialmente en el aula, uno tiende a pensar que la mayor parte del aprendizaje se realiza en ese contexto. Este estudio muestra que éste no es necesariamente el caso.

Aunque en este estudio he utilizado la noción de comunidad de práctica como una herramienta de investigación, sus resultados ponen en evidencia los posibles

beneficios de abordar el diseño y el desarrollo de la asignatura desde esta perspectiva. ¿Es esto posible? ¿Qué implicaciones tendría?

Una Herramienta para “Actuar”

El aprendizaje de los profesores no termina en la universidad. Ellos continúan aprendiendo en su práctica docente en la institución escolar. Si nosotros, como formadores, valoramos el aprendizaje que tiene lugar cuando un grupo trabaja como una comunidad de práctica, ¿cómo podemos promover y cultivar ese tipo de escenario? Para responder esta pregunta, los formadores de profesores debemos preocuparnos no solamente por lo que esperamos que los futuros profesores aprenden y son capaces de hacer, sino también por cómo ellos aprenden y qué tipo de instrucción es coherente con ese aprendizaje. Por lo tanto, debemos revisar el diseño de los planes de formación desde esta perspectiva. Este estudio sugiere algunos elementos de reflexión en este sentido. Por ejemplo, he mostrado la importancia de los comentarios escritos de los formadores y la definición de las tareas que se asignan a los futuros profesores. A continuación, sugiero otro elemento: el asesoramiento de los grupos.

El diseño de las tareas y los comentarios al trabajo de los grupos pueden promover el aprendizaje interdependiente en un grupo *si éste ya se ha constituido como una comunidad de práctica*. De otra manera, en un grupo que trabaja con el esquema de equipo, sus miembros pueden interpretar los comentarios y la definición de las tareas como dos condicionantes adicionales de las rutinas de trabajo que han establecido, sin que estos factores promuevan necesariamente la negociación de significado. Pero, si valoramos el tipo de aprendizaje que emerge de una comunidad de práctica, ¿cómo fomentamos y cultivamos este tipo de escenario? En el caso de nuestra propia experiencia, vemos que debemos cambiar nuestra actitud como formadores. Hasta el momento, cuando interactuamos con los futuros profesores (en el aula o en las reuniones de tutoría) nuestra preocupación se ha centrado en *qué* han aprendido y en ayudarlos a mejorar su trabajo (transparencias, presentaciones y documentos). Sin embargo, ahora somos conscientes de que debemos tener en cuenta los procesos de aprendizaje que dan lugar a las producciones de los grupos y debemos desarrollar estrategias que promuevan el aprendizaje interdependiente y la negociación de significado. Debemos convertirnos en “asesores” del trabajo de los grupos. Esto implica que debemos preocuparnos por sus procesos de aprendizaje. Para ello, nuestra atención no debe centrarse exclusivamente en constatar en qué medida han desarrollado un repertorio compartido y corregir sus deficiencias. También debemos atender a los factores que pueden afectar tanto el desarrollo del compromiso mutuo entre sus miembros, como la claridad y validez de su empresa conjunta. El “modelo de proyecto de Aalborg” (Hansen y Jensen, 2004) es un ejemplo de este tipo de aproximación a la formación profesional.

De la propuesta anterior emerge una nueva caracterización del formador de profesores. Si se aborda la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria desde la perspectiva de las comunidades de práctica, entonces debemos cuestionarnos acerca de nuestras competencias como formadores. Los formadores debemos desarrollar nuevas competencias y este tipo de aproximación impone nuevos requisitos a nivel institucional (Beck y Kosnik, 2001, p. 925). ¿Cuáles son

los factores que afectan la “calidad” de las comunidades de práctica que se pueden promover en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? (Llinares y Krainer, 2006, pp. 444-445) ¿Qué competencias debemos desarrollar los formadores? ¿Qué condiciones se imponen a nivel institucional? Éstas son algunas de las preguntas que debemos abordar de cara al futuro.

12. UN FENÓMENO, CUATRO PUNTOS DE VISTA

En este apartado, presento el análisis global e integrado de los resultados de los estudios empíricos realizados dentro de este proyecto de investigación. Mi propósito es dar respuesta a la cuarta pregunta que formulé en el primer apartado:

¿Qué caracteriza los procesos de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria que participan en un programa de formación inicial?

Mi intención es integrar estos resultados para caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores y proponer algunas conjeturas de explicación de ese proceso. Todos los estudios tienen el mismo propósito: explorar, describir y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores con respecto a las nociones del análisis de contenido. Por lo tanto, los estudios describen un mismo fenómeno desde perspectivas diferentes y cada uno enfatiza aspectos específicos de dicho fenómeno.

Inicio el apartado enumerando las principales características del conocimiento didáctico que, sobre los organizadores del currículo del análisis de contenido, desarrollaron los grupos de futuros profesores. Esta descripción da cuenta de la complejidad de estas nociones, complejidad que se expresa también en el juego entre el desarrollo de su significado técnico y su significado práctico. En seguida, identifiqué algunas características de la asignatura y de su contexto que influyeron y permiten explicar algunos aspectos del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Terminé el apartado con una reflexión sobre la génesis instrumental en el contexto de planes de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

12.1. Conocimiento Didáctico de los Organizadores del Currículo del Análisis de Contenido

En esta sección recojo los resultados de los cuatro estudios y los organizo desde la perspectiva del aprendizaje de los grupos de futuros profesores con respecto a las tres nociones del análisis de contenido. Hago énfasis en las dificultades que enfrentaron los grupos de futuros profesores cuando utilizaron las nociones para analizar su tema.

Visión Formal de la Estructura Conceptual

La visión formal y simbólica con la que la mayoría de los futuros profesores llegó a la asignatura los indujo a asumir una aproximación conceptual de los temas matemáticos. Ellos utilizaron, en sus primeras producciones, lo que tenían a mano para organizar la estructura conceptual: los organizadores del currículo. La

aproximación conceptual fue simplificadora y no permitió que los sistemas de representación jugaran el papel que les correspondía en la descripción y organización de la estructura conceptual. Lo simbólico se hizo equivalente a lo conceptual y los sistemas de representación gráficos se vieron como complementarios a la descripción formal de la estructura matemática. Salir de este impasse tomó tiempo. Las dificultades se superaron cuando los grupos de futuros profesores se hicieron conscientes del papel de los sistemas de representación en la articulación del mapa conceptual con el que se describe la estructura matemática y se redujo el número de criterios de organización: a menor número de criterios, mayor organización y complejidad. Finalmente, los sistemas de representación asumieron un papel protagónico en la organización de los mapas conceptuales y los grupos de futuros profesores se hicieron conscientes de las relaciones entre los elementos de esos mapas conceptuales.

Los grupos de futuros profesores tuvieron que superar dificultades para llegar a construir el significado de la noción de estructura conceptual y utilizarla eficientemente en la descripción de la estructura matemática de su tema. Como fue el caso con los demás organizadores del currículo del análisis de contenido, la definición formal (teórica) de la noción no contribuyó de manera importante a la construcción de sus significados. Estos significados tienen múltiples facetas y los grupos de futuros profesores tendieron a construirlo en la práctica en un proceso evolutivo en el que la revisión de una propuesta y su contrastación con las de los demás grupos y con los comentarios de compañeros y formadores dio lugar a nuevas propuestas más complejas y coherentes. Los grupos de futuros profesores avanzaron en la construcción del significado de este organizador del currículo en la medida que utilizaron las otras nociones del análisis de contenido (en particular, los sistemas de representación) para analizar y describir su tema.

Jerarquía en los Sistemas de Representación

Los cuatro estudios muestran que los grupos de futuros profesores establecieron una jerarquía en la utilización de los sistemas de representación para el análisis de su tema. Esta jerarquía se manifestó en la variedad, organización y puesta en práctica de esta noción en su trabajo a lo largo de la asignatura.

Los grupos de futuros profesores dieron prelación al sistema de representación simbólico, lo equipararon con lo conceptual y no lo consideraron un sistema de representación. A medida que avanzaron en sus esfuerzos por mejorar sus producciones, el significado que los grupos de futuros profesores construyeron sobre la noción de sistema de representación evolucionó. En el análisis de las producciones, identifiqué diferentes tipos o categorías de sistemas de representación. Establecí, por un lado, los sistemas de representación simbólico y gráfico, como sistemas de representación básicos. Los sistemas de representación numérico y geométrico se mencionaron explícitamente en algunas de las producciones, pero como alternativos y de menor importancia.

En el análisis de los trabajos finales, mostré que la información que se produjo para los sistemas de representación fue la más utilizada. Esta información se puso en juego especialmente en la tarea sobre el análisis cognitivo y en la definición de los objetivos de la unidad didáctica. No obstante, la puesta en práctica de los sistemas de representación fue parcial. A la hora de utilizar la noción de siste-

ma de representación en otros aspectos del análisis didáctico, la mayoría de los grupos de futuros profesores se restringieron a los sistemas de representación simbólico y gráfico y no tuvieron en cuenta los otros sistemas de representación.

Como en el caso de la noción de estructura conceptual, las primeras producciones de los grupos de futuros profesores revelan la influencia de una visión formal y simbólica de las matemáticas. Esta visión quedó parcialmente superada cuando los grupos analizaron su tema teniendo en cuenta una variedad de sistemas de representación. No obstante, el significado que se materializó en la mayoría de los grupos y que, por lo tanto, se llevó a la práctica se restringió a los dos sistemas de representación básicos: el simbólico y el gráfico.

Heterogeneidad en la Fenomenología

La fenomenología fue la noción para la que los grupos de futuros profesores manifestaron mayores dificultades. Estas dificultades se expresaron en una gran heterogeneidad en los significados parciales que los grupos desarrollaron para ella y, por consiguiente, en la multiplicidad de aproximaciones que pusieron en práctica al abordar los procedimientos del análisis fenomenológico y al utilizar sus resultados en el diseño de la unidad didáctica.

Esta heterogeneidad tiene que ver con el número de fenómenos, disciplinas y subestructuras que se pueden proponer, con la variedad en el tipo de análisis que se puede hacer y con la variedad en los criterios con los cuales se pueden organizar los fenómenos. Las dificultades, producto de esta complejidad, se manifestaron en el desarrollo parcial de su significado por parte de la mayoría de los grupos. Ningún grupo llegó a presentar en sus producciones un trabajo de análisis fenomenológico como el que pretendía la instrucción. No obstante, el análisis de las producciones y del trabajo del grupo función cuadrática mostró que todos los grupos presentaron una evolución en la construcción de este significado, aunque esta evolución no siguió patrones estables. Tanto el análisis de los trabajos finales, como el del trabajo del grupo función cuadrática mostraron que el hecho de llegar a poner en práctica procedimientos complejos para el análisis y organización de los fenómenos que corresponden a un tema matemático no implica que la información que resulta de ellos se utilice en los otros aspectos del análisis didáctico.

12.2. Complejidad de los Organizadores del Currículo del Análisis de Contenido: Significados Técnico y Práctico

El conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura evolucionó de manera paulatina, heterogénea y desfasada con respecto a la instrucción. Los grupos de futuros profesores enfrentaron dificultades cuando analizaron su tema con cada uno de los organizadores del currículo del análisis de contenido. Estas dificultades se reflejaron en sus producciones y actuaciones a través de una variedad de significados parciales que ellos pusieron en juego al llevar a la práctica cada una de las nociones. Algunos de los grupos de futuros profesores lograron superar la mayoría de las dificultades. No obstante, algunos de los propósitos de la instrucción no se satisficieron, en particular con respecto a la noción de fenomenología. Estas dificultades fueron un reflejo parcial de la complejidad del proceso de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que tuvo lugar dentro de la asignatura. Las dificultades de los gru-

pos de futuros profesores son producto, entre otras cosas, de la complejidad de estas nociones, que puse de manifiesto en la sección anterior. Por otro lado, el juego entre los significados técnico y práctico de las nociones contribuye a esta complejidad.

En esta versión de la asignatura no se enfatizó en el significado teórico de los organizadores del currículo; no obstante, se promovió la construcción de los significados técnico y práctico a través de esquemas específicos. Todos los grupos presentaron sistemáticamente el resultado del análisis de sus temas al conjunto de la clase. Esto implicó que cada grupo pudo comparar su trabajo con el de los otros grupos. Además, cada grupo debió hacer un esfuerzo de crítica del trabajo de los demás y de reflexión y análisis de las críticas recibidas. La comparación con el trabajo de los demás grupos y el reconocimiento de las deficiencias de la solución propuesta motivó a cada grupo a producir una nueva solución. Esta solución era específica al tema de cada grupo, pero tuvo en cuenta aspectos generales de los significados técnico y práctico del organizador del currículo. Por lo tanto, se esperaba que, como resultado de estos procesos de interacción, los grupos de futuros profesores lograran desarrollar un conocimiento de cada organizador del currículo que fuera más allá de los aspectos que son específicos a su tema. En este sentido, en la asignatura se pretendió que los grupos de futuros profesores desarrollaran paralela y dinámicamente tanto el conocimiento técnico, como el conocimiento práctico de las nociones del análisis didáctico, buscando que estas nociones se convirtieran en instrumentos útiles para el análisis de cualquier tema matemático.

Esta dualidad entre el tratamiento del significado técnico en la asignatura y el desarrollo del conocimiento (técnico y práctico) por parte de los grupos de futuros profesores permite explicar, al menos parcialmente, el desfase entre el momento en que una noción se introduce en la asignatura y el momento en que esta noción aparece explícitamente en las producciones de los grupos de futuros profesores. Fue con motivo de la negociación de significados que surgió de la revisión de los comentarios a las transparencias, a la hora de diseñar la unidad didáctica, que los grupos de futuros profesores materializaron el significado de esta idea y lo utilizaron explícitamente en sus producciones. Es decir, fue con motivo de poner en juego el significado práctico que el grupo logró materializar su significado técnico. Por otro lado, de manera similar a lo que sucedió en la interacción en clase, el proceso de negociación de significado que tuvo lugar cuando los grupos realizaron las tareas contribuyó a la construcción de los significados tanto técnicos como prácticos. El conocimiento didáctico se construyó en un juego permanente entre el significado técnico y práctico de las nociones implicadas. No obstante, el análisis de los trabajos finales muestra que los grupos recogieron información que era relevante para el diseño de la unidad didáctica, pero no reconocieron que formaba parte de la información correspondiente a cada una de las nociones. Esto es evidencia de una conexión débil, en el conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores, entre estos dos significados de las nociones del análisis de contenido.

Los grupos de futuros profesores también manifestaron dificultades para identificar, diferenciar y relacionar los organizadores del currículo del análisis de contenido. Esto fue evidente en la relación entre la estructura conceptual y los sis-

temas de representación, y entre los sistemas de representación y la fenomenología.

12.3. Desarrollo del Conocimiento Didáctico en el Contexto de la Asignatura

El análisis de las presentaciones mostró que es posible organizar las producciones de los grupos de futuros profesores en estados de desarrollo del conocimiento didáctico. Como era de esperarse, el contexto y el desarrollo de la asignatura influyeron y permiten explicar diferentes aspectos de dicho desarrollo.

La diferencia en temas puede explicar, al menos parcialmente, la heterogeneidad en las presentaciones y producciones de los grupos. Aunque todos los temas se enmarcan dentro de una estructura matemática y, por lo tanto, pueden ser abordados con las herramientas del análisis didáctico, algunos de ellos parecen permitir más fácilmente una primera aproximación.

El análisis de las producciones, de las entrevistas y del trabajo del grupo función cuadrática mostró que la mayoría de los futuros profesores llegaron a la asignatura con una visión formal y simbólica de las matemáticas. Ya he indicado cómo esta visión puede ser una de las causas de algunas de las dificultades de los grupos de futuros profesores. Esta visión de las matemáticas los indujo a pensar que los temas de las matemáticas de secundaria eran sencillos. No obstante, a medida que se avanzó en la asignatura y que los grupos de futuros profesores analizaron su tema con las diversas nociones propuestas, ellos se hicieron conscientes de la complejidad de los temas.

El análisis del trabajo del grupo función cuadrática mostró que la información que surgió de la experiencia docente de los futuros profesores se utilizó en varias de las sesiones de trabajo y jugó, por ejemplo, un papel central en la realización de la tarea sobre el análisis cognitivo.

El análisis de las producciones puso en evidencia los procesos de negociación de significado en el aula. Estos procesos surgieron y fueron promovidos por dos factores: la metodología de interacción en clase y la heterogeneidad en el avance de las producciones de los grupos.

La revisión y mejora de las propuestas tuvo lugar dentro la comunidad de práctica de cada grupo. El análisis del trabajo del grupo función cuadrática me permitió describir estos procesos de negociación de significado. En el caso del trabajo de este grupo, se apreció una actitud permanente de búsqueda de significado de la que surgieron confusiones y conflictos. En general, estas confusiones y estos conflictos se superaron produciendo, en algunos casos, descubrimientos de significado. El resultado de estos procesos de negociación fueron las propuestas de significado que ellos incluyeron en sus presentaciones y documentos. Algunas de estas propuestas terminaron materializándose dentro del grupo, mientras que otras no lo lograron y no fueron utilizadas en otros lugares del análisis didáctico.

En el esquema metodológico de la asignatura no se estableció una sola autoridad para decidir lo que estaba bien y estaba mal en las presentaciones. Las opiniones y críticas de los compañeros eran relevantes. Además, se generó un ambiente de sana competencia en el que cada grupo se esforzó para que su trabajo estuviese entre los mejores.

Al reducir la importancia de la descripción teórica y formal de los organizadores del currículo, la instrucción promovió la construcción de significados a tra-

vés de la presentación de ejemplos. De hecho, en diversas ocasiones (e.g., en la primera estructura conceptual o en el diseño de la unidad didáctica) la aproximación que los grupos hicieron a la utilización de cada una de las nociones surgió de la imitación.

El trabajo final contribuyó de manera significativa a la construcción y consolidación de los significados que se trabajan en la asignatura. En el caso de algunos grupos, el trabajo final los indujo a revisar y organizar lo que habían hecho hasta ese momento. Esta revisión incluyó el análisis de los comentarios a las transparencias, actividad que contribuyó significativamente a la calidad de su propuesta final.

Los futuros profesores, como lo acostumbran los profesores en ejercicio, utilizaron sistemáticamente los libros de texto en el diseño de unidades didácticas. Los libros de texto fueron una fuente clave de información para los grupos de futuros profesores. No obstante, la principal función de los libros de texto se evidenció en el diseño de actividades para las sesiones de la unidad didáctica.

12.4. Contribuciones al Significado de los Organizadores del Currículo del Análisis de Contenido: Significados Parciales

Los diferentes estudios en general, y el estudio de las producciones en particular, dan luces sobre los diferentes significados parciales que los grupos de futuros profesores pueden desarrollar sobre las nociones del análisis de contenido. También muestran características de estas nociones de las que no éramos plenamente conscientes al inicio del proyecto o sobre las cuales no insistimos en la instrucción.

La instrucción insistió en la utilización de los sistemas de representación como principal criterio organizador de los mapas conceptuales con los que se describe la estructura matemática. Sin embargo, el análisis de dos de las dificultades de los grupos de futuros profesores en relación con esta noción sugieren otras posibilidades de organización de la estructura conceptual: la aproximación conceptual y la fenomenología. El análisis de las producciones y del trabajo del grupo función cuadrática mostró que los sistemas de representación se pueden clasificar en cuatro categorías y que las producciones de los grupos de futuros profesores pusieron en evidencia una jerarquía de estas categorías. Los sistemas de representación simbólico y gráfico se identifican como básicos; los sistemas de representación numérico y geométrico son complementarios; aparecen en contadas ocasiones sistemas de representación específicos a la estructura matemática (e.g., el matricial para los sistemas de ecuaciones lineales); y en algunas ocasiones se hacen propuestas que no son sistemas de representación (por ejemplo, fenómenos).

El análisis de las producciones me permitió identificar diversos criterios de organización de los fenómenos: disciplinas, familias, áreas, usos, subestructuras y grupos. Por otro lado, también caractericé el tipo de análisis fenomenológico que se puede poner en evidencia en las producciones de los grupos de futuros profesores: una producción puede presentar modelos, leyes, subestructuras, análisis estructural de los fenómenos, y la relación entre las características estructurales del fenómeno y elementos y relaciones de la subestructura.

12.5. Génesis Instrumental en el Grupo

La construcción y negociación de los significados parciales de un organizador del currículo en el seno de un grupo fue un proceso evolutivo. A continuación, identifico, a partir de los análisis anteriores, los principales patrones que caracterizan este proceso.

En muchas ocasiones, el primer problema que el grupo tuvo que enfrentar consistió en comprender los requerimientos de la tarea. Dado que aún no tenían un significado para el organizador del currículo, les resultaba difícil comprender qué significaba analizar su tema con esa noción. La evidencia muestra que algunos grupos dedicaron tiempo para decidir lo que debían hacer. En esta primera aproximación al análisis de su tema, muchos grupos resolvieron el problema imitando el ejemplo que la instrucción había presentado en clase y utilizando las herramientas que tenían disponibles (e.g., la lista de organizadores del currículo para describir la estructura conceptual, o los libros de texto para los sistemas de representación y el diseño de tareas).

Una vez que hicieron la presentación de su primera aproximación, los grupos reiniciaron el análisis de su tema partiendo de las ideas, dudas, dificultades y posibles caminos de mejora que surgieron de los comentarios y críticas que habían recibido, del análisis y comparación de su trabajo con el trabajo de los otros grupos y de la información que encontraban en la literatura (principalmente los libros de texto). Esta situación promovió, en general, un proceso intenso de negociación de significados dentro de cada grupo. En este proceso, los grupos comenzaron a construir esquemas de acción (razonamientos y procedimientos) para el análisis de su tema con el organizador del currículo. La noción comenzó a transformarse en instrumento, desde la perspectiva de su significado técnico, en el sentido de que los grupos avanzaron en su capacidad de producir y organizar la información que surgía de dicho análisis.

Esta segunda fase del proceso de génesis instrumental se caracterizó por dos cuestiones: (a) la relación entre el desarrollo del significado técnico del organizador del currículo por parte de los futuros profesores y la profundidad con la que analizaban su tema y (b) la relación entre la construcción de ese significado técnico y su puesta en práctica.

En el proceso de transformación de un organizador del currículo en instrumento, el análisis de la estructura matemática y la construcción del significado técnico de la noción interactuaron dinámicamente. A medida que se avanzó en el análisis, se construyeron significados más complejos (del organizador del currículo y del concepto) que, a su vez, permitieron nuevos análisis más profundos. Las características de las transparencias de los grupos dependieron por lo tanto de dos factores: el significado técnico que los grupos iban construyendo de cada organizador del currículo y la profundidad con la que estudiaban y analizaban (utilizando dicha noción como instrumento) la estructura matemática que correspondía a su tema. Un significado técnico inicial del organizador del currículo permitió solamente una descripción general de la estructura matemática. Y el esfuerzo por profundizar en el análisis de la estructura matemática contribuyó al desarrollo del significado técnico de la noción. Por ejemplo, en las primeras producciones de la estructura conceptual, cuando el significado de este organizador del currículo apenas se estaba comenzando a construir, los grupos de futuros profesores presenta-

ron producciones que describían de manera general y poco organizada la estructura matemática. Sin embargo, este esfuerzo los llevó a conocer mejor esta estructura matemática y, paralelamente, a progresar en el desarrollo del significado del organizador del currículo con la que la analizaron (en este caso, la estructura conceptual). De esta manera, los grupos de futuros profesores pasaron de utilizar una multiplicidad de criterios de organización a organizar la estructura conceptual basándose en los sistemas de representación. Esto les permitió describir y conocer con mayor detalle la estructura matemática, lo que los llevó, por ejemplo, a reconocer la importancia de las conexiones entre los sistemas de representación.

Los grupos también avanzaron en la construcción del significado técnico de cada organizador del currículo al tratar de poner en práctica la información que surgía de su análisis. Éste fue el caso, por ejemplo, de la idea de conexiones en el trabajo del grupo función cuadrática. Este grupo no reconoció la importancia de esta noción en el momento de producir la estructura conceptual. La idea apareció explícitamente por primera vez cuando realizaron el análisis cognitivo. Pero, fue con motivo de la negociación de significados que surgió de la revisión de los comentarios a las transparencias, a la hora de diseñar la unidad didáctica, que el grupo materializó el significado de esta idea y lo plasmó explícitamente en sus producciones. Es decir, fue con motivo de poner en práctica el resultado del análisis de su tema que el grupo logró materializar su significado técnico. Por lo tanto, los significados técnico y práctico de un organizador del currículo interactúan en dos sentidos: por un lado, el significado práctico se desarrolla cuando se pone en juego la información que surge del análisis del tema con el organizador del currículo (significado técnico); por el otro lado, los grupos avanzan en la materialización del significado técnico del organizador del currículo cuando construyen su significado práctico.

Que un grupo haya desarrollado y materializado el significado técnico de un organizador del currículo no implica necesariamente que haya avanzado en la construcción de su significado práctico. Todos los estudios presentan evidencia de que éste fue el caso para la noción de fenomenología. En el análisis del trabajo del grupo función cuadrática presenté una descripción detallada de esta situación. Allí mostré que el grupo tuvo dificultades para identificar el procedimiento de análisis fenomenológico en virtud del cual se identifican subestructuras y se establecen relaciones entre estas subestructuras y los fenómenos correspondientes. No obstante, la lectura cuidadosa de los comentarios a las transparencias les permitió, al final, identificar y llevar a la práctica el procedimiento. Esto sugirió un avance importante en la construcción del significado técnico de la noción de fenomenología. Sin embargo, este significado no se materializó desde el punto de vista práctico. A la hora de diseñar las actividades para la unidad didáctica, el grupo no utilizó la información que recogió y organizó para esta noción.

Las deficiencias en el desarrollo del significado práctico de los organizadores del currículo por parte de los grupos de futuros profesores también se evidenció en la independencia entre el trabajo que los grupos realizaron con los organizadores del currículo del análisis de contenido y el diseño de su unidad didáctica. Esto se puso de manifiesto en el análisis de los trabajos finales. Allí mostré que la mayoría de los grupos utilizó en el diseño de la unidad didáctica información que no quedó registrada en el lugar que le correspondía dentro del análisis didáctico. Esto

significa que los grupos constataron que esta información era relevante para el diseño, pero no reconocieron que formaba parte de la información correspondiente a cada uno de los organizadores del currículo.

12.6. Teoría, Técnica y Práctica en la Génesis Instrumental de los Organizadores del Currículo

Los análisis anteriores sugieren la posibilidad de precisar el proceso de génesis instrumental en el contexto del desarrollo del conocimiento didáctico de los organizadores del currículo. He identificado etapas y relaciones en el desarrollo de los significados de estas nociones por parte de los grupos de futuros profesores.

El desarrollo del conocimiento didáctico de un grupo sobre un organizador del currículo comienza por la negociación del significado de los requerimientos involucrados en las tareas que se les asignan (análisis de su tema con la noción). En muchas ocasiones, la primera aproximación surge de la imitación: adaptan el ejemplo de la instrucción a su tema y lo complementan con la información que encuentran en los libros de texto. En una segunda etapa, y con motivo de los comentarios y críticas que surgen de su presentación y de la comparación de su trabajo con el de los otros grupos, se avanza en la construcción del significado técnico. Hay dos catalizadores de este progreso. Por un lado, en la medida en que se profundiza en el análisis de la estructura matemática, se avanza en la construcción del significado técnico. Por el otro lado, este significado técnico también se desarrolla con motivo de su puesta en práctica en los otros análisis del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica. En una tercera etapa, se logran establecer esquemas de acción para el análisis técnico del tema con el organizador del currículo. El desarrollo del significado práctico de la noción constituye la cuarta etapa. Finalmente, la quinta etapa consiste en el desarrollo de técnicas para la utilización de ese significado práctico.

Los grupos no fueron necesariamente conscientes del significado teórico de los organizadores del currículo. Esto no quiere decir que no llegaran a desarrollarlo en alguna medida. El hecho de que los grupos lograran interpretar y adaptar las producciones de los otros grupos al caso concreto de su tema matemático, indica que su conocimiento del organizador del currículo fue más allá de las características que le eran específicas a su tema. En este sentido, los grupos lograron generalizar el significado técnico del organizador del currículo y, por lo tanto, construir versiones preliminares de su significado teórico. No obstante, en la práctica, los grupos focalizaron su atención en la construcción de los significados técnico y práctico de las nociones. El conocimiento didáctico se construye, por lo tanto, en un juego permanente (y en la mayoría de los casos inconsciente) entre el significado teórico, técnico y práctico de las nociones implicadas.

La interacción entre técnica y práctica se caracteriza por el papel que juega la práctica en el desarrollo del significado técnico y por el papel que juega la información que surge del análisis técnico del tema en la práctica. En el caso del desarrollo de la asignatura que analicé en este proyecto de investigación, los grupos lograron desarrollar el significado técnico de la estructura conceptual y los sistemas de representación y parcialmente del análisis fenomenológico. También lograron, en algunos casos, desarrollar técnicas para el análisis del tema con los tres

organizadores del currículo. Sin embargo, no llegaron a desarrollar técnicas para su puesta en práctica.

En la Figura 90 esquematizo una conjetura preliminar sobre el proceso de génesis instrumental de los organizadores del currículo en el contexto de la asignatura. Un grupo de futuros profesores transforma un organizador del currículo en un instrumento (y, por consiguiente, avanza en el desarrollo de su conocimiento didáctico sobre la noción) en la medida que negocia y construye sus significados teórico, técnico y práctico. El proceso se inicia con la construcción de un significado técnico inicial de la noción que se motiva en la imitación y se alimenta con la información de los libros texto. Es el inicio del proceso instrumentalización (técnica). La instrumentación tiene lugar cuando el significado técnico se desarrolla, con motivo de los comentarios y las críticas, en su interacción con la profundidad de análisis de la estructura matemática y en su puesta en práctica en otros análisis y en el diseño de la unidad didáctica (orquestración). Este desarrollo da lugar a la construcción de esquemas de acción para el análisis técnico de la estructura matemática. En la medida en que se desarrolla la capacidad para comparar e interpretar los análisis técnicos de diferentes temas matemáticos, se construye el significado teórico de la noción. El desarrollo del significado práctico requiere de un nuevo proceso de génesis instrumental. Parte de la información que surge del análisis técnico del tema y apela a la orquestración de los diversos instrumentos (los organizadores del currículo) para la construcción de esquemas de acción que dan lugar a la puesta en práctica del organizador del currículo con propósitos didácticos.

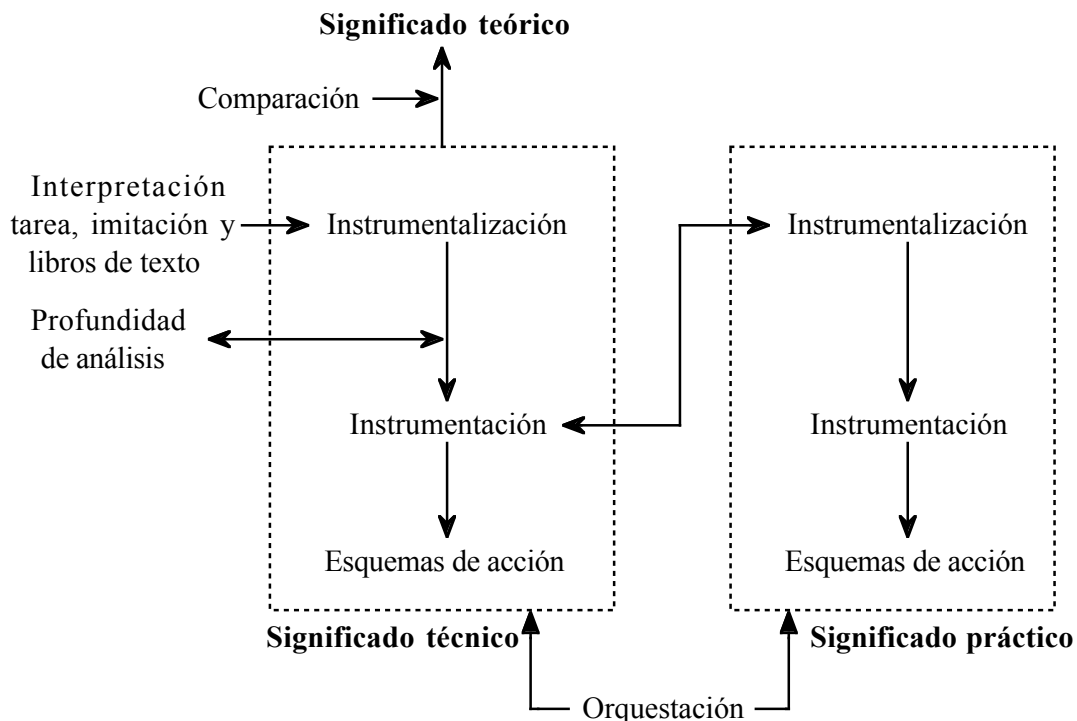


Figura 90. Conjetura de la génesis instrumental de los organizadores del currículo

13. UNA ETAPA EN MI REFLEXIÓN SOBRE EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Enmarqué este proyecto de investigación en el contexto de cuatro preguntas generales sobre el profesor de matemáticas que se referían a su actuación, a su conocimiento, al diseño y desarrollo de programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y a los procesos de aprendizaje de los futuros profesores que participan en dichos programas. Concreté estas preguntas en dos objetivos generales para este proyecto: (a) avanzar en la conceptualización de las actividades y el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas de secundaria y del diseño de planes de formación inicial y (b) describir y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato de la Universidad de Granada del curso 2000-2001.

Considero que he propuesto respuestas concretas a las cuatro preguntas generales que estructuraron este proyecto, al abordar los objetivos generales y específicos que articularon la indagación sistemática que he reportado en este documento. A continuación, con el propósito de justificar e ilustrar esta consideración, preciso las cuestiones que considero más relevantes de la reflexión y la indagación que realicé. Para ello, identifico sus principales contribuciones, establezco algunas de sus implicaciones, determino sus limitaciones y distingo las cuestiones que quedan abiertas.

13.1. Contribuciones a la Reflexión sobre el Profesor de Matemáticas de Secundaria

Considero que, con este proyecto de investigación, contribuyo a la reflexión sobre el profesor de matemáticas de secundaria, en general, y sobre la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en particular. Estas contribuciones son de tipo teórico, metodológico, empírico y curricular.

Contribuciones Teóricas

Propuse el análisis didáctico como un nivel currículo. Con esta noción, estructuré conceptualmente los organizadores del currículo propuestos por Rico (Rico, 1997a). Presenté avances en la conceptualización de la noción de “organizador del currículo” al darle, a partir de la teoría de la génesis instrumental, un significado concreto a la idea de “herramienta conceptual y metodológica”.

En la descripción del análisis de contenido, introduje la noción de estructura conceptual como organizador del currículo, concretando uno de los aspectos del significado de los conceptos de las matemáticas escolares, sin tener que hacer referencia a cuestiones cognitivas. Al resaltar las operaciones que se realizan sobre los signos, establecí el vínculo entre la estructura conceptual y los sistemas de representación. Esta distinción me permitió caracterizar las conexiones que se pueden establecer entre los elementos de una estructura matemática, cuando ésta se representa por medio de mapas conceptuales. Profundicé en la reflexión sobre la fenomenología como dimensión del significado de un concepto, al aclarar, por medio de una formulación concreta y operacional de la noción de modelo mate-

mático, el vínculo entre subestructuras de una estructura matemática y los fenómenos que estas subestructuras organizan.

La fundamentación de las tres dimensiones del significado de un concepto de las matemáticas escolares que articulan el análisis de contenido se basa en las contribuciones de Luis Rico a la interpretación y adaptación de la noción de significado de Frege en ese contexto. Las contribuciones de Luis Rico también me permitieron estructurar y detallar la noción de contenido como elemento curricular.

Introduje la noción de “camino de aprendizaje”, como adaptación de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje a la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Conceptualicé la relación entre las nociones de objetivo de aprendizaje, capacidad, tarea, camino de aprendizaje y competencia. Esta conceptualización dio lugar a la formulación de un procedimiento que permite caracterizar un objetivo de aprendizaje en términos de sus caminos de aprendizaje, y otro procedimiento en virtud del cual es posible analizar y seleccionar tareas que contribuyan al logro de dicho objetivo. De esta manera, resalté el vínculo entre el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.

Con base en la noción de análisis didáctico, y partiendo de una visión funcional de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, establecí un significado concreto para el término “conocimiento didáctico” y puse en evidencia su relación con la noción de conocimiento pedagógico de contenido. Introduje las nociones de significado teórico, técnico y práctico de los organizadores del currículo, desde la perspectiva del conocimiento didáctico de referencia y adapté estas nociones al contexto del conocimiento didáctico de los futuros profesores, basándome en la noción de significado parcial de un grupo de futuros profesores. Las propuestas para las nociones de análisis didáctico y conocimiento didáctico me permitieron caracterizar, en términos de capacidades, la competencia de planificación del profesor de matemáticas. Considero que dichas conceptualizaciones sustentan posibles respuestas tanto a la paradoja de la planificación, como a la problemática de la brecha entre la planificación global y la planificación local y representan un avance en la reflexión sobre la noción de conocimiento pedagógico de contenido.

Aunque no se pueden calificar como contribuciones teóricas, entiendo que, en este proyecto de investigación, introduje innovaciones conceptuales que contribuyen a la reflexión e investigación sobre el profesor de matemáticas. Adapté la teoría de la génesis instrumental a la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en general, y al estudio del desarrollo del conocimiento didáctico de los organizadores del currículo, en particular. Utilicé la teoría de la calidad de la información para justificar una metodología de análisis de las producciones de los futuros profesores y para introducir la noción de “factor desarrollo”. Abordé la problemática del aprendizaje del futuro profesor de matemáticas desde la perspectiva de la teoría social del aprendizaje de Wenger. Mi interpretación y adaptación de estas tres teorías al contexto de este proyecto, me permitió establecer un significado para la idea de “desarrollo del conocimiento didáctico” que hice metodológicamente operacional.

Contribuciones Metodológicas

En el contexto de la línea de investigación sobre formación de profesores del Grupo Pensamiento Numérico, introduje varias innovaciones en el diseño de los estudios empíricos que configuran este proyecto de investigación. Asumí un posición sociocultural del aprendizaje y centré la indagación en el aprendizaje de los grupos de profesores, dejando en un segundo plano el análisis de las actuaciones y producciones de los futuros profesores, como individuos. Decidí estudiar los procesos de aprendizaje (desarrollo del conocimiento didáctico), más que los resultados. Y realicé la investigación dentro del contexto de la asignatura.

En el análisis de las producciones, diseñé y puse en práctica un esquema de análisis de las observaciones, el análisis de discrepancias, que me permitió establecer y caracterizar cuatro estados de desarrollo del conocimiento didáctico y asignar cada observación a uno de esos estados. Éste es un procedimiento no estándar para el agrupamiento de observaciones que puede utilizarse cuando la información disponible no satisface las condiciones impuestas por métodos estándar de agrupamiento, como el análisis clúster. Diseñé una hoja de cálculo que permite automatizar su uso e identifiqué sus virtudes y defectos. Para el análisis de las producciones, diseñé un sistema interconectado de bases de datos que permite navegar dinámicamente por la evidencia incluida en las transparencias de los grupos de futuros profesores y en las transcripciones de las grabaciones de la interacción en clase.

Para el análisis del trabajo del grupo función cuadrática, diseñé y puse en práctica unos instrumentos de codificación, análisis e interpretación de las transcripciones que hacen operacional, en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, la teoría social del aprendizaje de Wenger. Mostré que, con esta adaptación de la teoría, la noción de comunidad de práctica se constituye en una herramienta para “ver, pensar y actuar” en el ámbito de la formación de profesores.

Al ser un análisis sistemático de las matemáticas escolares, considero que el análisis didáctico puede ser útil conceptual y metodológicamente en aquellos estudios sobre la comprensión y el aprendizaje de temas matemáticos en los que es necesario diseñar pruebas y esquemas de análisis de las actuaciones de los sujetos cuando abordan tareas. El análisis didáctico (en particular, el análisis de contenido) ya ha sido utilizado en investigaciones relacionadas con esta problemática y con el análisis histórico de libros de texto.

Contribuciones Empíricas

El propósito de los estudios empíricos que configuraron este proyecto de investigación fue el de dar una “prueba de existencia”, es decir, el de presentar sistemáticamente evidencias de un caso en el que una estrategia (de formación) produce unos resultados. Una prueba de existencia es una contribución al conocimiento de la Didáctica de la Matemática, puesto que cada investigador y cada formador de profesores puede interpretar y adaptar los resultados de estos estudios empíricos a su contexto específico y a los problemas que se articulan en ese contexto. Enumero a continuación las principales contribuciones de dichos estudios.

Establecí que el conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores evoluciona de acuerdo con patrones estables que permiten caracterizar cuatro es-

tados de desarrollo. Mostré que el proceso de génesis instrumental toma tiempo: requiere que los grupos de futuros profesores negocien significados (del organizador del currículo, de su tema matemático y de sus esquemas de acción) y que estos significados parciales se materialicen (en diferentes formas) en las sucesivas ocasiones en las que los grupos presentan sus producciones en clase.

Profundicé en la descripción de dichos estados de desarrollo, al identificar y pormenorizar los significados parciales que los grupos de futuros profesores construyeron a lo largo de la asignatura, contribuyendo, así, a la caracterización de los organizadores del currículo desde una perspectiva empírica. Puse en evidencia la evolución de estos significados parciales en términos de los factores de desarrollo, identifiqué las dificultades que los grupos de futuros profesores manifestaron en diversos momentos, y reseñé los modos y estrategias en virtud de los cuales, en variadas ocasiones, lograron superarlas. Puse de manifiesto el papel, en el desarrollo de su conocimiento didáctico, de la experiencia docente y de las visiones de los futuros profesores cuando llegan a la asignatura.

Establecí en qué medida y de qué forma los grupos de futuros profesores pusieron en juego la información que recabaron para los organizadores del currículo en el diseño de la unidad didáctica. Puse en evidencia que varios grupos de futuros profesores no lograron desarrollar necesariamente una visión global e integrada del análisis de contenido como herramienta para el diseño de unidades didácticas.

Pormenoriqué el proceso en virtud del cual un grupo de futuros profesores constituyó una comunidad de práctica, al mostrar cómo evolucionó su compromiso mutuo, cómo definieron y afinaron su empresa conjunta y cómo desarrollaron su repertorio compartido. Caractericé, desde una perspectiva sociocultural, el aprendizaje de un grupo de futuros profesores, al poner en evidencia los procesos de negociación de significados que dieron lugar a sus producciones y actuaciones. Identifiqué y describí las principales cuestiones que influyeron en ese proceso de negociación de significados.

Con base en los resultados anteriores, profundicé y precisé, desde una perspectiva empírica, las nociones de significado teórico, técnico y práctico de los organizadores del currículo y detallé el proceso de génesis instrumental en el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. De esta manera, caractericé el juego entre el conocimiento teórico, técnico y práctico de los futuros profesores que fundamenta la transformación de un organizador del currículo en instrumento con utilidad práctica. Identifiqué unas fases de este proceso de transformación, como contribución a la comprensión y conceptualización del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores. Mostré el papel que el diseño y desarrollo la asignatura jugaron en este proceso e identifiqué otras características de la asignatura y de los futuros profesores que influyeron en el desarrollo de su conocimiento didáctico.

Contribuciones Curriculares

Considero que he contribuido a la conceptualización y la fundamentación de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, en particular, y de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en general. Estas contribuciones se basan en mis aportes a la concreción de significado para las nociones de análisis didáctico y conocimiento didáctico y a la caracterización de la

competencia de planificación del profesor de matemáticas que surge de ellos. Mostré cómo estas nociones permiten llevar a la práctica curricular nuestra visión funcional de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

Por otro lado, considero que también he contribuido al diseño de la asignatura desde el punto de vista metodológico al proponer y contrastar empíricamente un esquema de trabajo para el tratamiento del análisis didáctico en dicho plan de formación.

13.2. De la Investigación a la Práctica

¿Cómo puede la “prueba de existencia” que acabo de describir contribuir a la práctica de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria? Entiendo que estos resultados pueden ser interpretados y adaptados en dos dominios: la evaluación y mejora del diseño y desarrollo de programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y la reflexión sobre la actuación de los formadores de profesores.

Mi intención en este proyecto no fue la de evaluar un modelo de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Por consiguiente, no busqué responder a preguntas del estilo “¿qué es lo que funciona en el aula?” o “¿qué método es mejor?”. Más bien, argumenté que la caracterización del desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura aporta luces sobre sus dificultades y logros al realizar las tareas y sobre las posibles causas de estas dificultades y logros. Entiendo que esta información es relevante tanto para la revisión del diseño de la asignatura, como, sujeta a la interpretación correspondiente, para otros formadores y otras asignaturas que, en alguna medida, fundamentan la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en un modelo similar al nuestro. En el caso de nuestra asignatura, los resultados destacan dos cuestiones claves donde es necesario mejorar: el tratamiento del análisis fenomenológico y la presentación del significado práctico de los organizadores del currículo y su relación con su significado técnico. Por otro lado, resaltan el papel positivo que jugaron los esquemas metodológicos utilizados y los comentarios a las producciones de los futuros profesores.

Considero que la descripción pormenorizada del proceso en virtud del cual los grupos de futuros profesores construyen sus significados parciales sobre los organizadores del currículo del análisis de contenido es una información valiosa para aquellos formadores de profesores que pretendan promover dichos significados en sus estudiantes. Esta información puede permitir, en muchos casos, la previsión de las actuaciones de los grupos de futuros profesores y, por lo tanto, una adecuada planificación de la instrucción.

El análisis del proceso en virtud del cual un grupo de futuros profesores emergió como comunidad de práctica destacó el papel de los formadores como promotores del aprendizaje interdependiente y de la negociación de significados. He sugerido que los formadores debemos asumir un rol de “asesores”, de tal forma que nuestra preocupación no sólo se centre en qué aprende un grupo de futuros profesores, sino que también atienda a los factores que puedan influir tanto en el desarrollo del compromiso mutuo entre sus miembros, como en la claridad y validez de su empresa conjunta.

13.3. Limitaciones y Cuestiones Abiertas

En esta sección, identifico las principales limitaciones de este proyecto y establezco algunas de las cuestiones que quedan abiertas hacia el futuro.

El análisis didáctico es una visión (conceptualización) parcial e ideal de la actividad (de planificación) del profesor. Es una visión parcial porque focaliza la atención en la dimensión local de la planificación. El hecho de que haya otros aspectos de esa actividad que no considero dentro del análisis didáctico, no quiere decir que estos aspectos no sean importantes o relevantes o que sean menos importantes que los que exploré en este documento. Como procedimiento ideal, me sirvió para conceptualizar el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas y detallar, en términos de capacidades, algunos aspectos de su competencia de planificación. Pero no espero que ningún profesor de matemáticas concreto realice sistemáticamente todos y cada uno de los procedimientos que conforman el análisis didáctico. No obstante, mostré que, a la hora de planificar su clase, el profesor puede utilizar el análisis didáctico como guía, al nivel detalle que corresponda al tiempo que tenga disponible.

Aunque hice un esfuerzo por fundamentar conceptualmente el análisis de contenido, no considero que este trabajo esté cerrado. La claridad y utilidad del significado técnico de los organizadores del currículo depende de la profundidad y claridad con que se estructure su significado teórico. Por otro lado, los estudios empíricos pusieron de manifiesto la necesidad de explorar y desarrollar estrategias para la descripción y el tratamiento curricular del significado práctico de los organizadores del currículo. La presentación que hago de los análisis cognitivo, de instrucción y de actuación tiene un carácter restringido y aborda solamente algunos de sus múltiples aspectos. De hecho, los dos primeros son actualmente objeto de trabajo en nuestro grupo de investigación. De la misma manera, nos encontramos actualmente explorando los vínculos entre el análisis didáctico, como fundamentación de un programa de formación de profesores, y la formación de los escolares, en particular, desde la perspectiva de la alfabetización matemática.

He propuesto una conjetura preliminar para el proceso de génesis instrumental de los organizadores del currículo en el contexto de la asignatura. Esta conjetura requiere una mayor estructuración y fundamentación teórica y una sustentación empírica más amplia. En particular, resulta necesario explorar con mayor profundidad cómo, en la práctica, los grupos de futuros profesores exitosos construyen el significado práctico de los organizadores del currículo.

Centré los esfuerzos conceptuales y metodológicos de este proyecto en la competencia de planificación del profesor. No obstante, el análisis didáctico incluye el ciclo completo de planificación, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas. Surgen entonces dos cuestiones en las que es posible indagar. Por un lado, cabe preguntarse cómo se debe avanzar en una descripción del análisis didáctico que pueda ser utilizada para la fundamentación de un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que incluya la posibilidad de que los grupos de futuros profesores lleven a la práctica sus propuestas de unidad didáctica. Por otro lado, también resulta relevante cuestionarse sobre cómo podría adaptarse el análisis didáctico como fundamento para programas de formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria.

Como lo mencioné en el apartado anterior, el área de las competencias del formador de profesores de matemáticas es un terreno relevante y poco explorado. Los resultados de los estudios ponen en evidencia la necesidad de indagar qué competencias deben desarrollar los formadores si se adopta una visión sociocultural del aprendizaje de los futuros profesores.

13.4. El Final de una Etapa; el Comienzo de Otra

En este documento reporto las actividades y los resultados de un trabajo colectivo. En diversos lugares del mismo, indico cómo las actividades de diseño, desarrollo e investigación se realizaron en equipo y cómo este proyecto se enmarcó y se apoyó en las actividades y resultados de la línea de investigación en formación de profesores del Grupo Pensamiento Numérico, que Luis Rico ha venido dirigiendo, promoviendo y desarrollando desde finales de la década de los ochenta. Los logros de este proyecto contribuyen a un proceso colectivo de investigación a largo plazo y son consecuencia de su visión y capacidad para encaminar dicho proceso y dirigir este proyecto de investigación.

Desde la perspectiva personal, este reporte describe el camino que, como diseñador, formador e investigador, recorrí durante siete años, en mi relación con la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en general, y con un programa de formación, en particular. En este sentido, reporto una investigación sobre mi propia práctica. La conceptualización y el diseño de la investigación habla sobre mis creencias, valores y actitudes como diseñador e investigador. Los resultados empíricos revelan aspectos de mis competencias y actitudes como formador de profesores de matemáticas.

Mi experiencia, al terminar esta nueva etapa en mi recorrido como diseñador, formador de profesores e investigador, me deja clara una cuestión: la complejidad de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Esta experiencia me ha permitido percibir y abordar parcialmente la multiplicidad de dimensiones involucradas en ella. A nivel conceptual, en mi aproximación al análisis didáctico, al conocimiento didáctico y al aprendizaje de los futuros profesores. A nivel curricular, en mi indagación sobre el diseño y desarrollo de planes de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria y sobre el papel de los formadores en ellos. Y a nivel investigativo, en la importancia de la indagación sobre los procesos de donde emerge el aprendizaje de los futuros profesores. Mi conciencia de la complejidad y de la trascendencia de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria me induce a considerar este documento como el inicio de una nueva etapa en mi reflexión sobre el profesor de matemáticas.

EXECUTIVE SUMMARY

What follows is a summary of this document.

1. AN APPROACH TO FOUR GENERAL QUESTIONS ABOUT THE MATHEMATICS TEACHER

Teacher training has become one of the main foci of research in mathematics education in the past fifteen years. Interest focuses on four central questions:

1. What characterises effective and efficient action by the teacher in the mathematics classroom?
2. What should be the knowledge, capacities, and attitudes of a teacher who acts effectively and efficiently?
3. How can initial training programs for high school mathematics teachers be designed and implemented to support and foster the development of this knowledge and these capacities and attitudes?
4. What characterises the learning processes of future high school mathematics teachers who participate in this kind of initial training program?

This study is framed by the area of action defined by these four questions. For each, I determine a specific work context. For the first question, I propose, from a conceptual perspective, a description of the ideal procedure that the mathematics teacher should perform when designing, putting into practice, and evaluating didactic units (didactic analysis). Second, I establish the knowledge and abilities that the teacher should have and develop to perform didactic analysis (didactic knowledge). I focus attention on the process of curriculum design (planning of didactic units), in the context of the course *Mathematics Education in High School*

at the University of Granada and therefore refer to the initial training of high school mathematics teachers in Spain. Finally, I study and characterise (from an evolutionary and socio-cultural perspective) the learning of the future teachers who took this course in the 2000-01 academic year.

The problem I tackle in this project arises from the convergence of two cases in the training of high school mathematics teachers developed at the end of the 1980s and in the 90s. The first took place in Granada, Spain, in the context of the initial training of future mathematics teachers at the University of Granada, and the second in Bogotá, Colombia, in the context of the projects for continuing education for high school teachers developed by “una empresa docente”, a centre for research in mathematics education at the University of the Andes.

At the end of the 90s, Luis Rico began a line of research in teacher training whose main focus was “the evaluation of the model of the curriculum organisers”. This model was the conceptual basis for the design of the second part of the course mentioned previously. Given that the idea of “evaluating the model” was complex and general, specific strategies were designed and developed for tackling this problem in the doctoral theses of Evelio Bedoya (2002) and José Ortiz (2002). The problem was defined in several dimensions: part of the model was chosen, the research experience was performed outside the context of the course, and specific objectives and designs were proposed.

I decided to address the problem from a different perspective characterised by: (a) specifying a meaning for the idea of “model of the curriculum organisers”; (b) focusing research on the learning of groups of future teachers; (c) concentrating on one of the analyses of didactic analysis; (d) studying the learning processes rather than the results; (e) exploring learning in groups of teachers; (f) determining a position on the learning of future teachers; and (g) performing research in the context of the course.

I assumed three roles throughout the project: curriculum designer, trainer and researcher. I developed the project in three periods, which correspond to these three roles. In the context I have defined, I established two general objectives for this project:

1. to advance in the conceptualisation of the activities of the high school mathematics teacher, his didactic knowledge and the design of initial training plans, and
2. to describe and characterise the development of the didactic knowledge of the groups of future teachers who participated in the course on Mathematics Education in High School in the academic year 2000-01, with respect to the curriculum organisers corresponding to subject matter analysis¹⁶⁰.

I started from the idea that it is possible to achieve the first objective on the basis of a functional view of the initial training of high school mathematics teachers and their didactic knowledge. I thus establish the following specific objectives, which I will develop in greater detail throughout this document:

¹⁶⁰ Subject matter analysis is one of the analysis of didactic analysis. See next section.

- ◆ to introduce and characterise a meaning for the expression *didactic analysis*, as a conceptualisation of the teacher's performance in the activities of designing, developing and evaluating didactic units;
- ◆ to incorporate a meaning for the term *didactic knowledge*, as a conceptual tool for tackling the problem of the mathematics teacher's knowledge; and
- ◆ to advance in the conceptualisation and foundations of curricular design of the course Mathematics Education in High School at the University of Granada.

For the empirical approach that I established in the second general objective, I started from two ideas. The first is that it is possible to organise and characterise the development of didactic knowledge of the groups of future teachers who participated in the course. Second, that it is possible to tackle the learning of a group of future teachers from the socio-cultural perspective. I established two specific objectives:

- ◆ to describe, characterise and explain the *development of didactic knowledge* of the groups of future teachers who participated in a version of the course and
- ◆ to describe and characterise the activities outside the classroom of a group of future teachers when they prepare their work for the course.

This document is organised around these dimensions and has three parts. In the first, I describe and explain the foundations of the design and development of the course *Mathematics Education in High School*. In the second, I tackle the research problem concerning the learning of the groups of future teachers who participated in the course. This empirical approach is composed of four studies, in which I identify four states of the development of didactic knowledge of the groups of future teachers, characterise the evolution of the partial meanings that they developed throughout the course, explore and characterise how they put the didactic knowledge into practice in their final projects and characterise the processes of negotiation of meaning in a group of future teachers. In the third part, I summarise the results of the first two parts in order to explain and justify my contributions to the four general questions with which this section began.

2. DIDACTIC ANALYSIS

Here I respond to the first of the questions I formulated in the previous section, when I proposed didactic analysis as the ideal procedure that the teacher can use to design, put into practice, and evaluate didactic units. I focus attention on planning as a daily activity of the teacher and will tackle two problems that the teacher faces when planning a lesson: the gap between planning on the global and local levels (Rico, 1997a), which leads to the idea that many teachers see planning as the covering of the mathematical contents; and the planning paradox, that is, the issue of whether a teacher who assumes a constructivist position with respect to the students' learning can achieve some objectives by means of concrete, structured and design tasks that, at the same time, lead students to create their own constructions and that foster an environment of negotiation in the classroom (Simon y Tzur, 2004).

2.1. Procedure for Didactic Analysis

Didactic analysis, as a local planning procedure, is a level of the curriculum. With it, the teacher can specify (and differentiate) the goals, content, methodology and evaluation scheme of each topic in planning. I take a functional view of the mathematics curriculum, by virtue of which the student applies his knowledge using conceptual tools to solve problems. In local planning, the teacher focuses his attention on a specific topic in mathematics. On this level, the teacher's planning should take into account the complexity of the mathematical content from different points of view. In fact, the negotiation and construction of the multiplicity of meanings of the mathematical concepts should be one of the central purposes of interaction in the classroom. Planning of a didactic unit or of an hour of class should be grounded in the exploration and structuring of the different meanings of the mathematical structures that are the object of that lesson plan.

My proposal approaches the meaning of the mathematical concept by attending to three dimensions, systems of representation, conceptual structure and phenomenology:

- ◆ In the *systems of representation* I include the different ways in which the concept and its relations to other concepts can be represented.
- ◆ In the *conceptual structure* I include the relations of the concept to other concepts, attending both to the mathematical structure of which the concept forms part and the mathematical structure that this concept configures.
- ◆ In the *phenomenology* I include those phenomena (contexts, situations or problems) that can give meaning to the concept.

These three dimensions of the meaning of a concept in school mathematics reveal and organise one of the central questions of the problem of class planning: the multiplicity of meanings of a concept in school mathematics.

This multiplicity of meanings implies that, for the purpose of planning one hour of class or one didactic unit, the teacher should:

1. be familiar with the three dimensions that characterise the meaning of a concept in school mathematics¹⁶¹ and be able to:
2. gather the information necessary to enable him to identify these meanings and organise this information so that it is useful for planning;
3. select from this information the meanings that he considers relevant for instruction; and
4. use the information that emerges from the different meanings of the concept to design didactic units.

¹⁶¹ In this study, I focus on the analysis of a concept and of the mathematical structures related to it. The topics in secondary education are not only concepts. They include, for example, operations between concepts, properties of concepts, results, procedures and systems of representation. All of these topics are framed by a mathematical structure and thus can be tackled with the tools of didactic analysis.

In the specific context of the planning of an hour of class or a didactic unit, the teacher can organise instruction based on four analyses :

1. *subject matter analysis*, as a procedure by which the teacher identifies and organises the multiplicity of meanings of a concept;
2. *cognitive analysis*, in which the teacher describes his hypotheses about how the students can progress in the construction of their knowledge of the mathematical structure when they face the tasks that will make up the teaching and learning activities;
3. *instruction analysis*, in which the teacher designs, analyses, and chooses the tasks that will constitute the teaching and learning activities that are the object of the teaching; and
4. *performance analysis*, in which the teacher determines the capacities that the students have developed and the difficulties that they may have expressed up to that point.

I use *didactic analysis* to refer to a cyclical procedure that includes these four analyses, attends to the factors conditioning the context and identifies the activities that the teacher should perform to organise the teaching of a specific mathematical content. The description of a cycle of didactic analysis follows the sequence described in Figure 91.

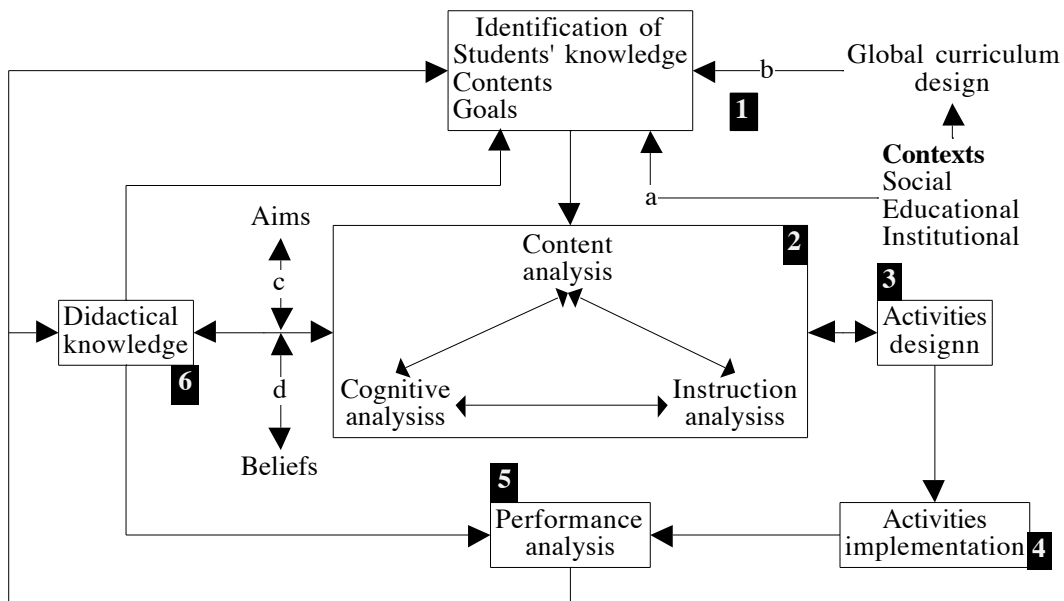


Figure 91. Cycle of didactic analysis

The cycle of didactic analysis begins with the determination of the content to be treated and the learning goals to be achieved. It starts from the teacher's perception of the students' understanding and is based on the results of the performance analysis in the previous cycle, taking into account the social, educational and institutional contexts that frame the instruction (box 1 of Figure 91). From this information, the teacher begins planning with subject matter analysis. The information that emerges from subject matter analysis serves as the basis for cognitive analysis, by identifying and organising the multiple meanings of the concept to be

taught. The cognitive analysis can then give rise to a revision of subject matter analysis. This relation between the analyses is also established with instruction analysis. Its formulation depends on and should be compatible with the results of the subject matter analysis and the cognitive analysis; but at the same time, performing it can generate the need to correct the prior versions of these analyses (box 2). In cognitive analysis, the teacher selects some reference meanings and, based on these and on the learning goals that have been imposed, identifies the capacities that he seeks to develop in the students. The teacher also formulates conjectures on the possible paths by which students can develop their learning when they tackle the tasks that make up the lesson. The teacher uses this information to design, evaluate and select these tasks. As a result, the choice of tasks that compose the activities should be consistent with the results of the three analyses, and the evaluation of these tasks in the light of the analyses can lead the teacher to perform a new cycle of analysis before choosing the definitive tasks that compose the teaching and learning activities (relation between boxes 2 and 3). The teacher puts these activities into practice (box 4) and, in doing so, analyses the students' actions to obtain information that serves as the starting point of a new cycle (box 5). Didactic knowledge (box 6) is the knowledge that the teacher brings into play during this process.

Each of the analyses is articulated around some notions, the *curriculum organisers*. For example, subject matter analysis includes the notions of system of representation, conceptual structure and phenomenology, which correspond to the three dimensions of the meaning of a concept in the context of school mathematics. For each notion, I adopt a theoretical meaning, a technical meaning and a practical meaning, which I will describe in the next section. Didactic analysis is performed for a topic in a course for which certain goals and contents have been defined in its global curriculum design. We should thus imagine that, as teachers, we have just finished the treatment of one topic (e.g., the linear function) and are going to start a new one (e.g., the quadratic function), as is indicated in the global curricular design of the course. The cycle begins with the teacher determining the students' current comprehension of the notions necessary to tackle the new topic, the contents that are to be studied and the learning objectives to be achieved. That is, the teacher should determine, from the perspective of the students' learning, the starting point (what the students know before starting the cycle) and the end point (what the teacher hopes that the students will know after the learning experience during a lesson).

2.2. Subject Matter Analysis

Subject matter analysis is the procedure by which the teacher can identify, organise and select the meanings of a concept or mathematical structure within the school mathematics content. The procedure is performed by attending to three dimensions: systems of representation, conceptual structure and phenomenology.

Systems of Representation

Following one of the traditions of the literature in mathematics education, I will use the expression "systems of representation" to refer to the systems of signs by which a concept is designated. The importance of the systems of representation in

subject matter analysis lies in the fact that: (a) systems of representation organise the symbols by means of which mathematical concepts are presented; (b) different systems of representation contribute different meanings to each concept; and, therefore, (c) the same concept admits of and requires various complementary systems of representation. I use the definition given by Kaput (1992), in which a system of representation is “a system of rules (i) for identifying or creating characters, (ii) for operating on them and (iii) for determining relations among them (especially equivalence relations)” (p. 523).

Given that the same concept or mathematical structure can be represented in different systems of representation, it is possible to group and characterise the operations that can be performed on them into four categories:

1. *Creation and presentation of signs or expressions.* This operation enables us to determine valid and invalid expressions ($(x)f = 3x^2 + 2$ is an example of an invalid expression in the symbolic system of representation for functions).
2. *Invariant syntactical transformations.* These are the transformations of one sign into another, within the same system of representation, in which the mathematical object designated by those signs does not change. Examples would be the procedures for completing squares, expansion and factorization that are shown in Figure 92.
3. *Variant syntactical transformations.* These are transformations of one sign into another, within the same system of representation, in which the mathematical object designated changes. This is the case, for example, of the horizontal and vertical translations shown in Figure 92.

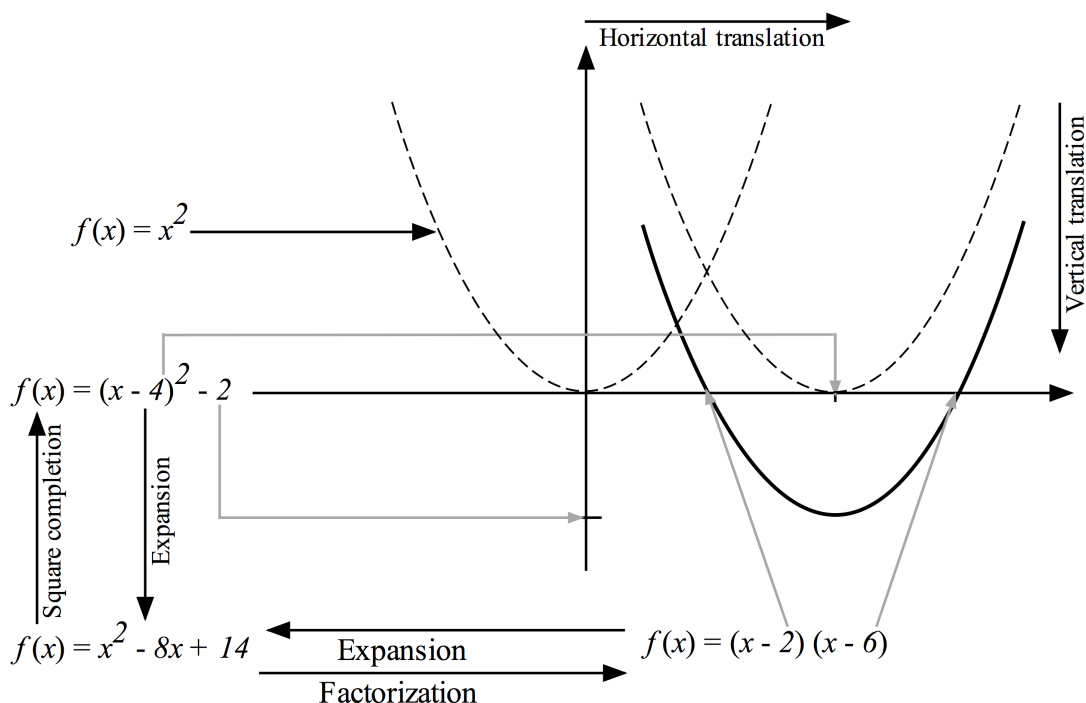


Figure 92. Operations in systems of representation

4. *Translation between systems of representation.* This operation refers to the procedure by which the relation is established between two signs that designate the same object but that belong to different systems of representation, for example, the relations between the parameters of the symbolic forms of the quadratic function and its graphic representation in a parabola in Figure 92.

Conceptual Structure

Systems of representation enable us to appreciate the complexity of the system of meanings of a mathematical concept. This complexity has its origin in the structural character of mathematical concepts: each concept configures a mathematical structure and forms part of other mathematical structures.

I will use the expression “conceptual structure” to refer to three aspects of every concept of the school mathematics content:

1. *Interrelated mathematical structures.* I will assume that every mathematical concept is related to at least two mathematical structures:
 - ◆ the mathematical structure that the concept configures and
 - ◆ the mathematical structures of which it forms part.
2. *Conceptual relations.* I will emphasise the relations that are established between the concept and
 - ◆ the concepts of the mathematical structure that this concept configures (e.g., the relation between the quadratic function and the quadratic equation),
 - ◆ the objects that are specific cases of this concept (e.g., $f(x) = 3x^2 - 4$ as a specific case of the quadratic functions of the form $f(x) = ax^2 + c$), and
 - ◆ the concepts that belong to the mathematical structure of which the concept forms part (e.g., the relation between the quadratic function and continuous functions).
3. *Relations of representations.* Exploring the meanings of a concept requires systems of representation, since with them it is possible to identify the ways in which the concept is presented. On taking into account the systems of representation, we can point out the relations that arise from operations in the systems of representation: invariant syntactical transformations, translation between systems of representation and variant syntactical transformations.

When the teacher explores the conceptual structure of a concept in school mathematics, he should take into account three kinds of “elements” and two groups of relations between these elements. The elements are:

- ◆ the *objects*, as specific cases of a concept, forming its extension;
- ◆ the *concepts*, as predicates that are saturated by the objects and, in turn, form mathematical structures; and
- ◆ the *mathematical structures*, which are shaped by concepts.

On the other hand, the relations described in points 2 and 3 above can be grouped into two categories, which I call *vertical relations* and *horizontal relations*. Vertical relations refer to relations between the three kinds of elements: object \rightarrow concept \rightarrow mathematical structure. Horizontal relations refer to the relations between

signs in their different systems of representation (relations between representations).

I propose that the teacher use conceptual maps as a tool for gathering, organising, representing and sharing the information corresponding to the meanings of a mathematical concept. From the perspective of the mathematical content, in a conceptual map we can identify different kinds of connections that correspond partially to the vertical and horizontal relations I described above:

- ◆ connections that establish relations between different elements of the mathematical structure (for example, between the different symbolic forms and their parameters),
- ◆ connections that associate different representations of the same element (for example, the parameters of the multiplicative form and the roots of the parabola),
- ◆ connections that associate the transformations of one element into another within one system of representation (for example, the procedure of factorization for transforming the standard symbolic form into the multiplicative symbolic form), and
- ◆ connections that show the relation between categories of phenomena and the substructures with which it is possible to organise them (for example, the relation between the properties of the focus of the parabola and the phenomena of optics that use these properties—not shown in the figure).

Phenomenology

I will use the term phenomenology, as a dimension of the meaning of a concept, to refer to the phenomena that give meaning to the concept. The concept acquires meaning with respect to the corresponding phenomena when the phenomena are linked to situations that the concept can describe or to questions that the concept allows us to ask. The same substructure can be related to diverse phenomena. We can therefore establish a relation between substructures and phenomena in which we assign to each phenomenon the substructure that serves as its model. We can establish pairs (Substructure_i, Phenomenon_j), in which Substructure_i is a model of Phenomenon_j. Figure 93 shows a diagram of these relationships.

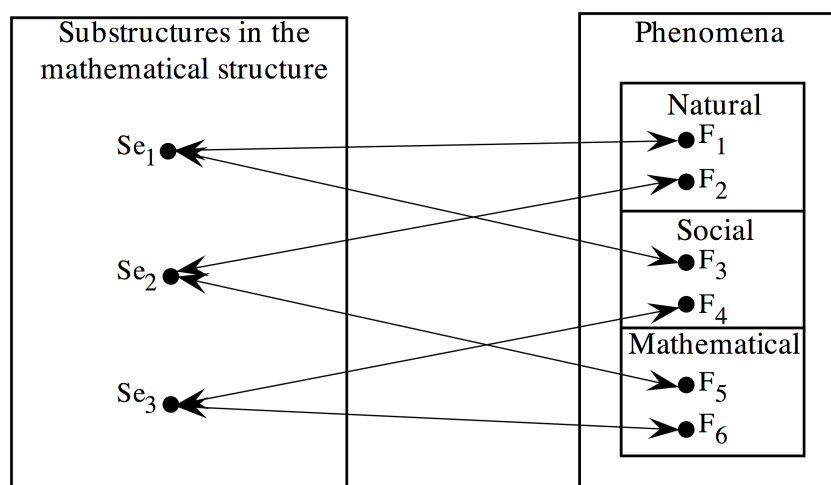


Figure 93. Phenomenological analysis

Thus, the phenomenological analysis of a mathematical structure involves the identification of:

1. the substructures corresponding to this structure,
2. the phenomena organised by each of these and
3. the relation between substructures and phenomena.

In this way, we can establish an equivalence relation in which each class of equivalence, represented by a given substructure organises all the phenomena of which it is a model. I use the expression *mathematical model* to designate the triad (substructure, phenomenon, relationship) in which the substructure is a model of the phenomenon according to a relationship. This relationship identifies those structural characteristics of the phenomenon (or of a situation or question related to the phenomenon) that are relevant from the mathematical perspective and at the same time are related to elements and properties of the mathematical structure in one or more systems of representation (see Figure 94).

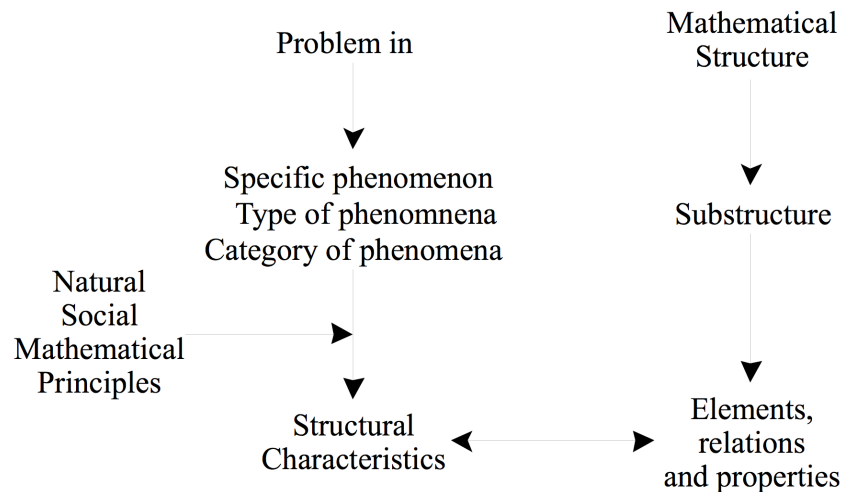


Figure 94. Phenomenological analysis and models

2.3. Cognitive Analysis

In cognitive analysis, “the teacher describes his hypotheses about how the students can progress in the construction of their knowledge of the mathematical structure when they face the tasks that compose the teaching and learning activities” (Gómez, 2002b, p. 271). To do this, the teacher must take into account his perception of the students’ understanding at the end of the previous cycle of didactic analysis, the goals that have been proposed for the next cycle, the content to be studied, and the context, among other issues. Cognitive analysis is an *a priori* analysis. With it, the teacher tries to foresee the students’ actions in the phase of the cycle in which the teaching and learning activities designed are brought into play. These hypotheses should be grounded in a description of the cognitive aspects related directly to the mathematical structure to be worked on with these activities.

I adapt the notion of *hypothetical learning trajectory* (Simon, 1995a) to the initial training of teachers of secondary school mathematics to propose the two procedures by which the future teacher can perform cognitive analysis. The first,

which I call *Table of Capacities-Competences*, through which the capacities are organised in terms of competences, enables us to describe and characterise the students' knowledge and mathematical thinking before and after the lesson. The second, based on the notion of *learning path*, is a procedure that uses the results of the first to enable the teacher to describe his hypotheses about the ways learning can develop between these two points. The cognitive meanings of school mathematics are based on three notions: capacities, competencies and difficulties.

Following the ideas that ground the notion of hypothetical learning trajectory (which I do not develop in this summary¹⁶²) and taking into account the conditions in which initial training is performed, I propose a procedure to describe the students' progress based on the identification, description and relation of five elements:

1. the capacities that the students have before the lesson;
2. the capacities that the teacher hopes the students will develop from instruction and that configure the learning objectives;
3. the tasks that form the instruction;
4. the difficulties that the students may encounter in tackling these tasks; and
5. the hypotheses about the paths by which learning can develop.

I start from the notion of *capacity*. In the context of school mathematics, I use this term to refer to the action of a student with respect to a certain kind of task (for example, the problems of transforming a symbolic form of the quadratic function—the standard—into another—the canonical). I will argue that an individual has developed a certain capacity when he can complete tasks that require it.

The first two points of the procedure that I suggest require the future teacher to organise information on: (a) what the students are capable of doing before instruction and (b) what he expects them to be able to do after instruction. Lupiáñez, Rico, Gómez and Marín (2005) have developed a procedure for organising this information based on the notion of competence. This notion enables us to establish a link between planning on a local level (of some specific activities in a particular topic) and the global curricular design (of a course). For example, we can perform the analysis based on the seven competences proposed in the PISA study (OCDE, 2004).

The information that emerges from subject matter analysis should allow the teacher to identify those *foci* on which he will work. The capacities are identified and organised within these specific foci. The procedure is performed with the help of a table in which the competences are recorded in the columns and the capacities in the rows. The table enables the teacher to determine (decide) which capacities can contribute to which competences. For each focus, the teacher can calculate the degree to which the capacities included in the focus contribute to each of the competences.

The table of Capacities-Competences is a good tool for describing and characterising the starting and end points that determine the extremes of the paths by

¹⁶² See the issue of *Mathematics Thinking and Learning* devoted to this topic (Clements y Sarama, 2004).

which learning can develop when students confront the activities that the teacher proposes to them. The information to produce it should come from subject matter analysis (the end point) and performance analysis (the starting point). The core of the information in this table is the list of the capacities that are included in each of the foci chosen.

In what follows, I present an example of the procedures involved in cognitive analysis. Let us suppose that the teacher has decided that he wants to work on a question that, in his experience or as a result of the information that comes from subject matter analysis, is important within the topic of the quadratic function. The purpose is to develop the capacities necessary for the students to solve problems involving the graphic meaning of the parameters of the symbolic forms of the quadratic function (see Figure 92).

Subject matter analysis provides most of the information needed to identify the capacities to be developed. In Figure 92, I have included some of the symbolic and graphic procedures that can be involved in the analysis. This detailed analysis shows that bringing the graphic meaning of the parameters of the quadratic function into play should involve knowing and using the procedures to transform one symbolic form into another, the symbolic and graphic procedures that establish the relation between the parameters in the canonical form, and the graphic transformations that are possible from the standard symbolic form.

In Table 46, I have identified some of the capacities implicit in this problem.

<i>Perform, communicate and justify symbolic transformation procedures</i>		<i>Identify, show and justify graphical elements</i>	
C1	Square completion	C8	Vertex coordinates
C2	Expansion	C9	Y-axis intersections
C3	Factorization	C10	X-axis intersections
		C11	Focus coordinates
		C12	Directrix equation
		C13	Symmetry axis equation
<i>Identify, show and justify symbolic elements</i>		<i>Perform, communicate and justify graphical transformation procedures</i>	
C4	Canonical form (a, h, k)	C14	Horizontal translation
C5	Focus form (p, h, k)	C15	Vertical translation
C6	Standard form (a, b, c)		
C7	Multiplicative form (a, r_1 , r_2)	C16	Vertical scaling

Table 46. Capacities involved in using the graphical meaning of the parameters of the symbolic forms

One *learning path of a task* is a sequence of capacities that the students can bring into play to solve it. The learning paths of a task can be represented by a diagram in which the capacities that correspond to the learning objective are grouped, and the sequence of linked capacities are depicted. Figure 95 shows one learning path for task T_1 , “Given that 2 and 6 are the intersections with the X axis of a parabola with vertical scaling 1, find the coordinates of the vertex”: determine the intersections with the X axis as a graphic element (C10), determine that these intersections correspond to the values of r_1 and r_2 in the multiplicative form of the quad-

atic function (C7), use the expansion procedure (C2) to obtain the standard form and determine it (C6), use the procedure of completing squares (C1) to obtain the canonical form and identify and determine its parameters h and k (C4), and establish the values of these parameters as the coordinates of the vertex in the graphic representation (C8).

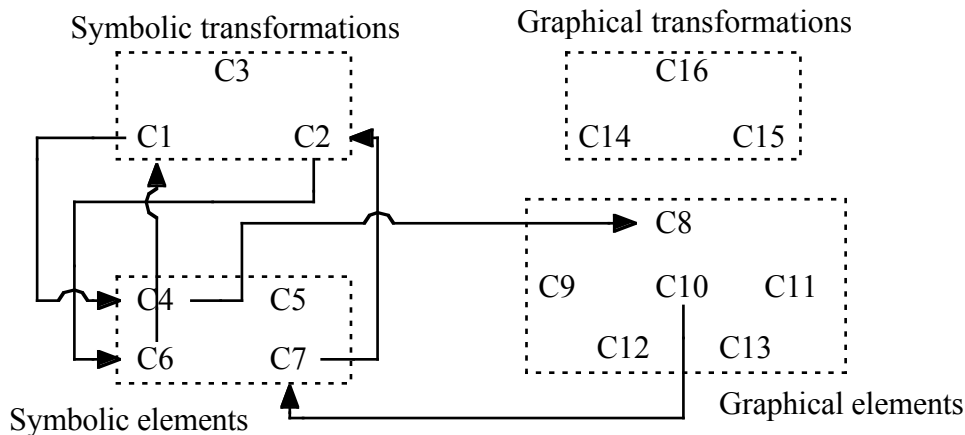


Figure 95. Learning path for task T_1

The learning path for the task T_1 that I present in Figure 95 informs the teacher of an *ideal* sequence of capacities that the students could bring into play to tackle the task. I say “ideal” because it is the sequence that arises from the conditions that the task imposes and the core of content that corresponds to the learning objective. From this ideal perspective, it is possible to speak of learning paths that correspond to a learning objective. To do this, the teacher can define all the tasks (or kinds of tasks) that characterise the objective, in the sense that the teacher considers that an individual has achieved the objective when he is capable of performing these tasks¹⁶³. The learning paths of an objective are thus those that correspond to these tasks. A learning path is more than the capacities that compose it: it is the sequence of capacities that enable the completion of certain kinds of tasks.

When characterising a learning objective in terms of its learning paths, the teacher should take into account his knowledge of the students’ errors and difficulties. The teacher can then include this information in analysis of the learning paths for an objective. The enumeration and description of difficulties makes sense only when the teacher has identified and characterised the capacities that correspond to the core of the content related to the learning objective for which he wishes to produce a plan. Analysis of the difficulties indicates the key questions that must be taken into account in this process. They are sequences of capacities of the network of learning paths to which the teacher should give special emphasis.

Which paths students follow will depend on the tasks given to them. Describing the capacities and the possible learning paths enables the teacher to make con-

¹⁶³ I refer here to *non-routine* tasks for which students do not know pre-established procedures before instruction. Therefore, in the context of a specific lesson, the tasks that characterise an objective are, from the perspective of the students, different from the tasks that characterise capacities. The latter are routine tasks.

jectures about these paths and, in so doing, revise the tasks that can be proposed in designing them. In initial teacher training, the tasks will not be put into practice, and the process is therefore hypothetical.

2.4. Instruction Analysis

The difference between cognitive analysis and instruction analysis is analytic: these two analyses depend on each other. In what follows, I will use the term *task* to refer to the instructions that the teacher gives the students; and I will refer to the *activities* of the students and the teacher that arise as a consequence of a task. In the two previous points, there are several implicit issues that should be made explicit:

- ◆ when assigning a task, the teacher has a purpose with respect to the students' learning, and that purpose can be articulated in terms of competences;
- ◆ when tackling a task, the students have a purpose (to complete it);
- ◆ the activities of the students and the teacher are composed of actions that seek to achieve the corresponding purposes;
- ◆ when performing these actions, both students and teacher bring into play a collection of capacities (that contribute to the development of the students' competences);
- ◆ the teacher's planning should include not only the analysis and selection of tasks, but also the forecasting of the possible actions the students may take when tackling a task and the capacities that they can bring into play to perform them.

I illustrate these relations visually in Figure 96, that shows the close relation between the notion of task and the notions of capacity and competence on which I based cognitive analysis.

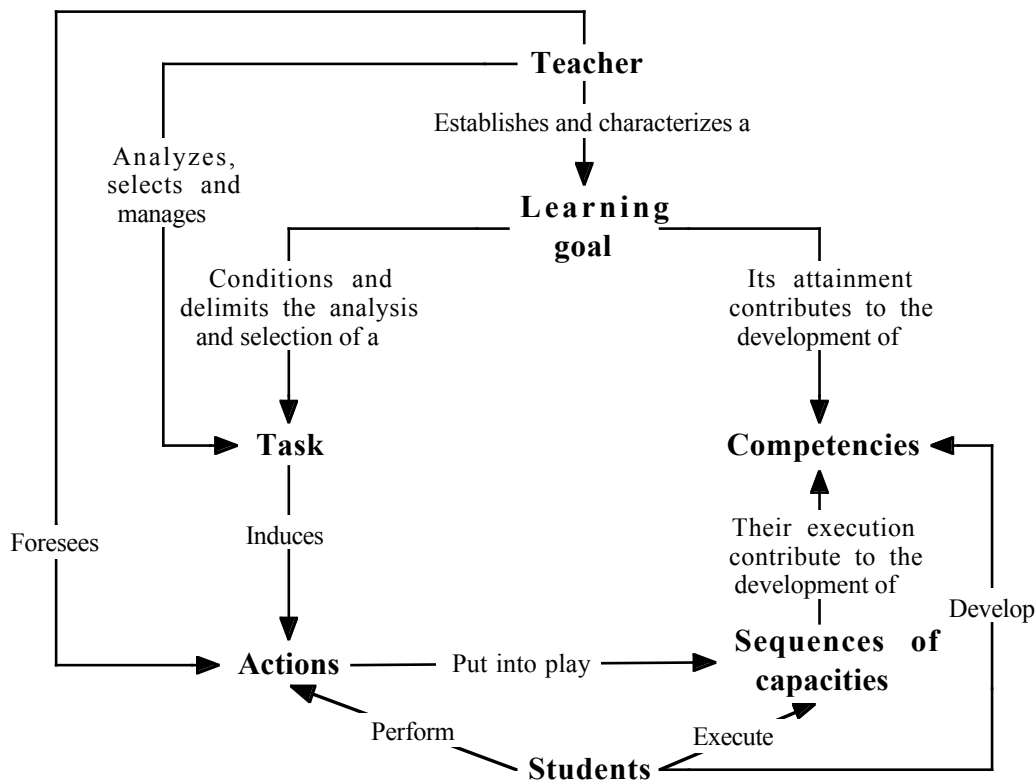


Figure 96. Task, capacities and competences

My focus is task analysis as a resource for achieving learning objectives. In this sense, the central criterion for classifying a task is its relation to the competences from which the teacher establishes the learning objectives and to the capacities that contribute to these competences. Therefore, rather than speaking of classification of tasks, I will speak of analysis and evaluation of tasks.

The model in Figure 96 shows the foundations of this purpose. Task analysis stems from the characterisation of the learning objective in terms of its contribution to the competences and its learning paths and should be a procedure that permits:

1. the identification of the capacities (and the possible links between them) that can be brought into play when the students tackle the task;
2. the construction of the diagram of learning paths that students can follow when they tackle the task;
3. the identification of the competences to which these capacities, with the task in question, can contribute and to what extent; and
4. the evaluation of the relevance of the task on the basis of this information.

Until now, this section has suggested a procedure that enables us to analyse and evaluate a task already designed. But how should we choose, design or adapt tasks? The tasks to which I refer are not routine tasks. They are what the literature refers to as “problems” and to the corresponding process of problem solving.

This leads me to underline the modelling of phenomena in the selection of tasks. In the framework of subject matter analysis, I described the notion of a

model as a one-to-one relation between elements and properties of a substructure of the mathematical structure and structural characteristics of social, natural and mathematical phenomena, and established their relation to phenomenological analysis. When students tackle a task, they are expected to bring into play the several relations between the mathematical structure and phenomena: in the modelling process and in the skills, reasoning processes and strategies that they should develop to identify the mathematical model that corresponds to a phenomenon (or a problem that refers to phenomenon); in the expression of this phenomenon or problem in terms of one or more systems of representation in order to solve the problem or interpret the phenomenon within these systems of representation; in the translation of the solution or the interpretation in terms of the phenomenon; and in the verification of this solution or interpretation. The teacher should thus perform two procedures when analysing and designing a task: phenomenological analysis, as the procedure that enables him to establish the relation between phenomena (and the problems that refer to them) and the mathematical structure; and simplification of the phenomenon or problem, that is, the transformation that the teacher should make of the problem from the real world into a text of the kind usually known as a word problem (Ortíz, 2000, p. 15).

The universe of tasks available can be expanded if the teacher takes into account the materials and resources available and the way these materials and resources enable the design of mathematical experiences complementary to those that can be proposed with paper and pencil. The materials and resources can transform the strategies that teacher and students use to represent the concepts and conceptual structures that form part of the mathematical structure (Gómez, 1997). When introducing the resource and using it in the design of tasks, the teacher can lead the students to bring into play capacities that would not emerge if the resource were not available. It is in this sense that the resources (and, in particular, technology) enable students to have new “mathematical experiences.” However, this situation does not affect the procedure of task analysis proposed in this section. The teacher will have to formulate conjectures about the students’ actions, the capacities that they will bring into play to perform them and the competences to which the capacities contribute (see Figure 96). Both the table of Capacities-Competences and the diagram of learning paths will change. Therefore, the relevance of using a resource in a task will be a function of its contribution to the learning objectives and of comparing this contribution to the result of the analysis of alternative tasks.

2.5. Performance Analysis

The purpose of performance analysis is to produce information that enables the teacher to determine the students’ current understanding, the contents to discuss in the classroom and the learning objectives that should be sought. In the first phase, the teacher can compare his predictions of what was going to happen in the classroom to what really happened. To do this, he can:

- ◆ establish to what extent the learning objectives were achieved, by identifying which capacities were brought into play and to what extent these capacities contributed to the competences considered relevant;

- ◆ review whether the tasks brought into play those capacities with which the teacher predicted that the students could have difficulties, whether these difficulties occurred (the students committed errors when bringing these capacities to bear) and whether some progress was achieved in overcoming these difficulties;
- ◆ identify the capacities that were brought into play and those that were not; and
- ◆ recognise the capacities, difficulties and strategies not foreseen yet shown in practice.

In summary, the teacher can produce the table of Capacities-Competences and the learning paths that are deduced from the students' action and compare them with those he predicted. The information gained from this analysis is relevant in a second phase of performance analysis to:

- ◆ review the relevance of the tasks used in the classroom;
- ◆ produce the table of Capacities-Competences for the new cycle;
- ◆ express, in possible learning paths, the teacher's conjectures on how the students' learning can be developed; and
- ◆ design, analyse and choose the tasks that shape the teaching and learning activities.

3. DIDACTIC KNOWLEDGE

In this section, I tackle the second question:

¿What should be the knowledge, capacities and attitudes of a teacher who acts effectively and efficiently?

The research literature on the teacher's knowledge in general and the mathematics teacher's knowledge in particular is extensive and varied. Different responses to this question (or related questions) have been formulated. The notion of pedagogical content knowledge proposed by Shulman (1986) has been one of the most important contributions to thinking on this topic. However, the general character of Shulman's original proposal does not allow us to explore the problem of the mathematics teacher's knowledge in detail. Most of the taxonomies of the teacher's knowledge are based on or use this idea and divide into separate compartments knowledge that in practice is brought into play in an integrated way. I will establish the meaning that I give to the expression "didactic knowledge" here and specify some of its characteristics. I maintain that reflecting on the teacher's knowledge should start from a functional view, in which the teacher's knowledge is a result of the analysis and description of the activities that he should perform to plan, manage and evaluate the lesson. Thus, the problem of the teacher's knowledge should be considered rather as the integration of knowledge, abilities and attitudes for action. This approach gives rise to the notion of the teacher's professional competences, an notion that has acquired great importance recently with the creation of an integrated higher education area in Europe. However, the proposals concerning the mathematics teacher's competences are currently lists of generic and specific competences in which it is not possible to identify either the relation between them or their function in the mathematics teacher's performance. I sug-

gest that, in using didactic analysis as a reference for the teacher's performance, it is possible to determine systematically and to organise in a structured way the capacities that contribute to the mathematics teacher's competences. I develop this notion with respect to the planning competence of the mathematics teacher.

3.1. Pedagogical Content Knowledge: a Powerful Notion

Until the early eighties, it was more or less generally accepted that the teacher's knowledge could be characterised by two independent and complementary components: knowledge of the discipline (content) and knowledge of general pedagogical issues. While criticising this view, Shulman (1987) produced a wider classification of the teacher's knowledge, which has been preserved with some changes by most researchers. This classification includes seven categories of the teacher's knowledge: thematic content, pedagogical content, other areas, curriculum, learners, educational goals, and general pedagogy (p. 8). Classifications like those of Shulman and Bromme (1994) necessarily imply a separation (at least analytical) of the teacher's different kinds of knowledge.

The meaning of the notion of pedagogical content knowledge has not evolved in a relevant way in the research on mathematical education in particular or in education in general over the last decade and a half. With some exceptions (e.g., Ball et al., 2005; Geddis y Wood, 1997; Morine-Dersheimer y Kent, 2001), most of the studies that mention the notion continue to use it with the general meaning proposed by Shulman, as the knowledge needed to transform a particular content for teaching (Kinach, 2002, p. 53). Shulman's concern focused on the gap between the academic and disciplinary knowledge that the teacher can have of a specific topic and the form this knowledge should take in order to be transmitted in the classroom. But if we adopt a constructivist stance toward learning, the problem is not to produce a *discourse* to transmit knowledge but to design and manage some *activities* through which the students can construct their knowledge and the teacher can achieve the learning objectives that have been imposed. Therefore, it is necessary to extend the idea of transformation of a content to be transmitted. *The product of the transformation is not in itself content, but some activities.* But the design and management of these teaching and learning activities requires the identification, organisation and selection of the reference meanings of the concept to be taught in order to design, put into practice and evaluate the corresponding teaching and learning activities. As I showed in the previous section, this analysis —didactic analysis— is subject to some procedures and tools and is conditioned both by the teacher's beliefs and goals and by the characteristics of the social, educational, institutional and classroom contexts. In other words, when we speak of an “efficient teacher” [as do Cooney (1994) and others] or of “pedagogically powerful forms” (as does Shulman), we cannot think, as Carlsen (2001) suggests, of pre-established, static, neutral knowledge. Rather, we are speaking of *an integration of knowledge, abilities, and attitudes for action.* In our case, we are speaking of the teacher's competences for planning didactic units.

3.2. Didactic Knowledge in the Initial Training of High School Mathematics Teachers

I will use the expression *didactic knowledge* to refer to the knowledge and skills that are necessary to perform a didactic analysis of a mathematical topic. Didactic analysis is composed of a set of procedures that enable the teacher to analyse a specific mathematical structure from various perspectives (content, cognition, instruction, and performance). These procedures are grounded in some notions, the curriculum organisers, which arise from the discipline of Mathematics Education. For example, the procedure for performing the subject matter analysis of a mathematical structure is based on the curriculum organisers that I have identified as systems of representation, conceptual structure, and phenomenology. In the literature on Mathematics Education, we find a variety of possible meanings for the notions (curriculum organisers) that are brought into play in didactic analysis. I identify this knowledge as *disciplinary didactic reference knowledge*.

For the purpose of designing the course Mathematics Education in High School, we, as designers and trainers, have interpreted the disciplinary didactic reference knowledge, and we have chosen some particular meanings for each of the curriculum organisers. This is the *didactic reference knowledge for the course*, that is, the combination of knowledge and skills that we, as designers of this training plan, have taken as an option within the disciplinary didactic reference knowledge and that we hope that future teachers will interpret and construct as one of the results of their training.

When participating in an initial training plan (in particular, the course Mathematics Education in High School), future teachers (and groups of future teachers) interpret the didactic reference knowledge and construct knowledge (individual or of the group). *This is the didactic knowledge of the future teacher or group of future teachers*. It is knowledge in permanent evolution and, in fact, my empirical interest in this research project focuses on describing, characterising and explaining (in part) the processes by which groups of future teachers develop their didactic knowledge. I will thus refer to the *meaning that a future teacher or group of future teachers has (or develops) for a curriculum organiser*. In this research project, I focus my attention on the development of didactic knowledge of groups of future teachers on the curriculum organisers of the subject matter analysis.

The reference meaning of each curriculum organiser can be considered by attending to three different but related issues. These are the theoretical, technical and practical meaning of each curriculum organiser. The *theoretical meaning*¹⁶⁴ of a curriculum organiser refers to the option that, as trainers, we have taken to be the meaning of the curriculum organiser within the range of possible meanings that exist in the literature on Mathematics Education. This theoretical meaning supports a combination of ideal strategies of analysis of a mathematical concept that configure the *technical meaning* of each curriculum organiser. These technical meanings, although based on the theoretical meanings, go beyond them to indicate the character of analytic tool that each of the notions acquires.

The analysis of a mathematical structure by means of each curriculum organiser has a practical purpose: the information that arises from these analyses should

¹⁶⁴ I use this form, instead of “theoretical reference meaning for the course”, for ease of reading.

ground the planning we expect the groups of future teachers to perform. I use *practical meaning* of a curriculum organiser to refer to the set of strategies and techniques needed to use the information that arises from the analysis of the mathematical structure with this curriculum organiser in the other analyses that make up the didactic analysis and the design of the didactic unit.

I understand the didactic knowledge of a group of future teachers as the combination of knowledge and abilities that they use to tackle the analysis of a mathematical structure with the purpose of producing and justifying a lesson plan. From this perspective, the didactic knowledge of a group of future teachers is formed around a structured combination of capacities that characterise their planning competence.

3.3. Didactic Analysis and the Capacities and Competences of the Mathematics Teacher

The meaning of the notion of competence and of its implications for competence-based education has evolved over time. Most recent definitions of this notion have common traits:

Competence involves the combination of attributes (knowledge, capabilities, skills, attitudes) structured into competencies which enable an individual or group to perform a role or set of tasks to an appropriate level or grade of quality or achievement (that is, an appropriate standard) in a particular type of situation, and thus make the individual or the group competent in that role... (Preston y Walker, 1993, p. 118, italics in the original)

In the European context of higher education, the notion of competence has acquired importance through the Tuning project (González y Wagenaar, 2003). This project focuses on characterising generic and specific competences for those graduating from the first and second cycles of university education. In this framework, in the context of the definition of competences for the Bachelor's degree in mathematics in Spain, the Spanish Subcommission of the ICMI established some general and specific competences for the initial training of high school mathematics teachers during the Itermat Seminar (Recio, 2004) (Rico, 2004c, pp. 8-9).

I explore the description of the competences of the mathematics teacher from an analytic perspective. I will use the description of didactic analysis to identify the *capacities* that can contribute to the development of some of the mathematics teacher's competences. I will list and organise these capacities according to the four analyses that compose didactic analysis. These are the capacities that I consider necessary to plan, put into practice and evaluate a didactic unit on a specific mathematical topic. In subject matter analysis, the procedures that compose didactic analysis indicate that, for the three dimensions of the meaning of a concept, the teacher should be able to:

- ◆ obtain the information necessary to allow him to identify the meanings of the concept;
- ◆ organise this information in a way that will be useful for planning a lesson;

- ◆ select from this information the meanings that he considers relevant for instruction, taking into account the conditions of the social, educational, and institutional contexts; and
- ◆ choose the reference meanings, taking into account the conditions of the classroom context (which arise from the information obtained from cognitive analysis).

Taking into account the procedures that compose didactic analysis, it is possible to develop in detail the basic capacities that emerge from each analysis. For example, the first two capacities of subject matter analysis refer to the identification and organisation of the meanings of a mathematical concept. If we consider the dimensions of systems of representation and the conceptual structure of these meanings, then to perform these procedures the teacher should be able to do the following for the corresponding concept:

1. identify its elements (objects, concepts and mathematical structures),
2. determine the different representations of these elements and
3. establish the relations between the elements and their representations.

If we develop the third capacity into greater depth, we see that it implies that the teacher should be able to establish the relations:

- ◆ between the concept and the concepts of the mathematical structure that this concept configures,
- ◆ between the concept and the objects that are specific cases of this concept,
- ◆ between the concept and the concepts that belong to the mathematical structure of which the concept forms a part,
- ◆ between pairs of signs that designate the same object or concept, within the same system of representation (invariant syntactical transformations),
- ◆ between pairs of signs that designate the same object or concept belonging to different systems of representation (translation between systems of representation) and
- ◆ between pairs of signs that designate two different objects or concepts within the same system of representation (variant syntactical transformations).

In the example I have just presented, we can see the structure of the capacities that contribute to the planning competence of a mathematics teacher. It is possible to identify some basic capacities that contribute to this competence and to structure them according to the analyses that compose didactic analysis. I have only analysed one of the basic capacities corresponding to subject matter analysis, as an example of how we could characterise in detail the mathematics teacher's competences. All of the capacities and the relations between them make up what I call *didactic knowledge*: the knowledge and skills (theoretical, as well as technical and practical) needed to perform didactic analysis of a mathematical topic. In reality, "the blending of content and pedagogy into an understanding how particular topics, problems or issues are organised, represented, and adapted to the diverse interests and abilities of learners, and presented for instruction" (Shulman, 1987 p. 8) that lie at the core of the notion of pedagogical content knowledge is more than a blend: it is a complex structure of knowledge and capacities that emerges when,

considering the specificity of a topic, we explore the problems of designing, putting into practice and evaluating didactic units.

4. FUTURE TEACHERS' LEARNING

In this section, I present the conceptual framework for the empirical studies that compose the research project described in this document. To do this, I take a position on the learning of future teachers in the context of the development of the course. Based on this position, I specify the meaning for which I will use the key terms of these studies: meanings that the groups of future teachers construct, development of didactic knowledge, and states and factors of development, among others. To identify the central notions and theories that give them meaning, I take into account both the general and specific goals of the empirical studies and the conditions under which they were made. I advance some aspects of the design of these studies in order to define the scope of the discussion.

The design of the course imposed conditions for the performance of the empirical studies. In this design, we sought to have the teachers develop competences for the design of didactic units. These competences had as a frame of reference didactic analysis and the notions that it organises. In particular, through subject matter analysis, the course sought to have the future teachers develop both knowledge of the notions of systems of representation, conceptual structure and phenomenology and the capacities needed to bring this knowledge into play. They were to obtain and organise information on the specific concept and use this information to produce and justify the design of a didactic unit. The future teachers worked in groups, and the course promoted interaction among them. The information available for the empirical studies emerged naturally from the normal development of the course (the productions and performances¹⁶⁵ of the future teachers when they tackled and performed the tasks required of them).

4.1. Future Teachers' Learning

Different theories of learning do not necessarily contradict each other. Learning is a multidimensional phenomenon. Each theory has its foci of interest for research, with which it illuminates different aspects of this phenomenon (Anderson et al., 2000). For example, different views of the nature of knowledge imply different approaches to learning (Putnam y Borko, 2000). However, in the case of the initial training of high school mathematics teachers, we should recognize that the teachers neither work nor learn alone. Teaching and learning to teach are social practices that require collaboration among peers (Secada y Adajian, 1997). The initial training of mathematics teachers is a complex social practice. The socio-cultural approach attends to this complexity (Adler, 1998; Lerman, 2001, p. 45). Research on the training of teachers from this perspective enables us to explore and characterise aspects of the process of teachers' change that traditional psychological perspectives do not allow us to see (Stein y Brown, 1997, p. 155), as these perspec-

¹⁶⁵ I use the term "production" to refer to the work handed in by the groups of future teachers and "performance" to refer to the actions performed by their members in the classroom.

tives tend to study the development process of individual teachers in highly structured contexts.

When taking into account the previous arguments and stating the goals of the empirical studies and the information gathered for them, I have chosen Wenger's social theory of learning (1998) as the conceptual foundation for the learning of future teachers. This theory views learning as a social phenomenon that forms part of the experience of participating socially in the world. The idea of participation refers to "a more encompassing process of being active participants in the *practices* of social communities and constructing *identities* in relation to these communities" (p. 4, italics in the original). Learning as social participation is based on four notions (p. 5):

- ◆ *meaning*, as our changing ability (individual and collective) to experience our life and the world as meaningful;
- ◆ *practice*, as our resources, plans and historically and socially shared perspectives that can support the mutual commitment to action;
- ◆ *community*, as the social configurations in which our enterprises are defined as worthwhile and our participation is recognisable as competence; and
- ◆ *identity*, as expression of how learning changes who we are and creates personal histories of becoming in the context of our communities.

The notion of meaning is located in a process of negotiation of meaning that emerges from the interaction between two other processes: participation and reification. Through participation, we establish relationships with other people, define our way of forming part of communities in which we commit ourselves to certain enterprises, and develop our identity. Through reification, we project our meanings and perceive them as existing in the world, such that we manage to materialise our experience in concrete things.

The notion of community is based on three ideas:

- ◆ *mutual commitment*, as the commitment to actions whose meaning is negotiated and that generate relationships between people;
- ◆ a *joint enterprise*, which is negotiated collectively and continually and which generates mutual responsibility and determines what is valued, discussed and shown and
- ◆ a *shared repertoire*, which includes the resources for negotiation of meaning, the discourse that enables us to make meaningful statements about the world and the styles for expressing forms of membership and identity as members.

Practice is an unstable, emerging structure, and learning in practice implies a mutual commitment to the search for an enterprise with a shared repertoire. Therefore, learning emerges to the extent that:

- ◆ different kinds of mutual commitment evolve;
- ◆ the enterprise is understood and refined; and
- ◆ shared repertoire is developed.

Mutual commitment generates relationships between people and connects them in diverse and complex ways. The development of practice involves maintaining sufficient mutual commitment in the search for the enterprise, together with sharing

of meaningful learning. The evolution of different kinds of mutual commitment is characterised by:

- ◆ how the environment influences it (what helps and what hinders),
- ◆ how identities are defined,
- ◆ how relationships are developed, and
- ◆ how meaning is generated, negotiated, and reified.

The joint enterprise of a practice is negotiated collectively and permanently and creates relationships of mutual responsibility between the participants who determine what is valued, discussed, justified, and expressed. The pattern of mutual responsibility becomes an integral part of practice. The process of understanding and fine-tuning the enterprise is characterised by:

- ◆ the role of external conditions,
- ◆ the characteristics of the discourse (what is discussed, expressed, valued), and
- ◆ the definition of the enterprise and the responsibilities.

The joint pursuit of the enterprise creates resources for the negotiation of meaning. These resources are the shared repertoire. They include routines, tools, symbols, actions or concepts that the community has created or adopted and converted into part of its practice. The repertoire “includes the discourse by which the members create meaningful statements about the world, as well as the styles by which they express their forms of membership and their identities as members” (p. 83). The repertoire reflects the history of mutual responsibility and remains inherently ambiguous. Both history and ambiguity contribute to the creation of meaning, but they can also generate obstacles. The development of the shared repertoire is characterised by:

- ◆ the styles of expression and work routines and
- ◆ the resources for negotiation of meaning.

4.2. Two Communities of Practice: Partial, Theoretical, Technical and Practical Meanings

In the context of the course Mathematics Education in High School and based on the previous discussion, I conceptualise the following two work environments as communities of practice:

- ◆ the *community of practice of the classroom*, in which the productions of the groups of future teachers are discussed and critiqued and in which the meanings brought into play are negotiated and established (on many occasions, without reference to a specific topic); and
- ◆ the *community of practice of each group of future teachers*, in which the meanings are negotiated and established (on most occasions as specific to the group’s topic) by bringing them into play when developing the productions that the group will present to its colleagues and to the trainers.

My interest in this research project focuses on the learning processes that take place in the communities of practice of each of the groups. Given the work methodology of the course, the results of these learning processes are made explicit in the community of practice of the classroom, when each group periodically and systematically makes its presentations to the others. Therefore, the classroom’s

community of practice conditions the activities of the groups' communities of practice: for each presentation, each group must reach consensus about the task in question. This consensus is made explicit in the information contained on the transparencies that the group uses to make its presentation and in the performance of the group's members in class.

I consider, therefore, that the information contained in the transparencies and the classroom performance of the group's members are expressions of the meanings that this group has constructed so far. I use the term *partial meanings* to refer to these meanings. I call them "partial" because I want to emphasise that the meanings that one group has constructed at a given moment in the course are always open to improvement. They are the result of what the group has learned up to that point, as a result of a continuous and dynamic process of negotiating meanings in the group's community of practice. In other words, for each presentation, each group has achieved a certain development of its shared repertoire, and its productions (transparencies and performance) are expressions of this shared repertoire.

Examining and describing the development of didactic knowledge of the groups of future teachers requires characterising their partial meanings as these meanings are expressed in their productions and performances. Let us remember that each curriculum organiser in the subject matter analysis (for example, the notion of systems of representation) has different meanings. I characterise these meanings in terms of the actions, capacities and knowledge that we expect the future teacher to develop in tackling the analysis of a specific mathematical topic. In the context of the course, we hope that, for each of the curriculum organisers of didactic analysis and for a specific mathematical concept, the future teacher:

1. will know the meaning of the curriculum organiser;
2. will obtain and organise information on the meanings of the concept in terms of the curriculum organiser;
3. will use the information obtained to perform the other analyses of the didactic analysis; and
4. will use the information from all of the analyses for the design of the didactic unit.

These activities performed by the teacher correspond to the theoretical (1), technical (2) and practical (3 and 4) meanings of the curriculum organisers that compose the didactic analysis and in turn configure three kinds of knowledge that the future teacher will have. In this context, *theoretical knowledge* is declarative and involves the capacity to describe the notion in the abstract. I call *technical* the knowledge and capacities to analyse a mathematical concept in terms of a given curriculum organiser. For example, identifying the different representations of a concept forms part of technical knowledge. Finally, in this context, *practical knowledge* involves the capacities required to use technical information in an orchestrated way with a practical purpose (e.g., the planning of a didactic unit).

The relation between the activities the future teacher is expected to perform, the meanings of the curriculum organisers in didactic analysis and the kinds of knowledge involved show the complexity of didactic knowledge and of the initial

training of high school mathematics teachers. Didactic knowledge, such as the knowledge brought into play and developed in performing didactic analysis, is *knowledge for action*, as I characterised it when I described it in terms of competences. Development of this knowledge requires future teachers to be able to transform the notions that make up the didactic analysis into instruments. The development of the didactic knowledge of future teachers is based on an interplay between theory and practice that can be characterised by adapting the theory of instrumental genesis (Rabardel, 2003; Rabardel y Bourmaud, 2003; Vérillon, 2000): This is achieved by using the curriculum organiser (the instrument) as a mediator between future teachers and the concept on which they are working, a mediator that they construct and about which they develop meanings concerning both the notion and the concept. The idea of instrumental genesis arises from the argument that an artefact becomes an instrument to the extent that three processes take place:

1. *Instrumentalisation*, as the process in which the subject transforms and adapts the artefact to his needs and circumstances (Rabardel y Bourmaud, 2003, p. 673).
2. *Instrumentation*, as the process by which techniques are developed (p. 673). These are abilities to apply the tool to perform significant tasks (Kaptelinin, 2003, p. 834) that are transformed into techniques (Artigue, 2002, p. 250). A technique is an amalgam of reasoning and routine procedures that enable the completion of a task (p. 248).
3. *Orchestrated integration*, by which the tool is integrated with other artefacts (Kaptelinin, 2003, p. 834).

These ideas allow me to conceptualise the main aspects of the activity of a group of future teachers in a phase of the methodological cycle of didactic analysis, when they tackle the task of analysing their concept with the help of a curriculum organiser or when they use the information that emerges from this analysis to perform other analyses or design the didactic unit.

When performing these tasks, the group develops processes of instrumentalisation, instrumentation and orchestrated integration. That is, they transform and adapt the meaning that they assign to the curriculum organiser (instrument), develop plans for applying the tool either to obtain information about the meanings of the concept (object) or to use this information in other analyses, and integrate the use of a specific instrument (e.g., the systems of representation) into other instruments in the design of the didactic unit. *It is through using the instrument (curriculum organiser) as mediator among the group of future teachers (subject) and the concept on which they are working (object) that the group constructs and develops meanings about both the curriculum organiser and the concept.* This activity, which involves the generation of techniques, transforms the group's practice.

Instrumental genesis takes place in this process of performing tasks: the artefact (the curriculum organiser, in its theoretical conception) is transformed into an instrument to the extent that the group of future teachers develops plans to complete the tasks with the help of the instrument. And it is in this process of instrumental genesis that the group negotiates meanings (of the curriculum organiser, of

the object and of the plans) that are brought into play in the activity, reified in the shared repertoire and manifested in their productions and performance in the classroom. As a result, the idea of instrumental genesis allows me—for the specific context of this research project—to specify and conceptualise the general process of negotiation of meaning proposed by Wenger into a more specific process that characterises the activities that the groups of future teachers perform outside class.

4.3. Development of Didactic Knowledge and Development Factors

In the context of Wenger's social theory of learning (1998), the idea of development acquires a significance of which I will develop one specific aspect: the development of the shared repertoire. By specifying the notion of development of didactic knowledge in the development of the shared repertoire of each group of future teachers, I can relate the ideas of development and meaning in the same conceptual framework. Following Wenger, I use the expression "shared repertoire" as the reification of the processes of negotiation of meaning that takes place when groups of future teachers, as communities of practice, tackle the tasks of the course. It is in this process that the shared repertoire is *developed*. Given that each time that the groups of future teachers make a presentation in class, they must arrive at a consensus on what they are going to propose, the processes of negotiation of meaning are made specific (reified) systematically and periodically. This reification is expressed in the information contained in the transparencies used by the groups of future teachers to make their presentations and in the presentation by the members of the group supporting their proposals.

I tackle the exploration of the learning of groups of future teachers, from the perspective of the development of their didactic knowledge, from two approaches:

1. the description and characterisation of the productions and performance of the groups of future teachers in their work within the community of learning in the classroom and
2. the description and characterisation of the processes of negotiating meaning that take place in the community of learning of one of the groups of future teachers.

In the first approach, I focus my interest on the productions of the groups of future teachers and on some aspects of the processes of negotiation of meaning that emerge from the presentation of these productions in class. My purpose is to describe and characterise what results from the processes of negotiation of meaning within each group of future teachers. In particular, I am interested in studying how the productions and performance of each group change (evolve) over time, as a reflection of the evolution of the meanings brought into play by each group in developing each production and thus as an expression of the development of their shared repertoire.

In the second approach, I examine in greater depth, for the case a specific group of future teachers, the processes of negotiation of meaning that give rise to these productions. In this second approach, I analyse the constitution and development of the group's community of practice, following the guidelines of Wenger's social theory of learning.

I conjecture that it is possible to identify patterns in two aspects of the productions of the groups of future teachers. On the one hand, it is natural to think that the differences (with respect to a curriculum organiser) in the productions of the groups are the result of a limited number of the groups' partial meanings. Therefore, I hope to identify patterns (categories) that organise those partial meanings. These patterns in the partial meanings should be expressed in a limited number of *attributes* of the productions. These attributes characterise the bringing into play of these meanings in the analysis and description of a mathematical structure.

The second kind of pattern has to do with the process of change in the groups' productions. I believe that, just as it is possible on many occasions to identify states that characterise the cognitive development of the individual, it is also possible (but not for the same reasons) to think that the development of didactic knowledge of groups of future teachers can be characterised in terms of certain *states of development*. Each state of development would be determined by patterns in the evolution of the partial meanings of the groups of future teachers. If it is possible to identify these states of development, my interest will focus on exploring how changes in the productions of the groups of future teachers can be both representative of and represented by these states. In this way, I would succeed in establishing a preliminary approach to the study of the development of the didactic knowledge of the groups of future teachers.

The notion of state of development, as a representation of patterns in the partial meanings that the groups of future teachers bring into play in developing their productions and interacting in the classroom, enables me to be more specific about the idea of the difficulty and progress of a group of future teachers. I will say that the productions or performance of a group reveal a *difficulty* with respect to a curriculum organiser when successive productions by the group do not evolve but rather remain in the same state. I will speak of the *progress and advance* of the productions of a group when they move from early states to more advanced ones. In terms of the meanings of the groups of future teachers, the difficulties are revealed in partial meanings that persist in spite of the efforts of instruction to change them. Progress shows the reorganisation of these partial meanings into others closer to the reference meanings promoted by instruction.

I am inspired by the idea of "quality of information" developed in the discipline of management of organisations to reformulate and organise the attributes of the quality of the information contained in the transparencies of groups of future teachers and expressed in their class presentations in three dimensions, which I call *development factors*: variety, organisation and role. The factor *variety* includes the idea that, for each curriculum organiser of subject matter analysis, the description of a mathematical structure can be made with a larger or smaller quantity of information, depth or complexity¹⁶⁶. The factor *organisation* indicates how, within a production, the information gathered is organised for one or more curriculum organisers of the subject matter analysis. Finally, the third organising fac-

¹⁶⁶ Given that the number of levels of a conceptual map not only represent variety but also indicate its structural complexity, I call this factor for the specific case of the structural concept, *complexity*. The factor called organisation of the conceptual structure explores another aspect of this structural complexity.

tor of the attributes of a production is the putting into practice of the information gathered for a given curriculum organiser. I call this factor *role*, since it seeks to reflect the role that each curriculum organiser of the subject matter analysis plays in other aspects of the didactic analysis.

To summarise, the attributes that reflect the meanings that a group has brought into play in a production for each curriculum organiser of the subject matter analysis can be organised into three factors: variety (or complexity), organisation and role. These factors are related, as shown in Figure 97.

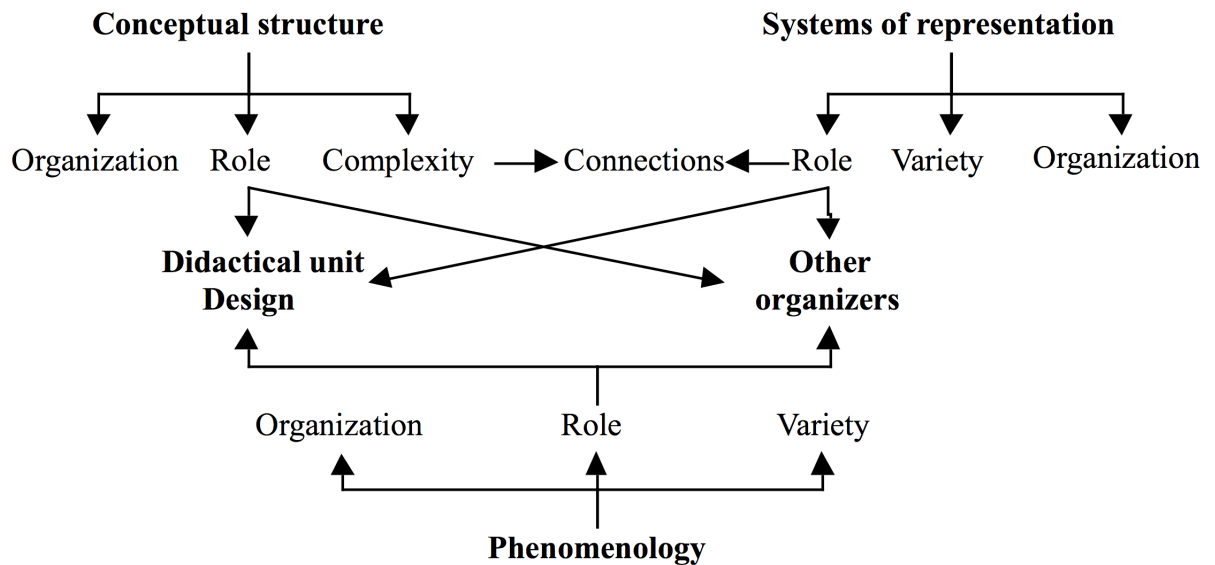


Figure 97. Development factors of didactic knowledge

The notions of partial meaning and didactic knowledge refer to attributes that cannot be observed in the groups. To discuss these, it is necessary to refer to the productions and performance of the groups as expressions of these meanings and of this knowledge. To specify the relationship between these two aspects of the research problem, I establish links between the different elements described in this section (see Figure 98).

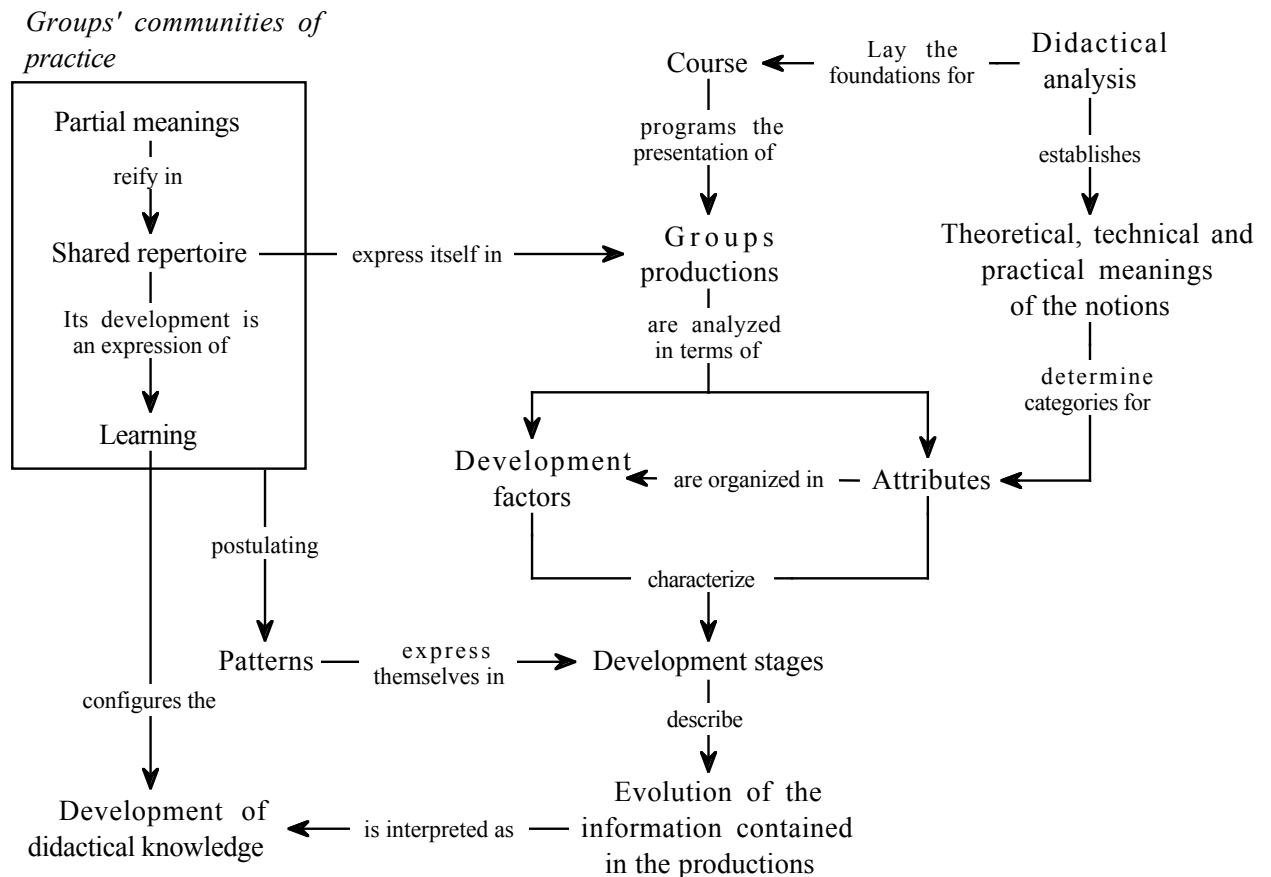


Figure 98. Learning, productions and development of didactic knowledge

I began by defining my theoretical approach on the future teachers' learning. This is a socio-cultural view of learning through which each group is conceptualised as a community of practice in which its members negotiate meanings. These meanings, which I have called partial given that they are continually subject to improvement, reify in the shared repertoire of each group. The productions and performance of a group in completing a task are the expression of the development of their shared repertoire up to that point. The design of the course foresees the periodic presentation of these productions. Didactic analysis, as a conceptualisation of the teaching of high school mathematics, grounds the design of the course and establishes the theoretical, technical and practical meanings of the curriculum organisers of the subject matter analysis. These meanings determine the categories used to analyse the productions in terms of certain attributes. These attributes are organised into development factors. They postulate regularities in the development of the shared repertoire of the different groups and assume, therefore, the existence of the patterns expressed in some states of development. It is conjectured that these changes in the productions of the groups of future teachers can be both representative of and represented by these states. If they can be characterised, these states describe a process of evolution in the information contained in the groups' productions. This process can then be interpreted in terms of the development of the didactic knowledge of the groups of future teachers, as an expression of the development of their shared repertoire.

5. DESIGN OF THE COURSE¹⁶⁷

My purpose in this section is to show the role of my proposal on didactic analysis and didactic knowledge in grounding and conceptualising the course and to describe it as the context in which the empirical studies were performed.

5.1. The Course

I am describing the course delivered in 2000, with specific attention to three aspects: the context, its grounding and its curricular design.

Context

The educational policy in effect when this research project was undertaken proceeded from the Reformed University Law of 1983 (Boletín Oficial del Estado, 1983), known as “the LRU” and the Law of the General Arrangement of the Education System of 1990 (Boletín Oficial del Estado, 1990), known as “the LOGSE”. The LOGSE establishes the basic conditions for achieving the status of a teacher: a Bachelor’s degree or that of engineer or architect plus the Certificate of Pedagogical Aptitude (CAP). Universities offer graduate study programmes that grant this certificate. In the case of the University of Granada, those who take the Methodology Specialisation, which I will describe next, receive the CAP. Those who satisfy these two basic conditions and wish to pursue a position as high school mathematics teacher must pass the “oposiciones” (competitive national examinations).

In 2000, the University of Granada had a study programme for initial training of high school mathematics teachers. This programme formed part of the Bachelor’s degree in mathematics at the university. The Bachelor’s degree offered three specialisations: Pure Mathematics, Statistics and Methodology. The students chose one of these at the beginning of the fourth year. The first specialisation sought to train mathematics researchers, the second mathematicians with the capacity to perform in the production and service sectors and the third, high school mathematics teachers. The study programme was based on the Methodology Specialisation.

At the University of Granada, and at the Spanish university in general, the academic culture can be summarised as an evaluation plan based on very few exams, in which the students “risk” passing or not passing each subject, and a teaching plan in which there are no textbooks and where the professor presents, in the fashion of chair professor, his own content. As a result, the students develop a study plan that focuses on taking notes during class, organising them at home and studying them, in most cases only a short time before exams.

¹⁶⁷ From now on, to simplify, I will speak of “the course”. The course is a living being, constantly evolving. Its curricular design in the academic year 2000-01 was the product of this process of continuous transformation. I use the present tense to facilitate reading, although this section describes the curricular design of the course during the academic year 2000-01.

Most future teachers who participate in the course believe that they have solid training in mathematics. Their main concern when they begin the training plan for teachers has to do with managing the class, the issue in teaching that generates the greatest unease. They expect the plan to provide them with solutions to what they perceive to be the practical problems that they will encounter in the classroom (Gómez et al., 2002). Two thirds of the future teachers have teaching experience prior to the training plan, through work in private classes or in tutoring services for high school students. This teaching experience gives rise to “didactic intuitions” that often ground their performance when they tackle the tasks performed in class (Gómez, 2001a).

Foundations

The notion of didactic analysis is central to the foundation of the second block of the course. In emphasising the role of didactic analysis in the teacher’s activities and the initial training of teachers, we take sides: we start from a particular position on how students learn mathematics in the classroom and propose an ideal vision of how teaching should develop. This establishes one of the two anchors of our conception of the training of high school mathematics teachers: to contribute to the development of the competences and capacities necessary to perform didactic analysis. Our view of the learning of future teachers provides the second anchor for our conception of the initial training of high school mathematics teachers, on which the design of the course is based. We have taken a social constructivist position.

The characterisation of the procedures that compose didactic analysis and the reference meanings of the notions involved in these procedures enable me to identify and structure the capacities needed for the high school mathematics teacher’s planning competence and thus to specify the didactic knowledge that we wish future teachers to develop during the course. This functional view of the initial training of teachers grounds the goals and contents of the second block of the course. The methodological and evaluation plans in the design are based on our position with respect to the future teachers’ learning.

5.2. Course Design

To describe the design of the course, I follow a curricular plan and describe briefly its aims, goals, contents, methodology and evaluation plan.

Aims and Goals

The aim of the course is to contribute to beginning the training of the future mathematics teacher through mathematics education. In the course, we seek to contribute to the training of the future teacher in two dimensions: the beginning of his participation in communities of practice of mathematics educators and the development of the knowledge and capacities necessary for the planning of didactic units. In considering that the course, as a training plan in the processes of planning didactic units, is also a community of practice, we wish the future teachers to develop their capacity for participation in this community by constructing the knowledge and capacities needed to perform didactic analysis. The knowledge and capacities are specified in the social construction of meanings of the notion of curriculum, the foundations of school mathematics and the curriculum organisers.

Contents

The contents of the course are organised according to the outline in Figure 99. The course begins with analysis of and reflection on the history of mathematics and of mathematical education in Spain, which serves as the context in which to discuss the antecedents of Spain's mathematics curriculum. The notion of curriculum is the foundation supporting the rest of the contents. We discuss the goals of mathematics education and reflect on the levels and dimensions of the curriculum. Using this conceptual reference, we analyse some Spanish and international curriculum projects, reflect on the antecedents of the mathematics curriculum in Spain, and study the general organisation, levels of specificity and contents of the high school mathematics curriculum currently in effect.

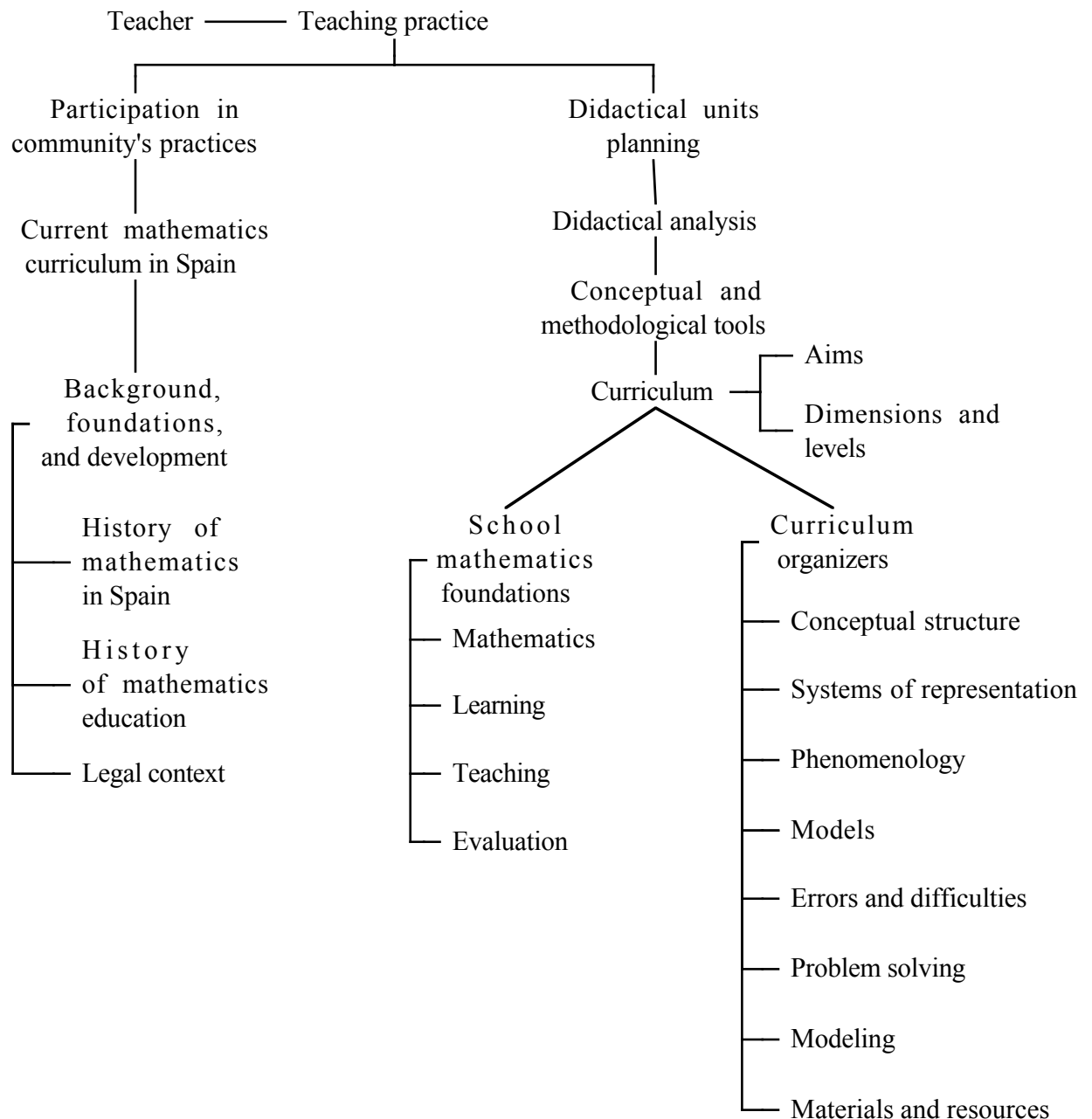


Figure 99. Content structure of the course

Didactic analysis organises the treatment of the curriculum organisers. We develop a general theoretical analysis of each of the curriculum organisers but also study the ways that these notions acquire technical and practical meaning when they are used to analyse specific mathematical structures. The course thus has a specific mathematical content that is shown in the mathematical structures for which the didactic analysis is performed.

Methodology

In the course, we use different methodological plans. I will now describe the plan used systematically in the simulation of the process of planning a didactic unit.

Each group of future teachers chooses a mathematical topic on which to perform the didactic analysis and design a didactic unit. The plan is cyclical. Each cycle corresponds to a curriculum organiser. The sequential order in which the curriculum organisers are treated follows the plan shown in Figure 99.

The cycle starts from the discussion that ended the previous cycle. In general, this discussion (for example, of systems of representation) leads to the introduction of a new curriculum organiser (for example, the notion of phenomenology). From this introduction, we propose an in-class exercise that consists of using this notion for a predetermined mathematical structure or the mathematical structure on which each group is working. The groups present their proposals and discuss possible meanings of the curriculum organiser in its practical application. Then, the trainers present an example of how the notion can be used for a specific mathematical structure (different from those assigned to the groups). For the next class, the students are to apply this curriculum organiser (and those considered so far) to a mathematical structure. In the next session, each group presents the results of its work to the rest of the class. Classmates and trainers discuss and critique each presentation. Finally, the trainers moderate a discussion in which we seek to formulate questions and activities that tackle the errors and difficulties we found in the presentations. On some occasions, the trainers suggest aspects of the reference meaning of the curriculum organiser being used. The end of the cycle has two parts. First, the trainers use the previous discussion to motivate the introduction of a new curriculum organiser. Second, one of the trainers reviews each of the productions and produces a document with his comments and suggestions. The future teachers receive this document at the next session.

Evaluation

When we look at the classroom as a community of practice and consider learning as progress in participation in this community, evaluation is expressed as one curricular component that is constantly present in all aspects of the training process. When it is accepted that there is a common problem to be solved and that there are conceptual tools and methodologies for tackling it, and when the future teachers share their productions with the rest of the class and negotiate the social meanings that govern discourse in the classroom, individuals and groups can recognise the strengths and deficiencies of their contributions. The classroom discourse revolves around the meanings that individuals and groups mobilise to solve the problems. Thus, these meanings are constantly being evaluated, discussed and critiqued. This evaluation takes place in the two communities of practice. As trainers, we guide the discourse in the classroom to emphasise the achievements and deficiencies of the contributions proposed, taking into account the disciplinary knowledge that serves as a reference for didactic knowledge. On the other hand, for each written production of the future teachers (document or transparency for a presentation), we produce a document in which we formulate our comments, criticisms and suggestions.

The evaluation of the work of the future teachers is the result of the evaluation of all of their productions and of the trainers' appraisal of the way in which each future teacher progresses in his participation in the classroom's community

of practice. We pay special attention to the work and the final presentation in which each group presents and justifies the design of a didactic unit on its topic.

6. DEVELOPMENT OF THE COURSE

The purpose of this section is to describe the development of the course during the 2000-01 academic year. This was the period in which I gathered the information for the studies that compose the empirical dimension of this research project. The learning process of the groups of future teachers depended, as was to be expected, on the experiences gained during the academic year from having attended and performed activities that took place in the course. Therefore, the development of the course is central information for achieving the goals of this research project. But it is not possible (and makes no sense) to reproduce here each of the events that, a priori, might have had some effect on the learning of the future teachers. I will identify these events in the empirical studies that I present in subsequent sections. In this section, I will present a general view of the sequence in which we treated the contents and describe the class sessions in which we worked on didactic analysis. For this block of the course, I will also present an example of the productions of one of the groups of future teachers and of the comments made on these productions.

6.1. Organisation and Development of the Course

In the academic year 2000-01, 36 future teachers registered for the course, 25 women and 11 men. All were students pursuing the Bachelor's degree in Mathematics at the University of Granada and were in the fourth or fifth year of the Methodology Specialisation. During the first few weeks, the future teachers were organised into eight groups: five groups of five, two groups of four and one group of three members. These groups remained stable throughout the course. At the beginning of the second quarter, each group chose a mathematical topic for which it would develop a didactic analysis and produce the design of a didactic unit. The topics chosen were the following: graphs and functions, progressions, decimal numbers, probability, conic sections, the sphere, quadratic function and systems of linear equations.

The course syllabus was followed strictly, with delays of no more than one class hour. The plan of the modules that I presented in the previous section, and in which the curriculum organisers were studied in a similar way, was followed strictly in the development of the subject matter analysis (see Figure 101, below). In the other analyses of the didactic analysis, the plan was combined with presentations by the trainers on theories of learning, difficulties and errors, problem solving and evaluation.

6.2. Sessions on Subject Matter Analysis

The following describes briefly the class sessions on subject matter analysis.

Conceptual Structure

The session began with a review of the topics covered in previous sessions. The trainer proposed an exercise through which he sought to explain to the future teachers his idea on the concept of derivative. The trainer observed the group work, answered questions and suggested organising the ideas that had emerged. The future teachers participated actively with different proposals. Various future teachers expressed their concern for teaching, but the trainer specified the mathematical aspects of the exercise. Interest was expressed in examining the relations of the concept of the derivative. One future teacher observed that, “everything must be related, because it has to do with the concept of derivative”. Another future teacher established the difference between the concept of derivative and its applications. This observation generated a discussion among several future teachers, in which several didactic and historical aspects of the concept were raised. The trainer insisted on the need to focus on the mathematical aspects of the concept and to try to organise the information obtained. At the end of the session, the trainer formulated the work to be done for the next session.

At the start of the next session, some future teachers commented on and raised questions about the idea of concept and conceptual structure. Several comments focused on the role of the definition as a means for “making a concept understood”. The trainer presented the future teachers with a proposal for a conceptual structure for the idea of derivative and suggested that they try to improve on the conceptual structures they had made for their topic. The groups of future teachers worked in class. In the second part of the session, they presented the result of their work. The notion of systems of representation as another curriculum organiser was identified. In the next hour of class, the groups of future teachers presented their proposals for the conceptual structure of their topic.

Conceptual Structure and Systems of Representation

The notion of system of representation was introduced in the following session, based on the work that the future teachers had done in the previous session. The comments by the future teachers conveyed some of their difficulties with this notion: they did not see the systems of representation as a means of organising the conceptual structure and did not succeed in focusing their attention on the mathematical aspects of the concept: they continued to express their concern with didactic questions. However, one central idea emerged: they were representing the same object (concept), so the elements of different representations had to be related. At the end of the session, the trainer formulated the following task:

Next week, we will continue with the topic of systems of representation. And the task due in a week...is to try to improve, detail, deepen the conceptual structure of each topic, trying to emphasise, trying to reflect on, the role that the systems of representation can play in describing the plan... Then what we want is to see how deep we can go...in trying to emphasise not only that there are a great number of elements, but trying to emphasise how these elements are related, how they are structured. One of the ways that we can have criteria for structuring them is by trying to see how the notion of systems of representation can contribute to this structure ... [42-B192]

In the next two sessions, the groups of future teachers presented their work. On this occasion, it happened that each group received comments and critiques immediately after its presentation. This generated discussion and further explanation among the future teachers.

Figure 100 presents the transparency used by the group on quadratic function to make its presentation. The transparency is organised into three categories: symbolic, graphic and phenomenology. In the symbolic system of representation, we find the following categories: forms of expression, zeros of a function, vertices, concavity, convexity, axis of symmetry, domain, trajectory. The multiplicative symbolic form appears for the first time. In the graphic system of representation, the future teachers introduce the idea of cuádrics. In phenomenology, they develop in detail mathematical phenomena such as area and volume. They establish very clear external point-to-point connections, identifying the coordinates of points such as the vertex and the intersections with the x-axis. They also establish connections for vertical scaling, concavity and the axis of symmetry.

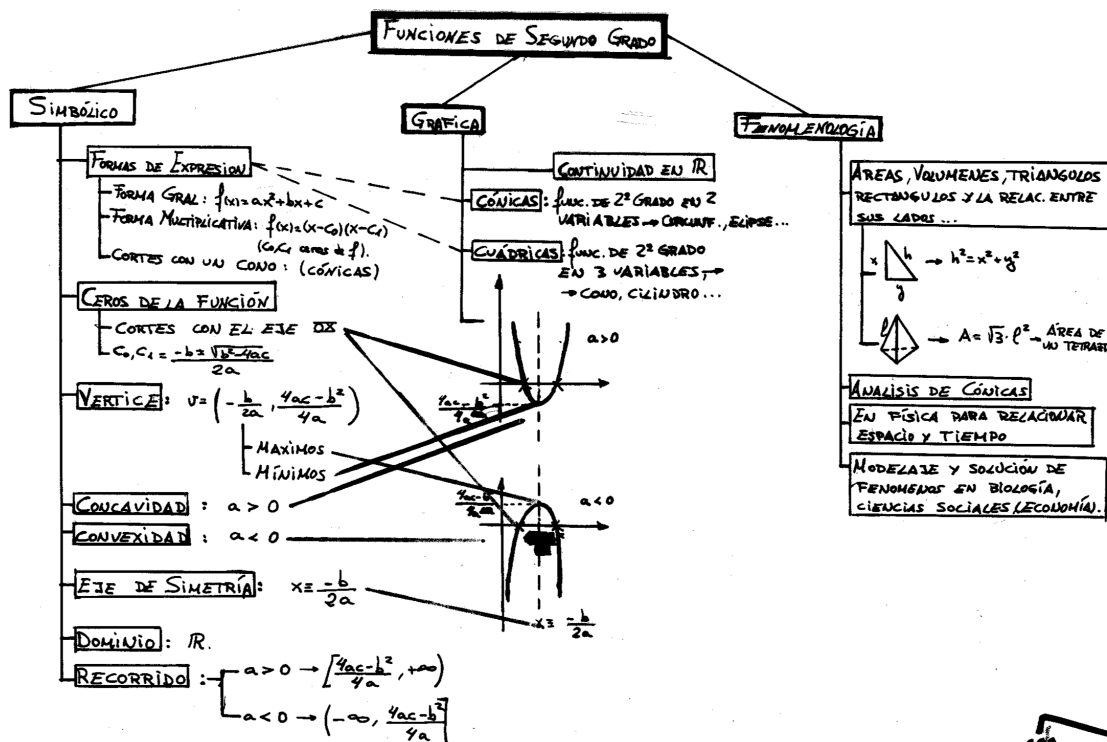


Figure 100. Conceptual structure and systems of representation of the quadratic function group

This version did not show very radical changes over the previous version. The most interesting issue was the appearance of a series of very clear external point-to-point connections, as well as the appearance of the multiplicative form within the symbolic system of representation. The mention of the numerical system disappeared (it was the table of values in the previous version). The internal connections within the symbolic system of representation were implicit (expressing some properties as a function of the parameters of the general form). The procedures for

symbolic treatment were still not present, with the exception of the use of the quadratic equation for relating the two symbolic forms presented. To summarise, the group kept the structure it used previously and described parts of it in greater detail.

The following text corresponds to some of the comments that, as trainer, I made on the presentation and the transparencies of the group on quadratic function just discussed.

... What are the elements of each system of representation, and what are the properties? How are they related to each other?

...

In the case of the symbolic system of representation, it is interesting that the multiplicative form has appeared and that you have suggested a relation between this form and the general form by means of the quadratic equation. Are there more symbolic forms? If there are, how are they related to each other? What elements do they have, and what properties are emphasised in them? How are these elements and properties related to the elements and properties of other systems of representation, such as the geometric system of the Cartesian plane?

Systems of Representation and Phenomenological Analysis

In the next two sessions, the trainer, basing his comments on the previous work of the groups of future teachers, specified the meaning of the notions of conceptual structure and system of representation and introduced the notion of phenomenology. Then and during the next two sessions, the groups of future teachers presented their work. This included improving the conceptual structure, taking into account systems of representation, and attempting a first phenomenological analysis of a topic.

Phenomenology

From the comments and discussion generated by the previous presentations, the trainer led the groups of future teachers to improve their work on the phenomenology of each topic. In the following session, they presented their work.

6.3. The Rest of the Sessions on Didactic Analysis

The rest of the sessions of the course dealt with cognitive analysis and instruction analysis. The trainers introduced the notions of modelling, errors and difficulties and gave a presentation on theories of learning. The future teachers analysed their topic from this perspective. In the instruction analysis, they reflected on problem solving and discussed materials and resources. The groups of future teachers were asked to identify one difficulty related to their topic and to design an activity to tackle this difficulty. The trainers gave a presentation on evaluation, and the groups of future teachers designed and presented an evaluation activity for their topic. The last class sessions were devoted to the trainers' presentation of an example of didactic analysis and the design of a didactic unit on natural numbers. The final course activity was the presentation of the final projects of the different groups of future teachers.

7. DESIGN OF THE EMPIRICAL STUDIES

In this section, I will describe the design of the empirical studies with which I seek to tackle the fourth question: What characterises the learning processes of the future high school mathematics teachers who participate in this kind of initial training programme?

7.1. From a General Question to some Research Goals

In the previous sections, I specified this general question by defining the research context and describing the concepts and theories that will enable me to give meaning to the expression “characterise the learning processes of the future high school mathematics teachers”. I can now formulate some specific research questions:

1. What are the partial meanings, with respect to the notions of subject matter analysis that emerge in the development of didactic knowledge when groups of future teachers participate in the course?
2. How can we describe the evolution of these partial meanings in terms of states and factors of development?
3. How can we characterise the states of development, if they can be determined?
4. Is it possible to explain these states of development, and the associated partial meanings, in terms of what happens in the community of learning in the classroom and in the community of learning in one of the groups?

I can also describe the general goal of the research. It is to

describe and characterise the development of the didactic knowledge of the groups of future teachers who participated in the course on Mathematics Education in High School in the academic year 2000-01 with respect to the notions that compose subject matter analysis.

I describe this general objective more fully in the following specific objectives.

1. For each of the notions considered and for the relationships between them, to describe and characterise
 - ◆ the partial meanings that the groups of future teachers developed throughout the course and
 - ◆ the evolution of didactic knowledge of the groups of future teachers in terms of states and factors of development.
2. I also seek to
 - ◆ propose conjectures that will enable me to explain the evolution of didactic knowledge in the groups of future teachers, and
 - ◆ contrast some of these conjectures.

7.2. Methodology: Making Choices

This section describes the path that I, as designer, trainer, and researcher, followed over several years in my relation to the initial training of high school mathematical teachers in general and to one training programme in particular. I was not the

focus of the research, but its design and results tell about my beliefs, values and attitudes, as well as my performance as a trainer and researcher.

My beliefs and values are expressed first in the conceptual choices I have made and presented in the previous sections. These choices include the conceptualisation of the teaching of mathematics, a functional vision of the teacher's knowledge, a position on how this knowledge is constructed and developed, a proposal about how the initial training of high school mathematics teachers should be achieved and a detailed description of how the course developed.

Within the limits established in the conceptual framework just described, it is possible to think of multiple methodological strategies for tackling the research problem. The choice of methods was determined by two issues: ensuring that performing the research would affect the development of course as little as possible, and deciding to focus attention on the work and productions of the groups of future teachers, relegating the analysis of the performance and the productions of the future teachers as individuals to second place. These choices are shaped by my intention to investigate using the information that arose naturally from the course and my interest in exploring the processes of negotiation of meaning in a group of future teachers when they worked outside the classroom on tasks assigned for class.

This research is a case study: the case of the development of didactic knowledge of future teachers of a specific course at a specific time. Its purpose is to give a "proof of existence"; that is, to present evidence of a case in which a strategy (of training) produces certain results.

7.3. Information Sources

In the thematic block on didactic analysis, we used the cyclical work plan described in Figure 101.

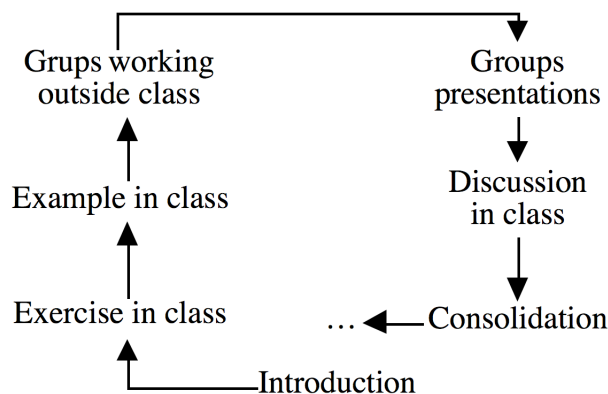


Figure 101. Cycle of methodological treatment of didactic analysis

This work plan gave rise to three kinds of information that I used in the empirical studies:

1. the information contained in the transparencies used by the groups of future teachers and by the trainers to give their class presentations,
2. the information contained in the transcriptions of the audio recordings of the class sessions and

3. the information contained in the final projects presented by the groups of future teachers.

I used two additional sources:

4. the transcriptions of the audio recordings of semi-structured interviews with the groups on conic sections and arithmetic and geometric progressions as they were finishing the didactic analysis and at the end of the course and
5. the transcriptions of the audio recordings of the work sessions outside the classroom by the group on quadratic function in the process of developing its presentations and the final project.

7.4. Four Studies

To tackle the research problem and achieve the objectives, I organised the project into four studies. I identified each study by its main information source:

- ◆ analysis of the presentations
- ◆ analysis of the productions and performance of the groups of future teachers in the classroom and in the interviews with the two groups of future teachers,
- ◆ analysis of the final projects and
- ◆ analysis of the performance of the group on quadratic function in its work outside the classroom.

In what follows, I will call these studies *presentations*, *productions*, *final projects* and *group on quadratic function*, respectively. I will describe these studies in the following sections.

8. FOUR STATES OF THE DEVELOPMENT OF DIDACTIC KNOWLEDGE

This chapter presents a first attempt to characterise the development of didactic knowledge in the groups of future teachers who participated in the course. To do this, I use the information contained in the transparencies that they used to make their periodic presentations in class¹⁶⁸. I used the notion of development factor to interpret the information contained in the transparencies in terms of the evolution of partial meanings that the groups of future teachers developed with respect to each of the curriculum organisers of subject matter analysis. This imposed some specific goals: (a) to identify the most representative attributes of the transparencies of the groups of future teachers; (b) to define some variables for analysis based on these attributes; (c) to verify that these variables follow stable patterns over time; (d) to identify and characterise some of the states of development from these variables; and (e) to describe and characterise the development of didactic knowledge from these states of development.

¹⁶⁸ For easier reading, I will often use the term “transparency” to refer to the information contained in these documents.

8.1. From 72 Transparencies to Four States of Development

Although each group worked on a specific mathematical topic throughout the course, I was interested in producing a characterisation of the evolution of the partial meanings of the different groups of future teachers that would be independent of these topics. In other words, I was interested in comparing the progress of the different groups. How to codify the 72 transparencies to achieve these goals? One transparency from a group gave schematic information on this group's analysis of its topic. Each analysis used as a tool one or more of the curriculum organisers. My purpose was thus to define the combination of codification variables that I could use to characterise the attributes from the 72 transparencies. Since each transparency expressed the partial meanings of a group at a given moment, its codification should be based on the technical and practical meanings of the curriculum organisers.

For example, I decided to consider the following systems of representation: symbolic, graphic, numerical, geometric, figurative, verbal and others. For each variable, I established whether the corresponding system of representation appeared in the transparency. The process of identifying and defining the codification variables was cyclical. Starting from the technical and practical meanings of the curriculum organisers of the subject matter analysis, I produced a list of variables that I used to create a first codification of the 72 transparencies. Next, I clarified and extended the initial list, taking into account the development factors: organisation, complexity and role. With these criteria, I performed several codification cycles, trying with each cycle to fine-tune the choice and definition of the codification variables. I obtained a final list of 120 codification variables. The variables characterise the transparencies according to diverse criteria. For example, from the perspective of the development factor "complexity", I considered (among other things) the number of different kinds of phenomena and the number of substructures.

From these codification variables, I defined (again, through a cyclical process) 12 variables for analysis, taking into account what our experience as trainers indicated about how the groups of future teachers advance in their learning; the review and systematic analysis of transparencies and their codification; the technical and practical meanings of the curriculum organisers of the subject matter analysis; and the analysis of the development factors and their meaning. The development factors were the guiding thread in the process of transforming and summarising the basic data (which emerged from the codification variables) in the variables for analysis. The variables that emerged were the following: (a) number of levels of the conceptual map that describes the topic, (b) existence of the main ideas of the topic in the conceptual structure, (c) number of criteria for organisation of the conceptual structure, (d) consistent use of the organisation criteria, (e) number of connections, (f) number of systems of representation, (g) role of systems of representation as organisers of the conceptual structure, (h) number of contexts (mathematical, natural, social) to which the phenomena presented belong, (i) number of disciplines to which the phenomena presented belong, (j) number of substructures used to organise the phenomena, (k) role of the three curriculum organisers of the subject matter analysis in the use of the other curriculum

organisers and in the design of the didactic unit, and (l) consistency between the proposal of the conceptual structure and its use in other phases of the course.

The values of these variables were obtained from the values of the codification variables. In what follows, I will use the term *observation* to refer to the information contained in a transparency and to its interpretation in terms of the variables of analysis just presented. A first analysis of the observations allowed me to verify that they followed a pattern of evolution and to establish that these patterns could be characterised by four states of development. Once I had characterised all of the variables of analysis and decided on the number of states, the problem was to characterise these states in terms of combinations of values of these variables, such that the succession of states would be representative of an evolution and the observations would fit as much as possible the states to which they were assigned. The first step in this attempt focused on the formulation of a preliminary definition of the states that would be consistent with the conceptual framework (the technical and practical meaning of the curriculum organisers of the subject matter analysis) and with my experience as a trainer. For each variable, I identified four ranges of values, each range corresponding to one of the four states, successively. I imposed two conditions for the definition of the ranges: the union of the four ranges should be equal to the total range of the values that the variable could assume; and two successive ranges of a variable could share at most one value — unless the range is of the type $[n, \infty)$ —. Table 47 shows the ranges I assigned to each of the variables and from which I defined the first version of the states.

	Variables	States			
		1	2	3	4
1	CE Complexity	[0, 0]	[1, 1]	[2, 2]	[3, ∞)
2	Central notions	[0, 0]	[0, 0]	[1, 1]	[1, 1]
3	Organization criteria	[3, ∞)	[2, 3]	[1, 2]	[0, 1]
4	Coherent use of criteria	[0, 0]	[0, 1]	[1, 1]	[1, 1]
5	Connections	[0, 0]	[1, 2]	[2, ∞)	[3, ∞)
6	RS variety	[0, 1]	[1, 2]	[2, ∞)	[3, ∞)
7	RS as organizers	[0, 1]	[2, 2]	[2, 3]	[3, 3]
8	Phenomena variety	[0, 1]	[1, 2]	[2, ∞)	[2, ∞)
9	Disciplines variety	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, ∞)
10	Substructures variety	[0, 0]	[0, 1]	[1, 2]	[2, ∞)
11	Role	[0, 0]	[0, 0]	[0, 5]	[6, ∞)
12	CE coherence	[0, 0]	[0, 0]	[1, 1]	[1, ∞)

Table 47. First definition of the states

To establish the development states, I used a procedure that I called *discrepancy analysis*, described as follows. The purpose is to obtain the definition of the states in terms of the variables that provides the best possible fit with the observations. When assigning observations to states, discrepancies appear. This occurs when, for at least one variable and one state, an observation assigned to that state assumes values that do not belong to the range established for this variable in this state. The problem is to obtain a definition of states that minimises the number of discrepancies, with an acceptable degree of discrimination between them.

This process of obtaining the definition of the states is cyclical. Each cycle is composed of two steps: assigning observations to states and changing the definition of the ranges of some of the variables for some of the states. In the first step, the assigning is done such that the state chosen for an observation is that which generates the lowest number of discrepancies. In the second step, the variables that generated a greater number of discrepancies are identified, as well as the states in which they generate these discrepancies. We then analyse the consequences of changing the definition of those states (and possibly of contiguous states) in terms of these variables. The change in ranges is governed by a twofold criterion: to reduce the number of discrepancies while maintaining an acceptable level of discrimination between states. Once the ranges of the variables that generate a larger number of discrepancies have been changed (in the states that generate them), it is necessary to review the assignment of observations to states. This begins a new cycle. The data from this study required three cycles. When I reviewed the definition of the states in terms of the variables the fourth time, I saw that the changes that enabled me to reduce discrepancies involved too significant a loss in the degree of discrimination. Therefore, I stopped the process at this point.

8.2. Four States of Development of Didactic Knowledge

I used the procedure that I have just described to analyse the observations. Table 48 presents the definition of the states that I obtained after three cycles of the procedure.

	Variables	States			
		1	2	3	4
1	CE Complexity	[0,0]	[1,2]	[2,∞)	[2,∞)
2	Central notions	[0,0]	[0,1]	[1,1]	[1,1]
3	Organization criteria	[3,∞)	[2,3]	[1,2]	[0,1]
4	Coherent use of criteria	[0,0]	[0,1]	[1,1]	[1,1]
5	Connections	[0,0]	[1,3]	[3,∞)	[3,∞)
6	RS variety	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)	[3,∞)
7	RS as organizers	[0,1]	[1,2]	[2,3]	[3,3]
8	Phenomena variety	[0,1]	[1,2]	[2,∞)	[2,∞)
9	Disciplines variety	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)	[3,∞)
10	Substructures variety	[0,0]	[0,1]	[1,∞)	[2,∞)
11	Role	[0,0]	[0,5]	[0,5]	[6,∞)
12	CE coherence	[0,0]	[0,0]	[0,0]	[1, ∞)

Table 48. Final definition of states

Table 49 presents the final assignment of observations to states. Each row represents a group of future teachers and their corresponding observations, organised chronologically. The observations corresponding, for example, to group 7 were then assigned successively to the following states: 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 3 and 4.

Group	Observation								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	2	2	3	3	4	3	4	4
2	1	2	3	3	3	3	3	3	4
3	1	2	2	3	3	3	3	3	3
4	2	2	2	2	2	3	3	3	3
5	2	2	3	3	3	3	3	4	4
6	2	2	2	3	3	3	2	3	4
7	2	2	3	3	3	3	4	4	4
8	1	2	2	2	3	3	3	2	2

Table 49. Final assignment of observations to states

Finally, Table 50 presents the number of discrepancies by group and observation.

Group	Observation									Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1 Functions and graphs	1	1	2	0	0	0	1	1	0	6
2 Progressions	3	3	0	0	1	1	1	2	2	13
3 Decimal numbers	1	2	2	2	1	1	1	0	1	11
4 Probability	3	0	2	1	2	1	1	1	5	16
5 Conics	3	1	2	0	1	1	3	2	3	16
6 Sphere	2	1	1	1	1	2	2	4	3	17
7 Second degree function	2	1	0	0	0	2	2	3	0	10
8 Systems of lineal equations	2	1	1	0	3	1	5	3	4	20
Total	17	10	10	4	9	9	16	16	18	109

Table 50. Number of discrepancies by group and observation

Because the definition of the variables and the corresponding observations did not satisfy the conditions of standard methods of grouping, such as cluster analysis, I developed the discrepancy analysis. However, the definition of the states that emerged from this analysis grouped the values of each variable in a maximum of four ranges. I used these ranges to define some new variables, such that for a given variable I assigned the value 1 to the first range, the value 2 to the second, and so on. With these new variables, I performed a cluster analysis of the observations and confirmed that the results were consistent with the result of the discrepancy analysis.

8.3. States of Development, Evolution and Progress of the Groups

The schema for codifying and analysing the information with which I obtained the results is based on a cyclical process that seeks to minimise discrepancies. The states of development that emerge from this process identify the combinations of values (or ranges of values) of the variables to which, as a whole, the observations are best adapted to a given task. These combinations of values of variables can thus be considered representative of the most significant states of development of didactic knowledge in the groups of future teachers. From the information in Ta-

ble 48, I can characterise these four states in terms of the curriculum organisers of the subject matter analysis and the development factors, as follows:

State 1 is a basic state in which the conceptual structure lacks complexity, various criteria are used without consistency, at most one system of representation is used (without connections), and there is no variety in the phenomenological analysis. In Table 49, we see that only three groups have observations classified in this state. This suggests that it is a state that can be surpassed with the prior knowledge and didactic intuitions that the future teachers bring initially to the task.

State 2 is a transition state. There is some complexity in the conceptual structure, and variety begins to appear in the systems of representation, although there is still no variety in the phenomenological analysis.

State 3 shows an advance in all of the variables except those of role and consistency. The conceptual structure is complex, with an intermediate level of organisation. There is variety in the systems of representation and the number of connections. There is some variety in the phenomenological analysis.

State 4 achieves full complexity in the phenomenological analysis, and we can see the consistent use of the information for the completion of tasks.

8.4. A First Approach to the Development of Didactic Knowledge

The characterisation of the states and assigning of the observations to them is the main result of this study. This result confirms my initial conjecture: that the didactic knowledge of the groups of future teachers evolves according to stable patterns. This is a gradual evolution that starts from a basic state possibly grounded in prior knowledge and didactic intuitions of the groups of future teachers. The development is consistent with the order in which the different notions are presented during instruction. However, there is a lag between the time the topics were presented and the time the partial meanings of the groups of future teachers materialise in the shared repertoire and are expressed in their productions. The notion of systems of representation, for example, is not consolidated at the time when this curriculum organiser was presented in class and the groups of future teachers were asked to analyse their topic from this perspective. This is only the first step.

The partial meanings of the groups of future teachers for this curriculum organiser undergo diverse transformations and are consolidated to the extent that subsequent tasks lead the groups of future teachers to bring their knowledge of this notion into play to solve other problems (for example, to perform the phenomenological analysis or design an evaluation activity). In terms of the theory of instrumental genesis, the artefact (the curriculum organiser) is transformed into an instrument to the extent that the groups of future teachers develop plans for completing the tasks with the help of the instrument. The process of instrumental genesis takes time: it requires that the groups of future teachers negotiate meanings (of the curriculum organiser, of their mathematical topic and of their techniques) that these partial meanings materialise (in different forms) on subsequent occasions when the groups present their productions in class. This process explains some of the differences between the observations and the pattern expected from the classification of the four states.

The groups progress in the development of their didactic knowledge at different rates. The step from state 2 to state 3 occurs at different moments (from the third observation for three groups, from the sixth for group 4). Two groups establish their productions in state 3 and, of the five groups that present productions classified in state 4, two achieve it as late as the last observation (the final project). One group regresses to state 2 in the last two productions.

These varied rhythms of progress and levels of advance can have different causes. The variety of the moments at which the move from state 2 to state 3 occurs may indicate some difficulty in bringing into play and developing the notions of systems of representation and phenomenology. However, all of the groups succeeded in overcoming this difficulty. The step from state 3 to state 4 is more complex. There are groups that do not achieve it and others that only achieve it in the final project.

There is a partial consistency between the rate of progress and the level of advance of the different groups and the total number of discrepancies they present. The groups with a higher rate of progress and level of advance (1 and 7) are also groups with a lower number of discrepancies. Two of the three groups with a greater number of discrepancies are the groups with a slower rate of progress and lower level of advance. This situation may confirm the idea that the discrepancies are a measure of the consistency with which the group advances in each of the dimensions of its didactic knowledge (the variables).

The analysis of the discrepancies of each variable sheds light on which notions presented most difficulties for the groups of future teachers. The notion of connections presented a high number of discrepancies with positive difference. In spite of the repeated efforts in instruction, the productions of the groups of future teachers have a level of connection lower than that expected. Something similar occurs, although to a lesser degree, with the notions of variety of phenomena, variety in systems of representation, complexity and systems of representation as an organiser of conceptual structure. These are the notions that present greater difficulties for the groups of future teachers.

8.5. Unresolved Questions

The analysis of the results obtained answers in part one of the questions I formulated before, the question of how we can characterise the states of development, if these can be determined. At the same time, these results generate new questions that should be explored. The information contained in the transparencies expresses the partial meanings that the groups of future teachers had developed up to that point. These partial meanings are the reification of the processes of negotiating meaning that take place in the two communities of practice that I have identified: the community of practice in the classroom and the community of practice in each group. How can we characterise these partial meanings, and to what extent do they depend on the specific topics on which the different groups of future teachers worked? This is another of the questions I have formulated. To answer it, we must: (a) deepen our understanding of the meaning of the attributes and the variables that characterise the transparencies and establish the patterns in the partial meanings of the groups of future teachers, and (b) based on this, deepen our understanding of the states of development that characterise the evolution of the di-

dactic knowledge of the groups of future teachers. We must also formulate and contrast conjectures that explain: (a) the gradual and unsynchronised character of the evolution of didactic knowledge in the groups of future teachers; (b) the differences between the groups; and (c) the difficulties that the groups of future teachers must face with respect to some of the notions.

The attempt to answer these questions leads me to explore the complexity of didactic knowledge, the subject of the next two sections.

9. THE COMPLEXITY OF DIDACTIC KNOWLEDGE

This section presents the study in which I analyse the transparencies and class presentations of the future teachers and take into account the specificity of the information with respect to each group's topic. My purpose is to identify and characterise the partial meanings of the groups of future teachers concerning the notions of subject matter analysis and to describe the evolution of these meanings throughout the course. In other words, this section will tackle the question:

¿How do we characterise the partial meanings that the groups of future teachers expressed in their transparencies and their class presentations, and how do these evolve over time?

In what follows, I will describe the methodological plan that I used to perform this study. I will then present its results for each of the three curriculum organisers that compose the subject matter analysis. In the last sections, I will interpret these results in terms of the complexity of didactic knowledge.

9.1. Identification and Characterisation of the Partial Meanings

To perform this study, I used three sources of information: (a) the information proposed by the groups of future teachers in their transparencies; (b) the transcriptions of the audio recording of the interaction during the class sessions; and (c) the transcriptions of the audio recording of interviews with two groups of future teachers (conic sections and arithmetic and geometric progressions) at the end of the sessions on subject matter analysis and at the end of the course.

The identification and characterisation of the partial meanings of the groups of future teachers was the result of a cyclical exploratory process in which I codified and analysed the information available from the three sources mentioned. The process was based on the simultaneous analysis of the transparencies of the groups of future teachers and the transcriptions of the recordings of the interaction in class and the interviews with the two groups. It was exploratory because, on the basis of the reference meanings of the curriculum organisers of the subject matter analysis and using the development factors as a guide, I identified the information contained in the transparencies and the transcriptions that I considered significant to the development of didactic knowledge of the groups of future teachers. I codified this information and organised and reviewed the codification several times as the codification scheme and the analysis evolved. To achieve this, I developed an interconnected system of databases.

My interest centred on identifying issues in the information contained in the transparencies and the transcriptions that would enable me to characterise evi-

dence of the partial meanings in the groups of future teachers. At the time, I called these issues “characterisations”. Each characterisation could be linked to various transparencies and episodes, as all constituted evidence of the same partial meaning. The analysis proceeded by identifying the episodes and documents that were most representative of the development of didactic knowledge of the curriculum organisers of the subject matter analysis and establishing characterisations for each of them. The interactive, coordinated system of databases enabled me to identify, for each characterisation, the evidence (episodes and documents) that best supported it.

I will now present the results of this analysis. The scope of this summary does not permit me to present either the evidence (transparencies from the groups of future teachers or transcriptions of the classroom presentations or interviews) or the methodological details of the analysis.

9.2. The Complexity of the Notion of Conceptual Structure as Instrument

The analysis enabled me to characterise the partial meanings of the notion of conceptual structure that the groups of future teachers showed in their transparencies and their class presentations.

Instrumental Genesis for Conceptual Structure

The use that the groups of future teachers made of the notion of conceptual structure and of conceptual maps as instruments to describe the topic evolved over time. Some groups began the description of their topic with a disordered list; later, this list took the form of a conceptual map organised around a variety of criteria. Most of these organisation criteria came from the curriculum organisers. As the presentations and discussion of them advanced, the number of organisation criteria was reduced, and the organisation of the conceptual maps focused on systems of representation. The organising role of systems of representation also went through various stages. At first, it shared the role of organising with other notions, assuming in many cases a complementary role. Making the step to a conceptual map organised entirely by the systems of representation occurred at different times in the course, depending on topic. Only when the systems of representation assumed a leading role in the organisation of the conceptual map did the future teachers become aware of the possibility of establishing relationships between their elements. The fact that reaching this awareness was not simultaneous in the different groups created situations of class interaction that promoted the negotiation of meaning. Finally, most of the groups established a certain number of connections in their conceptual structure, recognised that “everything is related” and emphasised the importance of these connections.

Conceptual, Historical and Phenomenological Approaches to the Organisation of the Conceptual Structure

In addition to systems of representation, the organisers of history and phenomenology played significant roles in the process by which the groups progressed in their description of the mathematical structure based on the notion of conceptual structure. Historical analysis provided information that, in many cases, became relevant for the construction of the conceptual map.

The notion of phenomenology can be used as organiser of the conceptual map. In the year we performed this study, no group developed this possibility in depth. This is certainly the consequence, among other reasons, of the emphasis given in the instruction to systems of representation as a main organising criterion. In this alternate approach, the purpose is to identify and relate elements of the conceptual structure based on their phenomenological meanings. The concepts and relationships between them are organised according to their uses (natural, social and mathematical). For example, in the case of the topic of fractions, it is possible to organise the conceptual structure based on four categories: part-whole, measure, quotient, operator and ratio.

Several groups of future teachers tended to organise the conceptual maps following a “conceptual” approach. This approach seemed to arise naturally from a formal view of the mathematical structure: a concept is completely described by its definition. To express this description in a conceptual map, it is enough to identify the elements of the definition and the concepts and procedures related to it. However, most of these productions lacked meaning: they were a set of partially connected labels, interpretation of which requires the reader to bring his own mathematical reasoning into play. The emphasis on this kind of conceptual description may be one of the reasons that some groups did not recognise the potential of systems of representations as a tool for describing the mathematical structure. For these groups, the task of analysing the topic based on systems of representation was an independent task. Systems of representation thus became something complementary to the conceptual structure. When the groups recognised the descriptive and structural role of systems of representation and these began to play a larger role in organising the conceptual map, the conceptual approach lost its formality and elements that were previously labels began to have meaning. Representing elements of the conceptual map in different systems of representation allowed connections to be established between them, and these connections gave them meaning.

9.3. The Complexity of the Meaning of the Notion of System of Representation

The groups of future teachers presented two transparencies whose main focus was the analysis of their concept from the perspective of systems of representation. However, systems of representation continued to play a role in the future teachers’ subsequent analyses. In the study I presented in the previous section, I detected that the groups had some difficulties with this curriculum organiser, since the variable “variety in systems of representation” was the third variable in number of discrepancies. What are the characteristics of these difficulties, and how were they overcome? How can we characterise the process by which the groups of future teachers negotiated and constructed the meaning of the notion of system of representation?

Some groups of future teachers considered that the symbolic representation aspect of their topic¹⁶⁹ formed part of its conceptual dimension and was therefore not a system of representation. For them, the symbolic served to describe the con-

¹⁶⁹ In what follows, “the symbolic”.

cept from its definition. In including the symbolic under the conceptual, several groups of future teachers considered graphs as equivalent to the idea of representation. However, these representations played a secondary and complementary role, since they believed that graphs represented specific instances of the concept and thus did not enable generality. Further, some future teachers suggested that these representations could induce to errors. The lesser importance they gave to these systems of representation can be explained by the role that these systems had played in the future teachers' earlier education, by the fact that the future teachers believed that in the textbooks they were used as examples—and thus in practice—there was not time to treat these systems in depth. However, when a variety of systems of representations appeared in the transparencies, this variety emerged mainly around the graphic systems of representation. This partly explains the tendency of the future teachers to impose a hierarchy in the systems of representation, a hierarchy supported by historical, conceptual, phenomenological and practical arguments.

As the future teachers advanced in the process of revising a task and producing a new version of the analysis, new systems of representation appeared. At first, they took into account only the basic (symbolic and graphic) ones. Later, at the end of the period devoted to subject matter analysis, a great variety of systems of representation appeared. However, when it came to bringing this information into play in cognitive and instruction analysis, the groups of future teachers reverted to the basic systems of representation.

The systems of representation that the groups of future teachers proposed in their transparencies can be grouped into several categories. I have already mentioned the basic systems of representation (symbolic and graphic). Some groups proposed systems of representation that were not really systems of representation (e.g., phenomena). The numerical and geometric systems of representation appeared later in groups who had reason to use them. Finally, some groups proposed systems of representation specific to their topics (for example, that of matrices for systems of linear equations).

Throughout the course, our instruction sought to develop a formal conception of the notion of system of representation based on the meaning proposed by Kaput (1992). However, the meaning that the groups of future teachers showed in their transparencies was closer to the conception put forth by Castro and Castro (1997), who emphasise aspects of visualisation and classify systems of representation into symbolic and graphic (p. 102). In any case, the meaning of the notion of system of representation expressed in the transparencies was partial, confirming the results of the analysis that I presented on the notion of conceptual structure. These analyses showed the low number of internal connections within each system of representation and between systems of representation indicative of the fairly superficial way the groups of future teachers used this curriculum organiser. The process of instrumental genesis was therefore partial: the groups of future teachers developed strategies for using the curriculum organiser as an instrument for analysis of a concept, but they did not succeed in deepening their strategies to use the information that emerged from this analysis in other phases of didactic analysis.

9.4. Phenomenological Heterogeneity

The analysis of a mathematical concept in terms of its phenomenological meanings is a complex process. This complexity became clear in the transparencies and presentations of the groups of future teachers. Most of them had multiple difficulties constructing the meaning of this curriculum organiser and managed to use it in practice on only a few occasions and incompletely.

The transparencies of the groups of future teachers show great variety in their approaches to the notion of phenomenology. The evolution of the partial meanings in the groups of future teachers did not follow stable patterns. Their transparencies show different solutions to the tasks proposed. In a small proportion of their transparencies, some groups approached the reference meaning proposed in the instruction. For each aspect of this reference meaning, there are transparencies that show this aspect. But only a few productions suggested that the groups of future teachers did use a complete and coordinated view of this meaning. In terms of instrumental genesis, the groups of future teachers did not manage to develop strategies for using the curriculum organiser that could enable them to convert it into a useful instrument, either for analysis of the concept or for putting this analysis into practice in the design of teaching and learning activities.

The progression of transparencies from the groups on conic sections and the sphere showed that the groups of future teachers can advance in the construction of the meaning of the notion of phenomenology, although with difficulties and only partially. The work of the group on probability showed that it is possible to perform a detailed phenomenological analysis, as the instruction required. On the other hand, the transparencies of several groups showed that it is possible to propose mathematical models and to identify laws and substructures without being able to perform a detailed phenomenological analysis that establishes relationships between the structural characteristics of the phenomena and elements and relationships of the substructures.

Fewer than half of the groups managed to develop a detailed phenomenological analysis and, in these cases, the effort did not lead them to go back and organise the phenomena according to the corresponding substructures. In fact, only three groups organised their transparencies by substructures, and only one of these kept this approach in the final project. Most of the groups organised the final project according to a different criterion than that used in their previous transparencies. This may be due to one of the examples given during instruction, but it also shows the weak consolidation of the meanings constructed by the groups of future teachers.

To the difficulty inherent in the curriculum organiser and of putting it into practice, we must add the fact that we dedicated very little course time to this topic compared to that devoted to the notions of conceptual structure and systems of representation. This situation permitted only one brief presentation of the theoretical aspects and very little depth in the development of examples and discussion of the work by the groups of future teachers.

9.5. The Complexity of the Notions of Subject matter analysis and Instrumental Genesis

The difficulties shown by the groups of future teachers in working with the curriculum organisers of the subject matter analysis are, at least in part, the result of the complexity involved in these notions. From a theoretical perspective, these notions are complex, as was shown earlier. But the theoretical meaning of the notions is only one aspect of their complexity. This complexity increases when we take into account their technical and practical meanings. To bring these meanings into play, future teachers must develop strategies that enable them to transform each curriculum organiser of the subject matter analysis into an instrument that is useful from a didactic perspective. On the one hand, the future teachers must construct the necessary strategies for analysing a concept in order to identify, organise and select their different meanings. On the other, they must construct the strategies that enable them to use the information that emerges from these analyses in other analyses of didactic analysis and in the design of a didactic unit.

The complexity of the notions of subject matter analysis can be seen in this study in the three issues just mentioned. The persistence of some groups of future teachers in not considering the symbolic to be a system of representation or in proposing the phenomenological as a system of representation shows their difficulties in tackling the theoretical meaning of these notions. In most cases, the groups of future teachers overcame these difficulties during the course. However, taking this step did not mean that they were able to bring the notion into play to identify the different meanings of the concept, as I have shown for the notion of phenomenology. In the cases where this analysis was performed in some depth, as in the transparencies of several groups for the notion of systems of representation, it did not mean that these groups had developed the strategies needed to use this information for didactic purposes.

The three issues I have just mentioned are related to the three processes that comprise instrumental genesis. At the end of the course, the groups of future teachers managed the process of instrumentalisation for the notions of conceptual structure and systems of representation and in part for the notion of phenomenology. Instrumentation was achieved to a good extent in the case of conceptual structure and systems of representation. Orchestrated integration took place in part for the notions of conceptual structure and systems of representation.

The results I have presented in this section allow me to clarify some aspects of the process of instrumental genesis for the specific case of the curriculum organisers of the subject matter analysis. This provides evidence that the transformation of a curriculum organiser into an instrument is a dynamic two-way process. The analysis of the mathematical structure and the construction of the meaning of each curriculum organiser interact dynamically. As the analysis advances, more complex meanings are constructed (of the curriculum organiser and of the concept) that, in turn, enable new and deeper analyses.

The characteristics of the groups' transparencies depend therefore on two factors: the meaning that the groups construct for each curriculum organiser and the depth with which they study and analyse (using this notion as an instrument) the mathematical structure that corresponds to their topic. The initial meaning of the curriculum organiser enables only a general description of the mathematical struc-

ture, and the effort to deepen the analysis of the mathematical structure contributes to the development of the notion's meaning. This duality can be seen, for example, in the process of moving from a variety of organisational criteria to only one: the meaning of the notion is established, and the description of the mathematical structure improves. We can thus see the interplay between the theoretical, technical and practical meanings of the curriculum organiser. The development of didactic knowledge of the groups of future teachers is based on this interplay among theory, technique and practice.

The foregoing reflections allow me to clarify and adapt V erillon's model of situated instrumented activity (2000, p. 7). In Figure 102, I have adapted the names of the elements of the model to the context of the course. The evidence presented in this study shows that the relationship $G(O) \leftrightarrow C$ is cyclical. With one meaning of the curriculum organiser as instrument ($G \rightarrow O$), the group can analyse (with the mediation of O) the concept in some depth ($O \rightarrow C$). On determining the results of this analysis ($G \rightarrow C$), they recognise new meanings for the curriculum organiser as instrument ($C \rightarrow O$) that transform the group's practice ($O \rightarrow G$) and enable them to advance in their understanding of both the curriculum organiser ($G \rightarrow O$) and the concept ($G \rightarrow C$). This is a variation on the idea of epistemological mediation suggested by Rabardel (2003, p. 668) by which the instrument contributes to the understanding of the object.

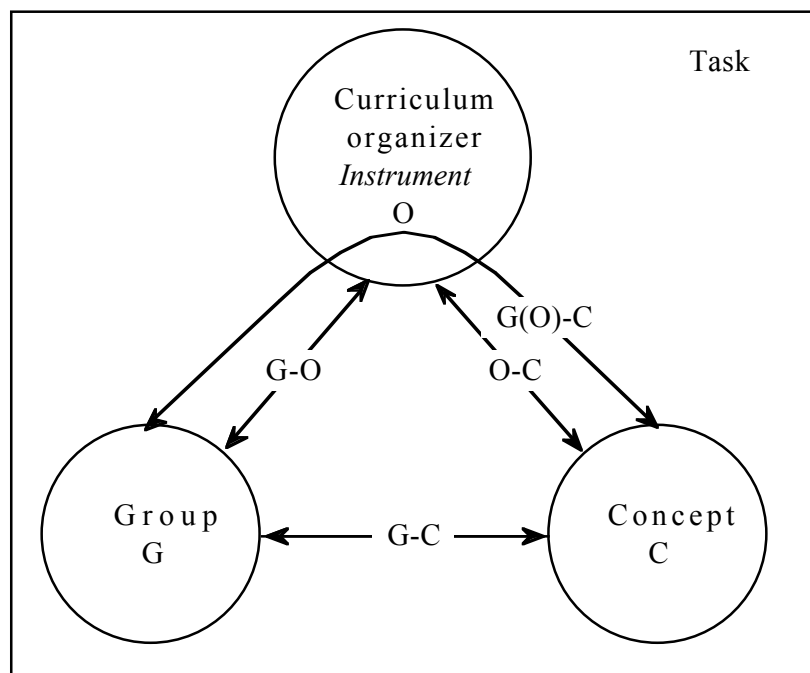


Figure 102. V erillon's model of situated instrumented activity adapted to the course

9.6. Complexity of School Mathematics

When each group chose its topic, its members assumed that the topic was simple, mathematically speaking. This view changed as they developed their topic in greater depth. The groups of future teachers expanded their view of what a

mathematical structure was. Their experience as mathematics students and as teachers in private classes had surely reinforced an essentially formal view of mathematical concepts. It is possible that this way of seeing things was at the heart of the difficulties they experienced in understanding the complexity behind each topic. However, as instrumental genesis took place and the groups of future teachers progressed in the identification and organisation of the different meanings of the mathematical concept, they became aware of its complexity. The results of this study show that most of the groups of future teachers were able to tackle this complexity from conceptual and representational perspectives. However, to some extent, this complexity overwhelmed them when they had to use the results of their analyses for didactic purposes. When it was expected that they would use the information gathered to design evaluation tasks or activities, the groups of future teachers reverted to the traditional elements: a conceptual view that uses basic systems of representation and does not take advantage of the phenomenological analysis.

9.7. Development of Didactic Knowledge and Communities of Practice

The results of this study illuminate the process by which the groups of future teachers constructed the meaning of the curriculum organisers of the subject matter analysis socially from the work plan established in class. The analysis suggests that the development of didactic knowledge is a dynamic and cyclical process that can be promoted by teaching.

The analysis shows that the groups of future teachers negotiated and constructed the meaning of the curriculum organisers as they tried to use them in practice on a specific topic. Advances were achieved when, having proposed a solution to the problem, the groups of future teachers compared their solution to the solutions of the other groups and contrasted their position with the opinions, comments and critiques of their classmates and trainers. In this process, the future teachers were able to recognise the deficiencies in the initial solution, take into account the critiques received on it, research the scholarly literature and discuss new proposals to arrive at a new solution that arose from agreement among the members of the group.

The foregoing reflections stress the role of the community of practice in the classroom in the learning of the groups of future teachers. This is unquestionably an important issue in the development of their didactic knowledge, although one that I will not develop in greater depth in this study. I will focus my attention on the composition and consolidation of the communities of practice of the groups in their work outside the classroom.

10. PUTTING DIDACTIC KNOWLEDGE INTO PRACTICE

In the third study, which I present in this section, I analysed the final projects presented by the groups of future teachers. I did this from the perspective of how they bring didactic knowledge of subject matter analysis into play in these documents.

10.1. Use of the Information from the Curriculum Organisers

The last activity in the course consisted of the production and presentation of a final project. In this document, the trainers expected that the future teachers would present the information that they had obtained from the curriculum organisers in a systematic and organised way and use this information to propose the design of a didactic unit on the topic on which they had been working throughout the course.

These expectations arose from the conceptualisation of didactic analysis as a procedure for curriculum design. According to this conceptualisation, the systematic and reasoned use of information allows the teacher to justify the design he proposes. This design should not arise only from intuition or experience: the teacher can justify the design of the meaning of this design as consistent with the information he has produced in the didactic analysis. The teacher thus has a basis for evaluating the possibilities of the design's success when it is put into practice.

In this study, my interest focuses on exploring, in each of these documents, (a) what information, from the proposal in the subject matter analysis, was used in the analyses of the didactic analysis and in the design of the didactic unit and (b) whether information related to the subject matter analysis was used in the other analyses or in the design of the didactic unit that was not registered explicitly in the subject matter analysis section of the document.

10.2. Subject matter analysis in Practice

As trainers, we expected to see a relation between the information that each group gathered and organised in the subject matter, cognitive and instruction analyses and the design the group proposed. We also expected some connection between the different analyses, such that the information that each group produced for an analysis (for example, cognitive) was supported by the information gathered in the other analyses (for example, subject matter analysis).

The analysis of the final projects shows that these goals were not fully achieved. The final projects of several groups of future teachers show a weak relationship between the information gathered for the curriculum organisers from the subject matter analysis and its use in other analyses and in the design of the didactic unit. The analysis also shows that the groups of future teachers used the information that emerged from subject matter analysis only in some aspects of the other analyses and of the design of the didactic unit and thus did not necessarily succeed in developing a global and integrated vision of subject matter analysis in particular and didactic analysis in general as a tool for designing didactic units.

From the perspective of the curriculum organisers of the subject matter analysis, we see that phenomenology was used specifically in the proposals from the class sessions but little in the other sections of the document. The information on conceptual structure and systems of representation was used especially in the sections on cognitive analysis, materials and resources, and objectives and content. This suggests that the information was useful, but only in some aspects of the process. In terms of instrumental genesis, these results suggest that several groups of future teachers were not able to construct and develop techniques (reasoning and procedures) that enabled them to see the importance of the information produced in subject matter analysis and to use it in the other analyses of didactic analysis and in the design of the didactic unit.

This study presents evidence to confirm a conjecture that most of us share as trainers of mathematics teachers interested in the development of the competence of planning: the systematic and grounded design of a didactic unit is a complex process. The results I have presented in this study (a) show that the curricular designs proposed by the groups of future teachers cannot be judged as “high quality”, (b) emphasise some of the difficulties that they faced and (c) suggest the need for instruction to emphasise more strongly the importance of basing and justifying this design on the information gathered for the curriculum organisers.

11. A COMMUNITY OF PRACTICE

In the three previous sections, I have tackled from different perspectives the last of the four questions that I formulated at the start of this document:

What characterises the learning processes of the groups of future teachers who participated in the course?

Until now, I have shown that the learning of the groups of future teachers can be characterised in terms of some states of development of didactic knowledge, and I have described these states. The results of these studies emerged from the codification and analysis of the transparencies used by the groups of future teachers. The transparencies used by one group to make the presentation on a topic are, in general, the fruit of several hours of work and discussion by its members. The groups present their work as a finished project in which one cannot see the process that gave rise to it. But what is this process? How does learning take place in a group of future teachers when, working outside the classroom, they prepare the presentation and then deliver it to their classmates? The analysis of the transparencies of a group of future teachers illustrates, only partially, their learning, as there are many aspects of a group’s learning that cannot be seen in its productions. When we see the performance of the future teachers, we cannot know where their actions came from or what happened in the group’s discussions and negotiations that was not expressed in their productions. At the end of the previous section, I characterised this problem as one of the questions that remained unresolved in this research project: the exploration of the process by which each group of future teachers negotiates meaning and advances in its learning process when it works outside the classroom preparing its presentations.

In this section, I tackle this question by presenting the results of my analysis of the audio recordings of the work meetings outside the classroom held by one of the groups of future teachers who participated in the course. This was the group that worked on the quadratic function. I had two goals in this study: (a) to describe the evolution of didactic knowledge of this group of future teachers and (b) to use this information to explain some of the results obtained in the other analyses.

I grounded the study conceptually in Wenger’s social theory of learning (1998). I chose, interpreted and adapted the most relevant aspects of this theory to the characteristics and purposes of the study. From this adaptation of the theory, I designed some instruments that allowed me to codify, analyse and interpret the transcriptions of the audio recordings of the group meetings. I will now describe the processes of codification and analysis that I designed to tackle the problem.

The body of this section is concerned with characterising and grounding empirically the 32 questions that constitute the results. At the end of the section, I will use these results to characterise the group on quadratic function as a community of practice and to reflect on some of the implications of the study.

11.1. From a Theory to some Instruments for Codification, Analysis and Interpretation

Recall that learning in practice implies the mutual commitment to a joint enterprise with a shared repertoire. That is, learning emerges to the extent that (a) different forms of mutual commitment evolve; (b) the enterprise is understood and refined; and (c) the shared repertoire, style and discourse are developed.

The evolution of different kinds of mutual commitments is characterised by the influence of environment (what helps and what hinders), how identities are defined, how the relationships develop, and how meaning is generated, negotiated and materialised. The process of understanding and fine-tuning the enterprise is characterised by the role of external conditions, the characteristics of the discourse (what is discussed, expressed and valued) and the definition of the enterprise and responsibilities. And the development of the shared repertoire is characterised by the styles of expression, work routines and resources for negotiating meaning. I will develop the characterisation of each of these processes in greater depth later when I analyse the information that corresponds to each of these dimensions.

Wenger's social theory of learning does not have an operational character. My problem was thus conceptual and methodological: how to codify and analyse the information to characterise the phenomenon in terms of the theory? That is, how to establish categories and values of codification and analysis that, based on theory, would enable me to select and structure the relevant information and identify the most significant questions about the learning of the group of future teachers? In the first phase of the process, I identified and structured some of categories of analysis. These categories were the link between the central ideas of the theory and the codes that compose the instrument to examine, select and articulate the information. The categories for analysis emerged from a detailed and purposeful reading of theory. After first reviewing the transcription of the audio recording of the meetings of the group of future teachers, I interpreted and selected ideas and aspects of the theory in terms of this information. In this way, I gradually produced different versions of the list of categories until I felt that this list was coherent and meaningful with respect to the information.

I organised these categories according to the three dimensions that characterise learning in a community of practice: mutual commitment, joint enterprise and shared repertoire. Taking into account the meaning of each of these categories in the theory, I identified a series of questions that characterised the categories and were adapted to the phenomenon that I wished to study and the information available. For example, for the category of meaning of the dimension mutual commitment, I formulated the following questions: (a) What meanings were discovered, and how? (b) What difficulties of meaning appeared? (c) What reification events occurred? (d) What proposals for meaning were made, and how were they made? and (e) What proposals for meanings were adopted, and how were they adopted?

My information source was the recordings of part of the sessions of group work. The recorded sessions were distributed over the time that the group worked on didactic analysis and included the sessions for preparing the draft document, the document, and the final presentation. These audio recordings were transcribed. From the methodological perspective, my problem was to design and put into practice some instruments for codification and analysis of these transcriptions that would allow me to tackle the research questions. These instruments had to be based on the conceptual analysis I have just presented.

I then developed a preliminary system of codes, starting from the questions I listed above. This system evolved as I codified the transcriptions and perceived the need to include new codes. The final list contained 94 codes. For example, I established codes to identify episodes in which reference was made to the comments on the transparencies, responsibilities were defined and composed, and work routines established in the group.

The process of codifying the transcriptions consisted of identifying, registering and characterising the episodes. An episode is a part of the transcription, of varying length, which contains statements by one of the participants or exchange of statements among several group members. Its coherence lies in the fact that it revolves around an idea or message. From the codification, I produced a database in which each entry corresponds to an episode and a code assigned to this episode. Each entry includes notes with my interpretation of the interactions and identification of its more relevant aspects. The following is an example of an episode that I codified with codes corresponding to personal relationships, leader and complementary participation. In this episode, one of the participants, whose performance represents complementary participation, refers to the authoritarian attitude of the leader. The comment I assigned to this episode was the following: “Again, there is tension: they criticise the leader explicitly. He knows everything because he teaches” [100,73773,74154]¹⁷⁰:

P1: It is that he is the specialist now. Since he teaches, he thinks everything he says is great.

At the end of the codification process, there were 7412 entries in the database. These entries corresponded to 2606 episodes, since one episode could be entered with more than one code and each pair of an episode and a code corresponds to an entry in the database.

It was clear that we had to summarise the information that emerged from codifying the information. In this synthesising process, I took into account theory (by means of the categories and questions) and the additional information that I registered during the codification (comments and notes). I designed several computer programs that enabled me to produce a summary of the content of the transcription of each recorded tape.

¹⁷⁰ In what follows, I identify an episode in the transcriptions with a triad [a,b,c], where a is the number that identifies the tape on which this part of the session is recorded and b and c identify (in number of characters) the beginning and end of the episode in the text of the codified transcription. Thus, the episode [066,27077,27458] is found between characters 27077 and 27458 of the codified transcription of Tape 66.

The analysis of the summaries of the codification of each tape allowed me to identify a series of issues that seemed relevant to the study. For example, from each analysis it became clear that there was a leader in the group and that his action determined various aspects of the learning process that took place. Therefore, characterisation of the leader and of his relation to the other members of the group was one of the issues worthwhile registering and analysing. This list of issues specified and summarised in a series of phrases (role of the leader, role of the comments on the transparencies, importance of the connections between systems of representation, etc.) the 950.5 minutes of recordings that I took as initial information for the study. I will identify and characterise these issues in the following sections.

The list was the final result of a process of *synthesis*. I gathered and organised the information corresponding to this list of issues in a new database, which became the starting point for a process of *analysis*. In this analysis of the codification, I imposed, for each of the issues identified in the synthesising process, two purposes: (a) to describe each issue, identifying its main characteristics and (b) to identify the most representative episodes of these characteristics in order to provide evidence for the characterisation of the issue.

Once I performed this procedure for each question of a specific aspect (e.g., “systems of representation” in the category shared repertoire), I produced a summary of the characterisation of the questions belonging to this aspect, together with the main results obtained. In each of the sections that follow, I organise the results that correspond to each of the three dimensions of the analysis.

11.2. Mutual Commitment

I organised the analysis of the transcriptions related to mutual commitment, according to four dimensions: environment, identities, relationships and meaning. The analysis focuses mainly on the characterisation of the group’s processes for negotiating meaning and the factors that influenced this process.

Processes of Negotiation of Meaning, Environment, Identities and Relationships

Teaching experience, the assigning of practical exercises and textbooks are the three elements of the environment that most influenced the processes of negotiating meaning within the group. The intuitive knowledge that the participants had developed in their experiences as teachers enabled them to make multiple proposals for the cognitive analysis. Experience in the practicum played another role: it contributed information that enabled them to ground and validate arguments in group discussion. Textbooks contributed information for the conceptual structure and were a source of information that enabled the future teachers to validate statements and resolve questions. Textbooks also played a central role in the design of the didactic unit. The activities that the group proposed for the didactic unit emerged from the selection and transformation of exercises that they found in the textbooks.

The transcriptions showed the existence of a leader. He was the person who planned, directed and verified the group’s work. He also contributed most of the ideas. Parallel to the leader, some members assumed a complementary role: they

waited for the leader to indicate what they had to do, then presented him with reports on their work and waited for his approval.

Although the group generally maintained a relaxed work atmosphere, there were moments of tension in the sessions. These moments had to do, on the one hand, with the evaluation session in which the leader was absent and in which multiple conflicts of meaning were generated between two members of the group. On the other hand, there were moments of great tension between the leader and one of the participants, differences that reached the personal level but were later resolved.

In the sessions, one could see the constant effort to search for meaning. Confusion was an element of this search process and was expressed in situations where opinions concerning a topic changed or where tentative positions were assumed. Along with the confusion, situations of conflict of meaning appeared, where two or more members assumed incompatible positions with respect to a question. The group used different mechanisms to resolve the confusions and conflicts of meaning. In most cases, these resolution processes gave rise to new proposals of meaning that ended up being adopted by the group. Some of the proposals were the product of processes of discovering meaning, in which a new idea appeared that clearly contributed to the performance of the task at hand. Finally, many of these meanings gradually reified in the group.

Next, I present a summary of an example of one of the previous results: the episodes of confusion of meaning.

Confusion of Meaning

I call episodes of confusion of meaning those in which, with respect to a particular question, one or more members of the group: (a) are not sure of its meaning, (b) change opinion about its meaning during the sessions, or (c) assume invalid positions with respect to this meaning.

In this section, I focus my attention on a question that is located mainly in the first two categories. It is a matter of the confusion between the notions of equation and function. The confusion appeared in the historical review that the future teachers had performed of the topic. At the beginning of the work, the group had already foreseen that there would be confusion about the meaning of these two notions. They waited to use the results of the historical investigation to relate them [043,1012,1554]. When they advanced in their investigation, the group produced a preliminary definition of the problem: it was a problem of how to move from the equation to the function [043,5910,6095]. One of the members of the group believed that he understood the difference between equation and function. However, this clarity disappeared when the members tried to establish the differences between the two notions. He moved from arguing that the function was the generalisation of the equation to ending up with an emphatic statement: any second-degree equation was a function [043,8000,10438]:

P3: No, but I am speaking about us. Why this mess? Why do we think in one way. Equation and function. That is, function, when do we use the term function? When you have to give...,

P2: A relation between some variables, some magnitudes...

P3: A relation between one variable and another; between one magnitude and another. But the equation was there from the beginning. And a second-degree equation is just changing one thing with respect to the other; with the second-degree equation. This is a second-degree function. Therefore, we are going to talk about second-degree functions, and then we say...

...

PX: I think the generalisation of a second-degree function is already a function.

P3: It's already a function; it could be.

PX: No, maybe not; that's what it is.

P3: Well, it could be, couldn't it?

PX: And, it's that any second-degree equation is a function.

However, the group thought that the problem was not serious, for they considered that historically the two notions had been the same [043,11147,11514]. At one moment in the discussion, the group seemed to agree on the partial meanings of the terms [043,11988,12518]:

P4: (). Second-degree function, and what I think of is a parabola. But if I am seeing a second-degree equation, what I think of is the root.

PX: Find its zeros, right?

PX: Right.

PX: Up to there, we agree.

PX: Yes, we do.

Here, the members of the group believed they were clear about the difference between the notions. The problem consisted of not being able to express this difference. However, conflicts appeared with the statements that had been made before, since “an equation is not the same as a function” [043,14683,17431]. This confusion and the difficulties it created generated enthusiasm for the historical research, because they thought this could resolve some of the issues in the question [043,48717,49586]. At this point, they stop making references to the relationship between equation and function from the historical perspective. However, this duality reappeared in the discussions of errors and difficulties. The confusion took specific form at the time as a students' difficulty [066,20856,21436]. However, in trying to express the difficulty, the group became confused again [100,6435,7622]:

P1: Ladies and gentleman. I have made five big problems, all by myself. First problem: identification of a second-degree equation. Possible mistakes.

P2: Of an equation?

P1: Of an equation () equation; of the expression of a second-degree equation. Well, or of a function, if you wish. I take the lead coefficient 1; not to recognise the second-degree equation in the multiplicative form: to identify the roots.

To conclude, in the session on preparing the draft of the didactic unit, the confusion appeared again, this time in the form of a joke toward the essentially symbolic attitude of one of the members of the group [101,92686,93099]:

P2: () And what are you going to say about second-degree functions? That they are the ones like equations but without the zero; and instead of the zero, you put $f(x)$.

P4: () (Laughter).

P1: () Come on.

11.3. Joint Enterprise

The process of understanding and fine-tuning the joint enterprise (fine-tuning the commitment, composing the responsibilities, defining the enterprise and its interpretations) is the second element that characterises learning in a community of practice. In this section, I describe and characterise the main processes by which the group constituted and developed the joint enterprise. According to the conceptual framework of the study, I expect that the joint enterprise of a practice is negotiated collectively and continually and creates relationships of mutual responsibility among the participants. The enterprise is the response and adaptation of the participants, with their limitations and resources, to the external conditions; but it is never completely determined by external command. In the case of the community of practice in this study, the constitution and development of the joint enterprise was based on two interrelated processes: (a) the definition of the enterprise and its interpretations, taking into account the external conditions that affected it and (b) the composing of the responsibilities and the development of the commitment, with special attention to the constant attitude toward the efficiency of the work performed.

The definition of the enterprise was conditioned by the conditions intrinsic to the tasks that the group had to complete (interpretation of the task and difficulty and extent of the topic to be treated) and by conditions external to the community of practice (comments on transparencies and comments by the trainers). I will now present a summarised example of one of the previous results: the role of the comments on the transparencies.

Comments on the Transparencies

In the work done by the group on quadratic function, I found evidence that suggests that the comments on the transparencies played an important role in the group's construction of meaning. This role was expressed in the fact that the comments served as a reference for validating the proposals that the group had made. On several occasions, the group accepted these comments blindly, assumed them as an authority to resolve confusions and conflicts and recognised their role explicitly. This was the case in the construction of the meaning of the notion of phenomenology. The group read the comments several times, until one of the

members understood the idea of analysing by means of substructures of the mathematical structure of the quadratic function. This participant used the comments as a source of authority to convince the others of the ideas necessary to perform the phenomenological analysis and developed these ideas gradually to organise the work in this area. The role of the comments on the transparencies was delayed. Only on a few occasions when preparing a presentation did the group take into account the comments made on the previous presentation. This was normal, given that the topics of two successive presentations, although related, were different. However, the comments on the transparencies came up again when the group was preparing the work on the didactic unit. The group returned to this information and used it to change, improve and deepen the proposals they had made during the course.

In the first meeting with the trainers to prepare the didactic unit, the group recognised explicitly the role that the comments on the transparencies had played [096,15912,16553]:

P5: Let's leave the historical route for last (). Let's see. In phenomenology, and following the recommendation we have, we have..., the first structuring we did considered mathematical phenomena and non-mathematical phenomena.

The group recognised the importance and usefulness of organising the phenomena based on substructures of the structure of the second-degree function, thanks to the interpretation and discussion that they had about the comments on the transparencies. In the next episode, P2 recognises explicitly that the comments have “given him a clue” on how to complete the task [098,32775,34767]:

P1: We're coming back to the same thing. It says: “the classification of the non-mathematical phenomena in physics and outside physics is a little artificial, from the perspective of the mathematical structure in question. All these phenomena are, simply, non-mathematical phenomena”, which is what I told you. “In this large family of non-mathematical phenomena, you make a classification by areas of knowledge: physics, chemistry, biology, economics and (). But this kind of classification does not let you establish a relationship between the structural characteristics of the phenomena...”

...

P1: But now it's a matter of doing it.

P2: I know, but () it's given me a clue.

The role of the comments on the transparencies as authority that enabled the resolution of confusion and conflicts in meaning can be seen in the next episode. The group did not understand the comments on the transparencies easily. On many occasions, they had to make an effort to interpret them, which contributed to the social construction of meaning. This can be seen in the first session on preparing the draft of the didactic unit, when they tried to solve some problems related to the phenomenological analysis [098,25257,27564]:

P2: Let's see ().

P3: Read it again; read it again.

P2: That's it. But if I read it to you now. "In class the comment was already made that the term modelling of phenomena is too general and does not necessarily contribute to the phenomenological analysis. The problem of phenomenological analysis is precisely to identify the family of phenomena and classify it according to the mathematical structures that organise it. For example, the mathematical substructure that organises the phenomena of areas are second-degree functions of the form $f(x)=ax^2$ ". And from here there are lots of... Let's say, from this, from this kind of second-degree function, well, come lots of phenomena. They can be mathematical or non-mathematical phenomena. It doesn't matter. They all get put together, since they come from the function $f(x)=ax^2$. Then it says: "but this substructure doesn't allow you to organise the problems related to the space and time of the phenomena of a movement..." Let's say, a uniformly accelerated movement; because the second-degree functions that model this kind of phenomena are these. And from these functions, we get: this, this, this, and this. And they can be mathematical or non-mathematical. But from this kind of function we get all these phenomena.

P3: ().

P2: () that we have to find the family... Let's say, the mathematical substructures of the function and, from there, get the phenomena, whatever kind they are. Let's say, that we have to do the organisation starting from the conceptual structure.

P3: ().

P2: And that's what I'm trying (), but it's not easy.

11.4. Shared Repertoire

I focus the analysis of the transcriptions, from the perspective of the development of the shared repertoire, on two issues: the development and establishment of work routines and the evolution in the construction of meaning of the three notions that make up subject matter analysis: conceptual structure, systems of representation and phenomenology. For each of these notions, I explore two aspects of the process of construction of meaning: the main difficulties of meaning and their processes of resolution and reification, and the putting into practice of these meanings in other analyses of didactic analysis. I now present a brief summary of the results obtained.

Work routines. The group, with the guidance of the leader, developed and established work routines for the activities in the sessions, the individual activity outside the sessions and the activities related to specific tasks during the sessions. These routines were of two kinds: individual work that was subsequently communicated to the others and exploratory work with brainstorming.

Conceptual structure. Instruction insisted systematically on the topic of the connections within the conceptual structure. In the group's first productions, there were some relationships between systems of representation. However, the group became aware of the importance of this aspect of the conceptual structure when they were preparing the draft of the didactic unit. At this time, the group succeeded in differentiating the conceptual structure clearly from the systems of representation.

From the perspective of putting it into practice, the conceptual structure played a role in both cognitive analysis and instruction analysis. In the former, it served as a reference for verifying, locating and organising errors and difficulties. In the latter, it served as a guide for organising the sequence of ideas tackled in the didactic unit.

Systems of representation. Systems of representation were the predominant curriculum organiser in the group's productions. The work focused, with the goal of specifying the topic, on symbolic and graphic systems of representation. The transcriptions showed an evolution in the construction of the meaning of the connections between systems of representation. This topic began to be important in the cognitive analysis, when the group recognised that it could be at the root of one of the students' difficulties. Although there is no evidence that the group had had difficulties with the notion of system of representation, two difficulties do appear that are related to the notion. On the one hand, from the first session, the group did not succeed in differentiating clearly the notions of quadratic equation and function (seen from an exclusively symbolic perspective). On the other, when they went into detail on the connections between the symbolic and graphic systems of representation, the group did not manage to use the technical aspects of the graphic meaning of the parameters of the symbolic forms of the quadratic function fluidly. The first difficulty was resolved gradually throughout the sessions. For the second, the group found only a partial solution.

Systems of representation were put into practice in the phenomenological analysis, the cognitive analysis, and curricular design. In the phenomenological analysis, they gave rise to categories with which the phenomena were organised. In the cognitive analysis, the notion of connection enabled the group to identify one of the students' difficulties. And, in the design of the didactic unit, systems of representation were a central topic of its goals and contents. Further, the group used systems of representation to develop a procedure that allowed them to select and organise the problems in the textbook. The group used this selection and organisation to design the activities that composed the didactic unit.

Phenomenological analysis. At first, the group faced difficulties related to the meaning of the notions of phenomenon and modelling. These difficulties were at the source of a preliminary organisation of the phenomena into four categories:

mathematical phenomena, non-mathematical phenomena, areas of geometric figures and modelling. This organisation only changed due to the review of the comments on the transparencies during the session to prepare the draft of the didactic unit. At this time, the group discovered, negotiated and reified the procedure of analysis by substructures.

However, in the curriculum design, the relationship between the phenomenological analysis and the design of activities was weak and intuitive. There are only references to “verbal exercises” and everyday situations as a means to motivate the students and to introduce some topics and ideas.

Next, I present a summarised example of one of the previous results: the discussion of the graphic meaning of the parameters of the symbolic forms of the quadratic function.

Graphic Significance of the Parameters

Discussion on the graphic meaning of the parameters of the symbolic forms appeared in the session on preparing the didactic unit. Up to this time, the meaning of the connections between symbolic and graphic systems of representation had been general. The specificity of these connections (with respect to the parameters) arose from the need to design in detail the activities that would be proposed to the students in the sessions to make up the didactic unit. Tackling this problem generated confusion and made explicit some of the difficulties that they had in the mathematical handling of their topic. These difficulties became evident in the use of the graphic significance of the parameters of symbolic forms.

The doubts and confusions on this topic can be seen in the following episode, in which questions arose about the role of the parameters in locating the intersections of the function with the x axis [102,121228,122206]:

P4: So, the points of intersection with the x axis influence the other coefficients of the function. Don't they?

P2: Yes, but.

P3: Wait.

P4: Let's see.

P3: What are you trying to say?

P4: Bartolo is saying... Bartolo is saying that, when you have seen the general characteristics..., such as, for example, you have just seen the intervals of increase and decrease, these depend on the lead coefficient, as it says here. That's what you're saying.

P4: Then, I say the same thing that is being said about the lead coefficient, when you see the points of interaction, you will have to say how they influence all the other coefficients. Because here is the influence. Because in the other one, it is true that they influence all of them. In the points of intersection, all three have influence. Don't they?

When they reflected on the role of the parameter a in the expression $f(x) = ax^2 + bx + c$, they came to think that all of the characteristics of the graph of the function depended on this parameter [100,89677,90153]. But, as is natural,

they encountered the greatest difficulties with the meaning of parameter b . These difficulties appeared at the beginning of the session, when one of the members asked explicitly about the graphic meaning of this parameter [105,4318,4424]. In discussing this topic, they came to think that this parameter alone did not have any influence [105,14822,15530] and reverted to the algebraic reflection to focus the graphic meaning of the parameter in its influence on the location of the function's intersection with the x axis [105,95236,96157]. Finally, they established that this parameter influenced the horizontal translation of the vertex, but they did not realise that this influence was linear, while the effect on the vertical position of the vertex was quadratic [105,98785,99239]:

P2: When the sign of the coefficient of x is negative, the thing is translated..., always to the right, I think.

P3: () would be x -... Let's see; if it's negative, it is to the right. The positive... (Several people talk at the same time).

P2: The positive to the left. Yay! That's it. There you have it. () the b . (Several people talk at the same time).

P4: If it's negative, it's to the right.

In the end, some of the members did not understand the details of the discussion, and the confusion was not clarified in the group, although the didactic unit contained activities that tackled the problem [103,111313,111426]:

P2: x^2-1 .

P3: You understand, don't you, ?

P1: No, I don't. ().

11.5. Development of Didactic Knowledge: Technical and Practical Meanings

The group did not seem to realise that the notions it was putting into practice when it performed these tasks had a theoretical meaning. The group's concern focused on interpreting the technical meaning of the notions: the use of notions to analyse their topic and perform the task at hand. The process of negotiation of meaning that took place when the group performed the tasks contributed to the construction of both the technical and the practical meanings of the notions. Didactic knowledge was constructed in a constant (and in most cases unconscious) interplay between the technical and practical meaning of the notions involved.

The analysis of the results indicates that some aspects of the community of practice studied seemed to influence their learning practice systematically. These were the following: (a) the teaching experience of the participants, (b) experience in the practicum, (c) the comments on the transparencies, (d) the existence and role of the leader and (e) the commitment of the participants.

11.6. Community of Practice: a Tool for Seeing, Thinking and Acting

In using Wenger's social theory of learning (1998) to ground the study conceptually and methodologically, I made a decision that was not free of risks, since it was not clear "to what extent one can apply this approach to learning in schools and universities and what implications it has for research" (Krainer, 2003, p. 96).

In this section, I will address these questions. I will show how, for the specific case of the study, the idea of community of practice became a tool for seeing, thinking and acting¹⁷¹.

A Tool for “seeing”

Using this study, I have been able to characterise the development of didactic knowledge of a group of future teachers from results that it is not possible to obtain in the other studies of this project. These results show that, behind the in-class presentations of the groups of future teachers and their projects, there is a complexity which is inherent to the development of a community of practice. By analysing this complexity systematically and in detail, I identified and characterised many aspects of social learning of a group of future teachers. I consider that these characterisations, with the level of detail in which I have presented them, are interesting and important in themselves. They illuminate dimensions of the initial training of high school mathematics teachers that often remain opaque in the research literature. They also enable us to explain some of the results of the other studies that form part of this project. For example, they enable us to understand the processes of negotiation of meaning that materialised in the transparencies and the group’s final project. They also reveal the different positions of the participants, their questions and confusions, the conflicts they had to face and resolve and the plans and techniques they developed to complete the tasks they were assigned. Finally, the in-depth analysis of the transcription illuminates the progress of the group in its commitment to constructing jointly the meanings that they believed necessary to satisfy both the requirements of the course and their interest in becoming mathematics teachers. I can thus explain and support with evidence some of the most important issues of the development of didactic knowledge of the groups of future teachers that I established in previous sections. I will analyse in detail the relationship between all of the studies in the next section.

I undertook this study from the perspective of a social theory of learning in which the idea of the community of practice is central. This theory emphasises aspects of learning that theories of learning focused on the individual ignore. The study shows that these issues are important in characterising the development of the didactic knowledge of future teachers. It determines not only *what* the group learns but also *how* it learns and *on what* this learning depends. It is, therefore, a broad view of the idea of learning in which context plays a central role and that emphasises the interdependent character of learning. The group learns because its members are mutually committed to a common purpose. To achieve this, they negotiate meanings that reify in a shared repertoire with which they complete the assigned tasks.

From the conceptual perspective, I gave specific meaning to the ideas that articulate learning in communities of practice in the context of the initial training of high school mathematics teachers and was able to design instruments for codification and analysis of this complexity. This kind of procedure was time-consuming, but it enabled me to tackle systematically a large body of data and obtain results whose validity is based on the process itself.

¹⁷¹ “A theoretical discourse is not an abstraction. It is a set of conceptual tools that allows us to see, think and act in innovative ways” (Wenger, 2004, p. 2).

A Tool for “Thinking”

The results of the study show that the group on quadratic function constituted and consolidated a community of practice: in a continual process of seeking and negotiating meanings, the group established a mutual commitment in the definition of a common enterprise for which it produced a shared repertoire. The analysis of the transcriptions shows not only that the participants learned and progressed as individuals, but also that *interdependent learning* occurred: the group, as an entity, progressed in its capacity to tackle the tasks at hand, and each participant was concerned about the learning of the others. Since this was a case study, we cannot conclude that the other groups of future teachers in the course established and consolidated communities of practice. For example, a leader did not necessarily emerge in all of the groups. Further, analysis of the interaction in class and of the final documents suggests that some groups were organised as teams: they divided the tasks into sub-tasks, for which each member took responsibility. They then constructed the presentation as the sum of these parts. When a group is organised as a team, there is learning (Anderson y Specjk, 1998). However, the negotiation of meaning and interdependent learning are not inherent characteristics of a team’s learning processes (Krainer, 2003, p. 95). What was important in the case of the group on quadratic function studied here was the mutual commitment of the members in seeking and defining a joint enterprise that involved concern for the learning of all members of the group.

Group work is *one* of the contexts in which the learning of future teachers takes place in the course. For example, they also learn, individually and collectively, during class, when they do individual projects, in other courses, and when they give private classes. However, given that the evaluation plan of the course gave great importance to the presentations and the documents produced by the groups and that these presentations and documents were the result of group work, it is clear that we especially value the learning processes that take place when groups work outside the classroom. Because teaching takes place essentially in the classroom, we tend to think that most of the learning is done in this context. This study shows that this is not necessarily the case.

Although I have used the idea of community of practice as a research tool, its results show the possible benefits of tackling the design and development of the course from this perspective. Is this possible? What implications would it have?

A Tool for “Acting”

Teachers’ learning does not end at the university. Teachers continue to learn in their teaching practice in the educational institution. If we as trainers value the learning that takes place when a group works as a community of practice, how can we promote and cultivate this kind of scenario? To answer this question, the teachers’ trainers should be concerned not only with what we expect future teachers to learn and to be capable of doing, but also with how they learn and what kind of instruction is consistent with this learning. We should therefore review the design of the training plans from this perspective. This study suggests some elements of reflection along these lines. For example, I have shown the importance of the written comments of trainers and the definition of the tasks they assign to the future teachers. Next, I will suggest another element: advising of the groups.

The design of the tasks and comments on the groups' work can promote interdependent learning in a group *if the group has already been constituted as a community of practice*. In other words, in a group that works along the lines of a team, the members can interpret the comments and definition of the tasks as two additional conditioners of the work routines they have established, without these factors necessarily promoting the negotiation of meaning. But if we value the kind of learning that emerges from a community of practice, how do we foster and cultivate this kind of scenario? In our experience, we see that we must change our attitude as trainers. Until now, when we interact with the future teachers (in the classroom or in office hours), our concern has focused on *what* they have learned and in helping them to improve their work (transparencies, presentations and documents). However, we now realise that we must take into account the learning processes that give rise to the groups' productions and develop strategies that promote interdependent learning and negotiation of meaning. We must become "advisors" in the work of the groups. This involves being concerned with their learning processes. To do this, our attention should focus not exclusively on determining to what extent they have developed a shared repertoire and correcting their deficiencies. We must also pay attention to the factors that can affect both the development of mutual commitment between the members and the clarity and validity of their joint enterprise. The "model of the Aalborg project" (Hansen y Jensen, 2004) is an example of this kind of approach to professional training.

The foregoing proposal suggests a new characterisation of the teacher trainer. If the initial training of high school mathematics teachers is tackled from the perspective of communities of practice, we should question and reflect on our competences as trainers. Trainers must develop new competences, and this kind of approach imposes new requirements at the institutional level (Beck y Kosnik, 2001, p. 925). What factors that affect the "quality" of communities of practice can be promoted in the initial training of high school mathematics teachers? (Llinares y Krainer, 2006, pp. 444-445) What competences should we develop as trainers? What conditions are imposed at the institutional level? These are some of the questions we should tackle in the future.

12. ONE PHENOMENON, FOUR POINTS OF VIEW

This section presents the global and integrated analysis of the results of the empirical studies performed in this research project. My goal is to answer the fourth question I formulated in the first section:

What characterises the learning processes of future teachers of high school mathematics who participate in an initial training programme?

My intention is to integrate these results to characterise the development of didactic knowledge in the groups of future teachers with respect to the notions of subject matter analysis and to propose some conjectures to explain this process. The four studies describe the same phenomenon from different perspectives, and each emphasises specific aspects of this phenomenon.

I begin this section by listing the main characteristic of didactic knowledge that the groups of future teachers developed concerning the curriculum organisers of the subject matter analysis. This description reveals the complexity of these notions, a complexity that is also expressed in the interplay between the development of their technical and practical meaning. I will then identify some characteristics of the course and of its context that influenced and help to explain some aspects of the development of the didactic knowledge of the groups of future teachers. I end the section with a reflection on instrumental genesis in the context of initial training plans for high school mathematics teachers.

12.1. Didactic Knowledge and the Curriculum Organisers of the Subject Matter Analysis

This section includes the results of the four studies and organises them from the perspective of learning in the groups of future teachers with respect to the three notions of the subject matter analysis. I stress the difficulties that the groups of future teachers encountered in using the notions to analyse their topic.

Formal View of the Conceptual Structure

The formal and symbolic view that most of the future teachers brought to the course led them to assume a conceptual approach to mathematical topics. In their first productions, they used what they had at hand to organise the conceptual structure: the curriculum organisers. The conceptual approach was simplistic and did not allow systems of representation to play the role they should have in the description and organisation of the conceptual structure. The symbolic became equivalent to the conceptual, and graphic systems of representation were seen as complementary to the formal description of the mathematical structure. To move beyond this impasse took time. The difficulties were overcome when the groups of future teachers became aware of the role played by systems of representation in the articulation of the conceptual map with which they described the mathematical structure and reduced the number of criteria of organisation: a lower number of criteria, greater organisation and complexity. Finally, the systems of representation assumed a leading role in the organisation of the conceptual maps, and the groups of future teachers became aware of the relations between the elements of these conceptual maps.

The groups of future teachers had to overcome difficulties to construct the meaning of the notion of conceptual structure and to use it efficiently in the description of the mathematical structure of the topic. As was the case with the other curriculum organisers of the subject matter analysis, the formal (theoretical) definition of the notion did not contribute significantly to the construction of its meanings. These meanings had multiple facets, and the groups of future teachers tended to construct it in practice in an evolving process in which the revision of a proposal and its contrast with the other groups and with the comments of colleagues and trainers gave rise to new, more complex and coherent proposals. The groups of future teachers advanced in the construction of meaning of this curriculum organiser as they used the other notions of the subject matter analysis (in particular, systems of representation) to analyse and describe their topic.

Hierarchy in Systems of Representation

The four studies show that the groups of future teachers established a hierarchy in the use of the systems of representation to analyse their topic. This hierarchy was evident in the variety, organisation and putting into practice of this notion in their work throughout the course.

The groups of future teachers gave preference to the symbolic system of representation, equating it with the conceptual and not considering it to be a system of representation. As they advanced in their efforts to improve their productions, the meaning that the groups of future teachers constructed concerning the notion of system of representation evolved. In the analysis of their productions, I identified different kinds or categories of systems of representation. I established symbolic and graphic systems of representation as basic. Systems of numerical and geometric representation were mentioned explicitly in some of the productions, but as alternatives of lesser importance.

In the analysis of the final projects, I showed that the information produced for the systems of representation was the information used most. This information was brought into play especially in the task on cognitive analysis and in the definition of the goals of the didactic unit. However, the putting into practice of the systems of representation was only partial. When using the notion of system of representation in other aspects of the didactic analysis, most of the groups of future teachers limited themselves to the symbolic and graphic systems of representation and did not take the others into account.

As in the case of the notion of conceptual structure, the first productions of the groups of future teachers show the influence of a formal and symbolic view of mathematics. This view was partly overcome when the groups analysed their topic, taking into account a variety of systems of representation. However, the meaning that materialised in most of the groups and that thus was put into practice was limited to the two basic systems of representation: symbolic and graphic.

Heterogeneity in Phenomenology

Phenomenology was the notion that gave the groups of future teachers the most difficulties. These difficulties were expressed in very heterogeneous ways in the partial meanings that the groups developed for it and, therefore, in the multiplicity of approaches they put into practice in tackling the procedures of the phenomenological analysis and in using their results in the design of the didactic unit.

This heterogeneity has to do with the number of phenomena, disciplines and substructures that can be proposed, the variety of the kind of analysis that can be done, and the variety of criteria with which the phenomena can be organised. The difficulties produced by this complexity were expressed in the partial development of their meaning by most of the groups. No group managed to present in its productions a work of phenomenological analysis like that which the instruction expected. However, the analysis of the productions and of the work of the group on quadratic function showed that all of the groups demonstrated an evolution in the construction of this meaning, although this evolution did not follow stable patterns. Both the analysis of the final projects and the work of the group on quadratic function showed that to put into practice complex procedures for the analysis and organisation of the phenomena that correspond to a mathematical topic does

not mean that the resulting information is used in the other aspects of the didactic analysis.

12.2. The Complexity of the Curriculum Organisers of the Subject Matter Analysis: Technical and Practical Meanings

The didactic knowledge of the groups of future teachers who participated in the course evolved gradually, heterogeneously, and out of synch with the instruction. The groups of future teachers faced difficulties when they analysed their topic with each of the curriculum organisers of the subject matter analysis. These difficulties were reflected in their productions and performance in a variety of partial meanings that they brought into play in using each of these notions in practice. Some of the groups of future teachers succeeded in overcoming most of the difficulties. However, some of the goals of instruction were not satisfied, in particular with respect to the notion of phenomenology. These difficulties reflected in part the complexity of the process of initial training of high school mathematics teachers that took place in the course. The difficulties of the groups of future teachers are the product, among other things, of the complexity of these notions, as was shown in the previous sub-section. Nevertheless, the interplay between the technical and practical meanings of the notions also contributes to this complexity.

In this version of the course, the theoretical meaning of the curriculum organisers was not emphasised, although the construction of technical and practical meanings was promoted through specific plans. All of the groups presented the results of the analysis of their topics systematically to the whole class. This meant that each group could compare its work with that of the other groups. Further, each group should have made an effort to critique the work of the other groups and to reflect on and analyse the criticisms received. Comparison with the work of the other groups and recognition of the deficiencies of the solution proposed motivated each group to produce a new solution. This solution was specific to the topic of each group, but it took into account general issues concerning the technical and practical meaning of the curriculum organiser. Therefore, we expected that, as a result of these processes of interaction, the groups of future teachers would succeed in developing knowledge of each curriculum organiser that went beyond issues specific to their topic. In this sense, we hoped that, throughout the course, the groups of future teachers would develop simultaneously and dynamically both technical and the practical knowledge of the notions of didactic analysis, seeking to make these notions into useful instruments for the analysis of any mathematical topic.

This duality in the treatment of technical meaning in the course and the development of knowledge (technical and practical) on the part of the groups of future teachers enables me to explain, at least in part, the lag between the time a curriculum organiser was introduced in the course and the time this notion appeared explicitly in the productions of the groups of future teachers. It was the negotiation of meaning that emerged from reviewing the comments on the transparencies when designing the didactic unit that led the groups of future teachers to reify the meaning of this curriculum organiser and use it explicitly in their productions. That is, bringing the practical meaning into play enabled the group to succeed in reifying its technical meaning. On the other hand, as in the class interaction, the

process of negotiation of meaning that occurred when the groups performed the tasks contributed to the construction of both the technical and the practical meanings. Didactic knowledge was constructed in a constant interplay between the technical and the practical meaning of the notions involved. However, analysis of the final projects shows that the groups gathered information that was relevant for the design of the didactic unit but did not recognise that this information formed part of the information corresponding to each of the curriculum organisers. This is evidence of a weak connection between these two meanings of the notions of the subject matter analysis in the didactic knowledge of the groups of future teachers.

The groups of future teachers also showed difficulties in identifying, differentiating and relating the curriculum organisers of the subject matter analysis. This was clear in the relation between the conceptual structure and the systems of representation and between the systems of representation and the phenomenology.

12.3. Development of Didactic Knowledge in the Context of the Course

The analysis of the presentations showed that it is possible to organise the productions of the groups of future teachers in states of development of didactic knowledge. As was to be expected, the context and development of the course influenced and enabled us to explain different aspects of this development.

The difference in topics can explain, at least in part, the heterogeneity in the groups' presentations and productions. Although all of the topics are framed in a mathematical structure and thus can be tackled with the tools of didactic analysis, some of them seem to make a first approach easier.

Analysis of the productions, interviews and work of the group on quadratic function showed that most of the future teachers arrived to the course with a formal and symbolic view of mathematics. I have already indicated how this view can be one of the causes of some of the difficulties of the groups of future teachers. This view of mathematics led them to think that the topics of high school mathematics were simple. However, as they advanced in the course and analysed their topic with the different notions proposed, the groups of future teachers became aware of the complexity of the topics.

The analysis of the group on quadratic function showed that the information that emerged from the teaching experience of the future teachers was used in several of the work sessions and played, for example, a central role in the completion of the task on cognitive analysis.

Analysis of the productions showed the processes of negotiation of meaning in the classroom. These processes arose from and were promoted by two factors: the methodology of interaction in class and the heterogeneity of advances in the groups' productions.

The review and improvement of the proposals took place in each group's community of practice. The analysis of the work of the group on quadratic function enabled me to describe these processes of negotiation of meaning. In the case of this group's work, one can see a constant attitude of searching for meaning from which confusions and conflicts arose. In general, these confusions and conflicts were overcome, in some cases producing discoveries of meaning. The results of these negotiation processes were the proposals of meaning included in the group's presentations and documents. Some of these proposals ultimately materi-

alised in the group, while others did not and were not used in other places in the didactic analysis.

In the methodological plan of the course, there was no single established authority to decide what was right or wrong in the presentations. The opinions and criticisms of classmates were relevant. Further, there was an atmosphere of healthy competition, in which each group strove to make its project one of the best.

In reducing the importance of the theoretical and formal description of the curriculum organisers, instruction promoted the construction of meanings through the presentation of examples. In fact, on different occasions (e.g., for the first conceptual structure or the design of the didactic unit), the approach that the groups made using each of the notions emerged from imitation.

The final project contributed in a significant way to the construction and consolidation of the meanings that the course developed. The final project led some groups to review and organise what they had done up to that point. This review included analysing the comments on the transparencies, an activity that contributed significantly to the quality of the final proposal.

As is typical of teachers in practice, the future teachers systematically used textbooks in the design of didactic units. The textbooks were a key source of information for the groups of future teachers. However, the main function of the textbooks was evident in the design of the activities for the sessions on the didactic unit.

12.4. Contributions to the Meaning of the Curriculum Organisers of the Subject Matter Analysis: Partial Meanings

The different studies in general and the study of the productions in particular shed light on the different partial meanings that groups of future teachers can develop about the curriculum organisers of the subject matter analysis. They also show characteristics of these notions of which we were not fully conscious at the start of the project and which we did not emphasise in instruction.

Instruction insisted on the use of systems of representation as the main organising criterion of the conceptual maps with which the mathematical structure was described. However, analysis of two of the difficulties experienced by the groups of future teachers related to this notion suggests other possibilities for organising the conceptual structure: the conceptual approach and phenomenology. Analysis of the productions and the work of the group on quadratic function showed that systems of representation can be classified into four categories and that the productions of the groups of future teachers showed a hierarchy of these categories. The symbolic and graphic systems of representation were identified as fundamental; the numerical and geometric systems were complementary; systems of representation specific to the mathematical structure appeared on very few occasions (e.g., of the matrix for systems of linear equations); and on some occasions, there were proposals that were not systems of representation (for example, phenomena).

The analysis of the productions allowed me to identify different criteria for organising the phenomena: disciplines, families, areas, uses, substructures and groups. But I also characterised the kind of phenomenological analysis revealed in

the productions of the groups of future teachers: a production can present models, laws, substructures, structural analysis of phenomena, and the relationship between the structural characteristics of the phenomenon and elements and relations of the substructure.

12.5. Instrumental Genesis in the Group

The construction and negotiation of partial meanings of a curriculum organiser within a group was an evolving process. Based on the previous analyses, I will now identify the main patterns that characterise this process.

On many occasions, the first problem that the group had to face consisted of understanding the requirements of the task. Since they as yet had no meaning for the curriculum organiser, it was difficult for them to understand what it meant to analyse a topic with this notion. The evidence shows that some groups devoted time to deciding what they should do. In this first approach to the analysis of their topic, many groups resolved the problem by imitating the example that instruction had presented in class and using the tools at their disposal (e.g., the list of curriculum organisers for describing the conceptual structure or textbooks for systems of representation or the design of tasks).

Once they presented their first approach, the groups returned to the analysis of their topic, starting from the ideas, questions, difficulties and possible ways of improving suggested in the comments and criticism they had received, from the analysis and comparison of their work with the work of the other groups and from the information they found in the literature (mainly textbooks). This situation fostered, in general, an intense process of negotiation of meaning within each group. In this process, the groups began to construct techniques (reasoning and procedures) for the analysis of their topic with the curriculum organiser. The notion began to be transformed into an instrument, from the perspective of its technical significance, in the sense that the groups advanced in their capacity to produce and organise the information that emerged from this analysis.

The second phase of the process of instrumental genesis was characterised by two issues: (a) the relation between the future teachers' development of the technical meaning of the curriculum organiser and the depth in which they analysed their topic and (b) the relationship between the construction of this technical meaning and putting it into practice.

In the process of transforming a curriculum organiser into an instrument, the analysis of the mathematical structure and the construction of the technical meaning of the notion interacted dynamically. As the group advanced in the analysis, they constructed more complex meanings (of the curriculum organiser and the concept) that in turn enabled new and deeper analyses. The characteristics of the groups' transparencies depended on two factors: the technical meaning that the groups were constructing from each curriculum organiser and the depth in which they studied and analysed (using this notion as instrument) the mathematical structure that corresponded to their topic. A preliminary technical meaning of the curriculum organiser allowed only a general description of the mathematical structure. And the effort to deepen the analysis of the mathematical structure contributed to the development of the technical meaning of the notion. For example, in the first productions on conceptual structure, when the meaning of this curricu-

lum organiser was just beginning to be constructed, the groups of future teachers presented productions that described the mathematical structure in a general and only slightly organised way. However, this effort led them to understand this mathematical structure better and, at the same time, to progress in the development of the meaning of the curriculum organiser with which they analysed it (in this case, the conceptual structure). In this way, the groups of future teachers moved from using a multiplicity of organisation criteria to organising the conceptual structure based on systems of representation. This allowed them to describe and understand the mathematical structure in greater detail, which led them for example to recognise the importance of the connections between systems of representation.

The groups also advanced in the construction of the technical meaning of each curriculum organiser when they tried to put the information that emerged from their analysis into practice. This was the case, for example, with the notion of connections in the work of the group on quadratic function. This group did not recognise the importance of this notion when it produced the conceptual structure. The notion appeared explicitly for the first time when they performed the cognitive analysis. But because of the negotiation of meanings that arose from the review of the comments on the transparencies when designing the didactic unit, the group reified the meaning of this notion and captured it explicitly in its productions. That is, it was because of putting into practice the result of the analysis of their topic that the group succeeded in materialising its technical meaning. Therefore, the technical and practical meanings of a curriculum organiser interact in two ways: first, practical meaning is developed when the information that emerges from the analysis of the topic is brought into play with the curriculum organiser (technical meaning); second, the groups advance in materialising the technical meaning of the curriculum organiser when they construct its practical meaning.

That a group developed and materialised the technical meaning of a curriculum organiser did not necessarily mean that it advanced in the construction of its practical meaning. All of the studies provide evidence that this was the case for the notion of phenomenology. In the analysis of the work of the group on quadratic function, I presented a detailed description of this situation. There I showed that the group had difficulties in identifying the procedure for phenomenological analysis by which substructures were identified and relationships between these substructures and the corresponding phenomena established. However, careful reading of the comments on the transparencies ultimately enabled them to identify the procedure and put it into practice. This suggested an important advance in the construction of the technical meaning of the notion of phenomenology. However, this meaning did not materialise from the practical point of view. In designing the activities for the didactic unit, the group did not use the information that it gathered and organised for this notion.

Deficiencies in the development of the practical meaning of the curriculum organisers by the groups of future teachers were also revealed in the lack of connection between the work that the groups performed with the curriculum organisers of the subject matter analysis and the design of the didactic unit. This was demonstrated in the analysis of the final projects. There, I showed that most of the groups used information in the design of the didactic unit that was not registered

in the corresponding place in the didactic analysis. This means that the groups found that this information was relevant for the design but did not recognise that it formed part of the information corresponding to each of the curriculum organisers.

12.6. Theory, Technique and Practice in the Instrumental Genesis of the Curriculum Organisers

The foregoing analyses suggest the possibility of describing more precisely the process of instrumental genesis in the context of the development of didactic knowledge of the curriculum organisers. I have identified stages and relationships in the development of the meanings of these notions for the groups of future teachers.

The development of the didactic knowledge of a group concerning a curriculum organiser begins with the negotiation of the meaning of the requirements involved in the tasks assigned to them (analysis of their topic with the notion). On many occasions, the first approach arises from imitation: they adapt the example from instruction to their topic and complete it with information that they find in the textbooks. In the second stage, due to the comments and critiques that emerge from their presentation and from comparing their work with that of the other groups, they advance in the construction of technical meaning. There are two catalysts in this progress. First, as the future teachers deepen their analysis of the mathematical structure, they advance in constructing the technical meaning. Second, this technical meaning also develops from being put into practice in the other analyses of the didactic analysis and in the design of the didactic unit. In a third stage, they manage to establish techniques for the technical analysis of the topic with the curriculum organiser. The development of the practical meaning of the notion constitutes the fourth stage. Finally, the fifth stage consists of developing the techniques for using this practical meaning.

The groups were not necessarily aware of the theoretical meaning of the curriculum organisers. This does not mean that they did not manage to develop it in some way. The fact that the groups managed to interpret and adapt the productions of other groups to the specific case of their mathematical topic indicates that their knowledge of the curriculum organiser went beyond the characteristics specific to their topic. In this sense, the groups managed to generalise the technical significance of the curriculum organiser and thus to construct preliminary versions of its theoretical meaning. However, in practice the groups focused their attention on the construction of the technical and practical meanings of the notions. Didactic knowledge was thus constructed in a constant interplay (in most cases unconscious) between the theoretical, technical and practical meaning of the notions involved.

The interaction between technique and practice is characterised by the role that practice plays in the development of technical meaning and by the role played by the information that emerges from the technical analysis of the topic in practice. In the case of the development of the course that I have analysed in this research project, the groups succeeded in developing the technical meaning of conceptual structure and of systems of representation and in developing it partially for phenomenological analysis. In some cases, they also managed to develop tech-

niques for the analysis of the topic with the three curriculum organisers. However, they did not manage to develop techniques for putting it into practice.

Figure 103 diagrams a preliminary conjecture about the process of instrumental genesis of the curriculum organisers in the context of the course. A group of future teachers transforms a curriculum organiser into an instrument (and, therefore, advances in the development of its didactic knowledge about the notion) as it negotiates and constructs its theoretical, technical and practical meanings. The process begins with the construction of a preliminary technical meaning of the notion, motivated by imitation and nourished by information from textbooks. This is the beginning of the process of instrumentalisation (technical). Instrumentation takes place when the technical meaning is developed, through the comments and criticisms, in their interaction with the in-depth analysis of the mathematical structure and its putting into practice in other analyses and in the design of the didactic unit (orchestration). This development leads to the construction of techniques for the technical analysis of the mathematical structure. As the capacity to compare and interpret the technical analyses of different mathematical topics develops, the theoretical meaning of the notion is constructed. The development of practical meaning requires a new process of instrumental genesis. This emerges from the information that arises from the technical analysis of the topic and calls for the orchestration of different instruments (curriculum organisers) for the construction of techniques that lead to the putting into practice of the curriculum organiser for didactic purposes.

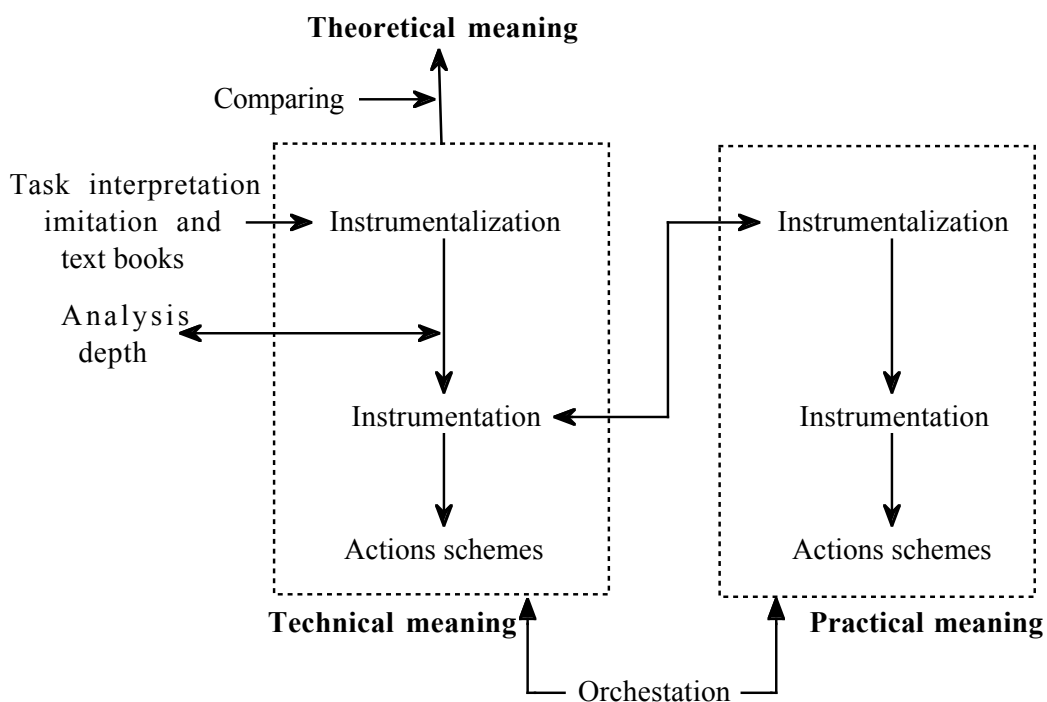


Figure 103. Conjecture concerning the instrumental genesis of the curriculum organisers

13. ONE STAGE IN MY REFLECTION ON THE HIGH SCHOOL MATHEMATICS TEACHER

I framed this research project in the context of four general questions on the mathematics teacher that refer to his performance, his knowledge, the design and development of initial training programs for high school mathematics teachers and the learning processes of the future teachers who participate in these programmes. I specified these questions with two general goals for the project: (a) to advance in the conceptualisation of the activities and didactic knowledge of the high school mathematics teacher and the design of initial training plans and (b) to describe and characterise the development of didactic knowledge of the groups of future teachers who participated in the course Mathematics Education in High School at the University of Granada in the 2000-01 academic year.

I believe that I have proposed specific answers to the four general questions that structured this project in tackling the general and specific objectives that structured the investigation I have reported in this document. Now, to justify and illustrate this assertion, I will describe the issues that I consider most relevant to the reflection and investigation I have performed. To do this, I identify the main contributions of this project, establish some of its implications, determine its limitations and record the questions that remain unresolved.

13.1. Contributions to Thinking on the High School Mathematics Teacher

I believe that this research project contributes to thinking on the high school mathematics teacher in general and on the initial training of high school mathematics teachers in particular. These contributions are theoretical, methodological, empirical and curricular.

Theoretical Contributions

I proposed didactic analysis as a curriculum level. With this idea, I conceptually structured the curriculum organizers proposed by Rico (Rico, 1997a). I showed advances in the conceptualisation of the notion of “curriculum organiser” by using the theory of instrumental genesis to give concrete meaning to the idea of “conceptual and methodological tool”.

In the description of the subject matter analysis, I introduced the notion of conceptual structure as a curriculum organizer, specifying one of the aspects of the meaning of concepts of school mathematics without having to refer to cognitive questions. In emphasizing the operations performed on signs, I established the link between conceptual structure and systems of representation. This distinction enabled me to characterize the connections that can be established between the elements of a mathematical structure when it is represented by means of conceptual maps. I developed thinking on phenomenology as a dimension of the meaning of a concept in greater depth when I clarified the link between substructures of a mathematical structure and the phenomena that these substructures organize using a specific and operational formulation of the notion of mathematical model.

The grounding of these three dimensions of the meaning of a concept in school mathematics that structure subject matter analysis are based on Luis Rico’s contributions to the interpretation and adaptation of the notion of meaning from

Frege in this context. Rico's contributions also allowed me to structure and describe in greater detail the notion of content as a curricular element.

I introduced the notion of "learning path" as an adaptation of the idea of hypothetical learning trajectory to the initial training of high school mathematics teachers. I conceptualised the relationship between the notions of learning objective, capacity, task, learning path and competence. This conceptualisation led to the formulation of a procedure that enabled me to characterise a learning objective in terms of its learning paths, as well as another procedure by which it is possible to analyse and select tasks that contribute to achieving the learning objective. I thus emphasised the link between subject matter analysis, cognitive analysis and instruction analysis.

Based on the notion of didactic analysis and starting from a functional view of the initial training of high school mathematics teachers, I established a specific meaning for the term "didactic knowledge" and showed its relation to the notion of pedagogical content knowledge. I introduced the notions of theoretical, technical and practical meaning of the curriculum organizers from the perspective of the didactic reference knowledge and adapted these notions to the context of the didactic knowledge of the future teachers, grounding my argument in the notion of the partial meaning of a group of future teachers. The proposals for the notion of didactic analysis and didactic knowledge enabled me to characterise the mathematics teacher's planning competence in terms of capacities. I believe that these conceptualisations ground possible answers to both the paradox of planning and the problem of the gap between global and local planning and represent an advance in thinking on the notion of pedagogical content knowledge.

Although they do not qualify as theoretical contributions, I believe that this research project has introduced conceptual innovations that contribute to reflection and research on the mathematics teacher. I adapted the theory of instrumental genesis to the initial training of high school mathematics teachers in general and the study of the development of didactic knowledge of curriculum organizers in particular. I used the theory of quality of information to justify a methodological analysis of the productions of future teachers and to introduce the notion of "development factor". I tackled the problem of the learning of the future teacher of mathematics from the perspective of Wenger's social theory of learning. My interpretation and adaptation of these three theories to the context of this project enables me to establish a meaning for the notion of "development of didactic knowledge" that I have made methodologically operational.

Methodological Contributions

In the context of the line of research on teacher training from the Group on Numerical Thinking, I introduced several innovations in the design of the empirical studies that configure this research project. I assumed a socio-cultural position on learning and focused investigation on the learning of groups of teachers, relegating analysis of the performance and productions of the future teachers as individuals to second place. I decided to study the learning processes (development of didactic knowledge) rather than the results. And I performed this investigation in the context of the course.

In the analysis of the productions, I designed and put into practice a methodology for analysing the observations, the discrepancy analysis, which allowed me to establish and characterise the four states of development of didactic knowledge and to assign each observation to one of these states. This is a non-standard procedure for grouping observations that can be used when the information available does not satisfy the conditions imposed by standard methods for grouping, such as cluster analysis. I designed a spreadsheet that enabled me to automate my use of the method and identified the method's virtues and defects. For analysing the productions, I designed an interconnected system of databases that allowed me to navigate dynamically through the evidence included on the transparencies of the groups of future teachers and the transcriptions of the audio recordings of class interaction.

To analyse the work of the group on quadratic function, I designed and put into practice instruments for the codification, analysis and interpretation of the transcriptions that make Wenger's social theory of learning operational in the context of the initial training of high school mathematics teachers. With this adaptation of the theory, I showed that the notion of community of practice is constituted as a tool for "seeing, thinking and acting" in the area of teacher training.

Being a systematic analysis of school mathematics, I believe that didactic analysis can be useful conceptually and methodologically in studies of the learning of mathematical topics in which it is necessary to design instruments for analyzing the performance of subjects when they tackle tasks. Didactic analysis (in particular, subject matter analysis) has already been used in research related to this problem and to the historical analysis of textbooks.

Empirical Contributions

The purpose of the empirical studies that configure this research project was to provide a "proof of existence", that is, to present systematic evidence of a case in which a strategy (of training) produces certain results. A proof of existence is a contribution to knowledge in Mathematics Education, since each researcher and trainer of teachers can interpret and adapt the results of these empirical studies to his specific context and to the problems that are articulated in that context. I will now list the main contributions of these studies.

I established that didactic knowledge of the groups of future teachers evolves according to stable patterns and characterised four states of development. I showed that the process of instrumental genesis takes time: it requires that the groups of future teachers negotiate meanings (of the curriculum organizer, of their mathematical topic and of their techniques) and that these partial meanings materialize (in different forms) on the successive occasions that the groups present their productions in class.

I developed in greater depth the description of these states of development by identifying and detailing the partial meanings that the groups of future teachers constructed throughout the course, thereby contributing to the characterisation of the curriculum organisers from an empirical perspective. I showed the evolution of these partial meanings in terms of development factors, identified the difficulties that the groups of future teachers showed at different moments and reviewed the ways and strategies with which they overcame these difficulties on different

occasions. I showed the role of teaching experience and of the views of the future teachers when they entered the course in their development of didactic knowledge.

I established to what extent and in what way the groups of future teachers brought into play the information they obtained for the curriculum organisers in the design of the didactic unit. I demonstrated that several groups of future teachers did not necessarily develop a global and integrated view of subject matter analysis as a tool for the design of didactic units.

I detailed the process by which a group of future teachers constituted a community of practice, when I showed how their mutual commitment evolved, how they defined and fine-tuned their joint enterprise and how they developed their shared repertoire. I characterised the learning of a group of future teachers from a socio-cultural perspective by showing the processes of negotiation of meaning that gave rise to their productions and performance. I identified and described the main questions that influenced this process of negotiation of meaning.

Based on the previous results, I deepened and developed more specifically from an empirical perspective the notions of the theoretical, technical and practical meaning of the curriculum organisers and detailed the process of instrumental genesis in the context of the initial training of high school mathematics teachers. I thus characterised the interplay between theoretical, technical and practical knowledge of the future teachers that grounds the transformation of a curriculum organiser into an instrument with practical utility. I identified some phases of this transformation process, as a contribution to the understanding and conceptualisation of the development of the didactic knowledge of the groups of teachers. I showed the role that the design and development of the course played in this process and identified other characteristics of the course and of the future teachers that influenced the development of their didactic knowledge.

Curricular Contributions

I believe that I have contributed to the conceptualisation and grounding of the course on Mathematics Education in High School in particular and of the initial training of high school mathematics teachers in general. These contributions are based on my contributions to the specification of meaning of the notions of didactic analysis and didactic knowledge and to the characterisation of the planning competence of the mathematics teacher that arises from them. I showed how these notions enable us to put our functional view of the initial training of high school mathematics teachers into curricular practice.

I believe that I have also contributed to the design of the course from the methodological point of view by proposing and contrasting empirically a work plan for the treatment of didactic analysis in this training programme.

13.2. From Research to Practice

How can the “proof of existence” that I have just described contribute to the practice of the initial training of high school mathematics teachers? I believe that these results can be interpreted and adapted in two areas: evaluation and improvement of the design and development of initial training programmes for high school mathematics teachers and reflection on the performance of the trainers of teachers.

My intention in this project was not to evaluate a model for initial training of high school mathematics teachers. Therefore, I do not try to answer questions like, “What works in the classroom?” or “What is the best method?”. Rather, I argued that the characterisation of the development of didactic knowledge of the groups of future teachers who participated in the course sheds light on their difficulties and achievements in performing tasks and on the possible causes of these difficulties and achievements. I understand that this information is both relevant for revising the design of the course and, subject to interpretation, to other trainers and other courses that in some way ground initial training of high school mathematics teachers on a model like ours. In the case of our course, the results emphasise two key areas in which it is necessary to improve: the treatment of the phenomenological analysis and the presentation of the practical meaning of the curriculum organisers and its relation to their technical significance. Yet these questions also emphasise the positive role played by the methodological plans used and the comments on the productions of the future teachers.

I believe that the detailed description of the process by which the groups of future teachers constructed their partial meanings for the curriculum organisers from the subject matter analysis provides valuable information for trainers of teachers who seek to promote these meanings in their students. This information can in many cases enable us to foresee the performance of groups of future teachers and thus to plan appropriate instruction.

The analysis of the process by which a group of future teachers emerged as a community of practice emphasised the role of the trainers as promoters of interdependent learning and negotiation of meaning. I have suggested that as trainers we should assume a role of “advisors”, in which our concern focuses not only on what a group of future teachers learns but also on the factors that can influence both the development of mutual commitment among its members and the clarity and validity of its joint enterprise.

13.3. Limitations and Unresolved Questions

In this section, I identify the main limitations of this project and establish some of the questions that remain open for the future.

Didactic analysis is a partial and ideal view (conceptualisation) of the activity (of planning) of the mathematics teacher. It is a partial view, because it focuses attention on the local dimension of planning. The fact that there are other aspects of this activity that I do not consider in didactic analysis does not mean that these issues are not important or relevant or that they are less important than those I explored in this document. As an ideal procedure, it served to conceptualise the didactic knowledge of the mathematics teacher and detail in terms of capacities some aspects of his planning competence. I do not expect any specific mathematics teachers to perform systematically each and every one of the procedures that compose didactic analysis. However, I have shown that in planning his class the teacher can use didactic analysis as a guide, at a level of detail appropriate to the time he has available.

Although I took considerable care to ground the subject matter analysis conceptually, I do not believe that this work is finished. The clarity and usefulness of the technical meaning of the curriculum organisers depends on the depth and clar-

ity with which their theoretical meaning is structured. On the other hand, the empirical studies showed the need to explore and develop strategies for the description and curricular treatment of the practical meaning of the curriculum organisers. My presentation of cognitive, instruction, and performance analysis is limited and tackles only some of their multiple aspects. In fact, the first two are currently the object of study in our research group. We are also currently exploring the links between didactic analysis —as a notion for grounding a training programme for teachers— and the training of the students, in particular from the perspective of mathematical literacy.

I proposed a preliminary conjecture for the process of instrumental genesis of the curriculum organisers in the context of the course. This conjecture requires significant structuring and theoretical grounding and fuller empirical support. In particular, it is necessary to explore in greater depth how successful groups of future teachers construct the practical meaning of curriculum organizers in practice.

I focused the conceptual and methodological efforts of this project on the teacher's planning competence. However, didactic analysis includes the full cycle of planning, putting into practice and evaluating the didactic units. Two questions thus arise as possibilities for research and development. On the one hand, we should ask how we should advance in a description of didactic analysis that can be used for grounding an initial training plan for high school mathematics teachers that includes the possibility that groups of future teachers put their proposals into practice for the didactic unit. On the other, it is also relevant to question how didactical analysis can be adapted as a foundation for continuing education programmes for high school mathematics teachers.

As I mentioned in the previous section, the area of the competences of the trainer of mathematics teachers is a relevant and little explored one. The results of the studies show the need to investigate which competences trainers should develop if they adopt a socio-cultural view of the learning of future teachers.

13.4. The End of one Stage; the Beginning of Another

In this document, I report the activities and results of a collective project. In many places, I indicate how the activities of design, development and research were performed in a team and how this project was framed and supported by activities and results of a line of research on training teachers in the Group on Numerical Thinking, which Luis Rico has been directing, promoting and developing since the late 80s. The achievements of this project contribute to a collective long-term research process and are the product of his view and capacity to incorporate this process and direct this research project.

From the personal perspective, this report describes the path that I, as designer, trainer and researcher, travelled over seven years, in my relation to the initial training of high school mathematics teachers in general and to one training programme in particular. In this sense, I report research on my own practice. The conceptualisation and design of the research tell of my beliefs, values and attitudes as a designer and researcher. The empirical results reveal aspects of my competences and attitudes as a trainer of teachers of mathematics.

My experience on ending this new stage in my journey as designer, trainer of teachers and researcher makes one question clear: the complexity of the initial

training of high school mathematics teachers. This experience has enabled me to perceive and tackle in part the multiplicity of dimensions involved in this complexity. On the conceptual level, in my approach to didactic analysis, didactic knowledge and the learning of future teachers. On the curricular level, in my research on the design and development of initial training plans for high school mathematics teachers and on the role of trainers in them. And on the research level, in the importance of exploring and understanding the processes from which the learning of future teachers emerges. My awareness of the complexity and crucial importance of the initial training of teachers of high school mathematics leads me to consider this document as the beginning of a new stage in my reflection on the mathematics teacher.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo personal e intelectual de Luis Rico, mi director. Él me hizo ver las deficiencias de redacción y de contenido de dos versiones previas del documento y la necesidad de concretar el significado del término “conocimiento didáctico”. Además, este documento incluye sus reflexiones sobre el significado de un concepto en las matemáticas escolares y sobre la noción de contenido desde una perspectiva curricular. Buena parte de las ideas que desarrollo en el documento son elaboraciones de las ideas que Luis Rico ha venido proponiendo y llevando a la práctica desde hace dos décadas.

Las propuestas que presento para el análisis cognitivo son el producto de numerosas y largas discusiones con María José González. Ella leyó y criticó varios capítulos de este documento y contribuyó de manera significativa a concretar y aclarar numerosas cuestiones del mismo. María José fue y sigue siendo quien me ha permitido sobrellevar la soledad intelectual que implica la realización de una tesis doctoral.

Durante los tres meses de mi estancia en Aalborg tuve largas y acaloradas discusiones con Paola Valero, quien leyó la totalidad de una versión previa del documento. Estas discusiones revivieron la experiencia investigativa que durante muchos años habíamos tenido en “una empresa docente”. Paola me recordó algunos de los principios que habíamos desarrollado en esa época y contribuyó de manera significativa a resaltar en este trabajo la importancia y las implicaciones de asumir una visión sociocultural de la educación matemática.

Mi interés por el análisis didáctico habría sido otro, de no ser por mis continuas discusiones con José Luis Lupiáñez. Nunca supe si nos reuníamos para trabajar o para, entre dos golpes de revés en una pista de tenis, aclarar dudas sobre el análisis de contenido y el análisis cognitivo.

Al escribir este documento siempre tuve en mente una “lectora ideal”. Ella fue María Consuelo Cañadas, quien además fue la primera persona que comentó apartes de lo que después se consolidó como el análisis didáctico. Ella me hizo ver, entre otras cosas, la necesidad de aligerar y aclarar mi redacción.

Mi interés por la educación matemática ha podido materializarse en productos concretos como esta memoria gracias a que mis padres me han dado siempre la oportunidad de hacer lo que me gusta.

REFERENCIAS

- 15th ICMI Study. (2005). 15th ICMI Study Conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. Contributed Papers, Demonstrations And Worksessions. Descargado el 27/6/2005, de http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html
- "Meanings of meaning". (2005). Meanings of meaning of mathematics. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 9-16). Dordrecht: Kluwer.
- AAAS. (1984). *A report on the crisis in mathematics and science education: What can be done now?* New York: J. C. Crimmins.
- Adler, J. (1998). Lights and limits: Recontextualising Lave and Wenger to theorise knowledge of teaching and of learning school mathematics. En Watson y A (Eds.), *Situated cognition and the learning of mathematics* (pp. 161-177). Oxford: Centre for Mathematics Education Research University of Oxford Department of Educational Studies.
- Adler, J. (2000). Conceptualising Resources as a Theme for Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(3), 205-224.
- Adler, J. (2003). The mathematical work of teaching: Reflections on mathematics teacher education in post-apartheid South Africa. An agenda and metaphor for research. En R. Strässer, G. Brandell, B. Grevholm y O. Helenius (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 103-118). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L. y Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 359-381.
- Adler, J. y Jaworski, B. (2005). *The state of research on mathematics teacher education, and how it needs to develop*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, Granada.

- Ainley, J. y Pratt, D. (2002). *Purpose and utility in pedagogical task design*. Trabajo presentado en Twenty-sixth annual Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, Reino Unido.
- Ainley, J. y Pratt, D. a. H. A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal*, 32(1), 23-38.
- Alrø, H. y Skovsmose, O. (2004). *Dialogue and learning in mathematics education: intention, reflection, critique*. Dordrecht: Kluwer.
- American Psychological Association. (2001). *Publication manual of the American Psychological Association* (5 ed.). Washington, D. C.: Autor.
- Anderson, J. R. G. J. G., Reder, L. M. y Simon, H. (2000). Perspectives on Learning, Thinking, and Activity. *Educational Researcher*, 29, 11-13.
- Anderson, R. S. y Specjk, B. W. (1998). "Oh what a difference a team makes": why team teaching makes a difference. *Teaching and Teacher Education*, 14(7), 671-686.
- Apple, M. (1999). *Meaning and identity: Essays in critical educational studies*. New York: Peter Lang Publishing.
- Apple, M. (2001). Markets, Standards, Teaching, and Teacher Education. *Journal of Teacher Education*, 52(3), 182-196.
- Arbaugh, F. (2003). Study Groups as a Form of Professional Development for Secondary Mathematics Teachers Study Groups: Professional Growth through Collaboration. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(2), 139-163 (125 pages).
- Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 241-286.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Bairral, M. y Zanette, L. (2005). *Geometric learning and interaction in a virtual community of practice*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Bajo, M. T., Maldonado, A., Moreno, S., Moya, M. y Tudela, P. (2003). *Las competencias en el nuevo paradigma educativo para Europa*. Granada: Universidad de Granada.
- Ball, D. (1988). *The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths*. East Lansing, MI: The National Center for Research on Teacher Education.
- Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. En J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching. Vol. 2. Teacher's knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice. A research annual* (Vol. 2, pp. 1-48). Greenwich, CT: Jai Press.
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90(4), 449-466.
- Ball, D. L. (2002). What do we believe about teacher learning and how can we learn with and from our beliefs? En D. S. Mewborn, White, D. Y. White,

- H. G. Wiegel, R. L. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3)* (pp. 3-19). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Ball, D. L. (2003, February 6, 2003). *Mathematics in the 21st Century: What Mathematical Knowledge is Needed for Teaching Mathematics?* Trabajo presentado en U.S. Department of Education.
- Ball, D. L. (2004, April 19, 2004.). *What are teachers learning?* Trabajo presentado en National Council of Supervisors of Mathematics, Philadelphia, PA.
- Ball, D. L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83-104). Westport: Ablex.
- Ball, D. L. y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis y E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.
- Ball, D. L., Bass, H., Delaney, S., Hill, H., Lewis, J., Phelps, G., Thames, M. y Zopf, a. D. (2005, April 14, 2005.). *Conceptualizing mathematical knowledge for teaching*. Trabajo presentado en Annual meeting of the American Educational Research Association, Montréal, Quebec.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4 ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Ball, D. L. C., D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. En G. S. a. L. Darling-Hammond (Ed.), *eaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco: Jossey-Bass.
- Barnett, C. (1991). Building a Case-Based Curriculum to Enhance the Pedagogical Content Knowledge of Mathematics Teachers. *Journal of Teacher Education*, 42(4), 263-272.
- Baroody, A. J., Cibulskis, M., Lai, M. y Li, X. (2004). Comments on the use of learning trajectories in curriculum development and research. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 227-260.
- Battista, M. T. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 185-204.
- Baxter, J. A. y Lederman, N. G. (2001). Assessment and measurement of pedagogical content knowledge. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education* (pp. 147-161). Dordrecht: Kluwer.
- Beck, C. y Kosnik, C. (2001). From cohort to community in a preservice teacher education program. *Teaching and Teacher Education*, 17(8), 925-948.

- Beckman, S., Charles, R., Clements, D., Duckett, P., Lewandowski, S., Schielack, J., Trevino, E. y Zbiek, R. M. (2006). *Curriculum focal points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics*. Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras gráficas*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, Granada.
- Berelson, B. (1952). *Content Analysis in Communication Research*. New York: Free Press.
- Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61-81). Dordrecht: Kluwer.
- Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (1996). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Bloom, B. S. (1956). *Taxonomy of educational objectives, handbook I: The cognitive domain*. New York: David McKay Co Inc.
- Boerst, T. (2005). *Reflection for teaching: nurturing and noticing reflection in practice-based professional learning experiences*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Boletín Oficial del Estado. (1983). Ley Orgánica 11/1983, de 25 de Agosto, de Reforma Universitaria: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Boletín Oficial del Estado. (1990). Ley Orgánica 1/1990 de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (Vol. BOE N° 238, pp. 28927-28942): Ministerio de Educación y Ciencia.
- Borba, M. C. (2005). *Internet-based continuing education programs*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Borko, H. (2004). Professional development and teacher learning: Mapping the terrain. *Educational Researcher*, 33(8), 3-15.
- Bowden, J. A. (1997). *Competency-based education: Neither a panacea nor a pariah*. Trabajo presentado en Technological Education and National Development 97 Conference, Abu Dhabi.
- Broekman, H. (2000). They already know so much our pre-service teachers. Don't they? [On-line]. <http://www.atee.org/hm/abstracts/broekman.html>.
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers professional knowledge. En R. Biehler (Ed.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer.
- Bromme, R. y Steinbring, H. (1994). Interactive development of subject matter in the Mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 217-248.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.
- Brown, C. y Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

- Bullough, R. V. (2001). Pedagogical content knowledge circa 1907 and 1987: a study in the history of an idea. *Teaching and Teacher Education*, 17, 655-666.
- Bullough, R. V. (2002). Thoughts on Teacher Education in the USA. *Journal of Education for Teaching: International Research and Pedagogy*, 28(3), 233.
- Burton, L. (2002). Methodology and Methods In Mathematics Education Research: Where Is "The Why"? En S. Goodchild y L. English (Eds.), *Researching Mathematics Classrooms. A Critical Examination of Methodology*. Westport: Praeger Publishers.
- Butler, D. L., Lauscher, H. N., Jarvis-Selinger, S. y Beckingham, B. (2004). Collaboration and self-regulation in teachers' professional development. *Teaching and Teacher Education*, 20(5), 435-455.
- Cañadas, M. C. y. C. E. (2006). Un procedimiento para la caracterización de estrategias en problemas de sucesiones que involucran en razonamiento inductivo. *Indivisa, IV*, 13-24.
- Carlsen, W. (2001). Domains of teacher knowledge. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge. The construct and its implications for science education* (pp. 133-144). Dordrecht: Kluwer.
- Carulla, C. y Gómez, P. (1997). *Graphic calculators and problem solving. Do they help?* Trabajo presentado en PME 21 Conference, Lahti.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: ice - Horsori.
- Chaiklin, S. (2002). A developmental teaching approach to schooling. En G. W. a. G. Claxton (Ed.), *Learning for life in the 21 century: Sociocultural perspectives on the future of education* (pp. 167-180). Oxford and Malden: Blackwell Publishers Ltd.
- Chapman, O. (2005). *Stories of practice: a tool in preservice secondary mathematics teacher education*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Cheng, Y. C., Mok, M. M. C. y Tsui, K. T. (2001). *Teaching effectiveness and teacher development : towards a new knowledge base*. Hong Kong Hong Kong Institute of Education: Dordrecht Netherlands.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chiocca, C. M. (2005). *Functions of writing for the consideration of pupils' learning by trainee teachers*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Christiansen, B. y Walther, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen y A. G. Howson (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Kluwer.
- Clements, D. H. y Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.

- Clements, D. H., Wilson, D. C. y Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 163-184.
- Cobb, P. (1995). Mathematics learning and small-group interaction: Four cases studies. En P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning. Interaction in classroom cultures* (pp. 25-129). Mahwah: LEA.
- Cobb, P. y Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom video recordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics*, 30, 213-228.
- Cochran, K. F., King, R. A. y DeRuiter, J. A. (1991). *Pedagogical Content Knowledge: A Tentative Model for Teacher Preparation*. East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Learning (ERIC Document Reproduction Service No. ED340683).
- Cochran-Smith, M. (2004). The Problem of Teacher Education. *Journal of Teacher Education*, 55(4), 295-299.
- Collopy, R., Riddick, A. C. P., Barker, C., Sheriffs, I., Bass, R., Ellis, V., Sethia, K. K., Edwards, D. R. y Ball, R. Y. (2003). Curriculum Materials as a Professional Development Tool: How a Mathematics Textbook Affected Two Teachers' Learning. *The Elementary school journal*, 103(3), 287-312.
- Comiti, C. y Ball, D. L. (1996). Preparing teachers to teach mathematics: A comparative perspective. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1123-1153). Dordrecht: Kluwer.
- Cooney, T. y Shealy, B. (1997). On understanding the structure of teachers' beliefs and their relationship to change. En E. Fennema y B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 87-109). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cooney, T. J. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal For Research in Mathematics Education*, 25(6), 608-636.
- Cooney, T. J. (2004). Pluralism and the teaching of mathematics. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. K. Lester, A. Wallby y K. Wallby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 503- 517). Göteborg: National Center for Mathematics Education.
- Cooney, T. J. y Shealy, B. (1994). *Conceptualizing teacher education as a field of inquiry: Theoretical and practical implications*. Trabajo presentado en 18th PME Conference, Lisbon.
- Cooney, T. J., Shealy, B. E. y Arvold, B. (1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers. *Journal For Research in Mathematics Education*, 29(3), 306-333.
- Cooney, T. J. y Wiegel, H. G. (2003). Examining the mathematics in mathematics teacher education. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Leung y F. K. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Cooney, T. J. y Wilson, M. R. (1993). Teachers' thinking about functions: Historical and research perspectives. En T. A. Romberg, T. P. Carpenter y E.

- Fennema (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 131-158). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, 13(1), 3-21.
- Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 155-177). Barcelona: ice - Horsori.
- Darling-Hammond, L. (2000). How teacher education matters. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 166-173.
- Dawson, A. J. (2005). *Mathematics Education in Micronesia: Building Local Capacity to Provide Professional Development for Teachers of Mathematics*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- de Lange, J. (1999). Framework for classroom assessment in mathematics. Descargado el 16/2/2005, 2005, de http://www.fi.uu.nl/catch/products/framework/de_lange_frameworkfinal.pdf
- Department of Education. (2001). *Teacher Competencies and Professional Standards Discussion Paper*. East Perth: Autor.
- Department of Education and Training. (2004). *Competency framework for teachers*. East Perth: Autor.
- Doecke, B. (2004). Professional identity and educational reform: confronting my habitual practices as a teacher educator. *Teaching and Teacher Education*, 20(2), 203-215.
- Doerr, H. M. (1997). Experiment, simulation and analysis: An integrated instructional approach to the concept of force. *International Journal of Science Education*, 19(3), 265-282.
- Doerr, H. M. y Masingila, J. O. (2001). *Unpacking a case study: Understanding teacher educators as they understand their pre-service secondary teachers*. Trabajo presentado en 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht.
- Doerr, H. M. y Wood, T. (2004). Research Forum 03: International Perspectives on the Nature of Mathematical Knowledge for Secondary Teaching: Progress and Dilemmas. Descargado el 23/11/2004
- Doyle, W. (1986). Classroom organization and management. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3 ed., pp. 392-431). New York: Macmillan.
- Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23, 167-180.
- Duke, D. L. (Ed.). (1979). *Editor's preface* (Vol. 2). Chicago: University of Chicago.
- Dunn, G. y Everitt, B. S. (1982). *An introduction to mathematical taxonomy*. Cambridge: Cambridge University.
- Durand-Guerrier, V. y Winsløw, C. (2005). *Education of lower secondary mathematics teachers in denmark and france: a comparative study of characteristics of the systems and their products*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.

- Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning*. Trabajo presentado en 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Morelos, México.
- Ebby, C. B. (2000). Learning to Teach Mathematics Differently: The Interaction between Coursework and Fieldwork for Preservice Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(1), 69-97.
- Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D. y Agard, P. (1993). Conceptual knowledge falls through the cracks: Complexities of learning to teach mathematics for understanding. *Journal For Research in Mathematics Education*, 24(1), 8-40.
- Ensor, P. (2001). From preservice mathematics teacher education to beginning teaching: A study in recontextualizing. *Journal For Research in Mathematics Education*, 32(3), 296-320.
- Eraut, M. (2000a). Design of initial teacher education. *International Journal of Educational Research*, 33(5), 453-456.
- Eraut, M. (2000b). Teacher education designed or framed. *International Journal of Educational Research*, 33(5), 557-574.
- Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L. y Allen, S. D. (1993). *Doing naturalistic inquiry. A guide to methods*. Thousand Oaks: Sage.
- Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching*, 15(1), 13-33.
- Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Granada: Comares.
- Flores, P. (2000). El profesor de matemáticas, un profesional reflexivo. En L. Rico y D. Madrid (Eds.), *Investigación en el aula de matemática. La tarea docente* (pp. 13-27). Madrid: Síntesis.
- Flores, P. (2005). *Papel del análisis didáctico en el desarrollo de competencias profesionales del profesor de matemáticas*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Francisco, J., Maher, C. A., Powell, A. B. y Weber, K. (2005). *Urban teachers attending to students' mathematical thinking: an emergent model of professional development*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Fraser, C. y Morony, W. (2004). *Assessing Teachers Against Teacher Developed Professional Standards for Excellence in Teaching Mathematics*. Trabajo presentado en ICME 10 – TA A: Teachers of mathematics: Recruitment and retention, professional development and identity, Copenhagen.
- Frege, G. (1998a). Comentarios sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 198-). Madrid: Tecnos.
- Frege, G. (1998b). Función y concepto. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 53-79). Madrid: Tecnos.
- Frege, G. (1998c). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84-111). Madrid: Tecnos.
- Freitas, E. (2004). Plotting intersections along the political axis: the interior voice of dissenting mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 259-274.

- Freud, S. (1981). Análisis terminable e interminable. En S. Freud (Ed.), *Obras Completas. Tomo III*. Madrid: Biblioteca Nueva.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.
- Frykholm, J. A. (1999). The Impact of Reform: Challenges for Mathematics Teacher Preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(1), 79-105.
- Gallardo, J. (2005). *Aportes del análisis didáctico a la investigación sobre comprensión del conocimiento matemático*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Gallardo, J. y González, J. L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 57-77). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses.
- Geddis, A. y Wood, E. (1997). Transforming subject matter and managing dilemmas: a case study in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 13(6), 611-626.
- Geddis, A. N. (1993). Transforming subject matter knowledge: the role of pedagogical content knowledge in learning to reflect on teaching. *International Journal of Science Education*, 15(6), 673-683.
- Gellert, U. y Krummheuer, G. (2005). *Collaborative interpretation of classroom interaction: stimulating practice by systematic analysis of videotaped classroom episodes*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Gess-Newsome, J. (2001). Pedagogical content knowledge: An introduction and orientation. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education* (pp. 3-17). Dordrecht: Kluwer.
- Gess-Newsome, J. y Lederman, N. G. (Eds.). (2001). *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Gil, F. y Rico, L., y Fernández, A. (2002). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre evaluación en matemáticas. *Revista de Investigación Educativa*, 20(1), 47-75.
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 36-56). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses.
- Goldin, G. A. (1998a). Representations and the psychology of mathematics education: Part II. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 135.
- Goldin, G. A. (1998b). The PME Working Group on Representations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 283-301.
- Goldin, G. A. y Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 1-4.

- Gómez, P. (1997). Tecnología y educación matemática. *Informática Educativa*, 10(1), 93-111.
- Gómez, P. (1999). "una empresa docente": A Teaching Enterprise. *The Mathematics Educator*, 9(2), 37.
- Gómez, P. (2000). Los organizadores del currículo en matemáticas. *Revista EMA*, 5(3), 267-277.
- Gómez, P. (2001a). Conocimiento didáctico del futuro profesor de matemáticas al inicio de su formación. En F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico y J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1851-1864 Vol. 1852). Granada: Grupo Editorial Universitario.
- Gómez, P. (2001b). Primer borrador del diseño de un módulo para la asignatura "Didáctica de la matemática en bachillerato", versión 200: Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2002a). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En M. C. Penalva y G. Torregosa (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 341-356). Alicante: Universidad de Alicante.
- Gómez, P. (2002b). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P. (2003). Teorías de aprendizaje y formación de profesores. En J. Gutiérrez, A. Romero y M. Coriat (Eds.), *El prácticum en la formación inicial del profesorado de magisterio y educación secundaria: avances de investigación, fundamentos y programas de formación* (pp. 459-467). Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2004a). *Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas*. Trabajo presentado en X Jornadas de investigación en el aula de matemáticas, Granada.
- Gómez, P. (2004b). Wenger, E. (1998). *Communities of practices. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University. Descargado el 8/3/2006, de <http://cumbia.ath.cx/ugr/Notas/html/Wenger98.htm>
- Gómez, P. (2005). *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Gómez, P. (2006a). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses.
- Gómez, P. (2006b). Diversidad en la formación de profesores de matemáticas: en la búsqueda de un núcleo común. *Revista EMA*, 10(1), 242-293.
- Gómez, P. (2006c). La planificación: una competencia fundamental del profesor. *Palabra Maestra*, 12, 6-7.
- Gómez, P. (EnPrensa). Complejidad de las matemáticas escolares y diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje con tecnología. *Revista EMA*.
- Gómez, P., Cañadas, C. y Peñas, M. (2002). Llegar a ser profesora de matemáticas. Reflexiones desde una perspectiva sociocultural. En M. C. Penalva, G. Torregosa y J. V. Coords (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la mate-*

- mática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 471-484). Alicante: Universidad de Alicante.
- Gómez, P. y Carulla, C. (1998). De lo simbólico a lo gráfico. Efectos de la tecnología en la educación matemática. En U. A. d. Manizales y RIBIE-COL (Eds.), *CD-ROM del IV Congreso Colombiano de Informática Educativa*. Manizales: Universidad Autónoma de Manizales y RIBIE-COL.
- Gómez, P. y Carulla, C. (2001a). Desarrollo didáctico de los profesores de matemáticas. El caso de los sistemas de representación y la función cuadrática. *Educación Matemática*, 13(2), 31-53.
- Gómez, P. y Carulla, C. (2001b). *Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Gaia.
- Gómez, P., Mesa, V. M., Carulla, C., Gómez, C. y Valero, P. (Eds.). (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Gómez, P., Perry, P., Valero, P., Castro, M. y Agudelo, C. (1998). Desarrollo profesional de directivos y profesores: motor de la reforma de las matemáticas escolares. En IDEP (Ed.), *La investigación: fundamento de la comunidad académica. Serie investigaciones 2* (pp. 103-155). Bogotá: IDEP.
- Gómez, P. y Rico, L. (2005). *Learning in secondary preservice teacher education from the communities of practice perspective*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Goncz, A. (1994). Competency based assessment in the professions in Australia. *Assessment in Education*, 1, 27-44.
- González, J. y Wagenaar, R. (Eds.). (2003). *Tuning Educational Structures in Europe. Informe final. Fase uno*. Bilbao: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.
- González, J. L. (1998). Didactical Analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I/II* (pp. 245-256). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- González, J. L. (2006). El análisis didáctico como conjunto de medios para comprender y organizar los fenómenos de la educación matemática. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 9-14). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses.
- González, J. L. y Ortíz, A. (2005). *La naturaleza compleja de los antecedentes y fundamentos teóricos en la Investigación en Educación Matemática. Necesidad de su tratamiento meta-analítico cualitativo como metodología no empírica*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- González, M. J. (2002). *Proyecto docente*. Santander: Universidad de Cantabria.
- González, M. J. (2004). *Contribución de la Opción Educativa a las competencias del licenciado en Matemáticas*. Trabajo presentado en Seminario Itermat, organizado por ICMI-E & Universidad de Granada. Disponible en (Enero

- 2005):
http://www.ugr.es/~vic_plan/formacion/itermat/Program/221S3.htm.
- González-López, M. J., Gil, F., Moreno, M. F., Romero, I., Gómez, P., Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2004). Generic and specific competences as a framework to evaluate the relevance of prospective Mathematics teachers training syllabuses. En M. J. Hoines (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. Vol I 305). Bergen: Bergen University College.
- Goulding, M., Hatch, G. y Rodd, M. (2003). Undergraduate Mathematics Experience: Its Significance in Secondary Mathematics Teacher Preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(4), 361-393.
- Graeber, A. O. (1999). Forms of Knowing Mathematics: What Preservice Teachers Should Learn. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3), 189-208.
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-b Press.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-128.
- Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J. y Whitenack, J. W. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-273). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Graven, M. y Arbaugh, F. (2003). Teacher learning as changing meaning, practice, community, identity and confidence: The story of Ivan Study Groups as a Form of Professional Development for Secondary Mathematics Teachers. *For the learning of mathematics : an international journal of mathematics education*, 23(2), 28-36.
- Graven, M. y Lerman, S. (2003). Wenger, E. (1998). Communities of practice: Learning, meaning and identity. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6(2), 185-194.
- Grouws, d. A. y Cooney, T. J. (Eds.). (1988). *Effective mathematics teaching*. Reston: LEA - NCTM.
- Hansen, S. y Jensen, L. P. (2004). Supervision and Group Dynamics. En A. Kolmos, F. K. Fink y L. Krogh (Eds.), *The Aalborg PBL Model* (pp. 349-361). Aalborg: Aalborg University Press.
- Hellman, D. (2005). Structuralism. En S. Shapiro (Ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (pp. 563-590). Oxford: Oxford University Press.
- Hellman, D. (2006). Structuralism, mathematical. En D. Borchert (Ed.), *The Encyclopedia of Philosophy*. New York: MacMillan.
- Herbst, P. (2003). Using novel tasks in teaching mathematics: Three tensions affecting the work of the teacher. *American Educational Research Journal*, 40(1), 197-238.
- Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and*

- procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hill, H. y Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 330-351.
- Honderich, T. (2001). *Enciclopedia Oxford de Filosofía*. Madrid: Tecnos.
- Hospesova, A., Budejovice, C., Ticha, M. y Machackova, J. (2005). *Developing the competences of primary school teachers via collective reflection*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Howland, J. y Wedman, J. (2004). A Process Model for Faculty Development: Individualizing Technology Learning. *Journal of Technology and Teacher Education*, 12(2), 239-263.
- ICMI 15. (2004). Discussion document: the fifteenth icmi study: the professional education and development of teachers of mathematics: the international commission on mathematical instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2-3), 359-372.
- IEA–TEDS. (2006). Teacher Education Study. Descargado el 30/10/2006, de <http://teds.educ.msu.edu/default.asp>
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching. A constructivist enquiry*. Londres: Falmer.
- Jaworski, B. (2002). Layers of Learning in Initial Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(2), 89-92.
- Johnston, S. (1992, April 20-24, 1992). *Experience Is the Best Teacher...Or Is It? An Analysis of the Role of Experience in Learning To Teach*. Trabajo presentado en Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.
- Kaptelinin, V. (2003). Learning with artefacts: integrating technologies into activities. *Interacting with Computers*, 15(6), 831-836.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.
- Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 265-281.
- Kazemi, E. y Franke, M. L. (2004). Teacher Learning in Mathematics: Using Student Work to Promote Collective Inquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(3), 203-235.
- Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación - acción*. Barcelona: Laertes.
- Kerka, S. (1998). *Competency-Based Education and Training. Myths and Realities*. Columbus: ERIC Educational Resources Information Center.
- Kieren, T. E. (1997). Theories for the classroom: connections between research and practice. *For the Learning of Mathematics*, 17(2), 31-33.
- Kilpatrick, J. (2003a). Promoting the proficiency of U.S. mathematics teachers through centers of learning and teaching. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an internatio-*

- nal symposium on mathematics teacher education* (pp. 143-157). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- Kilpatrick, J. (2003b, 5–8 March 2003). *Teachers' Knowledge of Mathematics and Its Role in Teacher Preparation and Professional Development Programs*. Trabajo presentado en German-American Workshop on Quality Development in Mathematics and Science Education, Kiel, Germany.
- Kilpatrick, J., Hoyles, C. y Skovsmose, O. (Eds.). (2005). *Meaning in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. O. y Findell, B. (2001). *ADDING IT UP: Helping Children Learn Mathematics*. Washington: National Academy Press.
- Kinach, B. M. (2002). A cognitive strategy for developing pedagogical content knowledge in the secondary mathematics methods course: toward a model of effective practice. *Teaching and Teacher Education, 18*, 51–71.
- Kluth, P. y Straut, D. (2003). Do as We Say and as We Do: Teaching and Modeling Collaborative Practice in the University Classroom. *Journal of Teacher Education, 54*(3), 228-240.
- Knight, P. (2002). A systemic approach to professional development: learning as practice. *Teaching and Teacher Education, 18*(3), 229-241.
- Krainer, K. (1993). Powerful tasks: a contribution to a high level of acting and reflecting in mathematics instruction. *Educational Studies en Mathematics, 24*, 65-93.
- Krainer, K. (2003). Teams, Communities & Networks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(2), 93.
- Krainer, K. (2004). Editorial. On Giving Priority to Learners' prior Knowledge and Our Need to Understand Their Thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(2), 87-90.
- Lachance, A. y Confrey, J. (2003). Interconnecting Content and Community: A Qualitative Study of Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(2), 107-137.
- Lantolf, J. P. (2000). Introducing sociocultural theory. En J. P. Lantolf (Ed.), *Sociocultural theory and second language learning* (pp. 1-28). Oxford: Oxford University.
- Larrubia, J. J. (2005). *Aplicación del Análisis Didáctico al caso de un estudio sobre aprendizaje matemático en alumnado sordo integrado en aulas ordinarias*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Lee, Y. W. y Strong, D. M. (2003). Knowing-Why About Data Processes and Data Quality. *Journal of Management Information Systems, 20*(3), 13-39.
- Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. En F. L. Lin y T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 33-52). Dordrecht: Kluwer.
- Lesh, R. (1997). Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 377-391.
- Lesh, R. y Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics class-*

- rooms. *Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 361-383). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lesh, R. y Yoon, C. (2004). Evolving communities of mind –In which development involves several interacting and simultaneously developing strands. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 205-226.
- Levin, B. B. y Rock, T. C. (2003). The Effects Of Collaborative Action Research On Preservice And Experienced Teacher Partners In Professional Development Schools. *Journal of Teacher Education*, 54(2), 135-149.
- Lieberman, A. (2000). Networks as Learning Communities: Shaping the Future of Teacher Development. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 221-227.
- Little, J. W. (2002). Locating learning in teachers' communities of practice: opening up problems of analysis in records of everyday work. *Teaching and Teacher Education*, 18, 917–946.
- Llinares, S. (1998a). Aprender a enseñar matemáticas en la enseñanza secundaria: Relación dialéctica entre el conocimiento teórico y práctico. *Revista Interuniversitaria de formación del profesorado*, 32, 117-127.
- Llinares, S. (1998b). La investigación sobre el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula. Revista de Enseñanza e Investigación Educativa*, 10, 153-179.
- Llinares, S. (2002). Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. En G. C. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 195-209). Dordrecht: Kluwer.
- Llinares, S. (2004). *La actividad de enseñar matemáticas como organizador de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Adecuación al Itinerario Educativo del Grado de Matemáticas*. Trabajo presentado en Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas, Granada.
- Llinares, S. (2005). *Relación entre teorías sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas y diseño de entornos de aprendizaje*. Trabajo presentado en V Congreso Ibero-Americano de Educação Matemática, Porto.
- Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.
- Llinares, S. y Sánchez, V. y. G. M. (1994). Conocimiento de contenido pedagógico del profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. *Revista de Educación*, 304, 199-226.
- LMT. (2005). Learning Mathematics for Teaching Project. Sample Items. Descargado el 23/5/2005
- Loughran, J. J. (2002). Effective Reflective Practice: In Search of Meaning in Learning About Teaching. *Journal of Teacher Education*, 53(1), 33-43.
- Lupiáñez, J. L. (2005). *Objetivos y fines de la educación matemática. Capacidades y competencias matemáticas*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2003). Intuiciones de futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre el aprendizaje de las matemáticas. En J. Gutiérrez, A. Romero y M. Coriat (Eds.), *El prácticum en la formación inicial*

- del profesorado de magisterio y educación secundaria: avances de investigación, fundamentos y programas de formación* (pp. 151-158). Granada: Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares, *X Simposio de la SEIEM*. Huesca.
- Lupiáñez, J. L., Rico, L., Gómez, P. y Marín, A. (2005). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congreso Ibero-Americano de Educação Matemática, Oporto, Portugal.
- Magnusson, S., Krajcik, J. S. y Borko, H. (1999). Nature, sources and development of pedagogical content knowledge for science teaching. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge* (pp. 95-132). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Manouchehri, A. (2002). Developing teaching knowledge through peer discourse. *Teaching and Teacher Education*, 18(6), 715-737.
- Marín, A. (2005). *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: organización y secuenciación*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Marker, D. (2000). Introduction to model theory. En D. Haskell (Ed.), *Model theory, algebra and geometry* (pp. 15-35). New York: Cambridge University Press.
- Maz, A. (2005a). *Conocimientos, contenidos y conceptos matemáticos*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Maz, A. (2005b). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, Granada.
- McGraw, R., Arbaugh, F., Lynch, K. y Brown, C. (2003). *Mathematics teacher professional development as the development of communities of practice*. Trabajo presentado en 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hawaii.
- McPhee, A. y Forde, C. a. S. F. (2003). Teacher Education in the UK in an era of performance management. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education and Development*, 6(2), pp 37-56.
- Merseth, K. K. y Lacey, C. A. (1993). Weaving stronger fabric: The pedagogical promise of hypermedia and case methods in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 9(3), 283-299.
- Mewborn, D. S. (2003). Teaching, teachers' knowledge, and their professional development. En J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Schifter (Eds.), *A research companion to the Principals and Standards for School Mathematics* (pp. 45-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Miller, H. E. (1996). The multiple dimensions of information quality. *Information Systems Management*, 13(2), 79-82.
- Moore, R. (2003). Reexamining the Field Experiences of Preservice Teachers. *Journal of Teacher Education*, 54(1), 31-42.

- Moreno, F. (2005). *De la matemática formal a la matemática escolar*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Moreno, M. F. (1998). *Didáctica de la matemática en la educación secundaria. Manual para la formación inicial del profesorado de secundaria*. Almería: Universidad de Almería.
- Morine-Dersheimer, G. (1979). Planning in classroom reality: An in-depth look. *Educational Research Quarterly*, 3(4), 83-99.
- Morine-Dersheimer, G. y Kent, T. (2001). The complex nature and sources of teachers' pedagogical knowledge. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education* (pp. 21-50). Dordrecht: Kluwer.
- Mullen, C. A. y Farinas, J. (2003). What constitutes a "highly qualified" teacher? A review of teacher education standards and trends. *Teacher Education and Practice*, 16(4), 318-330.
- Mumme, J. y Carroll, C. (2005). *Using video to consider teachers opportunities to learn in professional development settings*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- National Council for Accreditation of Teacher Education. (2002). *Professional standards for the accreditation of schools, colleges, and departments of education (Revised 2002)*. Washington: NCATE.
- NBPTS. (2002). *What teachers should know and be able to do*. Arlington: Author.
- NCEE. (1983). *A nation at risk: The imperative for educational reform*. Washington: U. S. Government Printing Office.
- NCTM. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston: NCTM.
- NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards*. Reston: NCTM.
- NCTM. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston: NCTM.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- Nicol, C. (1999). Learning To Teach Mathematics: Questioning, Listening, and Responding. *Educational Studies in Mathematics*, 37(1), 45-66.
- Niss, M. (2003). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- Novak, J. (1998). The theory underlying concept maps and how to construct them. Descargado el 3/10/2005
- Nuthall, G. (2002). Social constructivist teaching and the shaping of students' knowledge and thinking. En J. Brophy (Ed.), *Social constructivist teaching: Affordances and constraints* (Vol. 9, pp. 43-79). London: JAI.
- OCDE. (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París: OECD.
- OECD. (2000). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. Un nuevo marco para la evaluación*. Paris: OECD.

- OECD. (2005). The definition and selection of key competencies. Executive Summary. Descargado el 18/10/2005, de <http://www.pfmb.uni-mb.si/bologna/desecco.pdf>
- Oldager, N. (2004). *Conceptual knowledge representation and reasoning*. Tesis doctoral no publicada, Technical University of Denmark, Copenhagen.
- Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, Granada.
- Ortiz, J. (2000). *Modelización y calculadora gráfica en la formación inicial de profesores de matemáticas. Memoria de tercer ciclo*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, Granada.
- Palis, G. d. L. R. (2005). *Continuing education: activities based on student work. How we did it and what we have learned from it*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Pallinscar, A. S., Magnusson, S. J., Marano, N. y Ford, D. (1998). Designing a Community of Practice: Principles and Practices of the GISML Community. *Teaching and Teacher Education*, 14(1), 5.
- Peressini, D., Borko, H., Romagnano, L., Knuth, E. y Willis, C. (2004). A Conceptual Framework for Learning to Teach Secondary Mathematics: A Situative Perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 56(1), 67-96.
- Perry, P., Valero, P., Castro, M., Gómez, P. y Agudelo, C. (1998). *Calidad de la educación matemática en secundaria. Actores y procesos en la institución educativa*. Bogotá: una empresa docente.
- Peter-Koop, A., Santos-Wagner, V. y Breen, C. (Eds.). (2003). *Collaboration in teacher education. Examples from the context of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Pipino, L. L. Y. W. y Wang, R. Y. (2002). Data Quality Assessment. *Communications of the ACM*, 45(4), 211-218.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Milton Keynes: Open University.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Sousa, O. y Fonseca, H. (2003). *Professionals investigate their own practice*. Trabajo presentado en CERME III – European Congress of Mathematics Education, Bellaria, Italy.
- Pope, S. y Jones, K. (2005). *Who trains the new teachers? - supporting tutors new to initial teacher education in mathematics*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Potari, D. y Jaworski, B. (2002). Tackling Complexity In Mathematics Teaching Development: Using the Teaching Triad as a Tool for Reflection and Analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(4), 351-380.
- Preston, B. y Walker, J. (1993). *Competency based standards in the professions and higher education: A holistic approach*. Australia: University of Canberra.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ice - Horsori.

- Putnam, R. P. y Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher*, 29(1), 4-15.
- Rabardel, P. (2003). From artefact to instrument. *Interacting with Computers*, 15(5), 641-645.
- Rabardel, P. y Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting with Computers*, 15(5), 665-691.
- Radatz, H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal for the Research in Mathematics Education*, 9, 163-172.
- Real Academia Española. (2006). Diccionario de la lengua española. Descargado el 7/3/2006, de <http://www.rae.es/>
- Recio, T. (2004). Seminario: itinerario educativo de la licenciatura de matemáticas. Documento de conclusiones y propuestas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 7(1), 33-36.
- Rico, L. (1992). *Proyecto Docente*. Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (1995a). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *Revista EMA*, 1(1), 4-24.
- Rico, L. (1995b). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.
- Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L. (1997b). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (1997c). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L. (1997d). Reflexiones en torno al currículo para el profesor de matemáticas de secundaria.
- Rico, L. (1998a). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1(1), 22-39.
- Rico, L. (1998b). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de secundaria en didáctica de la matemática. En Braira (Ed.), *La formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de didáctica de las matemáticas* (pp. 183-194). León: Universidad de León.
- Rico, L. (1999a). Desarrollo en España de los Estudios de Doctorado en Didáctica de la Matemática. En K. Hart y F. Hitt (Eds.), *Dirección de Tesis de Doctorado en Educación Matemática: Una Perspectiva Internacional*. México: CINVESTAV.
- Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Cuarto simposio de la sociedad española de in-*

- investigación en educación matemática* (pp. 219-231). Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (2001). Análisis conceptual e investigación en didáctica de la matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 179-193). Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (2004a). Grupo de investigación en pensamiento numérico. Descargado el 29/10/2004, de http://www.ugr.es/~dpto_did/gpnumerico/numerico_es.html
- Rico, L. (2004b). La evaluación de matemáticas en el proyecto PISA. En R. Pajares, A. Sanz y L. Rico (Eds.), *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto Pisa 2000* (pp. 39-51). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Rico, L. (2004c). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 8(1), 1-15.
- Rico, L. (2005). Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el proyecto PISA 2003. En INECSE (Ed.), *Pisa 2003. Pruebas de matemáticas y de solución de problemas*. Madrid: Autor.
- Rico, L. (Ed.). (1997e). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L., & Madrid, D. (1999b). *Las disciplinas didácticas entre las ciencias de la educación y las áreas curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M. y Socas, M. (1997a). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M. y Segovia, I. (1997b). Investigación, diseño y desarrollo curricular. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 265-318). Madrid: Síntesis.
- Rico, L., Gómez, P., Moreno, M., Romero, I., Lupiáñez, J. L., Gil, F. y González-López, M. J. (2003). Indicadores de calidad para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en educación matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)* (pp. 289-297). Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. y Segovia, I. (1999). Programa de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato: Universidad de Granada.
- Rico, L. y Sierra, M. (1997). Antecedentes del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 17-76). Madrid: Síntesis.
- Robert, A. y Hache, C. (2000). Connecting Research to French Mathematics Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(3), 281-290.

- Robinson, N. (2005). *Lesson study: an example of its adaptation to israeli middle school teachers*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Schoenfeld, A. H. (2000a). Models of the Teaching Process. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(3), 243-261.
- Schoenfeld, A. H. (2000b). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the American Mathematical Society*, 47(3), 641-649.
- Seago, N. y Mumme, J. (2005). *Collective inquiry and analysis into video-based professional development*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Secada, W. G. y Adajian, L. B. (1997). Mathematics Teachers' Change in the Context of Their Professional Communities. En E. Fennema y B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 193-219). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Segall, A. (2004). Revisiting pedagogical content knowledge: the pedagogy of content/the content of pedagogy. *Teaching and Teacher Education*, 20(5), 489-504.
- Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.
- Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being –or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 37-98). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sfard, A., Hashimoto, Y., Knijnik, G., Robert, A. y Skovsmose, O. (2004). *The relation between research and practice in mathematics education*. Trabajo presentado en 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen.
- Shariq, S. Z. (1998). Sense making and artifacts: an exploration into the role of tools in knowledge management. *Journal, of Knowledge Management* 2(2), 10-19.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Shulman, L. S. (1993). Renewing the pedagogy of teacher education: The impact of subject-specific conceptions of teaching. En L. Monetro y J. Vez (Eds.), *Las didácticas específicas en la formación del profesorado* (pp. 53-69). Madrid: Síntesis.
- Shulman, L. S. (2001). Foreword. En J. Gess-Newsome y N. G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education* (pp. ix-xii). Dordrecht: Kluwer.
- Silver, E., Castro, A., Ghousseini, H. y Stylianides, G. (2005). *The professional education and development of teachers of mathematics*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.

- Sim, C. (2006). Preparing for professional experiences--incorporating pre-service teachers as 'communities of practice'. *Teaching and Teacher Education*, 22(1), 77-83.
- Simon, M. (1995a). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal For Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M., Tzur, R., Heinz, K., Kinzel, M. y Smith, M. (2000). Characterizing a perspective underlying the practice of mathematics teachers in transition. *Journal For Research in Mathematics Education*, 31, 579-601.
- Simon, M. A. (1995b). Elaborating models of mathematics teaching: A response to Steffe and d'Ambrosio. *Journal For Research in Mathematics Education*, 26(2), 160-162.
- Simon, M. A. (1997). Developing new models of mathematics teaching: An imperative for research on mathematics teacher development. En E. Fennema y B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 55-86). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Simon, M. A. (2000). Research on Mathematics Teacher Development: The Teacher Development Experiment. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Skott, J. (2005). *Developing pre-service teacher education in times of constraints: the case of the Eritrean elementary school*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Smith, D. C. y Neale, D. C. (1989). The Construction of Subject Matter Knowledge in Primary Science Teaching. *Teaching & Teacher Education*, 5(1), 1-20.
- Smith, D. W. (2003). Phenomenology. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* Descargado el 5/12/2004, de <http://plato.stanford.edu/archives/win2003/entries/phenomenology/>
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice - Horsori.
- Socas, M. (1998). *Enseñanza de la matemática escolar. Atención a la diversidad*. Documento no publicado, Granada: Currículo de matemática para la enseñanza obligatoria: innovaciones en la década de los 90.
- Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada: Servicio de Publicaciones de la S.A.E.M. Thales.
- Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurable fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 129-162.

- Steffe, L. P. y D'Ambrossio, B. S. (1995). Toward a working model of constructivist teaching: A reaction to Simon. *Journal For Research in Mathematics Education*, 26(2), 146-159.
- Steffe, L. P., von Glasersfeld, E., Richards, J. y Cobb, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory, and application*. New York: Praeger Scientific.
- Stein, M. K. y Brown, C. A. (1997). Teacher learning in a social context: Integrating collaborative and institutional processes with the study of teacher change. En E. Fennema y B. S. Nelson (Eds.), *Mathematics teachers in transition* (pp. 155-191). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 32(1), 49-93.
- Stephens, M. (2003). Regulating the entry of teachers of mathematics into the profession: Challenges, new models, and glimpses into the future. En A. J. Bishop, M. A. K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 767-794). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Strauss, S. (2000). Theories of cognitive development and their implications for curriculum development and teaching. En B. Moon, M. Ben-Peretz y S. Brown (Eds.), *Routledge international companion to education* (pp. 33-50). London: Routledge.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer.
- Strong, D. M., Lee, Y. W. y Wang, R. Y. (1997). Data Quality in Context. *Cacm*, 40(5), 103-110.
- Stuart, J. S. y Tatto, M. T. (2000). Designs for initial teacher preparation programs: an international view. *International Journal of Education Research*, 33(5), 93-514.
- Sullivan, P. (2002). Editorial: Using the Study of Practice as a Learning Strategy within Mathematics Teacher Education Programs. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(4), 289-292.
- Sumsion, J. y Patterson, C. (2004). The emergence of community in a preservice teacher education program. *Teaching and Teacher Education*, 20(6), 621-635.
- Sutherland, S. y Katz, S. (2005). Concept mapping methodology: A catalyst for organizational learning. *Evaluation and Program Planning*, 28(3), 257-269.
- Sztajn, P., Ball, D. L. y McMahon, T. (2005). *And who teaches the mathematics teachers? Professional development of teacher developers*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Aguas de Lindóia.
- Taconis, R., van der Plas, P. y van der Sanden, J. (2004). The development of professional competencies by educational assistants in school-based teacher education. *European Journal of Teacher Education*, 27(2), 215.
- Tamir, E. y Wilson, S. (2005). Who should guard the gates? Evidentiary and professional warrants for claiming jurisdiction. *Journal of Teacher Education*, 56(4), 332-342.

- Tamir, P. (2005). Conocimiento profesional y personal de los profesores y de los formadores de profesores. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1-9.
- TDQM. (2002). The total data quality management program. Descargado el 20/1/2006, de <http://web.mit.edu/tdqm/>
- Tejada, J. (1999). Acerca de las competencias profesionales (I). *Herramientas*, 56, 20-30.
- The Scottish Office. (1998). *Guidelines for Initial Teacher Education Courses in Scotland*. Edinburgh: SOEID.
- Thiessen, D. (2000). A skillful start to a teaching career: a matter of developing impactful behaviors, reflective practices, or professional knowledge? *International Journal of Educational Research*, 33(5), 515-537.
- Thompson, A. G. (1984). The relationship of teacher's conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.
- Thompson, A. G. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.
- Timmerman, M. (2003). Perceptions of Professional Growth: A Mathematics Teacher Educator in Transition. *School Science and Mathematics*, 103(3), 155-167.
- Toranzos, L. (1996). Evaluación y calidad. *Revista iberoamericana de educación*, 10, 63-78.
- Toranzos, L. (2001). El problema de la calidad en el primer plano de la calidad educativa. Cumbre Iberoamericana de Jefes de Estado y de Gobierno. *Programa de Evaluación de la Calidad de la Educación*, 1-17.
- Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal. Realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 25(1), 89-108.
- ued. (2004). Proyectos de "una empresa docente". Descargado el 29/10/2004, de <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/default.html>
- Valero, P. (2002). The myth of the active learner: From cognitive to socio-political interpretations of students in mathematics classrooms. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Mathematics Education and Society* (Vol. 2, pp. 542-553). Helsingor: Centre for Research in Learning Mathematics.
- Valero, P., Perry, P. y Gómez, P. (1997). The teaching of mathematics from within the school. A Colombian Experience. En V. Zack, J. Mousley y C. Breen (Eds.), *Developing practice: Teachers' inquiry and educational change* (pp. 113-122). Geelong: Centre for Studies in Mathematics, Science and Environmental Education.
- Van Der Valk, T. A. E. y Broekman, H. H. G. B. (1999). The lesson preparation method: a way of investigating pre-service teachers' pedagogical content knowledge. *European Journal of Teacher Education*, 22(1), 11-22.
- Veal, W. R. y MaKinster, J. G. (1999). Pedagogical content knowledge taxonomies. *Electronic Journal of Science Education*, 4.
- Veenman, S., van Benthum, N., Bootsma, D., van Dieren, J. y van der Kemp, N. (2002). Cooperative learning and teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 18(1), 87-103.

- Vérillon, P. (2000). Revisiting Piaget and Vigotsky: in search of a learning model for technology education. *The Journal of Technology Studies*, 26(1), 3-10.
- Waldegg, G. (1998). Principios constructivistas para la educación matemática. *Revista EMA*, 4(1), 16-31.
- Wand, Y. y Wang, R. Y. (1996). Anchoring Data Quality Dimensions in Ontological Foundations. *Communications, of the ACM* 39(11), 86-95.
- Webb, N. M. (2004). *Classroom Assessment as a Research Context: Variations on a Theme of Pedagogical Decision Making*. Trabajo presentado en ICME 10 – TSG 27: Internal Assessment, Copenhagen.
- Wenger, E. (1998). *Communities of practices. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University.
- Wenger, E. (2004). Learning for a small planet. A research Agenda. Descargado el 26/9/2004, 2004, de <http://www.ewenger.com/research/researchplandownload.htm>
- Wilson, M. R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal For Research in Mathematics Education*, 24(4), 346-370.
- Wilson, S., Shulman, L. S. y Richert, A. (1987). 150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching. En J. Calderhead (Ed.), *Exploring Teachers' Thinking* (pp. 104-124). London: Cassell.
- Wittman, E. C. (1989). The mathematical training of teachers from the point of view of education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 10, 291-308.
- Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies en Mathematics*, 15, 25-36.
- Wood, T. (2002). Demand for Complexity and Sophistication: Generating and Sharing Knowledge About Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(3), 201-203.
- Wood, T. (2003). A reaction to the background document: Complexity in mathematics teaching and teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 63-67). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- Wood, T. (2005). *Developing a more complex form of mathematics practice in the early years of teaching*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Águas de Lindóia.
- Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 458-477.
- Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19(1), 20-44.
- Zeichner, K. M. y Tabachnick, B. R. (1981). Are the Effects of University Teacher Education "Washed Out" by School Experience? *Journal of Teacher Education*, 32(3), 7-11.



Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

TESIS DOCTORAL

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO
DIDÁCTICO EN UN PLAN DE FORMACIÓN
INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
DE SECUNDARIA

ANEXOS

Pedro Gómez

Granada, 2007



Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO EN UN PLAN DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección del Doctor Luis Rico Romero del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta el Licenciado Pedro Gómez Guzmán para optar al grado de Doctor en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Pedro Gómez Guzmán

VºBº del Director

Fdo.: Luis Rico Romero

ÍNDICE DE ANEXOS

A. Mapas Conceptuales de la Función Cuadrática	1
B. Diseño de la Asignatura	11
C. Calendario de la Asignatura	19
D. Secuencia de Temas	25
E. Transcripción de Grabaciones	31
F. Comentarios a las Transparencias	83
G. Bases de Datos	137
H. Variables de Codificación	143
I. Primera aproximación a los estados de desarrollo	151
J. Ejemplos de Hojas de Cálculo para el Análisis de Discrepancias	157
K. Análisis de Discrepancias y Análisis Clúster	161
L. Identificación y Caracterización de los Significados Parciales	167
M. Fenomenología. Análisis de Transparencias	187
N. Codificación de las Transcripciones del Grupo Función Cuadrática	199
O. Evaluación. Historia de un Conflicto de Significado	203
P. Producción Académica 2000-2007	219

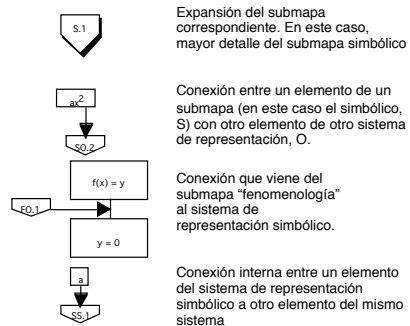
Anexo A

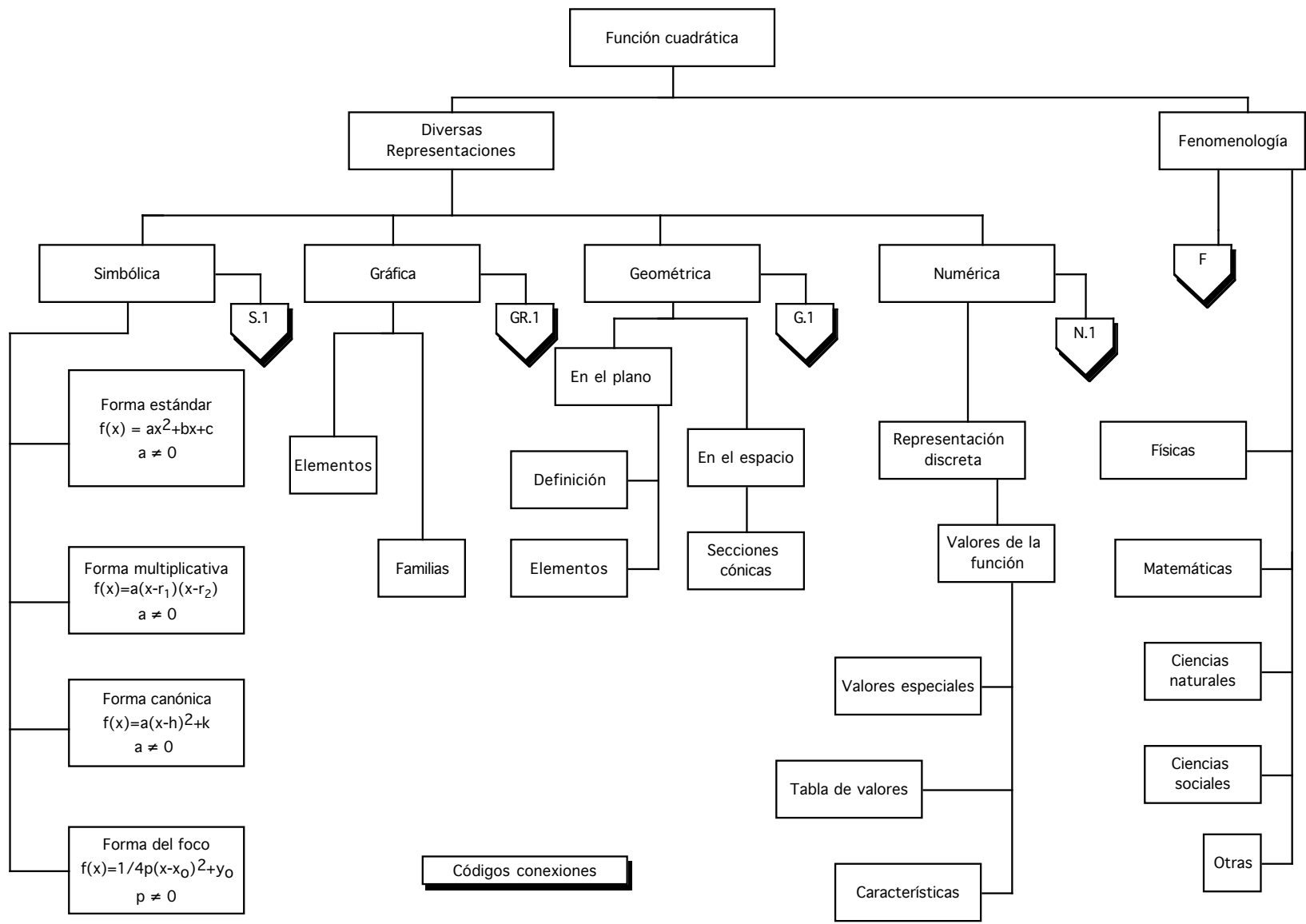
MAPAS CONCEPTUALES DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

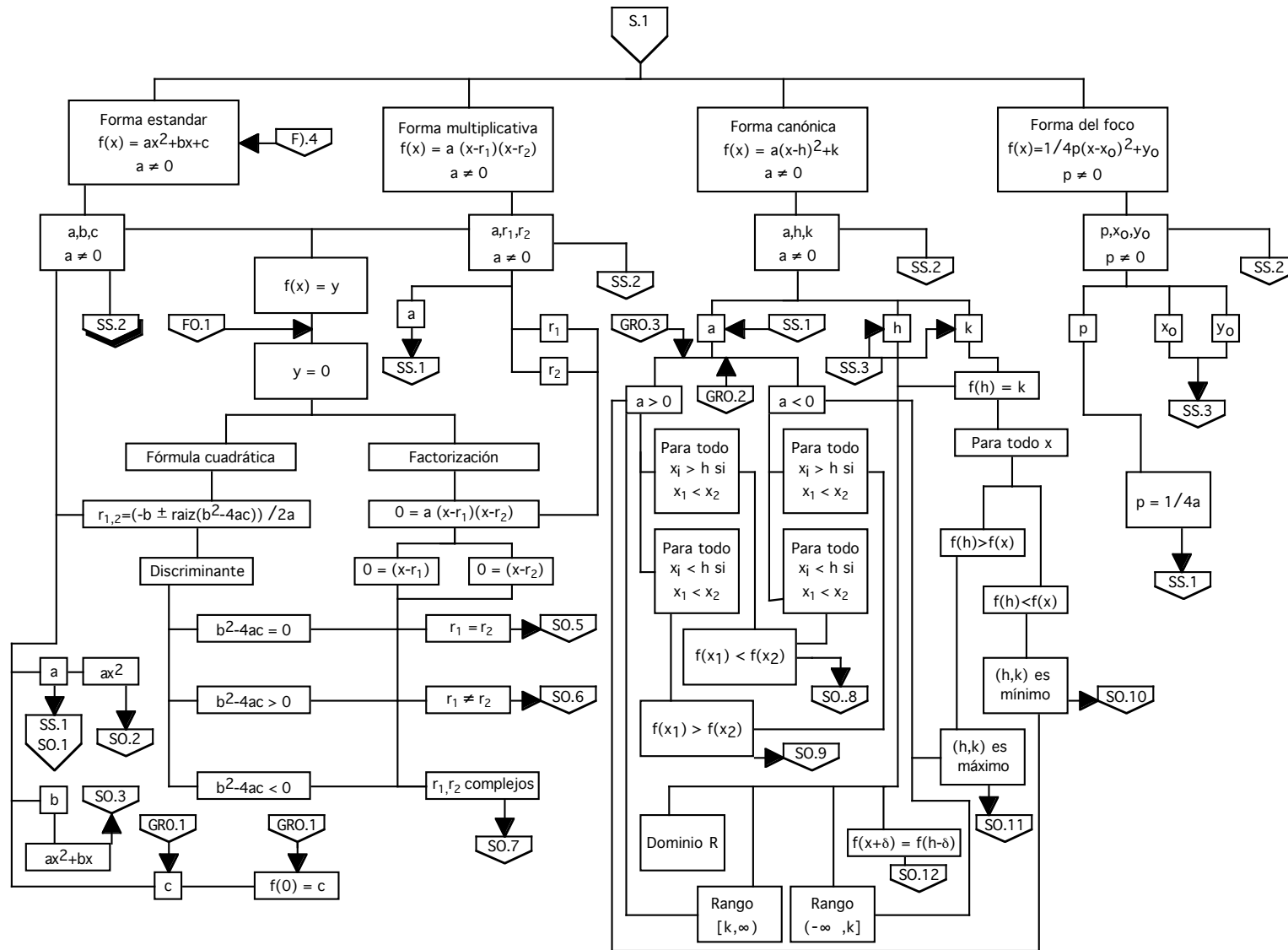
Mapas conceptuales de la función cuadrática

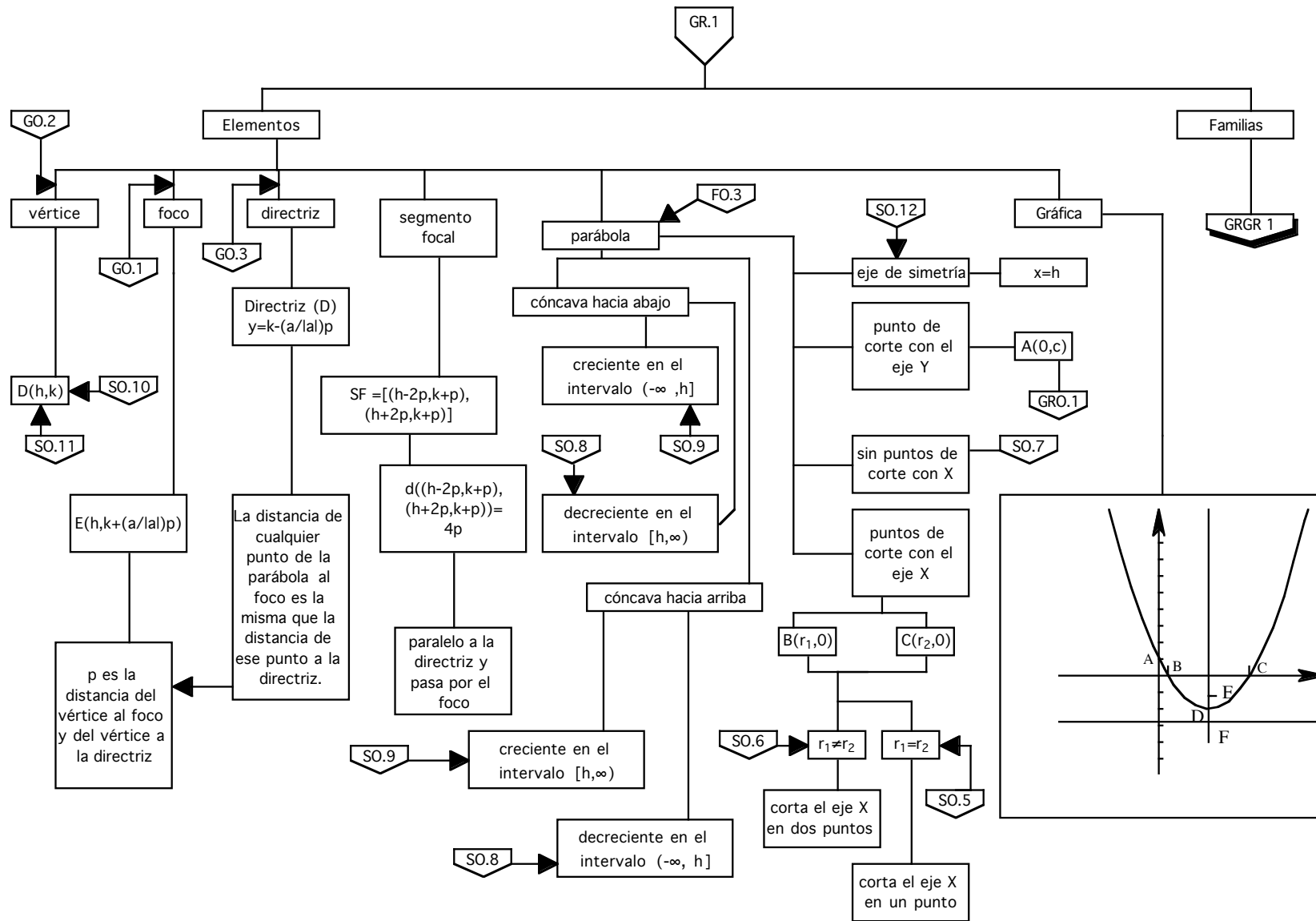
Cristina Carulla
Pedro Gómez

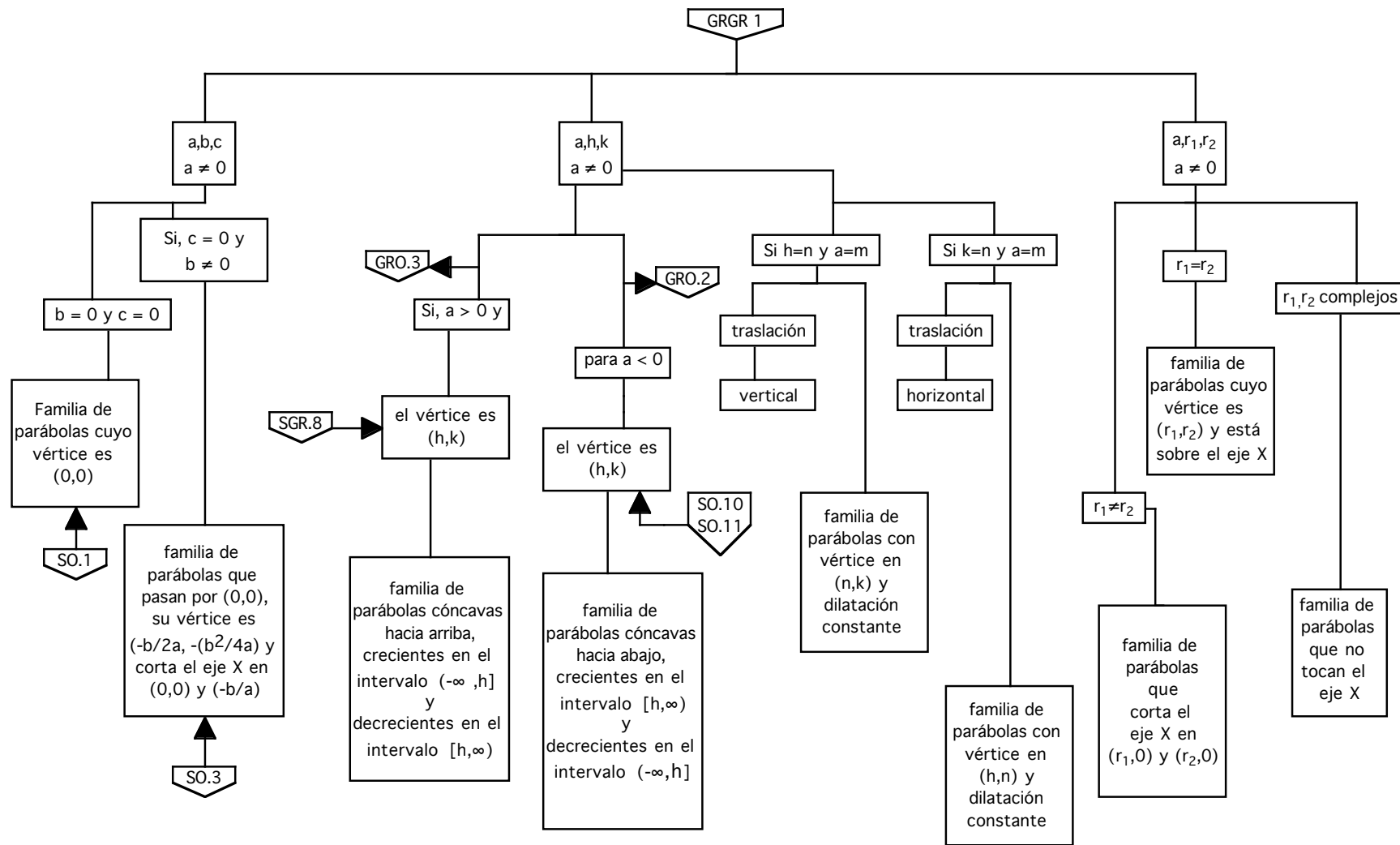
Códigos conexiones

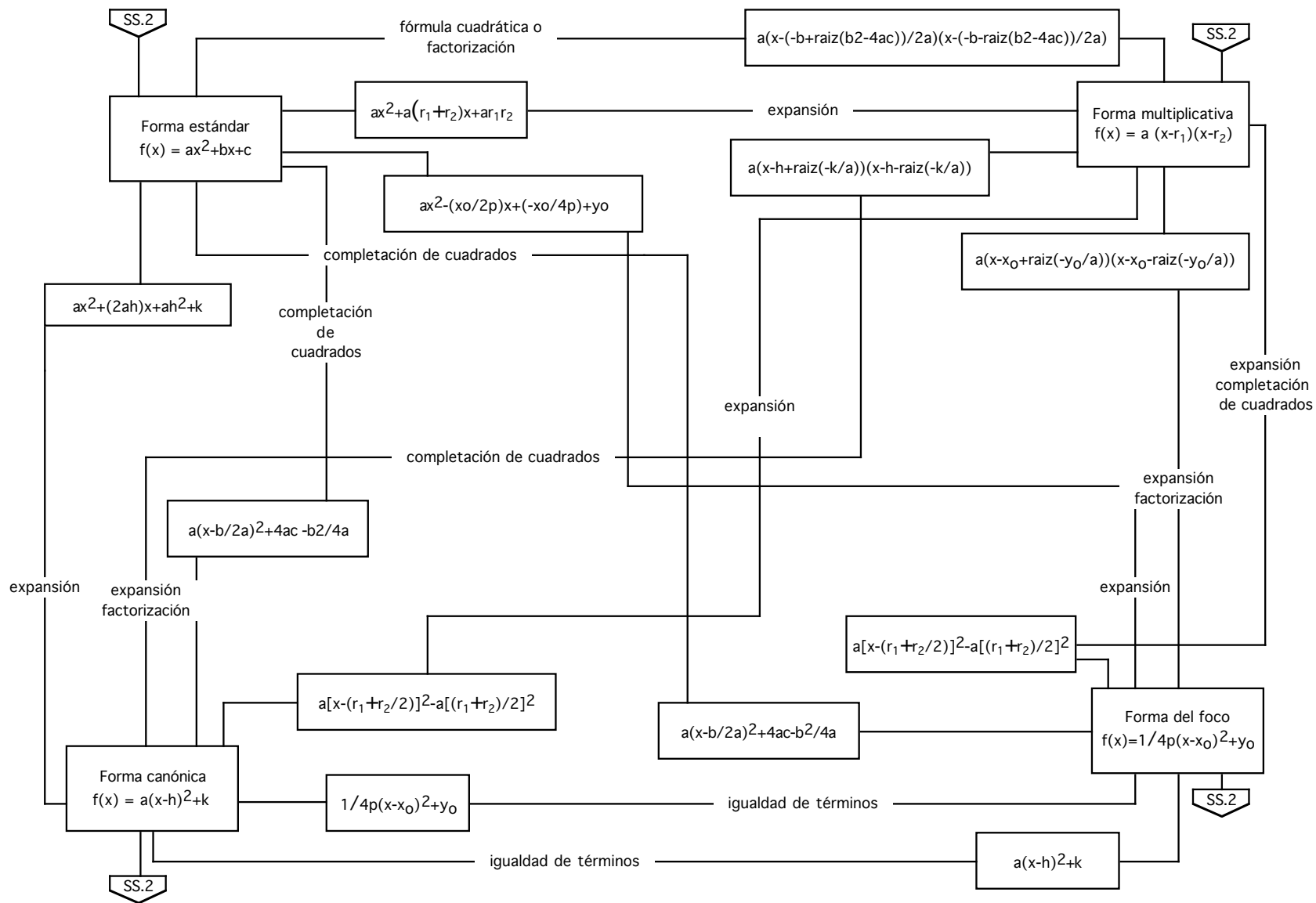


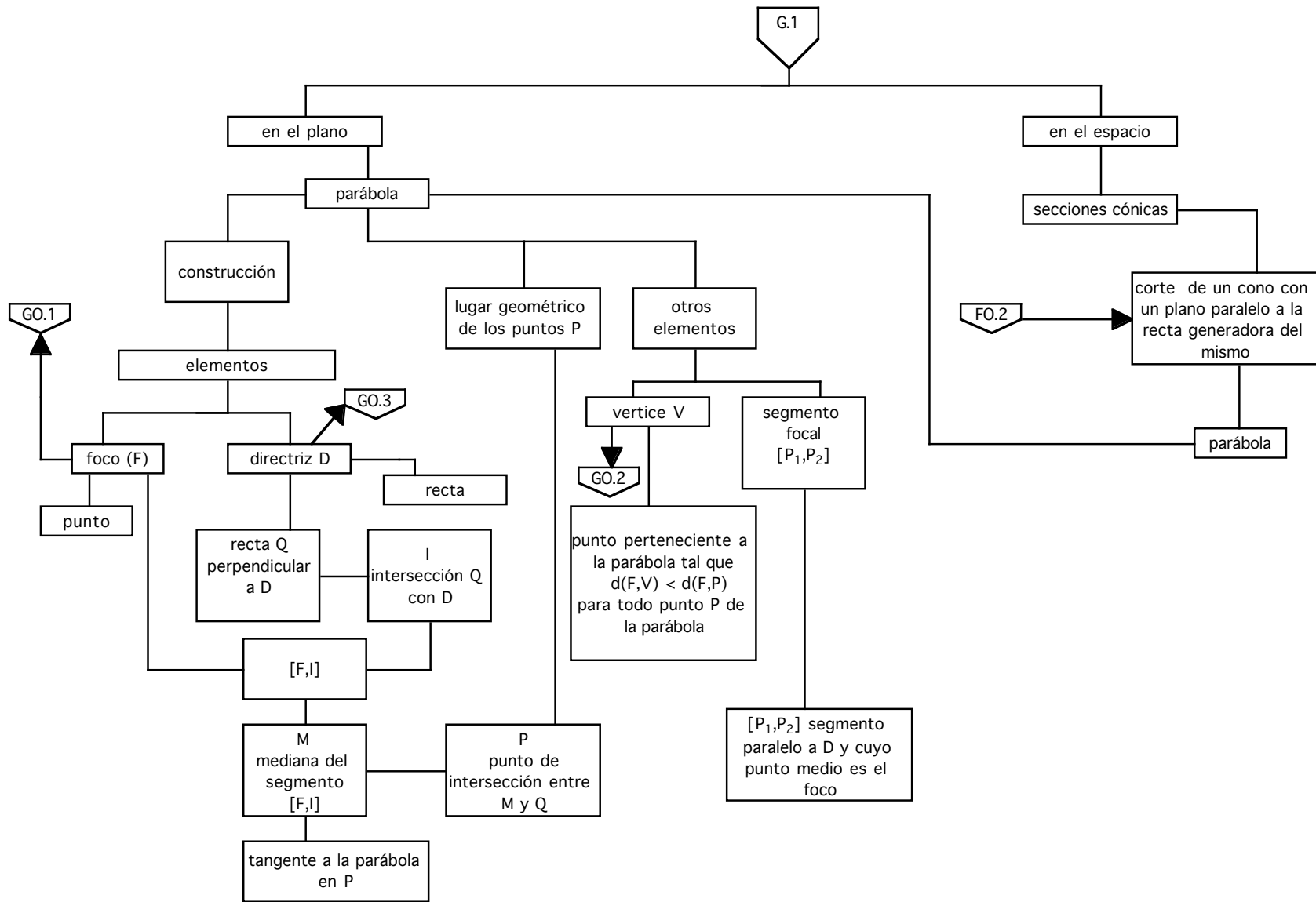


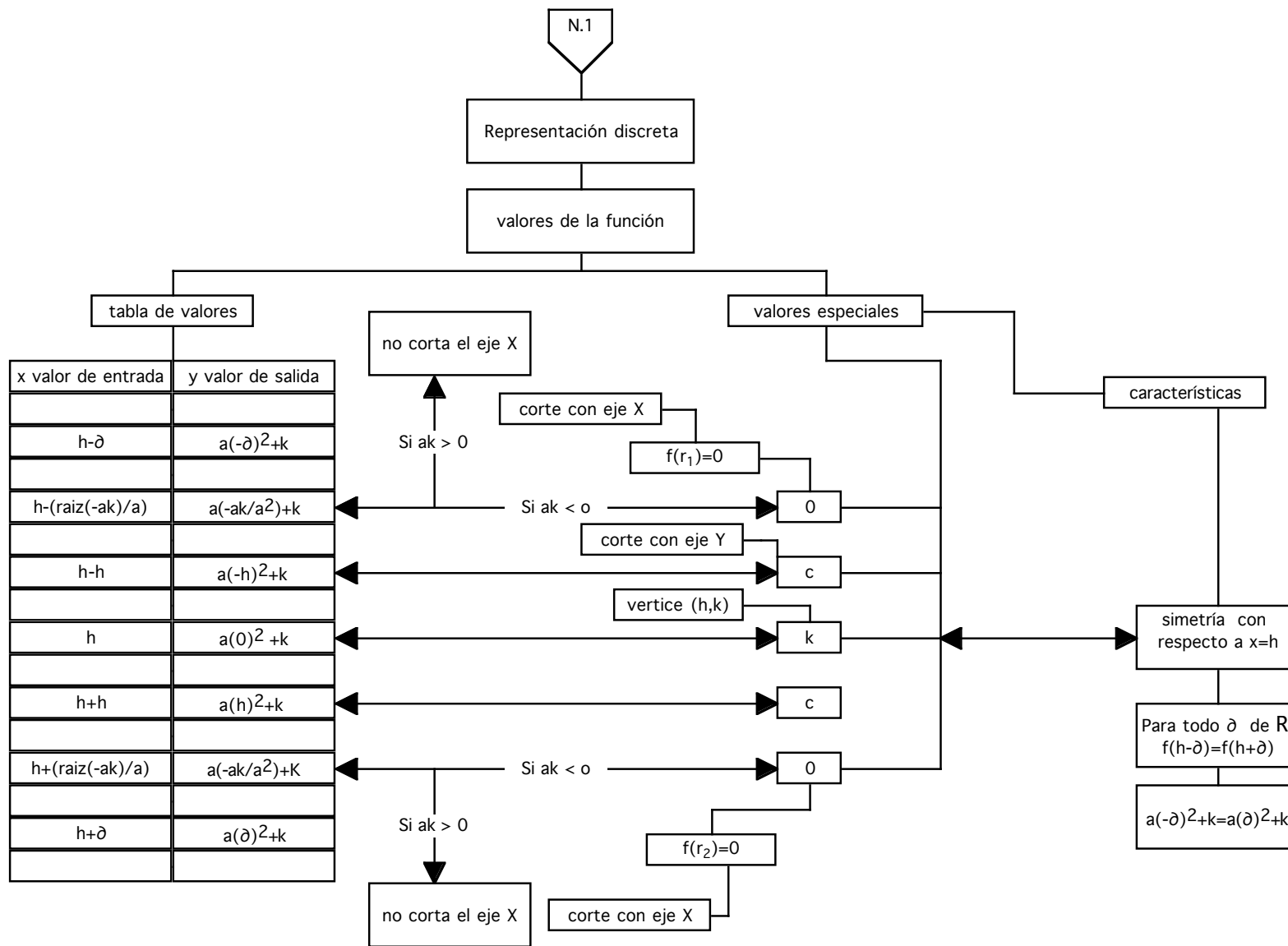


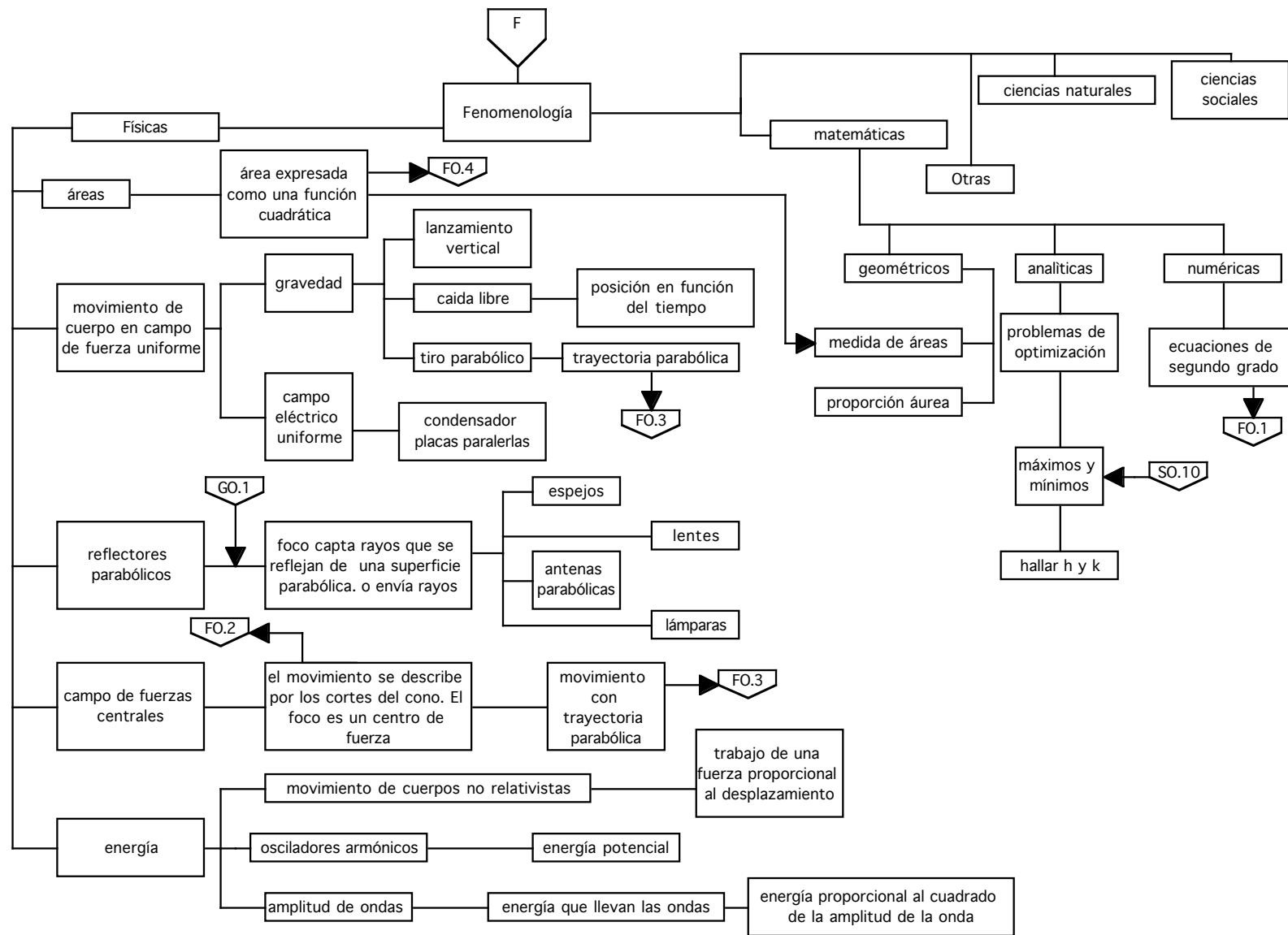












Anexo B

DISEÑO DE LA ASIGNATURA

Este anexo contiene el documento descriptivo de la asignatura que los futuros profesores reciben en el primer día de clase.

**Departamento Didáctica de la Matemática.
Universidad de Granada**

**Licenciatura de Matemáticas. Especialidad de Metodología 5º Curso
Asignatura: Didáctica de la Matemática en el Bachillerato.**

Curso: 2000-2001.

Profesores

Dr. D. Luis Rico Romero (Grupo A, de mañana)

Dr. D. Isidoro Segovia Alex (Grupo B, de tarde)

Finalidad

Iniciar la formación del estudiante de la Licenciatura de Matemáticas como profesor de secundaria mediante la Didáctica de la Matemática es la principal finalidad de esta asignatura.

Para llevar a cabo esta propuesta se articulan los objetivos siguientes.

Objetivos

1. Conocer estudios, proyectos e investigaciones sobre el currículo de matemáticas. Conocer los antecedentes, fundamentos y desarrollo del currículo actual de matemáticas para Educación Secundaria en España.

2. Conocer la dinámica de los procesos de innovación curricular, tipologías de currículo y proyectos curriculares de matemáticas en curso.

3. Conocer y analizar las diferentes finalidades de la enseñanza de las matemáticas.

4. Establecer fundamentos para el currículo de matemáticas en la Educación Secundaria, analizando sus dimensiones y niveles.

5. Determinar diferentes campos conceptuales mediante los que organizar el diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas.

6. Contextualizar el aprendizaje de las matemáticas según las principales teorías que sirven de fundamento a la enseñanza de las matemáticas.

7. Establecer las diferentes componentes, fases y etapas mediante las que se estudia el diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas.

8. Conocer los materiales y recursos usuales en la enseñanza de las matemáticas, así como métodos y criterios de evaluación.

9. Conectar a los profesores de matemáticas en formación con las organizaciones de la comunidad de educadores matemáticos y sus medios de comunicación.

Contenidos:

A. Fundamentación y marco de referencia

1. Historia de la Educación Matemática en España.

2. Noción de Currículo. Antecedentes del Currículo de Matemáticas para Secundaria en España.

3. Fundamentos para una teoría curricular. Estudios curriculares desde la Educación Matemática.

4. Fines generales de la Educación Matemática.
5. Carácter sistémico, niveles de análisis y dimensiones del concepto de currículo.
6. Ley de Ordenación General del Sistema Educativo e implicaciones curriculares.
7. Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria: organización general y niveles de concreción.
8. Proyectos de innovación e investigaciones sobre el currículo de matemáticas: perspectiva internacional.
9. Los contenidos del currículo de matemáticas en educación secundaria; diferencias entre ESO y Bachillerato.
10. Teorías del aprendizaje y aprendizaje de las matemáticas. Instrucción en matemáticas.
11. Características del razonamiento matemático
12. Resolución de problemas.
13. Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.
14. Objetivos para el área de matemáticas en Educación Secundaria.
15. Evaluación en el área de matemáticas.
16. Fenomenología de los conceptos matemáticos.
17. Símbolos y representaciones. Modelización matemática.
18. Materiales y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
19. Los organizadores del currículo de matemáticas.

B. Análisis didáctico y diseño de unidades (Lista de referencia).

20. Sistema de los números naturales en Educación Secundaria Obligatoria.
21. Sistema de los números enteros en Educación Secundaria Obligatoria.
22. Sistema de los números racionales en Educación Secundaria Obligatoria.
23. Incógnita. Ecuaciones e inecuaciones lineales. Sistemas lineales y resolución.
24. Funciones y gráficas. Estudio de las propiedades elementales de una función.
25. Razonamiento proporcional. Aritmética comercial
26. Estudio del trinomio de segundo grado. Ecuación de segundo grado.
27. Geometría del espacio.
28. Estudio de los poliedros.
29. La esfera
30. Concepto de volumen. Medida de volúmenes y unidades de medida.
31. Estudio de las transformaciones en el plano.
32. Relaciones métricas en el triángulo.
33. Semejanzas
34. Iniciación a la trigonometría.
35. Estudio de las cónicas
36. Análisis exploratorio de datos.
37. Técnicas de recuento. Iniciación a la combinatoria.
38. Iniciación a la probabilidad.
39. Patrones y secuencias numéricas. Sucesión. Término general de una sucesión

40. Estudio de las progresiones aritméticas y geométricas.

41. Introducción a los números irracionales.

Metodología:

Con carácter general cada sesión de clase viene precedida por la lectura de un documento de referencia, que sirve para iniciar la presentación y discusión del trabajo en el aula.

Cada sesión consta de:

* Exposición de conceptos y procedimientos relevantes de cada tema, de una bibliografía básica y de documentos complementarios.

* Presentación de materiales curriculares, incluidos los instrumentos de evaluación.

* Crítica y debate sobre los temas y materiales presentados.

La presentación y exposición del tema o de las cuestiones a debatir la realiza los profesores, un alumno, alumna o equipo de alumnos y alumnas, o bien profesores invitados para temas específicos.

Se fomenta el trabajo en grupo, promoviendo el análisis, reflexión crítica y discusión en grupo de los documentos y cuestionarios de trabajo; se promueve la preparación de materiales y redacción conjunta de documentos y programaciones.

Aquellos temas y trabajos elaborados por los alumnos y alumnas se exponen en clase y van seguidos de un debate, dirigido por los profesores. La asistencia a clase es esencial para esta metodología.

El trabajo bibliográfico y documental es muy importante en esta asignatura, por ello, además de las horas de clase, es necesario el uso del horario de tutorías para trabajo de consulta y seminario.

Evaluación:

A lo largo del curso cada alumna o alumno deberá:

i) intervenir en la preparación y redacción de, al menos, diez documentos de trabajo sobre las tareas que se le indiquen; entre ellos estará el diseño de un material o recurso didáctico que sirva para el aprendizaje de un tópico concreto;

ii) presentar públicamente y debatir, al menos, dos trabajos preparados en grupo o individualmente;

iii) preparar la información necesaria para organizar el diseño de un tema del currículo de matemáticas de secundaria, programar una unidad didáctica sobre ese tópico y presentarlo en clase;

iv) asistir a 6 sesiones de clases prácticas con materiales didácticos, en horario extraescolar.

La evaluación tendrá en cuenta los siguientes apartados:

1.- Asistencia a clase con regularidad.

2.- Trabajos individuales realizados.

3.- Trabajos en grupo.

4.- Asistencia a las sesiones prácticas y presentación de un cuaderno

5. - Presentaciones y exposiciones individuales.

6.- Programación y presentación del tema final.

La nota final será resultado de los cinco apartados anteriores, considerando que la ausencia de uno de ellos conlleva no superar la evaluación. La irregularidad en la asistencia a clase implica el pase inmediato a una prueba oral final única. La calificación final tendrá en cuenta la participación e intervención de cada alumno en el aula.

El peso de cada uno de los apartados en la calificación final será el siguiente:

Trabajos individuales realizados: 30%

Trabajos en grupo: 25%

Presentaciones y exposiciones individuales: 20%

Programación y presentación del tema final: 25%

Referencias básicas:

Alonso F. y otros. (1987) *Aportaciones al debate sobre las matemáticas de los 90. Simposio de Valencia*. Editorial Mestral. Valencia.

Cockcroft, W. (1985) *Las Matemáticas sí cuentan*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.

Kilpatrick, J., Rico, L. y Sierra, M. (1994). *Educación Matemática e Investigación*. Editorial Síntesis. Madrid.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1990) *Teoría y práctica en Educación Matemática*. Editorial Alfar. Sevilla

Ministerio de Educación y Ciencia (1989) *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria*. Servicio de Publicaciones del MEC. Madrid.

Rico, L. (1996) *Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Editorial Síntesis. Madrid.

Rico, L. y otros (1997) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Editorial Horsori. Barcelona

Romberg, T. (1991) *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla.

Esta bibliografía se completará con los Decretos para Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato estatales y andaluces, documentos, revistas especializadas y bibliografía complementaria, así como libros de texto de matemáticas para ESO y Bachillerato de diversas Editoriales. Igualmente, se utilizarán los textos de las colecciones *Matemáticas: Cultura y Aprendizaje* y *Educación Matemática en Secundaria*, de la editorial Síntesis, así como los documentos realizados por la diversas administraciones autonómicas y el MEC relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Documentos de trabajo Primer Trimestre

Historia de la Educación Matemática en España:

1. Veá, F. (1995) La enseñanza de las matemáticas hasta la creación de los Institutos de Segunda Enseñanza.
2. Veá, F. (1995) La consolidación de la segunda enseñanza (1857-1868).
3. Rico, L. y Sierra, M. (1994). Desarrollo de la Educación Matemática en España desde la Guerra Civil (1936) hasta la Ley General de Educación.
4. Kline, M. (1973) El fracaso de la matemática moderna (Cps. 2 a 6)
5. Nueva Revista de Enseñanzas Medias (1985) Puig Adam, maestro.
6. Servais, W. () Humanizar las matemáticas.
7. Rico, L. y Sierra, M. (1991) La comunidad de educadores matemáticos.
8. Rico, L. y Sierra, M. (1991) Antecedentes del currículo de matemáticas.
9. Alonso y otros (1987) Aportaciones al debate sobre las matemáticas de los 90. Cps. 1, 2 y 3.
10. Rico, L. y Sierra, M. (1994) La década de los 80 y comienzos de los 90.

Currículo de matemáticas

1. Rico, L.; Castro, E. y Coriat, M. (1997) Revisión teórica sobre la noción de currículo.
2. Rico, L.; Sánchez, V. y Llinares, S. (1997) Concepto de currículo desde la educación matemática.
3. Rico, L. (1995) Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas.
4. Cockcroft, W. (1985) Las matemáticas en la enseñanza secundaria.
5. Howson, G. (1979) Análisis crítico del desarrollo curricular en educación matemática.
6. Howson, G. y Wilson, B. (1987) Las matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90 (Cps. 3 y 4).
7. Ministerio Educación y Ciencia (1989) Diseño Curricular base.

Innovación Curricular

1. Ernest, P. (1989) Valores sociales y políticos en educación matemática
2. Jurdak, M. (1989) La religión y el lenguaje, medios de transmisión cultural y obstáculos y obstáculos en la enseñanza de las matemáticas.
3. Burton, L. (1989) Las matemáticas como experiencia cultural, ¿de quién?
4. H.S.M.O. (1979) Matemáticas desde los 5 a los 16 años.
5. N.C.T.M. (1991) Estándares curriculares y de evaluación: Introducción.
6. Boero, P.(1985) Un proyecto para la enseñanza de las matemáticas entre los 11 y los 14 años.

Anexo C

CALENDARIO DE LA ASIGNATURA

Este anexo contiene el calendario de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato para el bienio 2000-2001.

**Departamento Didáctica de la Matemática.
Universidad de Granada**

**Licenciatura de Matemáticas. Especialidad de Metodología 5º Curso
Asignatura Didáctica de la Matemática en Bachillerato. Curso 2000-2001**

Profesores: Dr. D. Luis Rico Romero (Grupo mañana)

Dr. D. Isidoro Segovia Alex. (Grupo tarde)

Calendario del Primer Trimestre, (33 horas lectivas)

día	mes	horas	tópico
M 3	octubre	2 h.	Presentación. Programa. Calendario. Encuesta. Educación Matemática. Formación de grupos de trabajo
J 5	octubre	1 h.	Historia de la Educación Matemática en España.
M 10	octubre	2 h	Historia de la Educación Matemática en España. Primer documento de trabajo (trabajo en grupo).
M 17	octubre	2 h.	Noción de currículo. Historia del currículo de Matemáticas en España
J 19	octubre	1 h.	Historia del currículo de Matemáticas en España
M 24	octubre	2 h.	Evolución histórica reciente de un concepto matemático: el caso de los números enteros. Documento sobre los fines de la Educación Matemática
J 26	octubre	1 h.	Historia de la Educación Matemática en España: presentación de resúmenes de las lecturas realizadas I.
M 31	octubre	2 h.	Presentación de resúmenes de lecturas realizadas II.
J 2	noviembre	1 h.	Fines de la Educación Matemática: Debate sobre las finalidades. Trabajo individual.
M 7	noviembre	2 h.	Fines de la Educación Matemática: Conclusiones. Dimensiones del currículo de matemáticas. Lectura de referencia.
J 9	noviembre	1 h.	Niveles y dimensiones del currículo de matemáticas. Discusión sobre cada una de las dimensiones.
J 16	noviembre	1 h.	Relación entre los niveles y dimensiones del currículo de matemáticas. Guiones individuales sobre estas relaciones.
M 21	noviembre	2 h.	Presentación de la LOGSE. Distribución del segundo trabajo en grupo.
J 23	noviembre	1 h.	Organización general del currículo de Matemáticas de Secundaria. Decreto de mínimos.
M 28	noviembre	2 h.	Organización general del currículo de Matemáticas de Secundaria. Decreto de la Junta de Andalucía.
J 30	diciembre	1 h.	Bases teóricas de las matemáticas escolares
M 5	diciembre	2 h	Bases teóricas de las matemáticas escolares. Discusión de ejemplos.
J 7	diciembre	1 h.	Aprendizaje constructivo de las matemáticas escolares. Documento de trabajo. Trabajo individual.

M 12	diciembre	2 h.	Aprendizaje constructivo de las matemáticas escolares. Discusión y conclusiones
J 14	diciembre	1 h.	Presentación de los trabajos sobre proyectos de innovación e investigaciones curriculares.
M 19	diciembre	2h.	Presentación de trabajos sobre proyectos de innovación e investigaciones curriculares.
J 21	diciembre	1 h.	Modalidades de los bachilleratos. Currículo de Matemáticas de los bachilleratos

Trabajos previstos:

Estudio y resumen de 2 documentos en grupo; presentación de cada uno de los resúmenes;
estudio y resumen individual de 3 documentos; trabajos individuales que se pedirán en clase.

Profesores: Dr. D. Luis Rico Romero y D. Pedro Gómez Guzmán (Grupo mañana)

Dr. D. Isidoro Segovia Alex. (Grupo tarde)

Calendario del Segundo Trimestre, (28 horas lectivas)

día	mes	horas	tópico
J 1	febrero	1 h.	Presentación programa y plan de trabajo del segundo trimestre. Asignación de temas de trabajo a los grupos. Conocimiento didácticos.
M 6	febrero	2 h.	Metodología y evaluación. Limitaciones para el diseño de unidades didácticas. Organizadores del currículo
J 8	febrero	1 h	Historia de la Matemática I. Distribución primer trabajo sobre historia.
M 13	febrero	2 h.	Historia de la Matemática II. Utilidad didáctica.
J 15	febrero	1 h.	Estructura conceptual de un tema I
M 20	febrero	2 h.	Estructura conceptual de un tema II
J 22	febrero	1 h.	Sistemas de representación I
M 27	febrero	2 h.	Primera exposición de temas: lecturas sobre historia.
J 1	marzo	1 h.	Sistemas de representación II. Asignación de trabajos sobre resolución de problemas
M 6	marzo	2 h.	Fenomenología. Análisis Fenomenológico de los conceptos matemáticos.
J 8	marzo	1 h.	Análisis Fenomenológico de los conceptos matemáticos.
M 13	marzo	2 h.	Modelización I
J 15	marzo	1 h.	Modelización II
M 20	marzo	2 h.	Aprendizaje de las Matemáticas I
J 22	marzo	1 h.	Aprendizaje de las Matemáticas II

M 27	marzo	2 h.	Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas I
J 29	marzo	1 h	Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas II
M 3	abril	2 h.	Presentación de trabajos sobre resolución de problemas.
J 5	abril	2 h.	Análisis cognitivo de los tópicos matemáticos.

- * estudio y resumen de 2 documentos en grupo;
- * presentación de cada uno de los resúmenes ;
- * estudio y resumen individual de 2 documentos;
- * trabajos individuales que se pedirán en clase.
- * asistencia a dos sesiones de prácticas con materiales didácticos.

Profesores:

Dr. D. Luis Rico Romero y D. Pedro Gómez

Guzmán (Grupo A)

Dr. D. Isidoro Segovia Alex (Grupo B)

Calendario del Tercer Trimestre (29 horas lectivas)

día	mes	horas	tópico
M 17	abril	2h.	Errores y dificultades en matemáticas I
J 19	abril	2h.	Errores y dificultades en matemáticas II
M24	abril	2h.	Materiales y recursos. Lecturas sobre R. P.
J 26	abril	2h.	Resolución de problemas 1.
J3	mayo	1h.	Resolución de problemas II
M8	mayo	2h.	Análisis de Instrucción. Metodología I
J10	mayo	1h.	Metodología II
M 15	mayo	2h.	Presentación de lecturas sobre R. P.
J 17	mayo	1h.	Presentación de lecturas sobre R. P.
M22	mayo	2h.	Evaluación en matemáticas
J 24	mayo	1h.	Evaluación en matemáticas
M29	mayo	2h.	Ejemplo de planificación de una unidad didáctica
J 31	mayo	1h.	Ejemplo de planificación de una unidad didáctica
L4	junio	2h.	Unidades didácticas: presentación
M5	junio	2h.	Unidades didácticas: presentación
Mx6	junio	2h.	Unidades didácticas: presentación
J7	junio	2h.	Unidades didácticas: presentación

La presentación de la unidad didáctica de cada uno de los grupos, que tendrá lugar a partir del 4 de junio, se hará en sesiones de 1 hora por cada grupo, no exponiendo cada día mas que 2 grupos como máximo.

Anexo D

SECUENCIA DE TEMAS

Este anexo contiene la secuencia de temas tratados en el desarrollo de la asignatura. Para cada hora de clase se incluye el número de la cinta de audio en la que se encuentra grabada, la fecha de la sesión de clase, el formador que estuvo a cargo de ella y los temas tratados.

01	10/3/00	LR	Primera hora de la primera sesión de clase de Luis e instrucciones para el cuestionario a los alumnos de Isidoro
2	10/5/00	LR	Primera mitad de la segunda sesión de la asignatura
6	10/10/00	LR	Tercera sesión. Historia de la educación matemática en España
7	10/10/00	LR	Final tercera sesión. Historia de la educación matemática en España
9	10/17/00	LR	Final tercera sesión. Historia de la educación matemática en España
10	10/19/00	LR	Currículo e historia del currículo de los 70 a los 90
11	10/24/00	LR	Ley General de educación
12	10/24/00	LR	Presentación grupos 1 y 2 del trabajo sobre historia de la educación matemática en España
13	10/31/00	LR	Presentación grupos 3, 4, 5 del trabajo sobre historia de la educación matemática en España
14	10/31/00	LR	Presentación grupos 6 y 8 del trabajo sobre historia de la educación matemática en España
15	11/2/00	LR	Presentación grupo 7 y comienzo fines
16	11/7/00	LR	Primera hora de la sesión final sobre fines de la educación matemática
17	11/7/00	LR	Segunda hora. Finalización tema fines de la educación matemática. Comienzo sobre las dimensiones y componentes
18	11/9/00	LR	Nueva reflexión sobre fines y la complejidad del currículo
19	11/9/00	LR	Dimensiones y niveles del currículo
20	11/9/00	LR	Dimensiones y niveles del currículo
21	11/21/00	LR	

Dimensiones y niveles del currículo

22 11/21/00 LR

Dimensiones y niveles del currículo

23 11/28/00 LR

LOGSE

24 11/28/00 LR

LOGSE

27 12/5/00 LR

Decretos

28 12/5/00 LR

Filosofía de las matemáticas

29 12/12/00 LR

Final decretos y cognición en el currículo

30 12/12/00 LR

Cognición en el currículo

31 12/14/00 LR

Asignatura 14/12/2000

32 12/14/00 LR

Asignatura 14/12/2000

35 2/6/01 PG

Conocimiento didáctico y programación

36 2/6/01 LR

Introducción a los organizadores del currículo

? 2/8/01 LR

Introducción a los organizadores del currículo

37 2/13/01 LR

Discusión sobre organizadores del currículo e historia

38 2/13/01 PG

La historia en la enseñanza

39 2/15/01 PG

Estructura conceptual. Primera sesión.

40 2/20/01 PG

Segunda sesión sobre estructura conceptual

41 2/20/01 PG

Tercera sesión sobre estructura conceptual

42 2/22/01 PG

Primera sesión sobre sistemas de representación

45 2/27/01 PG

Segunda sesión sobre sistemas de representación

46 2/27/01 PG

Tercera sesión sobre sistemas de representación

47 3/6/01 LR

Primera sesión de presentaciones “Matemáticas y” e historia

48 3/6/01 LR

Segunda sesión de presentaciones “Matemáticas y” e historia

49 3/13/01 PG

Primera sesión de doctrina sobre estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico

50 3/13/01 PG

Segunda sesión de doctrina sobre estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico

54 3/15/01 PG

Segunda sesión sobre análisis fenomenológico

55 3/15/01 PG

Tercera sesión sobre análisis fenomenológico

56 3/20/01 PG

Presentación de la segunda versión del análisis fenomenológico

57 3/20/01 PG

Recapitulación sobre el análisis de contenido. Presentación de doctrina sobre modelización

58 3/27/01 PG

Última sesión sobre modelización y ejercicio de reflexión.

59 3/27/01 LR

Doctrina de LR sobre teorías de aprendizaje y conductismo. Parte 1.

60 3/27/01 LR

Doctrina de LR sobre teorías de aprendizaje y conductismo. Parte 2.

63 4/17/01 PG

Primera sesión sobre errores y dificultades

64 4/17/01 PG

Segunda sesión sobre errores y dificultades

67 4/19/01 PG

Tercera sesión sobre errores y dificultades.

68 4/19/01 PG

Cuarta sesión sobre errores y dificultades.

71 4/26/01 LR

Primera sesión de resolución de problemas

71 4/26/01 PG

Segunda sesión de resolución de problemas

72 4/26/01 LR

Segunda sesión de resolución de problemas

73 4/26/01 LR

Tercera sesión de resolución de problemas

76 5/8/01 PG

Primera hora de presentaciones del trabajo de actividad

77 5/8/01 PG

Segunda hora de presentaciones del trabajo de actividad

78 5/10/01 PG

Sesión de revisión de la actividad de diseño, sesiones de materiales y recursos e introducción a la metodología

79 5/15/01 PG

Primera sesión de presentación de trabajos sobre resolución de problemas.

80 5/15/01 PG

Segunda sesión de presentación de trabajos sobre resolución de problemas.

81 5/17/01 PG

Última sesión sobre resolución de problemas. Resumen y discusión

82 5/22/01 PG

Primera sesión sobre evaluación

83 5/22/01 PG

Segunda sesión sobre evaluación

84 5/24/01 PG

Tercera sesión sobre evaluación

87 5/29/01 LR

Primera sesión de ejemplo de la unidad didáctica de los números naturales.

88 5/29/01 LR

Segunda sesión de ejemplo de la unidad didáctica de los números naturales.

89 5/31/01 LR

Tercera sesión de ejemplo de la unidad didáctica de los números naturales.

109 6/21/01 LR

Presentación final del grupo **esfera**

110 6/21/01 LR

Presentación final del grupo **progresiones aritméticas y geométricas**

112 6/22/01 LR

Presentación final Grupo **cónicas**

113 6/22/01 LR

Presentación final Grupo **funciones y gráficas**

114 6/27/01 LR

Presentación final Grupo **probabilidad**

115 6/27/01 LR

Presentación final Grupo **sistemas de ecuaciones lineales**

116 6/29/01 LR

Presentación final Grupo **números decimales**

117 6/29/01 LR

Presentación final Grupo **función cuadrática**

Anexo E

TRANSCRIPCIÓN DE GRABACIONES

Este anexo contiene la transcripción parcial de las sesiones de clase. Para cada hora de clase se incluye el número de la cinta de audio en la que se encuentra grabada, la fecha de la sesión de clase, el formador que estuvo a cargo de ella, los temas tratados, comentarios sobre la sesión y la transcripción parcial de la grabación correspondiente.

01

10/3/00

LR

Primera hora de la primera sesión de clase de Luis e instrucciones para el cuestionario a los alumnos de Isidoro

Primera hora de la primera sesión de clase de Luis e instrucciones para el cuestionario a los alumnos de Isidoro

A0 - Presentación del curso. Calendario
A76 - Programa. Finalidad. Objetivos.
A200 - Contenido y temas.
A2880 - Metodología.
A340 - Evaluación.
AF B20 - Bibliografía
B40 - Encuesta tradicional.
B200 - Preguntas y conformación de grupos.
B225 - Explicación cuestionario a alumnos de Isidoro

2

10/5/00

LR

Primera mitad de la segunda sesión de la asignatura

Primera mitad de la segunda sesión de la asignatura

A0 - Resultados encuesta
A80 - Preguntas y comentarios
A123 - ¿Qué es matemáticas? ¿Qué es educación?
A203 - Historia de las matemáticas en España
A445 - Final: ley de instrucción pública
[No hay grabación de la segunda mitad de esta sesión]
B0- Comienzo de la sesión 3. Rechazo a la violencia
B30 - Organización grupos
B196 - Comentarios a la sesión anterior
B260 - Continuación Ley Instrucción Pública
B300 - Lucha de los matemáticos por identidad
B 360 - Poca preocupación por la docencia
B 415 - Ley Moyano y secundaria
Fin

6

10/10/0

LR

Tercera sesión. Historia de la educación matemática en España

Tercera sesión. Historia de la educación matemática en España

A0 - Organización de facultades de ciencias
A80 - La educación matemática a comienzos de siglo
A204 - Romarones y la estabilidad en secundaria

A250 - Nuevo currículo
A276 - Primo de Rivera
A308 - República
A374 - Regreso a objetivos y contenido de las sesiones
B0 - Continuación
B33 - Estructura de análisis de los subperíodos
B90 - Mirada histórica a la formación de profesores
B123 - Escuela superior de magisterio
B189 - Movimiento normalista
B237 - preocupaciones didácticas
B140 - Instituto Escuela de Madrid
fin

7

10/10/0

LR

Final tercera sesión. Historia de la educación matemática en España

Final tercera sesión. Historia de la educación matemática en España

A0 - Continuación
A07 - Investigación e innovación
A80 - Sociedad de Matemáticas Española
A93 - Rey Pastor y Puig Adam
Fin en A 110.
A112 - Lo de la clase anterior
A208 - Guerra civil española
A414 - Formación de profesores

9

10/17/0

LR

Final tercera sesión. Historia de la educación matemática en España

Final tercera sesión. Historia de la educación matemática en España

A0 - Continuación
A07 - Investigación e innovación
A80 - Sociedad de Matemáticas Española
A93 - Rey Pastor y Puig Adam
Fin en A 110.
A112 - Lo de la clase anterior
A208 - Guerra civil española
A414 - Formación de profesores
B00 - Formación de profesores
B25 - Revista Bordón
B190 - Comité internacional
B377 - Currículo
Fin

Esta sesión no se grabó completa. Tengo problemas con la organización de las cintas aquí.
La 9 también tiene de 19/10/00 en el lado B

10 10/19/0 LR

Currículo e historia del currículo de los 70 a los 90

Currículo e historia del currículo de los 70 a los 90

A0 - Elementos de currículo: institución
A25 - Fines
A37 - Sistema de control
A40 - Interés en historia
A70 - Periodo 70 -90
A131 - Contexto
A 214 - Cita de González
A264 - Democratización de la educación
Final en A308

11 10/24/0 LR

Ley General de educación

Ley General de educación

A000 - Ley General de Educación
A068 - La nueva estructura del sistema educativo
A130 - Nuevo currículo de matemáticas basado en las matemáticas modernas
A223 - Aceptación supuestamente universal de la idea
A250 - El disparate
A323 - Estructura de la educación secundaria
A380 - Currículo de matemáticas de cada etapa
A434 - Organización por áreas en matemáticas
B000 - Continuación
B014 - Currículo del BUP
B097 - COU
B186 - Esquema
No se grabó la presentación de Alexander durante la segunda sesión.

12 10/24/0 LR

Presentación grupos 1 y 2 del trabajo sobre historia de la educación matemática en España

Presentación grupos 1 y 2 del trabajo sobre historia de la educación matemática en España

A000 - Grupo 1 (ya comenzado) El siglo XIX
A160 - Grupo 2. La crisis del 98
B220 - Final

13

10/31/0

LR

Presentación grupos 3, 4, 5 del trabajo sobre historia de la educación matemática en España

Presentación grupos 3, 4, 5 del trabajo sobre historia de la educación matemática en España

A000 - Grupo 3. DE la guerra civil a la LGE
Grupo 4. De LGE y posterior.
B100 - Grupo 5. 80 y comienzos de 90

14

10/31/0

LR

Presentación grupos 6 y 8 del trabajo sobre historia de la educación matemática en España

Presentación grupos 6 y 8 del trabajo sobre historia de la educación matemática en España

A000 - Grupo 6. Puig Adam
A230 - Grupo 8. Simposio de Valencia

15

11/2/00

LR

Presentación grupo 7 y comienzo fines

Presentación grupo 7 y comienzo fines

A000 - Presentación Grupo 7. Matemática moderna.
A166 - Valoración del primer mes.
A? - Fines
B000 - Continuación fines.

16

11/7/00

LR

Primera hora de la sesión final sobre fines de la educación matemática

Primera hora de la sesión final sobre fines de la educación matemática

17

11/7/00

LR

Segunda hora. Finalización tema fines de la educación matemática. Comienzo sobre las dimensiones y componentes

Segunda hora. Finalización tema fines de la educación matemática. Comienzo sobre las dimensiones y componentes

18

11/9/00

LR

Nueva reflexión sobre fines y la complejidad del currículo

Nueva reflexión sobre fines y la complejidad del currículo

A000 - Entrega de documento y valoración

A054 - Dimensiones del currículo y el informe Briscal

A230 - La complejidad de los fines

A350 - Reflexión sobre la universidad, las carreras y el trabajo la rentabilidad

B070 - Documento sobre el currículo

B110 - Fines. Niveles de reflexión. El trabajo: reelaborar la propia reflexión

B150 - Hace resumen del documento

B225 - Métodos de estudio

B325 - El ejemplo de ϵ - δ como ejemplo de concepto equivalente a currículo

19

11/9/00

LR

Dimensiones y niveles del currículo

Dimensiones y niveles del currículo

A000 - Discusión sobre la tarea

A020 - Regreso a la noción de currículo

A083 - Transparencias

A123 - ¿Qué es el conocimiento?

A200 - ¿Por qué es importante?

A311 - ¿Qué es el aprendizaje?

A400 - ¿Qué conocimiento y aprendizaje en su escuela?

B110 - ¿Qué es enseñanza? ¿Cómo planificar?

B250 - Evaluación

B300 - Las dimensiones

20

11/9/00

LR

Dimensiones y niveles del currículo

Dimensiones y niveles del currículum

A000 - El espacio tetradimensional del currículum. Dimensiones, niveles como ordenadas, perspectiva, distancia, concreción
A150 - Fuentes disciplinarias del currículum
A180 - Plan de formación del profesor
A242 - Nivel de responsabilidad administrativa
A330 - La tabla
A430 - Hacer una frase moviéndose por el plano de la tabla de niveles
B050 - Respuestas de los alumnos
B109 - Fin

21 11/21/0 LR

Dimensiones y niveles del currículum

Dimensiones y niveles del currículum

A000 - Tabla del currículum
A050 - Mi intervención
A115 - Regreso a los tetraedros
A200 - Los poner a rellenar profesor - metodología
A430 - Metodología - Alumno
B000 - Lista de verbos
B100 - Metodología - Conocimiento
B215 - Metodología - Escuela

22 11/21/0 LR

Dimensiones y niveles del currículum

Dimensiones y niveles del currículum

A00 - Más de media hora de trabajo en clase: resumen de lo anterior por parte de ellos. Se recoge
B030 - Fin de ejercicio
B100 - Preámbulo LOGSE. Críticas. Él defiende la LOGSE

23 11/28/0 LR

LOGSE

LOGSE

A000 - Entrega de trabajos
A100 - Reflexión sobre ejercicio

A170 - Entrega de trabajos en grupo sobre innovación
A316 - Regreso a la LOGSE
B000 - Estructura
B080 - Preámbulo
B150 - Educación obligatoria
B250 - Europa

24 11/28/0 LR

LOGSE

LOGSE

A000 - Informe Briscal
A150 - Proyectos curriculares y formación de profesores
A250 - Reflexiones sobre la naturaleza de las leyes
B000 - Más discusión sobre la primera página de la LOGSE

27 12/5/00 LR

Decretos

Decretos

A000 - Reflexiones sobre el trabajo de evaluación en los tetraedros.
A300 - Regreso a los documentos. El decreto 1345
B065 - Objetivos (discusión sobre sistemas de representación)
B100 - Permanente referencia al debate actual. Los contenidos se presentan con respecto a fenómenos y no a objetos matemáticos.

28 12/5/00 LR

Filosofía de las matemáticas

Filosofía de las matemáticas

La sesión la dicté yo siguiendo las ideas de Ernest. Admití muy poca intervención.

29 12/12/0 LR

Final decretos y cognición en el currículo

Final decretos y cognición en el currículo

A000 - Decreto de secundaria
A053 - Organización cognitiva del contenido
A110 - Conceptos y procedimientos
A175 - Ejercicio: escoger un concepto y generar hechos, términos, convenios y resultados.
A260 - Estas nociones son relativas dentro de su contexto estructural
B000 - Continuación ejercicio
B140 - Conocimiento procedimental

30 12/12/0 LR

Cognición en el currículo

Cognición en el currículo

A000 - Número de pelos en la cabeza
A090 - El esquema gráfico del conocimiento
A200 - Otras normativas adicionales parra la ESO
A330 - Entrega de documentos adicionales
B000 - ¿Estamos perdidos? Trabajo para febrero: “matemáticas y ...”

31 12/14/0 LR

Asignatura 14/12/2000

Presentaciones de los alumnos sobre innovaciones curriculares

A000 - Grupo Jose, Antonio, Alberto y Bartolo
A000 - Bartolomé. Educación matemática y sociedad
A055 - Alberto. Naturaleza de las matemáticas y democracia
A090 - Jose. Fragmentación y aislamiento
A150 - Antonio. Religión y matemáticas.
A262 - Valoración
A300 - Discusión. Matemáticas y género.
B000 - Continuación discusión
B040 - Grupo Laura, Ávila, María Luisa, Maite, Sandra. Informe Cockcroft.
María Luisa. Preámbulo.
B127 - Ávila. Exámenes.
B165 - Maite. Rendimiento alumnos
B270 - Laura. Matemáticas en currículo.
B344 - Sandra. Más exámenes.

32 12/14/0 LR

Asignatura 14/12/2000

Presentaciones de los alumnos sobre innovaciones curriculares

A000 - Continuación presentación de grupo de Maite.
Ávila. Valoración. Crítica a la no-discriminación.
A080 - Luis Rico defiende el documento. Debate sobre el informe.

35

2/6/01

PG

Conocimiento didáctico y programación

Justificación de los organizadores del currículo y programación para el segundo trimestre

A00- Introducción de LR sobre práctica
A025- Esquizofrenia sobre los discursos de las dos asignaturas. Diferencias en las prioridades.
A049- PG: relato de la evaluación del final del trimestre
A090- el problema del profesor. ¿Qué voy a hacer para ser profesor de matemáticas?
A110 - Los problemas que se van a tratar aquí y lo que interesa es que los alumnos aprendan
A130- Aprendizaje en matemáticas
A162- Constructivismo y como debo enseñar
A205- ¿Cuál es el problema del profesor y qué debe saber el profesor?
A252 - El problema del profesor NCTM y Romberg
A276- Análisis didáctico y diseño de actividades
A376 - Los tetraedros del conocimiento didáctico
A 448- Análisis cognitivo
A460- Análisis de instrucción
B040- Qué se debe saber
B055- La estructura de los organizadores del currículo
B065- Conocimiento general y específico
B076- El propósito de lo que sigue
B110- El trabajo de diseñar la unidad didáctica
B135- Organización del trabajo con los organizadores del currículo
B180- Lista de temas para grupos
B215- Comentario de Carmen: más trabajo en todas las asignaturas que antes.
B250- Final.

36

2/6/01

LR

Introducción a los organizadores del currículo

Presentación de Luis sobre la justificación a los organizadores del currículo

A000- Inicio. Curso de calculadoras de José
A040- Tomando la programación. Metodología y evaluación. Trabajar en un tema específico.
A104- Los cuatro focos de la evaluación
A140- Objetivo final del curso. Nos toca explicar un tema. La historia de los organizadores del currículo: el trabajo que él tuvo que hacer. La pirámide del currículo: sólo hay diferencias en el contenido
A230- La relación con la ministra
A250- ¿Qué es lo que no encaja?
A280- La diferencia entre planificar para la administración y la planificación para los alumnos

- A300 - El problema de la enseñanza: cada concepto encierra una pluralidad de significaciones
- A350 - Preguntas?
- A350 - **Diego**: unidades didácticas para la conserjería.
- LR**: hacemos el trabajo para el alumno y después lo hacemos para la conserjería. Promoción de edición de documentos por profesores.
- A418 - Organizadores del currículo y unidades didácticas? ¿Qué piezas son esenciales para trabajar una unidad didáctica? ¿Por qué esas piezas?
- B00 - ¿En qué orden, con qué estructura...? Pasa por los vértices de la pirámide. La estructura de los documentos curriculares no da los criterios necesarios para la planificación para los alumnos.
- B055 - Nuevas herramientas conceptuales que tengan precisión.
- B070 - Ejemplo con la derivada. Pasa por sus representaciones.
- B096 - el conocimiento que tenemos sobre los contenidos (en el sentido fino) nos permite identificar no sólo los acuerdos, sino también las diferencias con los colegas (en la manera de manejar un tema). Todas las posturas son legítimas.
- B140 - ¿Cómo objetivar y especificar el conocimiento para poder organizar unidades didácticas? ¿Qué conocimiento que no sea el contenido?
- B160 - La estructura lógica - formal. El currículo de los años 60-70. La preocupación por los errores y dificultades ya apareció en este momento.
- B235 - “Focos que tratan de reflexionar, enriquecer, dar objetividad a ese conocimiento que debe tener un profesorado que debe de compartirse”. La lista.
- B305 - [Episodio 01] Final. Intervención de **Carmen**.
- B326 - [Episodio 02] Comentarios de Diego después de clase sobre su experiencia en la práctica.

36b

2/8/01

LR

Introducción a los organizadores del currículo

Continuación de la presentación de los organizadores del currículo. Profundización en su significado.

Esta clase no se pudo grabar. La grabadora no funcionó. Se hace una transcripción detallada de los apuntes.

Comienza la clase con preguntas sobre la sesión anterior. [Episodio 03] **Carlos** reitera que no entiende bien la relación entre la planificación para la administración y la planificación para el aula y el papel de los organizadores del currículo. **LR** le responde que aún si se quiere hacer una planificación para la administración y esta planificación estará descrita en términos de los niveles del currículo, éste será el paso final. Pero no se puede comenzar por allí porque se produciría un documento artificial. El problema se centra en la elaboración de la unidad didáctica.

[Episodio 04] **Esmeralda** introduce el problema de la relación profesor - alumno. ¿Se debe tener una buena relación con ellos? **Marina** afirma que hay que tener cuidado porque se puede perder el respeto y el control de la clase. **Esmeralda** replica que hay que buscar un término medio, “ni cortado, ni feria”. **LR** no opina al respecto. La da la palabra a **Paco**, pero más tarde se reafirmará en su posición de no considerar este punto. Dice que el respeto proviene del mismo trabajo.

[Episodio 05] **Paco** hace un discurso en el que no propone preguntas sin que sienta su posición. Las matemáticas tienen mucha riqueza. Hay multitud de maneras en las que se puede presentar. No es como historia en la que hay hechos objetivos. En matemáticas hay varios caminos válidos. Por ejemplo, se puede presentar el concepto desde la perspectiva práctica o desde la teórica. Eso depende de la situación. Nadie puede decir que hay un método estándar. Por lo tanto hay que tener manga ancha para explicar un concepto de una manera y de otra. Es algo enriquecedor, pero también fuente de conflicto.

[Episodio 06] **Diego** se pregunta sobre cómo saber si una unidad didáctica es buena o mala. Dice que la única manera es llevarla a la práctica y ver si los alumnos aprendieron. **LR** responde tomando una parte de la pregunta: lo primero es que tenemos que tener criterios con base en los cuales juzgar la calidad. Menciona los objetivos. **PG** afirma que se espera que, en todo caso, tengamos criterios para valorar los diseños antes de ir a la práctica. Hace la metáfora de la comparación de dos coches. **LR** habla de la perspectiva del usuario y el ingeniero.

LR regresa ahora sí a la clase. “El debate es de cuántas perspectivas importantes se puede analizar el conocimiento matemático. Porque si hay varios modos, debemos encontrar la manera más significativa posible. Los significados no se agotan en la presentación lógico - formal y en los errores. Hay más perspectivas. Esto da lugar al concepto estrella: los organizadores del currículo.

En la *transparencia* presenta los organizadores del currículo como *referencias conceptuales para articular el diseño y desarrollo de unidades didácticas*. Hace una metáfora con la edición de libros de texto. Después (*nueva transparencia*) afirma que un organizador es un modo de transmitir la complejidad y proporciona criterios de controlar esa complejidad. Es un foco para hacer visibles los planes.

Introduce las *ventajas* de los organizadores del currículo: muestra distintas estructuraciones de la unidad didáctica (pone el ejemplo de la derivación) y por consiguiente sirve de base para la interpretación y la discusión. Los organizadores del currículo deben permitir que el profesor adopte una posición y, al poner reglas claras, situar opciones en referencias comunes.

Juan Félix quiere hacer una pregunta sobre los libros de texto, pero **LR** lo interrumpe para afirmar que el libro de texto ha hecho ya una selección con respecto a los organizadores del currículo. Siempre hay referencia. Lo que pasa es que no hay solamente una. Las matemáticas solas son tan sólo una de las referencias. Presenta la lista de los organizadores del currículo en un orden particular. Presenta cinco: errores, sistemas de representación, análisis fenomenológico, modelización e historia. Después agrega la estructura conceptual y la ubicación en el currículo. **PG** agrega la resolución de problemas. Hace ya una discurso sobre la relación entre sistemas de representación y modelización. Pone a los sistemas de representación dentro de las matemáticas y al modelo como una idea relacional. Afirma que los materiales y recursos son un tipo de modelo.

En una *nueva transparencia* afirma que la información de los organizadores del currículo se encuentra en las tareas y las actividades de los libros de texto. Puedo analizar los libros de texto según los organizadores del currículo. Pero, mientras que para el análisis conceptual hay libros de texto, no hay fuentes documentales para los otros organizadores del currículo. Por eso el trabajo de los grupos es recoger esa información. La idea no es poner todo en la unidad didáctica para dárselo a los alumnos. La intención es tener una buena fuente de información. También se quiere que aprendan a trabajar en grupo.

Presenta ejemplos de los organizadores del currículo en los libros de texto.

Discusión sobre organizadores del currículo e historia

Discusión sobre preguntas de los alumnos acerca de los organizadores del currículo y comienzo del tema de historia

A00- Entrega la lista bibliográfica para el trabajo de historia. Les dice que se debe elaborar una cierta evolución histórica y pide que se complemente con búsquedas adicionales. Les explica el contenido de la lista bibliográfica y dónde pueden encontrar los ítems. El caso del índice analítico.

A068 - [Episodio 07] Dudas, comentarios sobre la idea de organizadores del currículo. Qué les ha gustado menos y más. Qué expectativas. Lo que me falta y lo que me sobra. **Carlos** responde que ve la complejidad de la unidad didáctica y que los organizadores del currículo permiten crear su propia unidad didáctica. Intervienen también **Nuria** y Bartolomé para resaltar el hecho de que los organizadores del currículo permiten la diversidad de las unidades didácticas y pueden aportar a la motivación.

A113 - [Episodio 08] Interviene **Carmen** para reiterar la duda de la relación de los organizadores del currículo con la idea general de currículo.

A141 - [Episodio 09] Interviene **Paco**, preguntando sobre si hay alguna jerarquía en los organizadores del currículo. **LR** explica cómo los organizadores del currículo pueden servir para hacer el diagnóstico de los errores de los estudiantes. **PG** habla de la estructura de los organizadores del currículo: no son independientes.

A184 - [Episodio 10] **Juan Félix** habla de la unidad didáctica como si fuera un objeto al que le faltan o fallan cosas. Juan Félix ve la unidad didáctica como un objeto terminado. No logra ver que la unidad didáctica es algo que cada quien construye. **LR** da una explicación detallada de esto. Juan Félix también está preocupado por la posibilidad de que los organizadores del currículo proporcionen toda la información que se necesita. **LR** dice que es la apuesta. Juan Félix manifiesta poca comprensión de la idea de unidad didáctica pero un gran interés por la potencialidad de los organizadores del currículo para diseñar y construir unidades didácticas. **LR** insiste sobre la estructura e introduce la metáfora de la sal en la comida para hablar de unidad didáctica “digeribles” y del papel de los organizadores en ello.

A257 - [Episodio 11] **Bartolomé** se preocupa por la validez de la unidad didáctica. **PG** introduce la idea de la potencialidad de los organizadores para el análisis de los problemas que se tengan en clase.

A309 - [Episodio 12] **Marina** dice que no entiende como pueden servir los organizadores del currículo para la relación con los alumnos. La idea de la utilidad de las unidades didácticas. **Diego** interviene para reiterar que no podemos saber la calidad de las unidades didácticas hasta que no se pongan en práctica. Se refiere a una experiencia suya en la práctica. **PG** reitera lo del análisis de los problemas y se refiere al análisis didáctico dentro de la clase en momentos específicos.

A366 - [Episodio 13] **Joaquín** quiere saber si cada organizador tiene una finalidad. **LR** reitera que su propósito es enriquecer el significado y que las limitaciones hacia lo formal son nuestras.

A417 - [Episodio 14] **Joaquín** regresa al tema de la *unicidad* de la unidad didáctica. **LR** insiste en que puede haber una multiplicidad de unidades didácticas.

B000 - [Episodio 15] **Carlos** quiere saber qué significa lo de “análisis cognitivo”. **LR** explica.

B027 - **LR**. Se entra en la historia. La función de la historia de la matemática en la enseñanza de las matemáticas. Montones de posibilidades, pero no de enseñar historia. Evolución y dinámica de la construcción del conocimiento matemático. Las razones de la utilización de la historia para el profesor. ¿Cuáles son más creíbles? La ventaja de haber leído con anterioridad.

B068 - **Carmen** no entiende lo de la hipótesis genética. (**LR** la interrumpe). **LR** es una hipótesis de

trabajo. Paralelo entre la historia y el aprendizaje. Hipótesis discutible. Introduce el ejemplo del sistema decimal de numeración. hace un resumen de esta historia identificando los eventos claves. Hace la conexión con las dificultades de los niños en la escuela.

B127 - **Paco** quiere explicación sobre la función de la historia en la organización del currículo. **LR** le muestra que las matemáticas de primaria siguen un esquema histórico. LR interrumpe cuando Paco quiere hablar. **Paco** confirma que la similitud no es “lineal”. LR afirma que en términos generales es cierto. Primaria hasta el renacimiento. Secundaria del renacimiento hasta el siglo XVIII.

B158 - **Begoña** piensa que el conocimiento histórico sirve para responder preguntas del tipo “¿por qué y para qué?” de los alumnos [no se entiende].

B180 - **LR** pasa a las razones de los alumnos. [No se entiende.] Insiste en que la relación historia - aprendizaje es una hipótesis de trabajo.

B204 - **Carmen** sigue preocupada por el tema. ¿El niño piensa así? [No se entiende.] **LR** responde que “cuando la utilizamos como hipótesis de trabajo, estamos ayudando al niño.”

B209 - **Marina** interviene para afirmar que si es una hipótesis de trabajo, entonces puede haber diferentes posiciones con respecto a la cuestión. **LR** agrega que también eso es cierto con respecto a la cognición. No sólo posición filosófica. Es también posición sobre lo que es el aprendizaje (psicología evolutiva). Procesos de cambios en términos genéticos.

B220 - **María del Valle** considera que no siempre se debe seguir la historia. **LR** está de acuerdo. La estructura formal no respeta la génesis histórica. Es un dato a tener en cuenta. Quitarle a la historia el peso de anécdota.

B236 - **Marina** considera que puede haber contradicciones entre el hecho de que haya posiciones filosóficas (por lo de la hipótesis de trabajo), la objetividad supuesta de los organizadores del currículo y las discusiones entre colegas. Habla de prejuicios. **LR** interrumpe. La historia son datos que están ahí. **PG** aclara que no hay necesidad contradicción. Los organizadores del currículo permiten la claridad para sacar a relucir las diferencias.

B281 - Pausa. Fin de la cinta 37.

38

2/13/01

PG

La historia en la enseñanza

Segunda sesión sobre historia. La historia de los números decimales.

La clase fue muy dinámica, con mucha participación de los alumnos. Creo que esto es, al menos en parte, una aporte del hecho de haber leído el documento con anterioridad. En todo caso, la aproximación a la historia es algo que atrae al matemático novel.

A000 - [Episodio 16] **Carlos**: ¿por qué no se utiliza la historia en la enseñanza del análisis? **LR** explica el problema de los períodos cortos y del desarrollo de la didáctica de la matemática.

A035 - La historia del sistema decimal de numeración con más detalle. Transparencias. Marcas intencionales. Huesos de lobo.

A053 - Segunda etapa. Mesopotamia, Babilonia. Las tabletas. Los signos numéricos preceden los signos del alfabeto. El cálculo de la raíz de 2. La tabla de multiplicar del 9. [Hay reacción de los alumnos. Mucho ruido]. Significado de los signos. Dificultad porque no hay orden y no había el cero.

A100 - El sistema babilónico. El problema del cero. Equivalencia con el ábaco.

A111 - Egipto. El principio de agrupamiento. Las dificultades con el cero las seguimos identificando en el niño. Para escribir no necesitan ordenar sino que sólo acumular signos. Da ejemplo.

A160 - La Edad de Hierro. Los griegos y el surgimiento del sistema griego alfabético. El sistema romano. Muestra lo que era una multiplicación en números romanos. Explica su desaparición y la aparición del sistema árabe (Los Médicis).

A255 - El sistema actual surge en India en el siglo V.

A275 - [Episodio 17] Estamos hablando de un período de 20.000 años en el que es posible detectar obstáculos. Entender el principio posicional es un obstáculo. Pero inicialmente el obstáculo fue abstraer la cantidad. En este caso es más fácil entenderlo por lo que las evidencias históricas son más conocidas. “Cuánto más cercanos son los conceptos, más fácil es percibir los fenómenos [(por ejemplo, la probabilidad)], pero más pero es más difícil reconstruir la evolución histórica. Estamos más cercanos. [...] Hay una complementareidad entre la historia y la fenomenología.”

A299 - Períodos históricos más importantes: prehistoria, prehelénico, helénico, medieval, renacimiento, y los siglos. *La visión euro céntrica*.

A383 - Cada período aporta algo a los temas de cada grupo. Van a recorrer estas etapas. Por lo tanto, todos los grupos van a hacer referencia a todos los periodos, los mismos. El concepto de función es tal vez una excepción, porque es un concepto moderno, aunque hay antecedentes. Por lo tanto, cuando usamos la historia en clase, no tenemos que usar todo. Podemos hacer énfasis en un momento de la historia.

A441 - Bibliografía y comentarios a ella. Recomienda el Boyer.

B120 - **Paco** pregunta qué quiere decir “facsimil”. LR explica.

B140 - Libros de historia (española) en el año mundial de la matemática. Novelas.

B179 - Diferentes formas de uso de la historia de las matemáticas en clase. ¿Preguntas, dudas? Algunas superficiales y otras más de fondo. La historia de la matemática en cómic. [Chistes con Paco a propósito de lo de facsimil. Risas. Buen ambiente.]

B212 - **Carmen**: “sobre el último punto que dice que guiar un poco el orden de los temas tal como se concibió la matemática en la historia, ¿no?” **LR**: “siempre que tenga un hilo argumental, siempre que permita que los temas se apoyen en otros. [...] De manera que luego en la presentación de los temas, se reconozca una cierta coherencia.” **Carmen**: “pero aún así puede que dificulte... Porque hay herramientas que se han obtenido después que facilitan [LR interrumpe]. **LR**: [no se entiende] Son posibles usos.

B222 - Ejemplos de libros de texto que ejemplifican estos usos. Muestra que se pueden hacer ejercicios de matemáticas con la historia. El ejemplo de la poesía.

B331 - Fin de segunda sesión.

Estructura conceptual. Primera sesión.

Primera sesión sobre estructura conceptual

Introducen aspectos avanzados del tema. Su visión de un concepto se mueve entre dos dimensiones: su evolución histórica y la manera como se ve en la facultad. Es evidente que tienen presente la discusión sobre la historia en la enseñanza de las matemáticas. Las discusiones muestran que la noción de “concepto” no está clara. Para varios alumnos, lo conceptual está en lo formal y no tiene relación con las aplicaciones o los fenómenos. Hay que resaltar, en todo caso, que la definición de derivada con base en la noción de límite apareció tarde en la presentación y que, desde un comienzo aparecieron los fenómenos. Por otro lado, no hubo ninguna mención al aspecto numérico y una mención indirecta a la derivación de operaciones compuestas. Parece que los alumnos se sorprenden con la complejidad que aparece en un concepto.

A000 - **PG** preguntas dudas sobre historia los organizadores.

[La clase comenzó temprano, porque Luis llegó temprano. Muchos llegaron tarde. Hubo buena cantidad de alumnos ausentes.]

A018 - **PG**: la estructura de los organizadores del currículo. Énfasis en las conexiones entre los organizadores del currículo. Ejemplo de fenomenología e historia. Comenzamos con la estructura matemática del concepto. El conocimiento general y el conocimiento particular de cada organizador. Construcción del significado de un organizador con respecto a un organizador.

A056 - [Episodio 18] **Diego** se preocupa por el papel de la historia en la enseñanza de las matemáticas y duda sobre si hay que seguir estrictamente lo que parecen instrucciones en una lista de la sesión pasada.

A094 - ¿Algún otro comentario? Voy a necesitar que tengan un papel donde escribir. Vamos a hacer un experimento, primero individual, después en pequeño grupo y después toda la clase. **PG** da las instrucciones para que produzcan lo “que se les viene a la cabeza con respecto a ese concepto” sobre la derivada.

A114 - “El concepto es derivada”. [Silencio, los alumnos trabajan].

A152 - Otro “mini-ejercicio” relacionado con éste. “Digo derivada, qué imagen mental tienen de esto. ¿Está ya escrito en la lista?”. Ahora trabajo por tríos, reuniendo las listas y tratando de organizarlas, relacionar, y caracterizar. ¿Qué tipos de elementos tenemos ahí? [Los alumnos trabajan en grupos]. **PG** pasa por los grupos y resuelve dudas.

A244 - Paramos por ahora. El ejercicio ha generado muchas cosas. Tratemos de organizar qué surgió. Identificar categorías y relaciones de las cosas que surgieron.

A258 - **Inma, Carmen, María del Valle**: idea geométrica, tangente, pendiente, función, incremento, límite. La gráfica. Velocidad. Análisis. **PG** insiste en las relaciones, pero los alumnos no lo ven directamente. **Siguiente grupo** [no se entiende]. Parece que dicen que ya está casi todo. Los aportes de los otros grupos no se entienden.

A355 - Cuando se piden relaciones, hay un grupo que sugiere la relación de enseñanza (la sucesión de temas). Otro sugiere la sucesión histórica. Aparece el término “curva”. También la “integral”.

Hay reacción con el comentario del juego entre derivada e integral como procedimiento.

A195 - **Paco** dice que es “un *procedimiento* matemático consistente en resolver una función a partir de la derivada”. [Fin lado A].

B00 - [Los alumnos, en grupos, siguen haciendo sus aportes, pero no se entiende].

B037 - Alguien hizo comentario que generó muchas risas.

B051 - Alguno introduce términos de matemáticas avanzadas (Cauchy - Riemman). **Carlos** introduce la historia con Newton y Leibniz. **Marina** menciona a Euler.

B059 - [Episodio 19] **PG**: “Reacciones. Como dice María del Valle, ¿qué sientes cuando ves eso?” Se ha terminado de poner los elementos en la pizarra y son las primeras reacciones. María del Valle hace explícita la complejidad y la consiguiente dificultad para los alumnos.

B087 - Una alumna propone la definición por límite de derivada. **PG** pregunta si esa definición es necesaria para la comprensión.

B091 - **PG**: Más cosas. **Marina** hace un discurso que no se entiende pero que tiene que ver con el deseo de hacer una relación entre la estructura y el problema de la enseñanza. **PG** pone la condición de poner a un lado el problema de la enseñanza aunque ése sea el propósito final. “¿Qué hay dentro del concepto de derivada? ¿Es una lista lo que hay allí?”

B114 - Un **alumno** introduce la necesidad de ver las *relaciones* del concepto de derivada. **PG** pide relaciones entre las cosas que hay aquí. **PG** hace relaciones en la pizarra. Los alumnos aportan.

B125 - **Ángel** dice “tiene que estar todo relacionado porque tiene que ver con el concepto de derivada”. **PG**: ¿Puede haber algún elemento de los que hay allí, que consideremos que tiene que ver algo con derivada y que quede suelto de los demás? ¿tiene sentido que haya algún elemento que, de alguna manera, por alguna razón consideremos que tiene que ver con el concepto de derivada y que no esté relacionado con por lo menos uno u otro de los que están aquí”.

B137 - [Episodio 20] **Paco** dice que “hay que diferenciar el concepto de derivada de la aplicación gráfica de derivada.” Hace énfasis en las aplicaciones. “Diferenciar el concepto de la derivada con las aplicaciones de la derivada, de tener máximos, de tener mínimos. Porque una cosa es la derivada y otra cosa es la aplicación que tiene la derivada. La velocidad.” **Marina** [no entiende]. Hay discusión entre los dos. **Paco** se va al problema de la enseñanza. **PG** aclara de no meter la enseñanza. Interpreta la propuesta de Paco: las aplicaciones no tienen que ver con el concepto de derivada. **Paco**: es un procedimiento que se obtiene a partir de la derivada, máximos, mínimos. **PG**: ¿Qué quieres decir con el concepto de derivada? Estás separando el concepto de derivada de los procedimientos que se derivan del concepto de derivada. ¿Es eso lo que quieres decir? ¿Ven el significado que Paco le está dando al concepto de derivada? Para él los procedimientos que se derivan del concepto de derivada, o las aplicaciones prácticas, no pertenecen al concepto de derivada. ¿Qué piensan? **Carmen**: que yo creo que es lo mismo pensar en una velocidad que pensar en una derivada. Y que a lo mejor primero surge el ver una cosa de variación, como ir cambiando poco a poco la función para ver [no se entiende] y a partir de eso sí se toma el límite, pero yo no veo que sea tanto primero definición concepto todo absolutamente abstracto y luego lo aplicable, yo creo que naturalmente es al revés. **PG**: O sea, que históricamente el concepto surge de los fenómenos y después se formaliza. ¿Interpreto bien lo que dices? Pero estamos ahora, estamos en el presente y tenemos toda la información. Y quisiéramos armar, entre comillas, el concepto de derivada.

B185 - **PG**: lo que nos interesa es el aspecto matemático del concepto que me pueda servir después para el problema de enseñar. Seguimos teniendo una lista de cosas. ¿Alguién intuye la organización espacial en la pizarra?

B204 - [Episodio 21] **Carlos** da la respuesta separando la fenomenología, historia y lo conceptual

B219 - ¿Algún otro tipo de clasificación que me permita diferenciar unos elementos de otros? [Marca procedimientos en la pizarra]. Una **alumna** [habla de las *herramientas*.] **PG**: ¿qué quieres decir con las herramientas? **Alumna** [no se entiende]. **PG**: Dame un ejemplo. La **alumna** [responde. No se entiende]. **PG**: hay como una diferencia entre lo que puede ser la definición formal de una idea gráfica, de lo que pueden ser reglas procedimientos para obtener resultados.

B242 - **PG**: si tuviéramos tiempo, ¿seríamos capaces de organizar eso? **Carlos** interviene para decir que se necesitan categorías [no se entiende]. **PG**: la pregunta es cómo organizarlo. Con qué criterios organizarlo. ¿Se les ocurre criterios para organizarlo? Todo está relacionado. Dos maneras de interpretarlo: cada elemento está relacionado con todos los demás o cada elemento con una serie de elementos [hace una gráfica en la pizarra]. ¿Cuál es el esquema? **Carmen** y **Diego** intervienen para decir que hay relaciones débiles y fuertes. **Diego**: “a lo mejor aceleración e integración no están relacionados, pero a lo mejor sí a través de la derivada”. **PG**: cuando dices concepto de derivada, [¿a qué te refieres?] **Diego**: “[...] la aceleración está relacionada con la derivada y la integración también está relacionada con la derivada. Por lo tanto, [podemos pasar de la integración a la aceleración]. **PG**: Hay conexiones directas e indirectas. ¿Cuáles son las directas?

A300 - ¿Podríamos identificarlas si tuviéramos tiempo? **Un alumno** hace un discurso que no se entiende. Se refiere a criterios de relación. También se refiere a la enseñanza. **PG**: cada concepto, desde el punto de vista matemático, involucra una estructura: elementos relacionados que permiten ver al concepto en cuestión. Independientemente de la enseñanza. Como matemáticos, debemos ser capaces de proponer una estructura. Ésta es una estructura. El número posible de elementos no está determinado. Si yo quisiera hacer la estructura con los 20 o 30 elementos más importantes, ¿cuáles son los más importantes, qué quiero decir con más importantes, y cómo se relacionan entre sí?

A363 - **PG**: Entonces, el martes, con esta idea muy general de lo que puede significar la estructura, vamos a hacer el siguiente ejercicio. Ustedes para el martes, en los raticos de descanso de los estudios para los exámenes, van a hacer lo siguiente. El esquema. Lo pueden hacer individualmente, o lo pueden hacer en grupo. El martes se va a presentar en grupo. Esto va a ser rapidito. Con esta idea general, ustedes van a hacer un primero intento de la estructura conceptual del tema que les corresponde. En junio, todos van a saber mucho. El ejercicio lo pueden hacer con cualquier tipo de información. Lo que sí me interesa particularmente es que lo que mostremos el martes, traiga estructura. **Marina** dice que se le ocurren dos formas. Una con la evolución histórica (de los fenómenos a lo formal) o, como se explica en la facultad, de lo formal a los fenómenos. **PG**: ni la una, ni la otra. Lo que nos interesa es qué es lo que hay en el concepto, matemática y estructuralmente hablando. Muestra cómo puede aparecer la historia. Lo que se va a hacer el martes...

[Fin de la clase y de la cinta]

Se discutió sobre el término “concepto”. PG presentó el ejemplo de la estructura conceptual de la derivada. Los alumnos mejoraron lo que habían traído y seis grupos presentaron transparencias de su trabajo. Se discutió sobre los resultados.

Es patente que existe una dificultad con la noción de concepto que tiene implicaciones para el manejo de la noción de estructura conceptual. Su formación matemática los induce a pensar en el concepto matemático como algo equivalente a la definición y restringido esencialmente a su representación simbólica. El ejemplo de la estructura de la derivada resalta la presencia de las relaciones como indicador de estructura e introduce la presentación con base en sistemas de representación.

A000 - **PG** pregunta si hay dudas o preguntas sobre estructura conceptual. Explica que encontró un problema con el término “concepto”. Es una pregunta: “¿qué es un concepto?” Explica que percibió diferencias en los significados que se le asignaron al término en la sesión anterior.

A037 - [Episodio 22] Es el comienzo de la sesión. **PG** pregunta si hay dudas o preguntas sobre estructura conceptual. Explica que encontró un problema con el término “concepto”. Es una pregunta: “¿qué es un concepto?” Explica que percibió diferencias en los significados que se le asignaron al término en la sesión anterior. Busca que los alumnos expongan sus ideas sobre el término. Varios alumnos participan en la discusión.

A143 - “El ejercicio que estábamos haciendo la vez pasada y que vamos a continuar tiene como uno de sus propósitos resolver este problema de saber qué es un concepto y sobre todo como puedo yo conocer un concepto. Y parcialmente lo que vimos la vez pasada, es que lo que seguramente ustedes vieron tratando de hacer el ejercicio para hoy, es que cualquier concepto involucra en matemáticas unas complejidades muy grandes. Y que conocer un concepto implica, además de conocer la definición, desde el punto de vista puramente matemático, lo que hay que conocer es esa complejidad. ¿Qué piensan de esa afirmación?”

A156 - Una alumna habla de “entender la definición. Y si no la entiende, no le sirve de nada”. [no se entiende. Sin embargo insinúa lo que PG explica después]. **PG**: “una manera de saber si una persona comprende o conoce un concepto es ver si esa persona, cuando se encuentra con una instancia de ese concepto, es capaz de reconocerla como una instancia de ese concepto.” [PG escribe en la pizarra una definición de función lineal y escribe una tabla de valores de una función lineal]. “El hecho de que yo sea capaz de escribir esta definición, cuando me la pidan, no necesariamente quiere decir que yo sea capaz de reconocer si ésta es una instancia o no de función lineal”. **PG** habla de la necesidad de construir un significado común para la noción de concepto. **Begoña** [no se entiende] hace una intervención en la que se deduce que presentar el concepto es dar la definición. Se cuestiona sobre la presentación de un concepto a través de instancias. **Otra alumna** comenta que todos los temas de matemáticas se van repitiendo todos los años. **PG**: “¿por qué será eso? [...] Un concepto se puede mirar desde diferentes niveles de complejidad”. Ir avanzando en diferentes aspectos. “Y conocer el concepto es conocer tantos aspectos, tantas relaciones, tantos hechos como sea posible de ese concepto. No necesariamente usamos el término concepto de la misma manera, pero sí quería resaltar el problema que teníamos con respecto al significado de la noción de concepto”.

A230 - **PG** les muestra las transparencias de la estructura conceptual de la derivada [Documento I]. Insiste en que el ejercicio no era solamente hacer una lista. Introduce la idea del contexto para una estructura conceptual. Introduce lo simbólico. Aclara la diferencia entre derivada en un punto y derivada como función. Derivadas de familias de funciones. La definición de derivada con la idea de límite. El aspecto gráfico. Fenómenos. Resalta el error de incluir lo “estudio de funciones” en fenómenos. Es un borrador.

A398 - **PG**: “¿Se ve una estructura? ¿Qué es lo que hace que esto se vea más estructurado que lo que teníamos la vez pasada en la pizarra?”. **Un alumno**: “Las relaciones”. **PG**: “las relaciones en el sentido de por lo menos dos condiciones que descubrimos la vez pasada. Una, no hay ningún elemento de esa estructura que esté solo, que esté aislado. Todos los elementos están relacionados con por lo menos otro elemento. Una condición. Y otra. La estructura que estoy proponiendo no es una en que cada elemento esté relacionado con todos los demás. Porque eso sí sería una locura. Pondría un polígono y haría todas las diagonales. Pero eso no me diría nada. No me diría nada desde el punto de vista matemático de cuáles son las relaciones que considero importantes. Aquí lo he organizado de una manera que a mí me gusta mucho, aunque exagero con eso. Tomando lo simbólico, lo gráfico, lo numérico y lo fenomenológico. Hay otras maneras de organizarlo. Ésta es la manera que a mí me... Se me da más fácil. Y a partir del jueves, cuando veamos los sistemas de representación voy a tratar de argumentar por qué se me da más fácil. Aquí, habiendo asumido esa posición de representar el concepto desde estas visiones, las relaciones que estoy presentando son las relaciones internas a cada uno de estos aspectos. Me explico. Déense cuenta que no estoy conectando nada de lo simbólico con nada de lo gráfico. Sino lo que estoy presentando aquí son las relaciones dentro de lo simbólico. Y solamente algunas. Las relaciones digamos de prioridad, de jerarquía. Ya les voy a explicar lo que estoy diciendo con eso [...]” [Fin lado A]

B000 - **PG** continua presentando la estructura de la derivada. Introduce la segunda transparencia con conexiones entre sistemas de representación [Documento 2]. Explica las conexiones. Habla de la decisión sobre el nivel de complejidad. Criterios para decidir qué dejar y qué no dejar. La importancia para él. La posibilidad de que otra persona presente una alternativa válida y complementaria. Diferencias entre los tipos de relaciones.

B054 - Presenta la tercera transparencia [Documento 3]. “Traté de identificar algunos elementos que pueden generar procedimientos”.

B065 - **PG** describe la actividad que ellos van a realizar ahora. Incluye la pausa en el ejercicio.

B070 - Los alumnos se ponen a trabajar.

B288 - **PG** interrumpe el trabajo. Se está en la pausa. Les explica que no quedará perfecto nunca. Lo importante es ir mejorando. Les pide que comiencen a preparar las transparencias.

41

2/20/01

PG

Tercera sesión sobre estructura conceptual

Los ocho grupos presentan su primer borrador de la estructura conceptual de su tema.

PG no permitió discusión de cada transparencia. Eso fue un error. Al final no se generó tanta discusión como **PG** esperaba. Hay una interpretación y reflexión detallada sobre el trabajo que cada grupo trajo a clase y sobre lo que hicieron para producir la nueva transparencia (Ver récord I de base “Reflexiones”). En la segunda parte de la sesión se dan varias discusiones en las que se manifiestan algunas de las dificultades de los alumnos y el proceso para construir conjuntamente significados. El principal tema que se trata es el significado de concepto y su relación con los sistemas de representación. Aparece el significado que ellos traen de su formación en la que el concepto es aquello que se puede describir de manera simbólica. Aparece también la posición, consecuente con lo anterior, de percibir las otras representaciones como de “menor nivel” que la representación simbólica.

Por otra parte, aparece, por primera vez, una idea central en esta discusión: se está representando

de diferentes maneras un mismo concepto (esto se repetirá en las siguientes sesiones).

Resulta aparente que los estudiantes tienen dificultades para construir un significado de la noción de concepto y de su relación con los sistemas de representación. Esta idea se puede sustentar con algunas de las intervenciones de la segunda parte de la sesión.

También aparece la discusión sobre el significado de los sistemas de representación, en particular, con respecto al significado de lo gráfico.

PG intenta imponer algunas condiciones sobre el significado de la noción de estructura conceptual al discutir sobre su relación con el análisis fenomenológico y los errores.

A000- **PG** explica los propósitos del ejercicio de presentar las estructuras de los grupos: construir significado a partir de los ejemplos; crítica y enriquecimiento del trabajo de los demás; identificación de las regularidades para construir el significado del organizador.

A027 - [Documento 4] Grupo 3. Los números decimales. Presentan el documento 4 (transparencia). La presentación la hace Ángel. Está bastante bien.

A048 - [Documento 5] Grupo 4. Probabilidad. Presentan el documento 5 (transparencia). La presentación la hace Marina. Enfatiza el tema de errores y dificultades.

A099 - [Documento 6] Grupo 2. Progresiones aritméticas y geométricas. Presenta Raquel. Documento 6.

A130 - [Episodio 23] [Documento 7] Grupo 7. Función de segundo grado. Presenta Antonio. Documento 7.

A164 - [Documento 8] Grupo 1. Funciones y gráficas. Presenta Paco. Documento 8.

A198 - [Documento 9] Grupo 6. La esfera. Presenta Carmen María. Documento 9.

A248 - **PG** resalta el manejo del tiempo y el hecho que lograron describir conceptos complejos en poco tiempo gracias a la herramienta de la estructura conceptual. Los grupos de cónicas y sistema de ecuaciones lineales describen sin transparencia su presentación.

A266 - [Documento 10] Grupo 5. Cónicas. Presenta María Luisa. Documento 10.

A287 - [Documento 11] Grupo 8. Sistemas de ecuaciones lineales. No identifico quién hace la presentación, parece María Leila. Documento 11.

A288 - **PG** pide comentarios y críticas. Habla con Ana. **Carmen** hace un comentario que no se entiende. Se refiere al hecho de que el término “contexto” apareció en todos los trabajos. **Carmen** se refiere a que unos grupos interpretaron “contexto” con motivación y otros grupos, la mayoría, los elementos que se necesitaban para poder hablar del concepto matemático.

A313 - **Carlos** interviene con dudas sobre el significado de lo “gráfico” y el problema de los sistemas de representación. Él usa el término, sin que éste haya aparecido antes en la discusión. **PG** propone que se mire lo común en todas las presentaciones a las referencias a lo gráfico. **PG** se dirige a **Nuria** y le pregunta qué pusieron ellos como gráfico en su presentación. **Nuria** responde [en la interpretación de PG] que la representación en el plano cartesiano de los sistemas de ecuaciones. **PG** pinta algo en la pizarra que ya no recuerdo para diferenciar dos sistemas de representación. **PG** se refiere a la discusión que se hará en la siguiente sesión. **Diego** dice que ellos usaron la representación en una recta de los números decimales. **Marina** dice que presentaron la campana de Gauss. [Final lado A]

B000 - **PG** continúa con la discusión de lo que significa gráfico, sobretodo la tendencia a lo gráfico con respecto al plano cartesiano. Muestra ejemplos de grupos que “tienen gráfico que no está en el plano cartesiano”.

B015 - [Episodio 24] En esta interacción se discute sobre la relación entre los sistemas de representación por un lado y la noción de concepto por el otro. Se discute si hay más de un concepto o si hay niveles de presentarlo o comprenderlo. Se explica su posición con motivo de la formación que han tenido en la carrera.

B129 - **PG** regresa al problema del significado de “lo gráfico”. Se refiere también a lo numérico. Muestra un caso en el que lo numérico se refiere a lo simbólico (el grupo de progresiones). Insiste en que es un borrador. Más comentarios.

B159 - **Diego** interviene. **PG** repite: “Diego está diciendo. Hemos puesto en lo gráfico, la representación gráfica de nuestro elemento, pero si hay otro organizador que es la representación gráfica, entonces no debemos de meter esto en este organizador”. **PG** explica que no hay organizador de representación gráfica y enfatiza la relación entre los organizadores. “Una de las cosas que vamos a ver es que es muy difícil hacer una estructura conceptual sin tener en cuenta los sistemas de representación. De la misma manera que nos va a ser muy cómo representar en la estructura conceptual el problema del análisis fenomenológico que es otro organizador. Y finalmente, algo que era el comentario que quería hacer a otros grupos, la mayoría, y es ¿entra dentro de la estructura conceptual, vista matemáticamente hablando, de un tópico, los errores que unos estudiantes pueden hacer con respecto a ese tópico? ¿Queremos que dentro del significado que le damos a la idea de estructura conceptual que esté eso ahí. Porque es que nosotros estamos decidiendo qué significado le vamos a dar a eso [...] La propuesta que yo hago es que no, para que restrinjamos este análisis inicial a la reflexión matemática estructural. Pero la siguiente respuesta es que cuando estemos en el problema de poder describir con suficiente detalle los errores y las dificultades de los estudiantes, vamos a estar usando con toda la potencia la descripción de la estructura conceptual de nuestro tema. ¿Por qué? Porque esos errores y esas dificultades van a ser dificultades con respecto a aspectos matemáticos que están descritos en nuestra estructura”.

B192 - **PG** continua con la relación entre estructura conceptual y los errores. Enfatiza que los errores aparecen en las conexiones. Recoge las transparencias.

B220 - Fin de la sesión.

Primera sesión sobre sistemas de representación

Introducción a la noción de los sistemas de representación con base en el trabajo que los alumnos realizaron en la sesión anterior. Discusión sobre el significado de esta noción.

Aunque en esta sesión no hubo mucha participación de los alumnos, se identifican algunos temas que evidencian algunas de las dificultades que ellos están teniendo.

1) Los alumnos tienen dificultad para ver a los sistemas de representación como medio organizador de la estructura conceptual. Los organizadores del currículo tienden a tener más sentidos para ellos para estos efectos. **PG** intenta mostrar que los sistemas de representación pueden aportar a la estructura conceptual, pero es evidente que los alumnos no comparten necesariamente esa posición. Sin embargo, la intervención de Begoña (A155) identifica una ventaja de los sistemas de

representación sobre los organizadores del currículo como medio para organizar la estructura conceptual: se da mayor especificidad en el contenido matemático. Con los organizadores las frases que se hacen son generales y se pueden aplicar a otros temas.

2) Se insiste en la preocupación por lo didáctico. La insistencia de los alumnos en los errores, por ejemplo, demuestra que no se ha construido aún un significado común para la noción de estructura conceptual. La preocupación por lo didáctico también aparece en la intervención de Juan Félix (A289) en la que él insiste en que un criterio para decidir qué se incluye y que no se incluye deben ser los objetivos que se tengan. Esta intervención insinúa el problema de ubicar el trabajo específico con cada organizador con el propósito global de la asignatura, relación que evidentemente ellos no han captado.

3) En todo caso, en esta sesión comienza a surgir una idea central: se está representando a un mismo objeto (concepto), por lo tanto los elementos de diferentes representaciones deben estar todos relacionados (intervención de Marina –A289– y de Carlos –B000–).

4) La preocupación de Carlos por el significado de lo gráfico puede ser también una manifestación de la dificultad que los alumnos tienen para aceptar que el concepto es más que la definición dentro de la representación simbólica. Resulta natural, dada la formación que han tenido, que ellos vean lo gráfico (y en general las representaciones diferentes de lo simbólico) como complementos no necesarios (Luis interpreta esta posición en su intervención –B074–). Esta diferencia de importancia relativa que le dan a los diferentes sistemas de representación también se ve cuando algunos de ellos pretenden introducir una jerarquía entre ellos.

A000 - Cuestiones logísticas sobre los trabajos de historia. De nuevo aclaraciones sobre el trabajo de los organizadores del currículo y el diseño de la unidad didáctica. **PG** hace énfasis en que el diseño hay que justificarlo.

A024 - Preguntas, dudas sobre estructura conceptual. “¿Creen ustedes que la idea de estructura conceptual la tenemos clara?” Le pregunta a Maite. **Maite**: “lo que tienes que saber de ese tema para que tenga un sentido”. **PG**: “¿Qué quieres decir con ‘más o menos organizado para que tenga un sentido, que no sean cosas sueltas’”. **Maite**: “Que no necesariamente sea una cantidad de cosas, sino que estén enlazadas”. **PG**: “¿Puede haber temas en los que las cosas no se relacionan? Pero el problema es: ¿de qué manera las organizamos? ¿Con qué criterios organizamos esas cosas?” Da un ejemplo.

A057 - **PG** muestra la transparencia del primer borrador de la estructura conceptual de cónicas que es la del grupo de Maite y le pregunta a ella qué piensa. **Maite**: [no se entiende. Lo que sigue son las interpretaciones de PG de lo que dice Maite] “esa es una forma de trabajar. Primero se hace la lista y después se relaciona. ¿Hay aquí, en todo caso, alguna estructura?” **Maite**: [no se entiende. En todo caso explica que hicieron una lista y la organizaron de acuerdo a la idea de los organizadores del currículo]. **PG**: “¿Por qué los organizadores?” **Maite**: [no se entiende.] **PG** pone ahora la segunda transparencia de cónicas, la que el grupo produjo durante la sesión después del ejemplo de la derivada. “¿Qué pasó de la transparencia anterior a ésta?” **Maite**: “Bueno hay cosas que [no se entiende. quiere decir cosas que desaparecieron]”. Consideran el caso de “pirámide” que estaba en la primera transparencia y ya no está en la segunda. **PG**: “Dices que no pudieron”. Otros miembros aportan pero no se entiende. Lo que tratan de explicar el origen de la idea de pirámide para las cónicas. **PG** saca conclusiones sobre el problema de escoger los elementos que se incluyen en una estructura conceptual y los criterios que se necesitan para decidir. **PG**: “¿Qué otra cosa sucedió aquí? Aquí venía organizado por organizadores. ¿Aquí como está organizado? ¿Cómo decidieron organizarlo?” **El grupo**: “el contexto”. **PG**: “A toda la clase. ¿Por qué la segunda transparencia parece estar más organizada?”. **Una alumna** reacciona pero no se entiende. **PG**: [interpreta] “Han aparecido algunas categorías que no estaban con la misma importancia en la transparencia

anterior”. **PG** muestra que los sistemas de representación aparecen como idea organizadora. Muestra que los errores continúan apareciendo. Explica que la aparición del contexto es influencia del ejemplo que se dio para la derivada. Muestra que “dentro de las categorías aparece una organización”.

A155 - **PG** pasa a otra transparencia. En este caso también es la una parte del trabajo que el grupo de sistemas de ecuaciones lineales trajo para el comienzo de la sesión anterior. Muestra que este primer trabajo también venía organizado por los organizadores del currículo. Afirma que la mayoría de los grupos utilizaron la idea de los organizadores del currículo para estructurar el primer intento de estructura conceptual. Muestra la segunda transparencia en la que aparecen los sistemas de representación. “¿Qué pasó en el grupo de la primera transparencia a la segunda?”. **Begoña**: [no se entiende]. **PG**: “Una de las cosas que está diciendo Begoña, es que con la manera como lo tenían organizado por organizadores, en muchos casos aparecían frases que podían aplicarse a ese tema o a cualquier otro. Y por consiguiente, la descripción del tema, con las frases que ellos traían, no era específica al tema. Mientras que aquí [muestra la segunda transparencia] la estructura tiende a ser específica”.

A190 - **PG** hace comentarios sobre la preocupación que ellos tienen por lo didáctico en las producciones de la estructura conceptual. Insiste en la necesidad de conocer “las matemáticas que hay detrás del tema que estamos tocando”. “La intención es lograr describir matemáticamente el tema”. “Podremos trabajar lo didáctico porque conocemos lo matemático”. **PG**: “¿Conocían ustedes las matemáticas que había detrás del tema”. Los grupos responden que sí, aunque tuvieron que recordarla [aunque los alumnos afirman esto, ha sido claro que la mayoría de los grupos han hecho investigaciones bibliográficas sobre su tema]. **Ángel**: “Conocíamos las matemáticas formales que hay allí, pero no las recordábamos”. Carmen: “hay muchísimas cosas que no conocemos”. Los del grupo de probabilidad afirman que no tuvieron que investigar. **PG**: “¿Conocemos las matemáticas en su estructura? ... ¿Están aquí todas las relaciones?”

A289 - **PG** regresa al problema de la organización: uno organizadores del currículo y otro contexto, fenómenos y sistemas de representación. “¿tiene sentido hacerlo así [de la segunda manera]?”. **Marina**: [no se entiende]. **PG** interpreta: “todos deberían estar relacionados porque se refieren al mismo tema. El problema es cómo los organizamos y con qué esquema lo hacemos. Un esquema posible es éste con todas las variaciones que ustedes quieran”. Muestra el ejemplo de la transparencia de cónicas que presentó conexiones entre elementos de sistemas de representación diferentes. Habla sobre los diferentes tipos de conexiones: jerárquicas, entre grupos de elementos (muestra el ejemplo de funciones y gráficas). **Juan Félix** interviene para afirmar que lo que se presente en la estructura conceptual depende de los intereses u objetivos que se tengan. **PG**: “Qué es importante y qué no es importante en el análisis matemático, muy seguramente va a surgir de criterios y de decisiones didácticas. Pero, para poder saber qué va a ser lo importante desde el punto de vista didáctico, también tenemos que tratar de conocer con tanto detalle como sea posible, lo matemático. Es un juego en el que se alimenta el uno con el otro. Y por ahora, lo que vamos a estar haciendo es tratando de mejorar esa descripción matemática de nuestro tema. Porque en la medida que mejoremos esa descripción matemática de nuestro tema, vamos a poder después definir con claridad cuáles son nuestros intereses didácticos, y vamos a poder utilizar esa descripción matemática para esos intereses didácticos.”

A437 - **PG** sugiere la importancia de mirar el tema desde el punto de vista de los sistemas de representación. El significado que se tiene por ahora para sistemas de representación. [fin lado A]

B000 - Muestra diferentes transparencias de los grupos para mostrar el uso que cada grupo le dio a los términos simbólico, gráfico, numérico. **Carlos**: “cuando yo hablé no me refería a qué era un sistema de representación, sino si cuando poníamos gráfico, se refería a la grafía. [no se entiende. Se refiere a los términos significado y significante]. Porque también, gráfico, visual”. **PG**: “¿Qué quieres

decir con respecto a tu tema con eso de significado y significante?” **Carlos**: “es más fácil con las palabras. Si yo digo perro y digo dog, me refiero al mismo animal o hago la misma clasificación. [no se entiende] Es lo mismo con los sistemas de representación en matemáticas. Diferentes conceptos, las clasificaciones que hacemos, pues las hacemos con diferentes representaciones, lo que sería [no se entiende. Pero transmite la idea de que hay un mismo objeto que se representa de diferentes maneras]”. **PG**: utiliza la idea de perro y dog para referirse a dos sistemas de representación en las que hay dos términos diferentes que se refieren al mismo objeto. **PG**: “Carlos acaba de hacer una pregunta, ¿entonces cuál sistema de representación es mejor?” **LR**: “Carlos pregunta si lo gráfico se refiere sólo a lo visual.” **PG**: “¿Qué sistema de representación es mejor?”. **LR**: “¿Por qué necesitamos decir lo mismo de varias maneras?” **Una alumna** [no se entiende]. **LR**: “Cada sistema de representación permite transmitir diferentes propiedades de un mismo concepto. Matiza distinta cosas de un mismo concepto. Es como si [no se entiende] el concepto desde distintos atributos. [no se entiende] Es una razón.” **PG**: “Entonces, una posible respuesta es cada manera, cada sistema de representación, cada manera de mirar el concepto, nos permite ver, en su manera, aspectos más claramente desde una perspectiva y otros aspectos desde otra perspectiva. Y esa es, por lo menos una respuesta parcial, a la pregunta de porqué el interés en mirar el concepto desde diferentes perspectivas. ¿Lo percibieron ustedes esto cuando hicieron la reorganización o no?”

B074 - **PG** cuenta su experiencia con los sistemas de representación. Regresa a la pregunta de Carlos sobre el significado del término “gráfico”. Muestra ejemplos del problema de lo gráfico. En especial en el caso de las cónicas, para mostrar que no todo lo gráfico está en el plano cartesiano. Lo gráfico en contraposición con lo simbólico. Cada grupo va a construir el significado de lo gráfico. **LR**: “A lo largo de la historia de la matemática, la gráfica, la figura ha sido siempre un apoyo. Pero, salvo en momentos muy concretos, como con la geometría analítica de Descartes, que se introduce lo gráfico y toma una potencia muy grande, lo gráfico siempre ha sido un complemento. Incluso no un complemento, sino un estorbo. Vosotros habéis estudiado análisis en un libro, uno de cuyos orgullos es que no hay ni un solo dibujo. Podéis buscar el libro de análisis de primero, y no hay ni una sola representación gráfica. Era el antiguo orgullo que no había santos, no había estampas. Esto de los dibujos, de las gráficas, era pues una especie de concesión, la bendición, para mentes inferiores. Eso forma parte de toda una filosofía de la matemática [no se entiende], el pleno énfasis del movimiento estructuralista. Una de las aportaciones de la didáctica de la matemática es recuperar el sentido de lo gráfico. Entender que lo gráfico es un apoyo fundamental para la comprensión de los conceptos matemáticos. Miguel de Guzmán tiene un libro que se llama Desde el Fondo de la Pizarra que es una reivindicación de lo gráfico, que es el anti Aparicio [no se entiende, risas]. Es una reivindicación de la representación gráfica en la enseñanza del análisis. Cuando aquí hablamos de representaciones, sin incluir la representación gráfica, se podía hablar simplemente de simbolización. Hablar de simbolización estaríamos diciendo casi lo mismo que representaciones. ¿Por qué no se utiliza el término simbolización? Porque se quiere incluir lo gráfico al mismo nivel de lo simbólico. Porque lo gráfico, lo numérico, y otros sistemas de representación, y lo simbólico, pero lo gráfico también y con la misma fuerza que lo simbólico, hay que destacarlo como término común, como significante común. Para indicar que no sólo lo simbólico, sino también lo gráfico, con toda la fuerza y con todo el vigor que tiene. Porque [no se entiende] lo gráfico en el conocimiento matemático es una mutilación. Una persona que ya pudo pensar matemáticas con imágenes y ahora [no se entiende]. Para el común de los mortales, pensar con imágenes es un modo muy potente de pensar. [no se entiende]”.

B161 - **PG** habla de la actividad de los matemáticos famosos pensando gráficamente, de las conexiones entre diferentes maneras de representar las ideas. “Comprender un concepto no es exclusivamente saberse la definición. No es exclusivamente conocer los aspectos simbólicos de ese concepto. Sino es, o por lo menos es una propuesta, conocer tantos aspectos como sea posible de ese concepto. Por un lado. Y conocer tantas relaciones como sea posible entre los aspectos de ese concepto.” Insiste en el tema de las conexiones. “Porque estamos representando lo mismo”.

B192 - **PG**: “De hoy en ocho días vamos a seguir con el tema de los sistemas de representación. Y la tarea para de hoy en ocho días, la hacen como quieran, como lo hicieron para la vez pasada, es tratar de mejorar, detallar, profundizar, la estructura conceptual de cada tema, tratando de hacer énfasis, tratando de reflexionar, en el papel que pueden jugar los sistemas de representación para describir el esquema. Son dos cosas. Una, la estructura conceptual de cualquier tema, si nos ponemos a trabajar en detalle, con bastante tiempo, puede tomar tantos folios como ustedes quieran. Aun en casos de temas parezcan extremadamente precisos. Entonces lo queremos es ver hasta donde llegamos en profundidad. Pero hasta donde llegamos en profundidad, tratando de resaltar no solamente que hay una gran cantidad de elementos, sino tratando de resaltar cómo están relacionados esos elementos, como están estructurados. Una de las maneras con la que podemos tener criterios para estructurarlos, es tratando de ver cómo puede aportar a esa estructura, la idea de sistemas de representación [no se entiende]. Entonces, lo que vamos a hacer de hoy en ocho días jueves, es volver a mirar.” Una alumna interrumpe para hablar del examen del jueves y del cambio de programa. “Y, en la medida de lo posible, si pueden traer unas transparencias hechas, pues mejor. Y vamos a hacer más o menos el ejercicio que hicimos la vez pasada, sólo que con una diferencia.” Se va a dar tiempo para la crítica. Referencia al capítulo sobre representaciones en el libro del Orsori. **PG** les entrega los comentarios al trabajo.

B250 - **LR** considera los aspectos logísticos de la presentación del trabajo de historia.

45

2/27/01

PG

Segunda sesión sobre sistemas de representación

Presentación de la segunda versión de los trabajos sobre estructura conceptual con énfasis en los sistemas de representación

La interpretación y los comentarios a esta sesión se encuentran en las interpretaciones de los documentos y los episodios correspondientes, junto con la interpretación y los comentarios a los documentos presentados.

La tarea que tenían los alumnos era “tratar de mejorar, detallar, profundizar, la estructura conceptual de cada tema, tratando de hacer énfasis, tratando de reflexionar, en el papel que pueden jugar los sistemas de representación para describir el esquema.”

A012 - [Episodio 26] **PG** Introduce la sesión explicando sus propósitos. La búsqueda de significados comunes para estructura conceptual y sistemas de representación. Se va a dar tiempo para comentarios y críticas.

A065 - [Documento 12] [Episodio 27] Presentación hecha por Paco de la transparencia del tema funciones y gráficas, versión 3.

A115 - [Episodio 28] **Juan Félix** hace una repetición resumida de la presentación de Paco. Insiste en que “Nosotros a la hora de organizarlo, como todo está relacionado, pues una forma de expresarlo ha sido como una espiral, como un ciclo, en donde [no se entiende, habla de relación entre representaciones y conexiones]”.

A124 - [Episodio 29] **Paco** hace la conexión entre este trabajo sobre estructura conceptual y sistemas de representación, por un lado, y el trabajo sobre historia, por el otro.

A131 - [Episodio 30] **Diego** afirma que lo que el grupo ha hecho no es una estructura conceptual.

Paco responde que lo que estaban buscando era resolver el problema de conectar elementos y para ello han usado la idea de sistema de representación.

A187 - [Episodio 31] **PG** pone la transparencia de la versión 2 y **Paco** explica la relación entre esa versión y la nueva. Muestra el papel de los sistemas de representación para reelaborar la versión anterior.

A200 - [Episodio 32] **Carmen** insiste en que el orden no tiene que ser como lo están presentando **Paco** y **Juan Félix**. Se puede comenzar en cualquier lugar. **Paco** reitera la idea de la espiral y el sustento histórico.

A216 - **LR** interviene para decir que “inversamente proporcional” es un término matemático, mientras que “producto” es cotidiano.

A232 - [Episodio 33] **LR** les muestra que los diagramas de Venn y la tabla de valores son sistemas de representación distintos. **Paco** y **Juan Félix** los veían como equivalentes.

A256 - **PG**: “En resumen varias cosas de la discusión que pueden quedar pendientes para después de la presentación de los grupos. Primero, como una luz que ellos han puesto a su tema, desde una perspectiva particular. Que no necesariamente resalta la estructura conceptual pero que resalta otros aspectos relacionados con los sistemas de representación. Discusiones acerca de que esto, qué relación tiene con la historia, [no se entiende]. Un otro comentario que han hecho, sobre el que tendremos que regresar, cuando han utilizado términos como “éste es primario, o éste nivel va antes” o la misma idea de espiral que habría que discutir en qué sentido se está diciendo eso de espiral. Y lo mismo la idea de función que es lo que está detrás de todo esto, qué tan explícita está en algunas de las representaciones que están utilizando ustedes. Por ejemplo, ¿dónde está la función cuando se dice “como solución de una ecuación”? No estoy diciendo que esté mal, sino qué relación hay ahí, qué problema hay ahí desde el punto de vista de estructura conceptual que nos permita para el tema de funciones, hablar de ecuaciones.

A280 - [Episodio 34] **PG** les recuerda que deben registrar las referencias bibliográficas del trabajo que han hecho.

A293 - [Documento 13]. **Esmeralda** presenta la primera transparencia de las dos que han traído. Sigue una descripción estricta del contenido de la misma. Después Raquel presenta la segunda transparencia de la misma manera.

A362 - [Episodio 35] **Carlos** introduce la discusión sobre la pertenencia de lo fenomenológico dentro de la estructura conceptual.

[Fin de lado A]

B023 - [Documento 14] [Episodio 36] **Ávila** presenta la estructura general de las transparencias.

B037 - [Documento 14] [Episodio 37] **Ávila** discute con **PG** sobre las relaciones que han establecido.

B074 - Una **compañera** de Ávila habla sobre la representación gráfica, pero no se entiende.

B080 - **Antonio** hace referencia a mapas conceptuales y critica el trabajo del grupo de cónicas. [no se entiende].

B089 - [Episodio 38] **Pedro** insiste el problema de relacionar las cosas.

B210 - [Documento 15] **María del Mar** presenta el trabajo sobre la esfera. Sigue una descripción estricta de lo que aparece en las transparencias.

B250 - Creo que es **Antonio** que hace un comentario que no se entiende con respecto a hay elementos relacionados en los fenómenos.

B253 - **María del Mar** se refiere a mis comentarios y a lo que han hecho con motivo de esos comentarios. Presentado el listado de las representaciones.

B281 - [Episodio 39] **LR** insiste que sigue pendiente de resolver el problema de la pertenencia de los fenomenológico a la estructura conceptual. **PG** reafirma el problema de construir un significado común.

B290 - [Documento 16] **Antonio** presenta la transparencia. Su presentación sigue muy de cerca lo que hay en el documento. El contexto pasa a estar incluido en la estructura. Habla de poner en forma analítica lo que estaba en lo gráfico.

B229 - [Episodio 40] **Antonio** hace explícita la conexión entre los simbólico y lo gráfico y se refiere al trabajo del grupo de cónicas.

B262 - [Episodio 41] **Diego** le indica a **Antonio** que puede incluir el determinante y **Carmen** sugiere que se establezcan conexiones con lo fenomenológico. **Antonio** acepta las sugerencias. Dificultad para incluir todo en la estructura conceptual.

B290 - [Episodio 42] **PG** le indica al grupo de función de segundo grado que puede relacionarse y utilizar lo de los grupos de cónicas y funciones y gráficas.

[Fin primera sesión]

46

2/27/01

PG

Tercera sesión sobre sistemas de representación

Presentación de la segunda versión de los trabajos sobre estructura conceptual con énfasis en los sistemas de representación

A000 - Presentación de la transparencia de **probabilidad** por parte de **Christopher** y Laura. Siguen la estructura de la transparencia, aunque hacen algunos comentarios particulares que generan episodios específicos que se identifican a continuación.

A000 - [Episodio 44] **Laura** expresa que la nueva organización ayuda a ver la relación pero que esa relación no se puede establecer fácilmente

A016 - [Episodio 45] **Christopher** continua con la presentación. Presenta el tema de las representaciones. Introduce la representación real y la jerarquía entre las representaciones.

A048 - **Laura** pasa a explicar al contexto. Le da importancia la historia a los juegos de azar que dan lugar al desarrollo de la probabilidad.

A052 - **Christopher** presenta los conceptos.

- A058 - [Episodio 46] La da mucha importancia a la fenomenología.
- A065 - **Christopher** continua haciendo reflexiones históricas para explicar partes de la estructura conceptual.
- A082 - **Laura** regresa a la relación entre fenomenología, los conceptos y las representaciones.
- A090 - [Episodio 47] **Christopher** presenta una opinión con respecto a los ámbitos en los que se utilizan diferentes sistemas de representación y a una jerarquía por utilización.
- A095 - [Episodio 48] **Christopher** reitera la dificultad para poner todo en un mismo mapa conceptual.
- A096 - Un **alumno** hace una pregunta, pero no se entiende. **Laura** responde, tampoco se entiende [Risas].
- A100 - [Episodio 49] **Christopher** considerar que no hay que incluir en la estructura conceptual aquello que los compañeros sepan.
- A112 - **Marina** hace una intervención que no se entiende. Utiliza la frase “sentido etimológico”.
- A121 - [Episodio 50] **PG** hace comentario sobre la generalidad.
- A167 - **PG** aclara el significado que se le ha venido dando a contexto. **Christopher** y **Marina** reaccionan.
- A181 - [Episodio 51] **Carlos** hace la presentación de la estructura conceptual para **sistemas de ecuaciones lineales**. Hace una reflexión sobre estructura conceptual y conceptos.
- A186 - **Carlos** establece desde un principio conexiones externas (la mayoría globales).
- A197 - [Episodio 52] Hace una reflexión sobre lo simbólico como medio para comunicar los conceptos.
- A207- [Episodio 53] La representación gráfica como relación entre ecuación algebraica y una curva.
- A210 - **Carlos** sigue con la presentación. Presenta las técnicas de cálculo. Clasificación de los sistemas.
- A229 - Presenta las relaciones.
- A248 - [Episodio 54] **Carmen María** sugiere que se hagan explícitas las relaciones entre los sistemas de representación. **Carlos** explica sobre la marcha una de ellas.
- A259 - **Jose** pide que se le explique la relación entre la clasificación de sistemas y la representación gráfica. También con respecto al determinante. **Carlos** explica.
- A283 - **Carlos** pasa a describir los sistemas de representación. Habla del lenguaje cotidiano.
- A303 - [Episodio 55] **PG** introduce el tema de los fenómenos matemáticos.

A338 - **PG** aclara que lo de conceptos previos y ambiente tiene que ver con la noción de contexto.

A349 - **Ángel** hace la presentación de la transparencia del grupo de números decimales. Sigue lo que está en la transparencia, excepto por los episodios que se registran a continuación.

A350 - [Episodio 56] Habla de la mejora y de la historia.

A359 - El resto de la estructura conceptual (sigue la transparencia).

A432 - Una alumna hace un comentario sobre sistemas de representación [no se entiende].

A442 - [Episodio 57] **Diego** pide que se aclaren más las tareas. **PG** reacciona.

[Fin lado A]

B052 - **PG** pide las transparencias de las presentaciones. Entrega originales de las transparencias a Juan Félix. También le entrega una copia del documento sobre conocimiento didáctico y organizadores del currículo.

B067 - [Episodio 58] **PG** explica que las nociones de la didáctica de la matemática no tienen una definición específica y única. Hay que negociar los significados.

B070 - Comienza a seguir las transparencias [Documento 20-1 a 3]. Establece el significado de estructura conceptual [Documento 20-1] a través de algunas de sus características con motivo de las presentaciones hechas.

B143 - Presenta algunas ideas sobre sistema de representación [Documento 20-2,3]. Asume una posición con respecto a las definiciones de Golding y Janvier. No termina la presentación de la transparencia.

B195 - **PG** pasa a hacer comentarios de tipo logístico. Hace referencia al término “mapas conceptuales”. Discute el problema de la complejidad del tema y la dificultad para representar la estructura conceptual. Da sugerencias de cómo hacerlo. Incluye la posibilidad de adicionar texto a la representación gráfica. Explica la manera de representar conexiones.

B227 - [Episodio 59] **PG** regresa al propósito de los ejercicios, los organizadores del currículo y la asignatura.

Primera sesión de presentaciones “Matemáticas y” e historia

Contiene las presentaciones sobre matemáticas y publicidad y sobre matemáticas y música

Las presentaciones fueron pobres sobre todo la de publicidad por la poca relación que establecieron entre los fenómenos y las matemáticas.

A000 - **Inma** presenta cuestiones generales, enfatizando la relación de las matemáticas como apoyo didáctico en la **publicidad**. Muestra que la publicidad aparece en el currículo de secundaria.

A068 - **Laura** da ejemplos. Criterios de análisis de campañas publicitarias. Habla algo de estadística,

pero no se ven las matemáticas.

A105 - **María José** presenta la publicidad en las páginas amarillas. Ejemplos esencialmente de notación para cantidades. Habla de las fracciones.

A158 - **María del Valle** trabaja con la publicidad en los periódicos. Introduce como matemáticas la expresión “Teléfono + Tarjeta de crédito = Bus”. ¿Cuál es la estructura matemática?

A216 - **Carmen María** presenta la publicidad en la televisión. Es la única presentación que tiene algo de estructura y sentido crítico.

A353 - **Laura** comienza la presentación de **Matemáticas y Música**. Busca hacer un paralelismo histórico. Lo que muestra es que ambas avanzaron paralelamente. Pasa por las diferentes épocas. Las descripciones de lo que pasa en matemáticas y música son independientes. [Fin del lado A]

B046 - **Christopher** matemáticas y música vistas como arte, lenguaje y ciencia. Menciona a los pitagóricos. Hay alguna relación entre matemáticas y música con la discusión sobre los armónicos. Habla sobre la armonía.

B118 - **Rosa** habla sobre la audición. Poca relación entre música y matemáticas. Hace gracia las gráficas sobre la audición y la edad. Introduce el análisis de Fourier para las ondas sonoras.

B176 - **Marina** reescribir la música con lenguaje matemático. Presenta la teoría de grupos para analizar las posibles combinaciones para la música.

B264 - **LR** pregunta si consultaron con personas para hacer el trabajo y comenta de un profesor de matemáticas que es músico.

48

3/6/01

LR

Segunda sesión de presentaciones “Matemáticas y” e historia

Contiene las presentaciones sobre la historia de las cónicas y de los números decimales

Las presentaciones fueron pobres sobre todo la de publicidad por la poca relación que establecieron entre los fenómenos y las matemáticas.

A000 - **Sandra** comienza la presentación con el descubrimiento de las cónicas y las primeras aproximaciones griegas. Menciona los problemas clásicos, Menecmo e Hipias. Está muy nerviosa. Sigue la transparencia.

A057 - **María Luisa** presenta a Alejandría. Introduce la idea de lugares geométricos. Hace una relación de los trabajos de Apolonio, Arquímedes y Euclides sobre las cónicas. Sigue la transparencia.

A116 - **Maite** presenta a Diofanto, Pappus y el imperio árabe. Habla sobre las propiedades foco - directriz de las secciones cónicas que no mencionan en su estructura conceptual.

A152 - **Laura** introduce el Renacimiento: Werner, Durero, Galileo y Kepler.

A226 - **Maite** y la aportación de la geometría analítica al estudio de las cónicas.

A257 - **Ávila** presenta la cicloide [no entiendo bien la relación directa con las cónicas].

A305 - **Sandra** hace la evaluación crítica: de dónde surgen las cónicas. La variedad en la historia. Consideran muy importante la aparición de la geometría analítica.

A324 - **Diego** introduce el principio de posición y la aparición independiente de la regla numeral. Está muy bien hacer un resumen de todo el trabajo completo. Comienza con la civilización babilónica.

A389 - **Inés I** presenta la historia en la China y en la civilización maya.

[Fin lado A]

B000 - **Ángel** presenta la dimensión hindú.

B030 - Pasa a la cultura árabe.

B064 - Inés 2 introduce la idea de los fraccionarios, los números decimales (Stevin).

B092 - **Joaquín** reflexiona sobre el número decimal como concepto. Resalta la evolución histórica en el uso del número decimal. Explica la idea de los cortes de Dedekind.

B148 - **Ángel** destaca en la evaluación dos puntos: la necesidad de números menores que la unidad y el sistema posicional como los dos hechos básicos para los números decimales. También destaca la aparición del cero. Muy buena evaluación crítica.

B170 - LR pregunta sobre el balance del ejercicio de leer documentos históricos. Qué ventajas, qué interés.

B182 - **Antonio** interviene para hacer ver que en su tema no había un documento específico y, por consiguiente, era más difícil hacer el trabajo. La dificultad de reconocerlo entre tantas matemáticas.

B194 - **Joaquín** dice que les ha pasado lo mismo, pero se refiere al hecho de que ellos en la carrera estudian de manera diferente.

B208 - **LR** explica que son dos ideas. Joaquín está hablando sobre el modo de enseñanza actual y la evolución histórica del concepto. Mientras que Antonio lo que dice es que hubo grupos que tenían documentos específicos a su tema y otros que no. Hace un recuento de la historia de la función de segundo grado y el hecho de que la información no está en un lugar específico. La historia se atomiza. Da sugerencias de forma de trabajo para abordar el problema de estudiar la historia de un concepto.

B293 - [Episodio 60] **PG** insiste en la relación de la historia con los demás organizadores.

Presentación de las transparencias incluidas en el documento 23. Buena parte de esta presentación se basa en el análisis de la información de las sesiones anteriores.

Esta primera sesión se dio más o menos bien. **PG** fue demasiado despacio y se repitió demasiadas veces.

A000 - Comentarios sobre el examen del sábado.

A008 - **PG**: Introducción. Descripción de lo que se va a hacer. El problema de la construcción de los significados y el significado técnico de los conceptos.

A039 - ¿Preguntas o comentarios?

A044 - El por qué, para qué y para quién estamos haciendo lo que estamos haciendo. Referencia a los comentarios de **Juan Félix** y de **Christopher**. Se regresa al diseño de la asignatura. Se presenta la transparencia 23.1.5: la relación entre la práctica docente, el diseño de unidades didácticas, realización de una práctica en ese sentido, las herramientas conceptuales, el currículo, los organizadores del currículo y al análisis didáctico, el análisis de contenido, la estructura conceptual, los sistemas de representación, el análisis fenomenológico y la modelización.

A110 - Todo está relacionado entre sí, pero hay que comenzar por algún lugar. Pero lo que hacemos en un lugar específico puede tener sentido para el trabajo final. El problema es que no sabemos qué es lo que nos va a servir.

A150 - Se comienza la descripción de la noción de **estructura conceptual**. Hay más cosas que la pura definición.

A183 - Cada concepto hace parte de una estructura matemática y el concepto es una estructura matemática.

A200 - No hay una única manera de describir una estructura matemática. Las decisiones de qué incluir y qué no incluir en la estructura conceptual.

A220 - Para poder describir la estructura conceptual se necesitan los sistemas de representación.

A236 - Los fenómenos no hacen parte de la estructura conceptual. No hay que sacar los fenómenos.

A262 - "Todo está relacionado" implica estructura y, por consiguiente, relaciones entre elementos.

A290 - Qué son los elementos. Relacionar es más que poner en una categoría.

A319 - Jerarquía entre los sistemas de representación.

A347 - La caracterización de las conexiones.

A420 - ¿Es posible organizar la estructura de un tema con base en sistemas de representación?

Final lado A.

B000 - La noción de sistema de representación. Los diferentes significados de la noción de sistema de representación.

B048 - Nuestro significado de sistema de representación.

B050 - Relación entre la comprensión y la representación en diferentes sistemas de representación.

B071 - [Episodio 60] Si representan el mismo concepto, ¿cómo es que resalta unas facetas y oculta otras? **Carlos** se hace esta pregunta. **PG** responde parcialmente. **LR** trata de aportar a partir de la posición de Carlos. Se queda con la sensación de que no se logró responderla.

B204 - **PG** continua con la presentación. La estructura conceptual compleja, por un lado, y los sistemas de representación por el otro lado.

B216 - Los fenómenos tampoco son un sistema de representación. Insinúa la idea de la modelización.

B227 - Se presenta la posición de Kaput.

B239 - **LR** interviene para dar la idea de cómo aprendimos el número 3. Da ejemplos de situaciones en las que se aprendió ese concepto. Asignando significados a signos que asociamos. Estableciendo relaciones. Asignación de significados a símbolos que estaban dentro de un sistema de relaciones. La idea es la misma, pero al escribirla de otra manera, activamos la red de otra manera. A veces conviene pensar cómo construimos un concepto elemental.

[Termina primera sesión]

50

3/13/01

PG

Segunda sesión de doctrina sobre estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico

Presentación de las transparencias incluidas en el documento 23. Buena parte de esta presentación se basa en el análisis de la información de las sesiones anteriores.

En esta segunda sesión, la parte de Freudenthal se dio muy mal. **PG** estaba sencillamente leyendo las transparencias y se nota que sabía muy bien lo que estaba haciendo.

A000 - Ejemplos de las reglas que definen el sistema de representación con el caso de la derivada.

A030 - Los ejemplos de los grupos. Hace la relación con las conexiones puntuales internas y externas.

A070 - La importancia de la fenomenología. La relación entre las estructuras matemáticas y los fenómenos.

A102 - El análisis fenomenológico. La importancia de hacer el análisis fenomenológico de manera específica. No basta con proponer parejas generales.

A140 - **LR** interviene para afirmar que lo que hacen Pascal y Fermat en probabilidad es buscar patrones y regularidades en los fenómenos y de allí surge el concepto matemático. Lo mismo en el caso de las cónicas.

A155 - [Episodio 61] **Christopher** interviene. El problema de lo fenomenológico como sistema de

representación y la importancia didáctica de los fenómenos y de los materiales y recursos.

A252 - **PG** hace discurso sobre el problema de clasificar fenómenos por áreas en cambio de clasificarlos por las estructuras matemáticas que los modelizan. El poder de la estructura matemática organizando un conjunto de fenómenos. La clase de equivalencia de parejas que tienen el mismo primer elemento (estructura matemática).

A294 - **PG** pasa a las preguntas que se presentan en el documento 23 en el que se especifican las relaciones entre fenómeno y estructura matemática. El punto de la subestructura matemática.

A320 - La existencia de fenómenos matemáticos. Ejemplos con tópicos de grupos. Regresa a la discusión del origen de las matemáticas: de fenómenos matemáticos y no matemáticos.

A344 - **LR** hace una intervención con respecto a las familias de fenómenos [no se entiende].

A355 - Introducción de H. Freudenthal. Sugiere que se miren las publicaciones de Freudenthal. Comienza a leer las transparencias (documento 23.3.15).

A427 - Diferencia entre fenómeno y cosa pensada.

[Final lado A]

B000 - Transparencia 23.4.17. Énfasis de Freudenthal en los fenómenos matemáticos.

B032 - El ejemplo de la longitud. Pasa muy rápido.

B047 - **LR** interviene para explicar mejor el ejemplo. **PG** no lo estaba haciendo bien. Estaba sencillamente leyendo la transparencia sin darle significado. **LR** explica qué es lo que hay detrás del análisis fenomenológico del concepto de longitud como proceso en el que se clasifican todos los fenómenos relacionados con longitud en tres grandes categorías. Les pone la tarea de pensar en superficie.

B073 - Insiste en las relaciones del análisis fenomenológico.

B081 - Describe la tarea para el jueves: “La idea para el jueves tenía dos partes y ahora tiene tres: superficie, una. Y las otras dos tienen que ver con el tópico que cada grupo está trabajando. Por un lado, yo creo que es evidente que no vamos a terminar nunca de describir nuestro contenido matemático con todo el detalle que pudiera ser deseable, digámoslo así. Y que en todo caso no damos cuenta de que hay cosas que se pueden mejorar en el trabajo que voy haciendo de mi estructura conceptual. Más aún en la medida en que pueda yo coordinar esa idea de estructura conceptual con los sistemas de representación y, al poder describir con un cierto detalle mi estructura matemática que estoy trabajando, poder organizar qué tipos de fenómenos son modelizados por esa estructura matemática. Entonces las otras dos partes para el jueves, son continuar mejorando mi estructura conceptual con base en los sistemas de representación, y hacer un primer intento de análisis fenomenológico del tópico. ¿Por qué no separo las dos cosas? ¿Por qué las veo unidas? Es porque no voy a poder hacer el análisis fenomenológico, no voy a poder identificar esas familias de fenómenos que están relacionadas, que están organizadas por la estructura matemática que estoy considerando, a menos de que tenga claridad sobre esa estructura matemática. Y, por consiguiente, tengo necesidad de avanzar, de mejorar mi estructura matemática, la descripción que estoy haciendo de la estructura matemática, para poder identificar los fenómenos que esa estructura matemática modeliza. En ese sentido quiero volver a traer las preguntas...” Regresa a las preguntas del documento 23.3.14 para hacer énfasis en detallar la relación entre fenómenos y estructura matemática.

B121 - **LR**: lo primero que se viene a la cabeza son muchos ejemplos concretos. Pone el ejemplo del concepto de simetría. Les pide que digan qué se les viene a la cabeza con el concepto de simetría. **Inés** pone el ejemplo del espejo. Le pregunta a varios alumnos por los nombres. Recuerda la situación del grupo de simetría de la asignatura pasada que lograron clasificar los fenómenos de simetría. Resalta la genialidad del ejemplo del espejo. Insiste en que se pueden muchos ejemplos, pero se clasifiquen en pocas categorías.

B170 - **PG** insiste que la clasificación proviene de las características de la estructura matemática.

B183 - **PG**: ¿preguntas, inquietudes? Hay mucho espacio para trabajar. Muchos caminos que se pueden tomar. Hay que desarrollar los criterios para tomar decisiones de cómo progresar en la estructura conceptual.

B200 - [Episodio 62] **Marina** quiere saber si el sistema de representación “virtual” que ellos introdujeron es realmente un sistema de representación. **PG** responde diciendo que es un medio y que sólo es un sistema de representación si tiene sus propias reglas.

B237 - Final de la sesión.

54

3/15/01

PG

Segunda sesión sobre análisis fenomenológico

Tres grupos presentaron sus trabajos sobre mejora de la estructura conceptual y primer intento de análisis fenomenológico de su tópico.

Una sesión muy dinámica en la que resalta la participación crítica de algunos alumnos y el comienzo de una discusión técnica entre alumnos y profesores.

A000 - [Episodio 62] **PG** hace tres comentarios iniciales. Hace referencia al proceso de crítica. No hay necesidad de reaccionar defensivamente.

A027 - [Episodio 63] **PG** insiste en que nunca se tendrá una estructura conceptual completamente terminada.

A051 - Los esquemas de presentación de trabajos. Introduce el nuevo esquema de crítica de parejas de grupos.

A087 - El grupo de **función de segundo grado** presenta su estructura conceptual. Sigue con detalle la transparencia del **documento 30**.

A114 - [Episodio 65] **Antonio** presenta sus dudas con respecto a la idea de presentar el área de cuadrado como sistema de representación y lanza la pregunta al grupo.

A121 - **LR** les hace caer en la cuenta que tienen un error en la presentación de la parábola como corte de un cono con un plano perpendicular a la base. Intervienen otros alumnos, pero no se entiende.

A136 - **Jose** presenta el análisis fenomenológico.

A170 - **PG** acepta comentarios puntuales. **LR** hace comentarios sobre la identificación de familias. Aparece la idea de relaciones cuadráticas. Insiste en que lo que se presenta son ejemplos. Habla de los cuadrados de la suma y la diferencia.

A191 - **José Ortiz** interviene para hacer aclaraciones sobre la modelización como proceso. **Antonio** y **Jose** aceptan el comentario para hablar de fenómenos modelables por la función de segundo grado.

A207 - [Episodio 66] El grupo de función de segundo grado introduce el término “modelización de fenómenos” que produce la explicación de **JO** de la diferencia entre modelización y análisis fenomenológico. **LR** explica la diferencia.

A213 - **LR** menciona la mecánica, además de la dinámica.

A223 - El grupo de **progresiones aritméticas y geométricas** presenta su transparencia de estructura conceptual. La presentación sigue literalmente lo contenido en el **documento 25**.

A246 - Se presenta la transparencia del análisis fenomenológico. De nuevo, se sigue literalmente lo contenido en el **documento 25**.

A279 - **LR** menciona otros ejemplos de progresiones geométricas con gráficos en la partición de cuadrados y triángulos. “Lo que hay que hacer es ponerse los ojos de buscar”. Menciona los números figurados. Menciona los fenómenos de flujo constante como progresiones aritméticas. Da otros ejemplos de fenómenos.

A353 - **PG** interviene para comparar el análisis fenomenológico de ahora con la lista de fenómenos que habían propuesta en la versión anterior. Pregunta por la organización que hicieron de esos fenómenos. Pregunta si la organización por subestructuras matemáticas permite clasificar en familias de fenómenos. Menciona también los fenómenos en los que se relacionan progresiones aritméticas y geométricas.

A386 - **LR** les muestra que lo del factorial es sencillamente presentar los números naturales.

A400 - Presentación de **Carlos** para el grupo de **sistemas de ecuaciones lineales**. [Tiene problemas poniendo la transparencia] Acepta que la estructura conceptual no ha cambiado y que han “seguido el consejo de hacer una clasificación en base a lo que serían los sistemas de representación”.

A448 - **PG** pide que explique la conexión de las técnicas de cálculo con la representación gráfica.

[Final lado B]

B000 - Carlos hace el discurso de la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales.

B009 - [Episodio 68] **LR** les hace caer en la cuenta a **Carlos** que también se podría incluir el sistema de representación numérico. **Carlos** dice que es tanteo. **LR** explica que eso es aritmético. **LR** también menciona las representaciones paramétricas.

B021 - Presenta el análisis fenomenológico. Acepta que es muy pobre. Se han limitado a tipos de problemas. Acepta que no sabían que hacer más. **PG** pregunta si no tuvieron tiempo. **Carlos** responde que sí tuvieron tiempo.

B030 - **PG** hace un paréntesis para hablar de las dificultades que pueden haber tenido los grupos al

hacer el análisis fenomenológico. **Carlos** reacciona pero [no se entiende]. **PG** habla de los problemas que aparecen al hacer el análisis fenomenológico: 1) se nos ocurren muchos casos concretos; 2) Intuimos que la estructura matemática puede jugar un papel con respecto a esos concretos; 3) ¿cómo reducir los casos concretos a categorías?; 4) Una forma de reunir es por áreas de los fenómenos; 5) Otra forma es por subestructuras de la estructura matemática en cuestión; 5) La conexión entre los fenómenos y la estructura matemática. El ejemplo de la simetría. La estructura matemática puede tener subestructuras. Lo que es evidente es que este trabajo no es fácil.

B090 - **LR** menciona la problemática de la linealidad como aspecto que se impone. Introduce la idea del álgebra lineal. Habla de programación lineal. No hay nada que sea lineal en la naturaleza. Pero nos interesa la relación lineal.

B111 - **PG** recuerda que el análisis fenomenológico no se debe restringir al problema de **describir**, sino que debe incluir problemas dentro de los problemas. Los alumnos no entendieron la idea. **PG** pone un ejemplo con función cuadrática. Vuelve al tema de los aspectos particulares del fenómeno y de los problemas que se pueden resolver. Vuelve a la idea de la subestructura matemática.

B147 - [episodio 69] **Paco** interviene para resaltar el problema de la relación entre modelización y fenómenos.

55

3/15/01

PG

Tercera sesión sobre análisis fenomenológico

Cuatro grupos presentaron sus trabajos sobre mejora de la estructura conceptual y primer intento de análisis fenomenológico de su tópico.

A000 - [Documento 26.1] **Joaquín** presenta la estructura conceptual para números decimales. Su presentación sigue de cerca lo expuesto en el documento 26.1. Introducen la idea de una doble transparencia para representar las conexiones en la estructura conceptual. desafortunadamente las dos transparencias no cuadraban muy bien.

A152 - Joaquín continúa presentando el análisis fenomenológico. Sigue de cerca lo presentado en el documento 26.2.

A180 - **LR** interviene para decir que echa en falta todos los fenómenos de conmensurabilidad e inconmensurabilidad. **Joaquín** reacciona y entran en una discusión matemática de la clasificación de los reales. El problema de la medida conecta los números naturales con los racionales y los reales. **LR** también les muestra que en la estructura conceptual faltan los no periódicos que proceden de una regla no periódica. **Joaquín** le pregunta dónde poner esos números. **LR** insiste que los números decimales tienen que ver con los irracionales. Los otros procesos algorítmicos que dan lugar a números decimales. Les sugiere que la idea de medida da lugar a familias de fenómenos.

A246 - [Episodio 70] **Paco** interviene para proponer ideas sobre la representación gráfica de los números decimales. Su intervención es de carácter técnico para aportar al trabajo de este grupo. Marina y Carlos también intervienen. La discusión es de carácter matemático.

A260 - **PG** utiliza el ejemplo de los números decimales para mostrar la relación entre estructura matemática y fenómenos.

A278 - **Christopher** inicia la presentación de la estructura conceptual del grupo de probabilidad [documento 27.1]. Mencionan específicamente que siguieron mis sugerencias de reducir el tamaño del tema.

A350 - [Episodio 71] **Carmen María** genera discusión técnica con **Christopher** sobre el diseño de la estructura conceptual para la introducción a la probabilidad. La discusión toca la pertenencia de la fenomenología a la estructura conceptual y el análisis fenomenológico como establecimiento de conexiones entre características estructurales de fenómenos y subestructuras matemáticas.

A440 - **LR** interviene para hacerles ver que no se debería incluir la estadística y la teoría del caos. La discusión es sobre la clasificación de los temas que entran en lo estocástico. Insiste en las matemáticas escolares. Una cierta discusión sobre la teoría del caos. **Marina** y **Christopher** discuten y reviran a **LR**. **PG** les muestra la ventaja de haber restringido el tema.

A500 - **María** presenta las transparencias del grupo de **funciones y gráficas** sigue de cerca lo propuesto en el **documento 24.1**.

[Fin de lado A]

B000 - **María** continúa con el análisis fenomenológico de **funciones y gráficas** siguiendo de cerca lo propuesto en el **documento 24.2**.

B005 - [Episodio 72] **José** interviene para hacer comentarios a la estructura conceptual. Se da una discusión sobre el lugar donde se deben ubicar diversos elementos de la estructura conceptual y el establecimiento de conexiones puntuales externas. Es una relación sobre la manera como todo está relacionado.

B035 - **LR** interviene para explicar que el núcleo de la idea de función es la relación entre variables, con motivo de la pregunta de un alumno sobre el análisis fenomenológico.

B055 - **PG** vuelve a interpretar la posición de **Paco** en respuesta al comentario de **Jose**.

B062 - **María del Valle** hace un comentario que genera la reacción de **PG** de reiterar que el análisis debe tener que ver con las matemáticas escolares.

B073 - [Episodio 73] **Carmen María** muestra que hace falta la conexión entre la tabla de valores y la representación gráfica en la estructura conceptual de funciones y gráficas para la tarea 5. Jose pregunta por la representación de datos estadísticos.

B090 - **LR** interviene para mencionar el libro sobre funciones y gráficas para el análisis fenomenológico. **PG** dice que ellos lo han venido escribiendo. Menciona al grupo de la esfera que descubrió su libro desde un primer momento.

B100 - [Episodio 74] En este episodio **Paco** justifica el énfasis que le dan al análisis con base en la formación que ha tenido durante la carrera, como reacción a un comentario de **JO**.

B135 - Comienza la presentación del grupo de **cónicas**. Siguen la transparencia (documento 28.1). Insisten en la relación entre los parámetros.

B165 - Describen el análisis fenomenológico para las **cónicas**.

B178 - **PG** utiliza el ejemplo para mostrar las conexiones puntuales externas. Insiste en el trabajo que el grupo ha hecho. El grupo es consciente de la complejidad que hay allí. **PG** resalta el esfuerzo de unificación.

B208 - **PG** sugiere que los grupos lea los comentarios a los otros grupos.

B225 - [Episodio 75] Un grupo (probabilidad) hace unos comentarios para el grupo de **números decimales**, pero [no se entiende]. El comentario es sobre la representación de los no periódicos. **Joaquín** reacciona.

B245 - **Paco** hace comentarios al trabajo de las cónicas.

B254 - **PG** interviene para insistir en que no hay que reaccionar defensivamente, sino registrar las críticas para darse cuenta que el espectador no entendió todo lo que se creía que iba a entender.

B264 - **Jose** comenta el trabajo de funciones y gráficas. Les parece que está bien.

B274 - [no se entiende] Un grupo comentando a otros.

B279 - [no se entiende] Un grupo comentando a otros.

B300 - [Episodio 76] **PG** describe la tarea para el martes: mejorar el análisis fenomenológico e investigar sobre el significado del término modelización. El martes. Esto es de no acabar. Para la mayoría de los grupos creo que es evidente que podemos avanzar aún más en el análisis fenomenológico. Habiendo visto los ejemplos de los demás, es muy posible que podamos trabajar mejor nuestro tema, para avanzar en el análisis fenomenológico. ¿Será que en nuestro tema podemos hacer ejercicios de este estilo [muestra la transparencia de probabilidad]. Es decir, de poder identificar las características de los fenómenos y su relación con las estructuras matemáticas que nos permita clasificar los fenómenos? O ¿ejercicios del estilo del ejercicio de los números decimales en el que pudimos identificar que hay fenómenos que están relacionados con subestructuras específicas? ¿Y cómo la identificación de esas subestructuras nos permite clasificar los fenómenos que tienen relación con toda la estructura matemática? Entonces, pues, primero, para el martes, ¿será que podemos avanzar en nuestro análisis fenomenológico y mejorarlo? Primero. Y segundo. Haremos aquí una discusión del significado técnico que vamos a darle dentro de la asignatura al término modelización. Eso lo vamos a hacer. Pero, pensemos e investiguemos nosotros qué significa modelización. Antes de que aquí demos el significado técnico. Y ¿qué papel juega ese término y ese proceso dentro de lo que estamos haciendo? O sea, lo que estaba un poquito resaltando Paco. Yo veo que la modelización está íntimamente relacionada con el análisis fenomenológico. ¿Cómo es esa relación? ¿Qué es esa relación? ¿Qué es la modelización y cómo se relaciona con el análisis fenomenológico? Y seguramente lo puedo mostrar cuando mejore mi análisis fenomenológico. Éste es un caso de tarea difusa. Es claro. Es claro que es un caso de tarea difusa. No entendimos para nada la tarea, ¿no es cierto? ¿O sí? Bueno. Otra vez. De otra forma. mejorar mi análisis fenomenológico. Avanzar. Pero tengo los ejemplos de lo que hicieron los demás. Y dos formas de avanzar que mencioné. Una. ¿Será que en mi caso puedo entrar en el nivel de detalle que hicieron los de probabilidad? ¿Si ven? Trataron de responder las preguntas que yo hice el martes. Dos, ¿será que en mi caso puedo identificar o clasificar los fenómenos de acuerdo a las subestructuras de mi estructura matemática, como sucede en el caso de los números decimales? ¿Y será que esto me puede permitir avanzar en la clasificación de los fenómenos? Eso es con respecto al análisis fenomenológico. Con respecto a modelización. Investigar que significa en general, modelización. Tratando de asumir una posición con respecto a ese término, y segundo, tratar de asumir una posición con respecto a lo que estaba diciendo Paco. ¿Qué relación hay entre modelización y el análisis fenomenológico? ¿Cómo lo puedo mostrar en mi caso? Por ejemplo,

[muestra una copia que tiene Carlos de la portada del capítulo de los Castros sobre representaciones y modelización], éste es un caso. Pero, modelización es un término que aparece en muchos... ¿OK?"

Presentación de la segunda versión del análisis fenomenológico

Presentación de la segunda versión del análisis fenomenológico

A00 - Introducción de **PG** a las presentaciones. Ya se está terminando el análisis de contenido. En la sesión anterior el grupo **esfera** se quedó por fuera. Se espera que quede tiempo para discutir sobre análisis fenomenológico y sobre modelización.

A042 - Presentación del grupo **esfera**. Sistemas de representación. [Se entiende muy poco]. Otra alumna presenta fenómenos. Trataron de responder a las preguntas específicas. Hicieron un esfuerzo para relacionar coordenadas en el globo terrestre y las coordenadas esféricas.

A082 - **LR** hace una pregunta que no se entiende. **PG** hace otros comentarios. Habla de grupos de fenómenos. Resalta la conexión específica entre los fenómenos del globo terrestre y características de la educación matemática.

A108 - El grupo **progresiones** hace una presentación rápida en la que solamente una enumeración de fenómenos. [No se entiende]

A137 - Presentación del grupo **probabilidad**. Vuelven a pasar por los sistemas de representación y por la estructura conceptual. Siguen estrictamente las transparencias. Hicieron arreglos menores al análisis fenomenológico que ya habían presentado.

A200 - **PG** insiste en la relación análisis fenomenológico y modelización. Trata de mostrar que puede haber más fenómenos que pueden ser modelizados por la subestructura propuesta.

A225 - **Marina** reacciona.

A250 - **PG** se mueve dentro de la estructura conceptual para mostrar el juego entre subestructuras y familias de fenómenos.

A275 - El grupo **función de segundo grado** presenta grupos generales de fenómenos.

A300 - **PG** muestra que la clasificación es por fenómenos matemáticos y no matemáticos. ¿Los no matemáticos son del mismo tipo? Establece la relación con la estructura conceptual. Muestra que hay diferentes subestructuras y sus correspondientes familias de fenómenos.

A369 - **Jose** reacciona. Habla de cualidades "operativas". **PG** insiste en la diferencia entre familias de fenómenos y subestructuras diferentes.

A420 - Presentación del grupo **funciones y gráficas**. Grandes grupos de fenómenos.

[Fin lado A]

B015 - **PG** hace comentarios sobre la necesidad de clasificar fenómenos en familias y su relación con la resolución de problemas.

B050 - Presentación muy rápida del grupo **cónicas**.

B073 - El problema de la dificultad de entrar en detalle dentro de las subestructuras matemáticas. Introduce la problemática de describir una familia de fenómenos a partir de ejemplos.

B100 - Presentación muy rápida de **números decimales**. La hace **Ángel**.

B120 - PG necesidad de concretar el tópico desde la perspectiva de las matemáticas escolares.

B140 - Presentación del grupo **progresiones**. Búsqueda de fenómenos no matemáticos. Nuevos sistemas de representación.

B180 - Comentarios de **PG** a los sistemas de representación y al análisis fenomenológico. ¿Hay más subestructuras?

[Fin de la sesión]

57

3/20/01

PG

Recapitulación sobre el análisis de contenido. Presentación de doctrina sobre modelización

Recapitulación sobre el análisis de contenido. Presentación de doctrina sobre modelización

A000 - **PG**: reflexiones sobre lo que se ha venido haciendo y lo que se va a hacer. Perspectiva general.

A018 - **PG** a los tetraedros del currículo y su relación con el análisis de contenido. Las relaciones entre todos los elementos del análisis didáctico.

A040 - Ubica el organizador resolución de problemas. Relación con la noción de actividades de enseñanza. Relación con el análisis cognitivo. Hace un nuevo recorrido por el análisis didáctico.

A131 - **PG** hace reflexión didáctica sobre la asignatura misma.

A143 - Necesidad de concretar el tópico y el nivel en el que deben trabajar.

A175 - Hacen falta los procedimientos.

A235 - ¿Qué hace **PG** con las grabaciones y las transparencias?

A333 - Preguntas. Una alumna pregunta si hay algún modelo para hacer las cosas. **PG** reacciona con reflexiones de la relación entre la teoría y la práctica.

A414 - Una alumna pregunta si hay un única manera de hacer las cosas. **PG** reacciona diciendo que el diseño curricular no hay verdad absoluta. No hay una unidad didáctica ideal.

[Fin del lado A]

B000 - Metáfora con la arquitectura y el buen diseño de una casa.

B012 - Tarea: les habla sobre el ejercicio de reflexión.

B025 - Presentación de José sobre modelización. Sigue las transparencias del documento 32.

B273 - Fin de presentación de Jose. Entrega de documentos sobre aprendizaje.

58

3/27/01

PG

Última sesión sobre modelización y ejercicio de reflexión.

Última sesión sobre modelización y ejercicio de reflexión.

Por transcribir.

59

3/27/01

LR

Doctrina de LR sobre teorías de aprendizaje y conductismo. Parte 1.

Doctrina de LR sobre teorías de aprendizaje y conductismo. Parte 1.

Por transcribir.

60

3/27/01

LR

Doctrina de LR sobre teorías de aprendizaje y conductismo. Parte 2.

Doctrina de LR sobre teorías de aprendizaje y conductismo. Parte 2.

Por transcribir.

63

4/17/01

PG

Primera sesión sobre errores y dificultades

Presentación del contexto y la legitimidad epistemológica de los errores

64

4/17/01

PG

Segunda sesión sobre errores y dificultades

Segunda sesión de doctrina sobre obstáculos y clasificación de errores y causas.

67

4/19/01

PG

Tercera sesión sobre errores y dificultades.

Discusión sobre la posición ideológica hacia el error. El error y la evaluación.

68

4/19/01

PG

Cuarta sesión sobre errores y dificultades.

Presentación de los grupos de su trabajo en errores y dificultades.

71

4/26/01

LR

Primera sesión de resolución de problemas

Ideas generales sobre la noción de problema

71

4/26/01

PG

Segunda sesión de resolución de problemas

Resolución de problemas y análisis didáctico

72

4/26/01

LR

Segunda sesión de resolución de problemas

Características conceptuales de la resolución de problemas.

Tercera sesión de resolución de problemas

El ejemplo del cuadrado. Resumen.

Primera hora de presentaciones del trabajo de actividad

Primera hora de presentaciones del trabajo de actividad

A000 - **PG** hace introducción previendo posibles características de las producciones que se van a presentar en la sesión. Es la primera vez que se pone en juego la globalidad de los organizadores del currículo para el diseño. Se dan sugerencias para el análisis de las presentaciones: no depende del conocimiento del tópico, sino de la comprensión que tengamos de la presentación y la sensación de coherencia que nos queda.

A049 - El grupo de **sistemas de ecuaciones lineales**. Hace énfasis en que han reducido el tópico. La estructura conceptual no corresponde a la dificultad y a los errores propuestos. Introducen una tarea gráfica en la que se pretende que el alumno vea cómo los sistemas son equivalentes. María tiene dificultad resolviendo la actividad con la balanza y las jarras.

A126 - María explica que los alumnos no “ven” que los sistemas son equivalentes. **Leila** dice que lo que se busca es materializar la equivalencia y por primera vez introduce la idea del mismo conjunto solución. **LR** insiste en que lo importante son las relaciones y no exclusivamente el criterio de comprobación de la equivalencia. **PG** regresas a la importancia del detalle del análisis de contenido.

A300 - Presentación del grupo de esfera. No se escucha bien. La presentación la hace Myriam. Sigue lo que está en las transparencias.

A341 - **LR** sugiere un error particular que puede simplificar el problema, para que no se necesite trigonometría esférica. Ellas reaccionan diciendo que es demasiada matemática para esos niños. **Diego** interviene para hacer un comentario en el mismo sentido.

A383 - **PG** hace ver que no hay relación entre la estructura conceptual y la dificultad y errores. Insiste en la coherencia entre dificultades, errores y actividad. Muestra que el conocimiento que genera el error se pone en juego en la actividad.

[Fin lado A]

B000 - Presentación de **Ávila** de la propuesta de **cónicas**. **Sandra** presenta la dificultad, los errores y la actividad. Hay un comentario de una alumna que no se entiende. Tampoco se entiende el comentario de otro alumno.

B050 - **LR** insiste que esta asignatura es poner en cuestión lo cotidiano. Lo que es verdad, pero que no tienen el nivel de conocimiento de los niños. **LR** dice que el tratamiento que se les da a circunferencia y parábola es diferente del que se le da a la elipse y la hipérbola.

B085 - **Laura** se defiende. **LR** insiste en que aunque en el instituto se trabaje así el tratamiento es

dispar.

B104 - **Laura** insiste en el problema de la coherencia de las cuatro cónicas. **LR** dice que el tópicos es cónicas, pero que puede haber tratamientos diferentes y hay que ser conscientes de ello.

B118 - **PG** muestra que hace falta poner el conocimiento que genera los errores. Siempre ir de lo simbólico a lo gráfico.

B157 - **LR** pone el ejemplo de las familias de las circunferencias. **PG** explica lo de familias de funciones con planos que involucran los parámetros.

[B210 fin cinta]

77

5/8/01

PG

Segunda hora de presentaciones del trabajo de actividad

Trabajo sobre diseño de una actividad para una dificultad y sus errores.

A000 - **Inés María** presenta el trabajo sobre **número decimales**. Sigue el contenido de las transparencias. Acaba rápidamente.

A175 - **LR** muestra que hay tres ideas: de escritura, de orden y de densidad.

A196 - **PG** hace falta el análisis de contenido. La dificultad se puede ubicar en diferentes lugares de la estructura conceptual.

A212 - **Joaquín** revira a **LR**. Trata de expresar la dificultad de pasar a la densidad de los números.

A230 - **Antonio** presenta el trabajo de función de segundo grado.

A253 - **José** presenta la propuesta de actividad.

A283 - **PG** les dice que la actividad es sobre el binomio, pero no sobre la función cuadrática. **Jose** revira en el sentido de que la dificultad está involucrada en la resolución de actividades de la función cuadrática. **PG** presenta la linealidad de la función cuadrática.

A320 - **María** e **Irene** hacen la presentación del grupo de **funciones y gráficas**. **LR** pregunta para qué curso de universidad es el análisis.

A370 - **PG** se refiere al problema de si la actividad es suficiente para evitar que cometa el error en el futuro.

A400 - **PG** no entiende la descripción de la dificultad y de los errores. **Paco** revira explicando el error. **LR** les insinúa trabajar en cosas más cotidianas de las gráficas. Entra en el detalle del análisis de contenido. Quiere decir que las cosas son muy complicadas. Muestra la ausencia de fenómenos y la presentación en el sistema de representación simbólico. Quiere mostrar que la presentación que hacen es muy formal y poca rica en organizadores del currículo.

A475 - **Paco** trata de revirar a los comentarios. **LR** le revira con el problema de la relación entre lo gráfico y lo simbólico.

A520 - **PG** trata de mostrar la diferencia entre el ejercicio de hoy y el problema de la unidad didáctica.

A530 - **Begoña** hace un comentario que no se entiende. **Irene** revira.

A558 - **Paco** introduce el problema de la continuidad de $1/x$ en $x=0$. **LR** insiste que el problema es demasiado complicado. Dice que el tema era más de simbólico y gráfico sin tratar tanto las propiedades analíticas.

A580 - **Rosa** hace la presentación del grupo de probabilidad.

B030 - **PG** les hace ver que la dificultad no se hace explícita. **Christopher** y **Marina** reviran. Se establece discusión sobre la relación entre el fenómeno y la representación gráfica.

B080 - **Raquel** hace la presentación de progresiones aritméticas y geométricas.

B117 - **PG** pregunta “¿ya?”. **PG** y **LR** hacen bromas que no se entienden.

78

5/10/01

PG

Sesión de revisión de la actividad de diseño, sesiones de materiales y recursos e introducción a la metodología

PG valora los trabajos de diseño de actividad, **LR** discute las sesiones de materiales y recursos y **PG** introduce ideas generales de metodología.

A000 - Discurso de **PG** sobre la valoración de los trabajos. Para todos los aspectos considerados hay por lo menos un trabajo con un esfuerzo interesante. Pero no hay un trabajo que cubra positivamente todos los aspectos. Se introduce la idea de valoración de actividades de diseño. Se insiste en que el ejercicio que se hizo era de características particulares.

A040 - El listado de los aspectos considerados. Se sigue las ideas de las transparencias, pero se insiste en algunos aspectos más que en otros. Se discute cada uno de los aspectos para explicarlo. La grabación puede servir para un texto.

A180 - El tema de la coherencia. La metáfora del coche.

A235 - Una cosa es el listado y otra la estructura de donde surge el listado. La transparencia de análisis, dificultades y errores. Las gráficas del análisis didáctico. El propósito del ejercicio de análisis de diseño para el trabajo de ellos.

A285 - [Episodio 116] **Paco** interviene para reflexionar sobre el esquema de trabajo: la tarea difusa, el trabajo de ellos y los comentarios posteriores.

A410 - **LR** introduce la discusión sobre las prácticas sobre materiales y recursos. Interviene **Carlos** con respecto a las quejas de los padres. **LR** revira. [Fin lado A]

B000 - **LR sigue** mostrando que hay materiales (cartas) que no generan necesariamente actitudes

negativas por parte de los padres.

B023- Carmen María dice que no alcanzó el tiempo.

B042 - **Begoña** interviene pero no se entiende. Tiene que ver con el tiempo que toma usar materiales. **LR** explica que cada quien debe manejar esa situación. Pone como ejemplo la actuación de **PG** hoy, mostrando que él habría hecho otras cosas diferentes. Habla de calculadoras y de Cabri.

B085 - **PG** comienza la discusión sobre la metodología. Hace preguntas. Los alumnos reaccionan con reglas, normas, esquemas. **Paco** introduce el aspecto de la personalidad del profesor. **PG** introduce la pregunta de los factores que pueden diferenciar las metodologías. **Carmen María** introduce la idea de ideología.

B186 - Con respecto a la matemática y las ideologías.

79

5/15/01

PG

Primera sesión de presentación de trabajos sobre resolución de problemas.

Trabajos de los grupos de funciones y gráficas y función cuadrática

80

5/15/01

PG

Segunda sesión de presentación de trabajos sobre resolución de problemas.

Trabajos de los grupos de sistemas de ecuaciones lineales y progresiones aritméticas y geométricas

81

5/17/01

PG

Última sesión sobre resolución de problemas. Resumen y discusión

Última sesión sobre resolución de problemas. Resumen y discusión

82

5/22/01

PG

Primera sesión sobre evaluación

Ejercicio de los listones de Paco y discusión.

La discusión de la segunda parte es interesante y hay que analizarla con cuidado porque muestra que ellos han desarrollado una cierta visión que les permite asumir posiciones sobre la evaluación que van más allá de su propia experiencia como estudiantes. No aparece la posición tradicional que Paco ha obtenido con otras experiencias con este ejercicio.

83

5/22/01

PG

Segunda sesión sobre evaluación

Doctrina y discusión sobre evaluación. Presentación de la unidad didáctica.

84

5/24/01

PG

Tercera sesión sobre evaluación

Tercera sesión sobre evaluación

87

5/29/01

LR

Primera sesión de ejemplo de la unidad didáctica de los números naturales.

Se presenta los documentos oficiales y la fenomenología.

Hay descripción y comentarios del documento correspondiente.

88

5/29/01

LR

Segunda sesión de ejemplo de la unidad didáctica de los números naturales.

Se presenta los sistemas de representación, las dificultades, los modelos, los materiales y los recursos.

Hay descripción y comentarios del documento correspondiente.

89

5/31/01

LR

Tercera sesión de ejemplo de la unidad didáctica de los números naturales.

Se presenta la historia y los niveles del currículo.

No hemos sacado las fotocopias de estas transparencias. Sin embargo, hay que anotar las diferencias que se expresan aquí entre la posición de Luis y la mía. Es de particular interés el hecho de que él pone dentro de metodología una gran cantidad de aspectos que corresponden a los análisis de contenido y cognitivo.

109	6/21/01	LR
-----	---------	----

Presentación final del grupo **esfera**

Presentación final del grupo **esfera**

110	6/21/01	LR
-----	---------	----

Presentación final del grupo **progresiones aritméticas y geométricas**

Presentación final del grupo **progresiones aritméticas y geométricas**

112	6/22/01	LR
-----	---------	----

Presentación final Grupo **cónicas**

Presentación final Grupo **cónicas**

113	6/22/01	LR
-----	---------	----

Presentación final Grupo **funciones y gráficas**

Presentación final Grupo **funciones y gráficas**

114	6/27/01	LR
-----	---------	----

Presentación final Grupo **probabilidad**

Presentación final Grupo **probabilidad**

115

6/27/01

LR

Presentación final Grupo **sistemas de ecuaciones lineales**

Presentación final Grupo **sistemas de ecuaciones lineales**

116

6/29/01

LR

Presentación final Grupo **números decimales**

Presentación final Grupo **números decimales**

117

6/29/01

LR

56

Presentación final Grupo **función cuadrática**

Presentación final Grupo **función cuadrática**

Anexo F

COMENTARIOS A LAS TRANSPARENCIAS

Este anexo contiene los comentarios que hice a las presentaciones y transparencias de los grupos de futuros profesores. Cada registro incluye el número que identifica el documento, la fecha en que se hizo el registro, el grupo que produjo la transparencia, la identificación del tema tratado en ella y los comentarios correspondientes.

Tercera versión de la estructura conceptual para el tema de **funciones y gráficas**

Considero que ustedes han hecho un esfuerzo muy interesante. Tenían el problema de lograr conectar diferentes elementos de la estructura conceptual anterior y han visto cómo la noción de sistema de representación podría ayudarles a establecer esas conexiones. Es evidente que la investigación sobre historia también les ha ayudado a organizar las ideas. También es muy interesante que hayan introducido nuevos sistemas de representación (los diagramas de Venn o de flechas), pero es necesario reflexionar sobre las diferencias entre este sistema de representación y el sistema de representación de tabla de valores (ver más abajo).

La idea de la **espiral** también es muy interesante, pero, como percibieron en la discusión, esta idea no parece ser central para la descripción de la estructura matemática que soporta las nociones de funciones y gráficas. Tal vez, una manera de utilizar la idea de desarrollo en espiral sería la siguiente. Hacer una estructura conceptual del tema tal y como ustedes lo ven ahora (es decir, con todos los elementos que se conocen) para efectos de su enseñanza en la secundaria y, dentro de esa estructura conceptual, mostrar que históricamente algunos elementos o grupos de elementos aparecieron antes que otros. Esta idea también puede ser importante desde la perspectiva cognitiva cuando utilicemos la estructura conceptual para reflexionar sobre las dificultades de los estudiantes y la manera como debemos abordar esas dificultades desde la enseñanza.

Recordemos que el tópico que ustedes están trabajando es **funciones y gráficas**. Algunos de los elementos que ustedes presentan tienen que ver con funciones, pero no son funciones (por ejemplo cuando hablan de producto y ecuación). Una de las cosas que debería resolver el hacer una estructura conceptual más detallada es el de mostrarnos explícitamente la relación entre por ejemplo ecuación y función. ¿Cuándo aparece una ecuación cuando estoy trabajando con una función? ¿Qué relación tienen las preguntas que me puedo hacer con respecto a una ecuación con las propiedades de una función en sus diferentes representaciones?

¿Por qué Luis afirma que la representación en diagramas de Venn y la representación en tabla de valores son diferentes? ¿Cuál es la relación entre ellas? ¿Qué papel puede jugar el hecho de que nos interesan particularmente las gráficas en el plano cartesiano para dilucidar la relación entre esos dos sistemas de representación? ¿Cuáles son las normas que regulan el funcionamiento de esos dos sistemas de representación?

Uno de los aspectos que ustedes mencionan como muy importante es la conexión entre lo simbólico (que ustedes llaman analítico) y lo gráfico. Sin embargo, en lo que han presentado hasta ahora no es posible percibir el procedimiento que permite pasar de lo simbólico a lo gráfico y viceversa. ¿Qué papel puede jugar la representación de tabla de valores en ese procedimiento?

Ustedes han encontrado una solución al problema de la generalidad de su tema, al tomar como ejemplo una función específica. Es una buena estrategia, pero hay que tener cuidado de que esa estrategia no oculte aspectos importantes del tema general.

Uno de los puntos más importantes de la relación entre funciones y gráficas es el problema de identificar con detalle los elementos que están involucrados en la representación simbólica ($y = f(x)$ con todas las condiciones de notación que allí aparecen) y los elementos de la representación gráfica. Por ejemplo, ¿qué significa el valor de la función en un punto desde el punto de vista gráfico? Es posible que esto se obvio para ustedes, pero no significa que no hay que hacerlo explícito.

Lo que ustedes llaman comportamiento de la función son características de la representación de gráfica de la función. ¿Qué relación tienen esas características con la representación simbólica? ¿Y con la representación en tabla de valores?

Lo que ustedes llaman verbal matemático es realmente un fenómeno matemático que puede ser modelizado con la función que ustedes tomaron como ejemplo. Esto lo trataremos en más detalle en los organizadores del currículo de análisis fenomenológico y modelización.

Queda faltando bastante trabajo para lograr resolver el problema que ustedes lograron identificar. La mayoría de las relaciones (conexiones) que ustedes presentan son de tipo global: van de un grupo de elementos a otro grupo de elementos. El problema se podrá resolver en la medida en que ustedes logren establecer conexiones puntuales: entre un elemento de una representación y otro elemento de otra representación (por ejemplo la y de $y = f(x)$ en la representación simbólica y la y de la representación gráfica).

Cuarta versión de la estructura conceptual y primera versión del análisis fenomenológico del grupo de **funciones y gráficas**

La nueva estructura conceptual es muy interesante. Considero que está muy completa y las conexiones puntuales externas que ustedes presentan permite apreciar la complejidad del tema. Creo que ha sido un esfuerzo apreciable.

Con esta estructura conceptual desarrollada, supongo que ustedes se habrán dado cuenta de que el tema que tienen entre manos es, tal vez, demasiado amplio y que hay necesidad de concretarlo de alguna manera de cara al problema de diseñar una unidad didáctica. Por esta razón, pienso que es importante comenzar a mirar el tema desde la perspectiva de las matemáticas escolares. En este sentido, ustedes deben tomar decisiones con respecto al nivel de secundaria o bachillerato para el que van a diseñar la unidad didáctica. Una vez, tomada esta decisión, deberán decidir cuáles son los aspectos de la estructura conceptual global que se deben desarrollar en detalle de tal forma que esa nueva estructura conceptual represente lo que ustedes consideran que los estudiantes del nivel correspondiente deben saber sobre el tema. Dado que el tema es funciones y gráficas, creo que la aproximación debería tener muy en cuenta el aspecto gráfico, como ustedes ya lo han hecho en esta versión de la estructura conceptual.

Dentro del sistema de representación gráfico hay una serie de operaciones que son olvidadas muchas veces en la educación secundaria, pero que son muy potentes, particularmente ahora que se tiene el apoyo de la tecnología. Se trata de las traslaciones (verticales y horizontales). Estas operaciones permiten comprender el significado de algunos de los parámetros de las representaciones simbólicas de las funciones.

La referencia del libro de sugirió Luis es la siguiente: Azcárate, C., y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis. Es muy posible que esta referencia les sirva para el análisis fenomenológico y para algunos de los aspectos de la estructura conceptual.

Como yo no tengo la cualidad que tiene Luis para ser modesto, también les puedo recomendar que le echen una mirada a un libro mío que, aunque escrito para el primer nivel universitario, les puede dar ideas. Su referencia es:

Gómez, P., Mesa, V.M., Carulla, C., Gómez, C., y Valero, P. (Eds.). (1996). *Situaciones problemáticas de precálculo. El estudio de funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica.

Continuando con la estructura conceptual, creo que hay que tener en cuenta que muchas de las características gráficas tienen su expresión simbólica. Es decir, es posible expresar simbólicamente la existencia de un máximo de una función. Aunque incluir estas relaciones en la estructura conceptual puede implicar una complicación exagerada, sí hay que ser consciente de que estas características no son exclusivamente gráficas, sino que son características que se expresan más apropiadamente dentro del sistema de representación gráfico. En todo caso, hay que tener en cuenta que la conexión entre lo gráfico y lo simbólico no se da únicamente a través de las nociones del cálculo. De hecho, para una parte de las familias de funciones más comunes (i.e., lineales, cuadráticas y cúbicas) no es necesario el cálculo para poder determinar todas sus características gráficas.

Ustedes hablan de “elementos gráficos” o “elementos analíticos”. Para efectos de que avancemos en el proceso de utilizar un lenguaje común, creo que es conveniente hablar de sistema de representación simbólico y sistema de representación gráfico. Lo que ustedes llaman “visión algebraica” son aspectos y problemas relacionados con el concepto de función que se expresan, en general, dentro del sistema de representación simbólico.

La categoría de los ejemplos es interesante. Es posible que sea una categoría importante a la hora de

concretar más el tema. En este sentido, creo que esa categoría se podría llamar familias de funciones. A nivel de la matemática escolar (e inclusive de la matemática universitaria) el número de familias de funciones es sorprendentemente reducido: lineales, cuadráticas, cúbicas, otras polinómicas, exponencial y logarítmica, trigonométricas, racionales, con radicales y a trozos. Estas familias abarcan la gran mayor parte de las funciones que se consideran en la secundaria y el bachillerato.

Ustedes continúan poniendo en una misma categoría las tablas de valores y los diagramas de Venn. Estos son dos sistemas de representación diferentes: cada uno tiene sus propias normas para la creación y manipulación de los caracteres y expresiones que le pertenecen.

Similarmente, ustedes continúan incluyendo la fenomenología dentro de la estructura conceptual. Ésta es, para mí, una discusión de carácter puramente formal. La estructura conceptual no describe en su totalidad todo lo que se refiere al concepto en cuestión. La idea es que la estructura conceptual describe los aspectos matemáticos de la estructura matemática. La fenomenología no entra dentro de esos aspectos matemáticos, pero sí entra dentro de la descripción global de aquello que, desde el punto de vista didáctico, debe estar relacionado con el concepto. Por lo tanto, no hay ningún problema en incluir la fenomenología dentro de la descripción de la estructura matemática, pero hay que hacer la aclaración de que la estructura conceptual es aquella parte de la gráfica que se refiere a los aspectos matemáticos de la estructura matemática y que, por lo tanto, la fenomenología no está allí.

El análisis fenomenológico que ustedes han hecho presenta también un esfuerzo importante dadas las dificultades por razón de la generalidad del tema. Creo que es importante avanzar en el detalle de este análisis a través de varios caminos. Uno, sencillo, es clasificar los fenómenos de acuerdo a la familia de funciones que los organiza. Otro, más interesante, pero más complejo, es identificar subestructuras matemáticas que organicen familias de fenómenos. Por ejemplo, la subestructura matemática que se relaciona con los máximos y mínimos determina claramente todo un conjunto de fenómenos (y sobre todo de problemas dentro de los fenómenos). Es importante que el análisis fenomenológico logre entrar en el detalle de identificar las características estructurales de unos fenómenos y relacionarlas con aspectos específicos de una subestructura de la estructura matemática en cuestión.

Quinta versión de la estructura conceptual y segunda versión del análisis fenomenológico del grupo de **funciones y gráficas**

La idea de clasificar los fenómenos de acuerdo a la clasificación de las familias de funciones ustedes la descubrieron sin necesidad de mi comentario en el documento anterior. Este análisis se podría mejorar un poco si 1) se completa la lista de familias de funciones que pueden ser interesantes; 2) se identifica las características de los fenómenos que corresponde a elementos y propiedades de las subestructuras matemáticas correspondientes (por ejemplo, los fenómenos que contienen proporcionalidad se modelizan con funciones lineales, aquellos que involucran caída libre, la función de segundo grado, aquellos de reproducción, la función exponencial). Esto no se puede hacer para todas las familias y todos los fenómenos, pero se podría hacer para algunos de tal manera que en el diseño de la unidad didáctica tenga sentido la utilización de fenómenos y problemas dentro de fenómenos.

En el segundo folio que tiene los términos análisis fenomenológico en el medio, insisto en un par de comentarios. El cambiar la frase “modelización de situaciones empíricas” por “tratamiento de situaciones empíricas” no cambia realmente el hecho de que se esté aquí insinuando una aparente dependencia del modelización con respecto al análisis fenomenológico. Pero, al menos en este caso, el problema se resuelve fácilmente si ustedes clasifican los fenómenos de esta categoría como fenómenos de reproducción y crecimiento.

Espero que los documentos que les sugerí en el documento anterior les puedan ser de utilidad.

Transparencia presentación sobre errores y dificultades del grupo de funciones y gráficas

El trabajo que ustedes han hecho para esta presentación me ha gustado mucho. Tiene varias cualidades que quiero resaltar: 1) está organizado por sistemas de representación; 2) separa errores y dificultades y trata de establecer algunas relaciones entre los dos; 3) trata de establecer algunas relaciones entre las dificultades.

En este punto quiero insistir en la necesidad de concretar tanto como sea posible el problema que se va a abordar en el diseño de la unidad didáctica. Como lo explico más adelante, la identificación de los errores y las dificultades específicos que ustedes decidan tratar es un paso esencial. No estoy seguro de cuál es la literatura que aborda el tema de los errores y las dificultades en funciones y gráficas que esté escrita en español. La lista que sigue es de literatura en inglés. Vale la pena preguntarle a Luis quien seguramente podrá dar más indicaciones. En todo caso, no tengo dudas de que es necesario relacionar sus intuiciones sobre errores y dificultades (lo que han presentado) con lo que se describe en la literatura. La lista es la siguiente:

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practices. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (MAA Notes, Volume 25)* (pp. 109-132). Washington: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy (Notes, Volume 25)* (pp. 25-58). Washington: Mathematical Association of America.

Tall, D., & Bakar, M. (1992). Students mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematics, Education, Science and Technology*, 23 (1), 39-50.

Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19 (1), 20-44.

La identificación de los errores y las dificultades en el tópico es un paso central en el análisis didáctico porque, en la mayoría de los casos, define con bastante especificidad el *problema* que se desea resolver con el diseño y puesta en práctica de la unidad didáctica. En otras palabras, cuando ustedes decidan cuáles son los errores y las dificultades que van a abordar, tendrán, por un lado, una parte de la descripción del estado cognitivo de los alumnos y, por el otro, la base con la cual determinar los objetivos de la unidad didáctica. Con esta información y habiendo determinado el nivel al que se va a trabajar, podrán tomar decisiones con respecto al contenido (en el sentido de concretarlo), para efectos de realizar una nueva versión del análisis de contenido. Esta nueva versión del análisis de contenido deberá hacerse *de manera detallada* para la parcela del tópico que corresponde a los objetivos y al estado cognitivo de los alumnos, de tal forma que, dentro de la nueva estructura conceptual, sea posible ubicar con claridad los errores y las dificultades. En principio, si esto se logra, el análisis de instrucción que comenzamos a hacer esta semana (materiales y recursos y resolución de problemas) tendrá significado para efectos del diseño de la unidad didáctica: al tener claridad con respecto al análisis de contenido y al análisis cognitivo, al investigar sobre los materiales y recursos disponibles y al manejar las nociones relacionadas con la resolución de problemas, ustedes deberán ser capaces de identificar diversos tipos de actividades de enseñanza que tengan sentido para los objetivos que se hayan impuesto y deberán poder justificar las razones por las cuales estas actividades pueden llegar a permitir la evolución de las estructuras cognitivas de los alumnos.

En consecuencia, los pasos a desarrollar en este momento consisten en:

1) Decidir cuáles son los errores y las dificultades que ustedes van a abordar. No pueden abordar todos los que presentaron en la transparencia. Tendrán que decidir un conjunto de errores y dificultades que sea posible abordar en un número reducido (3 a 6) de sesiones de clase.

- 2) Separar errores y dificultades. Es decir, intentar identificar las características de las estructuras cognitivas de los alumnos (dificultades) que generan ciertos tipos de actuaciones (errores).
- 3) Determinar con tanta especificidad como sea posible la parcela de su tópico que van a abordar en la unidad didáctica. Debe ser claro en este momento que, si han tomado decisiones con respecto a los errores y las dificultades, no podrán abordar la totalidad del tópico.
- 4) Producir una *nueva* estructura conceptual detallada para esta parcela del tópico. Esta estructura conceptual tendrá que ser tan detallada como para que sea posible ubicar en ella los *conceptos* y los *procedimientos* que intervienen en los errores en los que incurren los alumnos. No bastará con identificar conceptos y relacionarlos. Será necesario entrar en el detalle de describir procedimientos, tanto de transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación, como de traducciones entre sistemas de representación.
- 5) Hacer un nuevo análisis fenomenológico, esta vez para la parcela del tópico que se haya escogido y relacionar este análisis fenomenológico con la estructura conceptual del punto 4).

Transparencias de presentación de actividad del grupo de funciones y gráficas

Es evidente que ustedes invirtieron una buena cantidad de tiempo para hacer este trabajo. Sin embargo, creo que en la discusión en clase se apreciaron ciertas dificultades con el mismo.

La primera y tal vez la más importante tiene que ver con la selección del tópico para hacer el trabajo. Es evidente que hay una relación entre el tema de la continuidad y el tema de las funciones y gráficas. Pero Luis trató de insinuar que es posible que haya aspectos específicos del problema de las funciones y las gráficas que sean interesantes, en los que haya dificultades y que no requieran entrar en el análisis de otras nociones más complejas como la continuidad. Habiendo hecho esta aclaración, se puede comprender buena parte de las otras dificultades que se discutieron durante la presentación.

Para comenzar ustedes produjeron una estructura conceptual bastante compleja de la noción de continuidad, pero, por un lado, el aspecto que ustedes tratan en la dificultad y los errores no está desarrollado con detalle dentro de la estructura conceptual. Por el otro, esta estructura conceptual vuelve a ser del “estilo analítico” de las primeras estructuras conceptuales que se hicieron al comienzo y olvidó el papel que pueden jugar los sistemas de representación en la descripción del contenido matemático, lo mismo que no se estudiaron fenómenos que estuvieran relacionados con la noción, ni procesos de modelización que pudieran aportar al diseño de las actividades.

Aunque en la discusión que tuvimos en clase, ustedes lograron aclarar una cierta cantidad de cosas, en las transparencias encuentro dificultad para interpretar apropiadamente la descripción de la dificultad como una dificultad (es decir, como un conocimiento con unas ciertas características) y para interpretar los errores como errores (es decir, como actuaciones específicas de los alumnos dentro de ciertas circunstancias y que está relacionadas con la dificultad). Es posible que parte de esto inconveniente tengan que ver con el hecho de que no hay una estructura conceptual detallada para el tópico específico al que se refieren la dificultad y los errores y con el hecho de que los errores están descritos de manera general y no como actuaciones de los alumnos en circunstancias específicas.

Similarmente, las actividades que ustedes proponen son, en su mayoría, generales (i.e., “plantear a los alumnos problemas relacionados con la continuidad de funciones”) que no permiten apreciar si esas actividades pueden poner en juego el conocimiento que está detrás de la dificultad y que genera los errores.

Tercera versión de la estructura conceptual para el tema de **progresiones aritméticas y geométricas**

Se aprecia un progreso importante con respecto a la propuesta anterior. La riqueza de representaciones que presentaron aportó a la comprensión del significado de la noción de sistema de representación.

En el sistema de representación simbólico es importante diferenciar y **relacionar** la definición del concepto y las propiedades del mismo. Hay que tener en cuenta que lo simbólico también es un sistema de representación.

El trabajo fenomenológico también es muy interesante y servirá de base para las actividades que haremos próximamente.

Creo que hay suficiente información para establecer gran cantidad de conexiones externas puntuales entre los diferentes elementos de los diferentes sistemas de representación. Por ejemplo, entre la n y la a_{subn} de lo simbólico, con los correspondientes elementos de los otros sistemas de representación.

Me surge la inquietud de si habrá otro tipo de representaciones figuradas que representen mejor la estructura matemática de las progresiones en cuestión. Las representaciones figuradas que se presentan hasta ahora no permiten imaginar el término general excepto si se cuentan los elementos y se hace un razonamiento numérico. ¿Habrá otras maneras de hacerlo?

Cuarta versión de la **estructura conceptual** para **progresiones aritméticas y geométricas**.
Primera versión del **análisis fenomenológico**.

Considero que la organización de la estructura conceptual con base en los sistemas de representación da mucha más claridad a la descripción de la estructura matemática. en todo caso, es, tal vez, el momento de responder a dos preguntas que sirvan de criterios para decidir qué hace falta y qué puede sobrar en esta estructura conceptual: 1) ¿para qué nivel de secundaria o bachillerato vamos a diseñar la unidad didáctica sobre progresiones aritméticas y geométricas?; 2) Lo que aparece actualmente en la estructura conceptual, ¿es lo que consideramos importante que un estudiante de ese nivel conozca sobre el tema?; ¿está todo lo que esos alumnos deberían saber? En este sentido, hay algunas ideas que se podrían considerar para mejorar la estructura conceptual, pero ustedes deben decidir qué es lo importante y qué no lo es.

Por un lado, se podría considerar el problema de las operaciones en progresiones aritméticas y geométricas. ¿Es posible definir las? ¿Cómo se hace? ¿Qué propiedades se obtienen? En segundo lugar, se podría explorar si las progresiones se pueden caracterizar por otros criterios adicionales a los de crecimiento (por ejemplo, ¿tiene sentido introducir la idea de progresión acotada?) Tercero, la idea de interpolación puede ser una idea potente en el análisis de las progresiones.

Por otro lado, es evidente en la presentación que ustedes hacen de la estructura conceptual con base en sistemas de representación que buena parte de las representaciones ponen en juego la noción de función. ¿Qué papel juega esta noción dentro de la estructura matemática de las progresiones? ¿Qué ventajas y qué restricciones impone? ¿Cómo podemos utilizar la noción de función para potenciar el estudio de las progresiones? Es evidente que la representación de las progresiones con base en las representaciones de funciones es una de las ventajas de esta relación.

Finalmente, Luis mencionó la idea de números figurados como una representación complementaria (si se establecen claramente las reglas de funcionamiento del sistema de representación; si no, habría que considerarlo como una familia de fenómenos). Es posible que les interesa mirar el documento Castro, E. (1994). **Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales**. Granada: Mathema. Este documento también se encuentra en la base de datos pna. En ese documento encontrarán también referencias bibliográficas en el área de la aritmética que les pueden ser de utilidad.

En el **análisis fenomenológico**, ustedes lograron hacer algo que pocos grupos hicieron: identificar subestructuras de la estructura matemática en cuestión y organizar los fenómenos de acuerdo a esas subestructuras. Surgen, en todo caso, tres preguntas: 1) ¿la caracterización de las progresiones de acuerdo a su crecimiento es la única manera de caracterizarlas? ¿No habrá otras caracterizaciones de las progresiones que nos permita organizar de otras maneras *complementarias* los fenómenos?; 2) Cuando pensamos no solamente en la descripción de fenómenos, sino también pensamos en *problemas* que surgen dentro de los fenómenos, ¿se pueden establecer otras categorías?; 3) ¿Es posible hacer en el caso de las progresiones ejercicios similares al que hizo el grupo de probabilidad en el sentido de identificar las características estructurales del fenómeno que se modeliza con elementos específicos de la subestructura en cuestión?

Creo que puede ser interesante pensar en las nociones de contar y ordenar dentro del análisis fenomenológico.

Quinta versión de la **estructura conceptual** para **progresiones aritméticas y geométricas**.
Segunda versión del **análisis fenomenológico**.

Ustedes han logrado un ejercicio muy completo de identificación de sistemas de representación para una estructura matemática. En el último documento ya les hice algunos comentarios a esa estructura conceptual. Aquí tengo sólo una pregunta: ¿por qué desapareció el sistema de representación simbólico de la versión anterior a ésta?

El análisis fenomenológico también es muy interesante y desafortunadamente no me di en cuenta en clase para mostrarlo como ejemplo de cómo una estructura matemática puede clasificar, con base en sus subestructuras, fenómenos de diferentes áreas. El detalle en el listado de tipos de fenómenos es muy revelador de la manera como las matemáticas permiten organizar fenómenos y problemas de la realidad no matemática.

Me hago ahora una pregunta dentro de este proceso de nunca acabar. ¿Cómo se puede utilizar la estructura matemática de progresiones para *resolver problemas* dentro de estas familias de fenómenos? Por ejemplo, ¿qué problemas hay en los fenómenos de hipotecas y de qué manera los elementos y propiedades de las progresiones permiten modelizarlos y resolverlos en el sentido que presentó José en su esquema? Es posible que tratar de responder este tipo de preguntas las lleve a detallar aún más la estructura conceptual, especialmente en su dimensión simbólica, con respecto a las propiedades y operaciones de las progresiones. Paralelamente, este tipo de reflexión deber permitir detallar aún más la relación entre características estructurales del fenómeno o del problema dentro del fenómeno y elementos y propiedades de subestructura matemática en cuestión. ¿Será que se pueden encontrar problemas en hipotecas, planes de pensiones, los lados y áreas de los cuadrados, que sean equivalentes desde el punto de vista de su modelización y resolución?

Transparencia presentación sobre errores y dificultades del grupo de progresiones

Considero que ustedes han hecho un esfuerzo importante por identificar errores y dificultades. En su tópico este trabajo parece más difícil que en otros tópicos. Tengo algunos comentarios, en todo caso. Por un lado, habría que hacer más claridad en el significado que le damos a la noción de dificultad. Ésta se refiere a una caracterización de las estructuras cognitivas del alumno que nos permite explicar los errores en los que él incurre. De cierta manera, la identificación de las dificultades es lo que nos permite responder a la pregunta “¿por qué incurrió en este error? En el documento y en la presentación hay frases como “calcular la razón” que es posible identificar como dificultades, pero solamente una vez que se explique qué se quiere decir con esa frase.

Nos encontramos de nuevo en este caso con el problema de concretar una parcela específica del tópico progresiones aritméticas y geométricas en el que ustedes terminarán haciendo su unidad didáctica. Creo que la identificación de errores puede ser de ayuda para ese proceso. En otras palabras, de los errores y dificultades que han identificado hasta ahora (y de los que podrán identificar en el futuro), ¿cuáles son los que ustedes han decidido que sería interesante abordar para efectos de diseñar una unidad didáctica? Es evidente que no podrán abordar todos los que ustedes han puesto en su trabajo. Tendrán que escoger y al escoger se verán obligadas a considerar en detalle esa parcela específica del tópico, como lo describo más adelante.

Valdría la pena consultar con Luis para ver si él puede sugerir alguna literatura específica sobre el tema de errores y dificultades en su tópico. Desafortunadamente yo no la conozco. Tengan en cuenta que una buena parte de los errores que ustedes identifican tienen que con procedimientos. Algunos de ellos son procedimientos del tipo transformación sintáctica en un sistema de representación y otros (que ustedes no mencionan) tienen que ver con traducciones entre sistemas de representación. Ustedes identifican varios relacionados con la identificación de expresiones dentro de un sistema de representación.

La identificación de los errores y las dificultades en el tópico es un paso central en el análisis didáctico porque, en la mayoría de los casos, define con bastante especificidad el *problema* que se desea resolver con el diseño y puesta en práctica de la unidad didáctica. En otras palabras, cuando ustedes decidan cuáles son los errores y las dificultades que van a abordar, tendrán, por un lado, una parte de la descripción del estado cognitivo de los alumnos y, por el otro, la base con la cual determinar los objetivos de la unidad didáctica. Con esta información y habiendo determinado el nivel al que se va a trabajar, podrán tomar decisiones con respecto al contenido (en el sentido de concretarlo), para efectos de realizar una nueva versión del análisis de contenido. Esta nueva versión del análisis de contenido deberá hacerse *de manera detallada* para la parcela del tópico que corresponde a los objetivos y al estado cognitivo de los alumnos, de tal forma que, dentro de la nueva estructura conceptual, sea posible ubicar con claridad los errores y las dificultades. En principio, si esto se logra, el análisis de instrucción que comenzamos a hacer esta semana (materiales y recursos y resolución de problemas) tendrá significado para efectos del diseño de la unidad didáctica: al tener claridad con respecto al análisis de contenido y al análisis cognitivo, al investigar sobre los materiales y recursos disponibles y al manejar las nociones relacionadas con la resolución de problemas, ustedes deberán ser capaces de identificar diversos tipos de actividades de enseñanza que tengan sentido para los objetivos que se hayan impuesto y deberán poder justificar las razones por las cuales estas actividades pueden llegar a permitir la evolución de las estructuras cognitivas de los alumnos.

En consecuencia, los pasos a desarrollar en este momento consisten en:

- 1) Decidir cuáles son los errores y las dificultades que ustedes van a abordar. No pueden abordar todos los que presentaron en la transparencia. Tendrán que decidir un conjunto de errores y dificultades que sea posible abordar en un número reducido (3 a 6) de sesiones de clase.
- 2) Separar errores y dificultades. Es decir, intentar identificar las características de las estructuras cognitivas de los alumnos (dificultades) que generan ciertos tipos de actuaciones (errores).

3) Determinar con tanta especificidad como sea posible la parcela de su t3pico que van abordar en la unidad did3ctica. Debe ser claro en este momento que, si han tomado decisiones con respecto a los errores y las dificultades, no podr3n abordar la totalidad del t3pico.

4) Producir una *nueva* estructura conceptual detallada para esta parcela del t3pico. Esta estructura conceptual tendr3 que ser tan detallada como para que sea posible ubicar en ella los *conceptos* y los *procedimientos* que intervienen en los errores en los que incurren los alumnos. No bastar3 con identificar conceptos y relacionarlos. Ser3 necesario entrar en el detalle de describir procedimientos, tanto de transformaciones sint3cticas dentro de un sistema de representaci3n, como de traducciones entre sistemas de representaci3n.

5) Hacer un nuevo an3lisis fenomenol3gico, esta vez para la parcela del t3pico que se haya escogido y relacionar este an3lisis fenomenol3gico con la estructura conceptual del punto 4).

Transparencias de presentación de actividad del grupo de progresiones aritméticas y geométricas

Tengo la sensación de que ustedes interpretaron la tarea de una manera particular, dado que no presentaron una estructura conceptual detallada para la dificultad propuesta y que tampoco presentaron una actividad que buscara abordar la dificultad y los errores correspondientes.

Con respecto a lo que presentaron tengo tres comentarios. Primero, me resulta difícil interpretar como dificultad lo que ustedes proponen. ¿Qué tipo de conocimiento está detrás de la dificultad? Segundo, aparentemente la dificultad es muy general y eso implica que de ella se deduzcan gran cantidad de errores, lo que hace difícil su análisis y la posibilidad de diseñar actividades que los aborden. Tercero, como lo mencioné en la discusión en clase, hay propuestas que ustedes hacen como errores y que, en realidad, no son errores.

Finalmente, es posible que la dificultad identificada sea demasiado compleja para el nivel de alumnos a los que se refiere.

Tercera versión de la estructura conceptual para el tema de **números decimales**

La estrategia de “meterlo todo” ha permitido construir una estructura conceptual que, al estar organizada por sistemas de representación, permite comprender mejor el tema y es una mejora clara con relación al documento anterior.

En el sistema de representación simbólico, ustedes han introducido, en la categoría de notación, una situación muy interesante desde la perspectiva de la estructura conceptual y de los sistemas de representación. Esas “forma” de escribir el número decimal son, de cierta manera, también sistemas de representación con su propia notación y sus propias reglas para crear y manipular expresiones. ¿Cómo se pueden describir esas reglas de creación y transformación de expresiones dentro de cada una de esas formas simbólicas? ¿Qué relación hay entre esas formas? Tengan en cuenta que en el apartado de gráfico, ustedes incluyen otra forma simbólica (el porcentaje) que no se encuentra dentro del apartado de notación y que debería estar.

El álgebra y la clasificación de los números decimales son *propiedades* de los números decimales. Por lo tanto, debería ser posible expresar algunas de esas propiedades en cada una de las formas simbólicas y en los otros sistemas de representación. ¿Qué formas simbólicas y qué sistemas de representación son más apropiados para representar qué propiedades? Por ejemplo, la propiedad de orden de los números se puede representar con mucha claridad en la recta real, pero la suma de números decimales es más fácil si la hacemos en porcentajes, mientras que, en algunos casos, tiene mucho más sentido hacer el producto dentro de la forma simbólica de fraccionarios.

Habría que ver qué tanto el ábaco es un sistema de representación, un fenómeno o un modelo. Éste es un ejemplo muy interesante para la discusión que tendremos en los organizadores de análisis fenomenológico y modelización. Creo que representaciones como $1/2$, mitad y 50% no pertenecen al sistema de representación gráfico. ¿Qué otros sistemas de representación gráficos se pueden presentar? ¿Cuáles son sus elementos constitutivos (en el caso de la recta real, está la recta, las marcas en la recta y la propiedad de orden de los números reales)?

La fenomenología habrá que mejorarla, ahora que comenzamos ese organizador. En particular, para identificar fenómenos que sean *exclusivos* de los números decimales.

Hace falta establecer las conexiones puntuales entre elementos de los sistemas de representación.

Cuarta versión de la estructura conceptual y primera versión del análisis fenomenológico para números decimales

El tema que ustedes tienen entre manos es un poco más complejo de lo que parece a primera vista. Creo que ustedes se han ido dando cuenta de esto. Creo que es necesario encontrar maneras de simplificarlo para poderlo abordar en profundidad. Una estrategia para ello consiste en reflexionar sobre el problema de la enseñanza del tema. Es decir, sería bueno que ustedes decidieran para qué nivel piensan diseñar su unidad didáctica y que, de ahora en adelante, dejaran a un lado las reflexiones de las matemáticas universitarias para entrar en el detalle de las matemáticas escolares. Desde esta perspectiva, ¿qué es lo que debería aparecer en la estructura conceptual como descripción de la estructura matemática en cuestión? En otras palabras, ¿cómo hacer para que la estructura conceptual describa lo que ustedes consideran que es lo que los alumnos del nivel correspondiente deben saber sobre los números decimales?

Antes de continuar con la reflexión sobre los números decimales en las matemáticas escolares, quiero hacer otra reflexión conceptual sobre los números decimales. Ustedes se habrán dado cuenta de que cuando se piensa en los números decimales, se termina pensando en los números reales. Desde la perspectiva matemática, los números decimales no son una subestructura matemática de los números reales; son una representación de los números reales. En otras palabras, si alguien estuviera trabajando los números reales, esa persona presentaría a los números decimales como uno de los sistemas de representación de los números reales. Por consiguiente, su tópico no es una estructura matemática *per se* sino un sistema de representación de una estructura matemática. ¿Se pierde entonces la potencia de herramientas como la estructura conceptual y los sistemas de representación para el análisis didáctico de los números decimales? Yo creo que no, porque el problema que se tiene entre manos se debe mirar desde la perspectiva didáctica y teniendo en cuenta las matemáticas escolares.

Desde la perspectiva de las matemáticas escolares, los números decimales aparecen como si fueran una estructura matemática en sí mismos. Yo creo que lo interesante del manejo didáctico de los números decimales es lograr establecer con claridad la relación entre este sistema de representación y los otros sistemas de representación de los números reales. Ustedes mencionan algunos de ellos cuando identifican, por ejemplo, los porcentajes y los fraccionarios (en la representación gráfica). Entonces, la cuestión es lograr mirar a los números decimales como un sistema de representación y lograr establecer las relaciones de ese sistema de representación con los otros sistemas de representación de los números reales dentro de las matemáticas escolares.

Si miramos el problema como se sugiere arriba, entonces podemos entrar en algunos detalles que pueden responder a la pregunta “para el nivel que nos interesa, ¿qué deberían terminar sabiendo los alumnos sobre los números decimales?”. Porque esa pregunta se traduce en “¿qué deberían saber los alumnos sobre la *estructura* de los números reales dentro del sistema de representación de los números decimales y cómo se debe relacionar esto con lo que ellos saben o deben saber sobre los números reales en otros sistemas de representación?” Entonces, podemos pasar de hacer una clasificación general de los números reales y de describir de manera superficial el “álgebra” de esos números a entrar en detalles sobre la estructura: ¿cuáles son las operaciones? ¿qué características asumen esas operaciones cuando se trabaja en los números decimales? ¿qué características, propiedades, relaciones de los números reales pueden ser trabajadas de manera eficiente dentro de los números decimales?

Considero que la doble transparencia para mostrar las conexiones fue una estrategia muy innovadora y eficiente. Es una pena que no cuadraran bien.

No terminé de entender bien el análisis fenomenológico que ustedes presentaron. Comprendo que intentaron seguir el ejemplo que se presentó en clase, pero sucede que las ideas de relaciones, acciones y propiedades dentro de los fenómenos adquieren sentido si esas ideas tienen también unas relaciones, acciones y propiedades correspondientes dentro de la estructura conceptual de la estructura matemática en cuestión.

Es tal vez por esta razón que no alcanzo a ver con claridad la relación fenómenos - estructura matemática y la manera como se logra organizar los fenómenos. Espero que la idea que sugiero arriba de que ustedes están trabajando con un sistema de representación de los números reales pueda ayudar para profundizar en el análisis fenomenológico. Si uno se pregunta por los fenómenos que son organizados por los números reales, uno termina haciéndose preguntas como las que sugirió Luis en clase. El problema es que ese análisis sería el análisis fenomenológico de los números reales. La pregunta entonces tendría que ver con identificar aquellas familias de fenómenos que son organizados por ese sistema de representación particular que son los números decimales. ¿Cuáles son las características particulares de los números decimales que permiten organizar de manera eficiente qué fenómenos? ¿Cómo nos permiten esas características organizar esos fenómenos en familias que se pueden distinguir?

Segunda versión del análisis fenomenológico para números decimales

Dado que el cambio en el análisis fenomenológico desde la última versión tiene que ver principalmente con la introducción de las subestructuras correspondientes a los números algebraicos y no algebraicos, pero que esta modificación no afecta las relaciones entre esas subestructuras y los fenómenos, no tengo comentarios importantes para hacer. Espero que la documentación que les entregué les pueda ser de utilidad, junto con los comentarios que hice en el documento anterior.

Transparencia presentación sobre errores y dificultades del grupo de números decimales

Ustedes han tenido la suerte de tener documentación apropiada para resolver parcialmente el problema de la identificación de los errores y las dificultades en su tópico.

La identificación de los errores y las dificultades en el tópico es un paso central en el análisis didáctico porque, en la mayoría de los casos, define con bastante especificidad el *problema* que se desea resolver con el diseño y puesta en práctica de la unidad didáctica. En otras palabras, cuando ustedes decidan cuáles son los errores y las dificultades que van a abordar, tendrán, por un lado, una parte de la descripción del estado cognitivo de los alumnos y, por el otro, la base con la cual determinar los objetivos de la unidad didáctica. Con esta información y habiendo determinado el nivel al que se va a trabajar, podrán tomar decisiones con respecto al contenido (en el sentido de concretarlo), para efectos de realizar una nueva versión del análisis de contenido. Esta nueva versión del análisis de contenido deberá hacerse *de manera detallada* para la parcela del tópico que corresponde a los objetivos y al estado cognitivo de los alumnos, de tal forma que, dentro de la nueva estructura conceptual, sea posible ubicar con claridad los errores y las dificultades. En principio, si esto se logra, el análisis de instrucción que comenzamos a hacer esta semana (materiales y recursos y resolución de problemas) tendrá significado para efectos del diseño de la unidad didáctica: al tener claridad con respecto al análisis de contenido y al análisis cognitivo, al investigar sobre los materiales y recursos disponibles y al manejar las nociones relacionadas con la resolución de problemas, ustedes deberán ser capaces de identificar diversos tipos de actividades de enseñanza que tengan sentido para los objetivos que se hayan impuesto y deberán poder justificar las razones por las cuales estas actividades pueden llegar a permitir la evolución de las estructuras cognitivas de los alumnos.

En consecuencia, los pasos a desarrollar en este momento consisten en:

- 1) Decidir cuáles son los errores y las dificultades que ustedes van a abordar. No pueden abordar todos los que presentaron en la transparencia. Tendrán que decidir un conjunto de errores y dificultades que sea posible abordar en un número reducido (3 a 6) de sesiones de clase.
- 2) Separar errores y dificultades. Es decir, intentar identificar las características de las estructuras cognitivas de los alumnos (dificultades) que generan ciertos tipos de actuaciones (errores).
- 3) Determinar con tanta especificidad como sea posible la parcela de su tópico que van a abordar en la unidad didáctica. Debe ser claro en este momento que, si han tomado decisiones con respecto a los errores y las dificultades, no podrán abordar la totalidad del tópico.
- 4) Producir una *nueva* estructura conceptual detallada para esta parcela del tópico. Esta estructura conceptual tendrá que ser tan detallada como para que sea posible ubicar en ella los *conceptos* y los *procedimientos* que intervienen en los errores en los que incurren los alumnos. No bastará con identificar conceptos y relacionarlos. Será necesario entrar en el detalle de describir procedimientos, tanto de transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación, como de traducciones entre sistemas de representación.
- 5) Hacer un nuevo análisis fenomenológico, esta vez para la parcela del tópico que se haya escogido y relacionar este análisis fenomenológico con la estructura conceptual del punto 4).

Transparencias de presentación de actividad del grupo de números decimales

El trabajo que ustedes presentaron tiene la cualidad de formular apropiadamente una dificultad, identificar unos errores que corresponden coherentemente a esa dificultad, y proponer una actividad que aborda algunos de esos errores y pone en juego el conocimiento involucrado en la dificultad con el propósito de generar un conflicto entre lo que el alumno espera encontrar y lo que realmente obtiene.

Sin embargo, en la discusión en clase fue claro que la dificultad propuesta es demasiado general. Esto trae como consecuencia el hecho de que hay diversos *tipos* de errores que se pueden producir como consecuencia de la dificultad y que no es evidente, a partir de lo presentado, cuáles son esos tipos de errores y cuáles son las características del conocimiento matemático que se encuentra involucrado en ellos.

Estos problemas se habrían podido resolver si ustedes hubiesen propuesto una estructura conceptual detallada de la parcela del tópico que tiene que ver con la dificultad. En esa estructura conceptual debería ser posible apreciar que la dificultad tienen que ver con diferentes aspectos de la estructura conceptual y de esa manera sería posible, identificar los tipos de errores que se producen y, por el otro, concretar la dificultad general a una más específica que pudiera ser más manejable. Adicionalmente, la explicitación de esa estructura conceptual detallada podría dar ideas de maneras con las cuales se puede abordar la dificultad al poner en juego diferentes sistemas de representación, de tipos de fenómenos que involucran esa estructura matemática particular y de proceso de modelización de fenómenos que la pongan en juego.

Tercera versión de la estructura conceptual para el tema de **probabilidad**

La globalidad del tema hace que su descripción teniendo a los sistemas de representación como eje organizador sea un poco más difícil. Ustedes se han encontrado con esa dificultad. Como consecuencia de ella, se percibe una cierta confusión con el significado de la noción de sistema de representación (que espero se aclare pronto en clase). Esta confusión se expresa en la utilización del término “representación real” para fenómenos que involucran conceptos y procedimientos de probabilidad, pero que no son en sí mismos esos conceptos o procedimientos. Esta situación tiene que ver entonces con el significado que le demos a la fenomenología (que *no* es un sistema de representación matemático) y al lugar de la fenomenología dentro de la estructura conceptual.

Por otro lado, también aparece una situación que se podría reflexionar con un poco más de detalle. ¿Tiene sentido que llamemos a la representación numérica y la representación simbólica representaciones gráficas, como se deduce del esquema? ¿Qué es realmente el sistema de representación gráfico para este tema? ¿Cómo se relacionan los elementos y las propiedades de esos elementos dentro del sistema de representación gráfico con los elementos y las propiedades de los sistema de representación numérico y simbólico?

Ustedes han resaltado de manera bastante estructurada un par de aspectos que no han aparecido tan claramente en otros casos: los conceptos y lo que llaman “herramientas”. Pero, esos conceptos tendrán que describirse en algún sistema de representación. ¿Cómo se definen esos conceptos, qué notación se utiliza para definirlos y qué relación tienen esas definiciones con su expresión como parte del sistema de representación simbólico, gráfico y numérico? ¿Podemos expresar el teorema de Bayes en el sistema de representación simbólico? ¿Qué relación tiene esa expresión con lo que ustedes llaman fórmulas dentro de la representación simbólica?

El sistema de representación “virtual” que ustedes proponen también es innovador, pero no es claro si el ordenador es un medio o un sistema de representación. Por ejemplo, si escribo una fórmula en el ordenador, ¿esa fórmula está en el sistema de representación simbólico o en el virtual? ¿Hay elementos propios de esa representación virtual que no estén en otro sistema de representación?

Ustedes enumeran tanto en definiciones, como en numérico una serie de conceptos que pertenecen al área de la probabilidad. Hay que tomar decisiones sobre cuáles conceptos les parecen interesantes y tratar de profundizar en construir una estructura conceptual para esos conceptos basada en los sistemas de representación. En el momento en que trabajen con conceptos específicos es muy posible que se resuelva una parte de las dificultades.

En la presentación ustedes hicieron patente un problema importante: tenemos que saber para quién y para qué estamos haciendo estos ejercicios. Creo que hay que pensar que estos ejercicios nos deben servir para diseñar la unidad didáctica y que, para hacerlo, debemos hacer explícitos todos los elementos y las propiedades que conforman la estructura matemática sobre la que se va a trabajar.

Cuarta versión de la estructura conceptual y primera versión del análisis fenomenológico del grupo de **probabilidad**

Creo que al haber reducido la estructura matemática de estudio solamente a la introducción de la probabilidad, el problema que ustedes tienen entre manos es más manejable. Sin embargo, dado que ésta es entonces la primera estructura conceptual que ustedes presentan para este tema, hay una buena cantidad de cosas que se pueden trabajar para mejorarla de tal manera que sirva de base para los demás análisis. Algunos de los comentarios para mejorar la estructura conceptual son los siguientes:

1) Hay que comenzar, ahora sí, a preocuparse por la manera como la estructura conceptual (y los demás organizadores del currículo) pueden ayudarnos a diseñar una unidad didáctica. Por lo tanto, hay que tomar algunas decisiones. La primera es que hay que pasar de la reflexión desde la perspectiva de las matemáticas universitarias a la reflexión de las matemáticas escolares. Simultáneamente hay que decidir para qué nivel de secundaria o bachillerato ustedes piensan diseñar la unidad didáctica. Estas decisiones les debe permitir responder a preguntas como ¿qué es lo que debería aparecer en la estructura conceptual como descripción de la estructura matemática en cuestión? En otras palabras, ¿cómo hacer para que la estructura conceptual describa lo que ustedes consideran que es lo que los alumnos del nivel correspondiente deben saber en una introducción a la probabilidad?

2) Estas preguntas requieren que se entre en mucho más detalle en la estructura conceptual de tal forma que ella contenga todos los hechos, conceptos, procedimientos y estrategias que ustedes consideren que deben hacer parte de la enseñanza y el aprendizaje del tema.

3) Relaciono lo anterior con un aspecto de las estructuras conceptuales que ustedes han venido presentando y que se expresa de manera muy clara en esta última, cuando ustedes ponen por un lado el concepto y por el otro las representaciones. Las definiciones, las herramientas, el álgebra de sucesos, los resultados relevantes, ¿se pueden describir *por fuera* de los sistemas de representación? Si se describen de esa manera, como ustedes lo sugieren, ¿cómo se hace? En principio, no es posible comunicar sin utilizar algún sistema de representación. La potencia de las ideas de estructura conceptual y de sistemas de representación radica en que permiten ver las diferentes maneras en las que conceptos, definiciones, procedimientos (o herramientas) y resultados se pueden describir desde diferentes perspectivas y la forma en que estas descripciones se relacionan entre sí. Por consiguiente, considero importante que esta información esencial sobre la estructura matemática, que ustedes denominan “concepto”, pueda describirse dentro de los sistemas de representación buscando, por un lado, hacerlo con tanto detalle como sea posible y, por el otro, intentando establecer las relaciones (conexiones puntuales) que ustedes consideren más relevantes desde el punto de vista didáctico.

4) Otro aspecto de las estructuras conceptuales que ustedes han presentado y que me ha sorprendido es la utilización del término “representación gráfica” en el sentido en el que venimos utilizando el término “sistemas de representación” y la utilización del término “dibujos” con el significado que nosotros venimos dándole al término “sistema de representación gráfico”. Creo que es importante que, como grupo, busquemos un acuerdo general sobre la utilización de los diferentes términos para que no haya lugar a confusiones por esta razón.

5) Ustedes continúan incluyendo la fenomenología dentro de la estructura conceptual. Ésta es, para mí, una discusión de carácter puramente formal. La estructura conceptual no describe en su totalidad todo lo que se refiere al concepto en cuestión. La idea es que la estructura conceptual describe los aspectos matemáticos de la estructura matemática. La fenomenología no entra dentro de esos aspectos matemáticos, pero sí entra dentro de la descripción global de aquello que, desde el punto de vista didáctico, debe estar relacionado con el concepto. Por lo tanto, no hay ningún problema en incluir la fenomenología dentro de la gráfica, pero hay que hacer la aclaración que la estructura conceptual es aquella parte de la gráfica que se refiere a los aspectos matemáticos de la estructura matemática y que, por lo tanto, la fenomenología no está allí.

6) Lo simbólico incluye sin lugar a dudas la notación. Pero la notación no abarca todo lo simbólico. La notación nos dice cuáles son las reglas para crear expresiones, pero no nos dice cuáles son las expresiones que son relevantes para la estructura matemática. En lo simbólico se pueden describir buena parte de las definiciones, herramientas y resultados que ustedes mencionan en la categoría de concepto. ¿Qué aspectos de la estructura matemática se representan de manera más eficiente en lo simbólico? ¿Qué otros aspectos se representan mejor en otros sistemas de representación? ¿Cómo se relacionan esas descripciones entre sí? Creo que hay que entrar en el detalle de estas descripciones para poder descubrir estos elementos y estas relaciones.

7) Dado que ustedes han decidido restringirse a la introducción a la probabilidad y dado que nos vamos a interesar por las matemáticas escolares para un nivel particular, creo que se pueden eliminar de la descripción aquellos aspectos de la fenomenología que o no corresponden al tópico específico o que no tienen mucho sentido para el nivel escolar que nos interesa.

8) El análisis fenomenológico que ustedes presentaron fue realmente muy interesante. Ustedes fueron el único grupo que logró entrar en el detalle de identificar las características estructurales de un fenómeno y relacionarlas con aspectos específicos de una subestructura de la estructura matemática en cuestión. Quedan ahora otras preguntas por resolver para el análisis fenomenológico. Entre ellas las siguientes: a) ¿son los juegos de azar los únicos fenómenos que tienen la estructura que ustedes proponen? ¿qué otros fenómenos pueden entrar en esa categoría?; b) ¿la estructura propuesta es la única estructura de la probabilidad que permite organizar fenómenos en los que está involucrado el azar? En otras palabras, ¿no habrá otras familias de fenómenos que se organicen con la probabilidad y que no entren en la categoría que ustedes han identificado?

Quinta versión de la estructura conceptual y segunda versión del análisis fenomenológico del grupo de **probabilidad**

En mi documento anterior hice ya una serie de comentarios a la organización de la estructura conceptual especialmente con respecto a la separación de la categoría “concepto” de los sistemas de representación y a la utilización de los términos “representación gráfica” y “dibujos”.

Mis comentarios tienen que ver ahora con el desarrollo que ustedes han hecho de los apartados “definiciones” y “propiedades”. Este desarrollo muestra que, de nuevo, el tópico que ustedes están abordando es muy amplio y que, si se hiciera el ejercicio de desarrollar la estructura conceptual que corresponde a las propiedades que ustedes enumeran allí, esta descripción sería extremadamente compleja. En ese listado hay muchas estructuras matemáticas relacionadas con otras estructuras matemáticas. De nuevo, hay que simplificar, reduciendo el campo de acción. Esta simplificación se logrará muy seguramente en la medida en que ustedes tomen decisiones con respecto al nivel de secundaria y bachillerato para el que piensan diseñar la unidad didáctica.

Las propiedades y las definiciones que ustedes están enumerando se encuentran representadas en el sistema de representación simbólico. ¿Es posible representarlas en los otros sistemas de representación? ¿Cuáles se pueden representar? ¿Cómo se establecen las conexiones entre las diferentes representaciones? Por otro lado, es evidente que las propiedades mismas están relacionadas unas con otras. ¿Cuáles son esas relaciones (conexiones puntuales internas)?

El análisis fenomenológico que ustedes han propuesto me sigue gustando mucho. Hay que ver si se puede mejorar con los comentarios que ya les hice en el documento anterior y en clase, con motivo de la presentación.

La teoría del caos desapareció, pero la estadística sigue apareciendo. ¿Es eso un fenómeno o familia de fenómenos? ¿Cómo se relaciona con la estructura matemática que corresponde a la iniciación de la probabilidad? Yo creo que la estadística (como se conoce académicamente) también debería salir de la fenomenología.

Transparencia presentación sobre errores y dificultades del grupo de probabilidad

Es claro que la utilización de los esquemas de Radatz y de Movshovitz-Hadar et al. les ha permitido producir una gran cantidad de ideas sobre errores y dificultades en su tópico. Sin embargo, buena parte de estas ideas continúan siendo muy generales. Es decir, afirmaciones como “Prejuicios”, “confusiones en el uso de teoremas”, “álgebra de sucesos” no dan suficiente información para efectos didácticos. Este problema de la generalidad de los errores está muy seguramente ligado con el problema de la necesidad de concretar tanto como sea posible el tópico que se va a tratar en la unidad didáctica. Por lo tanto, es necesario volver a reflexionar sobre el problema de los errores y las dificultades, tratando de concretar el problema. Este proceso de concretar el problema será dinámico: la identificación de errores y dificultades restringe el contenido y por tanto la estructura conceptual que hay que desarrollar en detalle; y el desarrollo detallado en la estructura conceptual de una parcela específica del tópico debe permitir identificar errores y dificultades para esa parcela.

Ustedes titulan su documento “Errores” y no es claro si también pretendían hablar de dificultades. De hecho, algunas de las afirmaciones que ustedes proponen parecen ser errores y otras parecen ser dificultades. Habría que hacer más claridad en el significado que le damos a la noción de dificultad. Ésta se refiere a una caracterización de las estructuras cognitivas del alumno que nos permite explicar los errores en los que él incurre. De cierta manera, la identificación de las dificultades es lo que nos permite responder a la pregunta “¿por qué incurrió en este error? En el documento y en la presentación hay frases como “confundir combinaciones y variaciones” que es posible identificar como dificultades, pero solamente una vez que se explique qué se quiere decir con esa frase.

Muchas de las dificultades de los errores y las dificultades en el tema de probabilidad tienen que ver con los *procedimientos* que se utilizan para realizar una tarea. La descripción detallada de la estructura conceptual de la parcela específica del tópico que ustedes van a tratar debería ser tal que sea posible describir esos procedimientos.

Desafortunadamente no conozco en detalle la literatura sobre probabilidad. Creo que habría que buscarla porque en este tema se ha trabajado desde múltiples perspectivas, incluida la de errores y dificultades. De pronto, las dos referencias siguientes les puedan servir:

Batanero, M. C., Díaz, J., y Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Díaz, J., Batanero, M.d.C., y Cañizares, M.J. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.

La identificación de los errores y las dificultades en el tópico es un paso central en el análisis didáctico porque, en la mayoría de los casos, define con bastante especificidad el *problema* que se desea resolver con el diseño y puesta en práctica de la unidad didáctica. En otras palabras, cuando ustedes decidan cuáles son los errores y las dificultades que van a abordar, tendrán, por un lado, una parte de la descripción del estado cognitivo de los alumnos y, por el otro, la base con la cual determinar los objetivos de la unidad didáctica. Con esta información y habiendo determinado el nivel al que se va a trabajar, podrán tomar decisiones con respecto al contenido (en el sentido de concretarlo), para efectos de realizar una nueva versión del análisis de contenido. Esta nueva versión del análisis de contenido deberá hacerse *de manera detallada* para la parcela del tópico que corresponde a los objetivos y al estado cognitivo de los alumnos, de tal forma que, dentro de la nueva estructura conceptual, sea posible ubicar con claridad los errores y las dificultades. En principio, si esto se logra, el análisis de instrucción que comenzamos a hacer esta semana (materiales y recursos y resolución de problemas) tendrá significado para efectos del diseño de la unidad didáctica: al tener claridad con respecto al análisis de contenido y al análisis cognitivo, al investigar sobre los materiales y recursos disponibles y al manejar las nociones relacionadas con la resolución de problemas, ustedes deberán ser capaces de identificar diversos tipos de actividades de enseñanza que tengan sentido para los objetivos que se hayan impuesto y deberán poder justificar las razones por las cuales estas actividades pueden llegar a permitir la evolución de las

estructuras cognitivas de los alumnos.

En consecuencia, los pasos a desarrollar en este momento consisten en:

- 1) Decidir cuáles son los errores y las dificultades que ustedes van a abordar. No pueden abordar todos los que presentaron en la transparencia. Tendrán que decidir un conjunto de errores y dificultades que sea posible abordar en un número reducido (3 a 6) de sesiones de clase.
- 2) Separar errores y dificultades. Es decir, intentar identificar las características de las estructuras cognitivas de los alumnos (dificultades) que generan ciertos tipos de actuaciones (errores).
- 3) Determinar con tanta especificidad como sea posible la parcela de su tópico que van abordar en la unidad didáctica. Debe ser claro en este momento que, si han tomado decisiones con respecto a los errores y las dificultades, no podrán abordar la totalidad del tópico.
- 4) Producir una *nueva* estructura conceptual detallada para esta parcela del tópico. Esta estructura conceptual tendrá que ser tan detallada como para que sea posible ubicar en ella los *conceptos* y los *procedimientos* que intervienen en los errores en los que incurren los alumnos. No bastará con identificar conceptos y relacionarlos. Será necesario entrar en el detalle de describir procedimientos, tanto de transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación, como de traducciones entre sistemas de representación.
- 5) Hacer un nuevo análisis fenomenológico, esta vez para la parcela del tópico que se haya escogido y relacionar este análisis fenomenológico con la estructura conceptual del punto 4).

Transparencias de presentación de actividad del grupo de probabilidad

Celebro que hayan concretado el tópico sobre el que van a trabajar. En la presentación que hicieron hizo mucha falta la estructura conceptual general de ese tópico y la estructura conceptual detallada de los aspectos del tópico que pretendían abordar con la dificultad y los errores propuestos. Al no tener una estructura conceptual detallada de referencia, se hace difícil formular con claridad la dificultad y establecer las características del conocimiento matemático que se pone en juego cuando se incurre en los errores.

Por otro lado, en la transparencia no se hace explícita la dificultad que ustedes pretenden abordar. En realidad, ustedes interpretaron la tarea de otra manera y lo que hicieron fue diseñar una actividad y prever ciertos errores en los que los alumnos podían incurrir al realizarla. Esto es diferente de identificar una dificultad, proponer unos errores que sean producto de esa dificultad y diseñar unas actividades que pretendan abordar esa dificultad y esos errores.

Al no haber una estructura conceptual detallada del tópico que se está tratando, no fue posible analizar el juego de fenomenología y modelización que está involucrado en la actividad que proponen. La actividad que ustedes proponen involucra un fenómeno y la realización de esa actividad requiere de un proceso de modelización junto con el manejo apropiado de las normas que regulan unos sistemas de representación gráficos. Esto podría describirse en una estructura conceptual y permitiría analizar en detalle todo el proceso.

Tercera versión de la estructura conceptual para el tema de cónicas

Al organizar el tema en las cuatro cónicas por separado e identificar, para cada una de ellas, las seis categorías que proponen, se ha logrado un comienzo de estructura que insinúa dos cosas: por un lado, lo que hay de común entre cada una de las cuatro cónicas; y, por el otro, algunas de las relaciones que se establecen entre los sistemas de representación para cada cónica. En este sentido, esta organización presenta un avance importante con respecto a la propuesta anterior.

Me ha gustado mucho que aparezcan de manera tan clara tres sistemas de representación geométricos: en dos dimensiones, como lugar geométrico de puntos que cumplen ciertas condiciones, en el espacio como corte de un plano con el cono, y en el plano cartesiano. Pero, ¿cómo se relacionan estas tres representaciones, dado que representan la misma cosa? ¿Cuáles son los elementos específicos que constituyen cada una de las representaciones y cuáles son las conexiones puntuales entre esos elementos?

En particular, qué tipo de conexiones puntuales se pueden establecer entre los parámetros de la representación simbólica (4) y los elementos de la representación en plano cartesiano?

La manera como han expresado la representación simbólica (4) difiere de unas cónicas a otras. Por ejemplo, en el caso de la circunferencia aparecen todos los parámetros posibles (incluyendo las traslaciones verticales y horizontales), mientras que ese no es el caso para la parábola (en la que no se incluyen las traslaciones horizontales). ¿Hay una o más formas simbólicas generales para las expresiones simbólicas que permitan identificar, desde el punto de vista simbólico, lo que es común a todas las cónicas? Dentro de cualquiera de las cónicas, ¿hay más de una forma simbólica posible?

De manera general, ¿cómo se puede identificar lo que es común a las cónicas y cómo se puede identificar aquello que las diferencia?

La representación 6 que ustedes llamaron en la presentación “aplicaciones a la vida diaria” y que se puede considerar como un ejemplo de un fenómeno modelizado por la estructura matemática en cuestión no es un sistema de representación.

No entiendo bien la representación (5) como solución de una ecuación que involucra una función de dos variables. Habría que detallar un poco más esta representación para ver si hace sentido o, si no es más que otra expresión de la representación 4.

Cuarta versión de la estructura conceptual y primera versión del análisis fenomenológico del grupo de **cónicas**

Ustedes han presentado una estructura conceptual muy bien lograda. La integración de las cuatro cónicas a través del corte del plano con el cono y a través de la noción de lugar geométrico permite comprender con mucha claridad estas familias de curvas. De la misma manera, ustedes han logrado establecer con claridad, para cada cónica, los principales elementos que constituyen la estructura matemática y las relaciones entre ellos. Esto también está muy claro, y la presentación gráfica que han producido está muy bien lograda.

El problema ahora consiste en saber aprovechar el trabajo que han hecho para tomar decisiones con respecto al diseño de la unidad didáctica. En este sentido, se hace necesario decidir para qué nivel de secundaria o bachillerato ustedes van a diseñar la unidad didáctica y analizar la estructura conceptual para determinar qué es lo que ustedes esperan que los alumnos terminen sabiendo sobre el tema y si los elementos que ustedes presentan allí contienen todo ese conocimiento.

En el apartado de análisis fenomenológico se puede hacer más trabajo con el propósito de entrar más en detalle en la identificación de familias de fenómenos, en la clasificación de esas familias de acuerdo a la estructura matemática que los organiza y en la identificación de las características estructurales de los fenómenos y su relación con aspectos específicos de las subestructuras matemáticas correspondientes, al estilo de lo que presentó el grupo de probabilidad.

Ustedes ya tienen una posible clasificación de fenómenos de acuerdo a las cuatro subestructuras matemáticas en las que se dividen las cónicas. ¿Cómo se caracterizan los fenómenos que son organizados por cada una de estas subestructuras matemáticas? ¿Cuáles son las características estructurales de esos fenómenos y cómo se relacionan con los elementos que ustedes han identificado en cada caso? ¿Es posible identificar relaciones entre esas familias de fenómenos de la misma manera que ustedes han identificado relaciones entre las subestructuras matemáticas?

Segunda versión del análisis fenomenológico del grupo de cónicas

La propuesta en el documento “Relación fenómenos - subapartados de la estructura conceptual” es interesante. Ustedes logran mostrar que diferentes subestructuras matemáticas de la estructura matemática de cónicas organizan y clasifican diferentes familias de fenómenos, tanto matemáticos, como no matemáticos. De hecho, están proponiendo los cortes del plano con el cono como una familia de fenómenos matemáticos que se modelizan con las cónicas. Es una posible manera de verlo.

Desafortunadamente el esfuerzo que ustedes hicieron para identificar una familia de fenómenos en los que se pudiera hacer la explícita la conexión entre características estructurales del fenómeno y propiedades y elementos de una subestructura en el documento “Fenómeno: cálculo de volúmenes” no tiene mucho éxito. En realidad la estructura matemática circunferencia juega un papel complementario en el ejemplo que dan y pareciera que la estructura matemática más importante en ese ejercicio es el proceso de cálculos de áreas y volúmenes por medio de la integración.

Creo que el esfuerzo por definir el nivel para el que se va a diseñar la unidad didáctica puede ayudar a concretar más el tipo de fenómenos que se pueden modelizar de manera específica con las subestructuras matemáticas en cuestión. Se me ocurre una idea, pero no estoy seguro de que funcione. Tiene que ver con los movimientos de cuerpos (planetas, cometas, etcétera). Normalmente pensamos que la elipse es la única cónica que juega un papel en este tipo de fenómenos. Pero, un análisis de la mecánica, nos puede mostrar que todo es cuestión de “condiciones iniciales”. Hay condiciones iniciales que pueden generar hipérbolas (algunos cometas) y condiciones iniciales que podrían generar circunferencias (dado que se puede mirar como un caso particular de la elipse). Lo que no sé es cuáles serían las condiciones iniciales y cuál sería el ejemplo que generaría una parábola. En todo caso, esta idea de condiciones iniciales y de relación con la teoría de la gravitación, puede permitir varias cosas: 1) considerar fenómenos relativamente cercanos a los estudiantes; 2) mantener el análisis integrado (considerando por lo menos tres y de pronto las cuatro cónicas); 3) considerar las características estructurales de los fenómenos (ley de gravitación, condiciones iniciales) y relacionarlas con elementos y propiedades específicas de las subestructuras matemáticas (focos, directriz, etcétera).

Transparencia presentación sobre errores y dificultades del grupo de cónicas

Resulta difícil diferenciar los errores de las dificultades en el trabajo que han hecho. Esta distinción es importante puesto que esta distinción nos permite aproximarnos de manera sistemática al problema del diseño de la unidad didáctica. Habría que hacer más claridad en el significado que le damos a la noción de dificultad. Ésta se refiere a una caracterización de las estructuras cognitivas del alumno que nos permite explicar los errores en los que él incurre. De cierta manera, la identificación de las dificultades es lo que nos permite responder a la pregunta “¿por qué incurrió en este error? En el documento y en la presentación hay frases como “considerar radios negativos” que es posible identificar como dificultades, pero solamente una vez que se explique qué se quiere decir con esa frase.

Ustedes son el único grupo que identificó errores relacionados con la traducción entre sistemas de representación (el último del documento). Esto es interesante. Sin embargo, para mí no es claro que la estructura conceptual que ustedes tienen hasta ahora haya servido para este trabajo de identificación de errores y dificultades. Esto puede ser producto de la *generalidad* de esa estructura conceptual en la que todavía no se identifican *procedimientos* que permitan resolver tareas. Como lo explico más adelante, la identificación de errores y dificultades del tópico debe ser otro motivo para concretar tanto como sea posible el problema que ustedes quieren resolver con la unidad didáctica.

En este sentido, ustedes tienen de nuevo el problema de que no están tratando un tópico sino cuatro. ¿Cómo van a resolver ese problema? Creo que hay dos alternativas. La primera, identificar aspectos del tópico de cónicas que sean comunes a las cuatro cónicas y para los que se puedan identificar errores y dificultades en cada una de ellas. Creo que esta es la alternativa más interesante y en la que ustedes vienen trabajando. La segunda, menos interesante y que habría que discutir con Luis, consiste en restringirse a una de las cónicas (diferente de la parábola) y hacer el trabajo específico en esa cónica.

Por lo tanto, es necesario volver a reflexionar sobre el problema de los errores y las dificultades, tratando de concretar el problema. Este proceso de concretar el problema será dinámico: la identificación de errores y dificultades restringe el contenido y por tanto la estructura conceptual que quiero desarrollar en detalle; y el desarrollo detallado en la estructura conceptual de una parcela específica del tópico debe permitir identificar errores y dificultades para esa parcela.

La identificación de los errores y las dificultades en el tópico es un paso central en el análisis didáctico porque, en la mayoría de los casos, define con bastante especificidad el *problema* que se desea resolver con el diseño y puesta en práctica de la unidad didáctica. En otras palabras, cuando ustedes decidan cuáles son los errores y las dificultades que van a abordar, tendrán, por un lado, una parte de la descripción del estado cognitivo de los alumnos y, por el otro, la base con la cual determinar los objetivos de la unidad didáctica. Con esta información y habiendo determinado el nivel al que se va a trabajar, podrán tomar decisiones con respecto al contenido (en el sentido de concretarlo), para efectos de realizar una nueva versión del análisis de contenido. Esta nueva versión del análisis de contenido deberá hacerse *de manera detallada* para la parcela del tópico que corresponde a los objetivos y al estado cognitivo de los alumnos, de tal forma que, dentro de la nueva estructura conceptual, sea posible ubicar con claridad los errores y las dificultades. En principio, si esto se logra, el análisis de instrucción que comenzamos a hacer esta semana (materiales y recursos y resolución de problemas) tendrá significado para efectos del diseño de la unidad didáctica: al tener claridad con respecto al análisis de contenido y al análisis cognitivo, al investigar sobre los materiales y recursos disponibles y al manejar las nociones relacionadas con la resolución de problemas, ustedes deberán ser capaces de identificar diversos tipos de actividades de enseñanza que tengan sentido para los objetivos que se hayan impuesto y deberán poder justificar las razones por las cuales estas actividades pueden llegar a permitir la evolución de las estructuras cognitivas de los alumnos.

En consecuencia, los pasos a desarrollar en este momento consisten en:

- 1) Decidir cuáles son los errores y las dificultades que ustedes van a abordar. No pueden abordar todos los que presentaron en la transparencia. Tendrán que decidir un conjunto de errores y dificultades que sea posible abordar en un número reducido (3 a 6) de sesiones de clase.
- 2) Separar errores y dificultades. Es decir, intentar identificar las características de las estructuras cognitivas de los alumnos (dificultades) que generan ciertos tipos de actuaciones (errores).
- 3) Determinar con tanta especificidad como sea posible la parcela de su tópico que van abordar en la unidad didáctica. Debe ser claro en este momento que, si han tomado decisiones con respecto a los errores y las dificultades, no podrán abordar la totalidad del tópico.
- 4) Producir una *nueva* estructura conceptual detallada para esta parcela del tópico. Esta estructura conceptual tendrá que ser tan detallada como para que sea posible ubicar en ella los *conceptos* y los *procedimientos* que intervienen en los errores en los que incurren los alumnos. No bastará con identificar conceptos y relacionarlos. Será necesario entrar en el detalle de describir procedimientos, tanto de transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación, como de traducciones entre sistemas de representación.
- 5) Hacer un nuevo análisis fenomenológico, esta vez para la parcela del tópico que se haya escogido y relacionar este análisis fenomenológico con la estructura conceptual del punto 4).

Transparencias de presentación de actividad del grupo de cónicas

Comencemos por el problema de dónde están centradas las cónicas. Aunque Luis considera que la resolución de este problema requiere de tratamientos diferentes dependiendo de a qué cónicas nos refiramos, yo creo que hay procedimientos unificadores que permiten manejarlo de manera más o menos equivalente para las cuatro cónicas. Como no quiero darles la solución directamente, les pongo un problema. Aquí va la expresión simbólica de cuatro cónicas:

$$1) \left(\frac{1}{4}\right)x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{9}\right)y^2 - \left(\frac{4}{9}\right)y = \left(\frac{11}{36}\right)$$

$$2) 9x^2 - 18x - 4y^2 + 16y = 43$$

$$3) 2x^2 - 4x - y = -3$$

$$4) x^2 - 2x + y^2 - 4y = -1$$

a) ¿Cuál es cuál?

b) ¿Dónde está centrada cada una?

c) ¿Qué procedimientos matemáticos hay que aplicar para hallar los centros?

d) ¿Son los procedimientos diferentes dependiendo de la cónica?

e) ¿Cómo puedo usar la idea de traslaciones verticales y horizontales para mostrar que el problema de los centros de las cónicas es equivalente en los cuatro casos?

Espero que este ejercicio les permita ver que el problema de las cónicas se puede tratar de manera unificada, que hay unos procedimientos que tienden a ser los mismos, y que para poder manejar el tema de las cónicas es interesante manejar las ideas de traslación.

El trabajo que ustedes presentaron estaba bastante bien a pesar de los comentarios que se hicieron. Ustedes presentaron una estructura conceptual que estaba claramente relacionada con la dificultad y los errores propuestos. El problema se centró tal vez en el hecho de que la dificultad que ustedes formularon era demasiado general, lo que implicó muchos tipos de errores diferentes y la necesidad de formular varias actividades. Casi que lo que ustedes estaban haciendo era abordar el problema de una unidad didáctica.

La formulación de los errores es coherente con la formulación de la dificultad. Es decir, es claro que los errores se producen como consecuencia de un conocimiento que se describe parcialmente en la formulación de la dificultad.

Donde tal vez hay más problemas es en la formulación de las actividades. Por un lado, al proponer una dificultad tan general, y, por lo tanto, al tener que considerar tantos errores, ustedes se vieron obligadas a diseñar muchas actividades. Esto complicó todo, para un ejercicio que pretendía ser pequeño. Pero, lo que se ve más claramente en las actividades es que ustedes proponen tareas en las que esperan que los alumnos las resuelvan bien, en cambio de buscar que los alumnos ponga en juego el conocimiento que se encuentra detrás de la dificultad y se produzcan los errores que pondrían en evidencia la contradicción entre lo esperado por el alumno y lo obtenido por él al realizar la tarea.

Por otro lado, las actividades involucran de manera clara la relación entre el sistema de representación simbólico y el sistema de representación gráfico. Sin embargo, da la sensación de que ustedes se interesan casi exclusivamente por el proceso de ir del sistema de representación simbólico al gráfico y no se preocupan

por el proceso inverso que puede generar situaciones de conflicto que inciten al alumno a cuestionar su conocimiento.

Tercera versión de la estructura conceptual para el tema de **esfera**

Han hecho un trabajo muy interesante de lograr establecer conexiones puntuales tanto internas como externas a las categorías propuestas. Pocos grupos han logrado ese nivel de detalle en este momento. Sin embargo, la estructura conceptual propuesta *no* se encuentra organizada con base en la noción de sistema de representación (los sistemas de representación fueron presentados como un *listado* en la segunda transparencia sin que se establecieran relaciones entre esas representaciones y lo propuesta en la primera transparencia). La estructura conceptual propuesta se encuentra organizada en categorías diversas que, poniendo a un lado, la de fenómenos, yo clasifico como de elementos y propiedades de la esfera.

Las relaciones entre las propiedades y las representaciones son interesantes e importantes. Por ejemplo, en el caso de la propiedad del área superficial, ¿cuáles es la relación entre el área superficial y las representaciones simbólicas? ¿Dentro de qué representación se puede expresar con mayor claridad la idea de área superficial? ¿Dentro de qué representaciones es posible hallar con mayor facilidad la expresión general de esa propiedad?

El comentario anterior también se puede aplicar a la idea de tratamiento analítico que no alcanzo a comprender completamente. Supongo que ustedes quieren decir con tratamiento analítico la identificación de un cierto de propiedades relacionadas con la representación simbólica.

La pregunta entonces es si tiene sentido (para efectos de la comprensión y descripción del tema) intentar organizar la estructura conceptual desde la perspectiva de los sistemas de representación de tal manera que se puedan incluir todos los elementos y las propiedades que proponen dentro de esas categorías. Yo creo que es posible y creo que haría bastante sentido, pero no lo he hecho y no sé qué tan complejo pueda ser.

¿Cuáles son los sistemas de representación más interesantes e importantes? Por un lado se puede tener una descripción geométrica en el espacio como un conjunto de puntos que satisfacen ciertas condiciones. Esta representación incluiría el tratamiento euclideo del objeto geométrico. Por otro lado, se tiene otra representación geométrica, pero desde el punto de vista analítico (es decir, de geometría analítica) al considera la representación de la esfera en el espacio cartesiano. Esta representación se puede conectar con las representaciones simbólicas (de hecho, la primera expresión simbólica que ustedes proponen en la segunda transparencia es la expresión en el espacio cartesiano).

Hay que anotar que varias de las expresiones simbólicas que ustedes proponen son equivalentes (por ejemplo, la primera, la cuarta y la quinta). ¿Cuáles no son equivalentes y por qué?

Teniendo claros los sistemas de representación que se quieren trabajar, habría entonces que identificar los elementos que son más importantes dentro de cada representación (dense cuenta que el radio r es un elemento de la representación simbólica, también). Por ejemplo, la “cuerda” pertenece de manera más natural a unos sistemas de representación que a otros. Al tener los elementos, podemos también reflexionar con respecto a las propiedades. ¿Cuáles propiedades se expresan de manera más natural en qué sistemas de representación?

Finalmente, y teniendo en cuenta, que todas son representaciones de un mismo objeto, se pueden establecer las conexiones entre elementos y propiedades, tanto dentro de cada sistema de representación como entre sistemas de representación (lo que ustedes ya han hecho para una estructura conceptual organizada desde otra perspectiva).

Cuarta versión de la estructura conceptual y primera versión del análisis fenomenológico del grupo de esfera

Se nota un esfuerzo apreciable por parte de ustedes para lograr organizar la estructura conceptual con base en los sistemas de representación. Y han hecho un avance importante. Tengo, no obstante, algunos comentarios que podrían ayudar a continuar mejorando el trabajo.

La categoría de “propiedades” no es una categoría independiente de los sistemas de representación. De hecho, cada una de esas propiedades se puede representar de manera adecuada y potente en por lo menos un sistema de representación. Por ejemplo, la superficie esférica se representa, con su fórmula, en el sistema de representación simbólico, mientras que las propiedades de los planos y ejes de simetría se aprecian con mayor claridad en la representación geométrica (que ustedes llaman gráfica).

Dada la gran cantidad de sistemas de representación gráficos que se pueden utilizar para esta estructura matemática es conveniente llegar a un acuerdo sobre la utilización de los términos. Creo que a la representación en el espacio de tres dimensiones, cuando no se utiliza ningún eje de coordenadas, deberíamos llamarla “sistema de representación geométrico”, mientras que las representaciones de la esfera en diferentes sistemas de coordenadas deberíamos llamarlos “sistema de representación gráfico en coordenadas cartesianas”, por ejemplo.

Dense cuenta que el sistema de representación simbólico tiene gran cantidad de relaciones con los otros sistemas de representación gráficos y geométrico. Por ejemplo, en el sistema de representación simbólico se puede expresar la superficie esférica y el volumen de la bola. Mientras que si tenemos a la esfera representada en un sistema de representación gráfico bajo un sistema de coordenadas, podemos representar muchos otros elementos y propiedades en el sistema de representación simbólico. Aquí surgen gran cantidad de conexiones.

Si se intentara establecer todos estos elementos y conexiones, la estructura conceptual adquiriría una gran complejidad que implicaría más de una transparencia y esquemas complejos para describir las conexiones. Como creo que, en todo caso, es necesario profundizar más en el detalle de la estructura matemática, pero no podemos complicar demasiado la descripción, es necesario que ustedes tomen decisiones sobre el nivel de secundaria o bachillerato para el que van a diseñar la unidad didáctica y, una vez tomada esa decisión, analicen lo que tienen, escojan lo que consideran relevante, profundicen en lo que hayan escogido, hasta llegar a una estructura conceptual con la que ustedes estén satisfechas en el sentido que contenga todo lo que ustedes consideran que deberían saber los alumnos del nivel escogido una vez se haya puesto en práctica la unidad didáctica.

La aproximación al análisis fenomenológico que ustedes presentan en esta versión está bien enfocado, dado que intentan definir familias de fenómenos que son modelizados por subestructuras matemáticas correspondientes a la estructura matemática de la esfera. Mi comentario sería que habría que establecer con mayor detalle la relación entre fenómeno y subestructura matemática y, como ya sé, que eso fue lo que intentaron hacer en la nueva versión, dejo mis comentarios para allá.

Segunda versión del análisis fenomenológico del grupo de esfera

Me gustó muchísimo el trabajo de análisis fenomenológico con el problema de localización de puntos en la tierra. Es un magnífico ejemplo de lo que significa hacer análisis fenomenológico. Felicitaciones.

Ahora la surgen al menos otras dos preguntas. Por un lado, ¿qué otros fenómenos o problemas dentro de fenómenos pueden ser modelizados por la misma subestructura que ustedes utilizan en el ejercicio? Es decir, ¿qué otros ejemplos se pueden dar de esa familia de fenómenos? Por el otro lado, ¿qué otras subestructuras de la estructura matemática esfera se pueden considerar que permitan identificar otras familias de fenómenos para los que se puedan hacer ejercicios como el que acaban de hacer? Esta última pregunta tendría que responderse desde la perspectiva de las decisiones que ustedes tomen con respecto al nivel para el que van a diseñar la unidad didáctica y las implicaciones que esa decisión tendrá en la parte de la estructura conceptual que ustedes van a desarrollar en detalle para ello.

Transparencia presentación sobre errores y dificultades del grupo de esfera

Considero que hace falta profundizar bastante en la identificación de los errores y las dificultades en su caso. El documento y la presentación que ustedes hicieron fue demasiado general. No sé cuáles pudieron ser las dificultades que *ustedes* tuvieron para resolver la tarea. Sin embargo, creo que buena parte de esas dificultades se resuelven si *ustedes*, habiendo determinado el tópico específico que van a trabajar, desarrollan una estructura conceptual detallada del mismo. Tengo entendido que *ustedes* han decidido trabajar en la identificación de puntos sobre la esfera. ¿Cuáles son todos los *procedimientos* que se pueden identificar para ese propósito? ¿Qué *conceptos* se relacionan con esos propósitos? ¿Qué papel juegan los *sistemas de representación* en esos procedimientos y en esos conceptos? Lo primero que habría que hacer sería la estructura conceptual detallada de esta parcela del tópico, desde la perspectiva matemática, sin preocuparse por el nivel de los alumnos para los que se va a diseñar la unidad didáctica. De esta forma, se puede tener una visión global del tópico. Después hay que decidir que apartados de esa estructura conceptual es asequible a los alumnos escogidos.

Es posible que *ustedes* consideren que los temas son demasiado complejos para la edad de los alumnos, si el nivel se ha determinado por el nivel en el que, en los documentos oficiales, se propone tratar el tema de la esfera. En ese caso, *ustedes* tienen dos alternativas. La primera, cambiar de tópico específico por uno que sí se adapte a la edad y al conocimiento de los alumnos correspondientes. La segunda, tomar la decisión de que van a desarrollar el tema para alumnos de otro nivel, aun si a ese nivel los documentos oficiales no incluyen el tema de la esfera. Esto habría que charlarlo con Luis, pero creo que no sería problema.

Una vez que hayan resuelto el problema anterior, hay que hacer de nuevo el trabajo de errores y dificultades. Pero insisto en que ese trabajo no se podrá hacer con calidad, a menos que *ustedes* hayan hecho un nuevo análisis de contenido *detallado* para el tópico en cuestión, como lo explico a continuación.

La identificación de los errores y las dificultades en el tópico es un paso central en el análisis didáctico porque, en la mayoría de los casos, define con bastante especificidad el *problema* que se desea resolver con el diseño y puesta en práctica de la unidad didáctica. En otras palabras, cuando *ustedes* decidan cuáles son los errores y las dificultades que van a abordar, tendrán, por un lado, una parte de la descripción del estado cognitivo de los alumnos y, por el otro, la base con la cual determinar los objetivos de la unidad didáctica. Con esta información y habiendo determinado el nivel al que se va a trabajar, podrán tomar decisiones con respecto al contenido (en el sentido de concretarlo), para efectos de realizar una nueva versión del análisis de contenido. Esta nueva versión del análisis de contenido deberá hacerse *de manera detallada* para la parcela del tópico que corresponde a los objetivos y al estado cognitivo de los alumnos, de tal forma que, dentro de la nueva estructura conceptual, sea posible ubicar con claridad los errores y las dificultades. En principio, si esto se logra, el análisis de instrucción que comenzamos a hacer esta semana (materiales y recursos y resolución de problemas) tendrá significado para efectos del diseño de la unidad didáctica: al tener claridad con respecto al análisis de contenido y al análisis cognitivo, al investigar sobre los materiales y recursos disponibles y al manejar las nociones relacionadas con la resolución de problemas, *ustedes* deberán ser capaces de identificar diversos tipos de actividades de enseñanza que tengan sentido para los objetivos que se hayan impuesto y deberán poder justificar las razones por las cuales estas actividades pueden llegar a permitir la evolución de las estructuras cognitivas de los alumnos.

En consecuencia, los pasos a desarrollar en este momento consisten en:

- 1) Decidir cuáles son los errores y las dificultades que *ustedes* van a abordar. No pueden abordar todos los que presentaron en la transparencia. Tendrán que decidir un conjunto de errores y dificultades que sea posible abordar en un número reducido (3 a 6) de sesiones de clase.
- 2) Separar errores y dificultades. Es decir, intentar identificar las características de las estructuras cognitivas de los alumnos (dificultades) que generan ciertos tipos de actuaciones (errores).

3) Determinar con tanta especificidad como sea posible la parcela de su t3pico que van a abordar en la unidad did3ctica. Debe ser claro en este momento que, si han tomado decisiones con respecto a los errores y las dificultades, no podr3n abordar la totalidad del t3pico.

4) Producir una *nueva* estructura conceptual detallada para esta parcela del t3pico. Esta estructura conceptual tendr3 que ser tan detallada como para que sea posible ubicar en ella los *conceptos* y los *procedimientos* que intervienen en los errores en los que incurren los alumnos. No bastar3 con identificar conceptos y relacionarlos. Ser3 necesario entrar en el detalle de describir procedimientos, tanto de transformaciones sint3cticas dentro de un sistema de representaci3n, como de traducciones entre sistemas de representaci3n.

5) Hacer un nuevo an3lisis fenomenol3gico, esta vez para la parcela del t3pico que se haya escogido y relacionar este an3lisis fenomenol3gico con la estructura conceptual del punto 4).

Transparencias de presentación de actividad del grupo de esfera

Hay dos partes del trabajo que ustedes han presentado que se encuentran muy bien. Por un lado, ustedes han logrado presentar un estructura conceptual detallada de una porción específica del tópico que les corresponde. Esto lo han hecho pocos grupos. La mayoría se quedan todavía en descripciones generales dentro de su estructura conceptual. Por el otro lado, ustedes han logrado identificar y formular una dificultad y unos errores, junto con la formulación de una actividad que claramente pone en juego el conocimiento involucrado en la dificultad y que muy seguramente lleva al alumno a incurrir en el error. Además es muy posible que, al incurrir en el error, el alumno perciba la contradicción entre lo que él esperaba y lo que se encuentra a realizar la tarea. Esto está muy bien y es muy claro.

Desafortunadamente no hay coherencia entre la formulación de la dificultad, el error y la actividad, por un lado, y la estructura conceptual por el otro. Los conocimientos descritos en la estructura conceptual no se necesitan para la realización de la actividad. Es posible que este defecto se hubiese podido resolver si la actividad hubiese incluido otras tareas que llevaran a los alumnos a hallar esquemas para obtener la distancia sin necesidad de medirla, solamente conociendo las coordenadas. En este sentido, ustedes han puesto en juego (no sé si consciente o inconscientemente) los organizadores de análisis fenomenológico y materiales y recursos, pero no han puesto en juego el organizador de modelización y, por consiguiente, no se ve la necesidad de utilizar los sistemas de representación.

El otro problema que ya se discutió en clase tiene que ver con la dificultad del contenido matemático propuesto para los alumnos en cuestión. Creo que es evidente que ese nivel de matemáticas va a generar claras dificultades en los alumnos. Sin embargo, como lo sugirió Luis, es posible identificar problemas de distancias entre puntos en la esfera que requieran de un conocimiento matemático menos complejo.

Tercera versión de la estructura conceptual para el tema de **función de segundo grado**

El establecimiento explícito de algunas conexiones puntuales entre elementos o propiedades del sistema de representación simbólico (el símbolo a , la expresión simbólica de los ceros de la función, por ejemplo) y elementos y propiedades del sistema de representación gráfico (los cortes de la curva con el eje x , la concavidad de la curva) aportó de manera importante a la comprensión del grupo de la importancia de este tipo de conexiones.

Pero, ¿cuáles son los elementos de cada sistema de representación y cuáles son las propiedades? ¿Cómo se relacionan entre sí?

Dentro de la problemática de los sistemas de representación se puede profundizar aún más (una vez ustedes resuelvan el problema de encontrar una manera de representar esa complejidad). Por un lado, la tabla de valores como sistema de representación desapareció de la versión anterior a ésta. El trabajo del grupo de cónicas muestra que hay otros sistemas de representación geométricos, además del que se representa en el plano cartesiano: como lugar geométrico de puntos que satisfacen unas condiciones, como corte de un plano con el cono, etcétera. ¿Cuáles son los elementos y las propiedades de la función cuadrática que mejor resaltan en cada uno de esos sistemas de representación y cómo se relacionan? Por ejemplo, la parábola tiene un foco, pero éste no aparece en su esquema.

En el caso del sistema de representación simbólico, resulta interesante que haya aparecido la forma multiplicativa y que ustedes hayan insinuado una relación entre esa forma y la forma general a través de la ecuación cuadrática. ¿Hay más formas simbólicas? Y si las hay, ¿cómo se relacionan entre sí? ¿Qué elementos tienen y qué propiedades se resaltan en ellas? ¿Cómo se relacionan estos elementos y propiedades con los elementos y propiedades de otros sistemas de representación, como el geométrico del plano cartesiano?

Aunque aparezcan como elementos del sistema de representación simbólico, conceptos como vértice o eje de simetría son elementos que se definen a partir de las características de la representación gráfica. Dentro del sistema de representación simbólico podemos encontrar expresiones simbólicas que representan sus coordenadas. Éste es un comentario un poco sutil, pero que puede ayudar a comprender y profundizar las ideas que se encuentran detrás de la noción general de sistema de representación.

Creo que es mejor restringir el tema a una sola variable.

En el caso de los fenómenos, veremos que hay también una gran variedad de ellos.

Cuarta versión de la **estructura conceptual** para la **función de segundo grado**.

La estructura conceptual ha evolucionado algo con respecto a la versión anterior, pero es posible que todavía se pueda hacer más trabajo al respecto. Es, tal vez, el momento de responder a dos preguntas que sirvan de criterios para decidir qué hace falta y qué puede sobrar en esta estructura conceptual: 1) ¿para qué nivel de secundaria o bachillerato vamos a diseñar la unidad didáctica sobre función de segundo grado?; 2) Lo que aparece actualmente en la estructura conceptual, ¿es lo que consideramos importante que un estudiante de ese nivel conozca sobre el tema?; ¿está todo lo que esos alumnos deberían saber?

Algunas ideas sobre la última versión de la estructura conceptual.

1) la idea del cuadrado no es realmente un sistema de representación. Esa idea no tiene necesariamente un conjunto de reglas que permita crear caracteres, manipularlos y relacionarlos con otros sistemas de representación (a menos que se utilicen las reglas del sistema de representación del plano cartesiano). El área del cuadrado es en realidad una gran familia de fenómenos matemáticos.

2) La noción de foco (y de directriz) brilla por su ausencia en la estructura conceptual. Tal vez las ideas del grupo de cónicas puedan aportar a mejorar esto. Ellos muestran que es una noción central en la descripción de estos objetos matemáticos. Más aún, esta noción puede aparecer en la mayoría de los sistemas de representación. En particular esto genera una nueva forma simbólica cuyos parámetros tienen significado gráfico (y fenomenológico) importante.

3) La idea del cuadrado generó una semilla de una nueva forma simbólica, en la que el cuadrado está completado. ¿Cómo es esa forma simbólica? ¿Qué significado gráfico tienen los parámetros de esa forma simbólica?

4) Al aparecer varias formas simbólicas se genera el problema de pasar de una forma a otra (lo que se conoce como transformaciones sintácticas dentro de sistemas de representación). Ustedes insinúan algo de esto con la ecuación cuadrática y el paso de la forma general a la forma multiplicativa ¿Cuáles son los procedimientos que permiten hacer estas transformaciones?

Para el **análisis fenomenológico** tengo también algunos comentarios:

1) Pareciera que el análisis fenomenológico está hecho con base en la identificación de aquellos fenómenos que involucran un término al cuadrado, pero esto no quiere necesariamente decir que involucre a la función de segundo grado y que esta estructura matemática permita organizar ese fenómeno. Tomen, por ejemplo, el caso del Teorema de Pitágoras. En este caso habría que hacer una buena cantidad de manipulaciones simbólicas para mostrar que la función de segundo grado organiza algún aspecto de los fenómenos matemáticos que tienen que ver con el teorema. Entonces la pregunta es ¿qué fenómenos son organizados por alguna subestructura matemática perteneciente a la estructura matemática de la función de segundo grado? Para poder responder a esta pregunta, hay que tener claridad acerca de cuáles son las subestructuras matemáticas de la función de segundo grado y, para ello, es posible que sea necesario profundizar en la estructura conceptual...

2) En clase ya se hizo el comentario de que el término “modelización de fenómenos” es demasiado general y no aporta necesariamente al análisis fenomenológico. Ustedes utilizan la frase “fenómenos [...] en los que se utilizan funciones de segundo grado”. El problema del análisis fenomenológico es precisamente el de identificar esas familias de fenómenos y clasificarlas de acuerdo a las subestructuras matemáticas que los organizan. Por ejemplo, la subestructura matemática que organiza los fenómenos de áreas son aquellas funciones de segundo grado de la forma $f(x) = ax^2$. Pero esta subestructura no permite organizar los problemas de relación espacio tiempo en los fenómenos de movimientos uniformemente acelerados y seguramente no es la misma subestructura que permite explicar los movimientos de los cometas, y esta última es diferente de la

subestructura matemática que permite describir el funcionamiento de los espejos parabólicos.

3) La separación entre fenómenos físicos y no físicos es un poco artificial. En realidad, tenemos dos grandes categorías iniciales: fenómenos matemáticos y fenómenos no matemáticos. La pregunta es ¿cómo se organizan (clasifican) los fenómenos dentro de esas dos categorías en grandes familias de fenómenos (independientemente de su origen, ya sea economía o biología) de acuerdo a sus **características estructurales**?

4) La separación entre fenómenos matemáticos y cálculo de áreas también es artificial. Si estamos hablando de cálculo de áreas de objetos matemáticos, entonces nos referimos a un fenómeno matemático. Dense cuenta que ustedes están incluyendo aquí el tema del área de un cuadrado como un fenómeno matemático. Ver comentario I a la estructura conceptual.

4) ¿Será posible que una vez que se hayan identificado las subestructuras matemáticas y las familias de fenómenos que les corresponden, se puedan hacer las relaciones entre características del fenómenos y características de la subestructura como lo comenzaron a mostrar los del grupo de probabilidad?

Segunda versión del análisis fenomenológico para la función de segundo grado

En mi documento anterior ya les hice una serie de comentarios al análisis fenomenológico presentado en esa ocasión. El que ustedes presentan ahora tiene más detalle pero tiene todavía algunas características que quiero volver a resaltar.

La clasificación de los fenómenos no matemáticos en físicos por un lado y no físicos, por el otro, es un poco artificial desde la perspectiva de la estructura matemática en cuestión. Todos esos fenómenos son sencillamente fenómenos no matemáticos. Dentro esa gran familia de fenómenos no matemáticos, ustedes hacen una clasificación por áreas del conocimiento: física, química, biología, economía, construcción. Pero este tipo de clasificación no permite establecer una relación entre las características estructurales de los fenómenos, por un lado, y elementos y propiedades de subestructuras específicas de la gran estructura matemática denominada función de segundo grado, por el otro.

Paralelamente, y como creo que ya les comenté, la familia de áreas de figuras y cuerpos es un fenómeno matemático y se debe incluir en esa categoría.

El problema que se tiene es que, aunque la que ustedes proponen es una clasificación posible, no es necesariamente útil a la hora de ponerla en juego desde el punto de vista didáctico. Lo que a uno le interesa desde esa perspectiva es tener, para una subestructura matemática específica (por ejemplo, aquella relacionada con las propiedades de la parábola en su relación con el foco y la directriz que ustedes tienen un poco olvidada, o aquella relacionada con funciones de segundo grado con los parámetros b y c nulos, o aquella que genera ecuaciones de segundo grado, o seguramente varias otras) aquellos fenómenos y problemas dentro de esos fenómenos que al ser modelizados ponen en juego esa subestructura. La cuestión consiste entonces en identificar las subestructuras matemáticas que permiten organizar los fenómenos que ustedes proponen (y seguramente otros) con esa estrategia.

Al incluir la idea de números singulares o trayectorias elípticas, por ejemplo, ustedes están ampliando el tema de trabajo para incluir casi todo aquello que involucre un término al cuadrado. Es una aproximación posible, pero yo les aconsejaría, para efectos de reducir la complejidad del problema, que se restrinjan a aquellas cuestiones que tengan una relación más directa con el concepto de función de segundo grado.

¡No se olviden de la idea de foco y directriz, tanto para el análisis fenomenológico, como para la estructura conceptual!

Transparencia presentación sobre errores y dificultades del grupo de sistemas de función de segundo grado

Considero que el trabajo que ustedes presentaron es uno de los mejor organizados. Supongo que al haber seguido la guía de la estructura conceptual fue posible identificar errores y dificultades en algunos de los aspectos de esa estructura conceptual. Sorprende, sin embargo, que se hayan restringido a los sistemas de representación simbólico y gráfico. De la misma manera, ustedes mencionan la “falta de conexión entre sistema de representación gráfica y simbólica”, pero no especifican a qué se refieren con esto. Los errores que tienen que ver con la traducción entre sistemas de representación pueden ser importantes e interesantes.

Aunque en la resolución de tareas que tienen que ver con la función de segundo grado pueden intervenir gran cantidad de procedimientos diferentes, ustedes se centraron (y es natural hacerlo por la tradición de las matemáticas escolares) en uno de ellos: el procedimiento para hallar los ceros de la función a través de la aplicación de la ecuación cuadrática cuando la función se encuentra expresada en la forma general. Con esto quiero indicar que la ecuación cuadrática está claramente relacionada con la función de segundo grado, pero que no se le puede considerar como un aspecto central del mismo. Por ejemplo, hay otros procedimientos como la completación del cuadrado o la factorización que pueden ser tan importantes como la ecuación cuadrática en el manejo de la función de segundo grado. Esta idea de los *procedimientos* es muy importante en este momento, dado que algunos de los errores más comunes tienen que ver con procedimientos (como ustedes lo indicaron para la ecuación cuadrática). Una parte de los errores pueden tener que ver con el tipo de procedimiento que el alumno utiliza para resolver un problema y diferentes procedimientos generan diferentes errores y dificultades. De nuevo, ustedes tienen que hacer un esfuerzo para decidir qué parcela específica del tópico quieren abordar en el diseño de la unidad didáctica, puesto que esto también determinará los errores y las dificultades que sean relevantes. De hecho este proceso de concretar el problema será dinámico: la identificación de errores y dificultades restringe el contenido y por tanto la estructura conceptual que hay que desarrollar en detalle; y el desarrollo detallado en la estructura conceptual de una parcela específica del tópico debe permitir identificar errores y dificultades para esa parcela.

En el documento no es posible identificar cuáles son los errores y cuáles son las dificultades. Habría que hacer más claridad en el significado que le damos a la noción de dificultad. Ésta se refiere a una caracterización de las estructuras cognitivas del alumno que nos permite explicar los errores en los que él incurre. De cierta manera, la identificación de las dificultades es lo que nos permite responder a la pregunta “¿por qué incurrió en este error? En el documento y en la presentación hay frases como “discriminante debe ser positivo” que es posible identificar como dificultades, pero solamente una vez que se explique qué se quiere decir con esa frase.

La identificación de los errores y las dificultades en el tópico es un paso central en el análisis didáctico porque, en la mayoría de los casos, define con bastante especificidad el *problema* que se desea resolver con el diseño y puesta en práctica de la unidad didáctica. En otras palabras, cuando ustedes decidan cuáles son los errores y las dificultades que van a abordar, tendrán, por un lado, una parte de la descripción del estado cognitivo de los alumnos y, por el otro, la base con la cual determinar los objetivos de la unidad didáctica. Con esta información y habiendo determinado el nivel al que se va a trabajar, podrán tomar decisiones con respecto al contenido (en el sentido de concretarlo), para efectos de realizar una nueva versión del análisis de contenido. Esta nueva versión del análisis de contenido deberá hacerse *de manera detallada* para la parcela del tópico que corresponde a los objetivos y al estado cognitivo de los alumnos, de tal forma que, dentro de la nueva estructura conceptual, sea posible ubicar con claridad los errores y las dificultades. En principio, si esto se logra, el análisis de instrucción que comenzamos a hacer esta semana (materiales y recursos y resolución de problemas) tendrá significado para efectos del diseño de la unidad didáctica: al tener claridad con respecto al análisis de contenido y al análisis cognitivo, al investigar sobre los materiales y recursos disponibles y al manejar las nociones relacionadas con la resolución de problemas, ustedes deberán ser capaces de identificar diversos tipos de actividades de enseñanza que tengan sentido para los objetivos que se hayan impuesto y deberán poder justificar las razones por las cuales estas actividades pueden llegar a permitir la evolución de las estructuras cognitivas de los alumnos.

En consecuencia, los pasos a desarrollar en este momento consisten en:

- 1) Decidir cuáles son los errores y las dificultades que ustedes van a abordar. No pueden abordar todos los que presentaron en la transparencia. Tendrán que decidir un conjunto de errores y dificultades que sea posible abordar en un número reducido (3 a 6) de sesiones de clase.
- 2) Separar errores y dificultades. Es decir, intentar identificar las características de las estructuras cognitivas de los alumnos (dificultades) que generan ciertos tipos de actuaciones (errores).
- 3) Determinar con tanta especificidad como sea posible la parcela de su tópico que van abordar en la unidad didáctica. Debe ser claro en este momento que, si han tomado decisiones con respecto a los errores y las dificultades, no podrán abordar la totalidad del tópico.
- 4) Producir una *nueva* estructura conceptual detallada para esta parcela del tópico. Esta estructura conceptual tendrá que ser tan detallada como para que sea posible ubicar en ella los *conceptos* y los *procedimientos* que intervienen en los errores en los que incurren los alumnos. No bastará con identificar conceptos y relacionarlos. Será necesario entrar en el detalle de describir procedimientos, tanto de transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación, como de traducciones entre sistemas de representación.
- 5) Hacer un nuevo análisis fenomenológico, esta vez para la parcela del tópico que se haya escogido y relacionar este análisis fenomenológico con la estructura conceptual del punto 4).

Transparencias de presentación de actividad del grupo de función de segundo grado

La actividad que ustedes propusieron es muy interesante y en la literatura se ha utilizado de varias maneras para abordar el problema en cuestión. Esa actividad aborda apropiadamente la dificultad de expresar linealmente el binomio y su consecuente error. Además ustedes han expuesto la actividad de tal manera que el alumno enfrente la contradicción entre lo que espera obtener y lo que realmente obtiene al realizar la tarea.

Sin embargo, quiero resaltar algunos puntos de las transparencias y la presentación. Las transparencias tienen dos descripciones de la dificultad. La primera se expresa de manera general, pero tal como está escrita no es la dificultad sino la propiedad correcta de la función cuadrática (éste seguramente es un error de redacción). La descripción más detallada de la dificultad que se hace más tarde presenta dos situaciones. Por un lado, el problema de expandir el binomio para transformar una forma simbólica en otra y por el otro el error al expandir el binomio. En otras palabras, ustedes han incluido dentro de la dificultad el error. La dificultad realmente es la creencia de los alumnos de que todo (no solamente la función de segundo grado) es lineal. El error aparece cuando se hace necesario expandir el binomio. Estos puntos los aclararon ustedes parcialmente durante la presentación, pero en la transparencia no hay descripción explícita del error que ustedes pretenden considerar.

Quiero, en todo caso, insistir que aunque la dificultad y el error están involucrados en procedimientos relacionados con la función cuadrática, tanto dificultad, como error, tienen que ver más directamente con la creencia de que todo es lineal y con la expansión del binomio cuando hay variables o parámetros involucrados. Hay dificultades y errores que son más específicos a la función de segundo grado.

La especificidad con respecto a la función cuadrática (o la falta de especificidad) se aprecia en la descripción de la estructura conceptual que corresponde a la dificultad y al error. Ustedes no entran en el detalle de la estructura conceptual en la que se pone el juego el procedimiento de expansión del binomio y, por lo tanto, es difícil apreciar la relación entre el análisis de contenido (que es reducido) y el análisis cognitivo y de instrucción. Muy posiblemente si ustedes entraran en el detalle de una porción de la estructura conceptual encontrarían muchas dificultades y errores que son específicos a la función cuadrática.

Tercera versión de la estructura conceptual para el tema de sistemas de ecuaciones lineales

La estructura que han presentado parece muy completa para el nivel de detalle actual y es bastante coherente. Sin embargo, aunque ustedes consideren que no está organizada por sistemas de representación, yo considero que, implícitamente sí lo está. Para verlo, tendríamos, primero que acordar que lo que ustedes llaman simbólico, “por medio lo cual comunicamos los conceptos” es lo mismo que los sistemas de representación (que ustedes presentan en la segunda transparencia). La pregunta entonces es sí lo que se presenta en la primera transparencia se puede organizar en sistemas de representación. Yo creo que sí.

Las llamadas técnicas de cálculo son técnicas de manipulación dentro del sistema de representación simbólico para transformar unas expresiones en otras, hasta que se llega al conjunto solución del sistema de ecuaciones. La clasificación de sistemas es una propiedad de los sistemas que se puede representar en varios sistemas de representación. Los conceptos previos y ambiente son conceptos que se pueden representar también en uno o más sistemas de representación. Por lo tanto, sería posible organizar toda la estructura conceptual con base en los sistemas de representación. ¿Por qué insistir en esto? Primero, porque como ustedes lo afirmaron, necesitamos de los sistemas de representación para comunicarnos. Segundo, porque al utilizar los sistemas de representación podemos identificar los elementos, las propiedades y las relaciones que caracterizan una estructura matemática. Tercero, porque la hacerlo, podemos identificar qué aspectos se resaltan mejor en un sistema de representación y no en otro. Y cuarto, porque de esta manera podemos ver con claridad las relaciones que conforman una parte importante del interés de las matemáticas escolares.

¿Podemos entonces reformular la estructura conceptual de esta manera? ¿Será posible identificar los elementos, propiedades y relaciones con algún grado de detalle como lo sugirió Carmen María? Por ejemplo, podemos identificar alguna relación entre transformaciones de expresiones en el sistema de representación simbólico y transformaciones en el sistema de representación matricial y transformaciones en el sistema de representación gráfico que nos permitan comprender la racionalidad de algunas de las técnicas de cálculo?

Cuarta versión de la **estructura conceptual** para **sistemas de ecuaciones lineales**. Primera versión del **análisis fenomenológico**.

Considero que es necesario desarrollar con más detalle la estructura conceptual. Por ahora se presentan unos grandes temas, pero no es posible apreciar la estructura misma. Es posible que para poder entrar en más detalle sea necesario concretar un poco más el tópico de estudio. Es, tal vez, el momento de responder a dos preguntas que sirvan de criterios para decidir qué hace falta y qué puede sobrar en esta estructura conceptual: 1) ¿para qué nivel de secundaria o bachillerato vamos a diseñar la unidad didáctica sobre sistemas de ecuaciones lineales?; 2) Lo que aparece actualmente en la estructura conceptual, ¿es lo que consideramos importante que un estudiante de ese nivel conozca sobre el tema?; ¿está todo lo que esos alumnos deberían saber? En este sentido, hay algunas ideas que se podrían considerar para mejorar la estructura conceptual, pero ustedes deben decidir qué es lo importante y qué no lo es.

1) La idea de clasificar los sistemas es potente y creo que se puede rentabilizar aún más. Por ejemplo, teniendo como criterios de clasificación el número ecuaciones y el número de variables. La noción de conjunto solución puede estar relacionada con la noción de independencia de ecuaciones.

2) Si nos restringimos a sistemas de ecuaciones lineales sencillos (es decir, máximo 3 variables), entonces es posible considerar la importancia y la utilidad de los diferentes procedimientos de solución. ¿Para qué casos tiene sentido utilizar un método y no otro?

3) Hay dos nociones que creo que vale la pena resaltar. Se trata de la noción de conjunto solución y la noción de independencia de ecuaciones.

4) En algunos casos valdrá la pena (dependiendo de las decisiones que tomen) hacer más explícito el procedimiento de solución. Por ejemplo, en el caso de sistemas de ecuaciones lineales sencillos (dos o tres variables) puede tener sentido introducir la noción de sistemas equivalentes (que tienen el mismo conjunto solución) y ver si algunos de los procedimientos de solución (particularmente aquellos que se encuentran el sistema de representación que ustedes llaman de ecuación algebraica) se pueden observar o relacionar con transformaciones en el sistema de representación gráfico. Por otra parte, es posible que sea interesante mostrar dentro de la estructura conceptual que hay una relación entre los diferentes procedimientos de solución.

5) Desde el punto de vista didáctico, es muy posible que sea importante lograr que los alumnos no solamente conozcan algunos procedimientos de solución, sepan cuando utilizarlos y cómo hacerlo, sino que comprendan por qué esos procedimientos tienen sentido y producen o no una solución. ¿Cómo lograr eso? Es decir, ¿qué características de la estructura matemática se tienen que tener en cuenta para poder avanzar en ese sentido?

6) Creo que vale la pena que se haga un poco de investigación sobre el tema del álgebra lineal para el nivel que ustedes escojan en la secundaria o el bachillerato.

Por ahora no puedo decir muchas cosas con respecto al **análisis fenomenológico**, dado que el que ustedes presentaron es muy sencillo. Sin embargo, es posible pensar que la organización de los fenómenos en familias de fenómenos venga más bien de diferentes tipos de clasificaciones que se hagan en la estructura conceptual. Esto produce subestructuras que pueden corresponder con familias de fenómenos. ¿Es posible hacer en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales ejercicios similares al que hizo el grupo de probabilidad en el sentido de identificar las características estructurales del fenómenos que se modeliza con elementos específicos de la subestructura en cuestión?

Segunda versión del análisis fenomenológico de sistemas de ecuaciones lineales

Yo se que Luis les sugirió que consideraran los problemas de optimización como parte de su análisis fenomenológico. Sin embargo, creo que al hacerlo el tema se vuelve más complejo porque se pasa de tratar la estructura matemática correspondiente a los sistemas de ecuaciones lineales a considerar la estructura matemática correspondiente a la programación lineal. Habría que escoger una sola de las dos y si se escoge la segunda, habría que comenzara desde cero con la estructura conceptual.

Las otras categorías que ustedes presentan para el análisis fenomenológico son muy generales. La frase “Problemas de laboratorio que se modelizan linealmente” responde la pregunta de “¿cuáles son los fenómenos que organiza la estructura matemática sistemas de ecuaciones lineales?” con la respuesta “los fenómenos que organiza la estructura matemática sistemas de ecuaciones lineales”. Es decir, a menos que se entre en el detalle de las características estructurales de los fenómenos y los problemas dentro de los fenómenos y su relación con elementos y propiedades de subestructuras de la estructura matemática en cuestión el análisis fenomenológico tiene muy poca utilidad didáctica. Es necesario profundizar en esta relación y organizar los fenómenos y los problemas de acuerdo a las subestructuras correspondientes (por ejemplo, de acuerdo a los tipos de sistemas que aparecen en su estructura conceptual).

Transparencia presentación sobre errores y dificultades del grupo de sistemas de ecuaciones lineales

El esquema que ustedes han utilizado para organizar la descripción de los errores y las dificultades en su tópico es muy interesante. De cierta manera están utilizando ideas básicas del organizador resolución de problemas. Esto da a pensar que sería posible aproximarse a su tópico desde esa perspectiva. La pregunta clave es entonces, ¿cómo describir en detalle el contenido matemático que les interesa de tal forma que los errores y las dificultades se reflejen en esa estructura conceptual?

Por ahora, las propuestas que ustedes hacen siguen siendo bastante generales. Por ejemplo, no es claro cuáles son los procedimientos de resolución que se ponen en juego cuando ustedes se refieren a estos errores y dificultades. Esta idea de los *procedimientos* es muy importante en este caso. Una parte de los errores pueden tener que ver con el tipo de procedimiento que el alumno utiliza para resolver un problema y diferentes procedimientos generan diferentes errores y dificultades. De nuevo, ustedes tienen que hacer un esfuerzo para decidir qué parcela específica del tópico quieren abordar en el diseño de la unidad didáctica, puesto que esto también determinará los errores y las dificultades que sean relevantes. De hecho este proceso de concretar el problema será dinámico: la identificación de errores y dificultades restringe el contenido y por tanto la estructura conceptual que hay que desarrollar en detalle; y el desarrollo detallado en la estructura conceptual de una parcela específica del tópico debe permitir identificar errores y dificultades para esa parcela.

En el documento no es posible identificar cuáles son los errores y cuáles son las dificultades. Da la impresión que muchas de las propuestas se refieren a dificultades y que no es posible identificar con claridad errores dada la generalidad de las mismas. Habría que hacer más claridad en el significado que le damos a la noción de dificultad. Ésta se refiere a una caracterización de las estructuras cognitivas del alumno que nos permite explicar los errores en los que él incurre. De cierta manera, la identificación de las dificultades es lo que nos permite responder a la pregunta “¿por qué incurrió en este error? En el documento y en la presentación hay frases como “no saber identificar las incógnitas” que es posible identificar como dificultades, pero solamente una vez que se explique qué se quiere decir con esa frase.

La identificación de los errores y las dificultades en el tópico es un paso central en el análisis didáctico porque, en la mayoría de los casos, define con bastante especificidad el *problema* que se desea resolver con el diseño y puesta en práctica de la unidad didáctica. En otras palabras, cuando ustedes decidan cuáles son los errores y las dificultades que van a abordar, tendrán, por un lado, una parte de la descripción del estado cognitivo de los alumnos y, por el otro, la base con la cual determinar los objetivos de la unidad didáctica. Con esta información y habiendo determinado el nivel al que se va a trabajar, podrán tomar decisiones con respecto al contenido (en el sentido de concretarlo), para efectos de realizar una nueva versión del análisis de contenido. Esta nueva versión del análisis de contenido deberá hacerse *de manera detallada* para la parcela del tópico que corresponde a los objetivos y al estado cognitivo de los alumnos, de tal forma que, dentro de la nueva estructura conceptual, sea posible ubicar con claridad los errores y las dificultades. En principio, si esto se logra, el análisis de instrucción que comenzamos a hacer esta semana (materiales y recursos y resolución de problemas) tendrá significado para efectos del diseño de la unidad didáctica: al tener claridad con respecto al análisis de contenido y al análisis cognitivo, al investigar sobre los materiales y recursos disponibles y al manejar las nociones relacionadas con la resolución de problemas, ustedes deberán ser capaces de identificar diversos tipos de actividades de enseñanza que tengan sentido para los objetivos que se hayan impuesto y deberán poder justificar las razones por las cuales estas actividades pueden llegar a permitir la evolución de las estructuras cognitivas de los alumnos.

En consecuencia, los pasos a desarrollar en este momento consisten en:

1) Decidir cuáles son los errores y las dificultades que ustedes van a abordar. No pueden abordar todos los que presentaron en la transparencia. Tendrán que decidir un conjunto de errores y dificultades que sea posible abordar en un número reducido (3 a 6) de sesiones de clase.

- 2) Separar errores y dificultades. Es decir, intentar identificar las características de las estructuras cognitivas de los alumnos (dificultades) que generan ciertos tipos de actuaciones (errores).
- 3) Determinar con tanta especificidad como sea posible la parcela de su tópico que van abordar en la unidad didáctica. Debe ser claro en este momento que, si han tomado decisiones con respecto a los errores y las dificultades, no podrán abordar la totalidad del tópico.
- 4) Producir una *nueva* estructura conceptual detallada para esta parcela del tópico. Esta estructura conceptual tendrá que ser tan detallada como para que sea posible ubicar en ella los *conceptos* y los *procedimientos* que intervienen en los errores en los que incurren los alumnos. No bastará con identificar conceptos y relacionarlos. Será necesario entrar en el detalle de describir procedimientos, tanto de transformaciones sintácticas dentro de un sistema de representación, como de traducciones entre sistemas de representación.
- 5) Hacer un nuevo análisis fenomenológico, esta vez para la parcela del tópico que se haya escogido y relacionar este análisis fenomenológico con la estructura conceptual del punto 4).

Transparencias de presentación de actividad del grupo de sistemas de ecuaciones lineales

Aunque la estructura conceptual que ustedes proponen incluye en una caja la noción de sistemas equivalentes y aunque esa estructura conceptual describe solamente una porción de la estructura conceptual general que ustedes propusieron la última vez, creo que fue evidente en la discusión que el análisis de contenido que ustedes habían hecho no era suficiente para abordar la dificultad y los errores propuestos. Habría sido necesario que la estructura conceptual describiera con tanto detalle como fuera posible el significado de la noción de sistemas equivalentes de tal forma que la dificultad y los errores pudieran apreciarse en profundidad dentro de la misma estructura conceptual. En ese sentido, la estructura conceptual debería mostrar la noción de sistemas equivalente desde la perspectiva de los diferentes sistemas de representación, como también desde su fenomenología y su modelización. En principio, una estructura conceptual detallada debe permitir apreciar con mayor claridad las características de la dificultad y de los errores que se generan a partir de ella.

Creo que también fue evidente que la formulación de dificultades es un proceso complejo y que es necesario hacer un esfuerzo para describirla con claridad. En la transparencia ustedes describen como dificultad la “ausencia del concepto de equivalencia”, pero en la presentación afirmaron que los alumnos sabían qué era que dos sistemas fueran equivalentes. Por otro lado, la relación entre la dificultad y el error no es evidente. ¿Por qué la ausencia del concepto de equivalencia genera el error que consiste en eliminar una ecuación y abandonar un incógnita? ¿Cómo describir con más detalle la dificultad que genera ese error?

Las actividades que ustedes presentaron no ponen necesariamente en juego el conocimiento que está detrás de la dificultad y que genera los errores. Las actividades propuestas parecen buscar principalmente que los alumnos “vean” lo que son sistemas equivalentes. ¿Es esto suficiente para abordar la dificultad y los errores propuestos? ¿Hay realmente una coherencia entre dificultades y errores por un lado, y las actividades por el otro?

Mientras que la primera actividad se centra en la idea de sistemas equivalentes como aquellos que tienen el mismo conjunto solución y en la verificación de este hecho, el fenómeno de la balanza permite aproximarse a otras maneras de ver la equivalencia: en el fenómeno hay unas botellas específicas cuyo peso se desconoce y lo que se busca es establecer parejas de relaciones que permitan conocer esos pesos. En la propuesta de la balanza ustedes insinúan una única manera de solucionar el problema: con la manipulación misma de los elementos del fenómeno. Pero ese fenómeno podría modelizarse también y podría ser analizado desde la perspectiva de su expresión en diferentes sistemas de representación. Entonces la actividad de la balanza puede permitir conectar diversas visiones de la noción de equivalencia y diferentes maneras de representar sistemas equivalentes. Pero seguramente para poder diseñar actividades que aprovechen de este potencial es necesario tener un análisis de contenido y un análisis de instrucción más detallado.

Anexo G

BASES DE DATOS

Este anexo contiene información aún más detallada en otro formato. Se trata de cuatro bases de datos entrelazadas. La Figura 104 presenta la estructura de estas bases de datos y su función en algunos de los análisis que realizaré en los estudios empíricos.

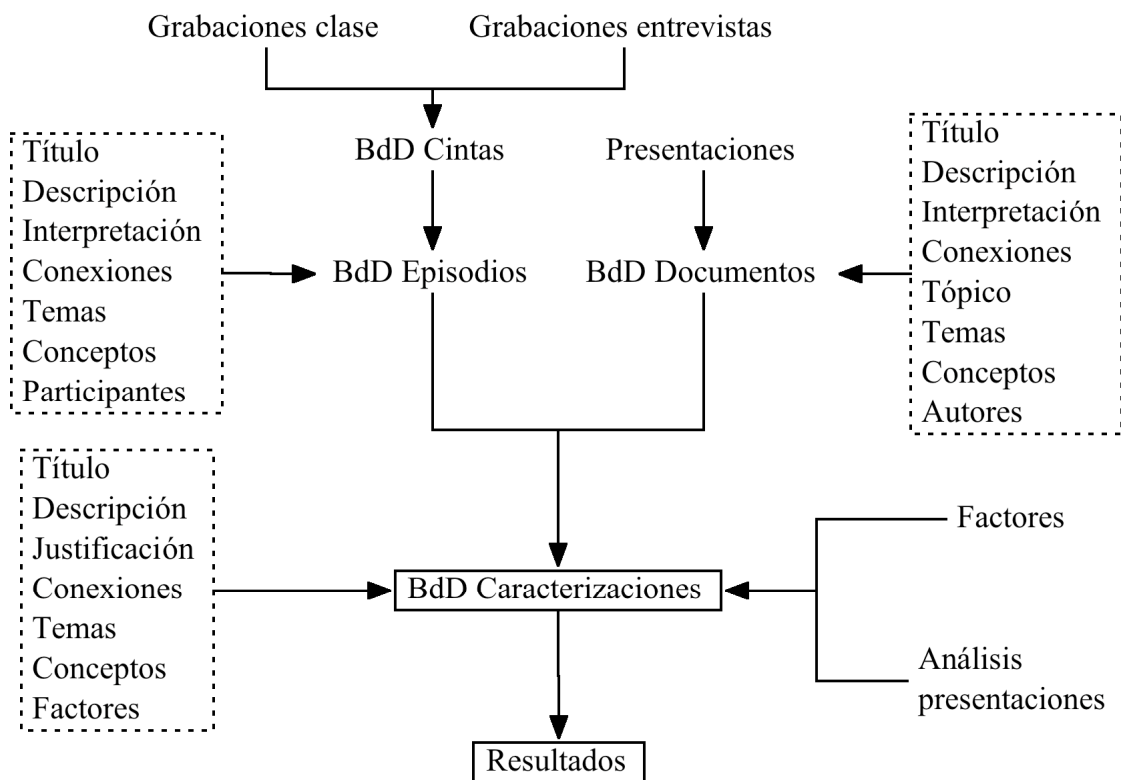


Figura 104. Bases de datos sobre el desarrollo de la asignatura

Los archivos de las bases de datos se encuentran en la carpeta titulada “Bases de datos”. Para abrir el programa, hay que pulsar dos veces el archivo “Bases de Datos”. Las grabaciones de clase y las grabaciones de las entrevistas (a grupos de futuros profesores) se registraron en la base de datos “Cintas” en la que cada registro corresponde a una cinta y en la que se introduce una descripción cronológica detallada de los episodios que componen la sesión y los documentos utilizados en ella. Estos documentos incluyen las transparencias utilizadas por los grupos de futuros profesores para sus presentaciones y las transparencias utilizadas por los formadores en sus intervenciones en clase (ver Figura 105).

Consecutivo	Número	Fecha entrada	Fecha sesión	Profesor	Caracterizaciones	Episodios
49	54	3/15/01	3/15/01	PG	02	62
					6	64
						65
						66
						67
						68
						69

Título
Segunda sesión sobre análisis fenomenológico

Descripción
Tres grupos presentaron sus trabajos sobre mejora de la estructura conceptual y primer intento de análisis fenomenológico de su tópico.

Interpretación y comentarios
Una sesión muy dinámica en la que resalta la participación crítica de algunos alumnos y el comienzo de una discusión técnica entre alumnos y profesores.

Contenido
A000 - [Episodio 62] **PG** hace tres comentarios iniciales. Hace referencia al proceso de crítica. No hay necesidad de reaccionar defensivamente.
A027 - [Episodio 63] **PG** insiste en que nunca se tendrá una estructura conceptual completamente terminada.
A051 - Los esquemas de presentación de trabajos. Introduce el nuevo esquema de crítica de parejas de grupos.
A087 - El grupo de **función de segundo grado** presenta su estructura conceptual. Sigue con detalle la transparencia del **documento 30**.
A114 - [Episodio 65] **Antonio** presenta sus dudas con respecto a la idea de presentar el área de cuadrado como sistema de representación y lanza la pregunta al grupo.
A121 - **LR** les hace caer en la cuenta que tienen un error en la presentación de la parábola como corte de un cono con un plano perpendicular a la base. Intervienen otros alumnos, pero no se entiende.
A136 - **Jose** presenta el análisis fenomenológico.
A170 - **PG** acepta comentarios puntuales. **LR** hace comentarios sobre la identificación de familias. Aparece la idea de relaciones cuadráticas. Insiste en que lo que se presenta son ejemplos. Habla de los cuadrados de la suma y la diferencia.
A191 - **José Ortiz** interviene para hacer aclaraciones sobre la modelización como proceso. **Antonio** y **Jose** aceptan el comentario para hablar de fenómenos modelables por la función de segundo grado.
A207 - [Episodio 66] El grupo de función de segundo grado introduce el término "modelización de fenómenos" que produce la explicación de **JO** de la diferencia entre modelización y análisis fenomenológico. **LR** explica la diferencia.
A213 - **LR** menciona la mecánica, además de la dinámica.

Figura 105. Base de datos Cintas Audio

Los botones de la esquina superior derecha permiten abrir las otras bases de datos. Los botones “Anterior” y “Siguiente” permiten navegar entre los registros visibles en ese momento. El botón “Todos” hace visibles todos los registros de la base de datos. Estos seis botones son comunes a las cuatro bases de datos. En la base de datos “Cintas”, los botones “Contenido” e “Interpretación” abren una ventana en la que se puede ver el contenido de la transcripción y su interpretación, respecti-

vamente. La lista titulada “Caracterizaciones” contiene aquellas caracterizaciones que se sustentan con episodios o documentos que corresponden a la cinta en cuestión. Al pulsar en una línea de esta lista, se abre la base de datos Caracterizaciones en el registro correspondiente. La lista titulada “Episodios” contiene aquellos episodios (eventos) que tuvieron lugar en la cinta en cuestión. Al pulsar en una línea de esta lista, se abre la base de datos Eventos en el registro correspondiente, donde se presenta en detalle el evento en cuestión.

Los episodios que se consideran relevantes se registran en la base de datos “Eventos” (a la que también me refiero como Episodios). Cada registro de esta base de datos incluye, además de la transcripción literal del episodio y su lugar en la cinta correspondiente, una descripción general y una interpretación de lo sucedido en el mismo (ver Figura 106).

Figura 106. Base de datos Eventos

En esta base de datos, el botón “Transcripción” abre una ventana con la transcripción del evento en cuestión. La lista titulada “Caracterizaciones” presenta las ca-

racterizaciones que se sustentan con este evento. Al pulsar en una línea de esta lista se abre la base de datos Caracterizaciones en el registro correspondiente.

En la base de datos Documentos, las transparencias y documentos utilizados en las sesiones se registran de manera similar (ver Figura 107).

Figura 107. Base de datos Documentos

En esta base de datos, el botón “Comentarios” abre una ventana en la que se presenta el comentario que hice al documento, si éste es una transparencia de un grupo de futuros profesores. La lista titulada “Episodios” presenta los eventos relacionados con este documento. Al pulsar en una línea de esta lista, se abre la base de datos “Eventos”, en el registro correspondiente. La lista titulada “Caracterizaciones” presenta las caracterizaciones que se sustentan en este documento. Al pulsar en una línea de esta lista, se abre la base de datos Caracterizaciones en el registro correspondiente.

En la base de datos “Caracterizaciones” se registran los resultados del análisis de los episodios y los documentos que describiré en detalle en el capítulo 9. Cada una de las caracterizaciones pretende registrar algún aspecto del desarrollo del co-

Anexo H

VARIABLES DE CODIFICACIÓN

La Tabla 51 presenta la definición de las variables de codificación, organizadas de acuerdo con las tres nociones que conforman el análisis de contenido.

Variables	Definición
Estructura conceptual	
Se identifica si la estructura conceptual contiene al menos una instancia de cada uno de los elementos descritos. Su importancia en la estructura conceptual se determina en otro grupo de atributos	
Contenido	Elementos que componen las estructura conceptual
Hechos	Un hecho es un caso particular. En la mayoría de los casos los hechos aparecen en las estructuras conceptuales como ejemplos
Conceptos	Un concepto es la generalización. Los conceptos se identifican con términos matemáticos que se refieren, en general, a objetos matemáticos
Estructuras conceptuales	Una estructura conceptual es la reunión de varios conceptos. Se identifica una estructura conceptual cuando aparecen varios conceptos reunidos o enmarcados gráficamente
Propiedades	Se identifican las propiedades de objetos matemáticos (conceptos)
Operaciones	Operaciones entre o en objetos matemáticos
Tipos	Se presentan tipologías de objetos matemáticos
Errores	Se incluyen errores dentro de la estructura conceptual
Teoremas	Se incluyen resultados identificados como teoremas
Forma	La forma con la que se presenta la estructura conceptual

Variables	Definición
Listado	No se presenta más estructuras que la posibilidad de unos apartados con títulos. Los elementos se presentan en una lista
Mapa conceptual	Hay una estructura. Se presenta de manera gráfica
Esquema de organización	El criterio o esquema organizador de la estructura conceptual. En algunos la estructura conceptual se estructura de acuerdo a más de un criterio
Sin Organizadores	No hay un esquema organizador
Historia	Los organizadores del currículo como criterio organizador
Sistemas de representación	La historia aparece como esquema que organiza una parte importante de los elementos
Fenomenología	Los sistemas de representación organizan buena parte de la estructura conceptual
Tipos	La fenomenología juega un papel relevante en la estructura conceptual
Conceptos	La estructura conceptual se organiza de acuerdo a tipos de objetos matemáticos
Errores	Se utiliza el término concepto como medio para organizar una parte o toda la estructura conceptual
Complejidad Niveles	Los errores juegan un papel importante en la organización de la estructura conceptual
1	La estructura conceptual tiene una complejidad de acuerdo con el número de niveles que componen la rama más compleja (abuelo, padre, hijo, por ejemplo)
2	La estructura conceptual tiene nivel de complejidad 1 cuando solo hay títulos y listados debajo de esos títulos
3 o más	Por lo menos una rama tiene en su interior padres e hijos
Número	Hay 3 o más niveles de complejidad en la rama más compleja
Conexiones	Número de niveles de la rama más compleja, si ésta tiene 3 o más niveles
Entre Ecs 0	En esta sección se caracterizan las conexiones que se identifican en la estructura conceptual. No se tienen en cuenta las conexiones básicas entre padres e hijos
Entre Ecs 1	No hay conexiones entre las estructuras conceptuales que se presentan
Entre Ecs 2	Hay una conexión entre dos estructuras conceptuales
Entre Ecs 3 o más	Hay dos conexiones entre tres o cuatro estructuras conceptuales
Número	Hay 3 o más conexiones entre las estructuras conceptuales
Internas a un SR 0	Número de conexiones entre estructuras conceptuales cuando son 3 o más
	No hay conexiones entre elementos de un mismo sistema de representación. Estas conexiones representan, en

Variables	Definición
	general, las transformaciones sintácticas
Internas a un SR 1	Hay una conexión interna
Internas a un SR 2	Hay dos conexiones internas
Internas a un SR 3 o más	Hay 3 o más conexiones internas
Número	Numérico de conexiones internas, cuando hay 3 o más
Entre SRs 0	No hay conexiones entre sistemas de representación. Estas conexiones representan, en general, traducciones entre sistemas de representación
Entre SRs 1	Hay una conexión entre sistemas de representación
Entre SRs 2	Hay dos conexiones entre sistemas de representación
Entre SRs 3 o más	Hay 3 o más conexiones entre sistemas de representación
Número	Número de conexiones entre sistemas de representación cuando hay 3 o más
Puntuales	Una conexión es puntual si conecta dos elementos específicos
Globales	Una conexión es global si conecta grupos de elementos
Implícitas	Una conexión es implícita cuando en un sistema de representación se utiliza un término de otro sistema de representación para identificar un elemento
Explícitas	Una conexión es explícita cuando aparece una línea que une los elementos
Fenomenología aparece	Se incluyen fenómenos dentro de la presentación de la estructura conceptual
Se menciona utiliza en	Se hace referencia explícita a la estructura conceptual en los trabajos en los que se presentan:
Errores	Errores
Dificultades	Dificultades
Actividades	Actividades
Evaluación	Evaluación
Hay coherencia con	Se aprecia coherencia entre lo propuesto en la estructura conceptual y
Errores	La identificación y selección de errores
Dificultades	La identificación y selección de dificultades
Actividades	La selección y diseño de las actividades
Evaluación	El diseño de la pruebas de evaluación
	Sistemas de representación
Existencia	Se identifican los sistemas de representación que se utilizan en la estructura conceptual
Ninguno	
Simbólico	

Variables	Definición
Gráfico	Se refiere principalmente a gráficas dentro del plano cartesiano
Numerico	
Geométrico	Se refiere a representaciones de geometría plana o del espacio pero sin referencia a ejes de coordenadas
Figurativo	Se refiere a representaciones figurativas
Verbal	
Otro	
Jerarquía	Se determina la importancia relativa que se le da a los sistemas de representación
Igualdad	Todos los sistemas de representación tienen la misma importancia
Simbólico más importante	El sistema de representación simbólico tiene más importancia que los demás
Gráfico más importante	El sistema de representación gráfico tiene más importancia que los demás
Simbólico y gráfico los importantes	Los sistemas de representación simbólico y gráfico son los sistemas de representación más importantes
Todos dependen del simbólico	El simbólico es el sistema de representación simbólico "padre" de los otros sistemas de representación
Todos dependen del gráfico	El simbólico es el sistema de representación gráfico "padre" de los otros sistemas de representación
Lo fenomenológico como sistema de representación	Se presenta el aspecto fenomenológico como un sistema de representación
Lo conceptual se separa de las representaciones	Hay una presentación conceptual que se presenta separadamente de la presentación de los sistemas de representación
Lo simbólico dentro de lo conceptual	Se presenta el sistema de representación simbólico como un aspecto de la presentación conceptual
Lo simbólico como lo conceptual	Se presenta el sistema de representación simbólico como la presentación conceptual del tema
Errores	Presencia y papel de los sistemas de representación en los trabajos en los que se presentan errores
Organizados por SRS	Los errores se estructuran con base en los sistemas de representación
Simbólico	El sistema de representación simbólico aparece en la descripción de al menos un error
Gráfico	El sistema de representación gráfico aparece en la descripción de al menos un error
Númérico	El sistema de representación numérico aparece en la descripción de al menos un error
Otro	Se utiliza otro sistema de representación en la descripción

Variables	Definición
Relaciones	de los errores La descripción de al menos un error tiene en cuenta relación entre sistemas de representación
Dificultades	Presencia y papel de los sistemas de representación en los trabajos en los que se presentan dificultades
Organizados por SRS	Las dificultades se estructuran con base en los sistemas de representación
Simbólico	El sistema de representación simbólico aparece en la descripción de al menos una dificultad
Gráfico	El sistema de representación gráfico aparece en la descripción de al menos una dificultad
Numérico	El sistema de representación numérico aparece en la descripción de al menos una dificultad
Otro	Se utiliza otro sistema de representación en la descripción de las dificultades
Relaciones	La descripción de al menos una dificultad tiene en cuenta relación entre sistemas de representación
Actividades	Presencia y papel de los sistemas de representación en los trabajos en los que se diseñan y presentan actividades
Organizados por SRS	Las actividades se estructuran con base en o giran alrededor los sistemas de representación
Simbólico	El sistema de representación simbólico aparece en al menos una actividad
Gráfico	El sistema de representación gráfico aparece en al menos una actividad
Numérico	El sistema de representación numérico aparece en al menos una actividad
Otro	Otros sistemas de representación aparecen en al menos una actividad
Relaciones	El diseño de al menos una actividad tiene en cuenta relación entre sistemas de representación
Evaluación	Presencia y papel de los sistemas de representación en los trabajos en los que se proponen pruebas de evaluación
Organizados por SRS	La prueba de evaluación se estructura con base en o giran alrededor los sistemas de representación
Simbólico	El sistema de representación simbólico aparece en la prueba de evaluación
Gráfico	El sistema de representación gráfico aparece en la prueba de evaluación
Numérico	El sistema de representación numérico aparece en la prueba de evaluación
Otro	Otros sistemas de representación aparecen en la prueba de evaluación
Relaciones	El diseño de la prueba de evaluación tiene en cuenta relación entre sistemas de representación
Análisis fenomenológico	

Variables	Definición
Se menciona	El trabajo que se presenta propone algún tipo de análisis fenomenológico
Se identifican fenómenos	Tipo de fenómenos que se mencionan en el análisis fenomenológico
Naturales	Naturales
Sociales	Sociales
Matemáticos	Matemáticos
Se identifican subestructuras	Se identifican sub estructuras (modelos matemáticos) que pueden estar en relación con los fenómenos propuestos
Se establecen relaciones SE - Fen	Se establece alguna relación entre subestructuras y fenómenos
Generales	Las relaciones que se proponen son generales
Puntuales	En las relaciones que se proponen se establecen relaciones entre elementos de la sub estructura y características de los fenómenos
Se organiza por Fenómenos	Los fenómenos se organizan de acuerdo con El tipo de fenómenos propuestos
Subestructuras	Las subestructuras que se relacionan con esos fenómenos
Ambos	Ambas cosas (tabla)
En errores aparecen	Presencia y papel del análisis fenomenológico en los trabajos en los que se identifican errores
Fenómenos	Se tiene en cuenta algún fenómeno en la descripción de los errores
Subestructuras	La descripción de los errores involucra subestructuras que se relacionan con fenómenos
Relaciones	La descripción de los errores tienen en cuenta la relación entre subestructuras y fenómenos
En dificultades	Presencia y papel del análisis fenomenológico en los trabajos en los que se identifican dificultades
Fenómenos	Se tiene en cuenta algún fenómeno en la descripción de las dificultades
Subestructuras	La descripción de las dificultades involucra subestructuras que se relacionan con fenómenos
Relaciones	La descripción de las dificultades tienen en cuenta la relación entre subestructuras y fenómenos
En actividades	Presencia y papel del análisis fenomenológico en los trabajos en los que se proponen actividades
Fenómenos	Se tiene en cuenta algún fenómeno en la descripción de las dificultades
Subestructuras	La descripción de las dificultades involucra subestructuras que se relacionan con fenómenos
Relaciones	La descripción de las dificultades tienen en cuenta la relación entre subestructuras y fenómenos
En evaluación	Presencia y papel del análisis fenomenológico en los trabajos en los que se proponen pruebas de evaluación
Fenómenos	Se tiene en cuenta algún fenómeno en el diseño de la

Variables	Definición
Subestructuras	prueba de evaluación La prueba de evaluación involucra subestructuras que se relacionan con fenómenos
Relaciones	La prueba de evaluación tiene en cuenta la relación entre subestructuras y fenómenos
Orden de los organizadores	Se identifica el orden en que aparecen los siguientes organizadores del currículo en las transparencias del trabajo final
Estructura conceptual	Estructura conceptual
Sistemas de representación	Sistemas de representación
Análisis fenomenológico	Análisis fenomenológico
Errores y dificultades	Errores y dificultades
Historia	Historia
Materiales y recursos	Materiales y recursos
Grupo	Número del grupo

Tabla 51. Variables de codificación

Anexo I

PRIMERA APROXIMACIÓN A LOS ESTADOS DE DESARROLLO

La Tabla 52 presenta mi primera aproximación a la identificación de unos estados de desarrollo. Las 72 transparencias se organizan por grupos y se enumeran en orden cronológico. La primera columna identifica la transparencia. La segunda columna identifica el estado al cual se asigna. En ese momento del estudio los estados se identificaban por letras (A, B, C y D). La tercera columna caracteriza la transparencia con respecto al estado asignado y registra las diferencias entre esta transparencia y la anterior. La cuarta columna resume la información de la tercera columna.

Prd	Est	Diferencias con estado asignado	Características estado
		Funciones y gráficas	
1 1	A	Tiene variedad en sistemas de representación - Variedad en fenómenos	A+ Variedad SRS
1 2	A	Igual a 1 1, pero organizado por sistemas de representación. Puede ser B, sin complejidad en niveles, conexiones internas y complejidad en análisis fenomenológico	A+ Variedad SRS + Org SRS = B - ComplNiv - Conex - Compl ANF
1 3	B	Aunque tiene un solo nivel parece compleja	B - ComplNiv
1 4	C	Tiene dos niveles	
1 5	C	No se aplican codificaciones a estructura conceptual y sistemas de representación	

Prd	Est	Diferencias con estado asignado	Características estado
1 6	D	La estructura conceptual no se menciona en errores y dificultades. Es un D débil. No se aplican codificaciones a estructura conceptual y sistemas de representación	D - PapelCoherencia EC y SRS
1 7	D	No se aplican codificaciones a estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico	
1 8	D		
1 9	D		
Progresiones			
2 1	A	Aunque tiene dos niveles	
2 2	B	**** En sus características es claramente un B, pero sabemos que en este momento este grupo no tenía ese conocimiento didáctico. Hace falta variedad en los sistemas de representación. Podría ser inclusive un C, puesto que hay conexiones internas	B - Variedad SRS
2 3	C	El mismo comentarios que el anterior. Hay 3 conexiones internas y variedad y complejidad en sistemas de representación y análisis fenomenológico. Dudas acerca de si la codificación es correcta	
2 4	B	Desaparecen las conexiones internas	
2 5	B	*** Se regresa a listado en la estructura conceptual, pero el resto de características dan a pensar en un B	B - listado
2 6	B	Se pierde variedad en los sistemas de representación. Podría ser A, pero el tipo de tarea no permite asegurarse de esto	B - listado - Variedad SRS
2 7	B	Aunque se pierde variedad en los sistemas de representación, hay mención y coherencia en la actividad sobre los errores	B - listado - Variedad SRS + PapelCohe
2 8	B	El mismo comentario de arriba	

Prd	Est	Diferencias con estado asignado	Características estado
29	B- C	Aunque está organizado como listado y no hay conexiones internas, otros aspectos dan a pensar que se puede considerar de la categoría B	B - listado - Org SRS + ConxInternas + PapelCohe
Números decimales			
31	A		
32	A	Sigue siendo un A, pero hay que notar el nivel de complejidad del mapa conceptual	A + Complec
33	A	No es claro, porque no hay mucha variedad de sistemas de representación y no está organizado por sistemas de representación	
34	B- C	Aunque no hay conexiones internas y la estructura conceptual no está organizada únicamente por sistemas de representación, se percibe claramente complejidad en el tratamiento del tema	B - OrgSRS + CnxSRS + SES
35	B- C		
36	B- C	Suponemos que no hay cambios. La mayoría de los atributos no aplican	
37	B- C		
38	B- C		
39	B	Es posible que todas las producciones deban ser codificadas con B	B - ORGSRS +SES + Rel + PapANF
Probabilidad			
41	A		
42	A	Aunque hay conexiones, no hay variedad de sistemas de representación	A + Cnx = B - VariedadSRS
43	B		
44	B	Poca variedad en los sistema de representación	B - VarSRS
45	B		
46	A- B	Debería ser un A, dada la poco variedad en sistemas de representación	B - VarSRS
47	B	Por el trabajo en el análisis fenomenológico	B - VarSRS + ComplANF

Prd	Est	Diferencias con estado asignado	Características estado
4 8	B		
4 9	B- C	Es claramente mejor que el anterior, pero no hay conexiones internas	C - CnxInt
Cónicas			
5 1	A		
5 2	B- C	El aumento en complejidad y las conexiones entre sistemas de representación dan a pensar en C	B + ComplEC + CnxSRS = C - CnxInt
5 3	B- C	Forma de listado, pero con muchas conexiones y buen trabado de análisis fenomenológico	C - listado
5 4	C	Aunque el análisis fenomenológico haya desmejorado un poco	
5 5	C	Se confirma la intuición del punto anterior	
5 6	C		
5 7	D		
5 8	D		
5 9	D- C	La separación de lo conceptual de las representaciones da para pensar en regresar a C	D - SepConcSR
Esfera			
6 1	A	Pero mejor que muchos A's de otros grupos	A++
6 2	B		
6 3	C	Aunque con baja complejidad en niveles	C - ComplNiv
6 4	C	Se confirma el criterio anterior	
6 5	C		
6 6	D	Desaparición de sistema de representación simbólico irrelevante (ver siguiente)	
6 7	D		
6 8	D	Desaparición de sistemas de representación irrelevante	
6 9	D	¡Listado sin criterio de organización!	D - Listado - CrOrg
Función de segundo grado			
7 1	B	Cumple B, excepto por variedad en sistemas de representación	B - VarSRS
7 2	B- C	Alto nivel de complejidad, pero pocas conexiones	C - Cnxs
7 3	B- C	Muchas conexiones, pero pocos sistemas de representación	C - VarSRs = B + Cnxs

Prd	Est	Diferencias con estado asignado	Características estado
74	C		
75	C		
76	C	Poca variedad de sistemas de representación	C - VarSRS
77	C- B	¡Sólo un sistema de representación!	C - VarSRS
78	C- B		
79	D		
Sistemas de ecuaciones lineales			
81	A		
82	B	Cumple con criterios, pero parece bajo	
83	B	Características de C, pero conexiones son entre estructuras conceptuales	
84	A	Con las características de A (ver siguiente, pero revisar)	
85	A		
86	A		
87	A		
88	A		
89	A	Estructura conceptual sin organización, ni conexiones, poca complejidad	

Tabla 52. Primera aproximación a los estados de desarrollo

Anexo J

EJEMPLOS DE HOJAS DE CÁLCULO PARA EL ANÁLISIS DE DISCREPANCIAS

En la Figura 109 presento una panorámica global de una de las hojas de Excel en las que automaticé el proceso de cálculo de discrepancias para efectos de definir los rangos de valores de las variables de análisis que determinan los estados y para asignar cada observación al estado en el que se genera el menor número de discrepancias. Aunque el texto en la figura es ilegible, es posible apreciar su estructura general. Presentaré un detalle de la tabla más adelante. Los ocho grupos se ubican en el centro de la tabla. Los cuatro estados se ubican en la porción izquierda de la tabla. Los extremos superior, inferior y derecho de la tabla se utilizan para cálculos.

Figura 109. Hoja de Excel. Último ciclo

La Tabla 53 presenta una porción de una de las hojas de Excel. Presento únicamente el caso del grupo 1. En la hoja Excel, los otros grupos aparecen en las columnas siguientes, como se aprecia en la Figura 109. La primera fila identifica el grupo; la segunda, la transparencia; la tercera, el estado al que se asigna la transparencia; y la cuarta, el número de discrepancias que se generan en ese estado. La primera columna identifica las variables; la segunda, describe los posibles valores; la tercera es una columna de trabajo que diferencia la variable “criterios de organización” (dado que esta variable adquiere valores que van en el sentido contrario de las demás); y la quinta y la sexta columna identifican los rangos de las variables. La hoja se compone de cuatro porciones verticales, una para cada uno de los estados. He separado esas porciones con una línea gruesa. Una celda dada de la tabla se identifica por la transparencia a la que pertenece (columna) y por la variable y el estado a los que corresponde (fila). Las celdas correspondientes a una transparencia pueden ser negras, grises o blancas. Son negras para aquellas variables para las que la observación tiene un valor que corresponde con los valores que identifican el estado al que ha sido asignada. Consideremos el caso de la segunda transparencia del grupo 1. Esa transparencia ha sido asignada al estado 2 y, en ella, el grupo 1 no hace un uso coherente de criterios. Como ese es un valor válido de esa variable para el estado 2, la celda correspondiente aparece en negro. Ésta es la celda correspondiente a la variable “Uso coherente de criterios” en la segunda porción vertical de la tabla (el estado 2). Por otro lado, en el estado 1, la celda correspondiente a la variable conexiones aparece en gris para la transparencia en cuestión. Esto es consecuencia de que la transparencia no presenta conexiones y ese es el valor válido para esa variable en ese estado. En los demás estados, las celdas correspondientes a esa variable aparecen en blanco. Ésta es la única discrepancia que se presenta en esta transparencia. De esta manera, se produce una representación gráfica de la asignación de observaciones a estados, como se aprecia en la Figura 109.

Cuando una observación se asigna a un estado (tercera fila de la tabla), el sistema calcula las discrepancias que se generan y produce los sombreados que corresponden a las celdas de esa observación. De esta manera, es posible decidir qué estado genera el menor número de discrepancias. Por otro lado, el sistema calcula el número de discrepancias para cada variable en cada estado, lo que permite iden-

tificar las variables y estados para los que sería apropiado cambiar los rangos con el propósito de reducir el número de discrepancias. Este procedimiento se realiza cambiando los datos del rango de las variables en la cuarta y quinta columna de la tabla. Una vez que se han decidido los cambios en los rangos (al observar qué consecuencias tienen dichos cambios en el número de discrepancias), se reasignan las observaciones a los estados, realizando, así, un ciclo del proceso.

Grupo				1.Funciones y gráficas															
				1	2	3	4	5	6	7	8	9							
Transparencia																			
Estado																			
Discrepancias				S	A1	A2	1	1	2						1	1			
Complejidad	Nivel=0		A																
Nociones centrales			A																
Criterios de organización	3 o más		D	3	100														
Uso coherente criterios	No		A																
Conexiones	0,1,2		A																
Variedad SRS	0 o 1		A		1														
SRS como organizador	no aparece o no se utiliza		A		1														
Variedad fenómenos	0,1,2		A		1														
Número de áreas	0,1,2		A		1														
Número subestructuras			A																
Papel	Menos de 6		A																
Coherencia EC			A																
				S	B1	B2													
Complejidad	Nivel=1		A	1	2														
Nociones centrales	Sí hay		A		1														
Criterios de organización	2 o más		D	2	3														
Uso coherente criterios	No		A		1														
Conexiones	0,1,2		A	1	3														
Variedad SRS	Más de 1		A	1	100														
SRS como organizador	Con otros		A	1	2														
Variedad fenómenos	0,1,2		A	1	2														
Número de áreas	Más de 2		A	1	100														
Número subestructuras	0,1		A		1														
Papel	Menos de 6		A		5														
Coherencia EC			A																
				S	C1	C2													
Complejidad	Nivel más de 1		A	2	100														
Nociones centrales	Sí hay		A	1	1														
Criterios de organización	0,1,2		D	1	2														
Uso coherente criterios	Sí		A	1	1														
Conexiones	Más de 2		A	3	100														
Variedad SRS	Más de 1		A	2	100														
SRS como organizador	Con otros u organiza		A	2	3														
Variedad fenómenos	Más de 1 categoría		A	2	100														
Número de áreas	Más de 2		A	2	100														
Número subestructuras	Una o más		A	1	100														
Papel	Menos de 6 menciones		A		5														
Coherencia EC			A																

Grupo				1.Funciones y gráficas								
Transparencia				1	2	3	4	5	6	7	8	9
Estado				2	2	2	3	3	4	3	4	4
Discrepancias				S	A1	A2	1	1	2		1	1
			S	D1	D2							
Complejidad	Nivel más de 1		A	2	100							
Nociones centrales	Sí hay		A	1	1							
Criterios de organización	0,1,2		D		1							
Uso coherente criterios	Sí		A	1	1							
Conexiones	Más de 2		A	3	100							
Variedad SRS	Más de 2		A	3	100							
SRS como organizador	Organiza		A	3	3							
Variedad fenómenos	Más de 1 categoría		A	2	100							
Número de áreas	Más de 2		A	3	100							
Número subestructuras	Más de 1		A	2	100							
Papel	Más de 5 menciones		A	6	100							
Coherencia EC	Sí hay		A	1	100							
Discrepancias							1	1	2		1	1
Total por grupo												6

Tabla 53. Hoja de Excel para cálculo de discrepancias

Anexo K

ANÁLISIS DE DISCREPANCIAS Y ANÁLISIS CLÚSTER

En este anexo comparo el análisis de discrepancias y el análisis clúster como métodos de agrupamiento y justifico la utilización del primer método en la caracterización de los estados de desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores.

El análisis clúster es un método estándar de agrupamiento. Este método se basa en una noción de distancia a partir de una matriz de similitudes, y requiere que las variables sean numéricas y que sus magnitudes tengan significado desde la perspectiva de la distancia entre las observaciones. La utilización de este tipo de método de agrupamiento con las variables que surgieron en el estudio generaba varias dificultades. En el caso de algunas variables, no es posible definir una noción de distancia (éste es el caso, por ejemplo, de la variable usos coherentes de los criterios de organización); en otros casos, los valores de algunas variables tienen significados diferentes dependiendo del momento dentro de la asignatura a la que corresponde la observación (por ejemplo, no tiene sentido esperar que se utilicen subestructuras para organizar fenómenos con anterioridad a que este tema se trate en la asignatura); finalmente, para algunas variables, los valores de las variables tienen significados diferentes dependiendo de su magnitud (por ejemplo, no es lo mismo pasar, en una producción, de uno a tres sistemas de representación, que de cuatro a seis).

Para utilizar este método habría sido necesario formular una definición alternativa de las variables de análisis de tal manera que estas nuevas variables satisficieran las condiciones del método y mantuvieran los significados que corresponden al marco conceptual y a los propósitos del estudio. Ese no habría sido un proceso sencillo, ni automático. De hecho, antes de diseñar el análisis de discrepancias, realicé una primera aproximación a ese problema y reconocí las dificul-

tades involucradas en él. Para aquellas variables en las que era posible definir una noción de distancia, yo tenía que poner en juego repetidamente mi juicio, al valorar la importancia relativa (distancia) de los valores de cada variable y de las diferentes variables entre sí. Fue claro que no era posible satisfacer las condiciones requeridas por el análisis clúster para el tipo de información que tenía disponible. ¿Quiere esto decir que no se pueden utilizar métodos estándar de agrupamiento para analizar las observaciones que surgen en este estudio? En lo que sigue, muestro cómo el análisis de discrepancias me permitió producir una nueva definición de las variables con las que pude utilizar el análisis clúster. Los resultados de este segundo análisis de los datos me permitieron resaltar las virtudes y los defectos del análisis de discrepancias como método no estándar de agrupamiento.

La definición de estados que surgen del análisis de discrepancias agrupa los valores de cada variable en máximo cuatro rangos. Utilicé estos rangos para definir unas nuevas variables, de tal manera que, para una variable dada, asigné el valor 1 para el primer rango, el valor 2 para el segundo, y así sucesivamente. Dado que los rangos que se generan en el análisis de discrepancias pueden solaparse — es decir, el tercer rango de una variable puede ser $[2, \infty)$ y el cuarto $[3, \infty)$ —, definí las nuevas variables de tal manera que cada una tuviera tantos valores como fuese posible, respetando el orden propuesto por la definición de los estados para las variables originales (en el caso del ejemplo, el tercer rango correspondía al valor 3 de la nueva variable, y el cuarto rango al valor 4). Con base en estas nuevas variables y partiendo de las observaciones originales, produje un nuevo conjunto de observaciones. La Tabla 54 presenta las nueve observaciones del grupo función cuadrática con esta nueva definición de las variables. En este caso, un valor de 4 en la variable número de subestructuras, por ejemplo, no quiere decir que se hayan detectado cuatro subestructuras en la transparencia, sino que hay 2 o más de ellas, tal y como se aprecia en la definición final de estados en la Tabla 19. Cada observación es un 12-tupla de valores ordinales entre 1 y 4.

Variables	Producciones								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Complejidad	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Nociones centrales	1	2	1	2	2	2	2	2	2
Criterios organización	1	2	3	3	3	3	3	3	3
Uso coherente criterios	1	2	1	2	2	2	2	2	2
Conexiones	2	1	3	3	3	3	3	3	3
Variedad SRS	3	3	3	3	3	3	3	3	3
SRS organizador EC	2	3	4	4	4	4	4	4	4
Variedad fenómenos	3	3	3	3	3	3	3	2	3
Número áreas	4	4	3	4	4	4	4	4	4
Número subestructuras	1	1	2	4	4	4	4	4	4
Papel	1	1	1	1	1	4	2	4	4
Coherencia EC	1	1	1	1	1	2	2	2	2

Tabla 54. Observaciones del grupo función cuadrática con nueva definición de variables

Apliqué el análisis clúster a las nuevas observaciones, teniendo en cuenta las siguientes cuestiones. Dado el tamaño de la muestra, utilicé el análisis clúster jerárquico. Un primer análisis exploratorio me indicó que los métodos de distancia Ward y de enlace completo producen resultados similares, coherentes con mi visión del problema. Profundicé en el análisis, basándome en el método Ward. Con este método, la distancia entre dos grupos es la suma de cuadrados ANOVA entre los dos grupos (acumulada sobre todas las variables). En cada etapa, la suma de cuadrados dentro de cada grupo se minimiza sobre todas las particiones obtenibles juntando pares de grupos de la etapa previa (Dunn y Everitt, 1982).

Puesto que este método es muy sensible a los valores atípicos, eliminé de la muestra aquellas observaciones que presentaban tres o más discrepancias. Al agrupar en cuatro clústeres, observé que las observaciones no quedaron agrupadas de manera idéntica al agrupamiento que produjo el análisis de discrepancias. La Figura 110 presenta el dendograma que resulta de este procedimiento. El primer miembro de una pareja identifica la observación. Por ejemplo, “12” se refiere a la segunda observación del grupo 1. El segundo dígito es el estado al que se asignó dicha observación en el análisis de discrepancias.

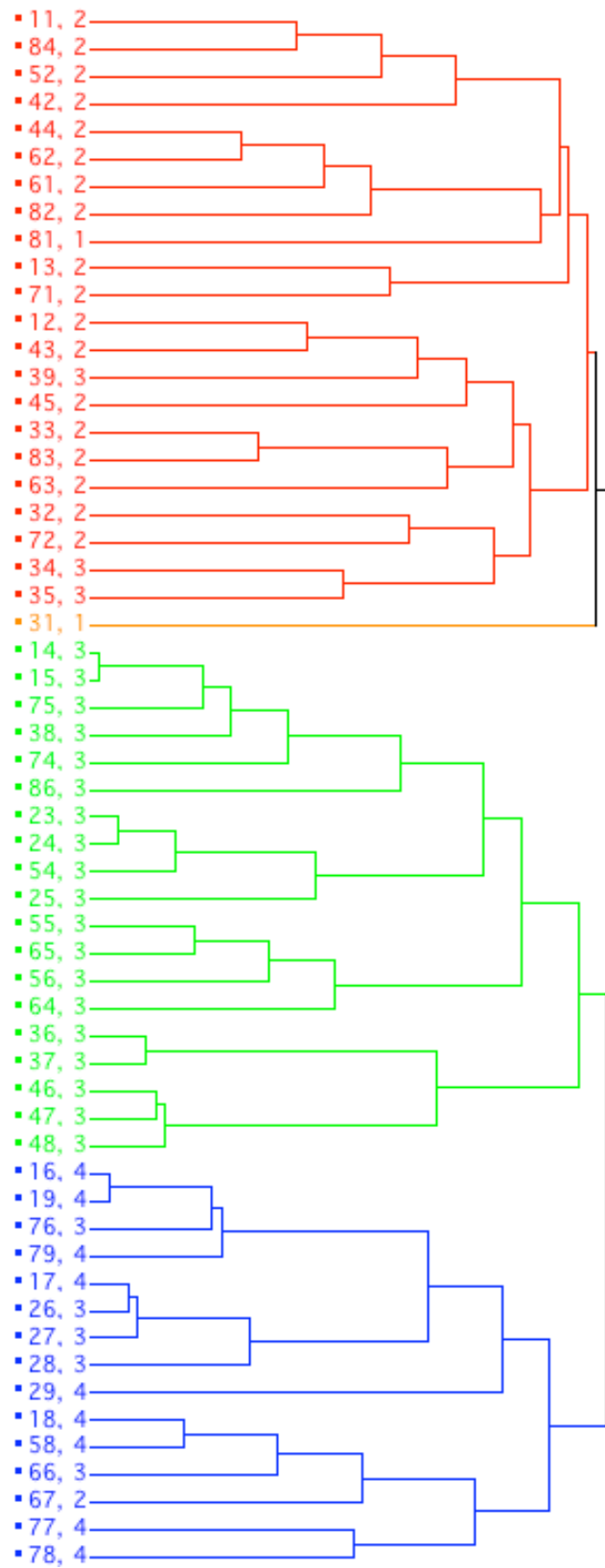


Figura 110. Agrupamiento de observaciones con el análisis clúster

¿Cómo se compara el agrupamiento de las observaciones que produce el análisis clúster con el que obtuve con el análisis de discrepancias? Los clústeres que se obtienen tienen las siguientes características: (a) un clúster que contiene una de las dos observaciones asignadas al estado 1¹; (b) la otra observación asignada al estado 1 (que presenta dos discrepancias, una de ellas de magnitud dos), junto con tres observaciones asignadas al estado 3 (que presentan ya sea dos discrepancias o una discrepancia de magnitud dos) se agrupan en un segundo clúster, que también contiene las 19 observaciones asignadas al estado 2 (excepto una, ver más adelante); (c) un tercer clúster que contiene 19 observaciones asignadas al estado 3; y (d) un cuarto clúster que contiene las nueve observaciones asignadas al estado 4, junto con cinco observaciones asignadas al estado 3 y una asignada al estado 2, todas ellas con discrepancias en la variable coherencia.

El análisis de esta comparación entre los dos métodos me permite hacer las siguientes observaciones. Resalta el hecho de que el análisis de discrepancias no tiene en cuenta ni la dirección, ni la magnitud de las discrepancias. Las cinco observaciones asignadas al estado 3 que se agrupan, en el cuarto clúster, con todas las observaciones asignadas al estado 4, son aquellas observaciones que presentan discrepancias en la variable coherencia. Es decir, el valor de la variable coherencia para estas cinco observaciones corresponde al estado 4. Este hecho confirma la interpretación que haré en el siguiente apartado en el sentido de que la variable coherencia es central en la definición del estado 4. El estado 3 propuesto por el análisis de discrepancias es coherente con el agrupamiento generado por el análisis clúster. Dos de las observaciones asignadas al estado 3, que se agrupan en el segundo clúster con observaciones asignadas al estado 2, presentan discrepancias correspondientes al estado 1. Esto indica que el análisis clúster, dada la definición de distancia utilizada, da mucha importancia a estos valores atípicos. Uno de los defectos del análisis de discrepancias es que trata de la misma manera las discrepancias producidas por valores correspondientes a estados contiguos y aquellos que no lo son (es decir, no tiene en cuenta la magnitud de la discrepancia).

¹ Cuando hablo de “una observación asignada a un estado” me refiero al agrupamiento que obtuve en la asignación final de observaciones a estados con el análisis de discrepancias.

Anexo L

IDENTIFICACIÓN Y CARACTERIZACIÓN DE LOS SIGNIFICADOS PARCIALES

En este anexo presento el proceso que dio lugar al esquema de codificación y análisis de la información contenida en las transparencias presentadas por los grupos de futuros profesores y en las transcripciones de las grabaciones de audio de la interacción en clase y de las entrevistas a dos grupos de futuros profesores. El funcionamiento del esquema se puede consultar en las bases de datos que, en un disco, adjunto a este documento. Aquí describo cronológicamente el proceso *personal* que dio lugar a dicho esquema. Éste es, por lo tanto, un documento que registra tanto los diferentes pasos de construcción del instrumento de codificación y análisis, como el proceso que yo viví como investigador al realizarlos. Escribí los apartados de este anexo al mismo tiempo que realizaba el proceso que se describe en ellos. En aquella época, yo utilizaba frecuentemente la voz pasiva y la primera persona del plural para referirme a mis actuaciones como formador e investigador, estilo que he cambiado en el cuerpo del documento de este proyecto de investigación.

El proceso comienza con las primeras tareas realizadas por los grupos de futuros profesores sobre la estructura conceptual de su tema. El análisis de las producciones y de las intervenciones de los futuros profesores en clase me llevó a producir algunas conjeturas relacionadas con las dificultades que se manifestaban en esa información. Estas conjeturas me indujeron a buscar “regularidades” en las producciones y actuaciones de los grupos de futuros profesores y a introducir las ideas de dificultades, reorganizaciones y caracterizaciones, nociones éstas relacionadas con el análisis de los significados parciales que los grupos de futuros profe-

sores manifestaban en sus producciones² y actuaciones. Las categorías de codificación surgieron al identificar documentos y episodios que correspondían a estas nociones y que se relacionaban con alguna de las nociones del análisis de contenido. De aquí en adelante, el proceso fue cíclico. Cada nueva codificación generaba ideas para mejorar el esquema, lo que implicaba la necesidad de volver a codificar y analizar los resultados.

14. PRIMERA APROXIMACIÓN: CONJETURAS CON MOTIVO DEL EJERCICIO DE LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL DE UN TEMA

Contexto

El 15 de febrero de 2001 tuvo lugar la primera sesión sobre estructura conceptual descrita en la transcripción de la cinta 39. En ella se realizó un ejercicio con la noción de derivada en el que los futuros profesores propusieron diversos elementos que estaban relacionados con esa noción. Al final de la sesión PG buscó insinuar el hecho de que esos elementos estaban relacionados y de que era importante establecer esas relaciones. Quedó como tarea para la siguiente sesión que cada grupo produjera una estructura conceptual del tópico que le correspondía. Al comienzo de la segunda sesión sobre estructura conceptual (20 de febrero, transcripción de la cinta 40), PG presentó en transparencias el ejercicio que él había realizado con la noción de derivada en la que se organizaban algunos de los elementos producidos en la sesión anterior de acuerdo con la idea de sistema de representación (documentos 1 a 3). También se presentó una transparencia con conexiones externas entre los sistemas de representación y otra en la que se identificaban procedimientos. En seguida, PG le pidió a los futuros profesores que mejoraran lo que habían traído con motivo de la tarea y que prepararan una transparencia para presentarla al grupo. Los grupos presentaron sus producciones (los de cónicas y sistemas de ecuaciones lineales lo hicieron sin transparencias por falta de marcadores) y se mantuvo una discusión después. PG recogió los documentos de la tarea y las producciones de los futuros profesores para la presentación ante el grupo. Las conjeturas que aquí se presentan se basan en esos dos documentos y en las transcripciones de las discusiones en clase. Estas conjeturas tienen que ver con los temas que se han propuesto como guía de análisis: normas (obligaciones y expectativas hacia el grupo y el profesor), dificultades, oportunidades de aprendizaje y reorganización de las producciones³.

Dificultad con la Noción de Concepto

Al analizar la transcripción de la primera sesión sobre estructura conceptual (transcripción de la cinta 39), identifiqué que los futuros profesores utilizan el

² En este anexo utilizo el término “producciones” para referirme a las transparencias presentadas por los grupos de futuros profesores.

³ Esta guía de análisis hace referencia a una primera versión del marco conceptual del estudio, tal y como lo presenté en mi proyecto de tesis.

término “concepto” con varios significados, la mayoría diferente del significado con el que yo lo utilizo (el concepto abarca todos los aspectos y sus relaciones: implica una estructura conceptual). En la transcripción del episodio 22 se aprecia lo siguiente. El episodio muestra que los futuros profesores no tienen una concepción clara sobre la noción de concepto matemático. Sus ideas giran principalmente sobre la idea de un término que abarca múltiples instancias. Algunos de ellos expresan alguna relación entre concepto matemático y definición (Begoña, cinta 40). Los futuros profesores se refieren a “hechos” sin darle un significado a ese término. Se percibe, por lo tanto, una dificultad en el manejo de esta noción que se expresa en el uso que ellos hacen de la noción de estructura conceptual. En esta discusión no se logró avanzar en el significado del término “concepto”, referido a los conceptos matemáticos. Por otro lado, en varias ocasiones algunos futuros profesores insinuaron una equivalencia entre lo conceptual y lo simbólico (ver intervención de Carlos en la transcripción de la cinta 39 cuando se están organizando los elementos). Esta relación tiene que ver con el comentario anterior, dado que la definición del concepto se da normalmente dentro de la representación simbólica. Finalmente, los futuros profesores también utilizan el término “analítico” con diversos significados (Paco tuvo alguna intervención en ese sentido en la sesión correspondiente a la cinta 39). En algunas ocasiones, “analítico” significa lo conceptual. En otras ocasiones, como se ve en el documento 9 del grupo de la esfera, el término se utiliza para referirse al análisis de las propiedades.

Dificultades con la Noción de Estructura Conceptual

El análisis de los documentos de borrador que los futuros profesores trajeron a clase (20/2/01) como respuesta a la tarea de producir una estructura conceptual de su tema hace patente la dificultad que se encuentra involucrada en esta noción. Todos los grupos, con excepción de dos (función de segundo grado y funciones y gráficas) produjeron un listado de elementos sin prácticamente ninguna estructura. En algunos casos, los elementos se encontraban organizados en categorías generales (como “gráfico” o “fenómenos”) pero no se establecían relaciones entre ellos. Con excepción de los dos grupos mencionados, se percibe entonces que los futuros profesores mantuvieron un significado del término “estructura conceptual” diferente del significado que buscó construir el formador con el ejercicio en clase sobre la noción de derivada. Dos grupos (función cuadrática y funciones y gráficas) no manifestaron en la primera versión de su trabajo esta dificultad: esta primera versión viene ya estructurada y con relaciones. Los dos trabajos tienen aspectos comunes: hay pocos elementos y, al parecer, estos elementos son producción propia (no son producto de investigación en otras fuentes). Por otro lado, hay que resaltar que en estos dos temas es posible percibir de manera más inmediata el papel de los sistemas de representación y las relaciones entre ellos.

La Búsqueda de Significado Se Orienta hacia las Nociones Previas de la Asignatura

Ésta es una situación que ha aparecido de manera clara en sesiones anteriores en las que se introdujo la noción de organizador del currículo: los futuros profesores buscan establecer una relación entre esta nueva noción y la noción anterior de currículo con sus dimensiones y componentes. En el caso de la estructura concep-

tual, nos encontramos con una situación similar: al tratar de darle significado al término “estructura conceptual” y al tratar de organizar y producir elementos relacionados con el tema que les corresponde, varios grupos (ver documentos 5-1 y 11-1, entre otros) estructuraron su producción de acuerdo a la idea de organizadores del currículo. En algunos casos, esta situación permaneció inclusive en la transparencia en la que un par de grupos mantuvieron los errores como categoría de análisis.

El Ejemplo y la Potencia de la Proyección Metafórica para la Construcción de Significados. Normas: Expectativas y Obligaciones

La idea de “proyección metafórica” es mencionada por Sfard (2000) como mecanismo de construcción de significado social dentro del discurso. Creo que esta situación tuvo lugar de manera clara en la segunda y tercera sesión sobre estructura conceptual (cinta 40). Lo que media entre la primera producción y la segunda producción de los futuros profesores es la presentación del ejemplo de la estructura conceptual de la derivada. Se perciben cambios profundos en estas producciones en la mayoría de los grupos (documentos 4-2, 6-2, 7-2, 10-2, 11-2). La información que se ofrece en estos casos es más rica y estructurada. Parece que los grupos están utilizando la idea de estructura conceptual de manera más cercana a la propuesta por el profesor. Esto es, por lo menos parcialmente, consecuencia de que la presentación del ejemplo introdujo unas normas (expectativas y obligaciones) para la presentación que cada grupo debía hacer de su trabajo: “hay que hacerlo como lo hizo el profesor”. De esta manera, se pudo construir conjuntamente una nueva versión del significado del término “estructura conceptual”. Es posible construir argumentos sobre las razones por las cuales la idea de estructura conceptual, tal y como fue presentada en el ejemplo, permite mejorar las producciones. Tienen que ver con el esquema de mapas conceptuales como medio de presentación (no se había mencionado el término mapa conceptual en clase) y la noción de sistema de representación como elemento organizador de las ideas. Es decir, la presentación del ejemplo permitió avanzar en la construcción común del significado, creó oportunidades de aprendizaje e indujo a reorganizaciones de las producciones de los estudiantes. Hay que resaltar en todo caso los documentos 8-1,2. En este grupo (funciones y gráficas), la segunda producción parece menos rica que la primera. Parecería que las normas impuestas por el ejemplo condicionaron la estructuración de la segunda versión del trabajo. Mientras que la primera versión tenía una topología de estrella que permitía (aparentemente) establecer conexiones entre categorías, la segunda versión tenía una topología jerárquica (como la del ejemplo de la derivada). En la segunda versión se perdieron los textos sobre las flechas que aparecían en la primera versión, siendo éste el único grupo que utilizó esta técnica.

15. CODIFICACIÓN DE LAS REGULARIDADES

Estructura de la Codificación

Hemos identificado un conjunto de códigos que nos permite caracterizar las unidades de información que deseamos analizar. Estas unidades de información están compuestas por trozos de grabaciones (episodios) de clase, del grupo de función

cuadrática o de entrevistas y aspectos de documentos producidos por los futuros profesores. Hemos organizado estos códigos en varias categorías. En la categoría de *agente* tenemos a los futuros profesores como individuos, a los ocho grupos que trabajan cada uno en un tópico particular y a cada uno de los formadores. En la categoría *tópico* consideramos cada uno de los temas en los que trabajan los grupos. En la categoría *conceptos* incluimos cada uno de las nociones sobre las que se trabaja en esta parte de la asignatura (los organizadores del currículo). Y en la categoría *temas* consideramos un conjunto de aspectos que permiten caracterizar las actuaciones de futuros profesores y formadores desde las perspectivas cognitiva, social y conceptual. Ya tenemos un primer borrador de la estructura de los organizadores del currículo que nos ofrece una idea de algunos de los elementos y relaciones que caracterizan cada uno de estos conceptos y las relaciones entre ellos (ver primer apartado de este anexo). Este primer análisis es, por un lado, un marco de referencia para los posibles significados que los futuros profesores construyen sobre cada una de estas nociones y, por el otro, se puede considerar como la descripción del significado técnico propuesto dentro de la asignatura. Nuestro interés principal consiste en caracterizar el proceso mediante el cual los futuros profesores construyen el significado de cada una de estas nociones y de las relaciones entre ellas. Para ello introducimos la categoría de temas. La categoría *temas* contiene características del proceso cognitivo de los futuros profesores, junto con características del proceso de instrucción y de los conceptos involucrados en ella que pueden permitir la formulación de conjeturas acerca del proceso de construcción de significados.

En la dimensión cognitiva consideramos tres aspectos: la construcción de significado, las dificultades de los futuros profesores para construir esos significados y las reorganizaciones de esos significados. Consideramos cada uno de estos aspectos con relación a cada uno de las nociones que se incluyen en la categoría de conceptos. Se construye de esta manera una tabla con conceptos en las columnas y aspectos cognitivos en las filas. En el aspecto correspondiente a la *construcción de significado* buscamos identificar aquellas actuaciones de los futuros profesores (y de los formadores) que nos permitan conjeturar acerca de: (a) los significados parciales de uno o más futuros profesores acerca de un concepto particular o de la relación entre dos o más conceptos; (b) los esfuerzos de uno o más futuros profesores por construir el significado de un término; (c) la búsqueda de consenso por parte de futuros profesores y formadores hacia un significado técnico preestablecido del término. Mientras que el punto (a) se puede considerar como una característica individual del proceso cognitivo, buscamos incluir también los puntos (b) y (c) como características sociales del proceso de construcción de significado, en el sentido de que las actividades individuales de construcción de significado ocurren dentro de los procesos sociales de clase (o de grupo) y, por lo tanto, el proceso de aprendizaje se puede considerar como un proceso de organización conceptual tanto individual, como de enculturación (Cobb y Whitenack, 1996).

La identificación de *significados parciales* para cada una de los términos y su comparación con el significado técnico de los mismos, nos debe permitir producir conjeturas acerca de las *dificultades* de uno o más futuros profesores en su proceso de construcción de significado para cada término (es decir, en la evolución de un significado parcial a otro significado parcial). Por lo tanto, no deducimos direc-

tamente las dificultades a partir de las actuaciones de los futuros profesores, sino a partir de la caracterización de los significados parciales que ellos ponen en juego en sus actuaciones cuando resuelven tareas que involucran los conceptos. Las *reorganizaciones* se caracterizan como aquellos momentos en los que para un alumno o grupo de futuros profesores es posible identificar, a partir de la evolución de sus actuaciones y producciones, un cambio en el significado parcial de un concepto que ellos ponen en juego para realizar una tarea. Las reorganizaciones, como las dificultades, no son características directamente observables de las actuaciones de los futuros profesores, sino que se deducen del análisis de los significados parciales que ellos manifiestan en sus actuaciones.

La caracterización de la evolución del conocimiento didáctico (significados parciales, dificultades y reorganizaciones) de los futuros profesores pasa por la formulación de conjeturas acerca de los aspectos cognitivos, conceptuales y sociales que pueden explicar las dificultades y las reorganizaciones. La categoría *oportunidades de aprendizaje* incluye aquellos eventos o características de la instrucción, de la interacción entre futuros profesores y formadores y de los conceptos que pueden explicar una reorganización o una dificultad. Por lo tanto, en esta categoría incluimos tanto aquellos eventos que explican el paso de un significado parcial a otro (reorganización), como aquellos que explican el estancamiento en un significado parcial dado (dificultades).

Desde la perspectiva conceptual, consideramos la categoría *interacción entre organizadores del currículo* para identificar aquellas características conceptuales de la relación entre las nociones que, una vez que se incluyen en los significados parciales de los futuros profesores, permiten la generación de reorganizaciones (o, para ponerlo en el otro sentido, que mientras que no se incluyen en esos significados parciales, generan dificultades). Finalmente consideramos una categoría, *aspectos sociales y de instrucción* (que actualmente se llama *normas*) en la que incluimos diversos aspectos de la interacción entre futuros profesores y formadores y de la instrucción. Aquí se incluyen, entre otros, (a) aquellos eventos (actuaciones de los futuros profesores y formadores) que permiten conjeturar acerca de las expectativas que cada agente tiene sobre la actuación del otro y acerca de las obligaciones que cada agente asume en su relación con los demás agentes (se hace especial énfasis en aquellos aspectos que tengan que ver con el trabajo en grupo); (b) aquellas actuaciones de los agentes que se caracterizan por involucrar interacción entre los agentes con respecto al significado de una o más nociones; (c) los eventos en los que los formadores buscan instituir el significado de un término.

Descripción y Códigos para las Categorías

Hacemos el cruce entre las categorías de tipo cognitivo (significados parciales, dificultades, reorganizaciones y oportunidades de aprendizaje) y cada uno de los conceptos, generando una tabla de dos entradas. Es decir, tenemos una subcategoría para cada uno de estos aspectos y cada uno de estos temas (i. e. , dificultades relacionadas con la noción de análisis fenomenológico). Esto nos produce 20 subcategorías (cinco conceptos por cuatro aspectos cognitivos). Los códigos específicos a cada subcategoría tendrán que irse construyendo en la medida en que se codifica y analiza la información. Estos son los códigos que caracterizan las regularidades que se mencionan en el apartado siguiente. Las categorías interac-

ción entre organizadores del currículo y aspectos sociales y de instrucción no pueden necesariamente cruzarse de la misma manera con cada uno de los conceptos. En algunos casos (especialmente para los aspectos sociales y de instrucción) los eventos en cuestión no pueden asignarse con claridad a uno de los conceptos y en otros casos (interacción entre organizadores del currículo) los eventos tienen que ver con la relación entre dos o más conceptos. Por lo tanto, se pueden concebir estas dos categorías como filas de la tabla que no se cruzan con las columnas. Los códigos correspondientes irán siendo identificados y reformulados a medida que se hace la codificación y el análisis.

Regularidades

La idea de *regularidad* pretende reunir aquellas características de la evolución del conocimiento didáctico y del contexto en el que se da esta evolución que no dependen directamente de los agentes o del tema en cuestión. Buscamos identificar regularidades para cada una de las casillas de la tabla mencionada en el apartado anterior. Éstas son regularidades ya sea cognitivas (significados parciales, dificultades, reorganizaciones), sociales y de instrucción que permiten explicar las dificultades y las reorganizaciones (expectativas y obligaciones, establecimiento de significados, interacción social) o conceptuales (interacción entre los organizadores del currículo). El propósito que tenemos en la actualidad consiste en la identificación, codificación y justificación de esas regularidades. Un ejemplo de una regularidad es “los futuros profesores tienen dificultades para establecer conexiones puntuales en la estructura conceptual”. Se ha identificado como una dificultad por dos razones. Una, porque se ha identificado un significado parcial caracterizado por la inexistencia de conexiones puntuales en las producciones de los futuros profesores. Y dos, porque el formador ha insistido en la importancia de este tipo de conexiones sin que los futuros profesores logren producirlas. Esta regularidad estaría identificada dentro de la noción de estructura conceptual (con alguna relación con los sistemas de representación). Su justificación debería incluir aquellas producciones y actuaciones de los futuros profesores en los que se evidencia la inexistencia de las conexiones puntuales, junto con los esfuerzos del formador (y algunos futuros profesores) por instituir ese aspecto del significado técnico del término.

16. CARACTERIZACIONES, DIFICULTADES, REORGANIZACIONES Y CONJETURAS DE EXPLICACIÓN CON MOTIVO DE LAS ACTIVIDADES RELACIONADAS CON LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Contexto

Las reflexiones que se presentan a continuación surgen de la codificación y el análisis de las grabaciones de las tres sesiones sobre sistemas de representación (22/2/01 y 27/2/01, cintas 42, 45 y 46), las dos sesiones en las que se presentaron los trabajos sobre “Matemáticas y” e historia (6/3/01, cintas 47 y 48) y los documentos presentados por los futuros profesores para los trabajos sobre sistemas de

representación y sobre historia (documentos 12 a 19, 21 y 22). Es evidente que este análisis no se puede, ni se debe considerar como independiente del análisis sobre la noción de estructura conceptual descrito en los apartados anteriores. Éste se alimenta del primero y lo complementa. En la primera sesión sobre sistemas de representación (22/2/01), PG retomó los trabajos que los futuros profesores habían presentado para la tercera sesión de estructura conceptual e hizo reflexiones sobre los sistemas de representación con base en lo que aparecía en esas transparencias. Al final de esta sesión dio las siguientes instrucciones para las siguientes sesiones:

De hoy en ocho días vamos a seguir con el tema de los sistemas de representación. Y la tarea para de hoy en ocho días, la hacen como quieran, como lo hicieron para la vez pasada, es tratar de mejorar, detallar, profundizar, la estructura conceptual de cada tema, tratando de hacer énfasis, tratando de reflexionar, en el papel que pueden jugar los sistemas de representación para describir el esquema. Son dos cosas. Una, la estructura conceptual de cualquier tema, si nos ponemos a trabajar en detalle, con bastante tiempo, puede tomar tantos folios como ustedes quieran. Aun en casos de temas parezcan extremadamente precisos. Entonces lo que queremos es ver hasta donde llegamos en profundidad. Pero hasta donde llegamos en profundidad, tratando de resaltar no solamente que hay una gran cantidad de elementos, sino tratando de resaltar cómo están relacionados esos elementos, cómo están estructurados. Una de las maneras con la que podemos tener criterios para estructurarlos, es tratando de ver cómo puede aportar a esa estructura, la idea de sistemas de representación... Entonces, lo que vamos a hacer de hoy en ocho días jueves, es volver a mirar.

En la segunda sesión cada grupo presentó su propuesta y se dio tiempo para la discusión de las mismas. Al final de esta sesión, PG comenzó una presentación conceptual sobre los sistemas de representación, que no terminó.

Esquema de descripción

La descripción que sigue busca identificar aspectos que caractericen las celdas que resultan de cruzar los conceptos (estructura conceptual, sistemas de representación, análisis fenomenológico y modelización) con los temas (significados parciales, dificultades y reorganizaciones). Agregamos una fila a la tabla en la que, para cada concepto, proponemos conjeturas (la mayoría muy poco justificadas) para explicar o justificar las dificultades y las reorganizaciones identificadas. Algunas de estas conjeturas surgen de los aspectos sociales y de instrucción y de la interacción entre los organizadores del currículo. En todo caso, registramos los eventos que fueron identificados para estas dos categorías en el periodo objeto de este apartado (sesiones sobre sistemas de representación y sesiones de presentación de los trabajos de “Matemáticas y” y de historia). La presentación es esquemática. Numeramos cada uno de las afirmaciones. Estas afirmaciones se podrán codificar en un futuro. Un posible esquema de codificación será de la forma (Regularidad, Concepto, Tema). Por ejemplo la tercera afirmación sobre sistemas de representación se podría codificar, teniendo en cuenta que éste es el segundo momento en el que se hace análisis de regularidades, como (Regularidad 2, Sistemas de represen-

tación, Dificultad 3). Dentro del texto mismo utilizamos los siguientes códigos: Si para la afirmación i de significados; D_j para la afirmación j de dificultades; R_k para la afirmación k de reorganizaciones; C_l para la afirmación l de conjeturas. Como se identifican los episodios y los documentos que pueden soportar algunas de las afirmaciones, estos episodios y documentos se registrarán entre paréntesis cuadrados con los códigos E_i para episodios y D_j para documentos.

Nota: Hablamos de “significados” aunque realmente lo que registramos son caracterizaciones de las actuaciones y las producciones de los estudiantes. Es decir, registramos el uso que ellos hacen de esos significados. Estas caracterizaciones se encuentran registradas en la serie de documentos titulados *caracterizaciones* (y llamados *regularidades* en su primera versión). En estos documentos se describe cada caracterización, se propone una primera interpretación de la misma y se justifica con base en los episodios y los documentos que la sustentan. Al comienzo de cada caracterización se indica en paréntesis cuadrados el número del documento correspondiente.

Estructura Conceptual

Caracterización

- 1) [1] El primer tipo de producciones de los futuros profesores consiste en un listado de temas y conceptos [esta situación ya se justificó en el primer apartado].
- 2) [2] La estrategia inicial de organización de la estructura conceptual se basa en reunir los elementos en categorías que corresponden a los organizadores del currículo [esta situación ya se justificó en el primer apartado].
- 3) [3] Las estructuras conceptuales comienzan a presentar cierta complejidad (aumento del número de elementos y de relaciones), pero se mantiene una “visión conceptual” en la que se identifican conceptos relacionados con el concepto en cuestión dentro de una representación formal o analítica, dejando los sistemas de representación aparte. La estructura conceptual no se encuentra organizada con base en los sistemas de representación.
- 4) [4] En algunos casos, la organización de la estructura conceptual se basa en el trabajo de investigación histórica. [5] En otros, se aprecia un esfuerzo por utilizar los sistemas de representación como elemento organizador.
- 5) [6] Relacionar significa reunir en una misma categoría sin establecer relaciones entre los elementos.
- 6) [7] Aparece la consciencia de la relación entre los diferentes elementos. Se hace la frase “Todo está relacionado”.
- 7) [8] A pesar de la consciencia sobre la relación entre los elementos, las conexiones son o jerárquicas o globales. No aparecen las conexiones puntuales internas o externas.
- 8) [9] Algunos grupos comienzan a presentar unas pocas conexiones puntuales externas (muy pocas internas).
- 9) [10] Lo fenomenológico forma parte de la estructura conceptual.

Dificultades

- 1) Es aparente que la organización como listado de los elementos que tienen que ver con un concepto no habría cambiado sin la intervención de la instrucción.
- 2) Los futuros profesores no tienen criterios que les permitan organizar los elementos de la estructura conceptual. Por eso, acuden a nociones previas de la asignatura (organizadores del currículo, historia) para generar algunas categorías que permiten organizar la estructura conceptual.
- 3) Se aprecian dificultades para construir un significado técnico y operacional del término “relacionar”.
- 4) No se presentan conexiones puntuales internas y externas.
- 5) Cuando las conexiones puntuales aparecen, lo hacen de manera parcial.
- 6) Los fenómenos permanecen como parte de la estructura conceptual.

Reorganizaciones

- 1) [S1 a S2] Las producciones pasan de un listado a estar organizadas de acuerdo a los organizadores del currículo.
- 2) [S1, S2 a S3] Se comienzan a producir estructuras conceptuales más complejas de tipo conceptual que no están organizadas con base en los sistemas de representación.
- 3) [S1, S2, S3 a S4] En algunos casos se utiliza la historia como eje organizador.
- 4) [S1 - S4 a S5] Comienzan a aparecer organizaciones basadas en sistemas de representación.
- 5) [S5 a S6] Aparece la consciencia sobre las relaciones.
- 6) [S5, S6 a S8] Aparecen algunas conexiones puntuales.

Conjeturas de Explicación de Dificultades y Reorganizaciones

- 1) [D1] Es posible que la formación previa de los futuros profesores los induzca a concebir la idea general de concepto como algo que no tiene necesariamente estructura (“una categoría que permite clasificar instancias”, es una frase que se mencionó algunas veces). Esta concepción del término concepto y su misma formación matemática (es decir su visión sobre la naturaleza de las matemáticas) no les permite ser conscientes de la característica estructural de todo concepto matemático y esto puede explicar su tendencia a producir listados que se encuentran organizados en unas pocas categorías. La instrucción buscó desde un comienzo enfatizar la importancia de la estructura y de las relaciones, pero éstas instrucciones no fueron comprendidas.
- 2) [D2, R1] Ya hemos registrado en el apartado anterior sobre regularidades que los futuros profesores buscan construir el significado de un término con base en nociones previas de la asignatura. Esto puede explicar las producciones de estructura conceptual organizadas por organizadores del currículo. El paso de listado a organización por organizadores del currículo se explica por los requisitos de la instrucción y el hecho de que los futuros profesores buscan utilizar las nociones

previas de la asignatura. Parece que no relacionan el ejercicio de estructura conceptual con su propio conocimiento matemático.

3) [D3, D4 y D5] Los futuros profesores tienen una concepción parcial de lo que significa relacionar en matemáticas. Su manera de organizar los listados y el número de conexiones puntuales es una expresión de su concepción de lo que es una estructura matemática como una estructura formal o conceptual con especial énfasis en los aspectos simbólicos.

4) [D6] Los fenómenos aparecieron desde el primer ejercicio que se hizo sobre estructura conceptual. Sin embargo, su permanencia dentro de la estructura conceptual se consolidó con motivo del ejemplo presentado por la instrucción.

5) [R2] La estructura conceptual se vuelve más compleja, pero siguiendo un esquema “conceptual” que puede ser, ahora sí, producto de su visión de las matemáticas en las que las representaciones diferentes de la simbólica no tienen gran importancia.

6) [R3] Los futuros profesores se encuentran haciendo paralelamente el trabajo de historia. Este trabajo les da información que les permite organizar la estructura conceptual. Éste es un caso particular de la conjetura C2.

7) [R4] la reorganización por sistemas de representación parece ser una consecuencia evidente de la instrucción con el ejemplo de la derivada. En el apartado anterior ya se registró como la potencia de la proyección metafórica. La instrucción también enfatizó esto, tanto en clase, como en los comentarios que se hicieron a la tarea 2.

8) [R5] La consciencia de las relaciones es consecuencia evidente del uso que los futuros profesores comienzan a hacer de los sistemas de representación. Se dan cuenta de que están representando de diferentes maneras un mismo objeto.

9) [R6] Los tópicos en los que aparecen las conexiones puntuales son de carácter particular (la esfera, cuyo grupo ubicó desde un comienzo el documento de *Síntesis* para este tema) y los relacionados con funciones (funciones y gráficas y función de segundo grado) en los que la relación entre lo simbólico y lo gráfico parece ser más evidente que en otros temas.

Sistemas de Representación

Caracterizaciones

1) [11] Sistemas de representación que no son sistemas de representación. Aparecen sistemas de representación como el lenguaje cotidiano, lo verbal matemático, lo “real”, lo “virtual” y fenómenos matemáticos.

2) [12] Se identifica como sistema de representación a aquellas situaciones en las que aparecen símbolos matemáticos, aún si la situación no contiene reglas para la manipulación de las expresiones correspondientes.

3) [13] Aparecen nuevos sistemas de representación en algunos trabajos (como los diagramas de Venn). Se dan confusiones entre sistemas de representación (diagramas de Venn y tablas de valores).

- 4) [14] El sistema de representación simbólico se considera como lo “conceptual”, pero no se incluye en los sistemas de representación.
- 5) [15] Se sugieren jerarquías en los sistemas de representación. Se considera el lenguaje cotidiano o la representación “real” como “primarios”, aunque se propone el sistema de representación simbólico como el más importante.
- 6) [16] Los sistemas de representación numérico y simbólico dependen del sistema de representación gráfico.
- 7) [17] La importancia de los sistemas de representación depende de dónde se utilicen: dentro y fuera de las matemáticas.
- 8) [18] Se produce una estructura conceptual compleja y se ponen los sistemas de representación como algo complementario.
- 9) [19] Se considera lo fenomenológico como un sistema de representación.
- 10) [20] Los sistemas de representación organizan la estructura conceptual.
- 11) [21] No aparecen conexiones puntuales internas o externas a los sistemas de representación.
- 12) [22] Aparecen algunas conexiones puntuales.

Dificultades

- 1) [S1, S2] Es evidente que la concepción intuitiva inicial de los sistemas de representación se encuentra, en varios aspectos, alejada de la concepción técnica del término.
- 2) [S4, S8] La concepción de lo conceptual y lo simbólico como externo a los sistemas de representación y los sistemas de representación como complemento de lo conceptual y simbólico.
- 3) [S5, S6, S7] La idea de jerarquías y orden dentro de los sistemas de representación aparece en varias instancias.
- 4) [hasta S10] Se percibe dificultad para estructurar la estructura conceptual con base en sistemas de representación.
- 5) [S8] Las representaciones corresponden principalmente a lo gráfico y se ubican como complementario a la estructura conceptual.
- 6) [S9] La persistencia de lo fenomenológico dentro de los sistemas de representación.
- 7) [S11] No aparecen las conexiones puntuales.

Reorganizaciones

- 1) Paso de organización por listado y organizadores del currículo a organización por sistemas de representación.
- 2) [a S3] Aparecen nuevos sistemas de representación en las producciones de los futuros profesores.
- 3) [S8] Aparecen los sistemas de representación, pero como complementarios a la estructura conceptual.

- 4) [S10] Los sistemas de representación comienzan a organizar la estructura conceptual.
- 5) [S12] Comienzan a aparecer algunas conexiones puntuales.

Conjeturas de Explicación de Dificultades y Reorganizaciones

- 1) [D1] La concepción que tienen de sistema de representación proviene del lenguaje cotidiano y de su experiencia previa. No han tenido formación específica sobre el significado técnico del término.
- 2) [D2] La importancia de lo simbólico y lo conceptual proviene de su propia formación matemática y de su visión sobre la naturaleza de las matemáticas. Ellos lo confirman.
- 3) [D3] No es claro de dónde proviene la idea de jerarquía en los sistemas de representación. Puede ser de su formación matemática cuando resaltan lo simbólico y de sus preocupaciones didácticas cuando resaltan un orden o las representaciones “reales”.
- 4) [D4, D5] No logran organizar la estructura conceptual con base en sistemas de representación porque su concepción de las estructuras matemáticas es simbólica y conceptual.
- 5) [D6] No es evidente por qué no logran producir estructura conceptual con conexiones puntuales. En algunos casos las estructuras conceptuales no tienen suficiente detalle y ésta puede ser una razón. En otros casos, es posible que sea por la menor importancia que le dan a los sistemas de representación diferentes del simbólico.
- 6) [R1] Se pidió que organizaran la estructura conceptual y la instrucción hizo énfasis en la utilización de los sistemas de representación para estos efectos.
- 7) [R2] Se pidió en la instrucción. Es posible que el trabajo de historia les diera pistas sobre nuevos sistemas de representación.
- 8) [R3] Ya se ha hecho una conjetura sobre esto en el apartado de estructura conceptual. Esta situación de poner los sistemas de representación como complementarios a una estructura conceptual formal parece ser consecuencia de su visión de la naturaleza de las matemáticas.
- 9) [R4] Ya hay también una reflexión al respecto que repetimos aquí: los temas en los que aparecen las conexiones puntuales son de carácter particular (la esfera, cuyo grupo ubicó desde un comienzo el documento de Síntesis para este tema) y los relacionados con funciones (funciones y gráficas y función de segundo grado) en los que la relación entre lo simbólico y lo gráfico parece ser más evidente que en otros temas.

Fenomenología

Caracterizaciones

- 1) [10] Lo fenomenológico como parte de la estructura conceptual.
- 2) [19] Lo fenomenológico como sistema de representación.

3) [23] Algunos grupos comienzan a rechazar lo fenomenológico como parte de la estructura conceptual.

4) [24] Aparece la noción de modelización.

Dificultades

1) [S1] Lo fenomenológico permanece en la estructura conceptual.

2) [S2] Lo fenomenológico permanece como sistema de representación.

Reorganizaciones

1) [S1, S2 a S3] Un grupo rechaza lo fenomenológico como parte de la estructura conceptual

2) [S2] Aparece la modelización.

Conjeturas de Explicación de Dificultades y Reorganizaciones

1) [D1, D2, R1] Lo fenomenológico apareció en el primer intento informal de construir una estructura conceptual para la derivada. Se consolidó con motivo del ejemplo de PG para la nueva estructura conceptual de la derivada. La discusión sobre la pertenencia de lo fenomenológico a la estructura conceptual y sobre la importancia de lo fenomenológico en las matemáticas es expresión de posiciones alternativas acerca de la naturaleza de las matemáticas.

2) [R2] El esfuerzo por organizar la estructura conceptual con base en sistemas de representación (permitiendo que permanezca lo fenomenológico) puede generar consciencia sobre los problemas de modelización.

Interacción entre Organizadores

1) [4] la historia organiza la estructura conceptual.

2) [7] La necesidad de usar sistemas de representación (comentarios a la tarea 2 para hacer la tarea 3) genera la consciencia de que “todo está relacionado”.

3) [25] La historia parece haber consolidado la importancia de lo fenomenológico.

4) [20] Los sistemas de representación permiten organizar la estructura conceptual.

Aspectos Sociales y de Instrucción

1) [26] Presentación de trabajos y papel de la crítica: los futuros profesores no están acostumbrados a criticar y cuando son criticados, buscan defenderse.

2) [27] Comienza a haber discusión técnica entre futuros profesores.

3) [28] Instancias de establecimiento de significado técnico por parte del profesor: para estructura conceptual, sistema de representación, conexiones puntuales, múltiples interpretaciones de las nociones de la educación matemática, fenómeno matemático.

4) [29] Importancia de las instrucciones para las actividades y de los comentarios a los trabajos realizados.

- 5) [30] Aspectos del trabajo en grupo: no querer meterse en el tema de otro grupo; los grupos se están reuniendo para hacer los trabajos, aunque no se haya pedido explícitamente y se recojan las producciones, pero se enfatice la presentación.
- 6) [31] Se dan quejas sobre la falta de claridad de las instrucciones para las tareas.
- 7) [32] Se hace discurso sobre el diseño de la asignatura: objetivos y público de la unidad didáctica y el problema de los temas demasiado generales.

17. DE UNAS CONJETURAS GENERALES PARA LAS ACTIVIDADES RELACIONADAS CON LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL A CARACTERIZACIONES, DIFICULTADES, REORGANIZACIONES Y CONJETURAS DE EXPLICACIONES PARA LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

En este apartado relato el proceso realizado entre el 21 de febrero de 2001 y el 13 de marzo de 2001. En este periodo se pasó de un primer esquema de transcripción, codificación y análisis de la información que acabo de presentar a una serie de esquemas sucesivos que dieron lugar al instrumento definitivo de codificación y análisis.

Sistema de Codificación Inicial

El sistema de codificación inicial consistió en registrar en la base de datos *Cintas* la secuencia de eventos o episodios que se identificaban en la grabación y seleccionar aquellos episodios que merecían ser transcritos literalmente en la base de datos *Eventos* de clase. En la base de datos *Cintas* cada clase corresponde a un registro que contiene, además de la descripción cronológica de los episodios, la fecha de la clase, el profesor, una descripción y una primera interpretación. Aquellos episodios que se transcriben literalmente se identifican dentro de la descripción. En la base de datos *Eventos* se registra, además de la transcripción del episodio, el número del mismo, la cinta de la que proviene, un título, las dimensiones (conceptos) y temas a los que corresponde, los participantes en el episodio y una interpretación del mismo.

Con base en la información que se registró en estas dos bases de datos, fue posible hacer un primer análisis de la información que produjo cuatro ideas que se consignaron en el primer apartado de este anexo: dificultades con la noción de concepto, dificultades con la noción de estructura conceptual, el recurso a nociones previas de la asignatura para construir significado y la potencia de la proyección metafórica para la construcción de significado.

Codificación de Grabaciones para las Sesiones sobre Sistemas de Representación

Las sesiones sobre sistemas de representación contenían gran cantidad de información con motivo de la metodología utilizada: los futuros profesores produjeron transparencias y las presentaron en clase. En algunas ocasiones se generó discusión entre los futuros profesores y fue posible comparar la evolución de la produc-

ción de los futuros profesores. Creamos entonces una nueva base de datos *Documentos* que contiene la información relacionada con los documentos que se han ido utilizando en la asignatura. En esta base de datos se incluye tanto los documentos entregados por los futuros profesores, como las transparencias utilizadas por los formadores y los documentos que se le entregan a los futuros profesores. Cada registro de esta base de datos contiene la siguiente información del documento: número, cinta a la que corresponde, si es el caso, fecha, título, autores, descripción, interpretación, dimensiones (conceptos) e indicadores (más tarde se agregaron las conexiones a episodios y caracterizaciones —hipótesis— que se explican abajo).

Al comenzar la codificación de estas sesiones (cintas 45 a 48) nos dimos cuenta de que las ideas propuestas en el primer documento eran realmente hipótesis o conjeturas sobre lo que estaba sucediendo en clase y que era posible justificar esas conjeturas a partir del análisis de los episodios y los documentos. Creamos entonces la base de datos *Hipótesis* con el propósito de registrar estas conjeturas y, en particular, de registrar la relación entre estas conjeturas y los episodios y documentos, por un lado, y las dimensiones (conceptos) y los temas, por el otro. Esta base de datos contiene entonces la siguiente información: número, fecha, título, descripción, justificación, dimensiones (conceptos), temas e indicadores. En algún momento se estableció la conexión automática entre cada hipótesis y los episodios y los documentos en los que sustenta. De hecho, el campo justificación contiene un resumen de esos episodios y documentos que permiten producir la conjetura en cuestión.

No Son Conjeturas, Sino Regularidades

En la medida que producíamos las transcripciones, identificábamos episodios y, con base en su interpretación, tratábamos de producir hipótesis sobre los mismos, nos dimos cuenta de que, en muchas ocasiones, lo que nos llamaba la atención de la información no eran las hipótesis que podíamos producir sino cierto tipo de regularidades relacionadas con los significados que los futuros profesores ponían en juego en sus actuaciones y producciones. Pasamos entonces a la idea de regularidades. Cuando terminamos de transcribir, codificar y registrar la información iniciamos un proceso de análisis de la misma consistente en intentar resumirla y acomodarla a algún tipo de estructura.

Tomamos entonces la información de la base de datos de Regularidades (antigua base de datos Hipótesis) y produjimos a mano una serie de registros resumidos de la misma en la que identificábamos una etiqueta para la regularidad y registrábamos resumidamente las ideas de los episodios y los documentos que la sustentaban. Al final de este proceso buscamos producir una estructura de este resumen. De aquí surgió una primera tabla de los elementos conceptuales que nos permitirían volver a hacer la codificación. Esta tabla cruzaba los conceptos de la asignatura (ya no los llamábamos dimensiones) con lo que veníamos llamando temas y que surgen de la metodología utilizada por Cobb: significados (individuales y sociales), dificultades de aprendizaje, oportunidades de aprendizaje, reorganizaciones, normas y interacción entre organizadores del currículo (éste último, nuestro). En retrospectiva, podemos anotar aquí que durante todo este periodo encontramos muchas dificultades para codificar episodios, documentos y regularida-

des con respecto a estos temas. Un mismo episodio o regularidad terminaba siendo codificado con varios temas: significado, dificultad y oportunidad de aprendizaje, por ejemplo (más adelante se explica la razón de esta dificultad y la manera como se resolvió).

Al reflexionar sobre la tabla mencionada en el párrafo anterior (que cruza conceptos con temas), nos dimos cuenta de que era posible encontrarle una estructura a las ideas contenidas en la categoría de temas (la propuesta de Cobb no sugiere ninguna estructura particular). Esta estructura surgió de introducir la idea de significados parciales. Con base en esta idea, nos fue posible describir mejor el significado de los términos dificultades, reorganizaciones y oportunidades de aprendizaje. Esto surgió al preguntarnos qué era lo que debía ir en cada casilla de la tabla, cómo deberíamos expresarlo y de qué manera deberíamos codificarlo. Propusimos entonces que un significado es parcial cuando no corresponde con el significado técnico del término. Se da una dificultad cuando se aprecia que uno o más futuros profesores no pueden construir un nuevo significado parcial, aun si la instrucción pretende inducirlos. Una reorganización es un paso de un significado parcial a otro y la oportunidad de aprendizaje es la circunstancia (social, conceptual o de instrucción) que da lugar a esa reorganización. De esta manera, las ideas de normas y de interacción entre organizadores del currículo cobraban sentido dentro de esta estructura. En este momento nos dimos cuenta de que la categoría temas a la que nos estamos refiriendo aquí tenía elementos de diferentes tipos: unos eran de carácter cognitivo (significados, dificultades, reorganizaciones), otros eran de tipo social (interacción entre futuros profesores y profesores, instrucción) y otros eran de tipo conceptual (interacción entre los organizadores del currículo).

Profundización en la Categoría Temas

Produjimos entonces los siguientes componentes de la categorías temas.

Construcción de significado, como un elemento cognitivo que se aprecia a partir de las actuaciones y producciones de los futuros profesores y que se expresa en la búsqueda de consenso por parte de futuros profesores y formadores hacia un significado técnico establecido; en los esfuerzos por construir el significado de un término; y en las expresiones de significados parciales. Vimos entonces que le podíamos dar un “significado didáctico” a las actuaciones y producciones de los futuros profesores: eran regularidades en las actuaciones de futuros profesores y formadores que, al ser interpretadas, permiten describir regularidades de otro tipo (cognitivo, conceptual, social). Es decir, nos dimos cuenta de algo evidente: nosotros no estábamos registrando significados, sino actuaciones y producciones de los futuros profesores y que el registro, codificación y análisis de esas actuaciones y producciones nos permitía, al interpretarlas, formular conjeturas acerca de los significados puesto en juego, de las dificultades, etc.

El segundo elemento era también cognitivo: las dificultades. En este momento describimos este término como las dificultades de los futuros profesores en hacer la transición de significados intuitivos y parciales a significados más técnicos y completos. Nos preguntamos sobre cómo se podían expresar esas dificultades y sobre las posibles razones para esas dificultades (características del concepto, características de la experiencia, el conocimiento y las creencias de los futuros

profesores, y características de la instrucción y la interacción social ente futuros profesores y formadores).

La idea de oportunidades de aprendizaje continuaba presente. La veíamos como un elemento relacionado con la instrucción y la interacción social y, por primera vez, nos dábamos cuenta de que no era algo que podíamos observar en los datos, sino que sería algo que tendríamos que deducir de las actuaciones y producciones de los futuros profesores. Produjimos la siguiente descripción de las oportunidades de aprendizaje: es la caracterización de eventos de la instrucción, la interacción entre futuros profesores y profesores y del contenido que abren espacios para la reorganización conceptual de los futuros profesores. Por lo tanto, nos dimos cuenta (y lo registramos explícitamente en nuestros apuntes) que las oportunidades de aprendizaje se deben deducir de las reorganizaciones y que no se pueden observar explícitamente.

Las reorganizaciones es el cuarto elemento. De nuevo, lo identificamos como un elemento cognitivo, pero, en este momento, seguíamos convencidos que podríamos deducirlo directamente de los datos. Hablábamos de las reorganizaciones de las concepciones de los futuros profesores que se observan en sus actuaciones y sus producciones. Estas actuaciones y producciones deben ser analizadas a partir del análisis conceptual de las nociones en cuestión (significado técnico de los conceptos) y de su aplicación a tópicos específicos.

Continuábamos utilizando el término normas para el quinto elemento y seguíamos utilizando las ideas de las normas socio-matemáticas de Cobb (1995): las expectativas de cada agente con respecto a los demás, las obligaciones que cada agente asume y el trabajo en grupo.

Finalmente, veíamos el sexto elemento, la interacción entre los organizadores del currículo, como un elemento de carácter conceptual y nos preguntábamos, para efectos de la codificación, sobre la manera como las actuaciones de los futuros profesores y los formadores muestran la relación entre los organizadores del currículo en el análisis del tema particular.

Pensamos que podíamos analizar cada dimensión (no habíamos cambiado aún al término concepto) desde la perspectiva de los primeros cinco elementos de la categoría temas. Pensamos entonces que cada una de las casillas de la tabla de cruce entre dimensiones (conceptos) y temas tiene su propia descripción y que esa descripción no era posible producirla a priori, sino que había que construirla a partir de los mismos datos. Concluimos entonces que debíamos rellenar cada casilla de la tabla con nuestras conjeturas sobre las regularidades que han aparecido.

La caracterización de los componentes de la categoría temas nos permitió producir un nuevo esquema de la estructura de estos componentes.

Nuevo Análisis de los Datos

Con base en este nuevo marco conceptual y en el esquema de codificación que éste genera, volvimos a pasar por cada uno de los documentos, episodios e hipótesis para hacer una nueva codificación y un nuevo análisis. Esta codificación seguía las columnas de la tabla (los conceptos) y buscaba etiquetar cada ítem con por lo menos una de las filas (temas). Buscábamos rellenar la tabla, tratando de caracterizar el contenido cada una de las casillas. Este análisis lo hicimos de manera cronológica, considerando cada concepto por separado y buscando los episo-

dios y documentos que se referían a cada uno de ellos. Obtuvimos entonces un listado de episodios y documentos para cada concepto etiquetados con los componentes de la categoría temas. Decidimos hacer un análisis de estos listados y producir unos nuevos listados organizados ahora, para cada concepto, de acuerdo a las nociones de significado, dificultad, reorganización, oportunidad de aprendizaje y normas. Pero, en este momento, nos dimos cuenta de que la componente *oportunidades de aprendizaje* desaparecía de la codificación. Es decir, el nuevo análisis no nos había producido ningún ítem con ese código, mientras que sí lográbamos identificar datos que se podían codificar con los otros códigos.

Al organizar los datos, dentro de cada concepto, por significados parciales y dificultades, pudimos dar un nuevo sentido a la idea de dificultad y escribimos: “quiere decir esencialmente significados claramente identificables que permanecen a pesar de estímulos que pretenden cambiarlos, aunque esta condición no es necesaria”. Por lo tanto, pudimos relacionar dificultades con significados parciales. De la misma manera, relacionamos reorganizaciones con pasos de un significado parcial a otro. Al tener más claridad sobre las dificultades y las reorganizaciones y al darnos cuenta de que *ninguna de las dos se puede observar directamente en los datos sino que se deduce del análisis de los significados*, también nos dimos cuenta de que las conjeturas que estábamos haciendo eran conjeturas para explicar las dificultades y las reorganizaciones. Por esa razón, cada afirmación del listado de conjeturas de explicación está relacionada con una dificultad o con una reorganización. Nos pareció que este último esquema tenía bastante sentido.

Al analizar el tipo de conjeturas que estábamos haciendo percibimos que *algunas de ellas* se basaban en información que teníamos: tenían que ver con los aspectos sociales de la interacción, con aspectos de la instrucción y con las cuestiones conceptuales de la interacción entre organizadores del currículo (y de esta manera transformamos y le dimos sentido a la noción de Cobb sobre normas). Pero había también varias conjeturas que tenían que ver con aspectos cognitivos de los estudiantes: sus conocimientos y creencias acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. Por estas razones, decidimos que debíamos, por un lado, revisar los estudios que existan sobre creencias de futuros profesores en España a este nivel y, por el otro, diseñar entrevistas con miembros de grupos o grupos completos que nos permitan verificar dichas conjeturas.

Estamos próximos a comenzar este proceso. Cuando nos encontrábamos escribiendo el tercer apartado de este anexo, nos dimos cuenta de que no tiene sentido que nos refiriéramos con el término significado a las caracterizaciones que estábamos haciendo de las actuaciones y producciones de los futuros profesores y que estábamos identificando en las grabaciones y en los documentos. Lo que estábamos registrando no eran significados. Eran actuaciones y producciones de los futuros profesores que muy seguramente eran producto de los significados parciales que ellos se encuentran construyendo. Por lo tanto, dejamos de hablar de significados y comenzamos a hablar de caracterizaciones. De esta manera, eliminamos las bases de datos Hipótesis y Regularidades y creamos una nueva base de datos llamada Caracterización Actuaciones en la que registramos esta información, y en la que incluimos, para cada caracterización, los episodios y los documentos que la sustentan. Esto implicó, por lo tanto, una nueva codificación. En esta nueva codi-

ficación establecimos con más claridad las conexiones automáticas entre caracterizaciones, por un lado, y episodios y documentos, por el otro. La base de datos Caracterizaciones es nuestra manera de rellenar las casillas de la tabla que se mencionó arriba. Cada registro de esta tabla, además de tener un número, la fecha, un título, una descripción, el tema, los conceptos y los tópicos (grupos) a los que corresponde, tiene un campo de justificación en el que se registran los episodios y los documentos que dieron lugar a la caracterización.

Anexo M

FENOMENOLOGÍA. ANÁLISIS DE TRANSPARENCIAS

En el caso de la noción de fenomenología, hubo muy pocas intervenciones de los futuros profesores en clase. Por lo tanto, no tenemos evidencia para analizar en ese aspecto. No obstante, la variedad de significados parciales puestos en juego en las presentaciones y las restricciones del análisis de las presentaciones me indujeron a explorar y analizar en detalle cada una de las transparencias de los grupos de futuros profesores. Éste fue un proceso cíclico de análisis en el que fui construyendo las categorías de análisis a medida que codificaba las transparencias. Al final de un ciclo, revisaba las categorías de análisis y volvía a codificar las transparencias. A continuación, presento el resultado de la codificación y el análisis en tres pasos:

- ◆ descripción y análisis de las transparencias de cada grupo ;
- ◆ caracterización de los cambios en las transparencias de cada grupo; y
- ◆ análisis comparativo de estos cambios.

Grupo funciones y gráficas

Este grupo presenta tres ideas de fenomenología en su segunda transparencia (documento 8.2): espacio-tiempo, proporcionalidad y estadística. En la presentación, no dan más detalles. Observamos que, en la primera idea, hay una relación con las variables involucradas en la función; en la segunda, una referencia a la regla que define la función; y, en la tercera, una referencia a un contexto matemático del que surgen diferentes tipos de funciones.

En la cuarta transparencia (documento 24), el grupo detalla su primera propuesta. La idea de espacio – tiempo se transforma en una categoría que agrupa fenómenos relacionados con la trayectoria que define un cuerpo. El grupo presenta algunos ejemplos. Mantiene la idea de tasas de variación, omite la idea de pro-

porcionalidad e introduce una nueva categoría que denomina “modelización de situaciones empíricas” en la que incluye dos ejemplos de tipo biológico. Este uso del término “modelización” sugiere un significado particular del mismo, restringido aparentemente a fenómenos biológicos. Al parecer, para los fenómenos de tasas de variación y de trayectorias de cuerpos, ellos presentan los modelos mismos, en cambio de referirse a los fenómenos. Éste es tal vez el sentido en que se refieren, por ejemplo, a los perfiles de las etapas de ciclismo.

En la siguiente transparencia (documento 40), el grupo profundiza en su propuesta anterior e incluye una nueva categoría denominada “fenomenología asociada a familias de funciones”. En la primera parte, las categorías “tasas de variación” y “trayectoria que describe un cuerpo” incluyen nuevos ejemplos y representaciones gráficas. Ya no se habla de “modelización”, sino de “tratamiento de situaciones empíricas”. Aparece una nueva categoría que se refiere a fenómenos discretos, en el que se incluyen ejemplos como el de la “altura de 7 individuos respecto a su edad”. Observamos que el término “modelización” desaparece de la presentación, aunque se mantiene una separación entre los fenómenos biológicos (considerados como “empíricos”) y los fenómenos físicos y económicos. No obstante, los ejemplos que proponen no se refieren únicamente a modelos, como sucedía en la transparencia anterior. Esto puede ser una consecuencia de las discusiones sobre modelización que tuvieron lugar en clase y puede indicar un cambio en el significado que el grupo le asigna al término. En la segunda parte, encontramos por primera vez una clasificación de fenómenos de acuerdo con subestructuras de la estructura matemática en la que trabaja el grupo. Se trata de algunas familias de funciones. En algunos casos, se presenta un fenómeno específico y se identifica una ley natural con la que se establece una relación implícita entre el fenómeno y la subestructura (por ejemplo, para las funciones exponenciales y la depreciación del precio de un automóvil). No obstante, esta aproximación no es sistemática y las subestructuras no organizan la diversidad de fenómenos.

Las transparencias 6 a 8 (documentos 59, 71 y 91) no hacen ninguna referencia al análisis fenomenológico. En la transparencia 8 se presenta un problema en el que interviene el nivel de líquido dentro de una botella, pero no parece que el grupo sea consciente de su relación con la fenomenología. En el trabajo final (transparencia 9, documento 112), aparece un nuevo criterio de organización basado en la clasificación de los fenómenos en continuos, discretos y periódicos. Sin embargo, el grupo no entra en detalle en esta descripción y no establece relaciones entre las subestructuras y los fenómenos. Propone adicionalmente una clasificación de los fenómenos por áreas.

Las transparencias de este grupo presentan cambios en términos del análisis fenomenológico, pero también evidencian un significado parcial de la noción, que se manifiesta en su puesta en práctica. La construcción de ese significado se inicia con una aparente confusión con el término modelización. Por un lado, parece que el grupo sólo considera que se pueden modelizar fenómenos biológicos. Por el otro, presentan como fenómenos, modelos funcionales de los mismos. En esta primera fase, por lo tanto, no se aprecia ninguna relación entre los fenómenos y la estructura matemática. En la quinta transparencia, se aprecian cambios: ya no se utiliza el término “modelización”; se proponen fenómenos y no solamente modelos funcionales; y se presenta una clasificación de los fenómenos de acuerdo con

familias de funciones. Hasta esta transparencia, el grupo mantiene una clasificación en cuatro categorías: tasas de variación, trayectorias de cuerpos, situaciones empíricas y fenómenos discretos. En el trabajo final, esta clasificación desaparece, junto con la idea de familias de funciones. Allí aparecen nuevas subestructuras (continuo, discreto, periódico), pero estas subestructuras no organizan la diversidad de fenómenos y no se establecen relaciones claras entre dichos fenómenos y las subestructuras.

Grupo progresiones aritméticas y geométricas

No hay ninguna mención a lo fenomenológico en la primera transparencia de este grupo (documento 6.1). En la segunda (documento 6.5), aparece una categoría, dentro de la estructura conceptual, denominada “fenomenológico”, que incluye el término “interés bancario”. En la tercera transparencia, aparece una categoría denominada “fenomenología”, con una lista de siete fenómenos. Los fenómenos están clasificados en progresiones aritméticas y geométricas. Para la mayoría de ellos, se identifica el modelo matemático correspondiente y, en el caso, de los dos fenómenos físicos, se propone la ley que los caracteriza.

La cuarta transparencia (documento 6.5) tiene características similares a la tercera, excepto que se sugieren tres subestructuras complementarias (sucesiones crecientes, decrecientes y constantes). En esta transparencia, las subestructuras organizan los fenómenos. No obstante, aunque en algunos casos se presenta el modelo matemático, no se propone ningún análisis estructural de los fenómenos y, por lo tanto, tampoco se describe la relación entre la subestructura y el fenómeno correspondiente.

La quinta transparencia (documento 35) contiene toda la información anterior; se incluyen nuevos fenómenos naturales; y se agrega un nuevo criterio de organización por disciplinas: geología, economía, ciencias sociales, biología y geometría. Ésta es la primera transparencia en la que se incluyen fenómenos matemáticos.

En las transparencias 6 a 8 (documentos 61, 67 y 89), la única mención al análisis fenomenológico aparece en el análisis de dificultades. Allí se propone como dificultad el “reconocimiento de una progresión en el lenguaje cotidiano” (documento 61). La mención del lenguaje cotidiano y el hecho de que no hay ningún otro análisis complementario, da a entender que el grupo no establece realmente una relación entre el trabajo hecho en las transparencias anteriores y la propuesta que se hace aquí.

En el trabajo final (transparencia 9, documento 113) no se aporta información nueva. Los fenómenos aparecen ahora organizados por disciplinas y las subestructuras son solamente etiquetas que se agregan a las frases que describen los fenómenos. Desaparecen los modelos matemáticos y la referencia a las leyes que rigen los fenómenos naturales.

Las transparencias de este grupo se caracterizan, por lo tanto, por la aparición temprana de subestructuras de la estructura matemática que organizan los fenómenos, por la inclusión de los modelos matemáticos correspondientes a algunos de los fenómenos y por la identificación de leyes naturales para algunos de ellos. Sin embargo, ninguna transparencia presenta el análisis estructural del fenómeno, ni la descripción explícita de la relación entre la estructura matemática y el mode-

lo matemático correspondiente. En el trabajo final, el grupo logra organizar los fenómenos por subestructuras y por disciplinas.

Grupo números decimales

En este grupo, la fenomenología aparece desde su primera transparencia. En ella (documento 4.1), se incluye una categoría denominada “Aplicaciones / Fenomenología”, en la que se presenta una lista de términos generales como “longitud, medida, proporciones”, fenómenos matemáticos como el sistema de numeración en base 10, modelos como el ábaco, sistemas de representación como la recta y los porcentajes, y finalmente algo que el grupo denomina “uso en la vida diaria”. En la segunda transparencia (documento 4.2), lo “fenomenológico” aparece como una de las categorías principales de la estructura conceptual. El listado se simplifica a una familia de fenómenos llamados “medidas” (longitud, volumen, área), a una referencia a la proporcionalidad y los porcentajes, y a la inclusión del término probabilidad. La tercera transparencia (documento 19) contiene la misma información que la anterior, pero organizada de manera diferente. La categoría “medidas” ha sido cambiada a “sistema métrico decimal” y los porcentajes ahora se incluyen como un elemento de la categoría “proporciones”.

La cuarta transparencia (documento 26) presenta un cambio radical de aproximación. Al parecer, el grupo decidió seguir las guías de la fenomenología didáctica, y presenta la información clasificada en cuatro categorías: disciplinas, terminología, relaciones y acciones, y propiedades. Por otro lado, se introducen dos subestructuras, números fraccionarios y números trascendentes, que, al cruzarse con las categorías anteriores, les permite producir una matriz en la que se organizan los fenómenos. En esta transparencia, el grupo presenta ejemplos específicos de fenómenos. La referencia explícita a las medidas y al sistema decimal de numeración desaparecen, aunque la mayoría de los fenómenos físicos propuestos se refieren a casos de medida (relacionados con el tiempo, la longitud y el volumen). Se incluyen también fenómenos matemáticos. La quinta transparencia (documento 39) es similar a la cuarta, excepto que se cambia la etiqueta “números trascendentes” por “números no fraccionarios”; se agrega dentro de esta categoría dos nuevas subestructuras, algebraicas y no algebraicas; y se introduce, en la categoría “números fraccionarios”, la subestructura “medidas conmensurables”.

Las transparencias 6 a 8 (documentos 58, 74 y 96) no hacen ninguna referencia a lo fenomenológico. El trabajo final (documento 124) presenta, de nuevo, una aproximación diferente. El análisis fenomenológico se divide en dos partes. En la primera, se presenta un mapa conceptual cuyo centro son tres subestructuras: exactos, periódicos y no periódicos. La parte inferior del esquema, identificada con la etiqueta “conceptual”, contiene tres términos, aproximaciones, porcentaje y fracción generatriz, todos conectados con la categoría “exactos”. Por otro lado, la parte superior se denomina “fenomenología” e incluye los siguientes términos: sistema monetario (conectado con aplicaciones y exactos), longitudes conmensurables (conectado con exactos, periódicos y fracción generatriz) e inconmensurables y estimaciones (conectados con no periódicos). Esta primera parte de la transparencia amerita varios comentarios. El grupo divide el análisis en dos partes, fenomenología y conceptual, propuesta que da a entender que no consideran los fenómenos matemáticos dentro del análisis fenomenológico. En el aspecto feno-

menológico regresan a la idea de medida, pero se restringen a la longitud, siendo que en transparencias anteriores habían tenido en cuenta tiempo y volumen. Aparecen las ideas de aproximaciones y estimaciones, y desaparecen las subestructuras por fraccionarios y no fraccionarios.

La segunda parte de la transparencia presenta ejemplos específicos de fenómenos sin ninguna relación con el mapa conceptual anterior. Se refieren a la práctica social de los números decimales y presentan ejemplos de diferentes tipos de usos: cotidiano, divulgativo, social, profesional y científico. Esta clasificación por usos, diferente de la clasificación por disciplinas, es muy posiblemente consecuencia del ejemplo de la unidad didáctica sobre números naturales presentada en clase.

Las transparencias de este grupo sugieren un esfuerzo particular por el trabajo en el análisis fenomenológico. La fenomenología aparece desde la primera transparencia en la que ya se identifica (a nivel intuitivo) una familia de fenómenos (medida). Las transparencias también muestran la preocupación del grupo por investigar en la literatura y seguir los ejemplos y los comentarios en clase. Esto se aprecia en la utilización de las ideas de la fenomenología didáctica en la cuarta transparencia y la idea de los usos de la noción en el trabajo final. Las subestructuras aparecen también en la cuarta transparencia y permiten organizar los fenómenos. Estas subestructuras cambian en el trabajo final en el que se da una separación entre el análisis estructural y la organización por usos. En ningún momento aparecen modelos específicos, ni se establecen relaciones explícitas entre fenómenos y subestructuras. Aunque el trabajo presentado por este grupo es rico en información y estructura, no es claro, por el contenido de la transparencia final, que el grupo haya desarrollado un significado muy avanzado de la noción.

Grupo probabilidad

Este grupo presenta un listado de fenómenos en la primera transparencia (documento 5.1), bajo la etiqueta “fenomenología”. La mayoría de los fenómenos se refieren a juegos de azar, aunque también hay fenómenos biológicos. Incluyen la bioestadística y la contabilidad. En la segunda transparencia (documento 5.2), la categoría se denomina “fenómenos”, y aparecen dos subcategorías separadas, juegos de azar y naipes, por un lado, y experimentos aleatorios, por el otro. En esta última, se incluyen monedas, urnas, lotería y dados. Desaparecen las referencias a la biología, la bioestadística y la contabilidad, y aparece un fenómeno denominado “teoría física nuclear”. Resulta curiosa la confusión que presentan al separar juegos de azar y naipes, por un lado, y los experimentos aleatorios, por el otro. Al parecer, ellos distinguen entre los fenómenos que pueden suceder en un casino, por ejemplo, de los experimentos que se pueden hacer en el aula.

En la cuarta transparencia (documento 17), se da una reorganización. De nuevo, la categoría se llama “fenomenología”, categoría dentro de la que vuelve a aparecer la bioestadística y se incluyen los experimentos aleatorios, que, ahora sí, contienen los naipes. Sin embargo, al mismo nivel que la fenomenología, y conectada con ella, aparece una categoría denominada “contexto” que incluye los juegos de azar y los naipes. Esta situación revierte en otro sentido la confusión que mencionamos para la transparencia anterior: ahora el grupo separa los juegos de azar de la fenomenología.

La quinta transparencia de este grupo (documento 27.2) es especial: se identifica una familia de fenómenos (juegos de azar); se hace un análisis estructural de un fenómeno específico perteneciente a esta familia en el que se identifican sus características estructurales; se identifica una subestructura con sus elementos y relaciones; y se establece la relación entre ellos. Este documento se utilizó como ejemplo durante la instrucción para las tareas posteriores. En la sexta transparencia (documento 38), el grupo presenta la misma información, mejorando la identificación de elementos y relaciones. En la sexta transparencia (documento 63), no hay ninguna referencia al análisis fenomenológico. En la transparencias 7 y 8 (documentos 70 y 93) aparece una actividad centrada en el lanzamiento de una moneda.

La última transparencia (documento 118) presenta una situación diferente de las transparencias anteriores. El análisis fenomenológico es muy simple y consiste únicamente en la organización de unos pocos fenómenos de acuerdo con cuatro contextos que el grupo llama “mundos”: biológico, físico, social y político. No se presentan modelos matemáticos, ni se proponen relaciones entre los fenómenos y subestructuras.

Las transparencias de este grupo tienen varias características. En primer lugar, se aprecia una confusión en la separación entre la fenomenología y los fenómenos relacionados con los juegos de azar, que el grupo ubica en el contexto. En las primeras transparencias, no se propone ningún tipo de organización de los fenómenos. En la quinta transparencia, este grupo presenta el análisis de una familia de fenómenos desde la perspectiva de describir en detalle la tripla fenómeno, subestructura y relación. No obstante, este esfuerzo no se expresa posteriormente en una organización de los fenómenos de acuerdo con subestructuras. De hecho, en la transparencia final, los fenómenos se organizan únicamente por disciplinas.

Grupo cónicas

La primera transparencia de este grupo (documento 10) incluye un apartado de fenomenología en el que aparece el término “pirámide” (cuyo significado no se entiende) y el tiro parabólico. En la segunda transparencia, desaparece la referencia a la pirámide y aparece la astronomía, con las leyes de Kepler, y el cálculo de áreas, volúmenes y longitud de cuerpos con secciones cónicas. En la tercera transparencia (documento 14), el grupo analiza cada una de las cuatro cónicas por separado. Para cada una de ellas, propone un fenómeno específico en el que el concepto aparece: tiro parabólico, el aro del hula-hoop, un juego con cuerdas y el movimiento de los planetas.

En la cuarta transparencia (documento 28) vuelve a aparecer la idea de cálculo de volúmenes y áreas y se propone una familia de fenómenos: la modelización del movimiento uniforme, en el que incluyen el tiro parabólico, la rotación y los movimientos planetarios y ondulatorios. La quinta transparencia (documento 34) tiene dos folios. En el primero, reorganizan la información ya propuesta en la transparencia anterior, estableciendo la conexión entre los fenómenos y las subestructuras correspondientes. En el segundo folio, describen en detalle la idea del cálculo de volúmenes. Se refieren al cálculo por integración, utilizando coordenadas polares, del volumen de un recipiente cilíndrico. Éste es en realidad un fenómeno matemático, aunque el grupo no es necesariamente consciente de ello. El

grupo realiza un análisis detallado de las características del fenómeno y propone el modelo matemático que permite resolver el problema correspondiente. Las transparencias 6 a 8 no hacen ninguna referencia al análisis fenomenológico.

El trabajo final (documento 111) presenta un análisis fenomenológico extenso. El apartado se encuentra organizado por disciplinas en las que aparecen los lugares geométricos correspondientes a las cónicas: ciencia y técnica, vida cotidiana y artes plásticas (arquitectura, escultura y pintura). Para los dos últimos, se presentan fenómenos en los que se reconoce la forma de una cónica. No obstante, en el primero encontramos una situación de análisis fenomenológico detallado. Es el caso de los fenómenos ópticos. El grupo describe las características estructurales del fenómeno, identifica los elementos y relaciones de la subestructura correspondiente y establece la relación entre ellos. Más adelante, hacen referencia a las leyes de la óptica que describen el fenómeno y se refieren a sus “aplicaciones”.

El trabajo de este grupo en el análisis fenomenológico presenta una progresión constante. De unos pocos ejemplos de fenómenos en las primeras dos transparencias, se pasa a una organización por subestructuras en la tercera transparencia y a la propuesta de una familia de fenómenos en la cuarta, hasta llegar a la descripción detallada de un fenómeno matemático con su correspondiente modelo matemático, en la quinta. Aunque la organización por subestructuras es opacada por la organización por disciplinas en el trabajo final, esta última transparencia se caracteriza por su completitud y su profundidad en el análisis de los fenómenos ópticos.

Grupo esfera

Desde la primera transparencia (documento 9.1), este grupo introduce el globo terrestre como tema central de su análisis fenomenológico. En esta transparencia identifican varios elementos (*e.g.* latitud, longitud, meridiano, polo, ecuador) de este fenómeno. Incluyen también los fenómenos relacionados con los modelos atómicos. Esta información se reorganiza en la segunda transparencia (documento 9.2). La tierra, con sus elementos cartográficos, aparece como un ejemplo de la familia de fenómenos que corresponden a los cuerpos celestes (se utiliza la etiqueta “ley de gravitación” para esta conexión). Se proponen dos categorías adicionales: los mapas y atlas, y fenómenos de la vida cotidiana (pompas de jabón, bóvedas y cúpulas). La tercera transparencia (documento 15) incluye la misma información, con la adición de conexiones entre las familias de fenómenos y elementos y relaciones de la estructura conceptual. Esta transparencia merece un comentario especial, puesto que este grupo realiza un análisis fenomenológico detallado en un momento de la asignatura en el que aún no se ha tratado el tema. De hecho, en esta transparencia los fenómenos están agrupados en familias. Para la familia de cuerpos celestes, se escoge la tierra como fenómeno específico y, para este fenómeno, se identifican algunos elementos estructurales (cartográficos). En el mapa conceptual propuesto, se establecen relaciones entre estos elementos y elementos de una subestructura de la estructura matemática que se describe en la estructura conceptual.

La cuarta transparencia (documento 29) presenta un análisis fenomenológico separado en dos partes. Por un lado, el fenómeno correspondiente al globo terrestre forma parte integral de la estructura conceptual y se representa, con sus diver-

tos elementos, de manera gráfica. Esta aproximación les permite establecer las conexiones entre varios de estos elementos y otros elementos de la estructura conceptual de la esfera. Por el otro lado, en otro folio, se organizan tres familias de fenómenos: forma (e.g., pompas de jabón, ojo humano), movimientos (e.g., cuerpos celestes, átomos), y esfericidad local (e.g., mapas, atlas, cúpulas). Esta organización por familias de fenómenos se repite en la quinta transparencia (documento 33). Adicionalmente, el grupo presenta un análisis fenomenológico detallado del proceso de localización de puntos en el globo terrestre. En este análisis, presentan explícitamente la identificación de las características estructurales del fenómeno, la descripción de la subestructura matemática y la relación entre ellos.

La sexta transparencia (documento 60) presenta un análisis de dificultades y errores centrado en la representación plana de la tierra. Se sugieren errores en la identificación de elementos del globo terrestre y su relación con elementos de la esfera (e.g., meridiano – diámetro). El grupo utiliza este trabajo en la séptima transparencia (documento 72) para proponer una actividad que busca abordar las dificultades relacionadas con el paso de la visión plana a la visión esférica. En la actividad de evaluación (documento 95), el grupo retoma parcialmente las mismas dificultades al proponer un problema sobre la distancia entre dos puntos del globo terrestre.

La transparencia final del grupo (documento 109) consta de una única transparencia en la que, por un lado, se presentan someramente cinco disciplinas en las que aparece el concepto (vida diaria, física, química, biología y geografía), y, por el otro, se repite el análisis fenomenológico de la localización de puntos en el globo terrestre.

Las transparencias de este grupo presentan una clara progresión en el análisis fenomenológico. Se caracterizan por tres cuestiones. Primero, desde la tercera transparencia aparece la organización por familias de fenómenos y el establecimiento de relaciones entre elementos de un fenómeno específico (el globo terrestre) y subestructuras de la estructura conceptual general. Esto último se logra incluso antes de que la instrucción lo haya sugerido en clase. Segundo, en la quinta transparencia realizan un análisis fenomenológico detallado del proceso de localización de puntos. Y tercero, el grupo, al mantener el tema de la tierra como hilo conductor de su trabajo, logra poner en juego los resultados de su análisis fenomenológico en las actividades relacionadas con errores, dificultades y evaluación.

Grupo función de segundo grado

En su primera transparencia (documento 7.1), este grupo introduce la función de “segundo grado” con la idea del área de un cuadrado. En la segunda transparencia (documento 7.2), aparece el tiro parabólico y las curvas de regresión. Observemos que este grupo comienza con un fenómeno matemático y que la idea de las curvas de regresión, en la siguiente transparencia, también es de ese tipo. La fenomenología se organiza en cuatro categorías en la tercera transparencia (documento 16): los fenómenos matemáticos de “áreas, volúmenes, triángulos rectángulos y la relación entre sus lados”, el “análisis de cónicas”, relaciones de espacio y tiempo y la modelización y solución de fenómenos en biología y ciencias sociales. El grupo separa los fenómenos físicos de los fenómenos biológicos y sociales, identifica una familia de fenómenos matemáticos (incurriendo en el error de incluir la idea

de volumen) e intuye la relación de la función de segundo grado con las cónicas, sin explicarla en detalle.

En la cuarta transparencia (documento 30), las ecuaciones de cónicas y cuádricas quedan clasificadas en una categoría que ahora sí se denomina “fenómenos de carácter matemático”. Las otras dos categorías continúan separando los fenómenos físicos (para los que se indican explícitamente los modelos matemáticos) de otra categoría que denominan “modelización de fenómenos”, en la que se incluyen las curvas de regresión de tipo parabólico. Esta separación sugiere que el grupo considera que no hay proceso de modelización para los fenómenos físicos y, por consiguiente, pone en evidencia un significado de ese proceso, en virtud del cual, modelizar significa buscar la ley natural que rige el fenómeno. Tal vez, ésta es la razón por la que incluyen dentro de la modelización de fenómenos a las curvas de regresión. Cuando esta ley ya se conoce y se tiene el modelo matemático a mano, entonces no hay modelización. Éste parece ser el caso de los fenómenos físicos.

La quinta transparencia presenta una organización similar (documento 36). Aparecen dos parejas de categorías. En la primera pareja, se tienen fenómenos físicos (mecánica general, movimiento de planetas y relatividad), y la “representación de fenómenos” (que incluye química, biología, construcción y regresión parabólica). En la segunda pareja, aparecen “fenómenos puramente matemáticos” (números singulares por ecuación cuadrática, análisis de cónicas, teorema de Pitágoras, interpolación polinómica) y los fenómenos relacionados con áreas de figuras geométricas. Ya no se habla de modelización de fenómenos, sino de representación de fenómenos y se incluyen modelos matemáticos para todos los fenómenos. Hay que anotar que el “análisis de cónicas” se incluye en los fenómenos puramente matemáticos y que, aunque el tema es la función de segundo grado, incluyen las trayectorias elípticas, como el ejemplo de los fenómenos relacionados con el movimiento de planetas.

La fenomenología no aparece en las transparencias 6 a 8 (documentos 65, 69 y 92), aunque la actividad propuesta para la transparencia 8, involucra la idea del área de un cuadrado. En la presentación final (documento 123), el grupo reorganiza la información. Ahora sólo hay dos grandes familias de fenómenos: los matemáticos y los no matemáticos. El tema del cálculo de áreas de figuras geométricas, que había ocupado un lugar de relevancia en las presentaciones anteriores, se reduce a un punto dentro de las relaciones cuadráticas en los fenómenos matemáticos. El análisis de las cónicas desaparece y, dentro de los fenómenos matemáticos, aparece la parábola como lugar geométrico, con mención a la propiedad reflexiva de la parábola. Los fenómenos físicos dejan de ser una categoría aparte y ahora se incluyen dentro de los fenómenos no matemáticos (que contienen las mismas categorías propuestas en la sexta transparencia). La referencia a la modelización o representación de fenómenos que aparecía en las transparencias anteriores se transforma en un nuevo apartado del trabajo denominado “fenomenología y modelización”. Aquí incluyen la misma información del análisis fenomenológico anterior, pero organizada en cinco categorías que parecen seguir una parte de la estructura conceptual: ceros de funciones cuadráticas, formas de expresión de funciones cuadráticas, gráfica de la función cuadrática, sistema de representación numérico y la parábola como lugar geométrico.

Este grupo organizó muy pronto la fenomenología en familias de fenómenos. Esta organización mantuvo, hasta el trabajo final, una separación entre fenómenos físicos y los otros fenómenos naturales y sociales, y otra separación entre los fenómenos matemáticos y el cálculo de áreas de figuras geométricas. En las últimas transparencias, el grupo introdujo los modelos matemáticos que corresponden a cada fenómeno, pero en ningún momento analizaron un fenómeno específico, ni establecieron su relación con una subestructura de su estructura matemática. A lo largo de todas las transparencias, se aprecia un uso del término “modelización” que no logra consolidarse en el trabajo final.

Grupo sistemas de ecuaciones lineales

En la primera transparencia de este grupo (documento 11.1), se presentan tres fenómenos: mezclas, móviles y aleaciones. A estos se agregan “problemas de índole relacionados con la vida cotidiana” en la segunda transparencia (documento 11.2). La fenomenología desaparece completamente de la tercera transparencia (documento 18). En la cuarta transparencia (documento 31), la fenomenología vuelve a aparecer con la misma información mínima de la segunda transparencia, a la que se le ha agregado una categoría de problemas geométricos sobre rectas.

La quinta transparencia (documento 37) contiene un poco más de información. El grupo no habla de fenómenos, sino de “problemas”. Y los clasifica en de optimización, físicos, geométricos, bancarios y de índole cotidiana. No hay ningún tipo de análisis y no se proponen modelos. En las transparencias 6 a 8 (documentos 64, 73 y 90) no hay ninguna mención a la fenomenología.

En el trabajo final (documento 117), el grupo propone un análisis fenomenológico más elaborado. Afirman que “la fenomenología de los sistemas de ecuaciones lineales viene dada por las situaciones que se explican por un número finito de magnitudes de forma que éstas se relacionan entre sí de forma lineal”. Y organizan los fenómenos de acuerdo con el número de magnitudes que intervienen: una o varias. La descripción es poco clara dado que no proponen ningún tipo de análisis. Clasifican los fenómenos de más de una magnitud en físicos y químicos, sociales y matemáticos. En los fenómenos físicos proponen algunas leyes naturales, pero no las relacionan con los fenómenos propuestos.

Como se aprecia en los comentarios anteriores, este grupo presenta un análisis fenomenológico poco desarrollado. Sus propuestas anteriores al trabajo final se restringen a una enumeración de fenómenos que llegan a clasificar de acuerdo con criterios diversos. No proponen modelos matemáticos y no hay ningún tipo de análisis fenomenológico.

Anexo N

CODIFICACIÓN DE LAS TRANSCRIPCIONES DEL GRUPO FUNCIÓN CUADRÁTICA

Los siguientes son los códigos que utilicé para codificar las transcripciones de las grabaciones de audio del trabajo por fuera del aula del grupo función cuadrática.

Compromiso Mutuo

Entorno

¿Qué ayuda?

Asignaturas

Asignaturas

Experiencia docente

Libros de texto

¿Qué molesta?

Identities

¿Cómo se definen?

¿Quién es bueno en qué?

¿Quién hace qué?

¿Quién sabe qué?

Relaciones

¿Qué acceso hay a la materialización?

Cómo se participa

Corrección de errores

Dirección discusión

Papel de líder

¿Cómo se compromete cada quien?

¿Cómo se relacionan las personas?

Significado

Significados que se descubren

Como

Cuales

Dificultades con significado

Búsqueda significado

Confusión

Existencia conflicto

Nombre

Resolución conflicto

Materialización

Eventos

Propuestas de significado que se adoptan

Como

Cuales

Propuestas de significado que se hacen

¿Cómo?

¿Cuáles?

Se hacen preguntas

Empresa conjunta

Condiciones externas

¿Cómo se adaptan a ellas?

Cuales

Discusión en clase

Comentarios a transparencias

Lo que dijo el profesor

Transparencias profesor

¿Cómo se responde a ellas?

Contenido

¿Qué se discute?

Contenido transparencia

Tópicos

¿Qué se justifica?

¿Qué se muestra?

¿Qué se valora?

Empresa y responsabilidades

¿Cómo se afina el compromiso?

¿Cómo se conforman las responsabilidades?

¿Cómo se define la empresa?

Repertorio compartido

Otros

¿Qué estilos de expresión se utilizan?

Rutinas de trabajo

¿Cómo se adoptan?

¿Cómo se crean?

¿Cuáles?

¿Cómo se utilizan?

Recursos para negociación de significado

¿Cómo se adoptan?

¿Cómo se proponen?

¿Cuáles?

Estructura conceptual

Complejidad

Criterios de organización

General

Nociones centrales

Uso coherente criterios

Fenomenología

Familias

General

Variedad fenómenos

Variedad subestructuras

Variedad Áreas

Variedad Tipos

Puesta en práctica

Cuál

Estructura conceptual

Fenomenología

Sistemas de representación

Dónde

Análisis de contenido

Diseño curricular general

Otros organizadores

Sesiones

Sistemas de representación

Conexiones

General

SRS como organizador
Variedad

Anexo O

EVALUACIÓN. HISTORIA DE UN CONFLICTO DE SIGNIFICADO

Los episodios de conflicto de significado forman parte central del proceso de negociación de significado. En el capítulo 10 analicé y caractericé este tipo de episodio. En este anexo presento un ejemplo detallado de un proceso de construcción de significado que se basa esencialmente en la existencia de una sucesión de conflictos de significado. Estos episodios tuvieron lugar durante la sesión en la que el grupo preparó el trabajo sobre evaluación. El líder no asistió a esta sesión y ésta puede ser una de las razones por las cuales la discusión tuvo una fluidez y continuidad que no aparece en otras discusiones. Por otro lado, al comienzo de la discusión aparecen dos posiciones claramente enfrentadas, basadas en visiones diferentes sobre la evaluación. Es posible que el tema de la reunión, la evaluación, siendo un elemento cercano de la experiencia como estudiantes de los miembros del grupo, haya también influido para que surgieran la variedad de propuestas y argumentos que encontré en las transcripciones. Otros temas, al ser más técnicos, no permitieron necesariamente que los miembros del grupo asumieran posiciones que considerasen propias.

En esta sesión se apreció un proceso detallado de construcción de significados sociales a partir de significados individuales. El compromiso mutuo con la empresa conjunta guió el proceso de negociación de significado. La participación fue intensa, y sólo al final se apreciaron eventos claros de materialización. En este sentido, la tarea misma motivó la construcción de significado. Hubo búsqueda de consenso, momentos de tensión, pero también respeto por las opiniones de los otros. En los momentos de tensión, quienes no participaron directamente en la discusión intervinieron y buscaron soluciones de consenso a los conflictos. Sin embargo, estos acuerdos parciales desaparecieron y el conflicto volvió a surgir en seguida. Uno de los dos miembros que participaron directamente en la discusión

buscó sustentar sus argumentos con nuevas ideas. Sin embargo, estas nuevas cuestiones tendieron a reavivar el conflicto. Al final se logró un acuerdo parcial.

En las transcripciones no es posible identificar con claridad a los participantes. Esto implica que en diferentes episodios hago referencia a cada uno con identificaciones diferentes. Por esta razón, en los comentarios a los episodios, identifico a los dos miembros del grupo que llevan la discusión como A y B y no mantengo sus identificaciones (P1, P2, etc.) dentro de los episodios.

La discusión comenzó con una exposición clara del conflicto. A no estaba de acuerdo con la idea de que evaluar fuese solamente poner una nota. El conflicto se refería, en este punto inicial, a la consideración de las respuestas erróneas a un ejercicio. Se logró entonces un acuerdo temporal, porque se aceptó considerar los razonamientos detrás de las respuestas. Sin embargo, en este punto, el centro de la discusión pasó a ser la evaluación de las respuestas correctas. Se dio un largo intercambio entre A y B. B consideraba que si la respuesta era correcta, no importaba el procedimiento y lo que importaba era únicamente la puntuación. Por su parte, A consideraba que se debía tener en cuenta el procedimiento porque era un indicativo de la comprensión del escolar. Con el propósito de sustentar su argumento, A introdujo las ideas de las “capacidades de los escolares”, de los “pareceres del profesor” acerca de estas capacidades y de la evaluación de un curso versus la evaluación de un ejercicio. Estas ideas, en cambio de aclarar las posiciones, generaron más conflicto y tensión en el grupo. En algunos de estos momentos de tensión, los otros miembros del grupo intervinieron, buscando apaciguar los ánimos y lograr un consenso. Se discutió entonces sobre la comparación de comentarios a diversos ejercicios. Surgió un acuerdo temporal, que desapareció en seguida. Los otros miembros sugirieron una solución: considerar las dos posiciones como complementarias. Esta propuesta, junto con el regreso a considerar también las respuestas erróneas, resolvió el conflicto y los miembros pudieron redactar la propuesta que presentarían en clase. A continuación presento algunos de los episodios que muestran el desarrollo de esta discusión.

Se trata de las sesiones sobre evaluación. El grupo ha identificado la tarea que tienen que realizar: establecer criterios para la evaluación de actividades. Desde un comienzo, A expone el conflicto: evaluar no es sólo poner una nota; es también averiguar si los escolares se han enterado [085,17513,18418]:

P4: Lo que hay que evaluar es la actividad (Hablan varios a la vez). Esta actividad; no con otro ejercicio.

P3: no, la actividad, se supone que ya está realizada.

P2: La actividad está realizada. Tú la tienes que evaluar, y para evaluarla, no es simplemente... Evaluar no es simplemente: doy una nota y ya está. Sino que tú, a lo mejor, aquí te han entendido todos. Pero tú a lo mejor les tienes que hacer una serie de pruebas o algo de eso, o tienes que ver algo para que... Date cuenta que en realidad se han dado, se han enterado.

P4: Ya, pero () otro ejercicio o, otro tipo de actividad.

Un poco más tarde, aparece otra versión del conflicto: si están equivocados, no importa cómo lo estén. A quiere diferenciar los errores en los que pueden incurrir

los escolares. Esta cuestión, que se discute ahora, desaparece por un tiempo y vuelve aparecer al final de la sesión. A le pide a B que exponga su argumento y resuelve parcialmente el conflicto: un error razonado es diferente de un error sin razonar [085,57278,57342] y [085,58515,59083]:

P2: Sigue, sigue, sigue.

P2: Sí que están equivocados; pero no es lo mismo el que se equivoca con un razonamiento medianamente lógico, que el que te suelta una cosa disparatada; no es lo mismo, Alberto (Hablan varios a la vez). Está equivocado, pero no es lo mismo, Alberto. No es lo mismo.

...

P3: Yo ya sé Bartolo por dónde va.

P4: ¡Ah!, yo también: por las burradas o no burradas (Hablan varios a la vez).

En seguida, A enfatiza los matices de los errores y B acepta que se miren los fallos en el razonamiento. Éste es un acuerdo temporal, que desaparecerá enseguida [085,59638,60062] y [085,60149,60712]:

P2: Casi siempre se evalúa nada más que lo bueno. Y hay que evaluar, dentro de lo malo, lo que es más malo y menos malo. Bueno, malo entre comillas, vamos. Por lo menos yo creo que es así. Es mi parecer, vamos.

P3: Pues podíamos poner que si la respuesta no es correcta.

P4: Miramos el grado de borricá.

P3: Miramos el grado de... Es que el grado de borricá (Hablan varios a la vez).

P4: No queda fino, ¿verdad?

...

P3: Es que es muy subjetivo eso.

P2: Miramos el grado de razonamiento a la hora de decir esa respuesta.

P3: No. Se tendrán en cuenta los fallos que haya cometido en el razonamiento para ().

Aunque a B le parece subjetiva la propuesta, no expresa un desacuerdo explícito. Pero, en este punto de la discusión se cambia de tema y se pasa de considerar las respuestas erróneas a una larga discusión sobre las respuestas correctas. Aquí aparece el conflicto. B afirma que si lo hacen bien, da igual y punto, mientras que A replica: el razonamiento puede dar información [085,67850,68486] y [085,68560,69109]:

P4: () criterios de evaluación. Primer criterio.

P3: Pues si el desarrollo es válido, consideraremos como correctos todos los razonamientos que hayan hecho.

P4: (), ¿no?

P3: Nosotros (Hablan varios a la vez). Y podemos poner (Hablan varios a la vez).

P4: (). Si el desarrollo es válido, se considerará...

P2: Espérate ().

P3: Pues que, si lo hacen bien, que nos da igual cómo lo hagan, ¿no?

...

P2: Nos da igual, pero nos puede hacer pensar también (No se entiende. Hablan varios a la vez). (), y se han basado simplemente en la actividad ().

P4: Pero si lo hacen multiplicando, también se ve.

P2: Que lo hacen multiplicando.

P1: No, pero si la haces con los cuadrados, también puede significar que...

En todo caso, A insiste en su posición: lo que se evalúa es la comprensión. Los otros miembros del grupo parecen estar de acuerdo con A [085,71483,72042]:

P2: Pero si es que tú no estás evaluando el ejercicio. Tú estás evaluando lo que él está entendiendo; no estás evaluando un ejercicio que tienes que puntuar y ya está.

Varias Personas: No, no.

P4: () como aplicación de lo que has aprendido.

P3: Tienes que evaluar (Hablan varios a la vez).

P4: $(x-5)$ es como $(x+(-5))$. Entonces.

P2: Es que, Bartolo. Es que tienes que evaluar.

P1: Lo que sabe el alumno.

P3: Lo que sabe; lo que tú has conseguido. Si tú has conseguido que no metan la pata, que es lo que ibas buscando.

El conflicto continúa apareciendo a lo largo de la discusión. A busca información sobre la comprensión y B no entiende esa posición. B acepta el argumento para la actividad anterior, pero no para este ejercicio. A insiste: hay que evaluar también el razonamiento, no sólo la validez. Pero B lo ve sólo como “aplicación” [085,72245,72653] y [085,72783,73489]:

P3: Pues ya está. Perfecto (Hablan varios a la vez).

P4: Aquí, sí. Yo la actividad anterior, vale. Pero aquí no.

...

P2: () Pero si hasta ahí estamos. Pero es que, si nos hemos quedado ahí, en que simplemente que no meta la pata, también puedes pensar... Es que no es sólo evaluar que no meta la pata; sino que es que luego haya Personas que tengan un razonamiento mucho mayor sobre los ejercicios

o sobre el problema que les hayas puesto, a otras personas que tienen una capacidad para razonar menor. Es que eso tendríais que evaluarlo. ¿Por qué vais a evaluar nada más que, simplemente, el que esté correcto o no sea correcto? (Hablan varios a la vez).

P4: () Porque esto lo veo yo como aplicación.

P3: Pero vamos a ver, Bartolo, vamos a ver.

P4: Esto lo veo yo como aplicación.

Poco después, el conflicto sobre las respuestas válidas se hace aún más claro. Los dos miembros que discuten entre sí no alcanzan a comprender la posición del otro. A interpreta la posición de B: evaluación implica puntuación. Pero B no está de acuerdo con esa interpretación. Él desvía la discusión y le pide a A que formule su argumento. A expone su posición: no es lo mismo que lo haga de una forma o de otra. Entonces, B establece el conflicto: a él sí le parece lo mismo. B piensa que A se está contradiciendo [085,75636,78277]:

P4: (). Cuanto más complicado sea el razonamiento, mejor evaluado.

P2: Si no es mejor evaluado (Hablan varios a la vez). Es que tú estás diciendo: evaluación... Estás, en todo momento, diciendo: evaluación, puntuación (Hablan varios a la vez).

P4: Pero, ¿quién está diciendo de puntuación?

P4: No, pero yo, es que estoy diciendo: el razonamiento es el que sea, porque es correcto.

P2: Pero si yo no te estoy diciendo que no sea correcto.

P4: () Pues entonces explícamelo tú (Hablan varios a la vez). Pero si no es eso, si no es eso, si no es eso. Entonces, ¿qué es?

P2: Pero si es que tú me estás diciendo que es que yo no lo considero. Yo, el resultado lo veo tan válido como uno, como otro, como el otro.

P4: Entonces, ¿qué quieres?

P2: Que el resultado es válido; pero luego, a mí no me parece lo mismo que me lo haga de una forma o que me lo haga de otra.

P4: Pues a mí sí me parece (Hablan varios a la vez).

P2: Aunque luego lo evaluéis del mismo modo (Hablan varios a la vez). Aunque luego yo ponga: 10, 10 y 10 (Hablan varios a la vez).

P4: Mirame. Que yo te estoy diciendo el razonamiento; el razonamiento, es tan válido uno como el del otro. Es el razonamiento, no la puntuación. ¿Por qué no va a ser un razonamiento igual que otro, de válido?

P2: Pero si válido te estoy diciendo yo que sí, Alberto.

P4: Pero si me has dicho antes que no. Me has dicho hace una chispa. Esto está grabado; esto está grabado. Me has dicho ahora mismo que no

es lo mismo un razonamiento que otro. Y ahora me está diciendo que sí es igual.

P2: No.

P4: Si quieres te pongo la cinta.

A continua insistiendo en su posición. Los demás parecen tan escépticos que él cree que los otros no quieren entender [085,83791,84383]:

P2: Entonces, luego tú, dentro de la evaluación —no tiene por qué ser mejor ni peor—, pero tú puedes ver: mira, esta persona me lo ha hecho aquí. ¿Qué me puede dar a entender? Que su razonamiento, o geométrico, o no sé qué, es para él más no sé cuántos? Esta otra persona me lo ha hecho de otra forma; pues éste ha intentado ser más sencillo, no sé qué, no sé cuántos. No simplemente verlo como una nota que tienen que dar, que es válido (Hablan varios a la vez). Joé, ¡yo qué sé! Yo no sé si es que no queréis entender, o que. ¡Yo qué sé! (Hablan varios a la vez).

La cuestión se vuelve más compleja en seguida porque A introduce la idea de “capacidades” para diferenciar razonamientos diferentes con respuestas igualmente válidas [085,85639,86165]:

P2: El razonamiento se lo voy a dar totalmente válido; igual. A lo mejor le doy más puntuación, si tuviera que darle alguna puntuación (Hablan varios a la vez). Pero luego yo, dentro (), no simplemente voy a evaluar el que tenga eso del todo bien y que haya conseguido el objetivo de que eso sea así, sino que luego, dentro de esa

PX: pues supongo yo que lo que sería bueno, era evaluar qué capacidades tienen unas personas más que otras. No simplemente el que hayan superado los objetivos.

Poco después reaparece la idea de que evaluar no es sólo puntuar. A B la idea de mirar capacidades le parece muy subjetiva. Los otros entienden y aceptan la idea de capacidades, pero ¿cómo evaluar? B está de acuerdo, pero considera que hay demasiada subjetividad al evaluar de esa manera. Pero A insiste: evaluar no es simplemente puntuar [085,90748,92573]:

P4: Pues entonces, ya tiene que ser. Vale, sí, yo te entiendo. Pero entonces tiene que ser distinto (Hablan varios a la vez). Te hace esta actividad con los cuadrados; dices: entonces ésta tiene mayor capacidad de abstracción; mayor no sé qué; mayor no sé cuántos (Hablan varios a la vez). Entonces te tienes que ir a lo otro: éste tiene mayor capacidad de simplicidad, tiene mayor... identifica mejor el a. Considera (x-a) como (x+(-a)).

PX: Pero, ¿por qué no puede ser eso evaluable?

P4: Pero tú eso, ¿cómo lo evalúas?

P2: Es que la evaluación no es simplemente puntuar.

P3: Es que... Vamos a ver (Hablan varios a la vez).

P4: Pero espérate. Es que eso... a mí me parece muy bien. Si yo también comparto eso. Pero es que hay que ser realistas, y tú, algo tan subjetivo no lo puedes evaluar.

El conflicto se acentúa. B regresa a la posición “si lo hace bien, ya está”. A insiste en que la evaluación no es simplemente la puntuación y B insiste: evaluar es la nota. [085,98666,100271]:

P4: Espérate, vamos a ver. Vamos a aclararnos. Hemos evaluado antes esta actividad. Ahora estamos evaluando el ejercicio $(x-5)^2$. $() (x-5)^2$ y tú te pones a hacer cuadrados. Yo no $()$. Yo lo veo así; yo me voy.

P2: Tú no te pones; tú no te pones, pero a lo mejor habrá gente que lo pueda hacer. Y si tú... Y si hay gente que te lo haga $()$.

P4: Pues si lo hace bien, pues bien. Ya está.

P2: $()$ Alberto $()$. Que las cosas están bien. Está una cosa tan bien, tan bien, tan bien. Y yo la valoraría con la misma puntuación a lo mejor. Lo que pasa que luego, dentro de la evaluación —la evaluación para mí no es simplemente la puntuación que tú le tengas que dar, aunque haya que ser realistas— (Hablan varios a la vez).

P4: Evaluar, al fin y al cabo, es la nota. Ya está.

En este punto, B insiste en su posición de mirar la evaluación como puntuación, pero asume una posición débil: “lo más posible es que esté equivocado” [085,102446,103494]:

P2: Yo he dicho que $()$ evaluar algo. No he dicho que con eso consigas la verdad. (Hablan varios a la vez).

P4: Tú has dicho antes que puedes llegar a que tenga éste mayor capacidad de abstracción. Y yo te estoy diciendo como ejemplo; no que sea eso. Te lo estoy diciendo con un ejemplo (Hablan varios a la vez). Es que evaluar, al fin y al cabo, es darle una nota; quieras o no es eso; una puntuación. O si no quieres una puntuación, una comparación; algo. Yo lo veo así. Lo mismo puedo estar equivocado. Por supuesto que lo más seguro es que esté equivocado, pero yo lo veo así.

Al reconocer la actitud de B, A asume una posición conciliadora y objetiva. Le hace ver a B que no está equivocado [085,103733,104558]:

P2: Pero, ¿quién te está diciendo que estás equivocado? Es que yo no estoy diciendo que tu razonamiento esté equivocado, sino que yo tengo un razonamiento y tú tienes otro. En el razonamiento, en ningún momento estás equivocado (Hablan varios a la vez), porque creemos, tanto uno, como otro, como los que estamos aquí, que los razonamientos son totalmente válidos unos u otros. Aparte que yo creo que también habría que evaluar la forma de hacer esos razonamientos.

En este punto se da una primera resolución del conflicto. B acepta, no muy convencido, que el comentario también es evaluación [085,107224,107659]:

P4: Es un comentario.

P1: Pero entonces, quieres hacer... Sí, vale (Hablan varios a la vez).

P2: El comentario es una evaluación. () según a lo que llames tú evaluación.

P4: Bueno, pues ya está. El comentario es una evaluación. Vale, pues ya está (Hablan varios a la vez).

Al llegar a este punto, aparece un nuevo tema. Se preguntan si se evalúa un ejercicio o un curso. Con motivo de este cambio, los otros dos miembros, que han intervenido poco, asumen una posición [085,107224,107659]:

P4: Es un comentario.

P1: Pero entonces, quieres hacer... Sí, vale (Hablan varios a la vez).

P2: El comentario es una evaluación. () según a lo que llames tú evaluación.

P4: Bueno, pues ya está. El comentario es una evaluación. Vale, pues ya está (Hablan varios a la vez).

Poco después, B insiste sobre su posición y se reaviva el conflicto: a él sólo le interesa el resultado. Se ha puesto correcto si el razonamiento es válido, cualquiera que sea. pero A replica: se necesita justificación; él no acepta sólo el resultado [086,2148,2519] y [086,2639,3328]:

P3: O sea, es decir.

P4: Nosotros hemos puesto: primer criterio, si el desarrollo es válido se considerará correcto el ejercicio, sea cual sea el razonamiento; si el razonamiento es válido, pues ya está. ¿No?

...

P2: pero... Sí, pero bueno. Pero si ponemos la justificación (). Es que. Es que, si lo dejas así, lo que estás diciendo es que lo único que vas a mirar va a ser.

P1: El resultado.

P2: El resultado. Y yo por ahí no paso.

P1: Pues por ahí pasaba yo antes. Estabais diciendo que sí.

...

P1: No, eso es lo que habéis dicho antes exactamente.

P4: ().

P1: Habéis dicho: si el razonamiento no sé qué () ser válido, el razonamiento es válido, ya está; pun, catapún, chimpún (Hablan varios a la vez).

P4: No, no, no.

En este punto, se genera mucha discusión. Ya no se sabe qué es lo que se ha acordado con anterioridad [086,4023,5188]:

P2: Si es que estamos.

P3: Es que estamos mareando la perdiz. Estamos mareando la perdiz.

P1: Pero es que antes no estábamos mareando la perdiz. Que es que lo más gracioso, Antonio, es que antes no estábamos mareando la perdiz. Que es que antes habíamos dicho () exactamente y ya se terminaba: si el desarrollo es válido, se considerará correcto el ejercicio, sea cual sea el razonamiento. O sea que, ahí no nos habíamos metido en nada de comentarios (Hablan varios a la vez). Que al fin y al cabo, lo que estáis diciendo vosotros es lo que estoy diciendo. Vosotros lo queréis llamar de una forma y yo lo quiero llamar de otra forma, y ya está.

PX: Pues eso ().

P1: Pero es que antes no se estaba diciendo. No me digáis que sí () es lo que se estaba diciendo, porque no (Hablan varios a la vez); porque me habéis dado la razón antes hace un momento, y ahora ya me la estáis quitando.

P3: No.

P1: Pero al fin y al cabo es lo que yo estaba diciendo.

P3: Que sí. Si es lo que yo estoy diciendo (Hablan varios a la vez).

La tensión aumenta. A amenaza con salirse de la discusión, porque no quiere que se le de la razón sin argumentos [086,7027,7459]:

P4: Bueno, te estoy diciendo que, de un ejercicio, qué conclusiones puedes sacar tú.

P1: ¡Ea!, pues ninguna, pues ya está. Pues no saquéis ninguna conclusión.

P4: Pero no; pero no me des la razón como a los locos o como a los tontos. Dime por qué. Si me convences, pues ya está.

En este momento, los otros miembros intervienen para interpretar las posiciones y buscar un consenso. La tensión sube cuando uno de ellos piensa que se están burlando de él [086,8189,9788]:

P4: ¿O no? Entonces, ¿a qué te refieres tú?

P3: Que sí, vamos a ver.

P1: Las conclusiones y lo que está diciendo (), ¿qué es?

P2: Es lo mismo.

P1: Lo que pasa es que tú lo quieres llamar de otra forma, y ya está.

P4: Pero, ¿cómo? Pero si esto () a justificarlo.

P3: A ver, Alberto. Si es que prácticamente es lo mismo. Él lo hace a posteriori y éste lo hace a priori. Es decir: él dice: te pongo esto porque me has hecho esto, esto, esto y esto; y él dice: le pongo esta nota, y ob-

servo que me ha hecho esto, esto y esto. Es que es lo mismo, pero uno lo hace antes y el otro ().

P4: No, no. No te rías, Bartolo, ¡coño! Me estás tocando. De verdad que esto no me gusta a mí ni un pelo.

P1: Pues no me gusta a mí que te pongas aquí a eso; porque, como a ti te están dando la razón, ya eres...

P4: Pero, ¿a mí por qué me están dando la razón? Si a mí no me están dando...

P1: A mí lo que me jode es que luego (): es que no sé qué del cazurro; el cazurro eres tú o eres no sé qué. Pues si soy el cazurro, pues me voy para allá, y ya está.

P4: ¿Quién está diciendo el cazurro? Estoy diciendo que la fama de cazurro y de que no se entera, soy yo, no tú.

P1: Eh, que eso de la fama. Eso. Eso lo dices tú (Hablan varios a la vez).

Entonces el conflicto sobre la importancia de las conclusiones a la evaluación de los ejercicios reaparece con fuerza. B insiste en que de un ejercicio no se pueden sacar conclusiones. Con el propósito de explicar su argumento, A introduce la idea de “pareceres” del profesor. Entonces, B trata de redirigir la discusión para hacer la transparencia. Aparece una nueva tensión: B dice que no se entienden el uno al otro. A reacciona, busca consenso y asume posición [086,15188,17622]:

P3: Que es lo que dice Bartolo en cierto modo. Bartolo está diciendo de poner una nota y (Hablan varios a la vez).

P4: () justificarlo, y lo que ha dicho ahora mismo él es decir otra cosa.

P1: Que es lo mismo, contra, que es lo mismo, Alberto; no seas cerrado, tío.

P4: (). Yo no lo veo lo mismo, tío. Tú has sacado una conclusión.

P1: Que es lo mismo; lo que pasa es que luego yo he añadido que luego esas conclusiones te pueden valer a lo largo de un curso. Pero al fin y al cabo, es lo mismo. () unas conclusiones.

P4: Ea, pues yo te digo que no (Hablan varios a la vez). Ea, pues yo te estoy diciendo que a partir de un ejercicio, que no sacas esas conclusiones.

P1: Pero si es que tú no sacas conclusiones. Tú puedes tener unos pareceres. Que luego esas conclusiones sean válidas, te lo harán después otros ejercicios. Pero esas conclusiones () totalmente.

P4: Unos pareceres (). Si me vienes con cosas nuevas... Vale, ya está. Vamos a hacerlo.

P1: Es que no... Es que no. No, no. Si me vienes con cosas nuevas, no. Es que eso es, es lo que llevo diciendo desde hace... Bueno: (Hablan varios a la vez).

P4: ¿Cómo que no? No te quiero entender, no. No te pongas así, porque no. Tú has dicho una cosa, y yo te entiendo esa cosa: lo que me dices.

P3: Pero vamos a ver. Pero si es que, estamos mareando la perdiz. Si es que lo que está diciendo Bartolo, que lleva diciendo desde el principio, yo digo lo que Jose: yo al principio no lo entendía. Cuando ya he entendido lo que quiere decir, estoy de acuerdo. Es decir: que no se trata de sacar unas conclusiones, es que...

Esta reaparición del conflicto genera malestar dentro del grupo. A trata de organizar la discusión y regresan a un consenso previo: hay un criterio para cada razonamiento válido. [086,18874,20118]:

P2: Pero vamos a ver, Bartolo. Pero lo de llevar a pensar. Pero lo de llevar a pensar (Hablan varios a la vez).

P3: Vale, pero es que estamos... Pero vamos a ver. Si es que así nunca vamos a llegar a ningún sitio (Hablan varios a la vez). Porque si uno dice: ¿Por qué no?, y el otro, y ¿por qué sí? (Hablan varios a la vez).

P2: Pero bueno, si (Hablan varios a la vez). Si lo que queremos es... Lo que queremos es evaluar ese ejercicio. Pues bueno: ya está. Tenemos, para cada tipo de razonamiento válido, un criterio de evaluación. Y ya está.

P4: Ea, pues yo eso sí lo veo bien (Hablan varios a la vez). Y llevamos media hora diciéndolo.

P1: Pues entonces ya está terminado.

P3: Venga, pues ya está. (Hablan varios a la vez).

P1: Mira (). Se considerará correcto el ejercicio, sea cual sea el razonamiento (Hablan varios a la vez).

P4: ().

P1: Es lo mismo; es lo mismo. Sea cual sea el razonamiento.

Pero el conflicto permanece y, para aclararlo, A le pide a B que formule explícitamente su posición [086,26027,26566]:

P2: Entonces, vamos a ver, Bartolo. Entonces, según tú, ¿qué es lo que habría que hacer aquí?

P1: Yo ya lo he dejado claro.

P4: No, no, ahora quiero yo que lo dejes (Hablan varios a la vez). No, no, no me vale. Quiero que lo dejes claro, para ver si me parece todavía mejor. (Hablan varios a la vez). Pues dímelo; dímelo; dímelo. Pero dímelo. (Hablan varios a la vez). No, no, no me parece bien. Pues yo quiero que tú me... Bueno: pues yo quiero que me expliques lo que tú quieres, para yo enterarme bien, bien, bien.

En este punto, aparece una nueva idea. Se trata de la evaluación continua de un curso. Esta idea introduce ruido y genera un nuevo evento de tensión dentro del

grupo. Los dos miembros que no participan directamente en la discusión buscan que el ambiente se tranquilice, asumiendo como válida la posición de uno de los dos miembros que discuten. Hay tensión, pero, entre todos, se reduce. A insiste: aunque sea de un ejercicio, se deben hacer comentarios. [086,31056 31952]:

P4: Pero, ¿cómo que evaluación continua? ¿Qué evaluación continua? Aquí nadie está hablando de curso (Hablan varios a la vez). No, no, no me estoy alterando; estoy bien (Hablan varios a la vez).

P3: No, hombre. Pero vamos a tranquilizarnos todos un poco. Por ejemplo, lo que te estoy diciendo. Que no se. Tú me estás diciendo: ¿pero para qué la evaluación del curso, si...? Es verdad. Es que llevas razón. Tenemos que evaluar un ejercicio en concreto.

P3: No, hombre. Pero vamos a tranquilizarnos todos un poco. Por ejemplo, lo que te estoy diciendo. Que no se... Tú me estás diciendo: ¿Pero para qué la evaluación del curso, si...? Es verdad. Es que llevas razón. Tenemos que evaluar un ejercicio en concreto.

P4: Pues ya está (Hablan varios a la vez).

P3: Pero eso no quita que () hablemos en los comentarios. Aquí...

En este punto, surge la idea de comparación de comentarios de ejercicios. A logra mostrar que uno de los propósitos de hacer comentarios, es poder compararlos cuando se evalúen varios ejercicios. Esta idea parece conducir a una resolución temporal del conflicto [086,42271,43406]:

P4: Es que yo no estoy diciendo eso; es que yo no estoy diciendo eso. Es que yo estoy diciendo que (Hablan varios a la vez). Que te haces un comentario, luego tienes que hacer más. Pero entonces, ¿por qué tienes que hacer...? Si nada más que estamos en un ejercicio, no tienes que hacer ningún tipo de comentario. Si luego vas a realizar de posterior más, más ejercicios, vale, claro; porque tienes que contrastar y tienes que tener información. Eso sí lo veo. Si es que eso sí lo veo.

P1: ¡Pues no lo veías antes!

P4: ¿Cómo que no? Pero si estoy diciendo que sí. Si lo que no digo es que. En un ejercicio, que no puedes sacar ningún tipo de conclusión (Hablan varios a la vez).

P1: Es que yo tampoco te he dicho que puedas sacar conclusiones. Yo te he dicho que he puesto un comentario, que será verdad o no será verdad.

P4: (). Entonces, ¿qué has dicho? Tú no has dicho nada en toda la tarde (Hablan varios a la vez).

Sin embargo, ésta es una resolución aparente del conflicto. La tensión vuelve a surgir y B sugiere dejar su posición, para “no complicarse la vida”. A replica que no, la discusión no se puede dejar porque les interesa hacer el trabajo lo mejor posible [086,46917,47570]:

P2: () que si ahora quieres evaluar cómo se ha hecho el ejercicio. Es que estamos. Son dos puntos de vista.

P4: Estamos confundiendo las cosas, creo yo.

P2: Si quieres evaluar los resultados de la actividad, o si quieres ahora cómo se ha hecho el ejercicio.

P4: O el resultado y cómo se ha hecho.

P2: (). Así que hay que decantarse ().

P1: Mira, dejarlo así, tío. Tampoco nos vamos a complicar la vida.

P4: No. Hay que hacerlo lo mejor posible. Y ya está.

P1: Pero si es que no se trata de que haya una cosa mejor posible o mejor posible (). Ya está; no nos compliquemos la vida (No se entiende. Hablan varios a la vez).

A encuentra entonces un nuevo argumento: toma el esquema utilizado por uno de los profesores de la asignatura como ejemplo del tipo de evaluación que él está defendiendo [086,47850,50924]:

P4: Si es que no hay ninguna puesta. Si es que no digas: más no (Hablan varios a la vez).

P1: Pues lo que hemos dicho anteriormente: que si la... Que la forma de... ¡Joé! Si la respuesta es correcta, el... Si la respuesta es correcta, pues nos parecerá totalmente válido, siempre que el razonamiento sea... Lo que habías puesto antes, en la primera frase.

P4: Vamos a ver: ¿Tú qué dices?

P3: Yo es que...

P4: Lo que tú pienses, y ya está. Es que...

P3: No, pero si ya lo he dicho antes, vamos. Yo me... Lo... por ejemplo: ¿Cómo nos evalúa Pedro todo lo que le entregamos? ¿Nos pone nota?

P4: No, no.

P3: ¿Y es una evaluación? ¿A nosotros nos sirve?

P4: Sí, pero.

P3: Más que si nos pone una nota.

P4: Pero está comparando, o nos da su opinión.

P3: Pero nos está evaluando (Hablan varios a la vez). ().

P4: Que sí, que sí.

P3: Y va viendo..., pues la capacidad que tenemos de (), la capacidad que estamos teniendo de crear y relacionar conceptos y... ¿qué te crees? Que él, cuando corrige, cuando nos manda las actividades, más o menos ya tiene hechos los criterios de evaluación que va a tener. Es decir: pues yo quiero, más o menos, que me lleguen a esto. Ahora, cuando se encuentra con lo que se encuentra, porque a saber lo que le entregamos... De lo que le entregamos a lo que él quiere, habrá un mundo.

P1: Y además, es que () tiene que...

P3: Pues también, pero... (Hablan varios a la vez). El comentario es una evaluación. Entonces —y ahí voy, ahí voy—. Un momento (Hablan varios a la vez). Un momento; y ahora lleva razón Jose; y ahora engancho con lo que decía Jose. Dice: ¿Qué estamos puntuando? ¿Qué ¿Lo que pretendíamos los profesores se ha llegado a conseguir, es decir, el resultado? Es decir: si Pedro. O sea, Pedro, ¿qué puntuaría? ¿Que llegamos a donde él quiere que llegásemos, o...? (Hablan varios a la vez).

P1: () que nosotros estamos juzgando simplemente la actividad anterior, y entonces, los otros dos razonamientos no te parecen tan válidos como el ().

Los otros miembros del grupo sugieren entonces una solución al conflicto. Se proponen dos criterios que se consideran complementarios: corrección y formas de hacer el ejercicio [086,52289,53321]:

P2: () razón Bartolo. Que si tú lo único que quieres. Es que tenemos dos criterios. Pues bueno: pues vamos a poner dos criterios de evaluación. Un criterio. Un primer criterio es: si verdaderamente han asimilado esto. ¿Esto cómo se hace? Pues viendo que no cometen el error ese. Y un segundo criterio es cómo resuelven el ejercicio; y en el segundo criterio, esto es lo que dice Bartolo. Es que hay tres. Hemos... Sabemos tres formas de hacer el ejercicio, que son tres formas completamente distintas, y en las tres formas se utilizan unos aspectos y otros. Y que eso son dos cosas completamente distintas: una cosa sería evaluar si verdaderamente se ha llegado a...

Finalmente, se regresa a la cuestión de las respuestas erróneas al ejercicio, cuestión con la que había comenzado la discusión. Al hacerlo, se resuelve el conflicto. El grupo está de acuerdo en que el procedimiento es importante [086,65332,65884]:

P4: Espérate. Vamos a hablar esto. Si el resultado es... (Hablan varios a la vez).

P1: () cuando hemos dicho lo de: cuando una pregunta es errónea, no es lo mismo que te lo dé de una forma, que te lo dé de otra. ¿Cómo voy ahora a contradecirte? Es lo mismo que ().

Logran entonces un consenso para redactar el resultado de la discusión [086,67178,68846]:

P4: Y añadiríamos...

PX: ().

P1: y añadiríamos...

P4: Algún tipo de comentario, ¿no?

P1: Algún tipo de comentario referente a los razonamientos que utiliza cada persona. Y luego lo otro, es que está claro; es lo que dice Jose () lo que hemos dicho antes. Cuando hemos intentado ver lo de los criterios,

es lo que hemos dicho antes, lo que hemos dicho antes (Hablan varios a la vez).

P3: Dependiendo del método de resolución ().

P4: Ahora. Segundo criterio (Hablan varios a la vez). Si el resultado.

P3: ().

PX: Sí.

P3: Lo ponemos.

P4: Si el resultado es incorrecto.

P3: Le ponemos una pegatina, ¿no?, y le ponemos: primera hora.

P4: Si el resultado es (No se entiende. Hablan varios a la vez).

P3: Dependerá del método, ¿no?

P2: Espérate. ¿Cómo lo expresamos?

P1: ().

P2: Se valorará cada método individualmente.

P1: Cada método individualmente.

PX: ¿No?

PX: ¿Y?

P4: ().

P2: Y la valoración de cada razonamiento dependerá del tipo de error...

P1: Que se haya cometido.

P2: () con el método que se ha utilizado.

P1: Claro. Si eso es. Si eso es lo mismo que hemos dicho anteriormente cuando estábamos ().

P2: Los tres métodos, no los vamos a describir, ¿no?

P1: No. Si no tienes por qué describir los tres métodos.

P2: Y si te preguntan (). Ya hemos terminado.

P4: Y si la () de cada razonamiento depende del tipo (Hablan varios a la vez).

P3: ().

P4: Cometido.

P2: Es que esta discusión...

P4: ¿Ya?

P2: ¿Ya está? ¿Se aprueba la moción?

P3: ¡Ea! Corta.

P2: Ya está. ¡Ale!

Anexo P

PRODUCCIÓN ACADÉMICA 2000-2007

- Gómez, P., González, M. J., Gil, F., Lupiáñez, J. L., Moreno, F., Rico, L. y Romero, I. (2007). Assessing the relevance of higher education courses. *Evaluation Program and Planning*, 30(2).
- Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA*, 1(2), 79-98.
- Gómez, P. (EnPrensa). Complejidad de las matemáticas escolares y diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje con tecnología. *Revista EMA*.
- Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (EnPrensa). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en Pensamiento Numérico: un Homenaje a Jorge Cázares Solórzano*. Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca: Instituto de Estudios Aragoneses.
- Gómez, P. (2006). Diversidad en la formación de profesores de matemáticas: en la búsqueda de un núcleo común. *Revista EMA*, 10(1), 242-293.
- Gómez, P. (2006). Introducción. En COMPARTIR (Ed.), *Nuestros mejores maestros. Experiencias educativas ejemplares. 1999* (pp. 10-13). Bogotá: Autor.
- Gómez, P. (2006). La planificación: una competencia fundamental del profesor. *Palabra Maestra*, 12, 6-7.
- Gómez, P. (2006). Programa de revistas de la APA. *Indivisa*, IV, 211-213.

- Gómez, P. (2006). Publicación de artículos en inglés: la forma es importante. *In-divisa, IV*, 139-143.
- Gómez, P., Lupiáñez, J. L., González, M. J., Moreno, M. F., Gil, F., Rico, L. y Romero, I. (2006). Caracterización y evaluación de diseños de planes de formación inicial de profesores de matemáticas en el marco del espacio europeo de educación superior. En J. L. Benítez y A. B. García (Eds.), *La universidad ante el reto del espacio europeo de educación superior: Investigaciones recientes*. Granada: Universidad de Granada.
- González, M. J., Moreno, M. F., Gil, F., Gómez, P., Lupiáñez, J. L., Rico, L. y Romero, I. (2006). Relevancia de planes de formación inicial de profesores de matemáticas. *PNA, 1*(1), 3-20.
- Gómez, P. (2005). *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Gómez, P. (2005). *Formación de profesores de matemáticas de secundaria. ¿Qué matemáticas para la enseñanza?* Trabajo presentado en XV Congreso Nacional de Matemáticas, Bogotá.
- Gómez, P. (2005). *Quality of secondary preservice mathematics teacher education programs*. Trabajo presentado en Seminario Internacional sobre Participación en Programas Europeos de Postgrado e Investigación Educativa, Granada.
- Gómez, P. (2005). *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Gómez, P. (2005b, 11 de agosto de 2005). *Formación de profesores de matemáticas de secundaria. ¿Qué matemáticas para la enseñanza?* Trabajo presentado en XV Congreso Nacional de Matemáticas, Bogotá.
- Gómez, P. (2005). *Quality of secondary preservice mathematics teacher education programs*. Trabajo presentado en Seminario Internacional sobre Participación en Programas Europeos de Postgrado e Investigación Educativa, Granada.
- Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2005). *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, Oporto, Portugal.
- Gómez, P. y Rico, L. (2005). Learning within communities of practice in preservice secondary school teachers education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1473-1482). Sant Feliu de Guíxols: FundEmi.
- Gómez, P. y Salazar, R. M. (2005). Maestros: ¿artesanos o profesionales? En COMPARTIR (Ed.), *Nuestros mejores maestros. Experiencias educativas ejemplares. Las ideas, los procesos, las personas* (pp. 22-34). Bogotá: Fundación Compartir.
- González, M. J., Moreno, M. F., Gil, F., Gómez, P., Lupiáñez, J. L., Rico, L. y Romero, I. (2005). *Relevancia de planes de formación inicial de profesores de matemáticas*. Trabajo presentado en V CIBEM, Porto.

- Lupiañez, J. L., Rico, L., Gómez, P. y Marín, A. (2005). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congreso Ibero-Americano de Educação Matemática, Oporto, Portugal.
- Gómez, P. y Rico, L. (2005). *Learning in secondary preservice teacher education from the communities of practice perspective*. Trabajo presentado en The Fifteenth ICMI Study, Aguas de Lindóia.
- Bishop, A. J. y Gómez, P. (2004). *Mathematics education in society and culture*. Trabajo presentado en 10th Internacional congreso on Mathematical Education (ICME 10), Copenhagen.
- Gómez, P. (2004). *Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas*. Trabajo presentado en X Jornadas de investigación en el aula de matemáticas, Granada.
- Gómez, P. (2004). *Designing a research methodology based on a theory of learning: a practical case in teacher training*. Trabajo presentado en Master Course, Aalborg.
- Gómez, P. (2004). Investigación en "una empresa docente". *Revista EMA*, 8(3), 261-275.
- Gómez, P. y Rico, L. (2004). Didactical knowledge development of pre-service secondary mathematics teachers. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 471-478). Bergen: Bergen University College.
- Gómez, P. y Rico, L. (2004). *Integration of didactical knowledge and mathematical content knowledge in pre-service teacher training*. Trabajo presentado en Discussion group "The Education of mathematics teachers" of the 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen.
- Gómez, P. y Valero, P. (2004). Algunas reflexiones sobre el ICME 10 y el PME 28. *Revista EMA*, 9(2), 165-172.
- González-López, M. J., Gil, F., Moreno, M. F., Romero, I., Gómez, P., Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2004). Generic and specific competences as a framework to evaluate the relevance of prospective Mathematics teachers training syllabuses. En M. J. Hoines (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference oh the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. Vol I 305). Bergen: Bergen University College.
- Rico, L., Gil, F., Gómez, P., González, M. J., Lupiañez, J. L., Moreno, M. F. y Romero, I. (2004). Quality in mathematics teachers training syllabuses. En M. J. Hoines (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference oh the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. Vol I 341). Bergen: Bergen University College.
- Gómez, P. (2003). Teorías de aprendizaje y formación de profesores. En J. Gutiérrez, A. Romero y M. Coriat (Eds.), *El prácticum en la formación inicial del profesorado de magisterio y educación secundaria: avances de investigación, fundamentos y programas de formación* (pp. 459-467). Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P. y Rico, L. (2003). De un conocimiento técnico a su puesta en práctica: desarrollo del conocimiento didáctico de futuros profesores de matemáti-

- cas de secundaria. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en educación matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)* (pp. 237-246). Granada: Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2003). Intuiciones de futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre el aprendizaje de las matemáticas. En J. Gutiérrez, A. Romero y M. Coriat (Eds.), *El prácticum en la formación inicial del profesorado de magisterio y educación secundaria: avances de investigación, fundamentos y programas de formación* (pp. 151-158). Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L., Gómez, P., Moreno, M., Romero, I., Lupiáñez, J. L., Gil, F. y González-López, M. J. (2003). Indicadores de calidad para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en educación matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)* (pp. 289-297). Granada: Universidad de Granada.
- Cañadas, C., Castro, E. y Gómez, P. (2002). Didactical reflections about some proofs of the pythagorean proposition. En A. D. C. E. N. (Eds.) (Ed.), *Proceedings of the 26th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*. Volume 2 (pp. 371). Norwich: University of East Anglia.
- Gómez, P. (2002). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En M. C. Penalva y G. Torregosa (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 341-356). Alicante: Universidad de Alicante.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P. (2002). Desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas: el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 171-179). Almería: Universidad de Almería.
- Gómez, P. (2002). *Theory and practice in pre-service mathematics teacher education from a social perspective*. Trabajo presentado en Third International Mathematics Education and Society Conference, Copenhagen.
- Gómez, P. (2002). Theory and practice in pre-service mathematics teacher education from a social perspective. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Mathematics, Education and Society. Third International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 326-335). Copenhagen: The Danish University of Education.
- Gómez, P., Cañadas, C. y Peñas, M. (2002). Llegar a ser profesora de matemáticas. Reflexiones desde una perspectiva sociocultural. En M. C. Penalva, G. Torregosa y J. V. Coords (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 471-484). Alicante: Universidad de Alicante.

- Gómez, P. y Rico, L. (2002). Didactical analysis and planning of school tasks in preservice mathematics teacher training. En D. S. Mewborn, White, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3)* (pp. 1214-1217). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Carulla, C. y Gómez, P. (2001). Mathematics teachers didactical development and the quadratic function. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. I-391). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Gómez, P. (2002). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En M. C. Penalva y G. Torregosa (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 341-356). Alicante: Universidad de Alicante.
- Gómez, P. y Rico, L. (Eds.). (2001). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2001). Base de datos de documentos PNA. En M. Ortiz (Ed.), *V Reunión Científica Nacional de PNA (SEIEM)* (pp. 78-82). Palencia: Universidad de Valladolid.
- Gómez, P. (2001). Conocimiento didáctico del futuro profesor de matemáticas al inicio de su formación. En F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico y J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1851-1864 Vol. 1852). Granada: Grupo Editorial Universitario.
- Gómez, P. (2001). Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas. En F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico y J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1245-1258 Vol. 1242). Granada: Grupo Editorial Universitario.
- Gómez, P. (2001). Desarrollo didáctico de los futuros profesores de matemáticas. Proyecto para una tesis. En M. Ortiz (Ed.), *V Reunión Científica Nacional de PNA (SEIEM)* (pp. 86-95). Palencia: Universidad de Valladolid.
- Gómez, P. (2001). Investigación en una empresa docente. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 27-38). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Gómez, P. y Carulla, C. (2001). Students conceptions of cubic functions. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (III)* (pp. 57-64). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Gómez, P. (2001). Investigación y educación matemática desde una perspectiva internacional. En J. Berenguer, B. Cobo, J. M. Navas y J. M. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Retos de la educación matemática del siglo XXI* (pp. 119-123). Granada: Facultad de Ciencias de la Educación.

- Gómez, P. y Carulla, C. (2001). Desarrollo didáctico de los profesores de matemáticas. El caso de los sistemas de representación y la función cuadrática. *Educación Matemática*, 13(2), 31-53.
- Gómez, P. y Carulla, C. (2001). Enseñanza constructivista, conocimiento didáctico del profesor y análisis didáctico en matemáticas. El caso de la función cuadrática. En M. L. Tirado (Ed.), *Educación en matemáticas*. Bogotá: IDEP.
- Gómez, P. y Carulla, C. (2001). *Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Gaia.
- Gómez, P. (2000). Investigación en educación matemática y enseñanza de las matemáticas en países en desarrollo. *Educación Matemática*, 12(1), 93-106.
- Gómez, P. (2000). Los organizadores del currículo en matemáticas. *Revista EMA*, 5(3), 267-277.
- Gómez, P. (2000). Traducción del francés al español del libro Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: una empresa docente.
- Gómez, P. y Waits, B. (Eds.). (2000). *Papel de la calculadora en el salón de clase*. Bogotá: una empresa docente.